

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR MARIA DAS GRAÇAS
ENRIQUE DA SILVA F. APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 31 07 2001


ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Estudo Numérico da Fusão ao Redor de um Cilindro Horizontal Incluindo os Efeitos Convectivos

Autora: Maria das Graças Enrique da Silva

Orientador: Kamal Abdel Radi Ismail

CO-Orientador: Luiz Felipe Mendes de Moura

61/2001



200205537

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA TÉRMICA E FLUIDOS**

Estudo Numérico da Fusão ao Redor de um Cilindro Horizontal Incluindo os Efeitos Convectivos

**Autora: Maria das Graças Enrique da Silva
Orientador: Kamal Abdel Radi Ismail**

**Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Térmica e Fluidos**

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

**Campinas, 2001
S.P. - Brasil**

**UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL**

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	TIUNICAMP
	Si 38e
V.	Ek
TOMBO BC/	47392
PROC.	837/02
	C <input type="checkbox"/> D <input checked="" type="checkbox"/>
PREC. R\$	11,00
DATA	04-02-02
N.º CPD.	

CM00163314-5

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Si38e Silva, Maria das Graças Enrique da
Estudo numérico da fusão ao redor de um cilindro horizontal incluindo os efeitos convectivos / Maria das Graças Enrique da Silva. --Campinas, SP: [s.n.], 2001.

Orientador: Kamal Abdel Radi Ismail.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Calor - Armazenamento. 2. Engenharia térmica. 3. Calor – Convecção natural. I. Ismail, Kamal Abdel Radi. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

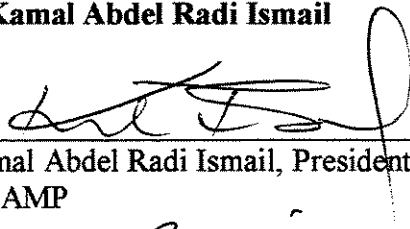
**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA TÉRMICA E FLUIDOS**

TESE DE DOUTORADO

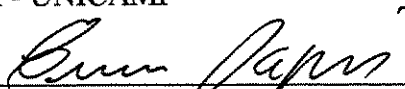
**Estudo Numérico da Fusão ao Redor de um
Cilindro Horizontal Incluindo os Efeitos
Convectivos**

Autora: Maria das Graças Enrique da Silva

Orientador: Kamal Abdel Radi Ismail



Prof. Dr. Kamal Abdel Radi Ismail, Presidente
FEM - UNICAMP



Prof. Dr. Emerson Freitas Jaguaribe
CT - UFPB



Prof. Dr. Pio Caetano Lobo
EFEI



Prof. Dr. Leonardo Goldstein Jr.
FEM - UNICAMP



Prof. Dr. Amauri Garcia
FEM - UNICAMP

Campinas, 31 de julho de 2001

Dedicatória:

Sempre aos meus pais, com todo o amor,
dedico todas as minhas conquistas.

Agradecimentos

Uma palavra especial de agradecimento a todos aqueles que, de formas diversas, e em momentos diferentes, foram importantes para a realização deste trabalho, sobretudo:

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo incentivo ao desenvolvimento deste estudo.

Aos professores Drs. Emerson Freitas Jaguaribe, Pio Caetano Lobo, Leonardo Goldstein Jr. e Amauri Garcia, que muito me honraram com suas participações na banca examinadora.

Ao Prof. Dr. Luiz Felipe M. Moura, pela co-orientação.

Aos funcionários da Biblioteca da Área de Engenharia (BAE), em especial à Dra. Maria Solange Pereira Ribeiro, Esther de Jesus Carvalho, Marisa Cristina Costa, Rose Meire da Silva e Paulo Roberto de Oliveira, pela atenção dispensada sempre.

Aos funcionários da Seção de Informática da Faculdade de Engenharia Mecânica (SIFEM), Gustavo Dal Porto, Ronaldo Gabrielli, Carlos Eduardo Pereira, Fernando Pinelli, Marco Antônio de Abreu e Carmelo Pinto Moreno, pela colaboração e atenção dispensada nos inúmeros pedidos de socorro computacionais.

Ao técnico do Laboratório de Armazenamento Térmico e Tubos de Calor, Setembrino Vaz (7), pela amizade e carinho.

Aos funcionários da Oficina Mecânica, Luiz Zanaga, Luiz Gama, Jefferson Antônio de Souza e Daniel Celente, pela agradável convivência.

À secretária do Departamento de Engenharia Térmica e Fluidos (DETF), Cleusa Vasconcelos. Obrigada pelo carinho, vou sentir muitas saudades.

À secretária da Coordenação de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Sônia Galanti, que sempre me recebeu, desde o primeiro dia da minha estada nesta faculdade, com um largo e carinhoso sorriso.

Ao desenhista Wilton Furquim, pela elaboração das figuras apresentadas neste trabalho.

Ao amigo e funcionário da Faculdade de Engenharia Mecânica (FEM), Jonas Roberto, pelas cópias desta tese e pela atenção dispensada.

Ao querido amigo Rogério Monteiro. Obrigada pelo apoio em todos os momentos sofridos e, também, pela agradável convivência no “nosso” Laboratório de Instrumentação e Medidas.

Aos amigos do DETF e DE, Flávio Tambellini, Valdisley Martinelli, Antônio Batista de Jesus, Ana Cristina Avelar, Oscar Maurício Hernandez, Hélio “Caaaaaarlos” Bortolon, Álex Álisson Bandeira (meu REI!), Júlio César Dainezi, Iraci Machado e Paulo Lenço, pelos bons momentos que passamos juntos, sentirei muitas saudades.

Aos amigos Marilsa Mota, Marlus Rolemberg e Everaldo Silvino dos Santos, pelo carinho, amizade e, também, pelos trucos que jogamos juntos tantas e tantas vezes.

Aos meus eternos amigos Sônia Limeira de Castro e Ronald Barbosa, sempre presentes em meus pensamentos.

Agradecimento Especial

Ao Prof. Dr. Kamal A. R. Ismail, pela orientação deste trabalho e pela confiança que depositou em mim.

Ao meu querido amigo Jorge “José” Recarte Henríquez. Não saberia como te agradecer pelas discussões e sugestões que você dispensou a este trabalho. Tenha a certeza de que sua participação foi muito importante. Deixo aqui um muito obrigada, com todo carinho.

À minha amiga Édna “Maria” Santiago Benta. A convivência diária, desde o primeiro momento, nos fez dividir os mais diversos sentimentos. Entre os momentos felizes e aqueles nem tão felizes assim ficou um imenso carinho, uma grande e bonita amizade e a certeza de que tudo valeu a pena.

Aos sempre amigos Eneuton Pessoa Dornellas, Marcilene Martins, Márcia Maria de Oliveira Bezerra, André Lourenço e Ilaine Schuch. Não conseguiria expressar em tão breves linhas todo o carinho que tenho por vocês. Foram nos momentos mais difíceis que vocês estiveram presentes me encorajando a seguir em frente, com tanto carinho e preocupação. Muito obrigada, sempre.

Às minhas queridas irmãs Olga e Dulce. Foram longos quatro anos de distância e muitas, muitas saudades...

À pessoa que mais amo nesta vida, minha mãe, e ao meu querido pai (*in memoriam*).

A Deus por ter me dado a oportunidade de estar vivendo este momento.

A cultura é a única riqueza que os tiranos não podem confiscar. A verdadeira riqueza de uma nação não se baseia no seu ouro ou prata, mas em sua cultura e civilização, e na integridade moral de seus filhos.

Kahlil Gibran

Resumo

SILVA, Maria das Graças Enrique da, *Estudo Numérico da Fusão ao Redor de um Cilindro Horizontal Incluindo os Efeitos Convectivos*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2001. 160 p. Tese (Doutorado)

Este trabalho tem o propósito de estudar numericamente a fusão de um material de mudança de fase ao redor de um cilindro horizontal aquecido, visando a aplicação deste tipo de processo em sistemas de armazenamento de energia na forma de calor latente. A influência da convecção natural na fase líquida foi levada em consideração. O modelo matemático foi formulado em termos das variáveis primitivas, sendo este bidimensional e transiente. A técnica de transformação de coordenadas foi utilizada para fixar e tornar regular a frente de fusão que se desloca ao longo do tempo. O método dos volumes finitos foi empregado para discretizar o sistema de equações diferenciais que governam o modelo matemático, resultando em um sistema de equações algébricas lineares. A solução numérica foi determinada utilizando-se um esquema implícito para as equações da conservação, enquanto, a equação do balanço de energia na fronteira líquido-sólido, foi obtida explicitamente. Analisou-se também a influência dos termos advindos da transformação de coordenadas, presentes nas equações governantes, na solução numérica do modelo. Os resultados numéricos obtidos pelo presente modelo foram comparados com outros disponíveis na literatura, apresentando uma boa concordância. Resultados e correlações para alguns parâmetros fundamentais no dimensionamento de sistemas térmicos também foram obtidos e discutidos neste estudo.

Palavras Chave

Armazenadores de calor latente, fusão em geometria cilíndrica, convecção natural

Abstract

SILVA, Maria das Graças Enrique da, *Estudo Numérico da Fusão ao Redor de um Cilindro Horizontal Incluindo os Efeitos Convectivos*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2001. 160 p. Tese (Doutorado)

This work deals with the numerical study of the melting of a phase change material surrounding a horizontal heated cylinder looking at application of this type of process in latent heat thermal energy storage. The influence of the natural convection in the liquid phase has been considered. A two dimensional unsteady mathematical model has been formulated in terms of primitive variables. A transformation coordinate technique has been used to fix and become regular the fusion front moving along the time. The finite volume approach was used in order to discretize the differential equation system governed by the mathematical model, giving a linear algebraic equation system. The numerical solution was determined using a implicit scheme for the momentum and energy equations, while an explicit scheme was used for the interfacial energy balance. The influence of the terms that arise in the governing equations due to the coordinate transformation was investigated. Numerical results from the present model were compared with others models suitable in the literature with good agree. Results and correlations for some important parameters in the design of thermal systems were also obtained and addressed in the present work.

Key Words

Latent heat thermal energy storage, fusion in cylindrical geometries, natural convection

Índice

Lista de Figuras	iii
Lista de Tabelas	ix
Nomenclatura	x
Capítulo 1 Introdução	1
Capítulo 2 Revisão da Literatura	4
2.1 Introdução	4
2.2 Estudos Experimentais em Problemas de Fusão e Solidificação Envolvendo os Efeitos da Convecção Natural	5
2.3 Estudos Teóricos em Problemas de Fusão Envolvendo os Efeitos da Convecção Natural	15
Capítulo 3 Modelo Matemático	30
3.1 Introdução	30
3.2 Modelagem Matemática	31
3.2.1 Hipóteses para a Formulação Matemática	31
3.2.2 Problema Físico e Equações Governantes	31
3.2.3 Imobilização da Fronteira Móvel	36
Capítulo 4 Análise Numérica	46
4.1 Introdução	46
4.2 Discretização das Equações Diferenciais Governantes pelo Método do Volume de Controle	46
4.2.1 Equação da Conservação da Massa	48
4.2.2 Equação da Conservação da Energia	51

4.2.3 Equação da Quantidade de Movimento nas Direções Angular e Radial	56
4.2.4 Campo de Pressões	63
4.3 Balanço de Energia na Interface Sólido-Líquido	67
4.4 Solução Inicial para a Simulação Numérica	69
4.5 Algoritmo da Solução Numérica	71
Capítulo 5 Resultados e Discussão	75
5.1 Introdução	75
5.2 Considerações Gerais para a Simulação Numérica	75
5.2.1 Análise dos Termos Fonte	76
5.2.2 Definição de Parâmetros Físicos e Geométricos	78
5.2.3 Definição de Parâmetros Numéricos	80
5.3 Validação do Presente Modelo	84
5.3.1 Comparação com Prusa e Yao (1984b)	84
5.3.2 Comparação com Prusa e Yao (1984a)	87
5.3.3 Comparação com Rieger <i>et al.</i> (1982)	96
5.4 Resultados para o Presente Modelo	114
Capítulo 6 Conclusões e Sugestões	125
6.1 Introdução	125
6.2 Conclusões	125
6.3 Sugestões para Futuras Pesquisas	126
Referências Bibliográficas	127
Apêndice A	134

Lista de Figuras

- Figura 2.1 Posição da interface sólido-líquido ao longo do tempo para $q = 1430 \text{ W/m}^2$. 6
- Figura 2.2 Perfil da interface determinada experimentalmente para diferentes valores de tempo (1, $\tau = 0,96$; 2, $\tau = 1,92$; 3, $\tau = 3,84$; 4, $\tau = 5,76$; 5, $\tau = 7,68$): (a) $Ste = 0,587$, (b) $Ste = 0,881$ e (c) $Ste = 1,175$. 7
- Figura 2.3 Fotografias ilustrando a posição da interface sólido-líquido para diferentes tempos: (a) $Ste = 0,587$ e (b) $Ste = 1,175$. 8
- Figura 2.4 Perfil da região fundida para o material sólido a temperatura de mudança de fase. Esquerda: período de aquecimento = 15min; direita: período de aquecimento = 90min. Fluxo de calor = 5.700 W/m^2 . 10
- Figura 2.5 Efeito do subresfriamento no processo de fusão. Taxa de subresfriamento = 42°C ; período de aquecimento = 90min; fluxo de calor = 5.700 W/m^2 . 10
- Figura 2.6 Linhas de corrente para vários valores de temperatura na superfície do cilindro (tempo adimensional, $\tau \times 10^3$ como parâmetro). 22

Figura 2.7	Linhas de corrente e isotérmicas no líquido e o perfil da frente de fusão em: (a) $t^+ = 0,47$ e (b) $t^+ = 0,995$ para $Pr = 54,6$, $Ra = 126.300$, $d = 0,02m$ e $\Delta T = 7K$.	23
Figura 2.8	Perfil da região fundida obtido experimental (esquerda) e numericamente (direita) para $Ra \approx 4 \cdot 10^5$ e $Ste = 0,04$ para diferentes tempos adimensionais, τ . Os contornos numéricos são divididos em isotérmicas, θ , (esquerda) e linhas de corrente, ψ , (direita).	25
Figura 2.9	Perfil da região fundida obtido experimental (esquerda) e numericamente (direita) para $Ra \approx 10^6$ e $Ste = 0,1$ para diferentes tempos adimensionais, τ . Os contornos numéricos são divididos em isotérmicas, θ , (esquerda) e linhas de corrente, ψ , (direita).	25
Figura 3.1	Diagrama esquemático do problema físico.	32
Figura 4.1	Representação de um volume de controle elementar da malha computacional no domínio transformado.	48
Figura 4.2	Volume de controle principal para a discretização da equação da conservação da massa.	49
Figura 4.3	Volume de controle deslocado para o componente da velocidade na direção angular, V_θ .	57
Figura 4.4	Volume de controle deslocado para o componente da velocidade na direção radial, V_R .	58
Figura 4.5	Fluxograma do algoritmo numérico.	74
Figura 5.1	Influência da malha na direção radial.	82

Figura 5.2	Influência da malha na direção angular.	83
Figura 5.3	Comparação com os resultados de Prusa e Yao (1984b) para a posição da interface em função do tempo.	86
Figura 5.4	Comparação com os resultados de Prusa e Yao (1984a) para a posição da interface em função do tempo.	88
Figura 5.5	Resultados de Prusa e Yao (1984a) para a posição da interface com o tempo.	89
Figura 5.6	Resultados do presente estudo para a posição da interface com o tempo.	89
Figura 5.7	Comparação com os resultados de Prusa e Yao (1984a) para a temperatura na superfície do cilindro em função do tempo.	91
Figura 5.8	Comparação com os resultados de Prusa e Yao (1984a) para a temperatura na superfície do cilindro em função da coordenada angular.	92
Figura 5.9	Comparação com os resultados de Prusa e Yao (1984a) para a temperatura em função da coordenada radial para $\tau = 0,75$.	93
Figura 5.10	Comparação com os resultados de Prusa e Yao (1984a) para a temperatura em função da coordenada radial para $\tau = 2,618$.	94
Figura 5.11	Comparação com os resultados de Prusa e Yao (1984a) para a variação angular do número de Nusselt na interface líquido-sólido.	95
Figura 5.12	Comparação com os resultados de Rieger <i>et al.</i> (1982) para a posição da interface em função do tempo ($Ra = 10^4$).	97

Figura 5.13 Comparação com os resultados de Rieger <i>et al.</i> (1982) para a posição da interface em função do tempo ($Ra = 37500$).	98
Figura 5.14 Resultados de Rieger <i>et al.</i> (1982) para a posição da interface em função do tempo ($Ra = 10^4$).	99
Figura 5.15 Resultados do presente estudo para a posição da interface em função do tempo ($Ra = 10^4$).	99
Figura 5.16 Resultados de Rieger <i>et al.</i> (1982) para a posição da interface em função do tempo ($Ra = 37.500$).	100
Figura 5.17 Resultados do presente estudo para a posição da interface em função do tempo ($Ra = 37.500$).	100
Figura 5.18 Comparação com os resultados de Rieger <i>et al.</i> (1982) para a variação temporal do número de Nusselt na superfície do cilindro ($Ra = 10^4$).	102
Figura 5.19 Comparação com os resultados de Rieger <i>et al.</i> (1982) para a variação temporal do número de Nusselt na superfície do cilindro ($Ra = 37500$).	103
Figura 5.20 Comparação com os resultados de Rieger <i>et al.</i> (1982) para a variação temporal do número de Nusselt na interface líquido-sólido ($Ra = 10^4$).	104
Figura 5.21 Comparação com os resultados de Rieger <i>et al.</i> (1982) para a variação temporal do número de Nusselt na interface líquido-sólido ($Ra = 37500$).	105
Figura 5.22 Comparação com os resultados de Rieger <i>et al.</i> (1982) para o volume de líquido fundido em função do tempo ($Ra = 10^4$).	106
Figura 5.23 Comparação com os resultados de Rieger <i>et al.</i> (1982) para o volume de líquido fundido em função do tempo ($Ra = 37500$).	107

Figura 5.24 Campo de velocidades para $Ra = 10.000$, $Ste = 0,005$ e $Pr = 50$, no tempo $\tau = 0,65$.	108
Figura 5.25 Detalhe do campo de velocidades mostrado na figura 5.24, para a região superior do cilindro, com $Ra = 10.000$, $Ste = 0,005$ e $Pr = 50$, no tempo $\tau = 0,65$.	109
Figura 5.26 Campo de velocidades para $Ra = 37.500$, $Ste = 0,02$ e $Pr = 50$, no tempo $\tau = 0,38$.	110
Figura 5.27 Detalhe do campo de velocidades mostrado na figura 5.26, para a região superior do cilindro, com $Ra = 37.500$, $Ste = 0,02$ e $Pr = 50$, no tempo $\tau = 0,38$.	111
Figura 5.28 Campo de temperaturas para $Ra = 10.000$, $Ste = 0,005$ e $Pr = 50$, no tempo $\tau = 0,65$.	112
Figura 5.29 Campo de temperaturas para $Ra = 37.500$, $Ste = 0,02$ e $Pr = 50$, no tempo $\tau = 0,38$.	113
Figura 5.30 Tempo total de fusão em função do número de Rayleigh, utilizando a água como material de mudança de fase.	115
Figura 5.31 Tempo total de fusão em função do número de Stefan, utilizando a água como material de mudança de fase.	116
Figura 5.32 Tempo total de fusão em função do número de Rayleigh, utilizando o n-octadecano como material de mudança de fase.	116
Figura 5.33 Tempo total de fusão em função do número de Stefan, utilizando o n-octadecano como material de mudança de fase.	117

Figura 5.34 Volume total fundido em função do número de Rayleigh, utilizando a água como material de mudança de fase.	118
Figura 5.35 Volume total fundido em função do número de Stefan, utilizando a água como material de mudança de fase.	119
Figura 5.36 Volume total fundido em função da temperatura na superfície do cilindro, T_o , utilizando a água como material de mudança de fase.	119
Figura 5.37 Volume total fundido em função do número de Rayleigh, utilizando o n-octadecano como material de mudança de fase.	120
Figura 5.38 Volume total fundido em função do número de Stefan, utilizando o n-octadecano como material de mudança de fase.	120
Figura 5.39 Volume total fundido em função da temperatura na superfície do cilindro, T_o , utilizando o n-octadecano como material de mudança de fase.	121
Figura 5.40 Volume de líquido fundido em função do tempo para os três valores de temperatura na superfície do cilindro admitidos, para o caso da água.	123
Figura 5.41 Volume de líquido fundido em função do tempo para os três valores de temperatura na superfície do cilindro admitidos, para o caso da parafina n-octadecano.	123

Lista de Tabelas

Tabela 5.1	Propriedades térmicas do n-octadecano líquido.	79
Tabela 5.2	Valores correspondentes do número de Rayleigh e Stefan para cada T_0 considerado, utilizando a água como material de mudança de fase.	79
Tabela 5.3	Valores correspondentes do número de Rayleigh e Stefan para cada T_0 considerado, utilizando o n-octadecano como material de mudança de fase.	79

Nomenclatura

Letras Latinas

a	coeficientes das equações discretizadas, raio do cilindro dimensional Prusa e Yao (1984b)	
c_p	calor específico à pressão constante	[J/kg·°C]
D	fluxo difusivo	
F	fluxo convectivo	
g	aceleração da gravidade	[m/s ²]
I	posição das variáveis na malha computacional na direção angular	
J	posição das variáveis na malha computacional na direção radial	
k	condutividade térmica	[W/m·°C]
L	calor latente de fusão	[J/kg]
P	pressão adimensional	
r_o	raio do cilindro	[m]
r	coordenada radial	[m]
r_L	posição da interface sólido-líquido	[m]
rsp	coeficiente de temperatura	
R	coordenada radial adimensional	
R	raio da interface dimensional Prusa e Yao (1984b)	
R_L	posição da interface adimensional	
t	tempo	[s]
T	temperatura da fase líquida	[°C]

T_{mean}	temperatura de mistura da água	[°C]
V_{θ}	componente da velocidade na direção angular adimensional	
V_R	componente da velocidade na direção radial adimensional	
x	coordenada auxiliar	[m]
\bar{x}	coordenada auxiliar adimensional	
Z	espessura de líquido fundido Prusa e Yao (1984b)	

Letras Gregas

α	difusividade térmica	[m ² /s]
β	coeficiente de expansão térmica	[1/K]
δ	distância entre dois pontos da malha	
ϕ	temperatura adimensional	
Δ_L	espessura da camada líquida adimensional	
η	coordenada radial transformada	
μ	viscosidade dinâmica	[kg/m·s]
ν	viscosidade cinemática	[m ² /s]
θ	coordenada angular	
ρ	massa específica	[kg/m ³]
τ	tempo adimensional	
τ_{tot}	tempo total de fusão adimensional	
$\bar{\Lambda}, \Lambda, \Theta, \Omega, \Psi$	variáveis auxiliares	
∇	volume	

Superescritos

- o tempo anterior
- ^ estimada
- ` corrigida
- * variáveis na forma dimensional

Subscritos

ang	relativo à equação da quantidade de movimento na direção angular
cm	conservação da massa
e, w, n, s	faces do volume de controle
E, W, N, S, P, NE, SE, NW, SW	pontos da malha principal
liq	relativo à equação da conservação da energia
m	mudança de fase
nb	vizinho
o	superfície do cilindro
r	referência
rad	relativo à equação da quantidade de movimento na direção radial
R	direção radial
tot	total
θ	direção angular

Números Adimensionais

Fo	Número de Fourier	$[\alpha t/r_o^2]$
P	Número de Peclet	$[F/D]$
Pr	Número de Prandtl	$[v/\alpha]$
Ra	número de Rayleigh para o caso de temperatura especificada na superfície do cilindro	$[g\beta(T_o - T_m)r_o^3/v\alpha]$
Ra _q	número de Rayleigh para o caso de fluxo de calor especificado na superfície do cilindro	$[g\beta q r_o^4/v\alpha k]$
Ra _{agua}	número de Rayleigh para o caso de fluxo de calor especificado na superfície do cilindro	$\left[\frac{g r_{sp} T_o - T_m ^{1,894816} r_o^3}{v\alpha (1 - r_{sp} T_{mean} - T_r ^{1,894816})} \right]$
Ste	número de Stefan para o caso de temperatura especificada na superfície do cilindro	$[c_p (T_o - T_m)/L]$

St_q número de Stefan para o caso de fluxo de calor especificado na superfície do cilindro

$[c_p q_{r_0} / Lk]$

Siglas

TF termo fonte

Capítulo 1

Introdução

Os estudos acerca do fenômeno de mudança de fase têm atraído o interesse de pesquisadores no mundo inteiro há quase dois séculos. Uma grande variedade de processos envolvendo mudança de fase pode ser encontrada na natureza. Muitos deles são considerados benéficos ao homem, com por exemplo, o congelamento e o descongelamento de água nos pólos que agem como estabilizadores do clima do planeta e que motivou um dos primeiros trabalhos analíticos publicados sobre os problemas de mudança de fase no ano de 1891, por Stefan, *apud* Yao e Prusa (1989). Outros fenômenos naturais de mudança de fase também podem ser causadores de enormes catástrofes, como as erupções vulcânicas, causadas pela fusão de materiais das profundas camadas do interior do planeta. O conhecimento dos mecanismos que regem esses fenômenos é de vital importância, isso porque é através desse conhecimento que torna-se possível determinar meios mais adequados e eficientes de aproveitar tais fenômenos em prol do homem ou, em outras situações, de reduzir os danos causados.

O fenômeno de mudança de fase também está presente em uma grande variedade de aplicações da engenharia, tais como na fabricação de ligas metálicas e vidros, no congelamento de alimentos, como forma de conservá-los por um período de tempo maior, em processos metalúrgicos, tais como, fundição e soldagem, na preservação de células biológicas pelo processo de criogenia, entre tantos outros.

Dentre essa grande diversidade de processos que envolvem mudança de fase, um se apresenta de fundamental interesse neste trabalho, o armazenamento de energia térmica. Estes são os denominados sistemas de armazenamento de energia térmica na forma de calor latente, ou ainda, no caso específico do material de mudança de fase tratar-se da água, os bancos de gelo. Tais sistemas baseiam-se no processo cíclico de solidificação e fusão do material de mudança de fase, possibilitando, assim, o armazenamento de calor latente para ser utilizado em períodos de alta demanda de energia. Sistemas dessa natureza tornam-se de essencial importância, visto que é uma preocupação mundial nos nossos dias, um possível colapso energético. A diversificação das fontes energéticas, bem como, o melhor aproveitamento das mesmas, faz-se necessário, pois sabe-se que os recursos naturais são finitos. Como exemplo disso, vive-se no momento uma séria crise energética no país. “Energia representa uma questão crítica na economia de todos os países e indispensável na indústria, agricultura, comércio e para uso pessoal. Mediante ela é possível extrair, processar, fabricar materiais e convertê-los em produtos para o consumo”, Ismail (1998). Nessa citação está colocada de forma sucinta o que significa a energia para a humanidade.

O projeto de sistemas térmicos eficientes exige o conhecimento de todos os mecanismos de troca de calor envolvidos nos processos de solidificação e fusão. Esses, todavia, são processos complexos, pois envolvem o fenômeno de mudança de fase, que por sua vez, pertencem à classe de problemas denominada de fronteira móvel. Esses problemas se caracterizam pela existência de uma fronteira que delimita as duas fases, no caso específico de interesse neste estudo, as fases líquida e sólida, a qual se desloca à medida que o calor latente é absorvido ou liberado pela mesma. Esta fronteira, ou ainda, interface sólido-líquido, mantém-se durante todo o processo na temperatura de mudança de fase do material. Os problemas de mudança de fase são inerentemente não lineares, devido ao movimento da interface durante o processo. Além disso, estes problemas podem envolver vários mecanismos de transferência de calor, como condução nas fases sólida e líquida e convecção na fase líquida. Dessa forma, é fácil prever que a solução desse tipo de problema também não pode ser obtida de forma genérica e simples.

Motivados, pois, pela importância do assunto, e visando contribuir com a análise da influência de alguns parâmetros relevantes em sistemas de armazenamento de calor latente, nos empenhamos no desenvolvimento desse trabalho, cujo objetivo principal é a simulação numérica do problema de fusão ao redor de um cilindro horizontal aquecido. Nesse estudo os efeitos da

convecção natural serão levados em consideração na região formada pelo material fundido. Uma formulação em variáveis primitivas será empregada para modelar matematicamente o problema físico. Para contornar a dificuldade advinda do fato da interface líquido-sólido ser móvel e irregular, devido à presença do efeito convectivo, será utilizada a técnica de imobilização de fronteiras. A solução do problema será obtida numericamente pela aplicação do método dos volumes finitos. A partir dos resultados auferidos através deste modelo, utilizando como materiais de mudança de fase a água e a parafina n-octadecano, será possível analisar a influência de importantes parâmetros como, por exemplo, a temperatura da superfície do cilindro, sobre o processo de mudança de fase.

A descrição detalhada dos aspectos referidos no parágrafo anterior será apresentada na forma de capítulos. A introdução comporá o capítulo 1, no segundo será feita uma revisão da literatura. Essa revisão terá como propósito, além de trazer à tona as principais pesquisas realizadas sobre mudança de fase, enfatizar os estudos direcionados à utilização desse tipo de processo, em sistemas de armazenamento de energia térmica, na forma de calor latente. No capítulo 3, será descrito o modelo matemático adotado para o problema físico em estudo. Na seqüência vem o capítulo 4, que discute a aplicação do método numérico com vistas à solução do sistema das equações governantes do modelo, que dará origem aos campos de temperatura, velocidades e pressões, bem como, a posição da fronteira móvel. O capítulo 5 discorre acerca dos resultados obtidos a partir da modelação matemática e numérica do problema. Finalmente, no capítulo 6 são apresentadas as conclusões e as sugestões para pesquisas futuras.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

2.1 Introdução

O estudo pioneiro em problemas de transferência de calor envolvendo mudança de fase foi realizado por Neumann, na década de 60 do século XIX. Neumann obteve uma solução exata para o problema mais geral de mudança de fase, que consistia na solidificação de um material com temperatura inicial abaixo da temperatura de mudança de fase, em uma geometria plana unidimensional com condição de contorno de temperatura constante. No ano de 1889, Stefan publicou artigos com soluções exatas para problemas de mudança de fase em domínios infinitos e semi-infinitos, com temperatura inicial diferente da temperatura de mudança de fase do material. Em 1891, Stefan publicou um outro estudo analítico sobre a formação de gelo polar. Todavia, os estudos de Neumann só foram publicados em 1912, sendo, por esta razão, os trabalhos de Stefan reconhecidos como a primeira contribuição na solução de problemas de mudança de fase.

Após estes estudos iniciais, uma vasta quantidade de trabalhos foram realizados tratando o problema de mudança de fase para diferentes condições inicial e de contorno e geometrias diversas. Devido a não-linearidade deste tipo de problema, as soluções exatas são restritas a um grupo muito pequeno de situações, como aquelas obtidas por Neumann e Stefan, já citadas acima, que envolvem domínios infinito ou semi-infinito e condições de contorno simples. Tais soluções podem ser encontradas em diversas literaturas, como Carslaw e Jaeger (1959), Crank (1984) e

Özisik (1993). Na ausência de uma solução exata para a grande maioria dos problemas de mudança de fase, buscou-se outras formas de resolução através da utilização de métodos semi-analíticos, aproximados ou numéricos. Uma detalhada revisão destes métodos aplicados a problemas de mudança de fase, bem como, de diversos trabalhos publicados referentes a cada um dos métodos citados, pode ser vista em Yao e Prusa (1989).

Durante quase um século, todos os trabalhos realizados nesta área basearam-se em modelos matemáticos onde o único mecanismo de transferência de calor considerado através do material de mudança de fase era a condução. Entretanto, alguns trabalhos experimentais, que serão citados em seguida, na seção 2.2, realizados já nos meados do século XX, comprovaram a grande importância dos efeitos convectivos em problemas de mudança de fase. Observou-se nesses estudos que a condução é o mecanismo dominante apenas no início do processo, quando a quantidade de material fundido forma uma fina camada adjacente a superfície aquecida. Após um determinado tempo, com o aumento da camada de líquido fundido, a convecção passa a ser o mecanismo de transferência de calor dominante no processo de mudança de fase.

2.2 Estudos Experimentais em Problemas de Fusão e Solidificação Envolvendo os Efeitos da Convecção Natural

Sparrow *et al.* (1978a) estudaram experimentalmente o problema da fusão ao redor de um cilindro horizontal aquecido por um fluxo de calor constante. Uma mistura eutética de nitrato de sódio e hidróxido de sódio, com temperatura de fusão em torno de 244°C, foi utilizada como material de mudança de fase. Para efeito comparativo, um outro experimento paralelo foi realizado, considerando apenas a convecção natural no material líquido, sem o fenômeno de mudança de fase. Os coeficientes de transferência de calor, calculados para ambos os experimentos, apresentaram valores próximos e perfis semelhantes. No início do processo, os coeficientes de transferência de calor possuem valores elevados, os quais decaem com o tempo até alcançarem um valor mínimo e, em seguida, voltam a crescer atingindo um valor constante ao longo do tempo. Este comportamento difere daquele apresentado para o caso onde apenas a condução de calor está envolvida no processo. Neste, o coeficiente de transferência de calor possui um valor elevado no início, o qual tende a decrescer ao longo do tempo, sem, no entanto, atingir o regime permanente. Esta diferença de comportamento entre os perfis das curvas

evidência que, no caso da fusão, um outro mecanismo de transferência de calor está presente. Uma outra evidência do papel da convecção natural no processo de fusão, observada no estudo de Sparrow *et al.* (1978a), aparece nos resultados obtidos para a posição da interface líquido-sólido em função do tempo. O desenvolvimento da convecção natural causa o aparecimento de uma “pluma” na parte superior do cilindro, ou seja, a convecção provoca uma assimetria no perfil da frente de fusão em torno do eixo do cilindro, ao contrário do processo de condução pura, no qual o perfil da interface é representado por uma sucessão de círculos concêntricos ao eixo do cilindro. A figura (2.1) ilustra a posição da interface em função do tempo para o processo de fusão em torno de um cilindro horizontal aquecido. Nesta pode-se observar claramente a formação da pluma na parte superior do cilindro devido aos efeitos convectivos no processo.

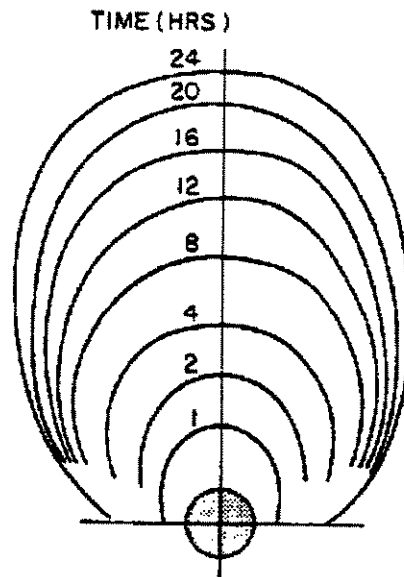


Figura 2.1 - Posição da interface sólido-líquido
ao longo do tempo para $q = 1430 \text{ W/m}^2$.

Fonte: Sparrow *et al.* (1978a).

No ano seguinte, o trabalho experimental realizado por Bathelt *et al.* (1979a), idêntico àquele de Sparrow *et al.* (1978a), confirmou e reforçou os resultados obtidos por estes. A parafina n-octadecano (temperatura de fusão igual a 28,2°C) foi empregada como material de mudança de fase. O perfil da interface foi determinado e visualizado fotograficamente, enquanto, o coeficiente de transferência de calor foi obtido através da técnica do gráfico de sombras. Este estudo apresentou evidências conclusivas da importância da convecção natural no processo de fusão. As medidas da posição da interface mostraram que um maior volume de líquido fundido se encontrava na parte superior do cilindro, onde o processo convectivo se desenvolve, ocorrendo o inverso para a parte inferior, como pode-se observar nas figuras (2.2) e (2.3), abaixo. As outras variáveis obtidas no experimento, tais como temperatura na superfície do cilindro e número de Nusselt local e médio ao longo do tempo, apresentaram comportamentos característicos da forte influência da convecção natural sobre o processo.

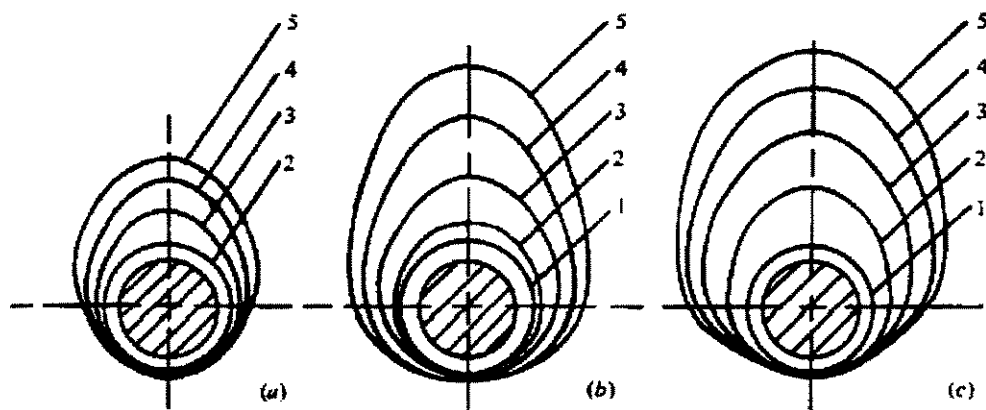


Figura 2.2 - Perfil da interface determinada experimentalmente para diferentes valores de tempo (1, $\tau = 0,96$; 2, $\tau = 1,92$; 3, $\tau = 3,84$; 4, $\tau = 5,76$; 5, $\tau = 7,68$):

(a) $Ste = 0,587$, (b) $Ste = 0,881$ e (c) $Ste = 1,175$.

Fonte: Bathelt *et al.* (1979a).

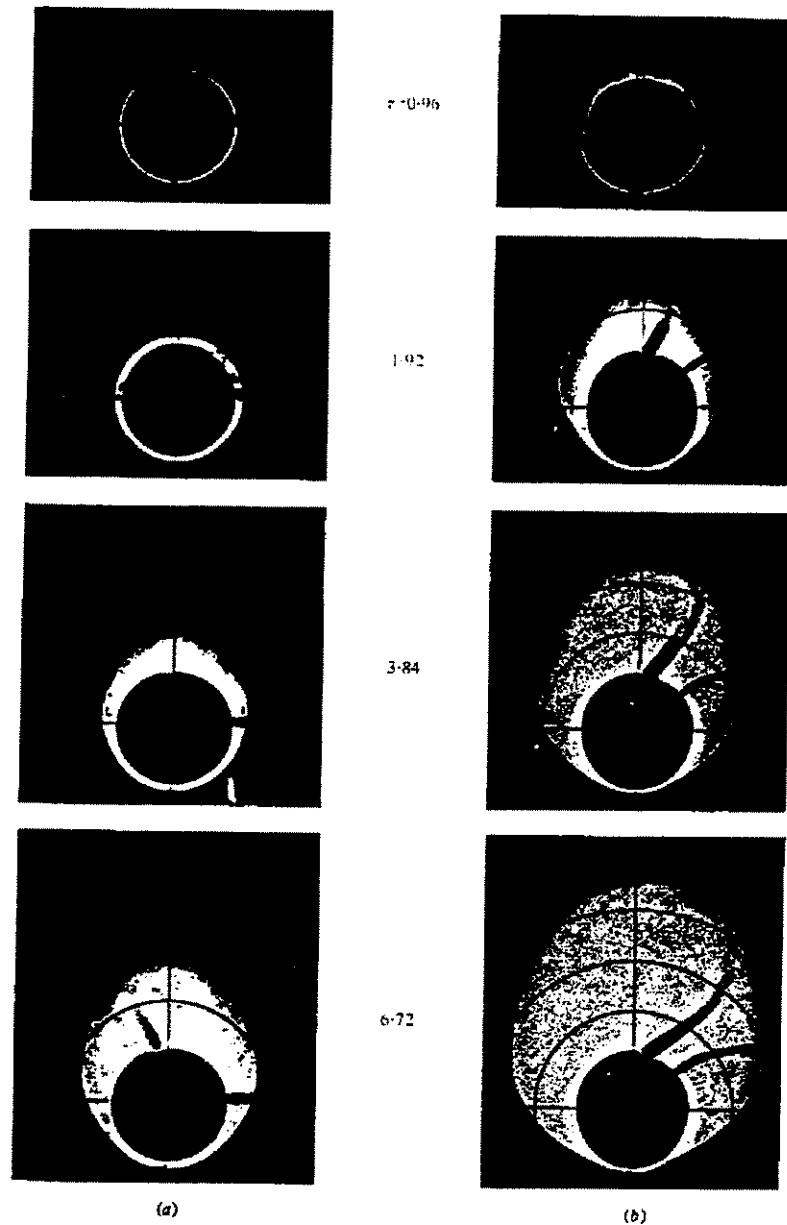


Figura 2.3 - Fotografias ilustrando a posição da interface sólido-líquido para diferentes tempos: (a) $Ste = 0,587$ e (b) $Ste = 1,175$.

Fonte: Bathelt *et al.* (1979a).

Em um segundo experimento, Bathelt *et al.* (1979b) investigaram a fusão ao redor de múltiplos cilindros. O sistema era composto por três cilindros horizontais dispostos nos vértices de um triângulo isósceles. Um fluxo de calor constante foi empregado para aquecer a superfície do cilindro. A parafina n-octadecano foi usada como material de mudança de fase. O perfil da interface e o coeficiente de transferência de calor foram determinados da mesma forma descrita no trabalho anterior, Bathelt *et al.* (1979a). Foi observado que no início do processo de fusão do

material, a interface se desenvolvia idêntica e independentemente para cada cilindro. Após um determinado tempo, uma interface comum aos três cilindros se formava, desencadeando-se entre eles um complexo processo convectivo. Nesta fase, o arranjo dos cilindros influencia fortemente o perfil da interface, todavia, em relação ao coeficiente médio de transferência de calor, variações pequenas, em torno de 10%, foram observadas. A modelagem matemática deste fenômeno físico torna-se extremamente complexa quando uma interface comum entre os cilindros é formada.

Goldstein e Ramsey (1979), *apud* Yao e Prusa (1989), também estudaram experimentalmente o processo de fusão ao redor de um cilindro horizontal aquecido através de um fluxo de calor constante na superfície. Seus resultados apresentaram boa concordância com aqueles obtidos anteriormente por Sparrow *et al.* (1978a) e Bathelt *et al.* (1979a). Eles observaram que o volume de líquido fundido cresce linearmente com o tempo e que a máxima temperatura na superfície do cilindro ocorre próximo à transição do regime condutivo dominante para o convectivo dominante.

O efeito de subresfriamento no processo de fusão ao redor de um cilindro horizontal aquecido foi estudado experimentalmente por Abdel-Wahed *et al.* (1979). Este trabalho foi uma extensão do experimento realizado por Sparrow *et al.* (1978a) e veio a corroborar os resultados obtidos por este. Foram feitos dois experimentos: um para a condição de sólido subresfriado, isto é, o material de mudança de fase à uma temperatura inicial abaixo da sua temperatura de fusão, e outro para o sólido não subresfriado. Um fluxo de calor de 5.700 W/m^2 foi empregado para aquecer a superfície do cilindro. Resultados qualitativos para o perfil da frente de fusão foram obtidos fotograficamente para ambas as condições iniciais do sólido. Observou-se que sob a condição de subresfriamento, o volume de líquido fundido era substancialmente menor do que aquele obtido sem o subresfriamento para um mesmo intervalo de tempo, como evidenciam as figuras (2.4) e (2.5).

Bathelt e Viskanta (1980) desenvolveram correlações empíricas para os coeficientes de transferência de calor local e médio na interface sólido-líquido em problemas de fusão ao redor de um cilindro horizontal aquecido através de um fluxo de calor constante na superfície. Eles utilizaram como materiais de mudança de fase as parafinas n-octadecano e n-heptadecano, com pontos de fusão de $28,2$ e $22,2^\circ\text{C}$, respectivamente. O perfil da interface foi obtido

fotograficamente e, a partir destes resultados, foram determinados os coeficientes de transferência de calor na mesma. A posição da interface, calculada através das correlações obtidas, apresentou uma boa concordância com os dados experimentais.

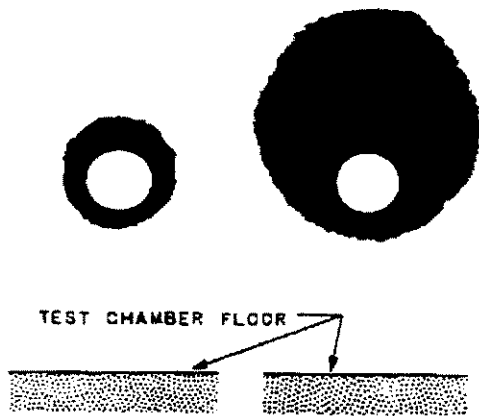


Figura 2.4 - Perfil da região fundida para o material sólido a temperatura de mudança de fase. Esquerda: período de aquecimento = 15min; direita: período de aquecimento = 90min. Fluxo de calor = 5.700 W/m^2 .

Fonte: Abdel-Wahed *et al.* (1979).

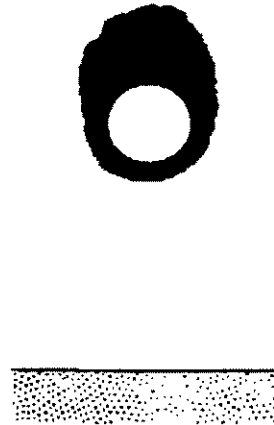


Figura 2.5 – Efeito do subresfriamento no processo de fusão. Taxa de subresfriamento = 42°C ; período de aquecimento = 90min; fluxo de calor = 5.700 W/m^2 .

Fonte: Abdel-Wahed *et al.* (1979).

O problema de fusão envolvendo a convecção natural no interior de um cilindro horizontal aquecido foi abordada numérica e experimentalmente nos estudos de Rieger *et al.* (1983) e Ho e Viskanta (1984a). Tanto Rieger *et al.* (1983), quanto Ho e Viskanta (1984a), utilizaram o n-octadecano como material de mudança de fase. Também, em ambos os estudos, foi empregada uma condição de temperatura especificada na superfície do cilindro. A análise numérica desses trabalhos será discutida na seção 2.3, mais adiante.

Rieger *et al.* (1983) determinaram fotograficamente o perfil da interface para um intervalo do número de Rayleigh de $10^5 \leq Ra \leq 10^6$. Os resultados experimentais mostraram um perfil convexo da interface na parte inferior do cilindro. Uma observação interessante relatada neste

estudo foi a ocorrência de uma convecção de Bénard tridimensional na parte inferior do cilindro para o valor mais alto do número de Rayleigh.

Ho e Viskanta (1984a) incluíram, em sua investigação experimental, o efeito de subresfriamento do sólido no início do processo. Foi observado que este efeito afeta não apenas a taxa de fusão, mas também, o coeficiente de transferência de calor local na superfície do cilindro. Ho e Viskanta (1984a) observaram um perfil semelhante àquele descrito por Rieger *et al.* (1983) para a interface sólido-líquido na parte inferior do cilindro. Um vórtex secundário na parte inferior do cilindro, além da recirculação natural do fluido, foi também verificado pelos autores.

Estudos experimentais para problemas de fusão ao redor de um cilindro vertical aquecido, incluindo os efeitos da convecção natural, também foram relatados por alguns pesquisadores. Dentre eles, pode-se citar os trabalhos de Ramsey e Sparrow (1978) e Kemink e Sparrow (1981), provavelmente os pioneiros a estudar os efeitos convectivos neste tipo de geometria. No estudo de Ramsey e Sparrow (1978) foi empregada a naftalina (temperatura de fusão de aproximadamente 80°C) como material de mudança de fase. A superfície do cilindro foi mantida aquecida utilizando-se fluxos de calor constantes de 24,5 e 49W. A faixa do número de Rayleigh para o experimento situou-se entre $6 \cdot 10^6 \leq Ra \leq 7 \cdot 10^6$. Os resultados apresentados por Ramsey e Sparrow (1978) para o perfil da interface e para a distribuição de temperaturas na superfície do cilindro evidenciaram a convecção natural como mecanismo de transferência de calor dominante no processo de fusão também para esta geometria. Eles observaram ainda que um maior volume de material fundido ocorria na parte superior do cilindro, devido, claramente, às correntes convectivas que se formavam nesta região. Este resultado contrasta com o perfil vertical regular previsto para o caso da condução pura. No experimento de Kemink e Sparrow (1981), foram realizadas medidas da distribuição de temperaturas e do coeficiente de transferência de calor na superfície do cilindro e do perfil da interface, tanto para o caso do material de mudança de fase inicialmente na condição de subresfriamento, quanto para o caso de temperatura inicial de saturação. A parafina n-eicosano, que funde à 36,4°C, serviu como material de mudança de fase. Foi observado que o subresfriamento tende a retardar o início do processo convectivo e, também, causa uma diminuição de 10 a 15% no valor do coeficiente de transferência de calor em relação àquele medido para o caso sem subresfriamento.

Souza Mendes e Pinho Brasil (1987) desenvolveram um estudo experimental para o problema de fusão ao redor de um cilindro vertical isotérmico. Segundo os autores, escassos dados experimentais para a condição de temperatura constante na superfície do cilindro se encontravam disponíveis na literatura. O material de mudança de fase, a parafina n-eicosano 99% pura, se encontrava no início do processo na temperatura de saturação. Foi observado que o tempo a partir do qual a convecção torna-se dominante é uma função do número de Rayleigh. Uma expressão para avaliar este tempo crítico foi determinada, bem como, correlações para o número de Nusselt na parede do cilindro. Os resultados foram obtidos para valores do número de Rayleigh de $7,1 \cdot 10^7$, $3,7 \cdot 10^8$, $5,7 \cdot 10^8$, $1,1 \cdot 10^9$ e $2,0 \cdot 10^9$.

Dentre os trabalhos pioneiros que investigaram experimentalmente os efeitos da convecção natural em problemas de fusão em geometria plana, cita-se os de Boger e Westwater (1967) e Hale e Viskanta (1978), *apud* Viskanta (1983). Boger e Westwater (1967) realizaram um estudo experimental e numérico da fusão e da solidificação da água em cavidades retangulares, onde o calor é liberado ou absorvido pelo material através das superfícies inferior e superior da cavidade. Na modelagem matemática do problema foi considerada a transferência de calor unidimensional e o efeito convectivo foi levado em conta através do uso de uma condutividade térmica efetiva na equação do balanço de energia na interface sólido-líquido. Os resultados obtidos indicaram um valor aproximado do número de Rayleigh de 1700 para o início da convecção natural. Os resultados demonstraram também que a convecção natural acelera significativamente a fusão e retarda a solidificação quando comparados com aqueles onde apenas a condução é considerada. Resultados experimentais e numéricos apresentaram boa concordância. No trabalho de Hale e Viskanta (1978), foi estudada experimentalmente a fusão em uma placa plana vertical.

Um estudo experimental semelhante ao de Boger e Westwater (1967), foi realizado por Hale e Viskanta (1980). Para a obtenção de resultados analíticos foi utilizado o método integral, considerando a transferência de calor unidimensional e os efeitos convectivos foram incorporados na equação do balanço de energia na interface. Eles concluíram que os efeitos da convecção natural são muito importantes no caso da fusão pelo aquecimento da superfície inferior e da solidificação pelo resfriamento da superfície superior da cavidade.

Pode-se citar também em relação a fusão em geometria plana, os trabalhos de Van Buren e Viskanta (1980a) e Ho e Viskanta (1984b), que estudaram a fusão em uma parede isotérmica vertical de uma cavidade retangular. No estudo de Van Buren e Viskanta (1980a), o perfil da frente de fusão foi obtido fotograficamente, enquanto, no de Ho e Viskanta (1984b), foi determinado através de um interferômetro. Foi observado através dos resultados auferidos pelos dois estudos que a convecção natural afeta significativamente a taxa de fusão e o perfil da interface. Um maior volume de material fundido ocorre na região superior da parede, constatando a influência da convecção natural no processo. Ho e Viskanta (1984b) obtiveram também uma solução numérica, a qual será relatada na seção 2.3, juntamente com os outros estudos numéricos que foram realizados para o problema de fusão com convecção natural. Van Buren e Viskanta (1980a) utilizaram o n-heptadecano como material de mudança de fase, considerando ainda que o sólido se encontrava inicialmente a uma temperatura próxima a temperatura de saturação, sendo esta diferença na temperatura inicial menor que 1°C. No experimento de Ho e Viskanta (1984b) foi empregado como material de mudança de fase o n-octadecano, estando este inicialmente na temperatura de saturação.

Benard *et al.* (1986) investigaram o problema de fusão em uma parede isotérmica vertical de uma cavidade retangular, considerando que o sólido no início do processo estava subresfriado. Foi utilizado como material de mudança de fase a parafina n-octadecano 99% pura. Eles realizaram medidas da posição da interface e das distribuições de temperaturas nas fases sólida e líquida, utilizando um conjunto de termopares. Estes resultados foram comparados com resultados numéricos, os quais serão comentados na seção 2.3.

Recentemente, Wang *et al.* (1999) fizeram um estudo experimental sobre a fusão em uma parede vertical de uma cavidade retangular. Os testes foram realizados com o polietileno glicol 900 (temperatura de fusão igual a 34°C), um material de mudança de fase que possui alto valor do número de Prandtl, variando na faixa de 804 a 1055. A faixa do número de Rayleigh para o experimento situou-se entre $7,869 \cdot 10^6 \leq Ra \leq 3,237 \cdot 10^7$. Foram também desenvolvidas correlações para o volume fundido e para o número de Nusselt médio, as quais apresentaram boa concordância com os resultados experimentais.

A importância dos efeitos da convecção natural em problemas de solidificação também foi estudada experimentalmente, como já foi brevemente comentado nos trabalhos de Boger e Westwater (1967) e Hale e Viskanta (1980), citados anteriormente. Segundo Viskanta (1985), a convecção natural desempenha um papel importante no processo de solidificação se o material de mudança de fase estiver inicialmente a uma temperatura diferente da sua temperatura de fusão. Neste caso, a convecção retarda o processo de mudança de fase, podendo, por fim, cessá-lo por completo.

A influência da convecção natural no processo de solidificação ao redor de um cilindro vertical isotérmico foi estudada por Sparrow *et al.* (1979). Foram realizados experimentos para os casos onde o líquido, a parafina n-eicosano, se encontrava inicialmente subresfriado e inicialmente na temperatura de saturação, ou seja, na temperatura de mudança de fase do material (em torno de 36°C). Sparrow *et al.* (1979) observaram que para o caso do líquido inicialmente subresfriado, a solidificação é drasticamente retardada pela convecção natural, a qual pode, finalmente, cessar por completo o processo. A espessura da camada solidificada, neste caso, é maior na parte inferior do cilindro. Este comportamento é inverso àquele apresentado no processo de fusão, onde o maior volume de líquido fundido encontra-se na parte superior do cilindro. Por outro lado, quando o líquido está inicialmente na temperatura de saturação e, conseqüentemente, a convecção não tem influência sobre o processo, a camada solidificada cresce uniforme e continuamente, como é previsto pelo modelo teórico para o caso de condução pura.

Bathelt *et al.* (1979c) estudaram o processo de solidificação ao redor de um cilindro horizontal resfriado. O material de mudança de fase se encontrava inicialmente subresfriado, isto é, a uma temperatura abaixo da temperatura de solidificação. Foram realizadas medidas de temperatura na superfície do cilindro e no material de mudança de fase e a posição da interface foi determinada fotograficamente. Os resultados obtidos mostraram que a convecção natural produz uma camada não uniforme de sólido na direção circunferencial, sendo esta cerca de 10 % mais espessa na parte inferior cilindro, e afeta a variação do coeficiente de transferência de calor ao longo da interface sólido-líquido. Uma solução aproximada foi determinada através do método integral, considerando a transferência de calor unidimensional no material de mudança de fase. Valores médios dos coeficientes de transferência de calor na direção circunferencial, determinados experimentalmente, foram usados para avaliar o termo convectivo introduzido na

equação do balanço de energia na interface. Bathelt *et al.* (1979c), por fim, concluíram que a boa concordância apresentada entre os resultados experimentais e analíticos deveu-se a inclusão, no modelo teórico, dos efeitos convectivos na interface sólido-líquido.

Van Buren e Viskanta (1980b) abordaram experimentalmente o processo de solidificação em uma placa vertical isotérmica. Como material de mudança de fase foi empregado o n-heptadecano. A distribuição de temperaturas no líquido foi medida através de um interferômetro, enquanto a posição da interface foi obtida fotograficamente. Os autores concluíram que a convecção natural afeta fortemente o processo de solidificação, resultando, conseqüentemente, em um perfil irregular da interface em função da posição vertical.

Em um outro estudo experimental, Sparrow *et al.* (1981) investigaram a transição entre o processo de solidificação controlado pela convecção natural e aquele controlado pela condução pura, em um cilindro vertical isotérmico. O cilindro foi imerso em um líquido subresfriado (n-eicosano), o qual estava contido em um outro cilindro mais externo, com superfícies adiabáticas. Foi observado que no período de tempo inicial, uma maior diferença de temperatura na fase líquida induz um intenso processo convectivo, retardando a solidificação. Esta diferença de temperatura no líquido tende a diminuir com o tempo, cessando, assim, o efeito da convecção natural. Neste estágio, o processo passa a ser controlado pela condução no material solidificado. A quantidade de massa solidificada é um parâmetro indicativo da transição entre o processo de convecção dominante e o de condução dominante.

Sparrow e Souza Mendes (1982) mediram experimentalmente os coeficientes de transferência de calor convectivo na direção axial de um cilindro vertical isotérmico, para o problema de solidificação da parafina n-eicosano 99% pura, envolvendo os efeitos convectivos.

2.3 Estudos Teóricos em Problemas de Fusão Envolvendo os Efeitos da Convecção Natural

Foi apresentada na seção 2.2, uma extensa revisão da literatura dos principais trabalhos experimentais que evidenciaram a influência da convecção natural nos processos de fusão e solidificação em diversas geometrias. Observou-se, através destes estudos, que no caso da fusão, pequenos gradientes de temperatura no líquido já são suficientes para desencadear um processo

convectivo, como resultado das forças de empuxo que passam a atuar no sistema. Tornou-se necessário, então, desenvolver modelos teóricos que representassem tal fenômeno físico, sendo preciso, para tanto, levar em consideração, não apenas a condução, mas, principalmente, a convecção natural como mecanismo de transferência de calor no processo. Desta forma, paralelamente às investigações experimentais, foram realizados também diversos estudos nesse sentido. Os primeiros modelos matemáticos propostos eram unidimensionais e o efeito convectivo era levado em consideração através do uso de um coeficiente de transferência de calor, determinado empiricamente, na equação do balanço de energia na interface, como mostrado nos trabalhos de Boger e Westwater (1967) e Hale e Viskanta (1980), anteriormente citados. Entretanto, quando o coeficiente de transferência de calor na interface não é conhecido, a solução do problema só pode ser obtida mediante a resolução do campo de velocidades na fase líquida do material. Além disso, uma outra dificuldade associada ao modelamento de problemas desta natureza, advém da forte influência da convecção natural sobre a interface sólido-líquido. Como resultado desta influência, a interface apresenta um comportamento irregular, o que torna o problema necessariamente bidimensional.

Antes de referenciar alguns dos trabalhos que apresentaram soluções aproximadas e numéricas para problemas de fusão com a presença da convecção natural na fase líquida, será feita uma breve descrição da metodologia empregada na formulação de problemas de mudança de fase, de uma forma geral.

Existem basicamente duas maneiras de formular um problema de mudança de fase. A primeira delas utiliza a temperatura como variável dependente na equação da energia e a segunda, a entalpia.

Nos modelos baseados na temperatura, a equação da energia é escrita separadamente para cada uma das fases do domínio do problema, ou seja, a fase líquida e a sólida, e o acoplamento entre as duas fases é dado através do balanço de energia na frente de mudança de fase. Neste tipo de formulação faz-se necessário, então, que a posição da interface seja conhecida explicitamente no decorrer da solução das equações governantes do modelo, todavia, a sua determinação depende da própria solução destas equações. A existência de um domínio de fronteira móvel e não conhecida *a priori* torna, desta forma, bastante complexa a resolução do problema. Algumas

técnicas foram propostas no sentido de contornar a dificuldade gerada pela interface móvel, dentre as quais pode-se citar a técnica de imobilização de fronteira, bastante empregada neste tipo de formulação. Esta técnica consiste em se realizar uma mudança de coordenadas com o objetivo de transformar um domínio onde existe uma fronteira móvel e irregular, a interface sólido-líquido, em um domínio com fronteiras regulares e fixas no tempo. Esta transformação origina equações com grau de complexidade maior, porém, em contrapartida, tem a vantagem de se poder trabalhar em um domínio fixo, o que facilita bastante a resolução numérica destas equações.

A técnica de imobilização de fronteira foi inicialmente empregada na solução de problemas de mudança de fase por Landau (1950), e por esta razão, ficou conhecida como transformada de Landau. Neste estudo, Landau resolveu o problema unidimensional e transiente de ablação de um sólido semi-infinito utilizando a transformação de coordenadas para fixar a interface móvel do problema. A aplicação da transformada de Landau para problemas de mudança de fase em mais de uma dimensão foi realizada por Duda *et al.* (1975), que resolveram o problema bidimensional de fusão ou solidificação no interior de um cilindro, e Saitoh (1978), que obteve uma solução para o problema de solidificação em duas e três dimensões em geometrias irregulares.

Sparrow *et al.* (1978b) utilizaram a técnica de transformação de coordenadas para resolver o problema unidimensional transiente de fusão ao redor de um cilindro horizontal isotérmico, incluindo os efeitos de subresfriamento.

No segundo tipo de formulação, a equação da energia é baseada na entalpia do material e não na temperatura, como se tem na formulação clássica. Este tipo de formulação é comumente chamado de método entálpico. Este método tem a vantagem de não necessitar do conhecimento prévio da posição da interface sólido-líquido para a solução da equação de transferência de calor. A interface é, assim, determinada em uma etapa posterior através da distribuição de entalpia no material de mudança de fase e a equação da energia é escrita de forma única para todo o domínio, sólido e líquido. O método entálpico admite algumas formas de se tratar o efeito de mudança de fase, como por exemplo, o emprego da correção da capacidade térmica, o cálculo da entalpia, ou ainda, a utilização do calor latente de mudança de fase como um termo fonte na equação da

energia. Uma vantagem deste método é poder utilizar uma malha fixa, uma vez que não é necessário a determinação explícita da interface durante a solução do problema.

Furzerland (1980) e Viswanath e Jaluria (1993) realizaram estudos comparativos entre os métodos de imobilização de fronteira e entálpico aplicados à problemas de mudança de fase. Em seu trabalho, Furzerland (1980) utilizou quatro diferentes tipos de métodos numéricos, dois deles baseados em malhas fixas e outros dois em malhas móveis, para resolver problemas de Stefan, unidimensionais e puramente condutivos, com soluções exatas ou numéricas que já se encontravam disponíveis na literatura. Viswanath e Jaluria (1993), empregaram os métodos entálpico e de imobilização de fronteira na resolução do problema de fusão em cavidade fechada levando em conta os efeitos convectivos na fase líquida. Ambos os trabalhos concluíram que o método entálpico é mais adequado para problemas onde a mudança de fase ocorre em uma faixa de temperaturas e quando se tem uma geometria complexa.

Reportando-se, então, aos modelos teóricos envolvendo os efeitos da convecção natural em processos de fusão, tem-se que o primeiro estudo numérico para este tipo de problema foi realizado por Sparrow *et al.* (1977). Uma formulação em variáveis primitivas foi utilizada para determinar o campo de velocidades no líquido fundido ao redor de um cilindro vertical com temperatura constante na superfície. A interface líquido-sólido foi imobilizada através da técnica de transformação de coordenadas. Esta técnica resulta no aparecimento de termos adicionais nas equações governantes do plano transformado, relacionados à curvatura da interface no plano físico. Estes termos foram desprezados por Sparrow *et al.* (1977), limitando o método ao caso onde o raio da interface variava apenas suavemente na direção axial. O método de diferenças finitas implícito foi empregado para a discretização da equações diferenciais governantes e a interface foi determinada explicitamente. Malhas computacionais de 12 X 14 e 12 X 20 pontos nodais nas direções radial e axial foram empregadas quando do uso da relação entre a altura e o raio do cilindro igual a 4 e 10, respectivamente. Foi utilizado um material de mudança de fase com número de Prandtl igual a 7 e valores do número de Rayleigh de $7 \cdot 10^4$, $7 \cdot 10^5$ e $7 \cdot 10^6$, para a simulação numérica do problema. Os resultados auferidos indicaram um maior volume de líquido fundido na parte superior do cilindro, como predizem os estudos experimentais. Sparrow *et al.* (1977) concluíram que a convecção natural não pode ser desprezada no modelamento de problemas desta natureza.

Yao e Chen (1980) determinaram uma solução aproximada para o problema de fusão em torno de um cilindro horizontal isotérmico, utilizando o método de perturbação. Eles estudaram o aumento do efeito da convecção natural sobre o processo e concluíram que a importância deste efeito depende do número de Rayleigh, avaliado com base na espessura característica da camada fundida. A convecção natural foi tratada como uma perturbação no processo de fusão, com transferência de calor condutiva no líquido. Assim, a solução do problema é concentrada no período inicial de tempo, no qual a condução domina o processo, ficando limitada a valores pequenos do número de Rayleigh e Stefan. Yao e Chen (1980) apresentaram resultados para as linhas de corrente, distribuição de temperaturas e velocidades angular e radial em função da posição radial e posição da interface em função do tempo. Estes resultados foram obtidos utilizando-se valores dos números de Rayleigh e Stefan de 500 e 0,1, respectivamente.

Yao e Cherney (1981) resolveram um problema similar ao de Yao e Chen (1980), utilizando o método integral. Neste estudo foi avaliado também o efeito do subresfriamento do material de mudança de fase no início do processo. Os resultados obtidos demonstraram que são cinco os parâmetros que influenciam no processo de fusão: a taxa de subresfriamento, o número de Rayleigh, Stefan e Prandtl, e a relação entre as difusividades térmicas do material nas fases sólida e líquida. Para uma taxa nula de subresfriamento, os resultados de Yao e Cherney (1981) apresentaram boa concordância com os de Yao e Chen (1980).

Rieger *et al.* (1982) resolveram numericamente o problema de fusão ao redor de um cilindro horizontal com condição de temperatura constante na superfície e considerando a convecção natural na fase líquida. Eles utilizaram a técnica de coordenadas ajustadas ao corpo ("body-fitted coordinates") para fixar a frente de fusão. Esta técnica é similar à transformada de Landau. A diferença é que na transformada de Landau, o novo sistema de coordenadas é obtido através de equações algébricas, enquanto na técnica de coordenadas ajustadas ao corpo, utiliza-se equações diferenciais para determinar o novo domínio. Foi usada uma formulação em função de corrente e vorticidade. Uma malha computacional de 31 X 21 pontos nodais, respectivamente nas direções angular e radial, foi utilizada na simulação numérica. Valores do número de Rayleigh de 10.000, 37.500, 75.000 e 150.000 e um material de mudança de fase com número de Prandtl igual a 50 foram os parâmetros empregados para a obtenção da solução numérica. Os resultados obtidos para o perfil da frente de fusão e para a distribuição de temperaturas e o campo de

velocidades no líquido confirmaram o domínio da transferência de calor convectiva durante praticamente todo o processo de fusão, como já havia sido observado em estudos experimentais anteriores.

Prusa e Yao (1984a e 1984b) fizeram uma análise numérica dos efeitos da convecção natural durante o processo de fusão em torno de um cilindro horizontal. Em ambos os trabalhos, foi utilizado o método de transformação de coordenadas para fixar a interface móvel e irregular e o método de diferenças finitas para obter a solução numérica do problema. Um aspecto interessante em ambos os estudos foi o uso de uma solução por similaridade para remover a singularidade inicial do problema. O campo de velocidades no líquido foi determinado pelo uso de uma formulação em função de corrente e vorticidade. A condição de contorno de fluxo de calor constante na superfície do cilindro foi empregada por Prusa e Yao (1984a), enquanto, Prusa e Yao (1984b) utilizaram a condição de temperatura constante. Prusa e Yao (1984a) determinaram, além da solução numérica, uma solução através do método de perturbação. O material de mudança de fase empregado em Prusa e Yao (1984a) foi o octadeceno que possui um número de Prandtl igual a 54. Ainda em relação ao estudo de Prusa e Yao (1984a), foram apresentados resultados para os parâmetros do número de Rayleigh e Stefan de 5.000 e 0,374, respectivamente. No estudo de Prusa e Yao (1984b), os resultados foram auferidos para valores do número de Rayleigh, Stefan e Prandtl de 500, 0,1 e 1, respectivamente. A solução numérica, em ambos os estudos, indicou a existência de três estágios no processo de fusão. No primeiro estágio, a transferência de calor é dominada pela condução e todas as características do processo de fusão estão relacionadas ao número de Stefan. O segundo estágio é caracterizado pela transição entre a condução dominante e a convecção dominante. Finalmente, no último estágio, a convecção é o mecanismo de transferência de calor dominante. Nesta etapa do processo, o perfil da interface, o campo de temperaturas e a taxa de transferência de calor são fortemente influenciadas pelo número de Rayleigh. Os resultados numéricos mostrados por Prusa e Yao (1984a) para o volume fundido em função do tempo apresentaram uma boa concordância com os resultados obtidos pelos autores através do método de perturbação, e, também, com os trabalhos experimentais de Bathelt *et al.* (1979a) e Goldstein e Ramsey (1979), apenas para o primeiro estágio do processo onde a condução é dominante. No estudo de Prusa e Yao (1984b) foram realizadas comparações entre os resultados numéricos obtidos por estes e aqueles obtidos por Rieger *et al.* (1982) para a posição da interface, utilizando valores do número de Rayleigh,

Prandtl, Stefan e Fourier, respectivamente de 10.000, 50, 0.02 e 14,1. Os resultados apresentaram uma boa concordância.

Ho e Chen (1986) realizaram um estudo numérico da fusão do gelo ao redor de um cilindro horizontal isotérmico, considerando os efeitos convectivos na fase líquida. Este tipo de problema se distingue daqueles, já anteriormente citados, para outros tipos de materiais de mudança de fase, pelo fato da água apresentar um comportamento anômalo em torno de 4°C, isto é, a sua densidade alcança um valor máximo em torno desta temperatura. Devido a este fato, os autores empregaram a relação dada em Gebhart e Mollendorf (1977), *apud* Ho e Chen (1986), para descrever a variação não linear da densidade em relação a temperatura, para a água na faixa de temperatura de 0 a 20°C, dada por:

$$\rho = \rho_m \left(1 - \text{rsp} |T - T_m|^{1,894816} \right)$$

onde: ρ_m é a densidade da água na temperatura $T_m = 4,029325^\circ\text{C}$ e rsp , o coeficiente de temperatura ($\text{rsp} = 9,297173 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$).

Uma formulação em função de corrente e vorticidade foi empregada pelos autores para determinar o campo de velocidades no líquido fundido. A solução numérica foi obtida pelo método de diferenças finitas, utilizando uma malha computacional de 31 X 21 pontos nodais nas direções angular e radial, respectivamente. Valores de temperatura de 4, 6, 8, 9 e 10°C foram admitidos como condição de contorno na superfície do cilindro. Os resultados auferidos para o perfil da interface líquido-sólido mostraram que para valores da temperatura na superfície do cilindro menores que 8°C, a pluma formada devido a convecção natural ocorre na parte inferior do cilindro, enquanto que, para temperaturas maiores que 8°C, ocorre na parte superior, como é normalmente observado nos materiais que não apresentam este comportamento anômalo. A figura (2.6) ilustra este comportamento do perfil da frente de fusão para os valores de temperatura na superfície do cilindro de 4, 8 e 10°C. Um outro aspecto ressaltado pelos autores foi em relação ao valor mínimo da taxa de transferência de calor. Eles constataram através da análise das curvas do número de Nusselt em função do tempo que este valor mínimo da taxa de transferência de calor não ocorre necessariamente durante todo o processo para a temperatura na superfície do cilindro de 8°C, como havia sido previsto no estudo experimental de Herrmann *et al.* (1984),

apud Ho e Chen (1986). Em seu estudo, Ho e Chen (1986) determinaram que o valor mínimo da taxa de transferência de calor ocorre para a temperatura na superfície do cilindro de 9°C. Em vista dessa discordância entre os dois trabalhos, Ho e Chen (1986) salientaram em suas conclusões a necessidade de um outro estudo experimental para esclarecer tal discordância.

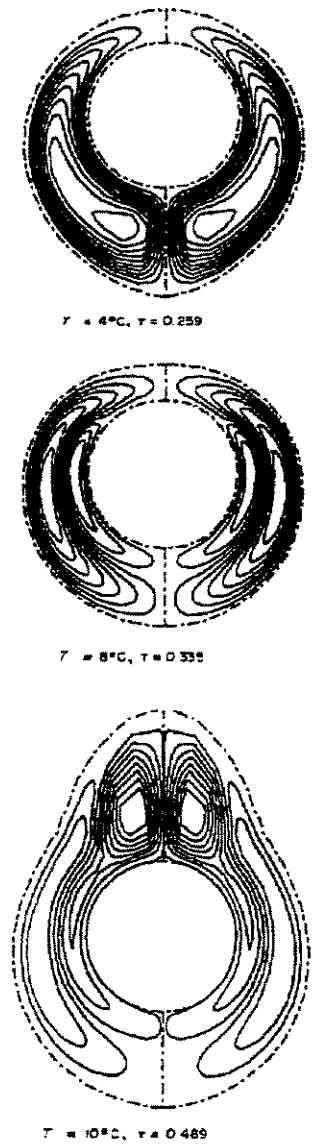


Figura 2.6 – Linhas de corrente para vários valores de temperatura na superfície do cilindro (tempo adimensional, $\tau \times 10^3$ como parâmetro).

Fonte: Ho e Chen (1986).

Um estudo numérico considerando a fusão no interior de um cilindro horizontal, foi feito por Saitoh e Hirose (1982). Uma formulação em função de corrente e vorticidade foi empregada pelos autores. Eles utilizaram também uma transformação de coordenadas para fixar a interface móvel e o método de diferenças finitas explícito para a discretização das equações diferenciais governantes. Saitoh e Hirose (1982) empregaram malhas computacionais de 10 X 14, 14 X 14 e 18 X 14 nas direções radial e angular. É interessante ressaltar neste estudo, a forte instabilidade numérica para altos valores do número de Rayleigh, descrita pelos autores. Para contornar esta instabilidade numérica, foi empregada uma técnica de suavização das variáveis dependentes, baseada no método de aproximação pelos mínimos quadrados. Desta forma, a temperatura, a função de corrente e a vorticidade foram aproximadas por uma função polinomial de sexta ordem. Os resultados obtidos indicaram um perfil côncavo para a frente de fusão, assim como, o aparecimento de vórtices secundários, na parte inferior do cilindro, como mostra a figura (2.7).

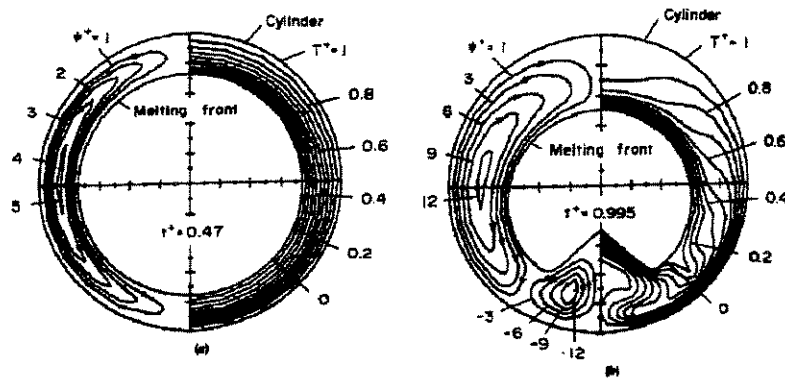


Figura 2.7 – Linhas de corrente e isotérmias no líquido e o perfil da frente de fusão em: (a) $t^+ = 0,47$ e (b) $t^+ = 0,995$ para $Pr = 54,6$, $Ra = 126.300$, $d = 0,02m$ e $\Delta T = 7K$.

Fonte: Saitoh e Hirose (1982).

Rieger *et al.* (1983), além do estudo experimental, já supramencionado na seção 2.2, também abordaram numericamente a fusão no interior de um cilindro horizontal isotérmico. O método de coordenadas ajustadas ao corpo foi usado para fixar a frente de fusão, juntamente com o método de diferenças finitas totalmente implícito para discretização das equações diferenciais governantes. Uma malha computacional com 21 X 31 pontos nodais nas direções radial e angular, respectivamente, foi utilizada na simulação numérica. Ao contrário do trabalho de Saitoh e Hirose (1982), eles determinaram, através dos resultados obtidos numérica e experimentalmente, um perfil convexo para a frente de fusão, na parte inferior do material sólido, como ilustram as figuras (2.8) e (2.9). Segundo Rieger *et al.* (1983), o motivo de tal discrepância em relação aos resultados de Saitoh e Hirose (1982), deveu-se ao fato destes últimos terem usado artifícios matemáticos para contornar a forte instabilidade numérica apresentada pelo modelo para altos valores do número de Rayleigh.

Um outro trabalho numérico envolvendo a convecção natural em um processo de fusão no interior de um cilindro horizontal foi realizado por Ho e Viskanta (1984a). A parte experimental deste estudo já foi descrita anteriormente, na seção 2.2. Os autores fizeram uso da transformação de coordenadas e do método de diferenças finitas para a obtenção da solução numérica. Uma malha computacional com 13 X 21 pontos nodais nas direções radial e angular, respectivamente, foi utilizada na simulação numérica. Os resultados numéricos e experimentais para o perfil da interface e sua posição em função do tempo apresentaram uma boa concordância para o início do processo, quando a condução é dominante. No estágio onde a convecção passa a ser o mecanismo dominante, os resultados mostraram uma considerável discrepância. De acordo com Ho e Viskanta (1984a), isto ocorreu devido a existência de fortes vórtices secundários na parte inferior do cilindro durante o experimento, o que afetou o comportamento do processo de fusão. Correlações para a fração de líquido fundido também foram determinadas no estudo de Ho e Viskanta (1984a).

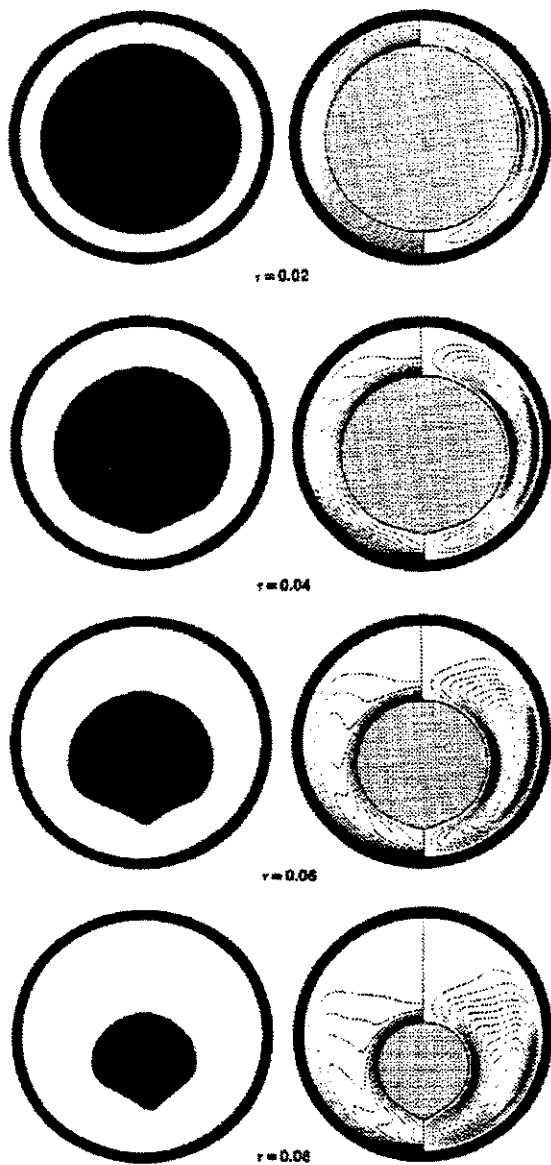


Figura 2.8 – Perfil da região fundida obtido experimental (esquerda) e numericamente (direita) para $Ra \approx 4 \cdot 10^5$ e $Ste = 0,04$ para diferentes tempos adimensionais, τ . Os contornos numéricos são divididos em isotérmias, θ , (esquerda) e linhas de corrente, ψ , (direita).

Fonte: Rieger *et al.* (1983).

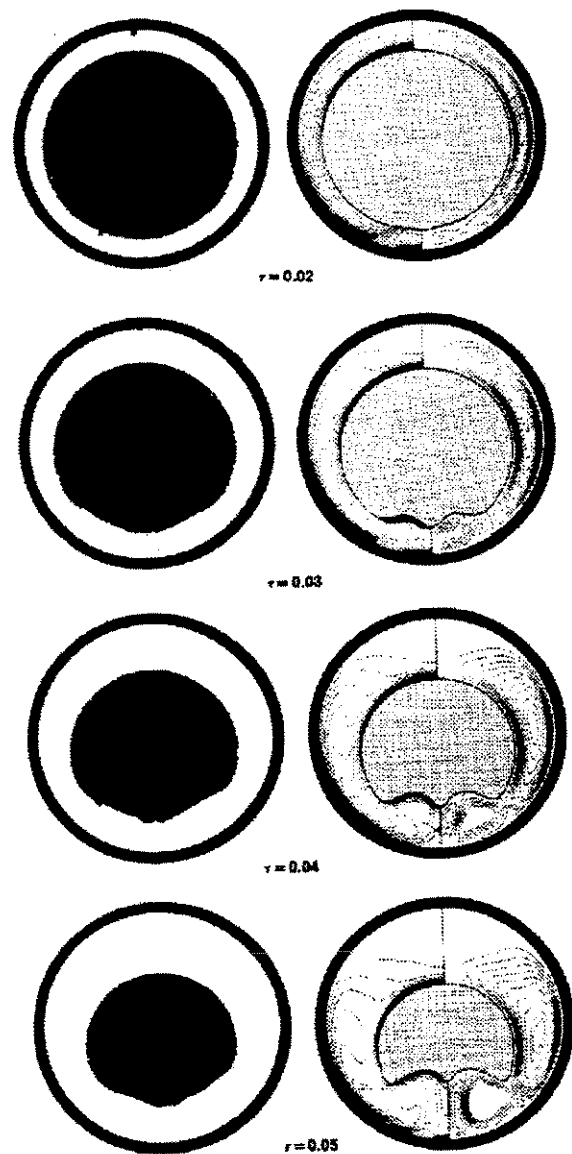


Figura 2.9 – Perfil da região fundida obtido experimental (esquerda) e numericamente (direita) para $Ra \approx 10^6$ e $Ste = 0,1$ para diferentes tempos adimensionais, τ . Os contornos numéricos são divididos em isotérmias, θ , (esquerda) e linhas de corrente, ψ , (direita).

Fonte: Rieger *et al.* (1983).

Ro e Kim (1994) buscaram uma explicação para os diferentes resultados numéricos e experimentais encontrados para o fluxo convectivo no interior de um cilindro horizontal nos estudos de Saitoh e Hirose (1982), Rieger *et al.* (1983) e Ho e Viskanta (1984a). Ro e Kim (1994) chegaram a conclusão que ambos os formatos da interface são fisicamente possíveis, isto é, o formato côncavo determinado numericamente por Saitoh e Hirose (1982) e o convexo, encontrado numérica e experimentalmente por Rieger *et al.* (1983) e Ho e Viskanta (1984a). O motivo desta multiplicidade de soluções deve-se ao fato que a solução do sistema de equações diferenciais não-lineares de Navier-Stokes não é necessariamente única. Segundo os autores, esta situação peculiar ocorre quando a instabilidade térmica desempenha um papel vital na determinação da estrutura do fluxo convectivo. Esta multiplicidade de soluções é denominada de fenômeno de bifurcação. Ro e Kim (1994) utilizaram uma malha computacional mais refinada que aquelas empregadas pelos outros autores, a qual possuía 31 X 105 pontos nodais nas direções radial e angular, respectivamente, e também o método de coordenadas ajustadas ao corpo para obterem a solução numérica do problema.

Em um estudo recente, Chung *et al.* (1997) resolveram numericamente o problema de fusão no interior de um cilindro horizontal. Eles estenderam a faixa do número de Rayleigh até o valor de $3,0 \cdot 10^7$, para investigar o seu efeito sobre o fluxo convectivo. De acordo com os autores, nenhum trabalho foi encontrado na literatura para valores de Ra maiores ou iguais a $5,0 \cdot 10^6$. O modelo matemático do problema foi formulado em variáveis primitivas, com base no método entálpico, e a frente de fusão foi mantida regular através da técnica de coordenadas ajustadas ao corpo. As equações governantes foram discretizadas pelo método dos volumes finitos e uma malha computacional de 36 X 52 pontos nodais nas direções radial e angular, respectivamente, foi utilizada para obter a solução numérica. Os resultados mostraram que para altos valores do número de Rayleigh, uma estrutura com multicelulas convectivas surge no líquido fundido, na parte inferior do cilindro.

O processo de fusão no interior de um cilindro vertical foi abordado numericamente por Wu e Lacroix (1993). Os efeitos convectivos na fase líquida foram considerados. As equações de conservação governantes são formuladas em termos de função de corrente e vorticidade. A técnica de coordenadas ajustadas ao corpo, juntamente com o método de diferenças finitas foram utilizados para obter a solução numérica do problema. A malha computacional empregada na

solução numérica continha 11 X 31 pontos nodais nas direções radial e axial, respectivamente. Toda a superfície do cilindro, assim, como, as partes superior e inferior, foram mantidas a uma temperatura acima da temperatura de fusão do material. Os resultados obtidos indicaram a presença da convecção de Bénard na região inferior do cilindro.

Em relação aos estudos teóricos para problemas de fusão em geometria plana, incluindo a convecção natural na fase líquida, cita-se primeiramente o de Ho e Viskanta (1984b), do qual já foi referenciada a parte experimental, na seção 2.2. Neste trabalho foi investigada a fusão em uma parede isotérmica vertical de um cavidade retangular. O modelo matemático foi baseado na formulação em função de corrente e vorticidade. A técnica de transformação de coordenadas, juntamente com o método de diferenças finitas foi utilizado para a obtenção da solução numérica. Os resultados numéricos e experimentais para a posição da interface, o volume de líquido fundido e o coeficiente de transferência de calor na parede apresentaram razoáveis discrepâncias. Tais discrepâncias, segundo os autores, deveu-se ao fato de não ter sido considerada no modelo teórico a expansão volumétrica associada ao processo de fusão e, também, devido ao uso de uma malha não refinada (13 X 21), no procedimento numérico.

Okada (1984) também resolveu numericamente o problema de fusão em uma parede isotérmica vertical de um cavidade retangular. A formulação matemática e o procedimento numérico foram similares àqueles utilizados por Ho e Viskanta (1984b). O autor comparou seus resultados numéricos para a posição da frente de fusão com resultados experimentais obtidos pelo mesmo e publicados em Okada (1983), *apud* Okada (1984). Os resultados numéricos e experimentais apresentaram boa concordância.

Um outro estudo para o mesmo tipo de problema citado nos dois últimos trabalhos, foi realizado por Gadgil e Gobin (1984). Eles utilizaram uma formulação em termos das variáveis primitivas e uma aproximação quase-estática para a solução numérica. Um aspecto interessante relatado pelos autores foi a supressão dos termos contendo derivadas de primeira e segunda ordem da interface em relação à coordenada vertical, oriundos da transformação de coordenadas. Esta simplificação acarreta uma diferença de aproximadamente 8% na posição da interface determinada numericamente em relação àquela obtida experimentalmente. A comparação entre os resultados numéricos para a posição da interface obtidos por Gadgil e Gobin (1984) e os

resultados experimentais de Hale e Viskanta (1978), *apud* Gadgil e Gobin (1984), concordaram razoavelmente bem.

Benard *et al.* (1986) investigaram numericamente o processo de fusão em uma parede isotérmica vertical de um cavidade retangular, considerando o sólido inicialmente subresfriado. O modelo matemático foi baseado na formulação em variáveis primitivas e na técnica de transformação de coordenadas. Benard *et al.* (1986) também desprezaram os termos contendo derivadas de primeira e segunda ordem da interface em relação à coordenada vertical. O método de volumes de controle foi utilizado para a discretização das equações diferenciais governantes. Uma malha computacional com 21 X 23 pontos nodais para a fase líquida e outra com 14 X 20, para a fase sólida foi empregada na solução numérica. Os parâmetros considerados pelos autores para a simulação numérica consistiram no número de Rayleigh igual a 10^9 , número de Stefan menor que 0,2 e número de Prandtl igual a 50. Os resultados numéricos obtidos para a posição da interface e para as distribuições de temperaturas nas fases sólida e líquida mostraram uma excelente concordância em relação aos experimentais, descritos na seção 2.2.

Encerrando a revisão dos principais trabalhos experimentais e numéricos disponíveis na literatura, é possível se ter uma breve idéia do desenvolvimento das pesquisas em torno dos problemas de mudança de fase, nos quais o mecanismo de transferência de calor condutivo não é mais o único a ser considerado. Os efeitos da convecção natural sobre o processo tornaram-se evidentes através das diversas pesquisas experimentais e numéricas realizadas.

Faz-se mister ressaltar ao final dessa revisão da literatura alguns aspectos que diferenciarão o presente estudo daqueles acima referenciados.

Como já mencionado no capítulo precedente, este trabalho abordará o problema de fusão ao redor de um cilindro horizontal aquecido. Neste tipo de geometria, todos os estudos encontrados na literatura modelam o problema utilizando uma formulação em função de corrente e vorticidade. Nesta formulação a pressão é eliminada do equacionamento, evitando, assim, o difícil acoplamento pressão-velocidade. Por outro lado, o inconveniente em se empregar uma formulação em função de corrente e vorticidade advém da dificuldade em fornecer condições de contorno para a vorticidade, uma variável de difícil interpretação física e desconhecida no

momento de aplicar as condições de contorno do problema. Além disso, segundo Maliska (1995), o acoplamento entre a função de corrente e a vorticidade, dado por meio das condições de contorno, torna o processo iterativo instável e de convergência lenta. Desta forma, optou-se por utilizar no presente estudo uma formulação em variáveis primitivas, levando em consideração, assim, o acoplamento entre a pressão e a velocidade na resolução das equações da quantidade de movimento e da conservação da massa.

O tratamento numérico utilizado no presente trabalho para resolver o sistema de equações diferenciais governantes baseou-se no método dos volumes de controle. Isto distingue mais uma vez este trabalho em relação à outros similares encontrados na literatura, como pode ser visto em Rieger *et al.* (1982), Prusa e Yao (1984a e 1984b) e Ho e Chen (1986), uma vez que, em todos esses foi empregado o método das diferenças finitas para obter a solução numérica do problema.

Finalmente, quando dos objetivos desse estudo, foi mencionado que a partir dos modelos matemático e numérico estabelecidos será analisada a influência de parâmetros importantes sobre o processo de mudança de fase em armazenadores térmicos, utilizando, entre outros, a água como material de mudança de fase. Para esta análise, será empregada como condições de contorno na superfície do cilindro, temperaturas na faixa de 20 a 30°C. De acordo com a revisão bibliográfica realizada no decorrer deste capítulo, o estudo de Ho e Chen (1986), o único acerca da fusão do gelo ao redor de um cilindro horizontal, utilizou temperaturas na faixa de 4 a 10°C, como condições de contorno na superfície do cilindro. O trabalho de Ho e Chen (1986) foi o pioneiro a analisar numericamente este tipo de problema, objetivando, principalmente, determinar até qual valor de temperatura especificada na superfície do cilindro, o comportamento anômalo da água influencia o perfil da frente de fusão.

Capítulo 3

Modelo Matemático

3.1 Introdução

Neste capítulo será mostrada a modelagem matemática do problema físico em estudo. Como já foi mencionado, previamente, nos objetivos deste estudo, o presente problema consiste na fusão de um material de mudança de fase ao redor de um cilindro horizontal aquecido. Durante o processo de fusão, correntes convectivas se formam na fase líquida, devido aos gradientes de temperatura presentes nesta região. Assim, a partir do conhecimento do fenômeno físico, será elaborado um modelamento matemático que possa representar tal fenômeno teoricamente. O equacionamento do modelo de transferência de calor envolvendo mudança de fase é baseado nas equações da conservação de massa e energia, nas equações da quantidade de movimento e na equação do balanço térmico para a frente de fusão. Esta última é, na realidade, uma das condições de contorno do problema que caracteriza o fenômeno da mudança de fase. Este modelo inclui também o uso da técnica de imobilização de fronteira com o objetivo de fixar a frente de fusão que se desloca com o tempo.

3.2 Modelagem Matemática

3.2.1 Hipóteses para a Formulação Matemática

Antes da descrição do problema físico serão relacionadas abaixo as hipóteses simplificadoras assumidas na elaboração do modelo:

- i. O modelo proposto é bidimensional e transiente.
- ii. Os efeitos de convecção natural são considerados.
- iii. As propriedades termofísicas do material de mudança de fase são consideradas constantes. No caso da densidade, a sua variação é considerada apenas no termo relativo à força de empuxo nas equações de Navier-Stokes. Esta hipótese é conhecida como aproximação de Boussinesq.
- iv. O fluido é newtoniano e incompressível.
- v. O material de mudança de fase se encontra no momento inicial do processo na fase sólida, com temperatura uniforme e igual a sua temperatura de fusão.

3.2.2 Problema Físico e Equações Governantes

O problema físico é ilustrado na figura (3.1). O sistema é formado por um cilindro horizontal, de raio r_0 , imerso em um meio sólido infinito, sendo este o material de mudança de fase. No instante inicial, $t = 0$, o material de mudança de fase se encontra à temperatura de fusão, T_m . O processo de fusão tem início, então, quando a superfície do cilindro é aquecida a uma temperatura constante, T_0 , maior que a temperatura de fusão do material. Uma outra condição de contorno na superfície do cilindro, também considerada neste estudo, será a de fluxo de calor especificado, q . Essa última condição, todavia, não é mostrada na figura (3.1).

No decorrer do processo, a interface entre as regiões líquida e sólida se mantém à temperatura de fusão do material, sendo a sua posição descrita pela variável $r_L(\theta, t)$. Devido às correntes convectivas que se formam na região fundida, o perfil da interface líquido-sólido torna-se irregular, apresentando uma assimetria em torno do eixo do cilindro.

Como pode-se observar ainda na figura (3.1), o problema apresenta simetria no plano vertical. Fazendo-se uso desta característica do modelo, um menor esforço computacional será despendido na resolução das equações governantes.

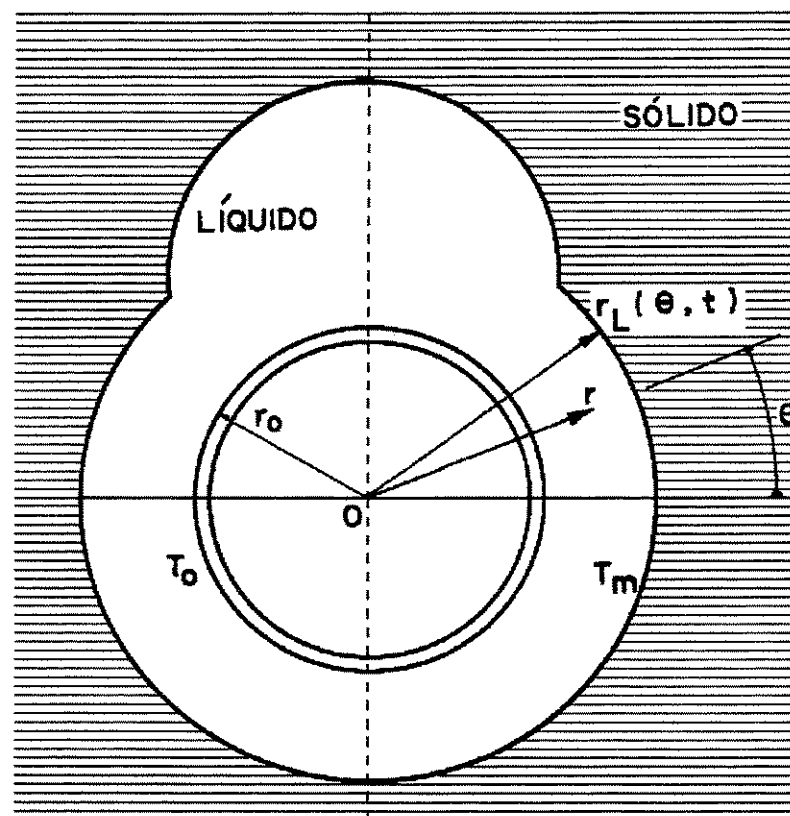


Figura 3.1 - Diagrama esquemático do problema físico.

Em problemas que envolvem convecção natural é comum tratar o termo relativo à força de empuxo nas equações da quantidade de movimento introduzindo uma relação linear entre a massa específica e a temperatura, expressa por:

$$\rho = \rho_m - \beta \rho_m (T - T_m)$$

onde: ρ_m é a densidade de referência (densidade à temperatura de fusão, T_m).

No caso específico do material de mudança de fase tratar-se da água, faz-se necessário utilizar uma relação para descrever a variação entre a massa específica e a temperatura que leve em consideração o comportamento anômalo desta em torno de 4°C. Para tanto, será adotada a relação não linear, dada por Gebhart e Mollendorf (1977), *apud* Ho e Chen (1986) e expressa na seguinte forma:

$$\rho = \rho_r \left(1 - r_{sp} |T - T_r|^{1,894816} \right)$$

onde: ρ_r é a densidade da água na temperatura de referência $T_r = 4,029325^\circ\text{C}$ e r_{sp} , o coeficiente de temperatura ($r_{sp} = 9,297173 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$).

Destarte, descrito o problema físico e levando em consideração as hipóteses assumidas para o modelo, tem-se que as equações básicas de transferência de calor em coordenadas cilíndricas, na forma dimensional e conservativa, que governam o fenômeno são as seguintes:

- Equação da conservação da energia

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r V_R^* T)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (V_\theta^* T)}{\partial \theta} = \alpha \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \quad (3.1)$$

- Equação da conservação da massa

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r V_R^*)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} = 0 \quad (3.2)$$

- Equação da quantidade de movimento na direção angular

$$\frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r V_R^* V_{\theta}^*)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (V_{\theta}^*)^2}{\partial \theta} + \frac{V_R^* V_{\theta}^*}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{r \partial \theta} + \bar{\Lambda} \cos \theta$$

$$+ \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_{\theta}^*}{\partial \theta^2} - \frac{V_{\theta}^*}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_R^*}{\partial \theta} \right)$$
(3.3)

- Equação da quantidade de movimento na direção radial

$$\frac{\partial V_R^*}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r (V_R^*)^2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (V_{\theta}^* V_R^*)}{\partial \theta} - \frac{(V_{\theta}^*)^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial r} + \bar{\Lambda} \sin \theta$$

$$+ \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_R^*}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_R^*}{\partial \theta^2} - \frac{V_R^*}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial \theta} \right)$$
(3.4)

onde: V_{θ}^* e V_R^* são, respectivamente, as velocidades nas direções angular e radial, r e θ são, respectivamente, as coordenadas espaciais na direção radial e angular, T , a temperaturas da fase líquida, α , a difusividade térmica do líquido, ρ é a densidade do líquido, ν , a viscosidade cinemática, β é o coeficiente de expansão térmica, g , a aceleração da gravidade e P^* é a pressão.

Nas equações (3.3) e (3.4), acima, no caso do material de mudança de fase tratar-se da água, o termo $\bar{\Lambda}$ é expresso por:

$$\bar{\Lambda} = \frac{r \rho g |T - T_r|^{1,894816}}{(1 - r \rho |T - T_r|^{1,894816})}$$

E para qualquer outro material, $\bar{\Lambda}$ é dado por:

$$\bar{\Lambda} = \beta g (T - T_m)$$

As condições de contorno e inicial associadas as equações (3.1) a (3.4) são dadas por:

$$\left. \begin{array}{l} T = T_m \\ V_\theta^* = 0 \\ V_R^* = 0 \end{array} \right\} \text{em } t = 0 \quad (3.5)$$

$$\left. \begin{array}{l} T = T_o \\ V_\theta^* = 0 \\ V_R^* = 0 \end{array} \right\} \text{em } r = r_o, t > 0 \quad (3.6)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \\ V_\theta^* = 0 \\ \frac{\partial V_R^*}{\partial \theta} = 0 \end{array} \right\} \text{em } \theta = \pm \frac{\pi}{2}, t > 0 \quad (3.7)$$

A equação (3.6) é empregada para a condição de temperatura constante na parede do cilindro. No caso da parede do cilindro ser aquecida por um fluxo de calor constante, a condição de contorno é dada por:

$$\left. \begin{array}{l} -k \frac{\partial T}{\partial r} = q \\ V_\theta^* = 0 \\ V_R^* = 0 \end{array} \right\} \text{em } r = r_o, t > 0 \quad (3.8)$$

onde: k é a condutividade térmica do líquido

Completando a formulação matemática do problema, tem-se as condições de contorno na interface líquido-sólido. A condição de continuidade da temperatura e de não deslizamento na interface, são expressas por:

$$\left. \begin{array}{l} T = T_m \\ V_\theta^* = 0 \\ V_R^* = 0 \end{array} \right\} \text{em } r = r_L, t > 0 \quad (3.9)$$

O balanço de energia na fronteira de mudança de fase, como está demonstrado em Özisik (1993), é obtido através da expressão:

$$\left[1 + \left(\frac{1}{r_L} \frac{\partial r_L}{\partial \theta} \right)^2 \right] \left(-k \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \rho L \frac{\partial r_L}{\partial t} \quad \text{em } r = r_L, t > 0 \quad (3.10)$$

onde: L é o calor latente de fusão.

A equação (3.10) expressa a taxa de calor latente absorvida pela interface durante o processo de mudança de fase. Esta taxa é igual ao fluxo de calor condutivo na fase líquida. O primeiro termo do lado esquerdo da equação, contendo a derivada de primeira ordem da posição da interface em relação à coordenada angular, surge devido ao aspecto bidimensional da frente de fusão.

3.2.3 Imobilização da Fronteira Móvel

A existência de um domínio de fronteira móvel, irregular e não conhecida *a priori* torna bastante complexa a resolução dos problemas envolvendo mudança de fase, como já foi mencionado anteriormente. No sentido de contornar esta dificuldade, optou-se, neste trabalho, pela utilização da técnica de imobilização de fronteira. Levando-se em consideração que o problema possui uma geometria simples e que a mudança de fase no material ocorre à uma temperatura discreta, a técnica de imobilização de fronteira apresenta-se bastante adequada e precisa nestes casos, conforme Furzerland (1980) e Viswanath e Jaluria (1993).

Para implementar a técnica de imobilização de fronteira, o plano físico do problema, correspondente às coordenadas r e θ , é modificado para um plano transformado através da introdução de um novo sistema de coordenadas, η e θ . É importante ressaltar que a coordenada

angular não sofre nenhuma transformação ao passar do plano físico para o plano transformado. Com isto, a frente de fusão passa a ser estacionária e paralela à superfície do cilindro. A nova coordenada do sistema, na forma adimensional, é dada abaixo.

$$\eta = \frac{r - r_0}{r_L - r_0}$$

Ou ainda, se o raio adimensional for definido como segue,

$$R = \frac{r}{r_0}$$

$$R_L = \frac{r_L}{r_0}$$

A variável η pode ser escrita na forma:

$$\eta = \frac{R - 1}{\Delta_L}$$

onde Δ_L é a espessura da camada líquida, dada por:

$$\Delta_L = R_L - 1$$

No novo sistema de coordenadas, o domínio do problema fica, desta forma, delimitado por $0 \leq \eta \leq 1$ e $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. A superfície do cilindro e a interface líquido-sólido passa, então, a serem definidas pelos valores constantes $\eta = 0$ e $\eta = 1$, respectivamente.

Juntamente com a mudança de coordenadas, realizou-se a adimensionalização da variável temporal e das variáveis dependentes do problema, com o objetivo de reduzir o número de parâmetros empregados na solução das equações governantes, bem como, de generalizar tais equações para facilitar, posteriormente, a comparação dos resultados deste estudo com os de

outros trabalhos similares disponíveis na literatura. As variáveis adimensionais são, então, definidas pelas expressões:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{\alpha_L t}{r_o^2} Ste \\ \phi &= \frac{T - T_m}{T_o - T_m} \end{aligned} \right\} \text{para a condição de temperatura especificada na superfície do cilindro}$$

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{\alpha_L t}{r_o^2} St_q \\ \phi &= \frac{T - T_m}{\left(\frac{qr_o}{k} \right)} \end{aligned} \right\} \text{para a condição de fluxo de calor especificado na superfície do cilindro}$$

$$V_\theta = \frac{V_\theta^* r_o}{\alpha}$$

$$V_R = \frac{V_R^* r_o}{\alpha}$$

$$P = \frac{P^*}{\rho(\alpha/r_o)^2}$$

Também foram definidos os seguintes grupos adimensionais:

- O número de Stefan, dados por, $Ste = \frac{C_p(T_o - T_m)}{L}$ e $St_q = \frac{C_p qr_o}{Lk}$, respectivamente, para as condições de temperatura e fluxo de calor especificados na superfície do cilindro. Este parâmetro adimensional expressa a razão entre o calor sensível e o calor

latente do material de mudança de fase. O número de Stefan é de fundamental importância em problemas relacionados à mudança de fase.

- O número de Rayleigh, expressos por, $Ra = \frac{g\beta(T_o - T_m)r_o^3}{\nu\alpha}$ ou $Ra_q = \frac{g\beta q r_o^4}{\nu\alpha k}$, dependendo da condição de contorno no cilindro. No caso do material de mudança de fase ser dado pela água, o número de Rayleigh para a condição de temperatura especificada é expresso na forma, $Ra_{\text{agua}} = \frac{g r_{sp} |T_o - T_m|^{1,894816} r_o^3}{\nu\alpha (1 - r_{sp} |T_{\text{mean}} - T_r|^{1,894816})}$. Sendo T_{mean} a temperatura de mistura na fase líquida, dada por: $T_{\text{mean}} = \frac{T_o + T_m}{2}$, utilizada para determinar as propriedades físicas da água.
- O número de Prandtl, $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$.

Para evitar colocar expressões similares para os casos onde forem consideradas as condições de contorno de temperatura ou fluxo de calor especificados, apenas pelo fato de ter-se simbologias diferentes para o número de Stefan e Rayleigh, utilizar-se-á, de forma genérica, os símbolos St_e e Ra para o equacionamento matemático e numérico. Apenas no capítulo 5, no qual são apresentados e discutidos os resultados obtidos a partir do modelo matemático e numérico, far-se-á alusões particulares, utilizando St_q e Ra_q quando a condição de fluxo de calor especificado for considerada. Salienta-se, todavia, que será feita a distinção entre a simbologia do número de Rayleigh para o caso onde se utiliza a água, Ra_{agua} , ou quando do emprego de um outro material de mudança de fase qualquer, Ra_{\cdot} , em todo o equacionamento deste e do capítulo subsequente.

Por fim, para que se possa representar as equações governantes do problema no plano transformado, faz-se necessário reescrever as derivadas de primeira e segunda ordem em relação as variáveis do plano físico, presentes nos termos das equações (3.1) a (3.4), (3.7), (3.8) e (3.10), em função das novas variáveis η , θ e τ . Assim, as derivadas de uma função genérica ϕ em relação às variáveis do novo sistema de coordenadas, são expressas da seguinte forma:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial R} \right|_{\theta,t} = \left. \frac{\partial \eta}{\partial R} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_{\theta,\tau} = \left. \frac{1}{\Delta_L} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_{\theta,\tau} \quad (3.11a)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial \phi}{\partial R} \right) \right|_{\theta,t} = \left. \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial \eta}{\partial R} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right|_{\theta,\tau} = \left. \frac{1}{\Delta_L^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \right|_{\theta,\tau} \quad (3.11b)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right|_{R,t} = \left. \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_{\theta,\tau} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right|_{\eta,\tau} = - \left. \frac{\eta}{\Delta_L} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_{\theta,\tau} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right|_{\eta,\tau} \quad (3.11c)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \right|_{R,t} &= \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right|_{\theta,\tau} + \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right|_{\eta,\tau} = \left. \frac{2\eta}{\Delta_L^2} \left(\frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_{\theta,\tau} \\ &\quad - \left. \frac{\eta}{\Delta_L} \frac{\partial^2 \Delta_L}{\partial \theta^2} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_{\theta,\tau} - \left. \frac{\eta}{\Delta_L} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial \eta} \right|_{\theta,\tau} + \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right|_{\eta,\tau} \end{aligned} \quad (3.11d)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{R,\theta} = \left. \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_{\theta,\tau} + \left. \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right|_{\eta,\theta} = \frac{\alpha \text{Ste}}{\Gamma_o^2} \left(- \left. \frac{\eta}{\Delta_L} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \tau} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_{\theta,\tau} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right|_{\eta,\theta} \right) \quad (3.11e)$$

Logo, substituindo-se as variáveis adimensionais já definidas e as derivadas (3.11) nas equações (3.1) a (3.10), obtém-se as equações governantes do modelo no plano transformado, como são apresentadas a seguir.

- Equação da conservação da energia

$$\text{Ste} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{1}{R \Delta_L} \frac{\partial}{\partial \eta} (R V_R \phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial (V_\theta \phi)}{\partial \theta} = \frac{1}{R \Delta_L} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{R}{\Delta_L} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \Omega_{\text{liq}} \quad (3.12)$$

onde:

$$\Omega_{\text{liq}} = \frac{\eta \text{Ste} \partial \Delta_L}{\Delta_L} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \frac{\eta}{R \Delta_L} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \frac{\partial (V_\theta \phi)}{\partial \eta} + \frac{2\eta}{R^2 \Delta_L^2} \left(\frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \frac{\eta}{R^2 \Delta_L} \frac{\partial^2 \Delta_L}{\partial \theta^2} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \frac{\eta}{R^2 \Delta_L} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial \eta}$$

- Equação da conservação da massa

$$\frac{1}{R \Delta_L} \frac{\partial}{\partial \eta} (R V_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \Omega_{\text{cm}} = 0 \quad (3.13)$$

onde:

$$\Omega_{\text{cm}} = \frac{\eta}{R \Delta_L} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \eta}$$

- Equação da quantidade de movimento na direção angular

$$\text{Ste} \frac{\partial V_\theta}{\partial \tau} + \frac{1}{R \Delta_L} \frac{\partial}{\partial \eta} (R V_R V_\theta) + \frac{1}{R} \frac{\partial V_\theta^2}{\partial \theta} = -\frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{R \Delta_L} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\text{Pr} R}{\Delta_L} \frac{\partial V_\theta}{\partial \eta} \right) + \frac{\text{Pr}}{R^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \Psi_{\text{ang}} + \Omega_{\text{ang}} \quad (3.14)$$

onde:

$$\Psi_{\text{ang}} = \text{Pr} \Lambda \cos \theta - \frac{V_\theta V_R}{R} - \frac{V_\theta \text{Pr}}{R^2} + \frac{2 \text{Pr}}{R^2} \frac{\partial V_R}{\partial \theta}$$

e,

$$\Omega_{\text{ang}} = \frac{\eta}{R\Delta_L} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{\eta \text{Ste}}{\Delta_L} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \tau} \frac{\partial V_\theta}{\partial \eta} + \frac{\eta}{R\Delta_L} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \frac{\partial V_\theta^2}{\partial \eta} + \frac{2\eta \text{Pr}}{R^2 \Delta_L^2} \left(\frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial V_\theta}{\partial \eta} - \frac{\eta \text{Pr}}{R^2 \Delta_L} \frac{\partial^2 \Delta_L}{\partial \theta^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \eta} - \frac{\eta \text{Pr}}{R^2 \Delta_L} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta \partial \eta} - \frac{2\eta \text{Pr}}{R^2 \Delta_L^2} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \frac{\partial V_R}{\partial \eta}$$

- Equação da quantidade de movimento na direção radial

$$\text{Ste} \frac{\partial V_R}{\partial \tau} + \frac{1}{R\Delta_L} \frac{\partial}{\partial \eta} (R V_R^2) + \frac{1}{R} \frac{\partial (V_R V_\theta)}{\partial \theta} = - \frac{1}{\Delta_L} \frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{1}{R\Delta_L} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\text{Pr} R}{\Delta_L} \frac{\partial V_R}{\partial \eta} \right) + \frac{\text{Pr}}{R^2} \frac{\partial^2 V_R}{\partial \theta^2} + \Omega_{\text{rad}} + \Psi_{\text{rad}} \quad (3.15)$$

onde:

$$\Psi_{\text{rad}} = \text{Pr} \Lambda \text{sen } \theta + \frac{V_\theta^2}{R} - \frac{V_R \text{Pr}}{R^2} - \frac{2\text{Pr}}{R^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}$$

e,

$$\Omega_{\text{rad}} = \frac{\eta}{R\Delta_L} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \frac{\partial (V_\theta V_R)}{\partial \eta} + \frac{\eta \text{Ste}}{\Delta_L} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \tau} \frac{\partial V_R}{\partial \eta} + \frac{2\eta \text{Pr}}{R^2 \Delta_L^2} \left(\frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial V_R}{\partial \eta} - \frac{\eta \text{Pr}}{R^2 \Delta_L} \frac{\partial^2 \Delta_L}{\partial \theta^2} \frac{\partial V_R}{\partial \eta} - \frac{\eta \text{Pr}}{R^2 \Delta_L} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \frac{\partial^2 V_R}{\partial \theta \partial \eta} + \frac{2\eta \text{Pr}}{R^2 \Delta_L} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \eta}$$

Sendo Λ , no caso da água ser o material de mudança de fase, dado por:

$$\Lambda = \text{Ra}_{\text{agua}} |\phi - \phi_r|^{1,894816}$$

$$\text{com, } \phi_r = \frac{T_r - T_m}{T_o - T_m}$$

E para qualquer outro material, Λ é expresso como:

$$\Lambda = Ra \phi$$

E as condições de contorno pertinentes às equações (3.12) a (3.15), que são:

$$\left. \begin{array}{l} \phi = 0 \\ V_{\theta} = 0 \\ V_R = 0 \end{array} \right\} \tau = 0 \quad (3.16)$$

$$\left. \begin{array}{l} \phi = 1 \\ V_{\theta} = 0 \\ V_R = 0 \end{array} \right\} \text{em } \eta = 0, \tau > 0 \quad (3.17)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \\ V_{\theta} = 0 \\ \frac{\partial V_R}{\partial \theta} = 0 \end{array} \right\} \text{em } \theta = \pm \frac{\pi}{2}, \tau > 0 \quad (3.18)$$

No caso de fluxo de calor especificado, a condição de contorno na superfície do cilindro, $\eta = 0$, é dada pela equação (3.19), abaixo.

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{1}{\Delta_L} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 1 \\ V_{\theta} = 0 \\ V_R = 0 \end{array} \right\} \text{em } \eta = 0, \tau > 0 \quad (3.19)$$

Finalmente, as condições na interface líquido-sólido, são expressas por:

$$\left. \begin{array}{l} \phi = 0 \\ V_{\theta} = 0 \\ V_R = 0 \end{array} \right\} \text{em } \eta = 1, \tau > 0 \quad (3.20)$$

$$\left[1 + \left(\frac{1}{(\Delta_L + 1)} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \right)^2 \right] \left(-\frac{1}{\Delta_L} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial \Delta_L}{\partial \tau} \quad \text{em } \eta = 1, \tau > 0 \quad (3.21)$$

Comparando as equações (3.1) a (3.4) com as equações (3.12) a (3.15), torna-se óbvio o aumento do grau de complexidade apresentado por estas últimas equações, resultantes da aplicação da transformação de coordenadas para imobilizar a frente de fusão. Todavia, o fato de se trabalhar em um domínio de fronteiras fixas compensa este aumento de complexidade, uma vez que, manipular numericamente expressões do tipo daquelas representadas pelas equações (3.12) a (3.15), não apresenta nenhuma dificuldade maior de resolução.

Nas equações (3.14) e (3.15), as parcelas ψ_{ang} e ψ_{rad} contém termos adimensionalizados oriundos das equações (3.3) e (3.4), ou seja, estes termos já faziam parte das equações na forma dimensional, enquanto que as parcelas Ω_{ang} e Ω_{rad} são compostas pelos termos que surgiram devido a aplicação da transformação de coordenadas, o mesmo ocorrendo com as parcelas Ω_{liq} e Ω_{cm} , relativas, respectivamente, às equações (3.12) e (3.13). Esta divisão das parcelas foi feita com o intuito apenas de facilitar a visualização do efeito da imobilização de fronteira sobre as equações finais do modelo.

Fazendo-se uma análise física dos termos presentes nas parcelas Ω_{cm} , Ω_{liq} , Ω_{ang} e Ω_{rad} , é possível notar que:

- i. Os termos contendo a derivada da frente de fusão em função do tempo adimensional, representam o movimento da interface sólido-líquido que, pelo fato da fronteira de mudança de fase agora estar fixa, reaparece embutido nas equações da conservação de massa e energia e na equação da quantidade de movimento.

- ii. Os termos onde aparecem as derivadas de primeira e segunda ordem da frente de fusão com relação à coordenada angular, θ , bem como, os termos de derivada cruzada, são responsáveis pelo efeito da curvatura da interface líquido-sólido.

A conservação ou não dos termos originados da transformação de coordenadas nas equações governantes será discutida no capítulo 5, quando da apresentação dos resultados obtidos a partir do modelo acima descrito.

No decorrer deste capítulo foram estabelecidas as equações governantes do modelo matemático em questão, juntamente com as suas condições inicial e de contorno associadas, no novo sistema de coordenadas. Este novo sistema advém da técnica de imobilização de fronteiras empregada para fixar a interface móvel do problema. O passo seguinte será buscar uma solução para este sistema de equações, o que possibilitará, assim, o conhecimento dos campos de velocidades, pressões e temperaturas na região líquida, bem como, a posição da frente de fusão ao longo do tempo. Sabe-se, todavia, que a solução deste tipo de problema só poderá ser obtida mediante um modelamento numérico, o qual será descrito no próximo capítulo.

Capítulo 4

Análise Numérica

4.1 Introdução

Este capítulo abordará o procedimento numérico utilizado para a obtenção da solução das equações diferenciais governantes do problema, já apresentadas no capítulo precedente. As equações governantes serão discretizadas pelo método dos volumes finitos, descrito por Patankar (1980), Maliska (1985) e Versteeg e Malalasekera (1995). O método dos volumes finitos, ou volumes de controle, consiste primeiramente na divisão do domínio do problema em volumes finitos, formando, assim, uma malha computacional. Posteriormente, efetua-se a integração, em um volume elementar, da equação diferencial de cada uma das variáveis dependentes envolvidas, ou seja, a temperatura, as velocidades angular e radial e a pressão. Assim, a conservação das propriedades envolvidas fica satisfeita em cada volume elementar da malha e, conseqüentemente, em todo o domínio de solução. Deste procedimento deriva um sistema de equações algébricas para cada variável do modelo. A partir da resolução do sistema de equações algébricas lineares, obtém-se, finalmente, a distribuição da propriedade no domínio do problema.

4.2 Discretização das Equações Diferenciais Governantes pelo Método dos Volumes Finitos

Alguns aspectos do tratamento numérico serão discutidos antes da aplicação, propriamente dita, do método dos volumes finitos nas equações que compõem o modelo matemático do presente estudo.

Sendo os problemas de mudança de fase inerentemente transientes, faz-se necessário decidir quanto ao nível de tempo, no qual serão avaliadas as variáveis dependentes do problema, ou seja, a temperatura, os componentes do vetor velocidade nas direções radial e angular e a pressão. Optou-se, na análise do presente estudo, por utilizar a formulação totalmente implícita. No caso da equação do balanço de energia na interface líquido-sólido, uma formulação explícita será aplicada, conforme o método sugerido por Sparrow e Chuck (1984), o qual será descrito na seção 4.3, mais adiante. A formulação explícita para o balanço de energia na interface permite obter-se uma solução pelo processo de marcha para frente, por não precisar da realização de iterações com o campo de temperaturas e velocidades. Segundo Sparrow e Chuck (1984), o esquema implícito/explicito não proporciona nenhuma limitação no passo de tempo da solução numérica.

A figura (4.1) mostra um volume de controle elementar da malha no plano transformando. O ponto interno **P**, situado no centro do volume de controle elementar, é limitado pelas faces **e**, **w**, **n** e **s**, representadas pelas linhas tracejadas na figura (4.1), e possui como vizinhos, os pontos leste, oeste, norte, sul, nordeste, sudeste, noroeste e sudoeste, representados, respectivamente, por **E**, **W**, **N**, **S**, **NE**, **SE**, **NW** e **SW**. Assume-se, no método dos volumes finitos, que o ponto **P** é representativo de todo o volume no qual ele está situado. A denominação **P** é referente aos pontos internos da malha, não estando aí incluídos aqueles pontos que se encontram sobre as fronteiras do domínio. Estes pontos serão referenciados como pontos de fronteira. Uma vez que tais pontos recaem sobre a face de um volume de controle interno, adjacente à fronteira do domínio, estando, desta forma, diretamente relacionados às condições de contorno do problema, não se faz necessária a obtenção de uma equação discretizada para os mesmos. Portanto, as condições de contorno de temperatura ou fluxo de calor especificados podem ser implementadas diretamente na equação discretizada para o ponto do volume, sobre a face do qual o ponto de fronteira se encontra.

O volume de controle, mostrado na figura (4.1), será referenciado, daqui por diante, como volume de controle principal. O motivo de tal denominação será entendido mais adiante, quando forem realizadas as integrações das equações da quantidade de movimento nas direções radial e angular.

Em seguida, será feita a descrição detalhada do procedimento numérico, partindo das equações diferenciais da conservação da massa e energia, e nas equações da quantidade de movimento, nas direções radial e angular, no plano transformado, até a obtenção do sistema de equações discretizadas para cada uma das variáveis dependentes.

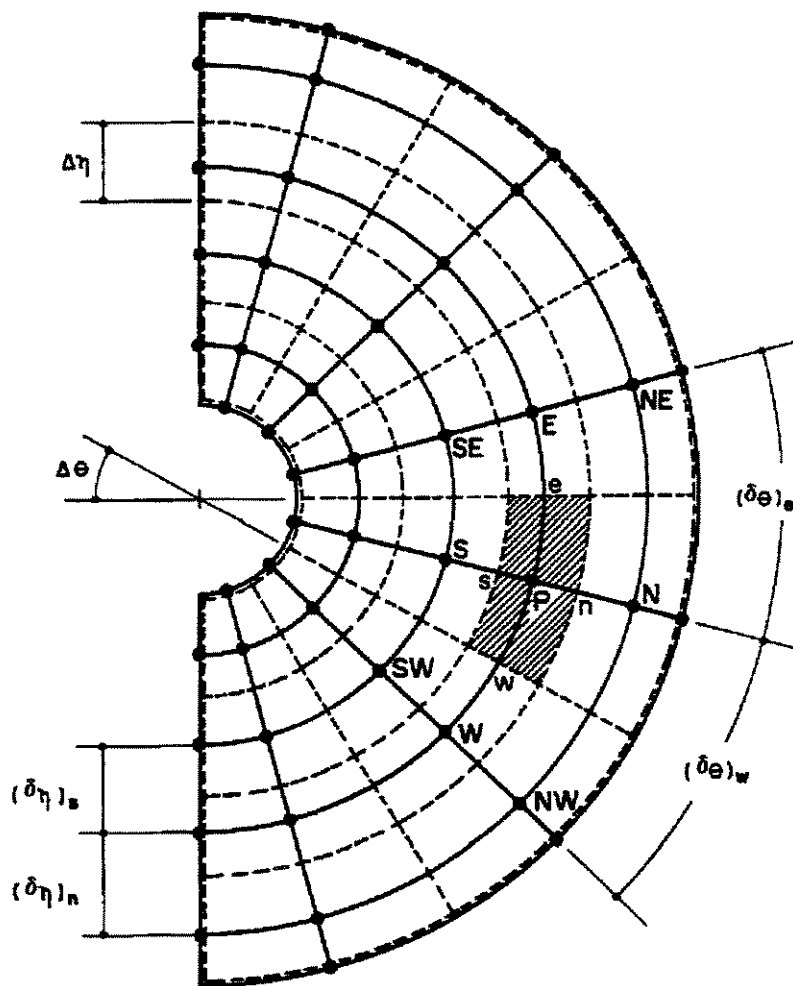


Figura 4.1 – Representação de um volume de controle elementar da malha computacional no domínio transformado.

4.2.1 Equação da Conservação da Massa

A equação da conservação da massa no plano transformado é dada pela expressão (3.12), reescrita abaixo:

$$\frac{1}{R\Delta_L} \frac{\partial}{\partial \eta} (RV_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = \frac{\eta}{R\Delta_L} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \eta} \quad (4.1)$$

A expressão acima será integrada no volume de controle principal, mostrado na figura (4.2), como ilustra a equação (4.2):

$$\int_{w_s}^{e_n} \int_{w_s}^{e_n} \frac{1}{R\Delta_L} \frac{\partial}{\partial \eta} (RV_R) R d\theta \Delta_L d\eta + \int_{w_s}^{e_n} \int_{w_s}^{e_n} \frac{1}{R} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} R d\theta \Delta_L d\eta = \int_{w_s}^{e_n} \int_{w_s}^{e_n} \frac{\eta}{R\Delta_L} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \eta} R d\theta \Delta_L d\eta \quad (4.2)$$

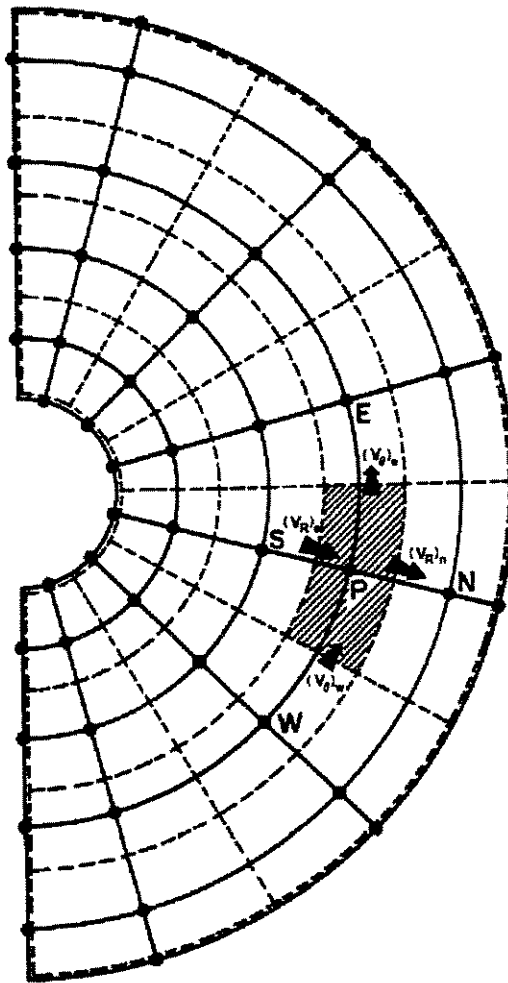


Figura 4.2 – Volume de controle principal para a discretização da equação da conservação da massa.

Apesar da figura (4.2) representar o mesmo volume de controle principal mostrado pela figura (4.1), decidiu-se apresentá-la também apenas por uma questão de melhor visualização dos fluxos de massa que atravessam as faces do volume.

Para resolver as integrais do lado esquerdo da equação (4.2) assume-se que o valor da componente angular do vetor velocidade, V_θ , é uniforme ao longo das faces e e w, e, de forma similar, a componente radial, V_R , é uniforme nas faces n e s. No caso da integral do lado direito da equação (4.2), caracterizado como um termo fonte da equação da conservação da massa, segundo o método dos volumes de controle, tem-se que este termo deve ser avaliado de forma que as variáveis nele contidas, prevaleçam uniformemente em todo o volume de controle. Esta hipótese será utilizada para as integrações dos termos fonte das demais equações governantes do modelo. Procedendo de acordo com tais suposições, obtém-se como resultado da integração da equação (4.2), a seguinte expressão:

$$(RV_R)_n \Delta\theta - (RV_R)_s \Delta\theta + (V_\theta)_e \Delta_L \Delta\eta - (V_\theta)_w \Delta_L \Delta\eta = TF_{cm} \quad (4.3)$$

onde TF_{cm} representa a integração do termo fonte no volume de controle principal. A derivada da componente angular da velocidade, contida neste termo, foi avaliada por diferenças centrais. A expressão discretizada do termo fonte é dada por:

$$TF_{cm} = \frac{\eta_P}{R_P (\Delta_L)_P} \left(\frac{d\Delta_L}{d\theta} \right)_P \frac{1}{2} \left(\frac{(V_\theta)_{NE} - (V_\theta)_{SE}}{2\partial\eta} + \frac{(V_\theta)_{NW} - (V_\theta)_{SW}}{2\partial\eta} \right) \Delta V_P \quad (4.4)$$

com o volume do volume de controle sendo dado por $V_P = R\Delta\theta\Delta_L\Delta\eta$. O índice **P** significa que as variáveis são avaliadas no ponto central do volume de controle, representando todo o volume.

As parcelas do lado esquerdo da equação (4.3), representam os fluxos de massa nas faces do volume de controle principal, nas direções radial e angular, claramente observados através da figura (4.2). Assim, a equação (4.3) pode ser reescrita em uma forma mais compacta, sendo dada por:

$$F_n - F_s + F_e - F_w = TF_{cm} \quad (4.5)$$

onde:

$$F_e = (V_\theta)_e \Delta_L \Delta \eta \quad (4.6a)$$

$$F_w = (V_\theta)_w \Delta_L \Delta \eta \quad (4.6b)$$

$$F_n = R_n \Delta \theta (V_R)_n \quad (4.6c)$$

$$F_s = R_s \Delta \theta (V_R)_s \quad (4.6d)$$

4.2.2 Equação da Conservação da Energia

A equação da conservação da energia no plano transformado, dada no capítulo anterior, é:

$$\text{Ste} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{1}{R \Delta_L} \frac{\partial}{\partial \eta} (R V_R \phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial (V_\theta \phi)}{\partial \theta} = \frac{1}{R \Delta_L} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{R}{\Delta_L} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \Omega_{\text{liq}} \quad (4.7)$$

com Ω_{liq} sendo o termo fonte contendo as parcelas oriundas da transformação de coordenadas,

ou seja:

$$\Omega_{\text{liq}} = \frac{\eta \text{Ste} \partial \Delta_L}{\Delta_L} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \frac{\eta}{R \Delta_L} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \frac{\partial (V_\theta \phi)}{\partial \eta} + \frac{2\eta}{R^2 \Delta_L^2} \left(\frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \frac{\eta}{R^2 \Delta_L} \frac{\partial^2 \Delta_L}{\partial \theta^2} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \frac{\eta}{R^2 \Delta_L} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial \eta} \quad (4.8)$$

A integração da equação (4.7), no volume de controle principal e no tempo, é expressa por:

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{w_s}^{e_n} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} Ste \frac{\partial\phi}{\partial\tau} R d\theta \Delta_L d\eta d\tau + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{w_s}^{e_n} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \frac{1}{R\Delta_L} \frac{\partial J_{\eta}}{\partial\eta} R d\theta \Delta_L d\eta d\tau + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{w_s}^{e_n} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \frac{1}{R} \frac{\partial J_{\theta}}{\partial\theta} R d\theta \Delta_L d\eta d\tau =$$

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{w_s}^{e_n} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \Omega_{liq} R d\theta \Delta_L d\eta d\tau$$
(4.9)

Os termos J_{η} e J_{θ} , na equação (4.9), representam o fluxo total atravessando as faces do volume de controle nas direções radial e angular, respectivamente, e é dado pela soma dos fluxos convectivo e difusivo, como mostra as expressões abaixo:

$$J_{\eta} = R V_R \phi - \frac{R}{\Delta_L} \frac{\partial\phi}{\partial\eta}$$
(4.10a)

$$J_{\theta} = V_{\theta} \phi - \frac{1}{R} \frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$
(4.10b)

De forma análoga ao que já foi mencionado na seção 4.2.1, para efetuar a integração dos termos do lado esquerdo da equação (4.9), assume-se que os fluxos J_{η} e J_{θ} são uniformes ao longo das faces e , w , na direção angular e n e s , na direção radial. Em relação ao termo transiente, a integração é feita no intervalo de tempo de τ a $\tau + \Delta\tau$, considerando o valor da temperatura, ϕ , uniforme em todo o volume de controle. Sendo assim, o resultado da integração da equação (4.9) é dado por:

$$Ste \nabla_P [\phi_P - \phi_P^{\circ}] + (J_n - J_s) \Delta\theta \Delta\tau + (J_e - J_w) \Delta_L \Delta\eta \Delta\tau = \dot{T} F_{liq} \Delta\tau$$
(4.11)

O termo do lado direito da equação (4.11) contém o resultado da integração do termo fonte Ω_{liq} , equação (4.8). Utilizou-se o esquema de diferenças centrais para discretizar as derivadas de primeira ordem e derivada cruzada da temperatura em relação a coordenada radial, η , contidas nas parcelas que constituem o termo Ω_{liq} . Como já foi mencionado na seção 4.2.1, as variáveis

presentes em Ω_{liq} são avaliadas no ponto central do volume de controle, representando, assim, todo o volume.

Na equação (4.11), o termo ϕ_p^o representa a temperatura no instante de tempo anterior, τ , enquanto todos os outros termos nos quais não aparece nenhum sobrescrito, são avaliados no instante de tempo seguinte, $\tau + \Delta\tau$, conforme a formulação totalmente implícita adotada na análise numérica do presente trabalho, já mencionada anteriormente.

Após obtida a expressão resultante da integração da equação diferencial da conservação da energia, equação (4.11), pode-se rearranjá-la em uma forma mais adequada dividindo por $\Delta\tau$, de modo que:

$$\frac{Ste \nabla_P}{\Delta\tau} [\phi_P - \phi_P^o] + (J_n - J_s) + (J_e - J_w) = \dot{TF}_{liq} \quad (4.12)$$

Agora, multiplicando-se a equação (4.5), equação discretizada da conservação da massa, pela variável ϕ_P e, em seguida, subtraindo-a da equação (4.12), acima, advém que:

$$\frac{Ste \nabla_P}{\Delta\tau} [\phi_P - \phi_P^o] + [J_n - F_n \phi_P] - [J_s - F_s \phi_P] + [J_e - F_e \phi_P] - [J_w - F_w \phi_P] = TF_{liq} \quad (4.13)$$

O procedimento realizado acima faz-se necessário uma vez que a equação da conservação da energia foi integrada na sua forma conservativa, o que é, de acordo com Patankar (1980), a metodologia mais conveniente para o método dos volumes finitos.

Patankar (1980) dispôs as parcelas do lado esquerdo da equação (4.13), que contém os fluxos totais, J , nas faces do volume de controle, da seguinte forma:

$$J_n - F_n \phi_P = a_N (\phi_P - \phi_N) \quad (4.14a)$$

$$J_s - F_s \phi_P = a_S (\phi_S - \phi_P) \quad (4.14b)$$

$$J_e - F_e \phi_E = a_E (\phi_P - \phi_E) \quad (4.14c)$$

$$J_w - F_w \phi_W = a_W (\phi_W - \phi_P) \quad (4.14d)$$

sendo as expressões para os fluxos mássicos, F_e , F_w , F_n e F_s , similares àquelas presentes nas equações (4.6) e os coeficientes a_N , a_S , a_E e a_W , dados por:

$$a_N = D_n A(|P_n|) + \|-F_n, 0\| \quad (4.15a)$$

$$a_E = D_e A(|P_e|) + \|-F_e, 0\| \quad (4.15b)$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + \|F_w, 0\| \quad (4.15c)$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + \|F_s, 0\| \quad (4.15d)$$

Nas equações (4.15), o número de Peclet, P , definido como a relação entre o fluxos convectivo e difusivo, e os termos difusivos, D_n , D_s , D_e e D_w , são expressos, respectivamente, por:

$$P = \frac{F}{D}$$

$$D_n = \frac{R_n \Delta \theta}{(\Delta_L)_n \Delta \eta} \quad (4.16a)$$

$$D_s = \frac{R_s \Delta \theta}{(\Delta_L)_s \Delta \eta} \quad (4.16b)$$

$$D_e = \frac{\Delta_L \Delta \eta}{R_e \Delta \theta} \quad (4.16c)$$

$$D_w = \frac{\Delta_L \Delta \eta}{R_w \Delta \theta} \quad (4.16d)$$

A função $A(|P|)$, presente nas expressões (4.15), introduz, de forma genérica, nas equações (4.14), o esquema de interpolação para os termos convectivos e difusivos. Neste estudo, optou-se por utilizar o esquema Power-law, descrito por Patankar (1980). A função de interpolação para o esquema Power-law é dada por:

$$A(|P|) = \max \left\| 0, (1 - 0,1|P|)^5 \right\| \quad (4.17)$$

A expressão acima significa que a função de interpolação será dada pelo maior valor entre 0 e o termo $(1 - 0,1|P|)^5$.

Com isto, a equação (4.13) é, finalmente, disposta na forma discretizada, como segue.

$$a_P \phi_P = a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_E \phi_E + a_W \phi_W + b \quad (4.18)$$

onde:

$$a_P = a_P^\circ + a_N + a_S + a_E + a_W \quad (4.19)$$

$$a_P^\circ = \frac{Ste \nabla_P}{\Delta \tau} \quad (4.20)$$

$$b = a_P^\circ \phi_P^\circ + TF_{liq} \quad (4.21)$$

4.2.3 Equação da Quantidade de Movimento nas Direções Angular e Radial

A discretização das equações da quantidade de movimento nas direções angular e radial seguem basicamente o mesmo procedimento já descrito na seção 4.2.2. Todavia, a localização dos componentes do vetor velocidade no volume de controle elementar da malha computacional não será a mesma utilizada anteriormente para a temperatura. No caso desta última propriedade, a sua localização se deu no centro do volume de controle principal. O campo de pressões, como será visto na seção 4.2.4., também deverá ser armazenado da mesma forma que o campo de temperaturas. Devido ao forte acoplamento existente entre a pressão e a velocidade, surge a dificuldade quanto a escolha de onde armazenar os componentes do vetor velocidade na malha computacional. Pois, de acordo com Patankar (1980), armazenar o campo de velocidades e o de pressões no mesmo ponto da malha implica na possibilidade de ocorrer campos de pressões oscilatórios, que são fisicamente irrealistas. Uma forma de evitar tais soluções errôneas é localizar os componentes da velocidade nas faces do volume de controle principal, entre dois pontos de pressão, gerando assim uma malha deslocada para o campo de velocidades. Isto proporciona estabilidade ao acoplamento pressão-velocidade, uma vez que o gradiente de pressão passa a ser a força motriz da velocidade armazenada num ponto intermediário a este gradiente. As figuras (4.3) e (4.4) ilustram, respectivamente, os volumes de controle deslocados para integração das equações diferenciais da quantidade de movimento para as velocidades V_{θ} e V_R .

Para facilitar a indexação dos componentes do vetor velocidade em relação ao volume de controle deslocado, e conseqüentemente à toda a malha computacional, será assumido o seguinte: os componentes do vetor velocidade, V_{θ} e V_R , em seus volumes de controle deslocados, respectivamente nas direções angular e radial, recebem o índice do ponto ao qual elas se direcionam. Por exemplo, no caso da figura (4.3), a componente angular que se encontra no volume hachurado, está na posição intermediária entre os pontos **P** e **W**, se dirigindo ao ponto **P** (os pontos **P**, **E**, **W**, **N**, **S**, **NE**, **SE**, **NW** e **SW** estão dispostos nas figuras (4.3) e (4.4) com relação ao volume de controle principal). Neste caso, a componente angular receberá o índice **P**, ou seja, $(V_{\theta})_P$. Ainda pela observação da figura (4.3), existe uma outra componente angular na direção do ponto **E**, assim, esta recebe a indexação da forma $(V_{\theta})_E$.

Em relação a componente V_R , a forma de indexação é similar. Procedendo desta maneira, torna-se mais fácil o controle dos índices em termos computacionais, pois a variável que é integrada em um volume de controle deslocado em relação ao volume de controle principal, recebe o mesmo índice da variável que está no ponto central deste último. É importante salientar que os índices são representados pelas letras maiúsculas, se referindo sempre aos pontos da malha e não as faces do volume de controle principal.

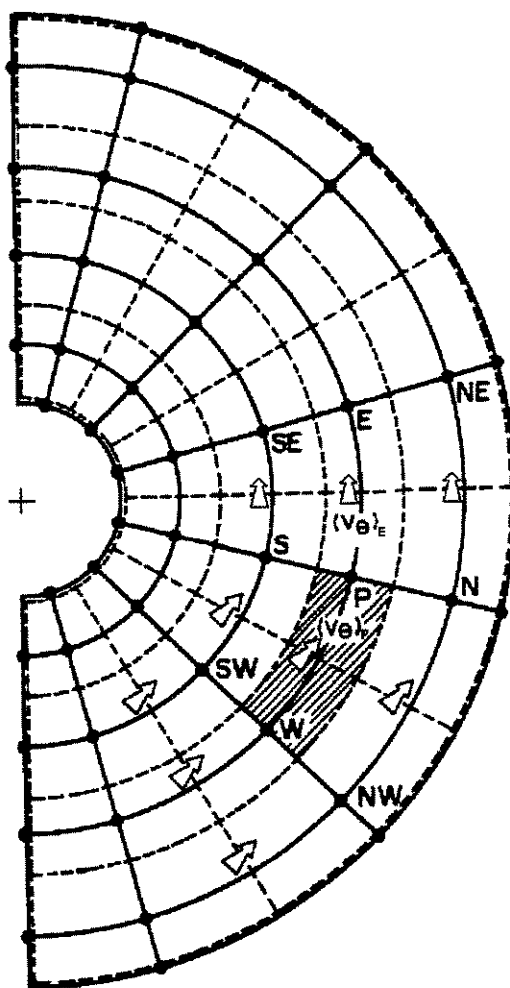


Figura 4.3 –Volume de controle deslocado para a componente da velocidade na direção angular, V_e .

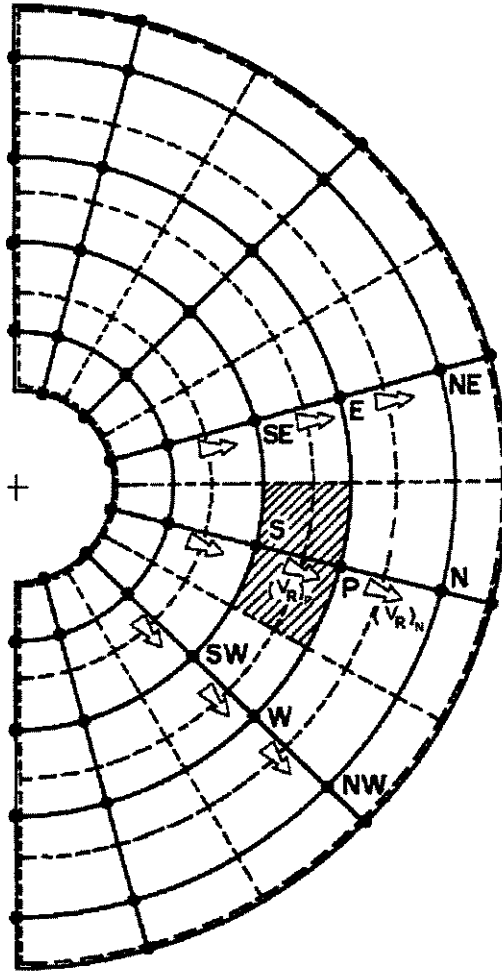


Figura 4.4 –Volume de controle deslocado para a componente da velocidade na direção radial, V_R .

O procedimento para a obtenção das equações discretizadas para os componentes angular e radial do vetor velocidade são análogos. Portanto, as velocidades V_θ e V_R serão representadas pela variável genérica Θ e as equações (3.13) e (3.14) podem ser reescritas de forma mais compacta como:

$$\text{Ste} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{1}{R \Delta_L} \frac{\partial}{\partial \eta} (R V_R \Theta) + \frac{1}{R} \frac{\partial (V_\theta \Theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{R \Delta_L} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\text{Pr} R}{\Delta_L} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\text{Pr}}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + S \quad (4.22)$$

onde o termo S, no caso da componente angular, é dado por:

$$S = -\frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \Psi_{\text{ang}} + \Omega_{\text{ang}} \quad (4.23)$$

com,

$$\Psi_{\text{ang}} = \text{Pr} \Lambda \cos \theta - \frac{V_{\theta} V_R}{R} - \frac{V_{\theta} \text{Pr}}{R^2} + \frac{2 \text{Pr}}{R^2} \frac{\partial V_R}{\partial \theta} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{ang}} = & \frac{\eta}{R \Delta_L} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{\eta \text{Ste}}{\Delta_L} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \tau} \frac{\partial V_{\theta}}{\partial \eta} + \frac{\eta}{R \Delta_L} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \frac{\partial V_{\theta}^2}{\partial \eta} + \frac{2 \eta \text{Pr}}{R^2 \Delta_L^2} \left(\frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial V_{\theta}}{\partial \eta} \\ & - \frac{\eta \text{Pr}}{R^2 \Delta_L} \frac{\partial^2 \Delta_L}{\partial \theta^2} \frac{\partial V_{\theta}}{\partial \eta} - \frac{\eta \text{Pr}}{R^2 \Delta_L} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \frac{\partial^2 V_{\theta}}{\partial \theta \partial \eta} - \frac{2 \eta \text{Pr}}{R^2 \Delta_L^2} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \frac{\partial V_R}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (4.25)$$

e para a componente radial, S pode ser escrito como:

$$S = -\frac{1}{\Delta_L} \frac{\partial P}{\partial \eta} + \Psi_{\text{rad}} + \Omega_{\text{rad}} \quad (4.26)$$

onde Ψ_{rad} e Ω_{rad} são dadas na forma:

$$\Psi_{\text{rad}} = \text{Pr} \Lambda \sin \theta + \frac{V_{\theta}^2}{R} - \frac{V_R \text{Pr}}{R^2} - \frac{2 \text{Pr}}{R^2} \frac{\partial V_{\theta}}{\partial \theta} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{rad}} = & \frac{\eta}{R \Delta_L} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \frac{\partial (V_{\theta} V_R)}{\partial \eta} + \frac{\eta \text{Ste}}{\Delta_L} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \tau} \frac{\partial V_R}{\partial \eta} + \frac{2 \eta \text{Pr}}{R^2 \Delta_L^2} \left(\frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial V_R}{\partial \eta} - \frac{\eta \text{Pr}}{R^2 \Delta_L} \frac{\partial^2 \Delta_L}{\partial \theta^2} \frac{\partial V_R}{\partial \eta} \\ & - \frac{\eta \text{Pr}}{R^2 \Delta_L} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \frac{\partial^2 V_R}{\partial \theta \partial \eta} + \frac{2 \eta \text{Pr}}{R^2 \Delta_L} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \frac{\partial V_{\theta}}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Sendo Λ , no caso da água e de qualquer outro material de mudança de fase, expressos, respectivamente, por:

$$\Lambda = Ra_{\text{agua}} |\phi - \phi_r|^{1,894816}$$

e,

$$\Lambda = Ra \phi$$

Integrando a equação (4.22) nos volumes de controle deslocados, figuras (4.3) e (4.4), respectivamente, para os componentes V_θ e V_R , tem-se de forma genérica que:

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w \int_s^n Ste \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} R d\theta \Delta_L d\eta d\tau + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w \int_s^n \frac{1}{R \Delta_L} \frac{\partial J_\eta}{\partial \eta} R d\theta \Delta_L d\eta d\tau + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w \int_s^n \frac{1}{R} \frac{\partial J_\theta}{\partial \theta} R d\theta \Delta_L d\eta d\tau = \\ + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w \int_s^n S R d\theta \Delta_L d\eta d\tau \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde os fluxos totais, nas direções angular e radial, são:

$$J_\eta = R V_R \Theta - \frac{Pr R}{\Delta_L} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \quad (4.30a)$$

$$J_\theta = V_\theta \Theta - \frac{Pr}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \quad (4.30b)$$

Como resultado da integração da equação (4.29), vem que:

$$Ste \nabla_P [\Theta_P - \Theta_P^\circ] + (J_n - J_s) \Delta \theta \Delta \tau + (J_e - J_w) \Delta_L \Delta \eta \Delta \tau = \dot{TF} \Delta \tau \quad (4.31)$$

onde \dot{TF} para os componentes V_θ e V_R , é dado, respectivamente, por:

$$\dot{TF}_{\text{ang}} = -(P_E - P_P) \Delta_L \Delta \eta + TF_{\text{ang}} \quad (4.32)$$

$$\dot{TF}_{rad} = -(P_p - P_s)R\Delta\theta + TF_{rad} \quad (4.33)$$

As parcelas TF_{ang} e TF_{rad} , nas equações (4.32) e (4.33), contém o resultado da integração dos termos fonte Ψ_{ang} , Ω_{ang} , Ψ_{rad} e Ω_{rad} , dados, respectivamente, pelas equações (4.24), (4.25), (4.27) e (4.28). A discretização das derivadas contidas nos termos Ψ_{ang} , Ω_{ang} e Ψ_{rad} foi feita de forma análoga àquela realizada para a equação (4.8), descrita na seção 4.2.2. No caso do termo Ω_{rad} , as derivadas da forma $\frac{\partial V_R}{\partial \eta}$, representam a derivada de V_R na própria direção da componente da velocidade, diferentemente daquelas para V_θ , nas quais as derivadas espaciais são relativas à direção perpendicular à componente V_θ . Assim, as derivadas espaciais de primeira ordem de V_R foram discretizadas pelo esquema de diferenças para trás (*backward*) e a derivada cruzada dada por $\frac{\partial^2 V_R}{\partial \theta \partial \eta}$, foi discretizada por diferenças centrais.

Dividindo, então, a equação (4.31) por $\Delta\tau$, obtém-se:

$$\frac{Ste \nabla_P}{\Delta\tau} [\Theta_P - \Theta_P^o] + (J_n - J_s) + (J_e - J_w) = \dot{TF} \quad (4.34)$$

É importante deixar claro, antes de proceder com o próximo passo da discretização, que a equação da conservação da massa integrada nos volumes de controle deslocados para os componentes V_θ e V_R , resultam em expressões análogas àquela dada pela equação (4.5). Assim sendo, para evitar descrever procedimentos similares aos que já foram discutidos, a equação (4.5) será referenciada como uma forma generalizada da equação discretizada da conservação da massa, independentemente da variável ter sido integrada no volume de controle principal ou deslocado. Desta forma, dando prosseguimento a discretização das equações diferenciais da quantidade de movimento, tem-se que da multiplicação da expressão (4.5) pela variável Θ_P e, posterior, subtração da equação (4.34), resulta:

$$\frac{Ste \nabla_P}{\Delta \tau} [\Theta_P - \Theta_P^o] + [J_n - F_n \Theta_P] - [J_s - F_s \Theta_P] + [J_e - F_e \Theta_P] - [J_w - F_w \Theta_P] = TF \quad (4.35)$$

Utilizando o esquema Power-law para a interpolação dos termos convectivos e difusivos, como já foi discutido na seção 4.2.2, as equações discretizadas para os componentes angular e radial da velocidade são explicitadas pelas expressões:

$$a_P (V_\theta)_P = a_N (V_\theta)_N + a_S (V_\theta)_S + a_E (V_\theta)_E + a_W (V_\theta)_W - (P_E - P_P) \Delta_L \Delta \eta + b_{ang} \quad (4.36)$$

$$a_P (V_R)_P = a_N (V_R)_N + a_S (V_R)_S + a_E (V_R)_E + a_W (V_R)_W - (P_P - P_S) R \Delta \theta + b_{rad} \quad (4.37)$$

Nas equações (4.36) e (4.37), os coeficientes a_N , a_S , a_E , a_W , a_P^o e a_P são idênticos àqueles apresentados pelas equações (4.15), (4.19) e (4.20). Já os termos difusivos, D_e , D_w , D_n e D_s , similares para ambas os componentes da velocidade, são dados por:

$$D_e = \frac{Pr \Delta_L \Delta \eta}{R_e \Delta \theta} \quad (4.38a)$$

$$D_w = \frac{Pr \Delta_L \Delta \eta}{R_w \Delta \theta} \quad (4.38b)$$

$$D_n = \frac{Pr R_n \Delta \theta}{(\Delta_L)_n \Delta \eta} \quad (4.38c)$$

$$D_s = \frac{Pr R_s \Delta \theta}{(\Delta_L)_s \Delta \eta} \quad (4.38d)$$

Os termos fonte b_{ang} e b_{rad} para as equações (4.36) e (4.37), são, respectivamente,

$$b_{ang} = a_P^o (V_\theta)_P^o + TF_{ang} \quad (4.39)$$

$$b_{\text{rad}} = a_P^{\circ} (V_R)_P^{\circ} + TF_{\text{rad}} \quad (4.40)$$

4.2.4 Campo de Pressões

Na resolução das equações da quantidade de movimento, escritas em termos das variáveis primitivas, surge o problema do acoplamento entre a pressão e a velocidade, como já foi supramencionado. Alguns métodos foram desenvolvidos para tratar este acoplamento, dentre os quais, optou-se neste estudo por utilizar o SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*), desenvolvido por Patankar e Spalding (1972). O objetivo dos métodos que tratam do acoplamento pressão-velocidade, tal como o SIMPLE, é determinar um campo de pressões que quando substituído nas equações da quantidade de movimento, origine um campo de velocidades que satisfaça a equação da conservação de massa. O procedimento do método SIMPLE é descrito abaixo.

1. Seja P o campo de pressões correto, o qual, ao ser introduzido nas equações da quantidade de movimento, gera campos de velocidades, V_{θ} e V_R , que satisfazem a equação da conservação da massa. Pode-se, então, escrever as equações da quantidade de movimento discretizadas para os componentes V_{θ} e V_R , nas faces do volume de controle principal, mostrado na figura (4.2), como:

$$a_e (V_{\theta})_e = \sum a_{nb} (V_{\theta})_{nb} + b + (P_P - P_E) A_e \quad (4.41a)$$

$$a_w (V_{\theta})_w = \sum a_{nb} (V_{\theta})_{nb} + b + (P_W - P_P) A_w \quad (4.41b)$$

$$a_n (V_R)_n = \sum a_{nb} (V_R)_{nb} + b + (P_P - P_N) A_n \quad (4.41c)$$

$$a_s (V_R)_s = \sum a_{nb} (V_R)_{nb} + b + (P_S - P_P) A_s \quad (4.41d)$$

onde $(V_{\theta})_{nb}$ e $(V_R)_{nb}$ representam, respectivamente, as velocidades dos pontos vizinhos nas direções angular e radial, e a_{nb} , os seus relativos coeficientes.

Por outro lado, se um campo de pressões estimado, \hat{P} , for introduzido nas equações da quantidade de movimento, serão obtidos campos de velocidades \hat{V}_θ e \hat{V}_R incorretos, ou seja, que não satisfazem a equação da conservação da massa. Equações discretizadas similares às aquelas apresentadas pelas equações (4.41), são obtidas para \hat{V}_θ e \hat{V}_R , como segue.

$$a_e(\hat{V}_\theta)_e = \sum a_{nb}(\hat{V}_\theta)_{nb} + b + (\hat{P}_P - \hat{P}_E)A_e \quad (4.42a)$$

$$a_w(\hat{V}_\theta)_w = \sum a_{nb}(\hat{V}_\theta)_{nb} + b + (\hat{P}_W - \hat{P}_P)A_w \quad (4.42b)$$

$$a_n(\hat{V}_R)_n = \sum a_{nb}(\hat{V}_R)_{nb} + b + (\hat{P}_P - \hat{P}_N)A_n \quad (4.42c)$$

$$a_s(\hat{V}_R)_s = \sum a_{nb}(\hat{V}_R)_{nb} + b + (\hat{P}_S - \hat{P}_P)A_s \quad (4.42d)$$

O método sugere para a determinação da pressão correta P , uma expressão da forma:

$$P = \hat{P} + P' \quad (4.43)$$

onde: \hat{P} é o campo de pressões estimado e P' é denominado de correção do campo de pressões.

De forma similar, expressões para as velocidades corretas, V_θ e V_R , podem ser representadas por:

$$V_\theta = \hat{V}_\theta + V'_\theta \quad (4.44a)$$

$$V_R = \hat{V}_R + V'_R \quad (4.44b)$$

sendo: V'_θ e V'_R , respectivamente, as correções das velocidades nas direções angular e radial.

Subtraindo-se as equações (4.42) das (4.41), para as componente da velocidade em cada face do volume de controle, obtém-se, de acordo com as equações (4.44), expressões para as correções das velocidades, V'_θ e V'_R , uma vez que:

$$V_\theta - \hat{V}_\theta = V'_\theta$$

$$V_R - \hat{V}_R = V'_R$$

Desprezando as parcelas referentes as velocidades estimadas dos pontos vizinhos, $(V'_\theta)_{nb}$ e $(V'_R)_{nb}$, nas expressões obtidas para V'_θ e V'_R , e, em seguida, substituindo as equações resultantes em (4.44), advém que:

$$(V_\theta)_e = (\hat{V}_\theta)_e + d_e (P'_P - P'_E) \quad (4.45a)$$

$$(V_\theta)_w = (\hat{V}_\theta)_w + d_w (P'_W - P'_P) \quad (4.45b)$$

$$(V_R)_n = (\hat{V}_R)_n + d_n (P'_P - P'_N) \quad (4.45c)$$

$$(V_R)_s = (\hat{V}_R)_s + d_s (P'_S - P'_P) \quad (4.45d)$$

sendo: d_e , d_w , d_n e d_s , dados pelas expressões:

$$d_e = \frac{A_e}{a_e}$$

$$d_w = \frac{A_w}{a_w}$$

$$d_n = \frac{A_n}{a_n}$$

$$d_s = \frac{A_s}{a_s}$$

onde A_e , A_w , A_n e A_s são as áreas onde a diferença de pressão age, e a_e , a_w , a_n e a_s , os coeficientes dos componentes das velocidades nas direções angular e radial, V_θ e V_R , nas faces do volume de controle.

Após obtidas as expressões para as velocidades corretas em termos das correções da pressão, equações (4.45), pode-se integrar a equação da conservação de massa, equação (4.1), no volume de controle principal ilustrado na figura (4.2), para encontrar uma equação discretizada para o campo de pressões. A integração da equação (4.1) já foi realizada na seção 4.2.1, resultando na expressão (4.3), reescrita abaixo.

$$(RV_R)_n \Delta\theta - (RV_R)_s \Delta\theta + (V_\theta)_e \Delta_L \Delta\eta - (V_\theta)_w \Delta_L \Delta\eta = TF_{cm}$$

Substituindo-se, então, os componentes das velocidades nas direções angular e radial, dadas pelas equações (4.45), na expressão acima, obtém-se a equação discretizada para a correção do campo de pressões:

$$a_p P'_p = a_N P'_N + a_s P'_s + a_E P'_E + a_w P'_w + b \quad (4.46)$$

onde:

$$a_E = d_e \Delta\eta \Delta_L \quad (4.47a)$$

$$a_w = d_w \Delta\eta \Delta_L \quad (4.47b)$$

$$a_N = d_n R_n \Delta\theta \quad (4.47c)$$

$$a_s = d_s R_s \Delta\theta \quad (4.47d)$$

$$b = \left\{ \left[(\hat{V}_\theta)_w - (\hat{V}_\theta)_c \right] \Delta\eta \Delta_L + \left[(\hat{V}_R)_s R_s - (\hat{V}_R)_n R_n \right] \Delta\theta \right\} + TF_{cm} \quad (4.48)$$

4.3 Balanço de Energia na Interface Líquido-Sólido

O balanço de energia na interface líquido-sólido foi calculado explicitamente utilizando o método sugerido por Sparrow e Chuck (1984). Este método se baseia no seguinte procedimento:

1. Supondo conhecido o valor da espessura da camada líquida, Δ_L , e a distribuição de temperaturas no instante de tempo anterior, τ , a equação discretizada do balanço de energia na interface líquido-sólido pode ser avaliada explicitamente, como segue:

$$\left. \frac{\partial \Delta_L}{\partial \tau} \right|_\tau = \left[1 + \left(\frac{1}{(\Delta_L + 1)} \frac{\partial \Delta_L}{\partial \theta} \right)_\tau^2 \right] \left(- \left(\frac{1}{\Delta_L} \right)_\tau \frac{\phi_m - \phi_{m-1}}{\Delta \eta} \right) \quad (4.49)$$

sendo: ϕ_m , a temperatura da interface líquido-sólido, e ϕ_{m-1} , a temperatura do ponto anterior, referente ao último volume de controle da malha na direção η .

2. Conhecidos os valores da espessura da frente de fusão e da sua derivada temporal em τ , calcula-se, então, o valor de Δ_L para um passo de tempo intermediário, $\tau + \frac{\Delta\tau}{2}$. Assim, tem-se que:

$$\Delta_L \Big|_{\tau + \frac{\Delta\tau}{2}} = \Delta_L \Big|_\tau + \left(\frac{\partial \Delta_L}{\partial \tau} \right)_\tau \frac{\Delta\tau}{2} \quad (4.50)$$

3. Calculado o valor de $\Delta_L|_{\tau+\frac{\Delta\tau}{2}}$, pode-se determinar a derivada temporal da frente de fusão no tempo $\tau+\frac{\Delta\tau}{2}$, considerando a hipótese que a distribuição de temperaturas em $\tau+\frac{\Delta\tau}{2}$ é a mesma dada em τ . Daí:

$$\frac{\partial\Delta_L}{\partial\tau}\Big|_{\tau+\frac{\Delta\tau}{2}} = \left[1 + \left(\frac{1}{(\Delta_L+1)} \frac{\partial\Delta_L}{\partial\theta} \right)_{\tau+\frac{\Delta\tau}{2}}^2 \right] \left[- \left(\frac{1}{\Delta_L} \right)_{\tau+\frac{\Delta\tau}{2}} \frac{\phi_m - \phi_{m-1}}{\Delta\eta} \Big|_{\tau+\frac{\Delta\tau}{2}} \right] \quad (4.51)$$

4. Finalmente pode-se obter o valor de Δ_L no tempo atual, $\tau+\Delta\tau$, pela expressão:

$$\Delta_L|_{\tau+\Delta\tau} = \Delta_L|_{\tau} + \left(\frac{\partial\Delta_L}{\partial\tau} \right)_{\tau+\frac{\Delta\tau}{2}} \Delta\tau \quad (4.52)$$

Na resolução do sistema de equações discretizadas para as variáveis dependentes, temperatura, componentes angular e radial do vetor velocidade e pressão, faz-se necessário o conhecimento explícito em cada intervalo de tempo do valor da espessura da camada líquida e da sua derivada temporal, as quais são determinadas pelo procedimento acima, bem como, das suas derivadas espaciais, ou seja, $\frac{\partial\Delta_L}{\partial\theta}$ e $\frac{\partial^2\Delta_L}{\partial\theta^2}$. As derivadas espaciais de primeira e segunda ordem são aproximadas por diferenças para frente (*forward*) e centrais, respectivamente, como mostra as expressões abaixo.

$$\frac{\partial\Delta_L}{\partial\theta} = \frac{\Delta_L(I+1) - \Delta_L(I)}{\delta\theta}$$

$$\frac{\partial^2\Delta_L}{\partial\theta^2} = \frac{\Delta_L(I-1) - 2\Delta_L(I) + \Delta_L(I+1)}{\Delta\theta^2}$$

4.4 Solução Inicial para a Simulação Numérica

A solução numérica de problemas de mudança de fase que utilizam o método de imobilização de fronteira apresenta uma dificuldade no início do procedimento computacional devido a singularidade que tal método causa nas equações governantes no tempo $\tau = 0$. Esta singularidade advém do fato que o valor da espessura da camada fundida (solidificada) não pode ser nula no início da simulação, devido a existência de termos do tipo $\frac{1}{\Delta_L}$, nas equações governantes. Assim para que se possa proceder a simulação numérica, faz-se necessário assumir inicialmente a existência de uma delgada camada de material fundido, bem como, uma distribuição de temperaturas para o domínio do problema.

Uma maneira de contornar este tipo de dificuldade é assumir que a camada de material fundido (solidificado) equivale a uma pequena porcentagem do raio do cilindro para simular uma espessura inicial, como admitido nos trabalhos de Sparrow *et al.* (1978b), Ho e Viskanta (1984a), Lacroix (1989) e Wu e Lacroix (1993). Outro procedimento bastante usual é a utilização de uma solução analítica exata ou aproximada para este início do processo.

No presente estudo utilizou-se como solução inicial da simulação numérica, para o caso de temperatura especificada na superfície do cilindro, a solução de Stefan que é uma simplificação da solução exata de Neumann para problemas de fase única, descrita em Lunardini (1991). A solução de Stefan é baseada na aproximação de regime quase-permanente, o que é equivalente a dizer que, para o caso da fusão, o material de mudança de fase absorve apenas calor latente, apresentando uma distribuição linear de temperaturas. Assim, para um problema de fusão em uma placa plana com temperatura especificada na superfície, a equação da energia em regime permanente é dada por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (4.53)$$

onde a variável espacial x é relacionada ao raio, na geometria cilíndrica, pela expressão:

$$x = r - r_0 \quad (4.54)$$

Como a camada inicial de material fundido é considerada muito delgada, apenas para não existir a singularidade nas equações governantes, é absolutamente razoável se utilizar, para este estudo, uma solução inicial simplificada para o caso de uma placa plana.

As condições de contorno na superfície da placa e na interface líquido-sólido são expressas por:

$$T = T_0 \text{ em } x = 0 \quad (4.55a)$$

$$T = T_m \text{ em } x = x_L \quad (4.55b)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = \rho L \frac{\partial x_L}{\partial t} \text{ em } x = x_L \quad (4.55c)$$

onde x_L é a espessura da camada líquida.

Assim, integrando a equação (4.53) e substituindo as condições de contorno (4.55a) e (4.55b), tem-se que o perfil de temperaturas é explicitado como:

$$T = \frac{(T_m - T_0)}{x_L} x + T_0 \quad (4.56)$$

Substituindo a derivada espacial da temperatura no balanço de energia na interface, equação (4.55c), resulta:

$$\frac{(T_m - T_0)}{x_L} = -\frac{\rho L}{k} \frac{dx_L}{dt} \quad (4.57)$$

Integrando a expressão (4.57), no espaço e no tempo, advém:

$$x_L = \sqrt{2Ste\alpha t} \quad (4.58)$$

As equações (4.57) e (4.58) serão adimensionalizadas de forma similar àquela feita na seção 3.1.3, do capítulo 3. No caso da variável x , a sua adimensionalização é dada por:

$$\bar{x} = \frac{r - r_0}{r_0} \quad (4.59)$$

ou ainda,

$$\bar{x} = \eta \Delta_L \quad (4.60)$$

Finalmente, tem-se que as expressões adimensionais para a distribuição de temperaturas e a espessura da camada líquida, no início da simulação numérica, são representadas por:

$$\phi = 1 - \eta \quad (4.61)$$

$$\Delta_L = \sqrt{2\tau} \quad (4.62)$$

No caso da condição de contorno ser de fluxo de calor especificado, admitiu-se que a espessura inicial da camada de líquido fundido era igual a 1% do valor adimensional do raio do cilindro. Considerou-se ainda que todo o material de mudança de fase encontrava-se inicialmente na temperatura de fusão.

4.5 Algoritmo da Solução Numérica

O algoritmo numérico para a resolução do sistema de equações algébricas obtidas pelo método dos volumes finitos para determinar os campos de temperaturas, velocidades e pressões, bem como, a posição da interface sólido-líquido em cada intervalo de tempo, será descrito abaixo.

1. Definição dos parâmetros numéricos e geométricos, tais como:
 - número de volumes de controle em cada direção.
 - passo de tempo.
 - tempo máximo do processo. O fim do programa ocorre quando o tempo máximo adimensional para o processo de fusão é alcançado.
 - Critério de convergência dentro do passo de tempo para cada variável de cálculo.
2. Definição dos parâmetros físicos: número de Rayleigh, Stefan e Prandtl.
3. Cálculo da distribuição inicial de temperaturas e posição da interface através das equações (4.61) e (4.62).
4. Determinação da nova posição da frente de fusão através do balanço de energia na interface, utilizando as equações (4.49) a (4.52), para o tempo $\tau + \Delta\tau$.
5. Resolução do sistema de equações algébricas, dado pelas equações (4.36) e (4.37), para avaliar o campo de velocidades, V_θ e V_R . A solução do sistema de equações algébricas lineares, para todas as variáveis de cálculo, foi determinada utilizando-se o método TDMA linha-a-linha (*Tri-Diagonal Matrix Algorithm*).
6. Cálculo do campo de correções da pressão através da equação (4.46).
7. Correção dos campos de velocidades e pressões, utilizando, respectivamente, as equações (4.45) e (4.43).
8. Determinação da distribuição de temperaturas através da resolução do sistema de equações algébricas, dado pela equação (4.18).
9. Verificação do critério de convergência para as variáveis dependentes, isto é, temperatura e componentes angular e radial do vetor velocidade, dentro do passo de tempo.

10. Se as três variáveis respeitarem o critério de convergência para todos os pontos da malha, então, o passo de tempo é incrementado, retornando-se, em seguida, ao item 4, até que o tempo máximo do processo seja atingido.
11. Caso o critério de convergência não seja respeitado por pelo menos uma das variáveis, retorna-se ao item 5, sem incrementar o passo de tempo, até alcançar a convergência.

Um fluxograma do algoritmo numérico pode ser visto na figura (4.5), abaixo.

A partir da resolução do sistema de equações discretizadas deduzidas neste capítulo, para cada uma das variáveis do modelo, pôde-se obter resultados para o problema de mudança de fase em estudo. Sendo possível com isto avaliar a influência de parâmetros como o número de Rayleigh e Stefan sobre o processo. Os resultados obtidos serão apresentados no capítulo seguinte, juntamente com algumas comparações com resultados disponíveis na literatura para problemas similares ao do presente trabalho.

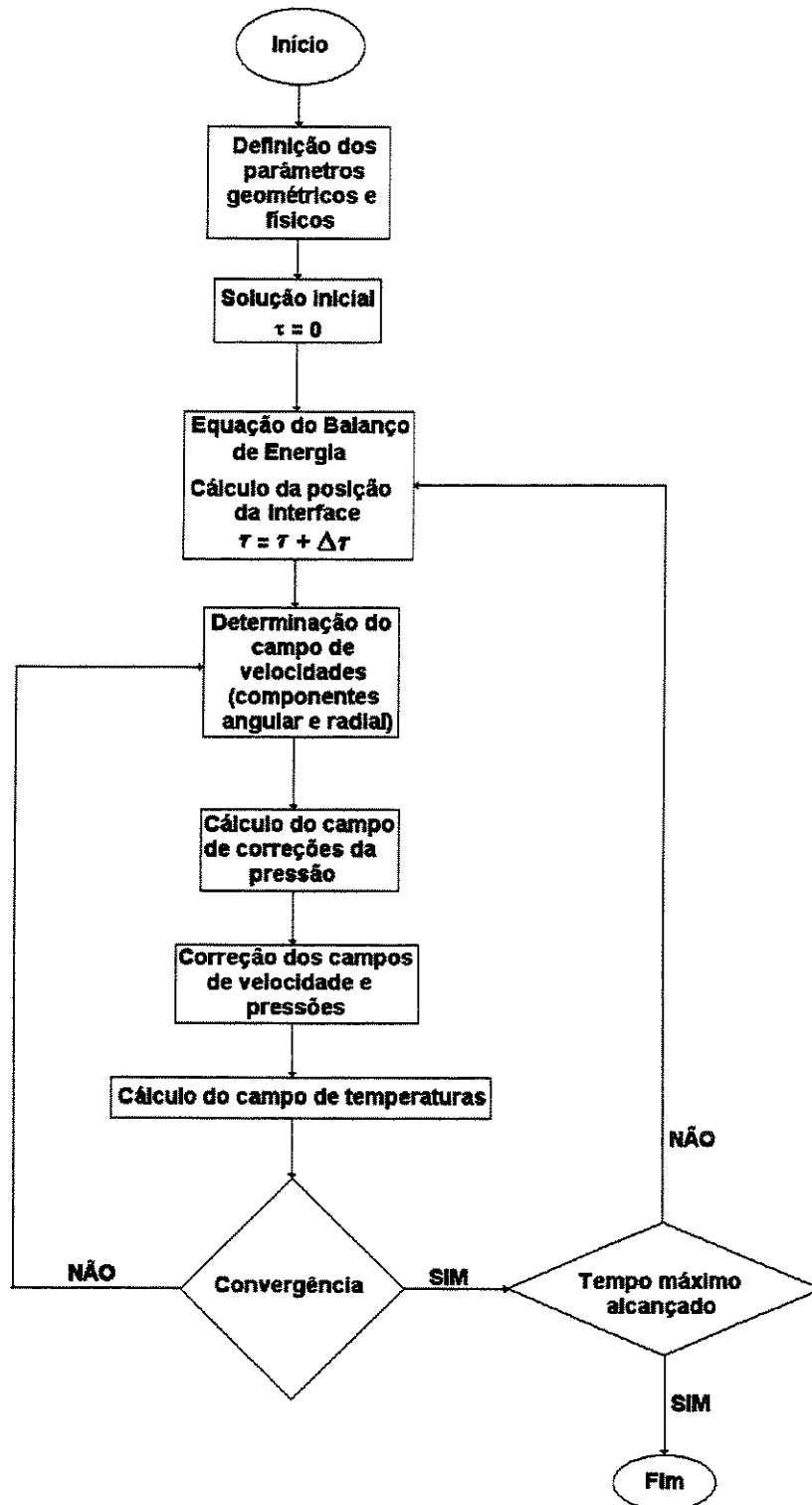


Figura 4.5 – Fluxograma do algoritmo numérico.

Capítulo 5

Resultados e Discussão

5.1 Introdução

A partir do tratamento numérico aplicado às equações governantes do modelo matemático apresentado neste estudo, foi possível obter resultados para o problema de fusão envolvendo a convecção natural na fase líquida. Este capítulo busca, desta forma, primeiramente validar os modelos matemático e numérico propostos, através da comparação com outros estudos similares disponíveis na literatura, e, posteriormente, apresentar os resultados auferidos com o presente modelo para a simulação do processo de fusão em sistemas de armazenamento com tubos horizontais.

5.2 Considerações Gerais para a Simulação Numérica

Considerações acerca dos termos fonte derivados da técnica de imobilização de fronteira, bem como a definição de parâmetros físicos e geométricos, da malha computacional, dos critérios de convergência para as variáveis dependentes e do passo de tempo, serão apresentadas a seguir. A partir da simulação numérica do problema será possível obter resultados, com os quais poder-se-á avaliar o desempenho de sistemas térmicos em função das variáveis envolvidas no processo.

5.2.1 Análise dos Termos Fonte

Reportando-se aos capítulos 3 e 4, os quais descrevem o modelamento matemático e numérico, respectivamente, observa-se que todo o equacionamento do problema em estudo foi feito levando em consideração os termos fonte originados da transformação de coordenadas, dados pelas parcelas Ω_{cm} , Ω_{liq} , Ω_{ang} e Ω_{rad} , já apresentadas e discutidas nos supracitados capítulos. A conservação ou não destes termos nas equações governantes do plano transformado, será agora analisada.

Devido ao grande número de termos fonte acrescentados às equações governantes após a aplicação da técnica de transformação de coordenadas, tornou-se complexa a tarefa de discretizá-los de forma adequada no modelo numérico. Cada um desses termos, ou um conjunto deles, relacionados a uma determinada variável dependente, exige interpolações específicas e adequadas. Um exemplo de termos fonte de difícil tratamento, segundo Maliska (1995), ocorre quando a variável que aparece no termo fonte de uma determinada equação é a variável principal de outra equação. Neste caso a complexidade é bem maior do que naquele onde se tem termos fonte relacionados com a variável principal da própria equação na qual ele está contido. Termos fonte com ambas as características comentadas acima, dentre outros, aparecem no presente modelo.

Observa-se que nos trabalhos existentes na literatura que utilizam a transformação de coordenadas e, conseqüentemente, se deparam com termos desta natureza, a conservação ou não destes termos é motivo de questionamentos. No estudo de Sparrow *et al.* (1977), já comentado na revisão da literatura, os termos surgidos devido à transformação de coordenadas foram todos eliminados, os quais, segundo os autores, certamente afetariam desfavoravelmente a convergência do modelo. Em alguns outros trabalhos, como Gadgil e Gobin (1984) e Benard *et al.* (1986), para o processo de fusão em uma cavidade, estes termos também foram eliminados. De acordo com Benard *et al.* (1986), o método numérico fornece bons resultados com a eliminação dos termos relacionados à mudança de coordenadas, para valores do número de Stefan menores do que 0,2. Por outro lado, Ho e Viskanta (1984b) e Okada (1984), em estudos similares ao de Gadgil e Gobin (1984) e Benard *et al.* (1986), optaram por conservar todos os termos oriundos da transformação de coordenadas. Todavia, segundo Yao e Prusa (1989), mesmo

com a conservação destes termos, os resultados de Ho e Viskanta (1984b) não se mostraram melhores do que aqueles obtidos por Gadgil e Gobin (1984) e Benard *et al.* (1986). Entretanto, os resultados numéricos auferidos por Okada (1984), para a posição da interface, se ajustaram muito melhor aos seus resultados experimentais na parte superior da cavidade, do que no caso de Benard *et al.* (1986) para uma comparação análoga. Na solução numérica para o mesmo tipo de problema, porém, estudando outro tipo de geometria, no caso o fenômeno físico ocorrendo dentro de um cilindro horizontal aquecido, Saitoh e Hirose (1982) relataram ter encontrado uma forte instabilidade numérica, quando da conservação deste tipo de termos. Como pode-se ver, existem discordâncias entre os diversos estudos quanto ao erro introduzido nos resultados devido à não conservação dos termos relacionados à curvatura da interface.

Reportando-se novamente ao presente estudo, tem-se que todo o modelamento foi obtido no sentido de poder-se verificar a influência destes termos sobre os resultados numéricos. Foram, desta forma, realizadas simulações para as situações onde todos os termos fonte advindos da transformação de coordenadas foram retidos nas equações governantes, assim como para a situação inversa. Em uma primeira análise, considerando todos os termos fonte, observou-se uma forte instabilidade numérica, que resultou na divergência do modelo. Entenda-se por divergência, o fato de não ter sido possível, a partir de um determinado tempo de simulação, conseguir que as variáveis dependentes do modelo, a temperatura e os componentes da velocidade, atingissem o critério de convergência adotado. Já para a segunda situação, seja esta suprimir tais termos, as simulações numéricas comportaram-se de forma satisfatória, sem dificuldades de convergência, gerando, assim, resultados coerentes.

A partir dessas análises, foi possível constatar-se que a causa da instabilidade na solução estava diretamente relacionada com o tratamento numérico dos termos surgidos devido a mudança de coordenadas. Optou-se, de forma geral neste estudo, por eliminar tais termos das equações governantes do modelo, exceto na comparação com o trabalho de Prusa e Yao (1984b), que será mostrada na seção 5.3.1. Tal consideração não comprometeu a qualidade dos resultados gerados por este modelo, como poderá ser verificado quando da sua convalidação.

5.2.2 Definição de Parâmetros Físicos e Geométricos

Neste item serão definidos os parâmetros físicos e geométricos do sistema térmico que será simulado pelo presente estudo. A partir destes parâmetros serão realizados testes preliminares para a definição das variáveis numéricas, sejam elas, o critério de convergência, a malha computacional e o passo de tempo.

Os materiais de mudança de fase escolhidos para a simulação do sistema térmico foram a água e a parafina n-octadecano, com pontos de fusão, respectivamente, de 0 e 28,05°C. A escolha da água baseou-se nos sistemas de armazenamento de energia térmica na forma de calor latente, usualmente denominados de bancos de gelo, descritos em Ismail (1998). Enquanto que a parafina n-octadecano foi preferida, dentre as demais existentes, por ser um material com ponto de fusão próximo a temperatura ambiente, além de ser, também, amplamente utilizado em estudos de fusão, como pode ser observado em Bathelt *et al.* (1979a e 1979b), Bathelt e Viskanta (1980), Saitoh e Hirose (1982), Rieger *et al.* (1983), Ho e Viskanta (1984a), Benard *et al.* (1986) e Chung *et al.* (1997). A partir do conhecimento do material de mudança de fase a ser empregado, faz-se necessário o conhecimento das suas propriedades térmicas, as quais serão utilizadas para o cálculo do número de Rayleigh e Stefan, admitindo-se conhecido o valor da temperatura na superfície do cilindro. No caso da água, foram levantadas as curvas das suas propriedades térmicas, utilizando-se dados tabelados em Bejan (1993). Destas curvas foram obtidas as equações das propriedades térmicas em função da temperatura, as quais podem ser encontradas no Apêndice A. As propriedades térmicas da parafina n-octadecano, extraídas do estudo de Benard *et al.* (1986), são mostradas na tabela (5.1).

Estabelecidos os materiais de mudança de fase e de posse das suas propriedades térmicas, resta definir os valores de temperatura a serem admitidos como condição de contorno na superfície do cilindro. Para esta simulação empregou-se valores de temperatura na superfície do cilindro, T_o , de 20, 25 e 30°C, quando utilizada a água como material de mudança de fase, e de 32, 35 e 40°C, quando do uso do n-octadecano. O cálculo do número de Rayleigh e Stefan é realizado em função da diferença de temperatura entre a superfície do cilindro e a interface líquido-sólido, ou seja, $\Delta T = (T_o - T_m)$. No caso da água, a temperatura de fusão é bem conhecida, $T_m = 0^\circ\text{C}$, resultando, desta forma, em uma diferença de temperatura equivalente a

própria temperatura da superfície do cilindro, T_o . As propriedades térmicas empregadas para determinar o número de Rayleigh e Stefan, ainda em relação a água, foram obtidas à uma temperatura de mistura, dada em função do valor médio das diferenças de temperatura utilizadas.

O outro parâmetro a ser especificado é o valor do raio externo do cilindro, r_o , que foi admitido igual a 0,0047625m, equivalente a um tubo comercial com diâmetro externo de 3/8 de polegada.

Assim, a partir dos valores das propriedades térmicas de ambos os materiais de mudança de fase empregados e do raio do cilindro, é possível determinar os valores do número de Rayleigh e Stefan para cada valor de temperatura na superfície do cilindro, mostrados nas tabelas (5.2) e (5.3), abaixo.

Tabela 5.1 Propriedades térmicas do n-octadecano líquido.

Ponto de fusão [°C]	ρ [kg/m ³]	k [W/m·°C]	C_p [J/kg·°C]	μ [kg/m·s]	ν [m ² /s]	L [J/kg]	β [1/K]	Pr
28,05	776,8	0,157	2.200	$3,878 \cdot 10^{-3}$	$5,005 \cdot 10^{-6}$	241.000	$9,1 \cdot 10^{-4}$	54,5

Fonte: Benard *et al.* (1986).

Tabela 5.2 Valores correspondentes do número de Rayleigh e Stefan para cada T_o considerado, utilizando a água como material de mudança de fase.

T_o (°C)	20	25	30
Ra	15.976	25.972	38.948
Ste	0,034	0,042	0,051

Tabela 5.3 Valores correspondentes do número de Rayleigh e Stefan para cada T_o considerado, utilizando o n-octadecano como material de mudança de fase.

T_o (°C)	32	35	40
Ra	8.281	14.570	25.050
Ste	0,036	0,063	0,109

5.2.3 Definição de Parâmetros Numéricos

O primeiro parâmetro numérico a ser definido será o critério de convergência para a temperatura e os componentes da velocidade nas direções angular e radial. Adotou-se o seguinte critério:

$$\left| \frac{\Phi_{i,j}^{\Delta\tau+1} - \Phi_{i,j}^{\Delta\tau}}{\Phi_{i,j}^{\Delta\tau+1}} \right| \leq 10^{-3}$$

onde Φ representa genericamente as variáveis em questão.

A escolha desse critério de convergência foi determinada pelo valor do número de Rayleigh. Observou-se que para os valores de número de Rayleigh utilizados, critérios maiores que o mencionado acima faziam divergir a solução logo no início do processo, enquanto que para critérios mais rígidos, a solução não apresentava problemas de divergência, porém, o tempo computacional gasto tornava-se proibitivo.

Definido o critério de convergência das variáveis, precisa-se determinar agora qual a melhor malha computacional a ser adotada para o problema em análise. Visando obter uma solução numérica que seja independente do tamanho da malha computacional adotada, realizou-se uma série de simulações com números de volumes de controle variados nas direções angular e radial, para cada temperatura na superfície do cilindro, considerada na seção 5.2.2. A escolha do tamanho da malha levou em conta, juntamente com a qualidade dos resultados obtidos, o tempo computacional gasto para cada simulação. Este foi um fator bastante importante neste estudo, uma vez que a resolução do problema de mudança de fase envolvendo os efeitos convectivos exigiu, mesmo quando foram utilizadas malhas pouco refinadas, um tempo computacional razoavelmente elevado.

As simulações realizadas para o caso onde se considerou a temperatura na superfície do cilindro igual a 20°C, utilizando a água como material de mudança de fase, serão apresentadas abaixo. Os testes de malha para os outros valores de temperaturas empregados, tanto para a água,

quanto para o n-octadecano, não serão mostrados aqui, visto que, uma mesma malha computacional foi escolhida como sendo a mais adequada para todos eles.

Para realizar o teste de malha, adotou-se que os volumes de controle eram distribuídos de maneira uniforme em ambas as direções. Primeiramente, fixou-se 50 pontos na direção angular, variando, então, o número de pontos na direção radial nas quantidades de 20, 30 e 60 e 70. É preciso deixar claro que ao empregar-se o termo pontos, este refere-se ao número de volumes de controle mais os pontos que se encontram sobre as linhas de fronteira, em cada direção. Os resultados obtidos para a posição da interface ao longo do tempo para cada uma das malhas empregadas, são mostrados na figura (5.1). Desta, pode-se verificar que em $\theta = -90^\circ$ e 0° , todas as malhas apresentaram uma boa proximidade entre os resultados. No entanto, em $\theta = 90^\circ$, houve uma perceptível diferença entre a malha com 20 pontos na direção radial e as outras com 30, 60 e 70 pontos. Visto que as três últimas malhas referidas mostraram resultados praticamente idênticos e levando em consideração que as malhas com 60 e 70 pontos na direção radial gastam um tempo computacional muito superior em relação aquela com 30 pontos, adotou-se, por conseguinte, a malha computacional com 30 pontos na direção radial.

Em uma segunda etapa, variou-se o número de pontos na direção angular nas quantidades de 30, 40, 50 e 70. A figura (5.2) ilustra os resultados para a posição da interface em função do tempo, utilizando as malhas acima citadas.

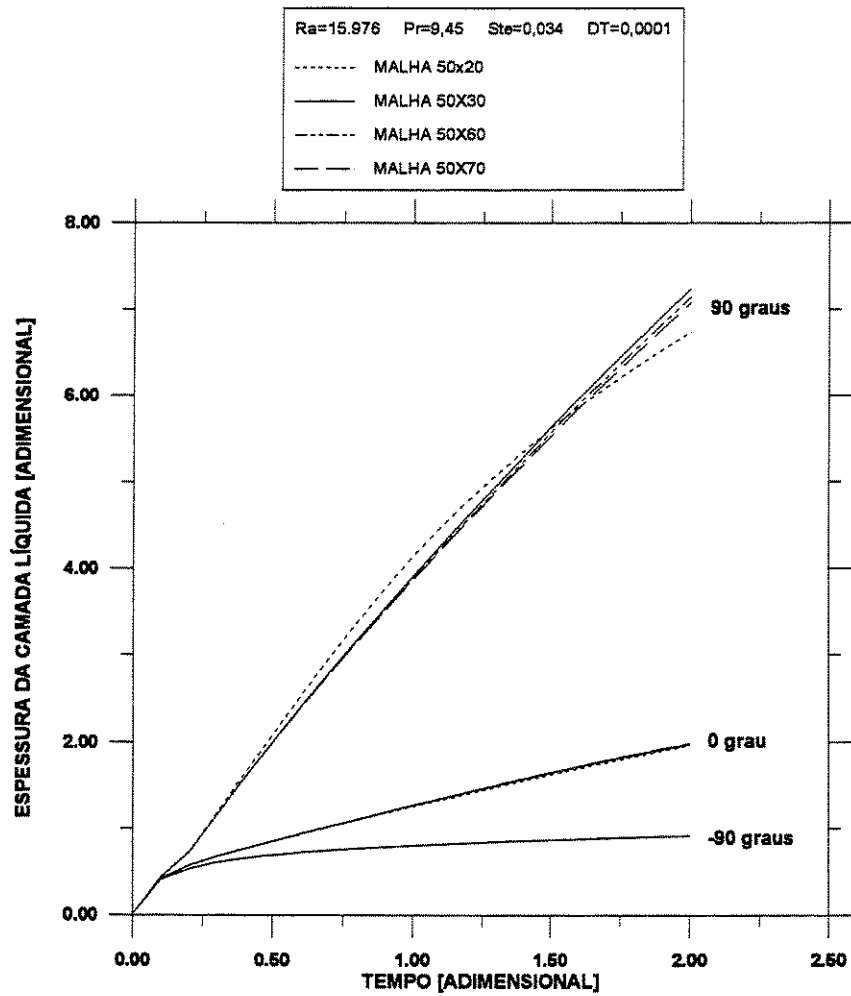


Figura 5.1 – Influência da malha na direção radial.

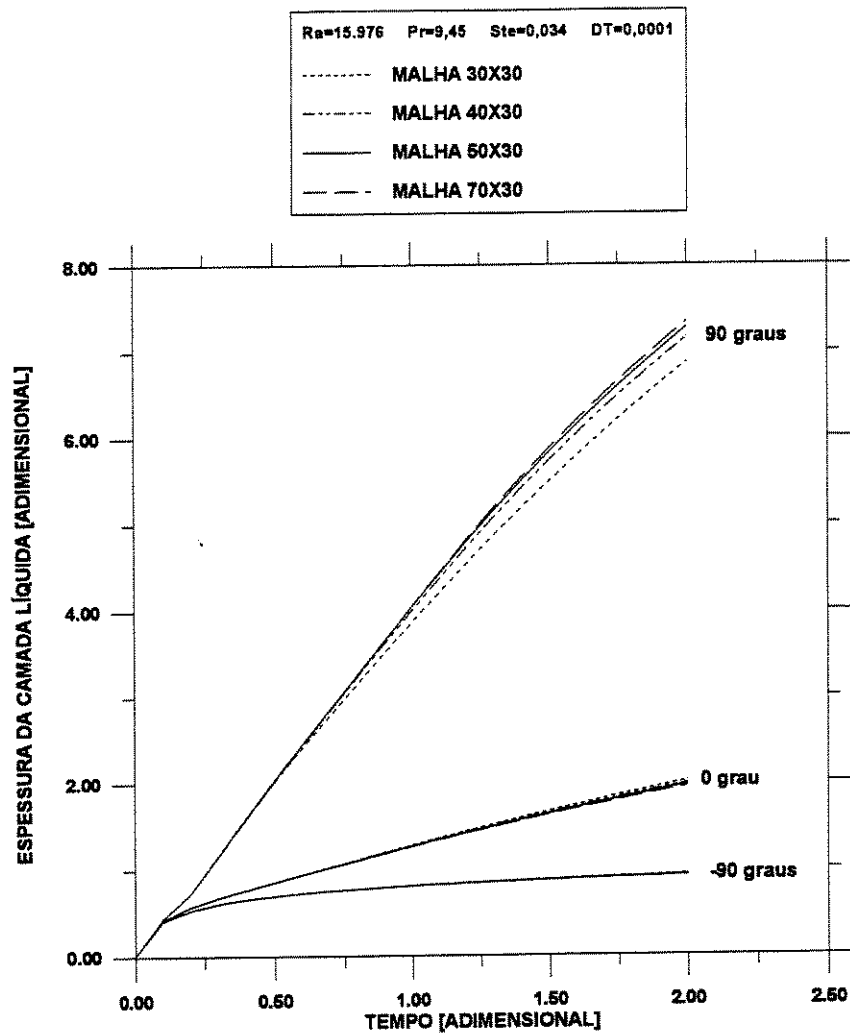


Figura 5.2 – Influência da malha na direção angular.

Pode-se constatar pela observação da figura (5.2) que em relação as posições $\theta = -90^\circ$ e 0° , todas as malhas utilizadas, similarmente à análise anterior para a direção radial, produziram resultados muito próximos. Para a posição $\theta = 90^\circ$, a única malha que afastou-se um pouco foi aquela com 30 pontos. As outras geraram resultados com excelente grau de concordância, principalmente aquelas com 50 e 70 pontos. Optou-se, então, por adotar na direção angular um número de pontos igual a 50, visto que a outra malha, com 70 pontos, necessita de um tempo computacional muito mais elevado para produzir resultados idênticos àqueles obtidos com a malha escolhida.

Em relação ao passo de tempo, uma justificativa similar àquela discutida para a escolha do critério de convergência, pode também ser aplicada para este parâmetro. Observou-se, neste caso, que para valores maiores que 0,0001, a solução divergia, enquanto que para valores menores, necessitava-se de um tempo computacional excessivo. Outrossim, verificou-se que valores menores ou iguais a 0,0001, não causava diferença entre os resultados obtidos. Com isto, adotou-se o passo de tempo adimensional $\Delta\tau = 0,0001$.

5.3 Validação do Presente Modelo

A confiabilidade nos resultados, obtidos a partir do modelo matemático e numérico apresentados neste estudo, foi corroborada através da comparação com resultados já existentes na literatura para problemas de fusão em torno de um cilindro horizontal, considerando a forte influência da convecção natural no processo. Dentre estes trabalhos, três assemelharam-se em termos de geometria e condições de fronteira com o presente, possibilitando, assim, a sua convalidação. Proceder-se-á em seguida as comparações realizadas com os estudos de Prusa e Yao (1984a e 1984b) e Rieger *et al.* (1982).

5.3.1 Comparação com Prusa e Yao (1984b)

Prusa e Yao (1984b) estudaram numericamente o problema de fusão ao redor de um cilindro horizontal, levando em consideração a convecção natural no líquido fundido. Foi utilizada uma condição de contorno de temperatura constante na superfície do cilindro. Eles adotaram para o modelo matemático uma formulação em termos de função de corrente e vorticidade, juntamente com o método de transformação de coordenadas para fixar e tornar regular a frente de fusão. A adimensionalização da espessura de líquido foi feita tanto na forma mais comumente empregada, a qual conduz à existência da singularidade nas equações governantes no tempo $t = 0$, quanto na forma não singular. Esta última, sendo dada pela seguinte expressão:

$$Z = \frac{(R - a)}{a(2t)^{\frac{1}{2}}}$$

onde: Z é espessura do líquido fundido, R e a são, respectivamente, o raio da interface e o raio do cilindro na forma dimensional e t , o tempo adimensional, expresso como o número de Fourier, Fo .

O trabalho de Prusa e Yao (1984b) visou principalmente a análise do erro causado pela aplicação de soluções aproximadas para o início do processo. A solução numérica foi obtida através do método de diferenças finitas. Os autores apresentaram resultados para valores do número de Rayleigh, Stefan e Prandtl, respectivamente, de 500, 0,1 e 1.

A figura (5.3) apresenta a comparação para a posição da interface em função do tempo, para dois pontos do cilindro, situados nos ângulos de 0 e 180° (equivalentes a -90 e 90° no presente estudo), ou seja, nas linhas de simetria do problema. Os resultados do presente modelo foram obtidos para as duas situações avaliadas numericamente, já comentadas anteriormente. Primeiramente, todos os termos fonte advindos da transformação de coordenadas foram conservados nas equações governantes no plano transformado, e, em uma segunda avaliação, estes termos foram desprezados. Apesar de já ter sido admitida na seção 5.2.1, de forma geral nesse estudo, a supressão de tais termos, considerou-se relevante apresentar os resultados para a situação onde os mesmos foram conservados. Isto devido ao fato de ter sido apenas para os parâmetros utilizados nessa comparação com Prusa e Yao (1984b), que não observou-se instabilidade numérica com a retenção dos termos mencionados, sendo, destarte, respeitada a convergência do modelo.

Pode-se observar na figura (5.3), que ambas as situações mostraram uma excelente concordância com os resultados de Prusa e Yao (1984b), para os dois pontos na superfície do cilindro analisados, correspondentes aos ângulos de 0° e 180° . Verifica-se que para o ponto na parte superior do cilindro, a medida da posição da interface já confere uma falta de simetria em relação a região inferior, decorrente do processo convectivo que já se torna dominante a partir de um tempo aproximadamente igual a $\tau = 1,0$.

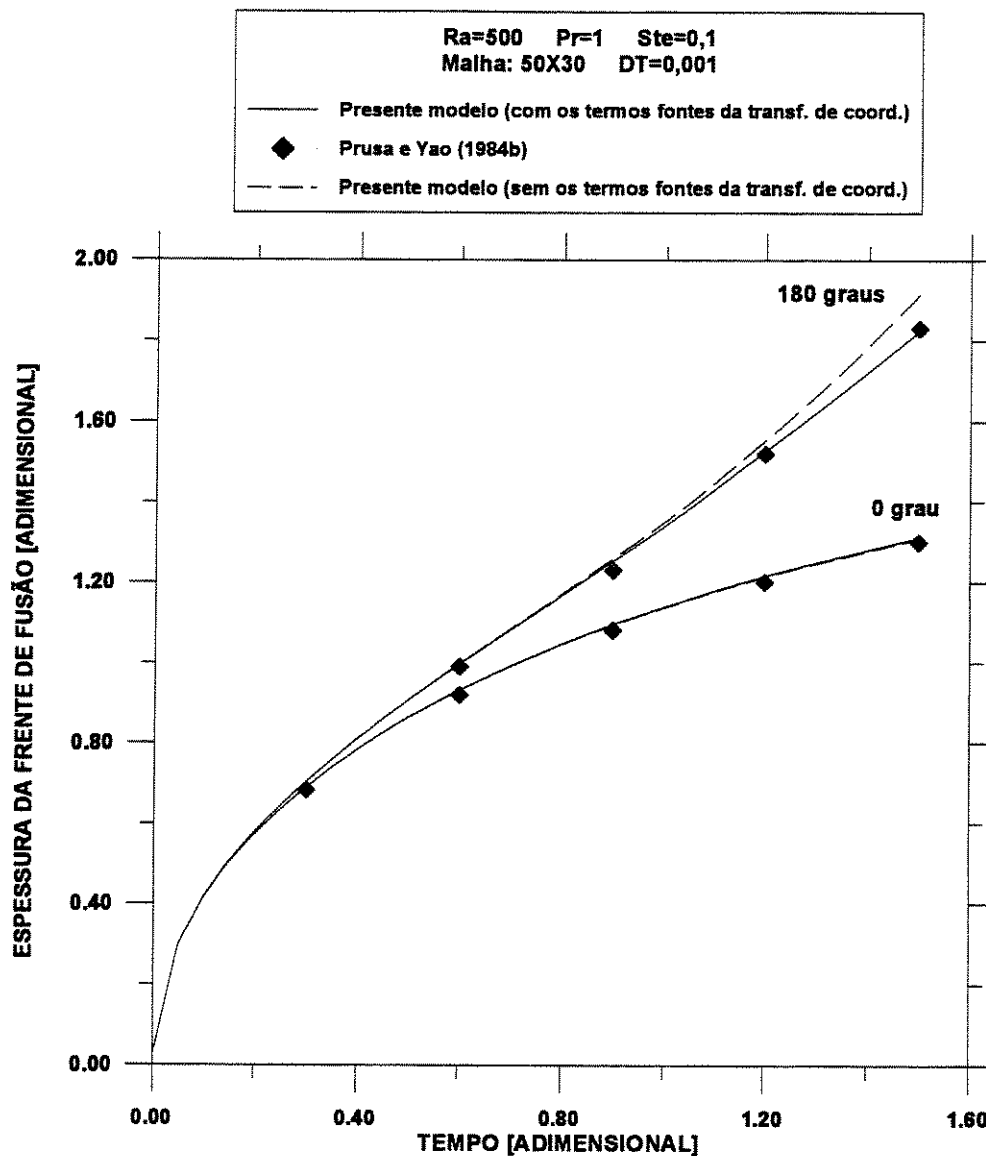


Figura 5.3 – Comparação com os resultados de Prusa e Yao (1984b) para a posição da interface em função do tempo.

Uma outra observação importante à respeito da comparação entre as curvas obtidas neste e as de Prusa e Yao (1984b), é que apesar da utilização de uma solução inicial aproximada, este trabalho apresentou para o período de condução dominante, uma boa concordância com os resultados de Prusa e Yao (1984b). Indicando, desta forma, que o erro introduzido pela adimensionalização singular não provocou desvios sérios na presente solução, como poderia ser esperado, de acordo com as conclusões de Prusa e Yao (1984b).

5.3.2 Comparação com Prusa e Yao (1984a)

Em um outro trabalho numérico, Prusa e Yao (1984a) analisaram o mesmo problema já estudado em Prusa e Yao (1984b), utilizando, desta vez, uma condição de contorno de fluxo de calor constante na superfície do cilindro. Prusa e Yao (1984a) obtiveram resultados para os parâmetros de número de Rayleigh, Stefan e Prandtl, de 5.000, 0,374 e 54, respectivamente. Curvas para a posição da interface, distribuição de temperaturas na superfície do cilindro em função do tempo, distribuição angular e radial de temperaturas para ângulos especificados e número de Nusselt na interface líquido-sólido, foram apresentadas pelos autores. As figuras (5.4) a (5.11) ilustram comparações entre o presente estudo e o de Prusa e Yao (1984a), para as curvas mencionadas.

As curvas comparativas da espessura da frente de fusão em função do tempo podem ser observadas na figura (5.4). Nesta, pode-se verificar que os resultados para o presente modelo apresentaram uma ótima concordância para a posição relativa ao ângulo de 0° , na base do cilindro. Já para o ângulo de 180° , na parte superior do mesmo, a curva do presente modelo apresentou uma diferença máxima de 13%, superior a de Prusa e Yao (1984a), em $\tau = 2,618$, o maior valor de tempo passível de comparação. Esta diferença entre os resultados pode ter ocorrido devido ao modelamento matemático e ao tratamento numérico dado a este modelo, nos quais utilizou-se uma formulação em variáveis primitivas e o método dos volumes finitos. Outro aspecto possível de haver influenciado na diferença entre os resultados obtidos pelo presente modelo e aqueles de Prusa e Yao (1984a), advém do tamanho da malha computacional utilizada. Todavia, Prusa e Yao (1984a) não fizeram menção ao tamanho da malha computacional admitida em seu estudo.

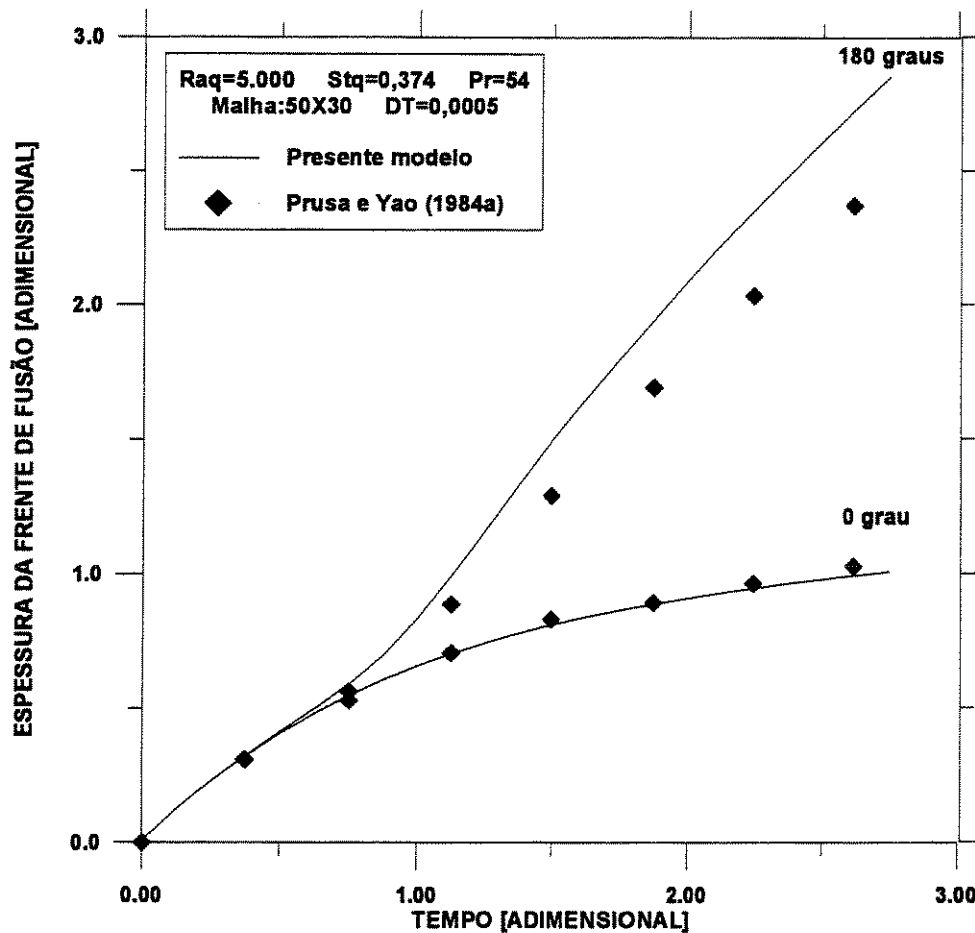


Figura 5.4 – Comparação com os resultados de Prusa e Yao (1984a) para a posição da interface em função do tempo.

As figuras (5.5) e (5.6) ilustram uma comparação qualitativa do crescimento da interface ao redor do cilindro horizontal para tempos adimensionais de 0,625, 1,25, 1,87 e 2,618, de acordo com a adimensionalização realizada no presente trabalho, expressa por $Fo \cdot St_q$. De uma forma geral, constata-se uma boa semelhança entre os perfis obtidos por este estudo e àqueles de Prusa e Yao (1984a).

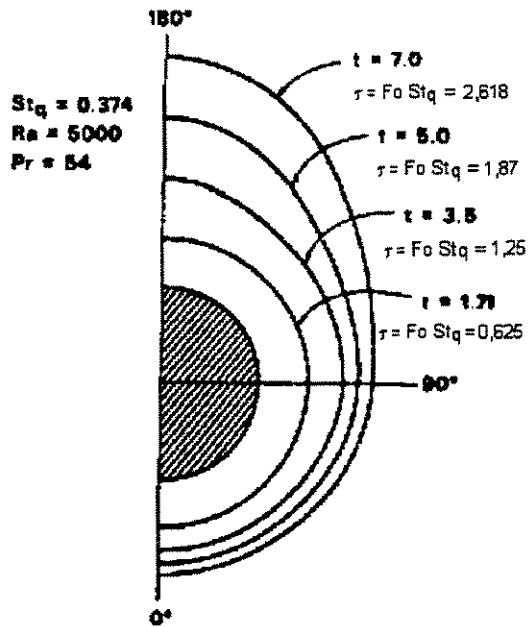


Figura 5.5 – Resultados de Prusa e Yao (1984a) para a posição da interface com o tempo.

Fonte: Prusa e Yao (1984a).

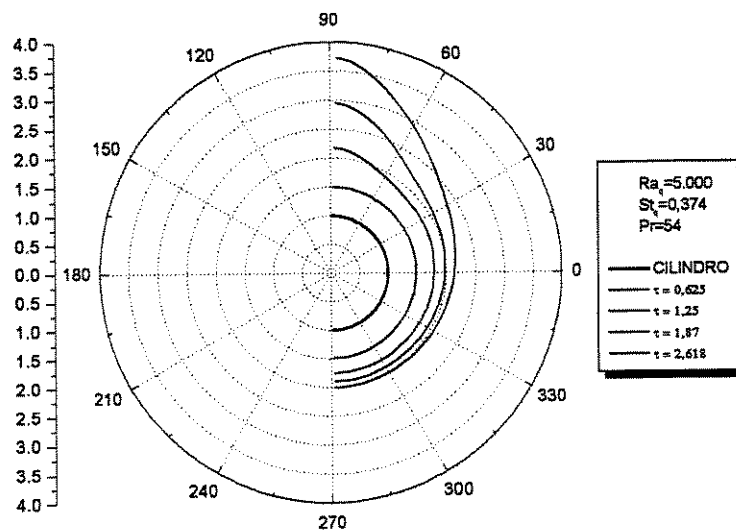


Figura 5.6 – Resultados do presente estudo para a posição da interface com o tempo.

As figuras (5.7) e (5.8) ilustram as curvas comparativas para a variação da temperatura na superfície do cilindro em função do tempo e da posição angular, respectivamente. Segundo Goldstein e Ramsey (1979), *apud* Yao e Prusa (1989), em suas observações experimentais, a máxima temperatura na superfície do cilindro ocorre próximo a transição do regime condutivo dominante para o convectivo dominante. Isto pode ser evidenciado através da figura (5.7), na qual observa-se que a máxima temperatura ocorre, aproximadamente, para $\tau = 1.1$. Reportando à figura (5.6), pode-se verificar que realmente a transição acontece em torno deste valor. Ainda em relação a máxima temperatura na superfície do cilindro, esta pode ser percebida também na figura (5.8). Nesta, a curva correspondente a um tempo $\tau = 1.12$, apresenta valores de temperatura mais elevados do que aqueles mostrados para o tempo $\tau = 1.87$. Isto significa que após ser alcançado o pico de temperatura na superfície do cilindro, na transição do regime condutivo para o convectivo, a temperatura tende a decrescer e em seguida manter-se constante. Em ambas as figuras, percebe-se que houve uma excelente concordância entre os resultados deste modelo e os de Prusa e Yao (1984a), exceto na figura (5.8), para $\tau = 0.75$. Na curva correspondente a esse valor de tempo, pode-se observar um afastamento maior entre os resultados do presente modelo e àqueles de Prusa e Yao (1984a), principalmente, em $\theta = 180^\circ$. Este afastamento resulta em uma superposição entre a curva correspondente a $\tau = 0.75$ e aquela para $\tau = 1.87$, na faixa de $140^\circ < \theta < 160^\circ$. De acordo com os resultados de Prusa e Yao (1984a), isto não acontece, constatando-se, destarte, que tal superposição ocorreu devido aos resultados gerados pelo presente modelo para $\tau = 0.75$.

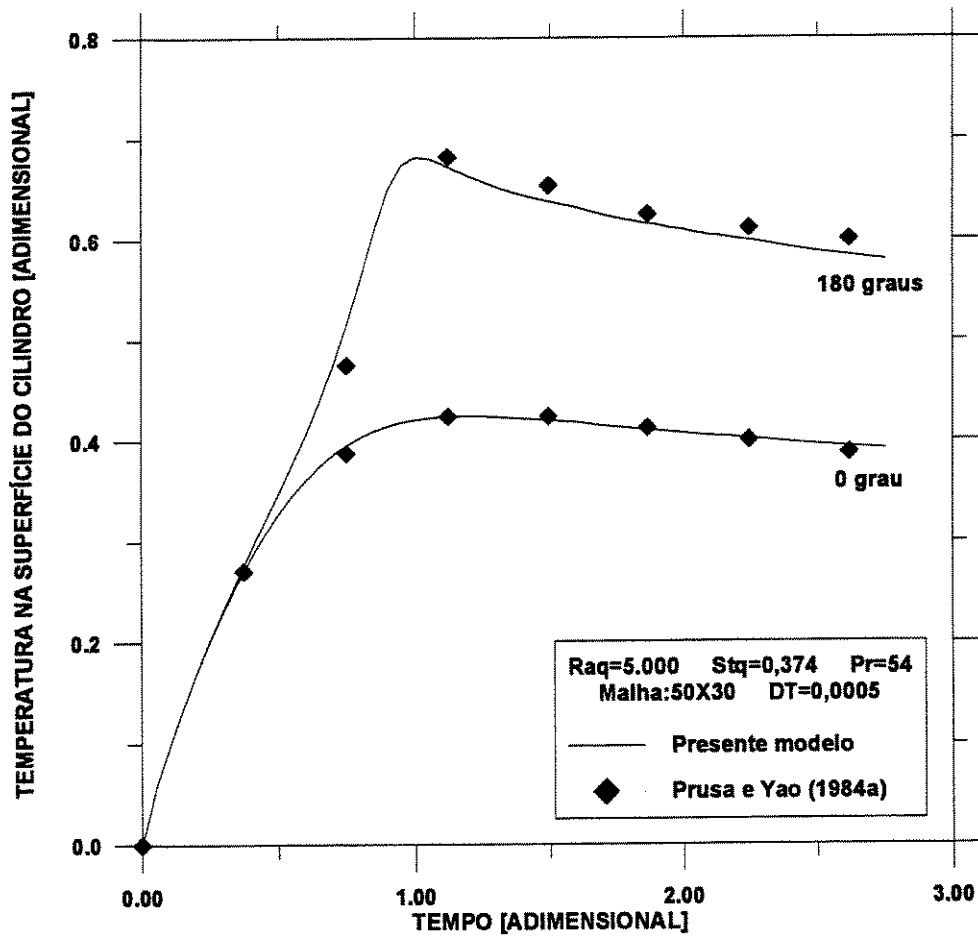


Figura 5.7 – Comparação com os resultados de Prusa e Yao (1984a) para a temperatura na superfície do cilindro em função do tempo.

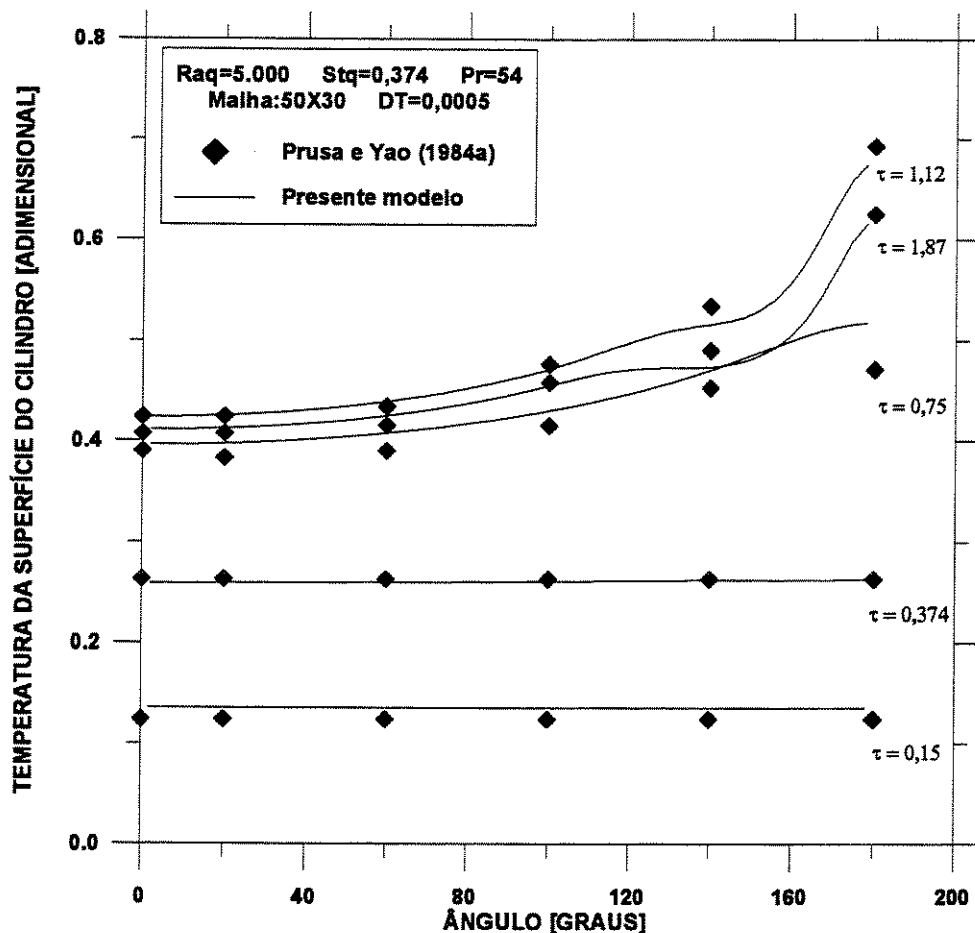


Figura 5.8 – Comparação com os resultados de Prusa e Yao (1984a) para a temperatura na superfície do cilindro em função da coordenada angular.

Uma outra comparação foi realizada, desta vez, para o perfil de temperaturas em função da coordenada radial, para $\tau = 0,75$ e $\tau = 2,618$, sendo ilustradas nas figuras (5.9) e (5.10). Depreende-se da figura (5.9), para $\tau = 0,75$, que houve um afastamento entre a curva do presente modelo e aquela do estudo em comparação, no ponto $\theta = 180^\circ$. O afastamento máximo entre as curvas ocorreu na superfície do cilindro ($\eta = 0$) e foi de 7,4%. É importante perceber que para este tempo, o estágio de transição entre os regimes já foi estabelecido. Por outro lado, para um tempo superior, $\tau = 2,618$, no qual o regime convectivo é dominante, constata-se da figura (5.10) que houve praticamente uma superposição entre as curvas para ambos os pontos $\theta = 0^\circ$ e 180° . É interessante notar que, de acordo com o que foi discorrido anteriormente à respeito da figura (5.8), novamente observa-se na figura (5.9) um afastamento entre os resultados deste modelo e

aqueles de Prusa e Yao (1984a), para o mesmo valor de tempo, $\tau = 0,75$, no ângulo de 180° . Este valor de tempo corresponde ao período de transição entre os regimes condutivo e convectivo dominante, como já foi constatado anteriormente. Visto que para o tempo $\tau = 2,618$, as curvas apresentaram uma excelente concordância, pode-se atribuir o afastamento ocorrido para o tempo $\tau = 0,75$, possivelmente, ao fato deste valor de tempo estar dentro do estágio de transição entre os regimes. Podendo, desta forma, ocorrer divergências entre os resultados, devido ao modelamento matemático e ao tratamento numérico empregados, assim como, ao tamanho da malha computacional utilizada.

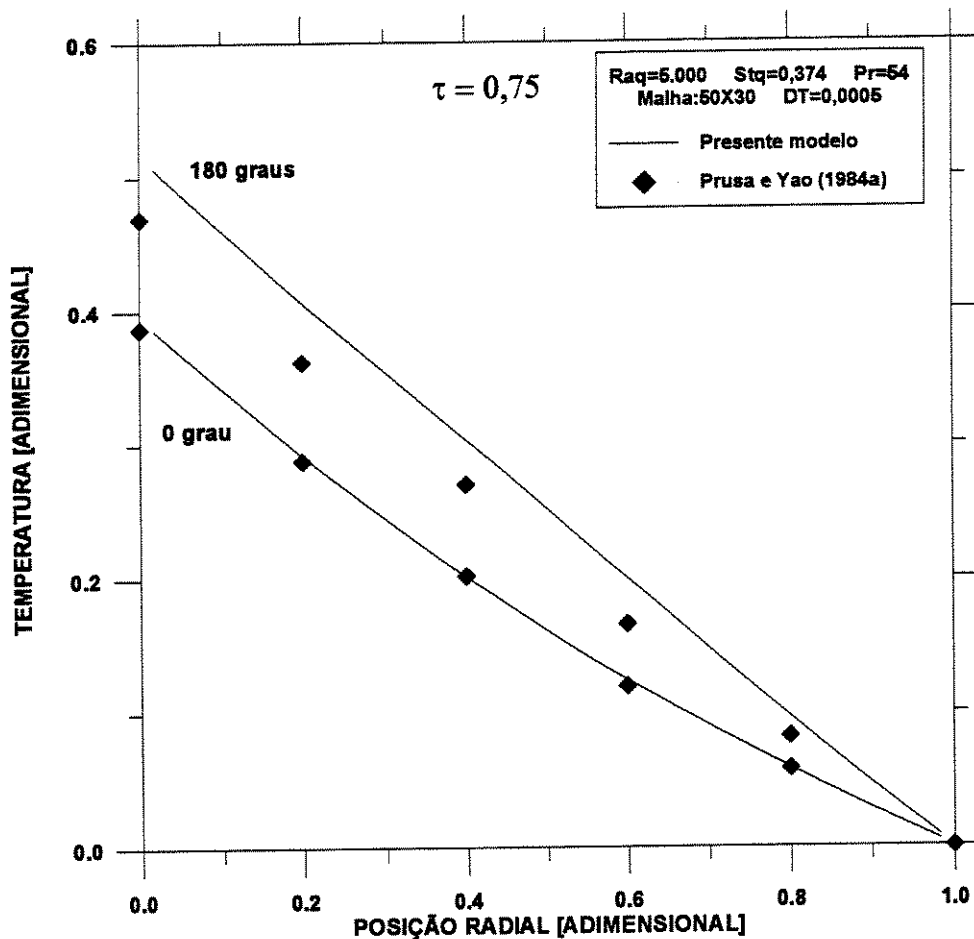


Figura 5.9 – Comparação com os resultados de Prusa e Yao (1984a) para a temperatura em função da coordenada radial para $\tau = 0,75$.

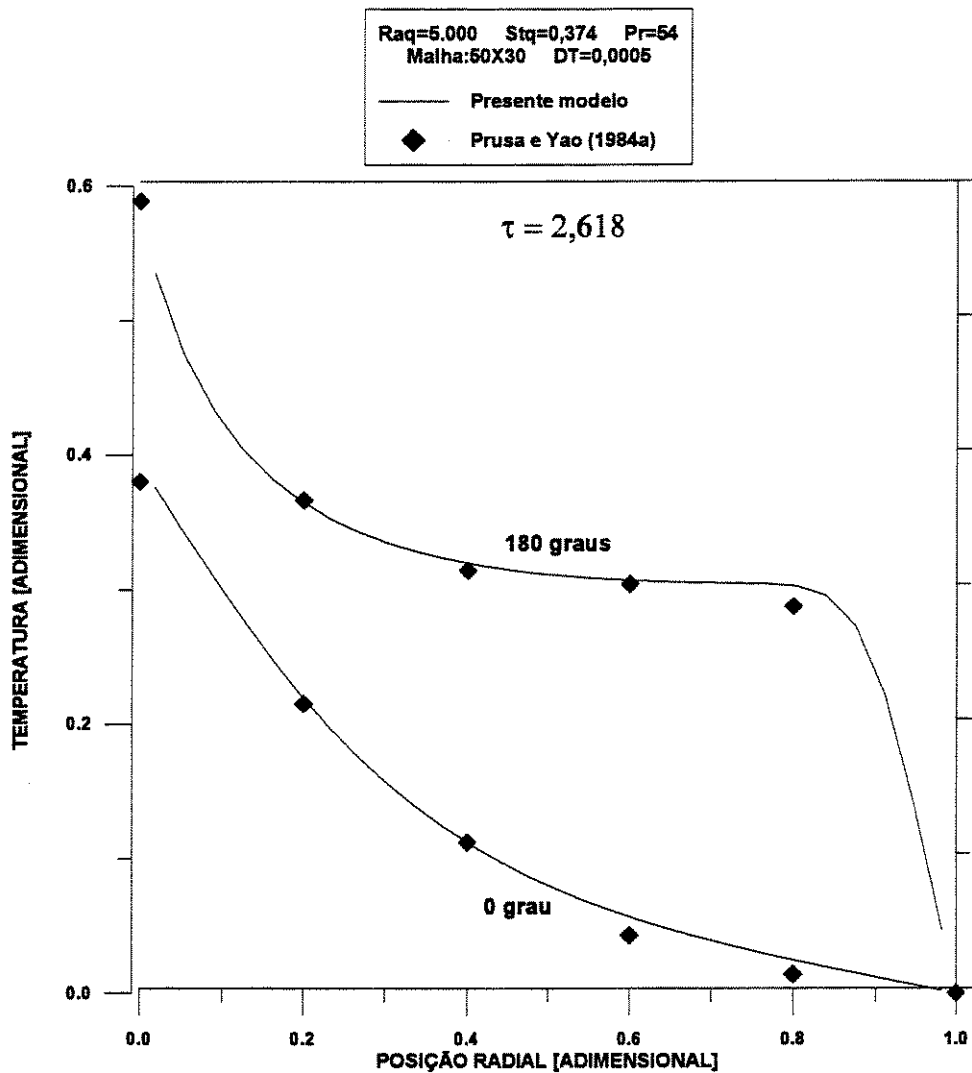


Figura 5.10 – Comparação com os resultados de Prusa e Yao (1984a) para a temperatura em função da coordenada radial para $\tau = 2,618$.

Por fim, tem-se as curvas comparativas para o número de Nusselt na interface líquido-sólido, apresentadas na figura (5.11). Com base nesta figura, observa-se que até o ângulo de 140° , existe uma grande identidade entre as curvas deste modelo e àquelas de Prusa e Yao (1984a) para todos os tempos considerados. Vê-se, outrossim, que para $\theta = 180^\circ$ ocorre um razoável afastamento entre as curvas, notadamente para $\tau = 1,87$. Esta diferença chega a um máximo de 16,8% em $\tau = 1,87$. Tais desníveis podem ser explicados considerando que, de acordo com a figura (5.4), no presente modelo a posição da interface possui valores mais elevados, em relação a Prusa e Yao (1984a), para o mesmo valor do tempo. Isto significa que, para este modelo,

existem gradientes de temperatura mais elevados nesta região, conseqüentemente, maiores valores para Nu são encontrados. Observa-se ainda que até um tempo $\tau = 0,374$, o regime condutivo é notadamente dominante, apresentando valores do número de Nusselt constantes ao longo da interface líquido-sólido.

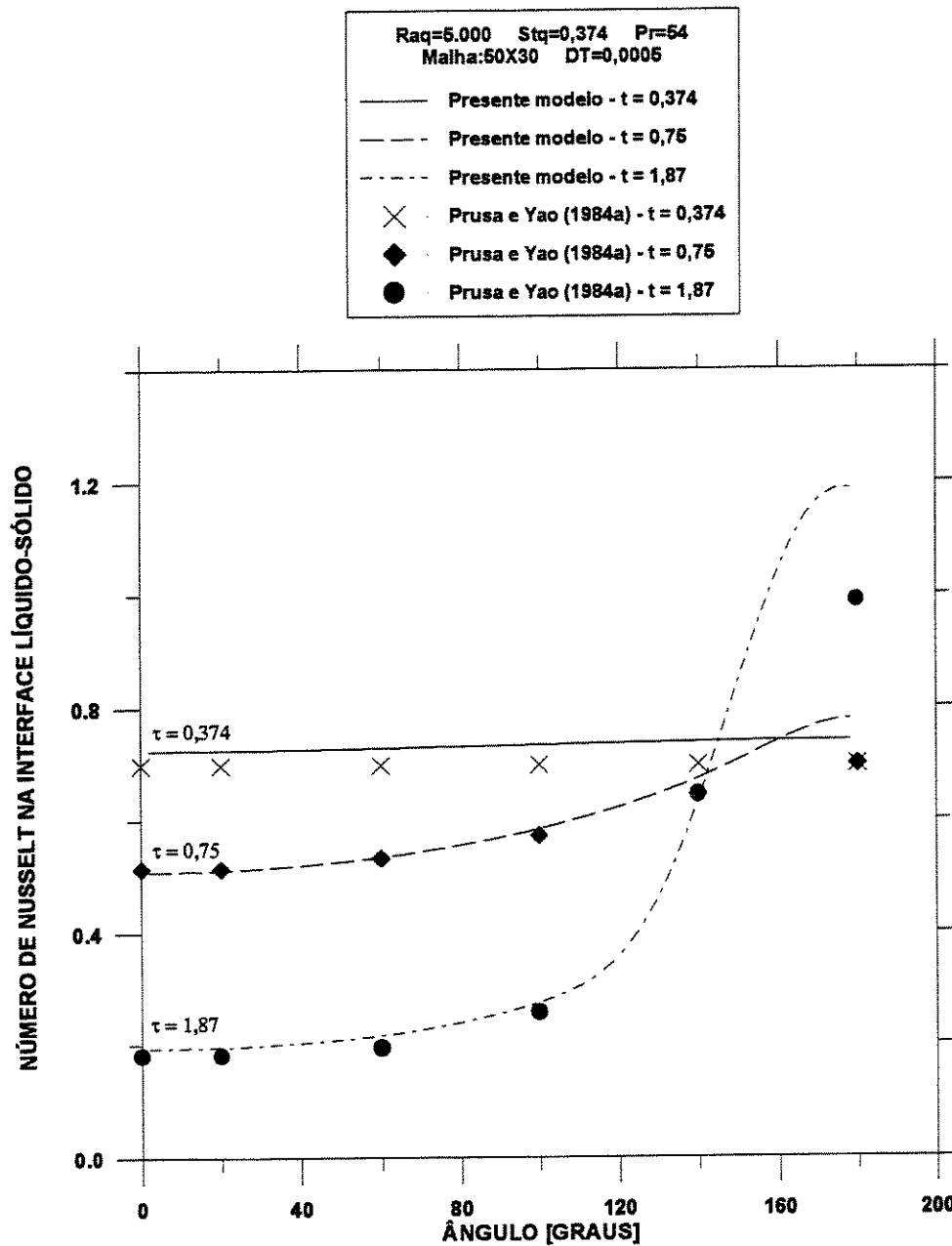


Figura 5.11 – Comparação com os resultados de Prusa e Yao (1984a) para a variação angular do número de Nusselt na interface líquido-sólido.

5.3.3 Comparação com Rieger *et al.* (1982)

Rieger *et al.* (1982) realizaram um estudo numérico para o problema de fusão ao redor de um cilindro horizontal, com temperatura constante na superfície. O modelo matemático baseou-se na formulação em função de corrente e vorticidade. Neste trabalho foi usado o método de coordenadas ajustadas ao corpo, juntamente com o método de diferenças finitas para obter uma solução numérica para o problema convectivo dominante. A adimensionalização das variáveis dependentes do modelo de Rieger *et al.* (1982) foi feita de forma idêntica aquela do presente estudo. Foram apresentados resultados para a posição da interface, volume fundido e número de Nusselt na superfície do cilindro e na interface, todos em função do tempo. Os autores consideraram como material de mudança de fase, uma parafina com número de Prandtl igual a 50.

As figuras (5.12) a (5.23), ilustram as comparações realizadas entre os resultados de Rieger *et al.* (1982) e aqueles auferidos por este estudo para valores do número de Rayleigh de 10.000 e 37.500, com os respectivos número de Stefan de 0,005 e 0,02.

As figuras (5.12) e (5.13) mostram a posição da interface em função do tempo para os dois valores do número de Rayleigh considerados. A posição da interface foi avaliada em quatro pontos, sejam estes 0° , 90° , 150° e 180° . Salientando, mais uma vez, que os ângulos citados equivalem, no presente trabalho, aos valores de -90° , 0° , 60° , 90° , respectivamente. Pode-se observar através das referidas figuras que para as quatro posições apresentadas, as curvas revelaram evoluções semelhantes, mostrando, com isto, que os termos fonte, oriundos da transformação de coordenadas, que foram desprezados não exercem influência significativa sobre a validade do presente modelo para os valores do número de Rayleigh considerados.

O efeito convectivo pode ser claramente constatado pelas figuras (5.12) e (5.13). Nota-se que a posição da interface para os quatro ângulos apresentados, permanecem iguais até o tempo $\tau = 0,1$ e $\tau = 0,05$, aproximadamente, para valores do número de Rayleigh de 10.000 e 37.000, respectivamente. Até este período de tempo a condução domina o processo de fusão. A partir deste ponto, vê-se um afastamento entre as curvas, sendo este maior para os pontos situados na

parte superior do cilindro, ou seja, $\theta = 180^\circ$, onde se forma a pluma devido ao efeito convectivo que já começa a dominar o processo.

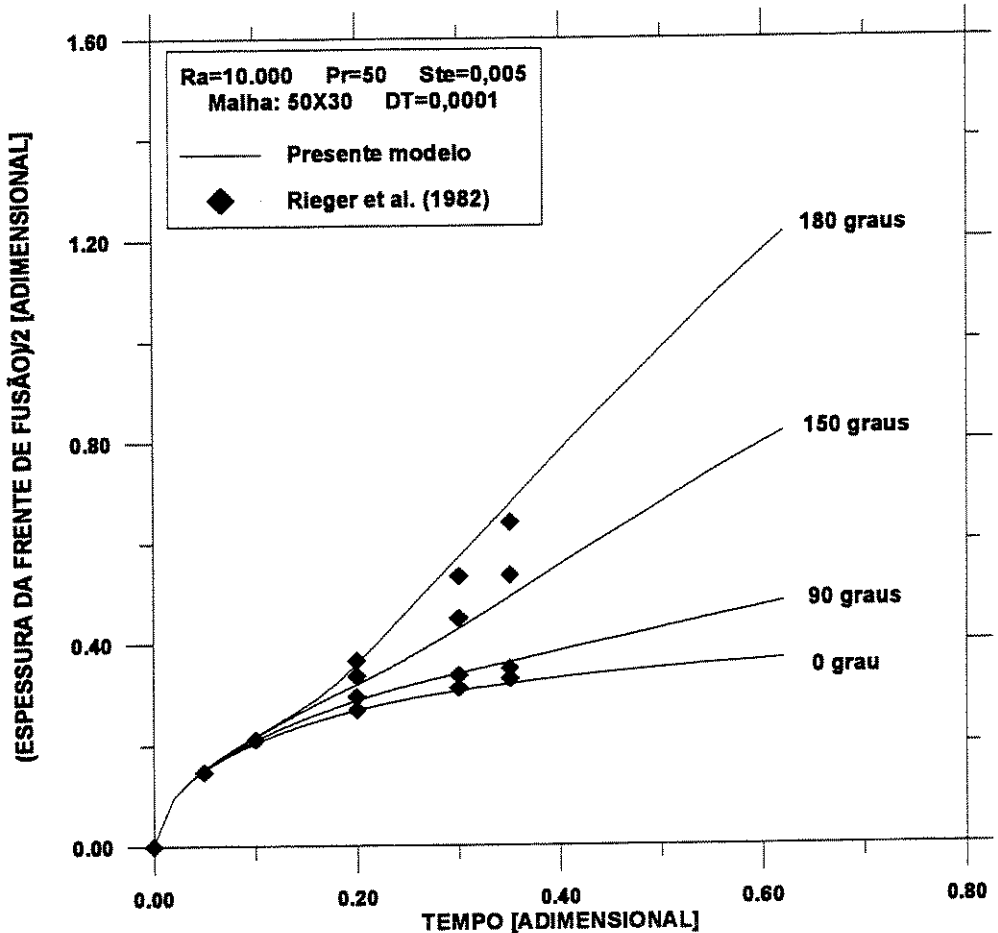


Figura 5.12 – Comparação com os resultados de Rieger *et al.* (1982) para a posição da interface em função do tempo ($Ra = 10^4$).

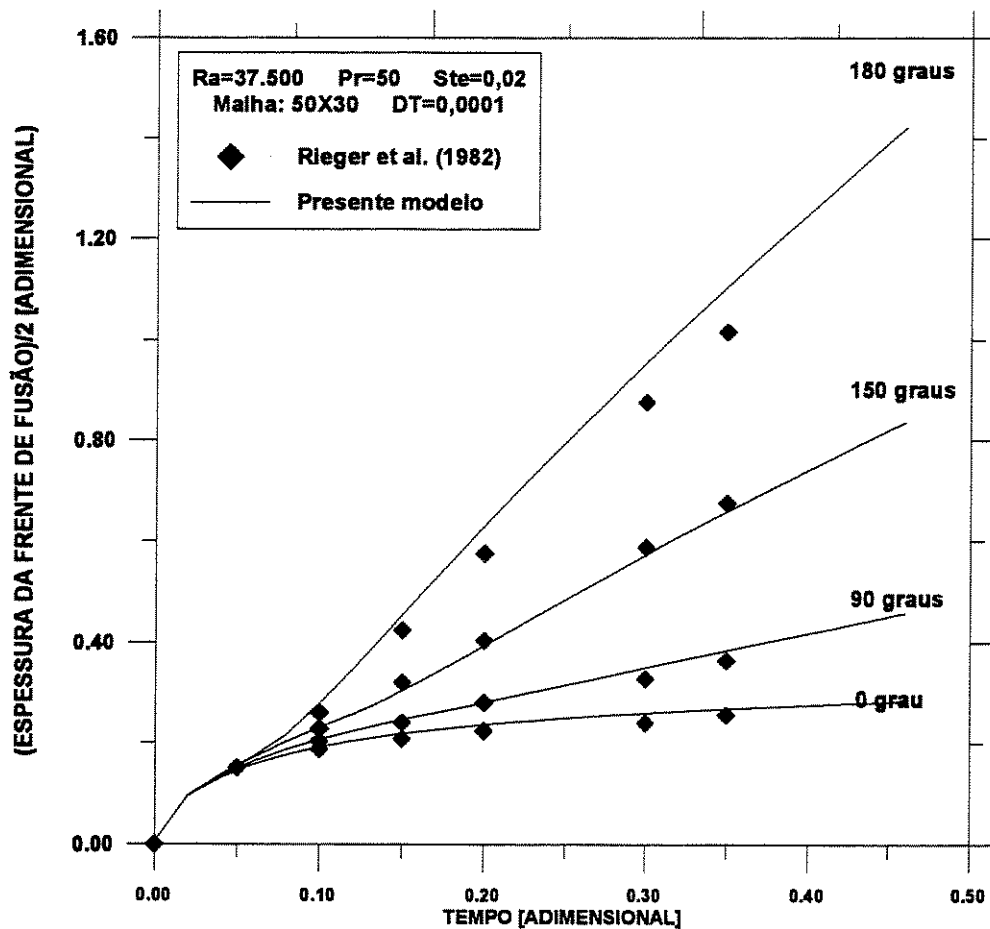
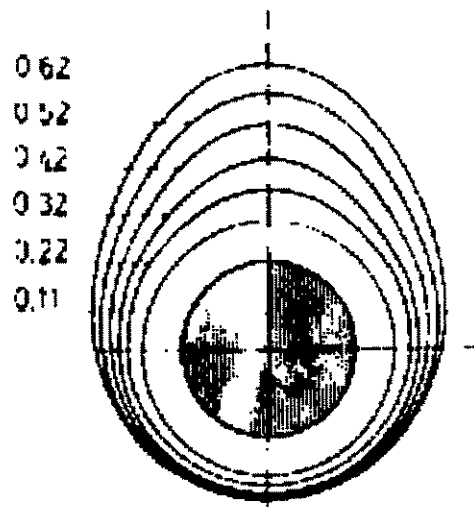


Figura 5.13 – Comparação com os resultados de Rieger *et al.* (1982) para a posição da interface em função do tempo ($Ra = 37500$).

As figuras (5.14), (5.15), (5.16) e (5.17) oferecem possibilidades de se realizar uma comparação qualitativa do crescimento da interface ao redor do cilindro horizontal para seis valores de tempos adimensionais, considerando, respectivamente, $Ra = 10^4$ e $Ra = 37.500$. A partir das supramencionadas figuras, pode-se constatar uma boa semelhança entre as curvas deste modelo e aquelas de Rieger *et al.* (1982), para ambos os valores do número de Rayleigh.



$Ste = 0.005$ $Ra = 10000$

Figura 5.14 – Resultados de Rieger *et al.* (1982) para a posição da interface em função do tempo ($Ra = 10^4$).

Fonte: Rieger *et al.* (1982).

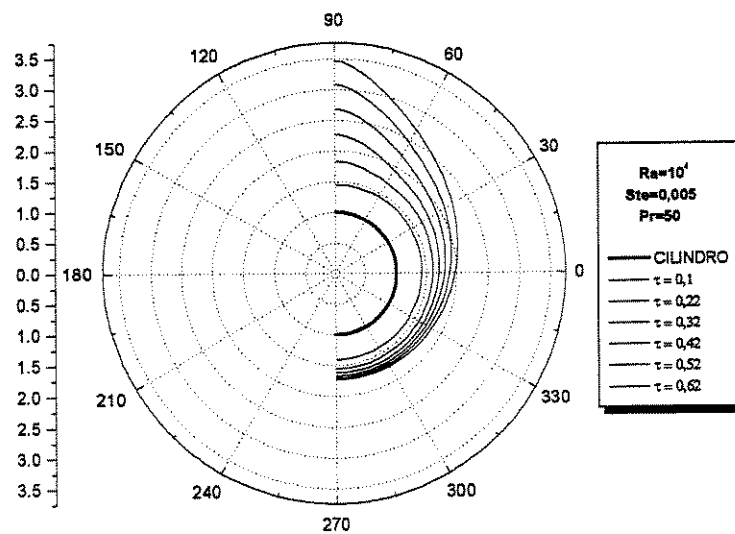
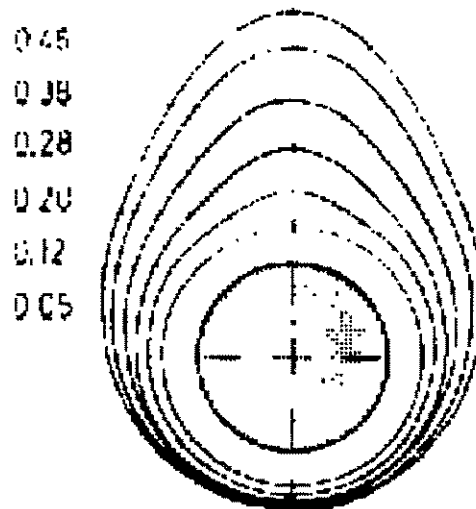


Figura 5.15 – Resultados do presente estudo para a posição da interface em função do tempo ($Ra = 10^4$).



$Ste = 0.02$ $Ra = 37500$

Figura 5.16 – Resultados de Rieger *et al.* (1982) para a posição da interface em função do tempo ($Ra = 37.500$).

Fonte: Rieger *et al.* (1982).

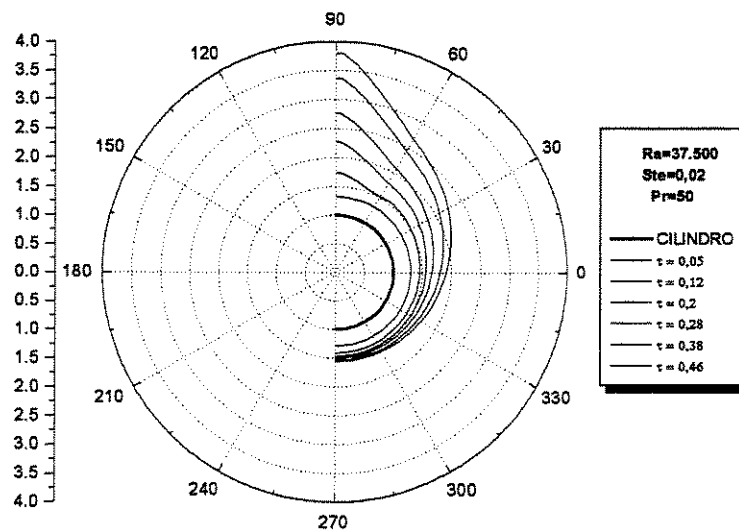


Figura 5.17 – Resultados do presente estudo para a posição da interface em função do tempo ($Ra = 37.500$).

Comparações do o número de Nusselt na superfície do cilindro em função do tempo, para os dois valores do número de Rayleigh em análise, estão ilustradas nas figuras (5.18) e (5.19). De uma forma geral, constata-se que as curvas do presente estudo apresentaram uma excelente aproximação em relação às de Rieger *et al.* (1982) para ambas as posições angulares, $\theta = 0^\circ$ e 180° . É interessante observar a evolução das curvas em relação a transição entre os regimes de condução e convecção dominante, conforme relatado em Sparrow *et al.* (1978a). Enquanto a condução é o mecanismo dominante no processo, as curvas apresentam um decréscimo do número de Nusselt ao longo do tempo. Esta tendência permanece até o período de transição, que ocorre aproximadamente para o tempo de 0,2, para $Ra = 10.000$, e 0,01, para $Ra = 37.500$. Quando o processo atinge o regime de convecção dominante, os perfis tendem a se manter constantes. Este comportamento é verificado tanto para $\theta = 0^\circ$, quanto para $\theta = 180^\circ$, e ainda em $\theta = 90^\circ$, apenas para $Ra = 37.500$. É fácil verificar ainda, através das figuras (5.15) e (5.17), que realmente o período de transição ocorre para tempos aproximadamente iguais aqueles supramencionados.

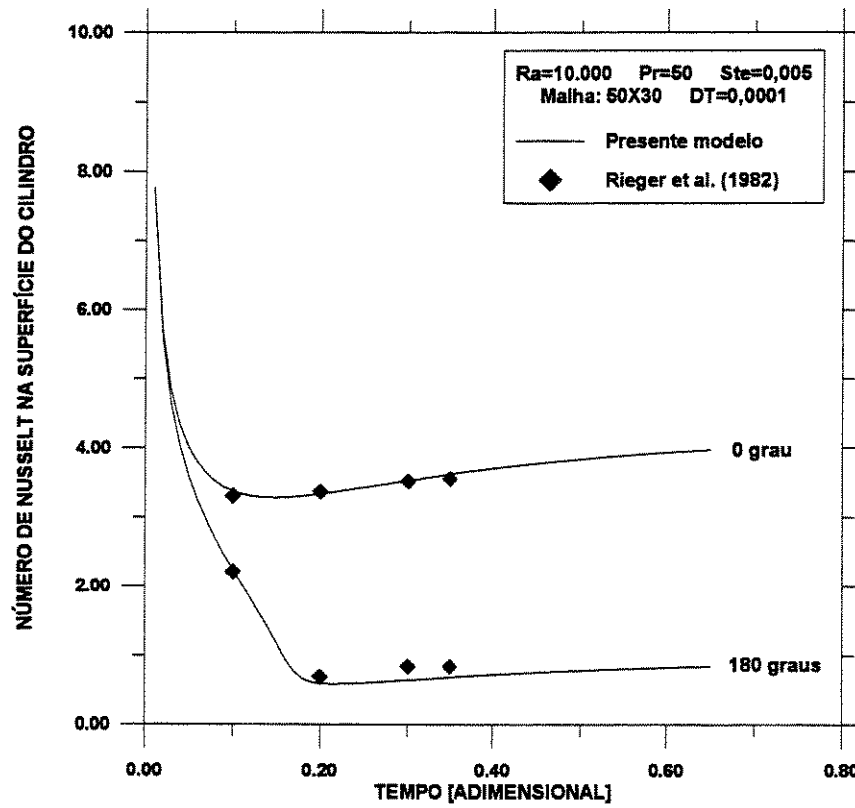


Figura 5.18 – Comparação com os resultados de Rieger *et al.* (1982) para a variação temporal do número de Nusselt na superfície do cilindro ($Ra = 10^4$).

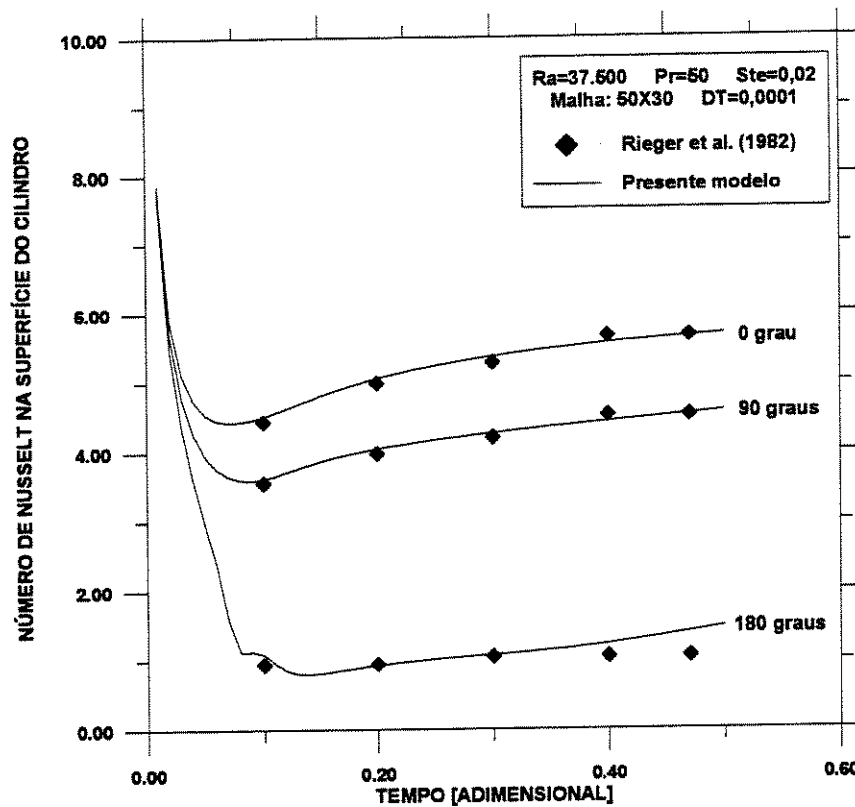


Figura 5.19 – Comparação com os resultados de Rieger *et al.* (1982) para a variação temporal do número de Nusselt na superfície do cilindro ($Ra = 37500$).

Quanto à comparação para o número de Nusselt na interface líquido-sólido, infere-se, com base nas figuras (5.20) e (5.21), que para $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 90^\circ$, este último apenas para $Ra = 37.500$, as curvas mostram uma excelente concordância. Por outro lado, em $\theta = 180^\circ$, para ambos os valores do número de Rayleigh, as curvas referentes ao presente trabalho apresentaram valores um pouco acima daquelas obtidas por Rieger *et al.* (1982), principalmente para $Ra = 37.500$. Uma explicação similar aquela dada na seção 5.3.2 em relação a figura (5.11), pode ser atribuída também aos desníveis verificados nas figuras (5.20) e (5.21).

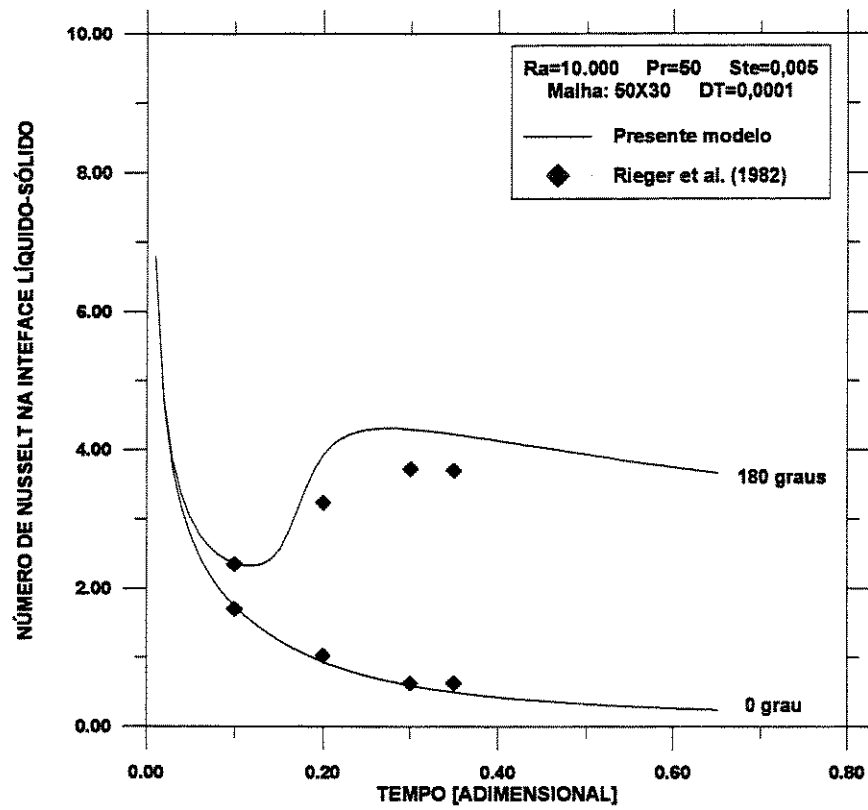


Figura 5.20 – Comparação com os resultados de Rieger *et al.* (1982) para a variação temporal do número de Nusselt na interface líquido-sólido ($Ra = 10^4$).

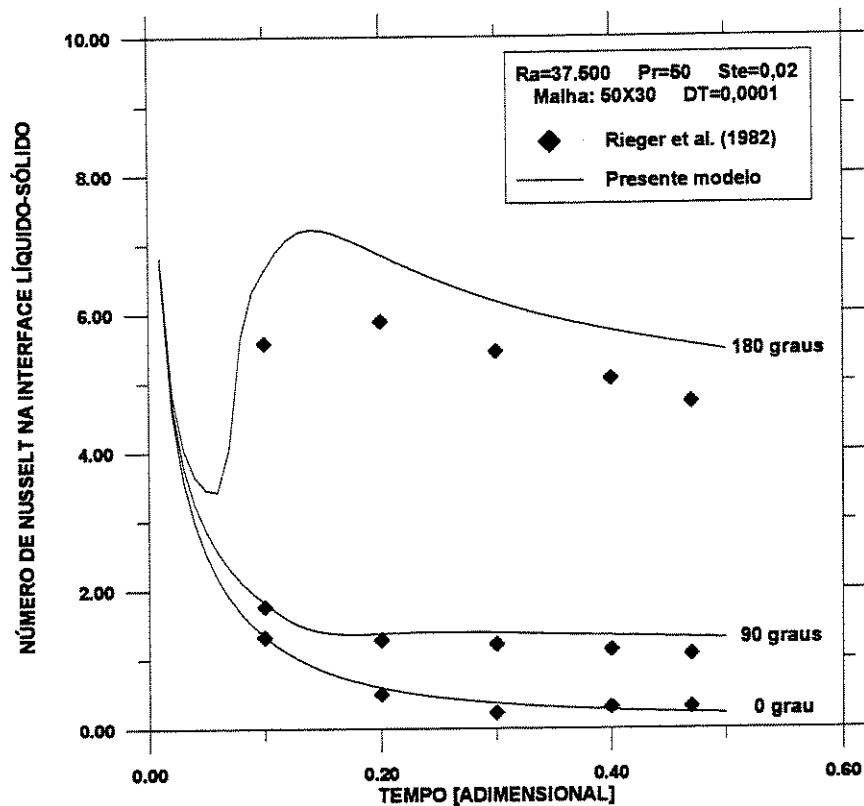


Figura 5.21 – Comparação com os resultados de Rieger *et al.* (1982) para a variação temporal do número de Nusselt na interface líquido-sólido ($Ra = 37500$).

Uma última comparação com o estudo de Rieger *et al.* (1982) será feita para o volume fundido em função do tempo, mostrado nas figuras (5.22) e (5.23), para ambos os valores de Ra considerados. O volume fundido adimensional foi determinado através da seguinte expressão:

$$V_f = \int_0^1 \int_0^\pi R d\theta \Delta_L d\eta$$

Com base na figura (5.22), é possível verificar um ótimo ajuste entre as curvas para o valor de $Ra = 10^4$. Em relação a comparação para $Ra = 37.500$, constata-se da figura (5.23) que a partir de $\tau = 0,15$, aproximadamente, houve um afastamento entre as curvas. A máxima diferença observada, neste caso, foi da ordem de 12,6 %, em $\tau = 0,35$.

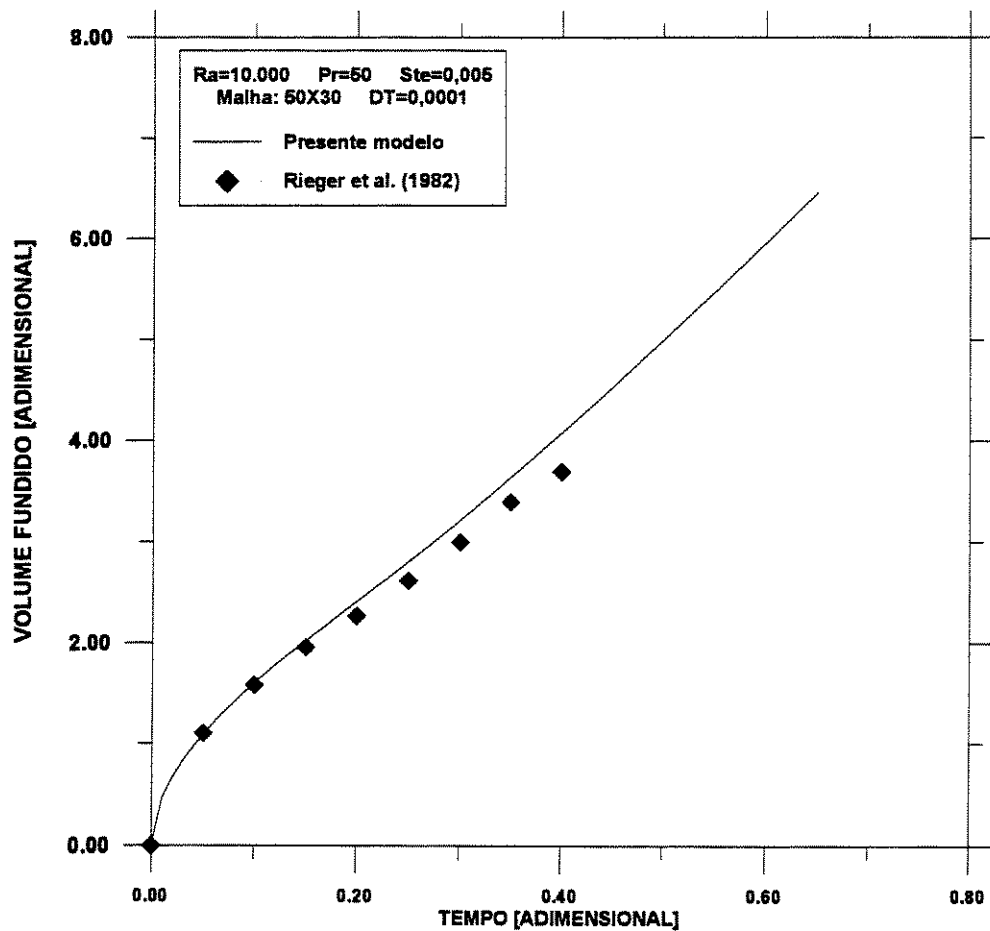


Figura 5.22 – Comparação com os resultados de Rieger *et al.* (1982) para o volume de líquido fundido em função do tempo ($Ra = 10^4$).

Observa-se ainda pelas figuras (5.22) e (5.23) que após alcançado o regime convectivo dominante, a curva para o volume fundido ao longo do tempo revela um perfil muito próximo ao linear. Isto já havia sido constatado experimentalmente por Hale e Viskanta (1980).

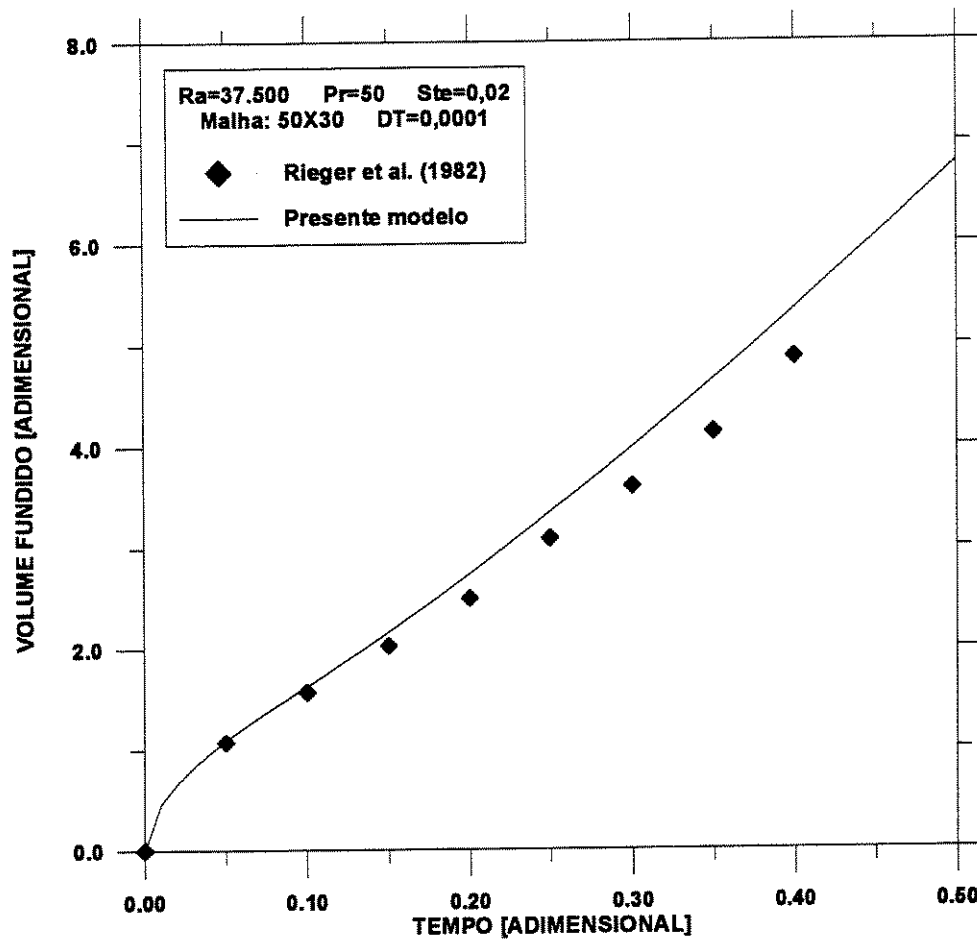


Figura 5.23 – Comparação com os resultados de Rieger *et al.* (1982) para o volume de líquido fundido em função do tempo ($Ra = 37500$).

As comparações possíveis de serem realizadas entre os resultados auferidos com o presente modelo e aqueles de Rieger *et al.* (1982), foram apresentadas nas figuras (5.12) a (5.23). Todavia, considerou-se válido mostrar os resultados para o campo vetorial de velocidades e para o campo de temperaturas obtidos com o presente modelo a partir dos parâmetros utilizados pelos referidos autores.

As figuras (5.24) e (5.25) ilustram o campo vetorial de velocidades para o valor do número de Rayleigh de 10.000, número de Stefan de 0,005 e número de Prandtl igual a 50, no tempo $\tau = 0,65$. Na figura (5.25), pode-se observar mais nitidamente o vórtice formado na região superior do cilindro, onde tem-se a existência da “pluma” provocada pelas correntes convectivas. Mais

adiante são apresentadas as figuras (5.26) e (5.27), com o mesmo objetivo das últimas citadas, (5.24) e (5.25), para os valores de $Ra = 37.500$, $Stefan = 0,02$ e $Pr = 50$ em $\tau = 0,38$.

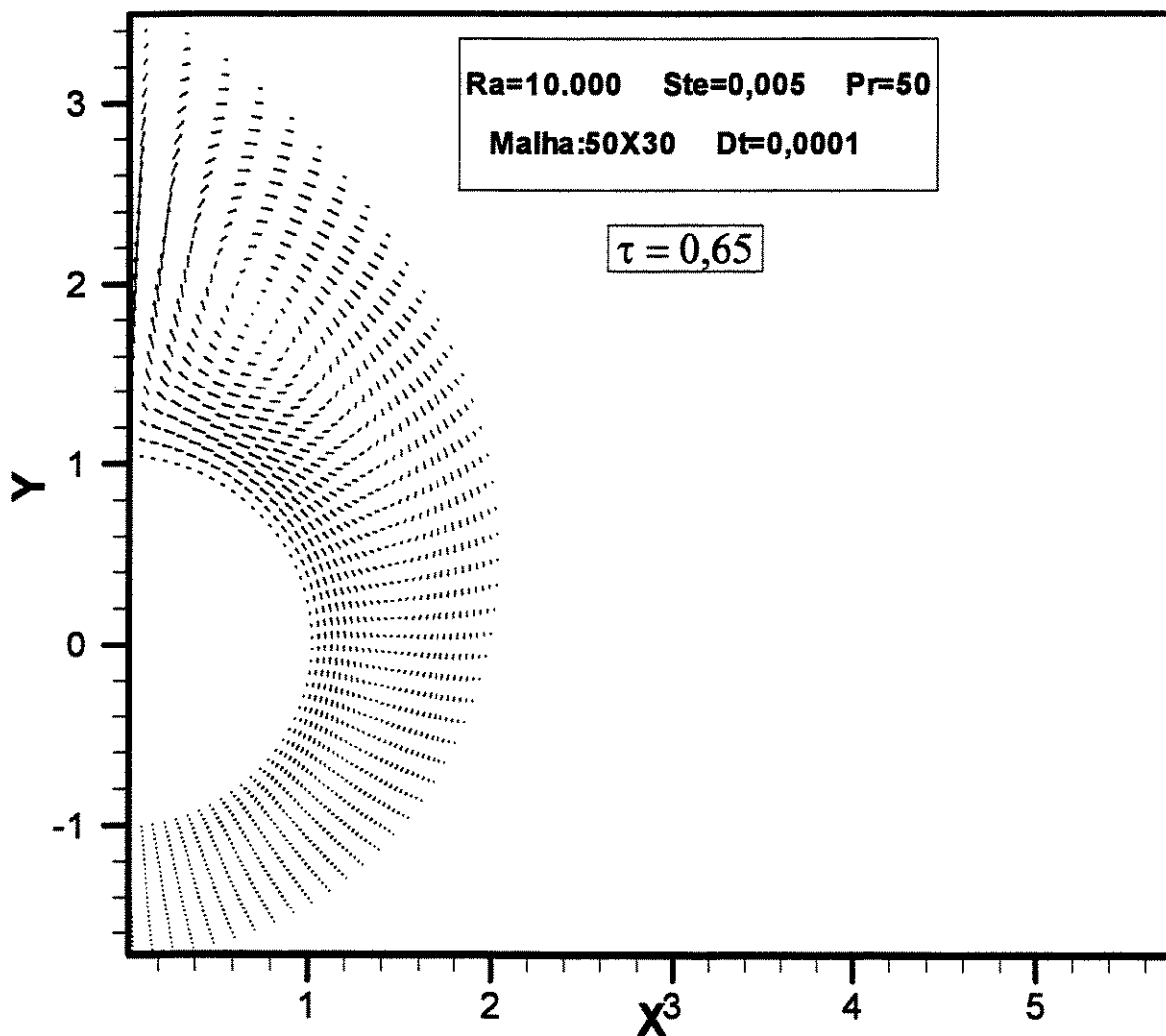


Figura 5.24 – Campo de velocidades para $Ra = 10.000$, $Ste = 0,005$ e $Pr = 50$, no tempo $\tau = 0,65$.

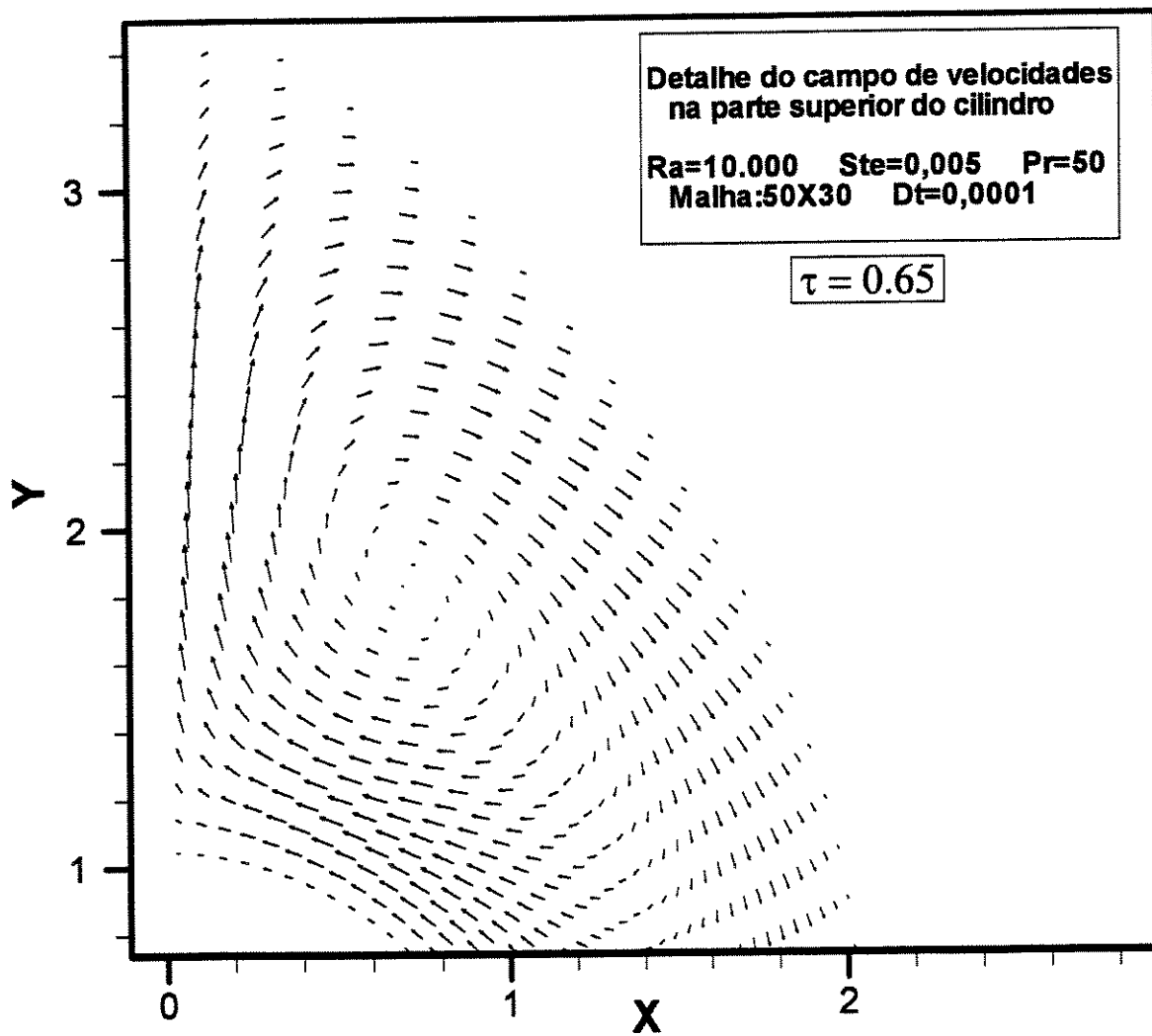


Figura 5.25 – Detalhe do campo de velocidades mostrado na figura
 (5.24), para a região superior do cilindro, com $Ra = 10.000$, $Ste = 0,005$ e
 $Pr = 50$, no tempo $\tau = 0,65$.

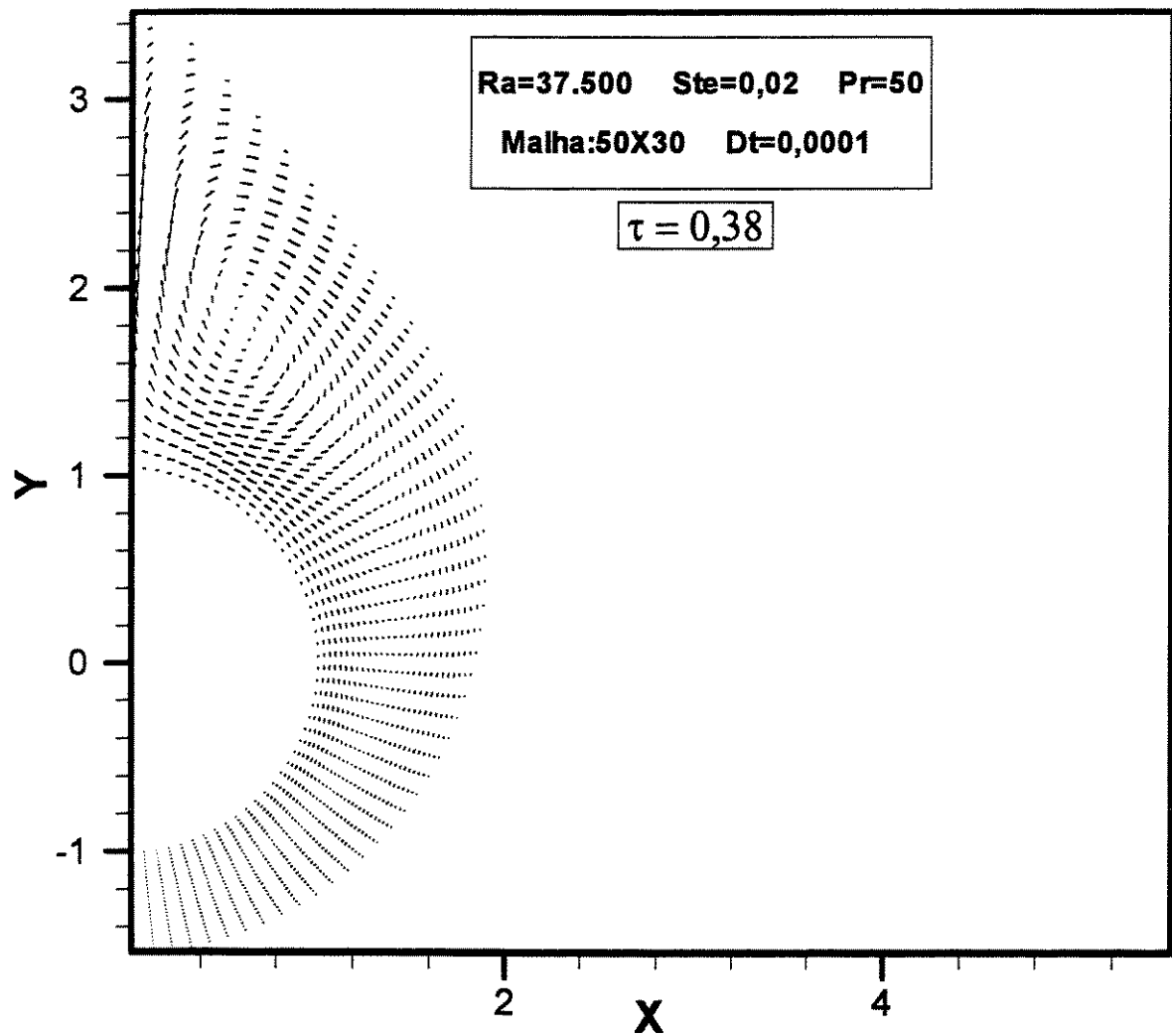


Figura 5.26 – Campo de velocidades para $Ra = 37.500$, $Ste = 0,02$ e $Pr = 50$, no tempo $\tau = 0,38$.

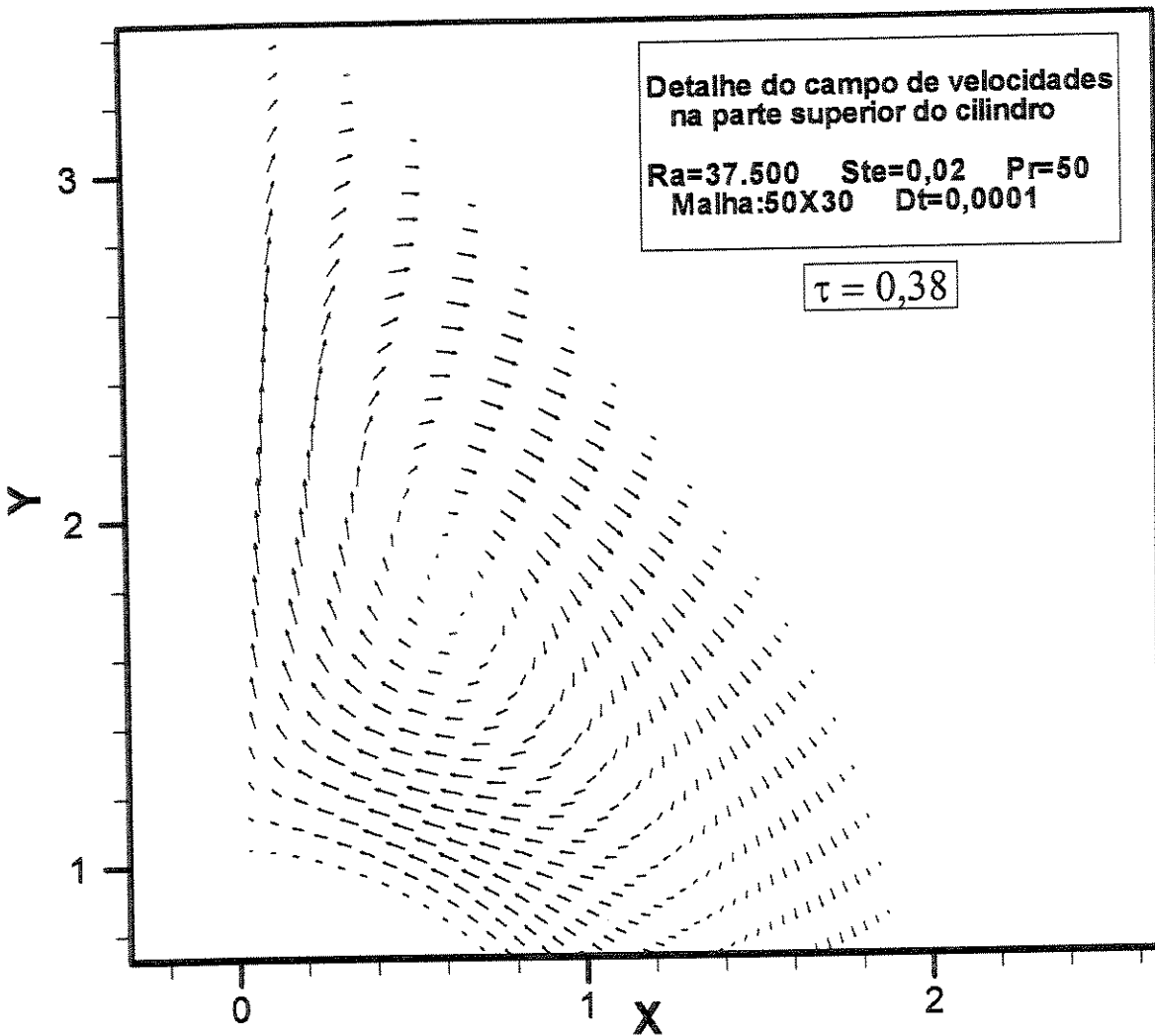


Figura 5.27 – Detalhe do campo de velocidades mostrado na figura (5.26), para a região superior do cilindro, com $Ra = 37.500$, $Ste = 0,02$ e $Pr = 50$, no tempo $\tau = 0,38$.

Por fim, as figuras (5.28) e (5.29) mostram as isothermas obtidas a partir dos valores do número de Rayleigh de 10.000 e 37.500, número de Stefan de 0,005 e 0,02 e número de Prandtl de 50. As figuras (5.28) e (5.29) correspondem aos tempo $\tau = 0,65$ e 0,38, respectivamente. Para estes valores de tempo, a convecção natural já é o mecanismo dominante no processo de fusão e, conseqüentemente, tem-se, em ambos os gráficos, as isothermas denotando altos gradientes na região superior do cilindro.

Ra=10.000 Pr=50 Ste=0,005

Malha: 50X30 DT=0,0001

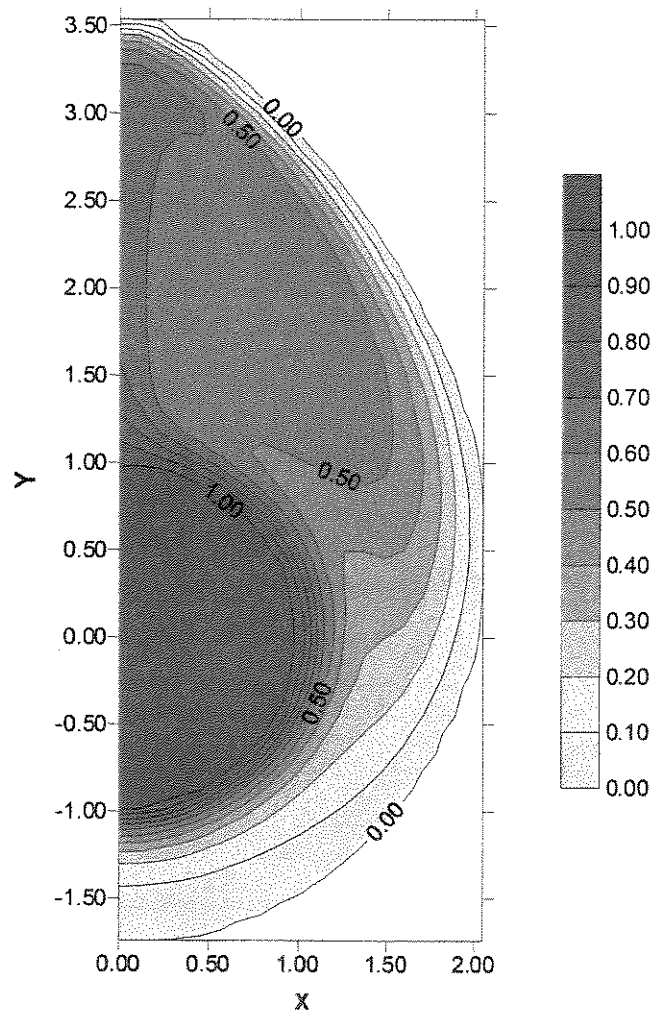


Figura 5.28 – Campo de temperaturas para $Ra = 10.000$, $Ste = 0,005$ e $Pr = 50$, no tempo $\tau = 0,65$.

Ra=37.500 Pr=50 Ste=0,02

Malha: 50X30 DT=0,0001

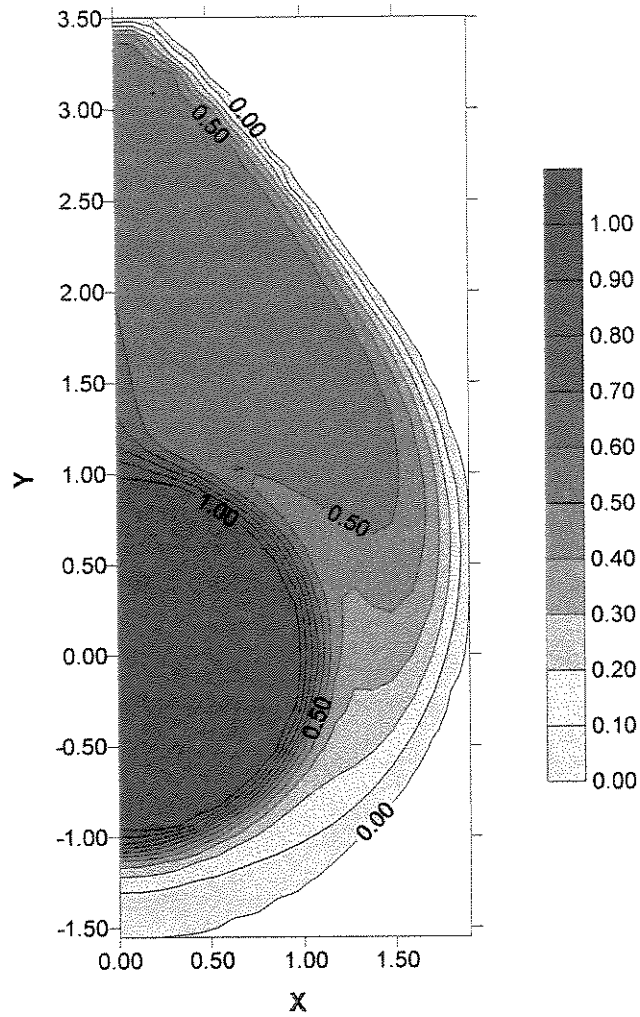


Figura 5.29 – Campo de temperaturas para $Ra = 37.500$, $Ste = 0,02$ e $Pr = 50$, no tempo $\tau = 0,38$.

5.4 Resultados para o Presente Modelo

Nesta seção serão mostrados os resultados auferidos a partir das considerações estabelecidas na seção 5.2, para o sistema térmico em estudo. Os resultados foram obtidos para os três valores de temperatura admitidas na superfície do cilindro, sejam estes, $T_o = 20, 25$ e 30°C , no caso da água, e $T_o = 32, 35$ e 40°C , para o n-octadecano. A partir dos valores de temperatura considerados, foram calculados os números de Rayleigh e Stefan, como descrito na seção 5.2, encontrando-se estes nas faixas de $15.976 \leq Ra_{\text{agua}} \leq 38.948$ e $0,034 \leq Ste \leq 0,051$ e $8.281 \leq Ra \leq 25.050$ e $0,036 \leq Ste \leq 0,109$, respectivamente, para a água e a parafina n-octadecano.

Nas figuras (5.30) a (5.33) são apresentados os gráficos que relacionam o tempo total de fusão, τ_{tot} , em função do número de Rayleigh e Stefan, para ambos os materiais de mudança de fase empregados neste estudo. Antes, porém, de comentar as referidas figuras, é importante salientar que nestas as variáveis foram expressas dimensionalmente para efeito de uma melhor interpretação física das mesmas. Observa-se nestas figuras a mesma tendência em todas as curvas. Pode-se constatar que a medida que o valor do número de Rayleigh e Stefan aumenta, o tempo total gasto pelo material para alcançar o estado estacionário no processo de fusão tende a decrescer. Isto já era esperado, visto que altos valores do número de Rayleigh causam um aumento no fluxo convectivo e, conseqüentemente, uma maior taxa de fusão no material. Neste trabalho admitiu-se que o crescimento da camada de líquido com o tempo tornava-se desprezível, quando, para um ponto situado na parte superior do cilindro, $\theta = 90^\circ$, o valor da diferença entre as espessuras da camada líquida no tempo atual, $\tau + \Delta\tau$, e no tempo anterior, τ , em relação a espessura do tempo atual, fosse menor que 1%, ou seja:

$$\left(\frac{\Delta_L^{\tau+\Delta\tau} - \Delta_L^\tau}{\Delta_L^{\tau+\Delta\tau}} \right) \leq 10^{-2}$$

A partir dos resultados obtidos, verificou-se que para $Ra_{\text{agua}} = 15.976$ e $Ste = 0,034$, correspondentes a $T_o = 20^\circ\text{C}$, por exemplo, após um período de 10,8h de processo, a espessura da interface cresceu apenas 0,3mm à cada 4min., o que significa um aumento de apenas 0,38%, no

intervalo de tempo considerado. Encontrando-se este, portanto, bem abaixo da diferença de 1% adotada pelo estudo para que a frente de fusão atingisse o estado estacionário.

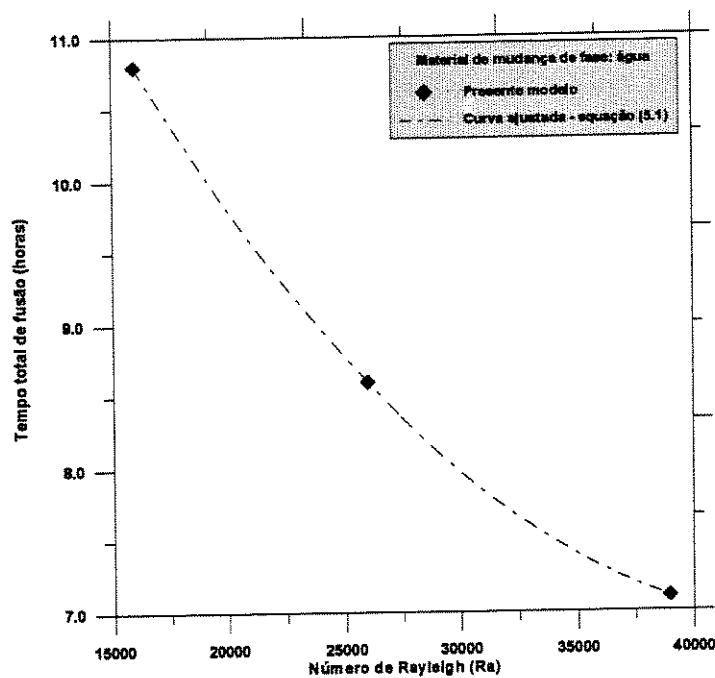


Figura 5.30 – Tempo total de fusão em função do número de Rayleigh, utilizando a água como material de mudança de fase.

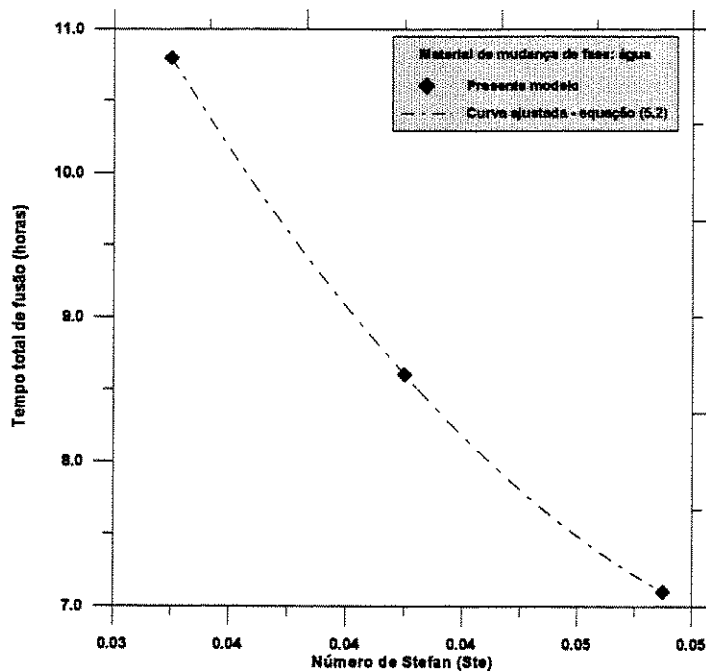


Figura 5.31 – Tempo total de fusão em função do número de Stefan, utilizando a água como material de mudança de fase.

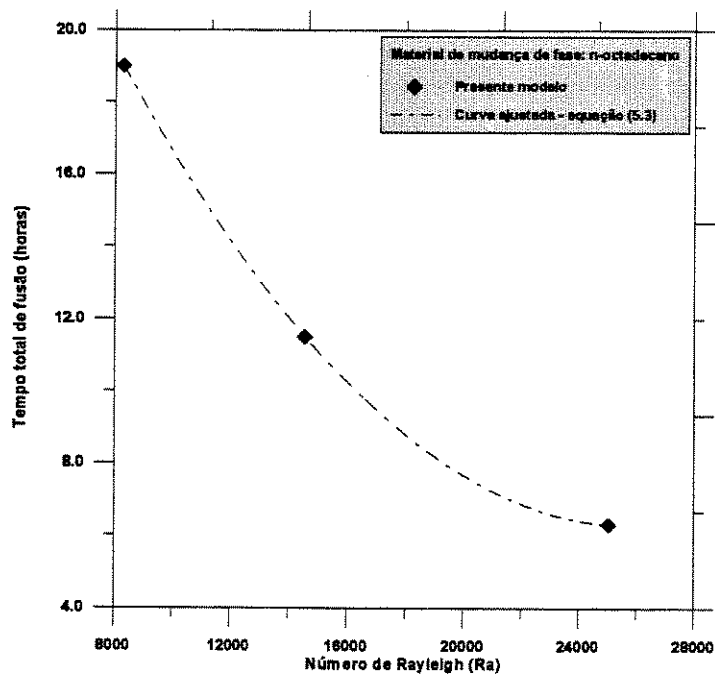


Figura 5.32 – Tempo total de fusão em função do número de Rayleigh, utilizando o n-octadecano como material de mudança de fase.

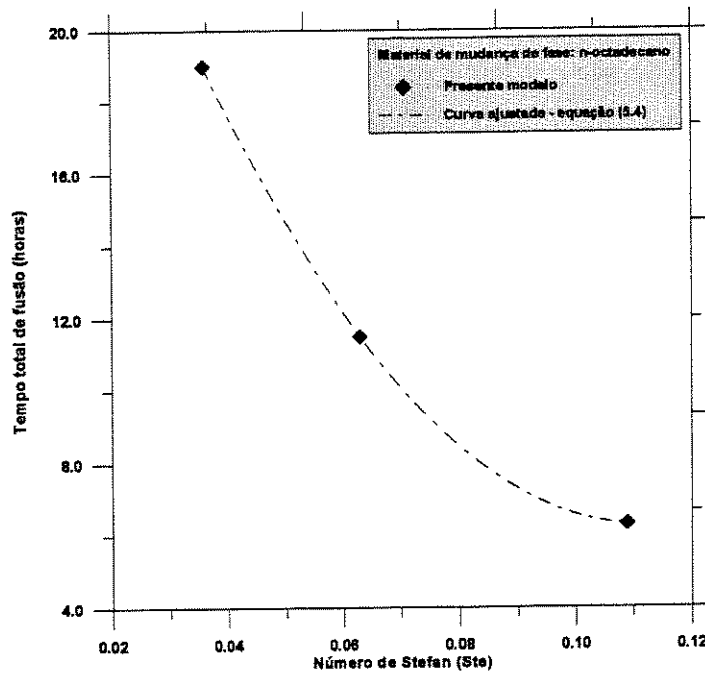


Figura 5.33 – Tempo total de fusão em função do número de Stefan, utilizando o n-octadecano como material de mudança de fase.

Com base nos resultados do presente modelo, apresentados nas figuras (5.30) a (5.33), foram obtidas correlações para o tempo total de fusão em função do número de Rayleigh e Stefan, respectivamente para a água e o n-octadecano, as quais são dadas pelas expressões (5.1) a (5.4), abaixo.

$$\tau_{\text{tot}} = 4,54858 \cdot 10^{-9} (\text{Ra}_{\text{água}})^2 - 4,10892 \cdot 10^{-4} (\text{Ra}_{\text{água}}) + 16,2035 \quad (5.1)$$

$$\tau_{\text{tot}} = 6.372,55(\text{Ste})^2 - 759,314(\text{Ste}) + 29,25 \quad (5.2)$$

$$\tau_{\text{tot}} = 4,15275 \cdot 10^{-8} (\text{Ra})^2 - 2,1415 \cdot 10^{-3} (\text{Ra}) + 33,886 \quad (5.3)$$

$$\tau_{\text{tot}} = 2.256,63(\text{Ste})^2 - 501,184(\text{Ste}) + 34,118 \quad (5.4)$$

As correlações dadas pelas equações (5.1) a (5.4) denotam duas formas de calcular o tempo total de fusão do material de mudança de fase em função das variáveis adimensionais, dadas pelo número de Rayleigh e Stefan.

Nas figuras (5.34) a (5.36) são ilustrados os resultados obtidos para o volume total fundido, V_{tot} , em função do número de Rayleigh e Stefan e da temperatura na superfície do cilindro, T_o , respectivamente, quando do emprego da água como material de mudança de fase. Já nas figuras (5.37) a (5.39), apresentam-se curvas similares aquelas mostradas nas figuras (5.34) a (5.36), porém, desta vez, utilizando a parafina n-octadecano como material de mudança de fase. Infere-se destas, novamente, tendências similares em todas as curvas.

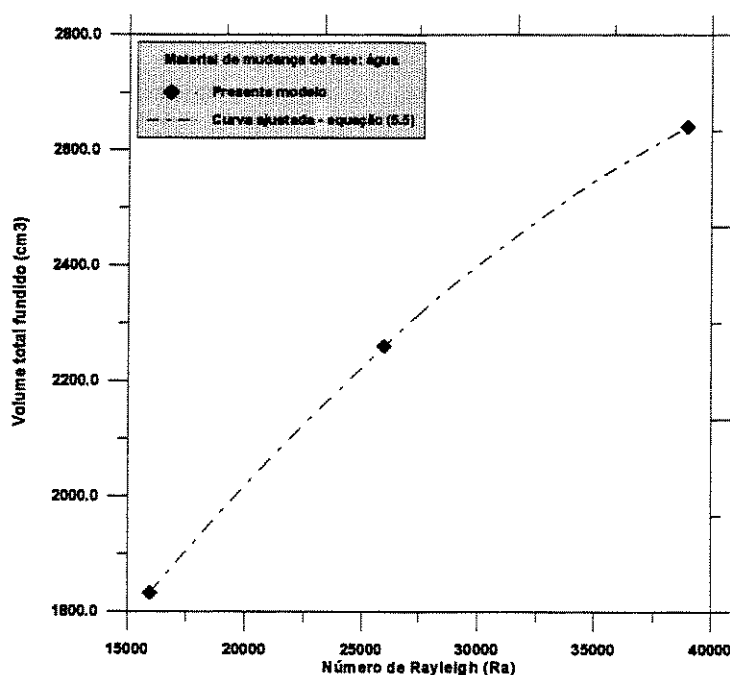


Figura 5.34 – Volume total fundido em função do número de Rayleigh, utilizando a água como material de mudança de fase.

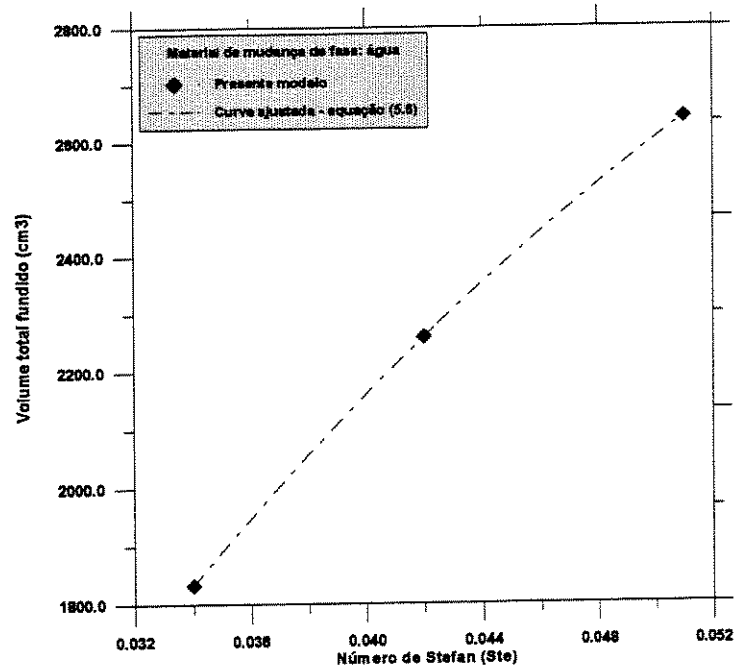


Figura 5.35 – Volume total fundido em função do número de Stefan, utilizando a água como material de mudança de fase.

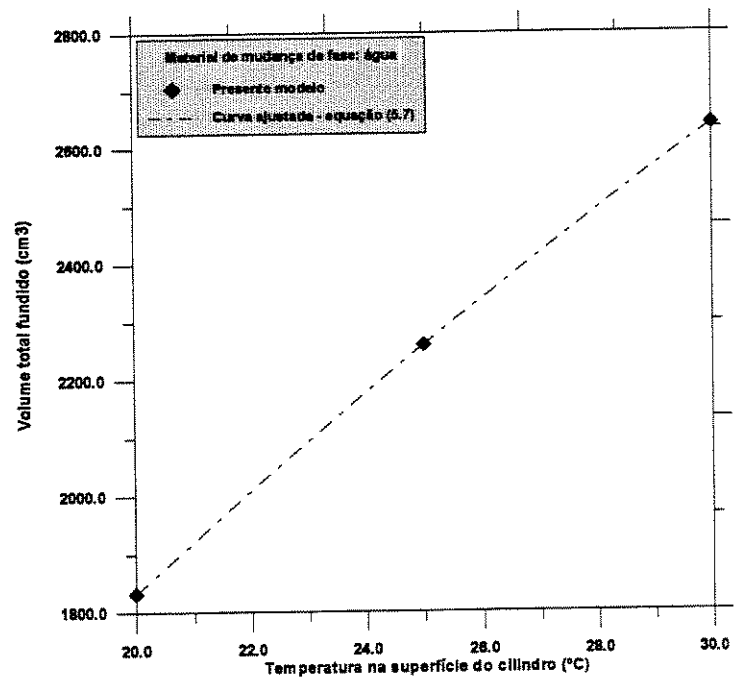


Figura 5.36 – Volume total fundido em função da temperatura na superfície do cilindro, T_o , utilizando a água como material de mudança de fase.

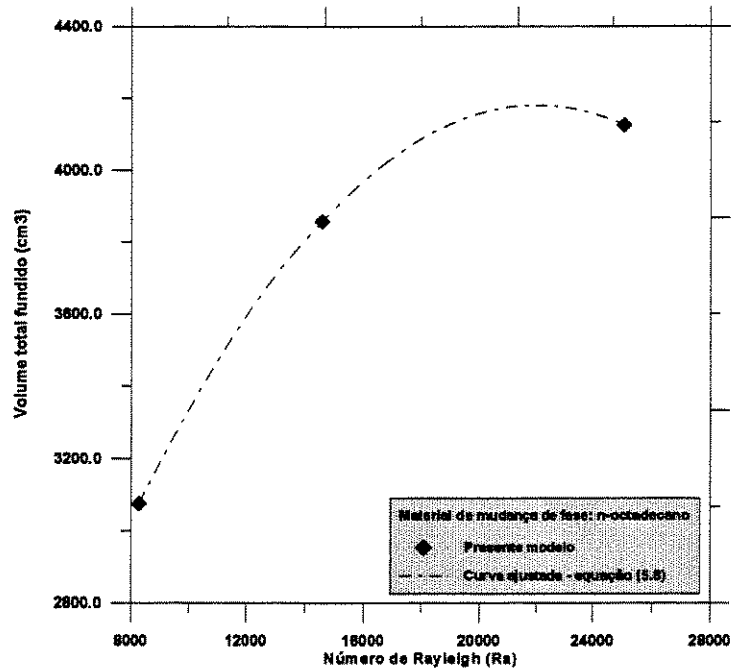


Figura 5.37 – Volume total fundido em função do número de Rayleigh, utilizando o n-octadecano como material de mudança de fase.

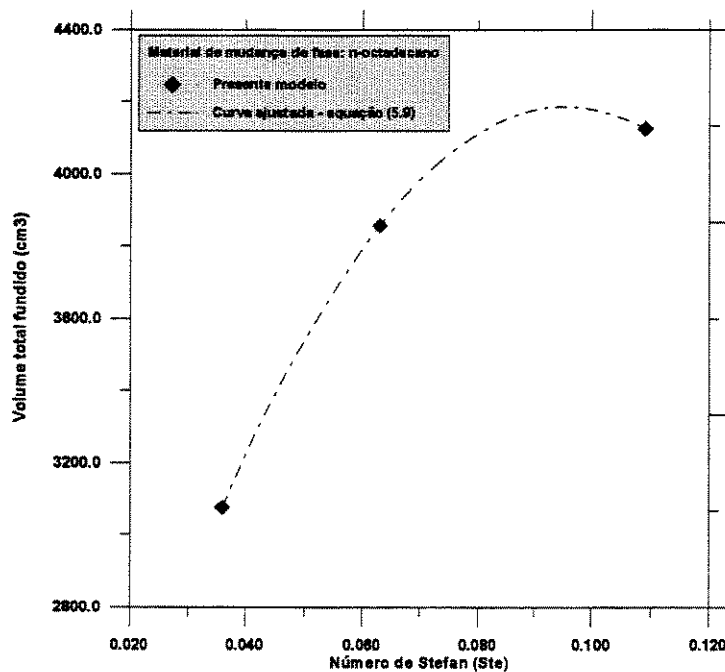


Figura 5.38 – Volume total fundido em função do número de Stefan, utilizando o n-octadecano como material de mudança de fase.

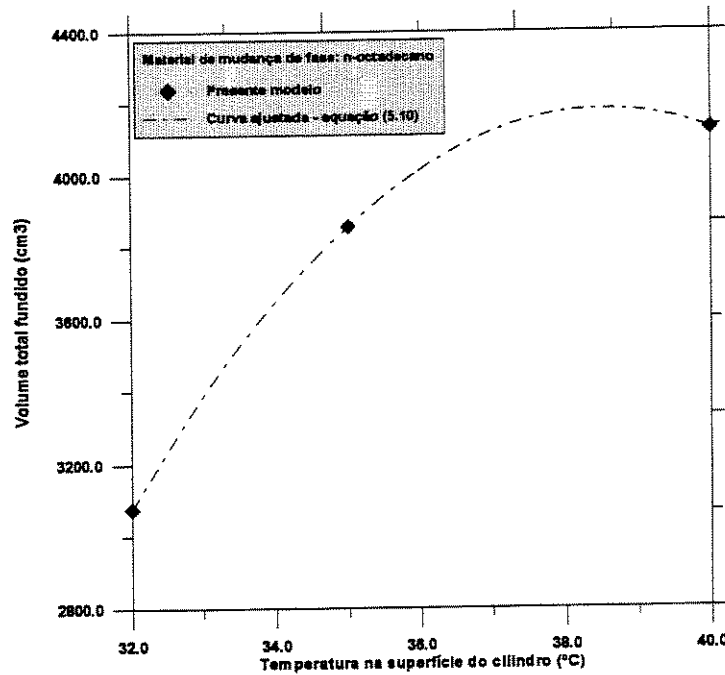


Figura 5.39 – Volume total fundido em função da temperatura na superfície do cilindro, T_o , utilizando o n-octadecano como material de mudança de fase.

Das figuras (5.36) e (5.39), fica evidente que temperaturas mais elevadas na superfície do cilindro resultam, conseqüentemente, em menores volumes total fundido. Por exemplo, do gráfico (5.36) é possível inferir que o volume total fundido para $T_o = 32^\circ\text{C}$ é quase 50% a mais do que aquele obtido para $T_o = 20^\circ\text{C}$, no caso da água.

Correlações para o volume total fundido em função do número de Rayleigh e Stefan e da temperatura na superfície do cilindro, foram também obtidas para ambos os materiais de mudança de fase. No caso da água, as correlações são expressas pelas equações (5.5) a (5.7), abaixo.

$$V_{\text{tot}} = -5,89077 \cdot 10^{-7} (\text{Ra}_{\text{agua}})^2 + 0,0675277 (\text{Ra}_{\text{agua}}) + 903,529 \quad (5.5)$$

$$V_{\text{tot}} = -663.402 (\text{Ste})^2 + 103.919 (\text{Ste}) - 934,339 \quad (5.6)$$

$$\nabla_{\text{tot}} = -0,96(T_o)^2 + 128,8(T_o) - 360 \quad (5.7)$$

Já para a parafina n-octadecano, as correlações são dadas pelas seguintes expressões:

$$\nabla_{\text{tot}} = -5,89012 \cdot 10^{-6} (\text{Ra})^2 + 0,258939(\text{Ra}) + 1334,64 \quad (5.8)$$

$$\nabla_{\text{tot}} = -316.944(\text{Ste})^2 + 60.340,4(\text{Ste}) + 1.313,5 \quad (5.9)$$

$$\nabla_{\text{tot}} = -25,8834(T_o)^2 + 1.994,85(T_o) - 34.255,7 \quad (5.10)$$

Todas as curvas apresentadas para as correlações (5.1) a (5.10) foram ajustadas com o auxílio do programa gráfico GRAPHER.

Por fim, são mostradas curvas do volume fundido adimensional em função do tempo para os três valores de temperatura na superfície do cilindro admitidos neste estudo. Nas figuras (5.40) e (5.41), ilustra-se tais curvas para a água e o n-octadecano, respectivamente. Em ambos os gráficos pode-se observar que o volume fundido é proporcional a temperatura na superfície do cilindro, ou seja, quanto mais alta a temperatura na superfície do cilindro, maior será o volume de material fundido ao longo do tempo. Resultado este que já era naturalmente esperado.

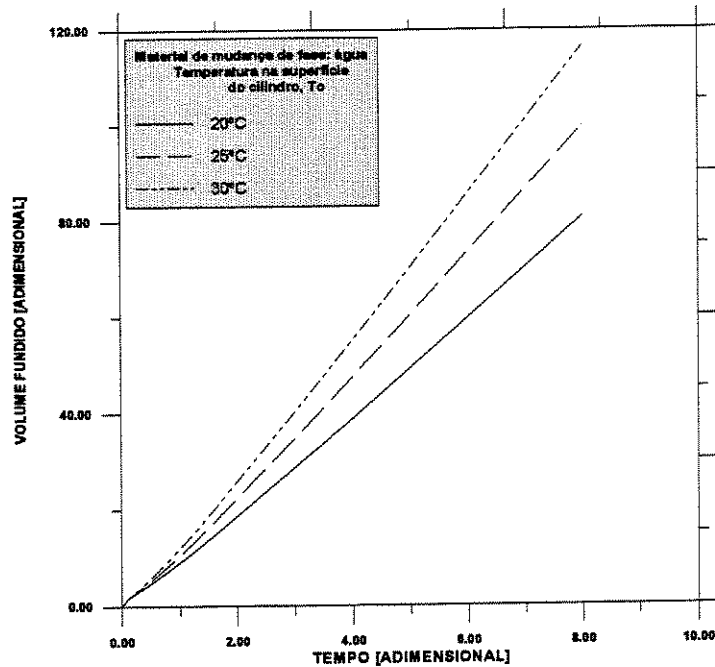


Figura 5.40 – Volume de líquido fundido em função do tempo para os três valores de temperatura na superfície do cilindro admitidos, para o caso da água.

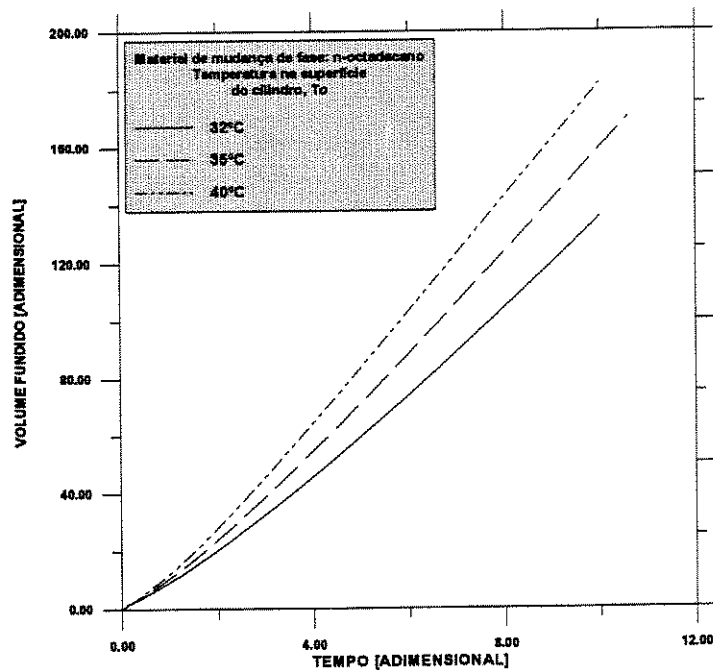


Figura 5.41 – Volume de líquido fundido em função do tempo para os três valores de temperatura na superfície do cilindro admitidos, para o caso da parafina n-octadecano.

A partir das curvas apresentadas acima é possível analisar a influência de parâmetros, tais como número de Rayleigh e Stefan e temperatura na superfície do cilindro, sobre sistemas térmicos nas condições especificadas de geometria e material de mudança adotadas neste estudo.

Pode-se enfatizar ainda que o código computacional implementado neste estudo permite realizar uma diversidade de outras análises acerca do comportamento de sistemas de armazenamento de calor latente em função das variáveis de projeto, similares àqueles acima discutidos. É possível, portanto, estudar o comportamento de tais sistemas quando da utilização de outros materiais de mudança de fase, admitindo-se diversas faixas de temperaturas na superfície do cilindro. Além disso, tem-se também a possibilidade de verificar a influência da geometria, em termos do raio do cilindro a ser empregado no sistema, a qual não foi contemplada neste trabalho. Todos estes aspectos são de fundamental importância no dimensionamento de sistemas térmicos.

Foram, desta forma, apresentados no decorrer deste capítulo os resultados advindos do modelamento matemático e numérico propostos para o presente, previamente validados pelos estudos de Prusa e Yao (1984a e 1984b) e Rieger *et al.* (1982). Assim, de posse dos conhecimentos obtidos ao longo deste estudo, é possível relatar as principais conclusões retiradas do trabalho, as quais estarão contidas no capítulo seguinte.

Capítulo 6

Conclusões e Sugestões

6.1 Introdução

Ao final deste trabalho é possível dispor as principais conclusões a que se chegou a partir dos resultados apresentados para o presente modelo, no capítulo precedente. Juntamente com as conclusões, serão sugeridas explorações mais detalhadas de alguns aspectos do estudo, os quais não foram contemplados por este trabalho.

6.2 Conclusões

- i. O modelamento matemático deste estudo foi elaborado em termos de variáveis primitivas e a frente de fusão móvel e irregular, inerente ao problema, foi fixada com o auxílio da técnica de imobilização de fronteira. Da utilização de tal ferramenta surgiram termos adicionais nas equações governantes do problema, resultando, assim, em um sistema de equações diferenciais com maior grau de complexidade. A conservação desses termos nas equações governantes implicou na ocorrência de fortes instabilidades na solução numérica. Optou-se, por conseguinte, por suprimi-los do modelamento do problema. Os resultados obtidos a partir do presente modelo foram, então, comparados com aqueles de Prusa e Yao (1984a e 1984b) e Rieger *et al.* (1982). Na comparação com Prusa e Yao (1984b), as duas situações consideradas no presente estudo, sejam estas a conservação ou não dos termos advindos da transformação de coordenadas, apresentaram um excelente

ajuste com os resultados dos referidos autores para a posição da interface ao longo do tempo. Nas outras duas comparações, com Prusa e Yao (1984a) e Rieger *et al.* (1982), nas quais os supracitados termos foram desprezados, obteve-se também uma boa concordância. Concluiu-se com isto que a ausência de tais termos não provocaram a invalidação do modelo numérico estabelecido no presente estudo para a faixa de número de Rayleigh considerada.

- ii. Ainda da comparação com Prusa e Yao (1984b), constatou-se que o emprego da adimensionalização singular nesse estudo não implicou em desvios nos resultados obtidos, conforme foi previsto nas conclusões do estudo dos citados autores.
- iii. Correlações para o tempo total de fusão em função do número de Rayleigh e Stefan foram determinadas para os sistemas térmicos considerados pelo presente estudo, sendo estes dados em termos do material de mudança de fase empregado, neste caso, a água e a parafina n-octadecano. Além destas, foram obtidas também correlações para o volume total fundido em função do número de Rayleigh e Stefan e da temperatura na superfície do cilindro, para ambos os materiais de mudança de fase admitidos. Tais correlações possibilitam a análise da influência destes parâmetros sobre sistemas térmicos nas condições especificadas de geometria, material de mudança e faixa de temperaturas na superfície do cilindro adotadas. A análise de tais parâmetros apresenta-se de fundamental importância no dimensionamento de sistemas térmicos eficientes.

6.3 Sugestões para Futuras Pesquisas

- i. Uma análise dos termos oriundos da transformação de coordenadas, visando com isto buscar interpolações mais adequadas, que resultem em soluções numéricas estáveis para o modelo contendo todos estes termos. Comparações com o presente modelo permitirão identificar a importância dos referidos termos na solução numérica.
- ii. Estudos experimentais acerca da fusão de um material de mudança de fase em geometria cilíndrica, com vistas a comparações com os resultados obtidos neste estudo.

Referências Bibliográficas

- Abdel-Wahed, R. M., Ramsey, J. W., Sparrow, E. M. Photographic study of melting about an embedded horizontal heating cylinder. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. v.22, n.1, p.171-173, 1979.
- Bathelt, A. G., Van Buren, P. D., Viskanta, R. Heat transfer during solidification around a cooled horizontal cylinder. *AIChE Symposium Series*. v.75, n. 189, p.103-111, 1979c.
- Bathelt, A. G., Viskanta, R. Heat transfer at the solid-liquid interface during melting from a horizontal cylinder. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. v.23, n.11, p.1493-1503, 1980.
- Bathelt, A. G., Viskanta, R., Leidenfrost, W. An experimental investigation of natural convection in the melted region around a heated horizontal cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*. v.90, part 2, p.227-239, 1979a.
- Bathelt, A. G., Viskanta, R., Leidenfrost, W. Latent heat-of-fusion energy storage: experiments on heat transfer from cylinders during melting. *ASME Journal of Heat Transfer*. v.101, p.453-458, august, 1979b.
- Bejan, A. *Heat transfer*. New York: John Wiley & Sons, 1993, 674p.

- Benard, C., Gobin, D., Zanolì, A. Moving boundary problem: heat conduction in the solid phase of a phase-change material during melting driven by natural convection in the liquid. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. v.29, n.11, p.1669-1681, 1986.
- Boger, D. V., Westwater, J. W. Effect of buoyancy on the melting and freezing process. *ASME Journal of Heat Transfer*. v.89, p.81-89, february, 1967.
- Carslaw, H. S, Jaeger, J.C. *Conduction of heat in solids*. London: Oxford University Press, 1959, 510p.
- Chung, J. D., Lee, J. S., Yoo, H. Thermal instability during the melting process in an isothermally heated horizontal cylinder. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. v.40, n.16, p.3899-3907, 1997.
- Crank, J. *Free and moving boundary problems*. London: Oxford University Press, 1984, 425p.
- Duda, J. L., Malone, M. F., Notter, R. H., Ventras, J. S. Analysis of two-dimensional diffusion-controlled moving boundary problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. v.18, n.7, p.901-910, 1975.
- Furzerland, R. M. A comparative study of numerical methods for moving boundary problems. *Journal of Institute of Mathematics and its Applications*. v.26, n.4, p.411-429, december, 1980.
- Gadgil, A., Gobin, D. Analysis of two-dimensional melting in rectangular enclosures in presence of convection. *ASME Journal of Heat Transfer*. v.106, n.1, p.20-26, february, 1984.
- Gebhart, B., Mollendorf, J. A new density relation for pure and saline water. *Deep-Sea Research*. v.124, p.831-848, 1977.

- Goldstein, R. J., Ramsey, J. W. Heat transfer in a melting solid with applications to thermal energy storage systems. In: Heat transfer studies: Festschrift for E. R. G. Eckert. Hemisphere, 1979, p.199-208.
- Hale, N. W., Viskanta, R. Photographic observation of the solid-liquid interface motion during melting of a solid heated from an isothermal vertical wall. *Letters in Heat and Mass Transfer*. v.5, p.329, 1978.
- Hale, N. W., Viskanta, R. Solid-liquid phase-change heat transfer and interface motion in materials cooled or heated from above or below. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. v.23, n.3, p.283-291, 1980.
- Herrmann, J., Leindenfrost, W., Viskanta, R. Melting of ice around a horizontal isothermal cylindrical heat source. *Chemical Engineering Communications*. v.25, p.63-78, 1984.
- Ho, C. -J., Chen, S. Numerical simulation of melting of ice around a horizontal cylinder. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. v.29, n.9, p.1359-1369, 1986.
- Ho, C. -J., Viskanta, R. Heat transfer during inward melting in a horizontal tube. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. v.27, n.5, p.705-715, 1984a.
- Ho, C. -J., Viskanta, R. Heat transfer during melting from a isothermal vertical wall. *ASME Journal of Heat Transfer*. v.106, p.12-19, february, 1984b.
- Ismail, K. A. R. *Bancos de gelo - Fundamentos e modelagem*. Campinas: Editora e Gráfica Imagem, 1998, 377p.
- Kemink, R. G., Sparrow, E. M. Heat transfer coefficients for melting about a vertical cylinder with or without subcooling and for open or closed containment. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. v.24, n.10, p.1699-1710, 1981.

- Lacroix, M. Computation of heat transfer during melting of a pure substance from a isothermal wall. *Numerical Heat Transfer – Part B*, v.15, p.191-210, 1989.
- Landau, H. G. Heat conduction in a melting solid. *Quarterly Applied Mathematics*, v.8, n.1, p.81-94, 1950.
- Lunardini, V. J. *Heat transfer with freezing and thawing*. Amsterdam: Elsevier Science Publishing Co., 1991, 437p.
- Maliska, C. R. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora, 1995, 424p.
- Okada, M. Melting from a vertical plate between insulated top and bottom surfaces. *Proc. ASME/JSME Thermal Eng. Joint Conf.* v.1, p.281-288, 1983.
- Okada, M. Analysis of heat transfer during melting from a vertical wall. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. v.27, n.11, p.2057-2066, 1984.
- Özisik, M. N. *Heat conduction*. New York: John Wiley & Sons, 1993, 692p.
- Patankar, S. V. *Numerical heat transfer and fluid flow*. New York: Hemisphere Publishing Co., 1980, 102p.
- Patankar, S. V., Spalding, D. B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. v.15, p.1787-1806, 1972.
- Prusa, J., Yao, L. S. Melting around a horizontal heated cylinder: Part I – Perturbation and numerical solutions for constant heat flux boundary condition. *ASME Journal of Heat Transfer*, v.106, n. 2, p.376-384, may, 1984a.

- Prusa, J., Yao, L. S. Melting around a horizontal heated cylinder: Part II – Numerical solution for isothermal boundary condition. *ASME Journal of Heat Transfer*, v.106, n.2, p.469-472, may, 1984b.
- Ramsey, J. W., Sparrow, E. M.. Melting and natural convection due to a vertical embedded heater. *ASME Journal of Heat Transfer*. v.100, p.368-370, may, 1978.
- Rieger, H., Projahn, U., Beer, H. Analysis of the heat transport mechanisms during melting around a horizontal circular cylinder. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. v.25, n.1, p.137-147, 1982.
- Rieger, H., Projahn, U., Bareiss, M., Beer, H. Heat transfer during melting inside a horizontal tube. *ASME Journal of Heat Transfer*. v.105, p.226-234, may, 1983.
- Ro, S. T., Kim, C. -J. Bifurcation phenomenon during the fixed-solid-mode melting inside a horizontal cylinder. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. v.37, n.7, p.1101-1109, 1994.
- Saitoh, T. Numerical method for multi-dimensional freezing problems in arbitrary domains. *ASME Journal of Heat Transfer*. v.100, p.294-299, may, 1978.
- Saitoh, T., Hirose, K. High Rayleigh number solutions to problems of latent heat thermal energy storage in a horizontal cylinder capsule. *ASME Journal of Heat Transfer*. v.104, p.545-553, august, 1982.
- Souza Mendes, P. R., Pinho Brasil, Jr., A. C. Heat transfer during melting around an isothermal vertical cylinder. *ASME Journal of Heat Transfer*. v.109, p.961-964, november, 1987.
- Sparrow, E. M., Chuck, W. An implicit/explicit numerical solution scheme for phase-change problems. *Numerical Heat Transfer*, v.7, p.1-15, 1984.

- Sparrow, E. M., Patankar, S. V., Ramadhyani, S. Analysis of melting in the presence of natural convection in the melt region. *ASME Journal of Heat Transfer*. v.99, p.520-526, november, 1977.
- Sparrow, E. M., Ramadhyani, S., Patankar, S. V. Effect of subcooling on cylindrical melting. *ASME Journal of Heat Transfer*. v.100, p.395-402, august, 1978b.
- Sparrow, E. M., Ramsey, J. W., Harris, J. S. The transition from natural-convection-controlled freezing to conduction-controlled freezing. *ASME Journal of Heat Transfer*. v.103, p.7-12, february, 1981.
- Sparrow, E. M., Ramsey, J. W., Kemink, R. G. Freezing controlled by natural convection. *ASME Journal of Heat Transfer*. v.101, p.578-584, november, 1979.
- Sparrow, E. M., Schmidt, R. R., Ramsey, J. W. Experiments on the role of natural convection in the melting of solids. *ASME Journal of Heat Transfer*. v.100, p.11-16, february, 1978a.
- Sparrow, E. M., Souza Mendes, P. R. Natural convection heat transfer coefficients measured in experiments on freezing. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. v.25, n.2, p.293-297, 1982.
- Van Buren, P. D., Viskanta, R. Interferometric measurement of heat transfer during melting from a vertical surface. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v.23, n.4, p.568-571, 1980a.
- Van Buren, P. D., Viskanta, R. Interferometric observation of natural convection during freezing from a vertical flat plate. *ASME Journal of Heat Transfer*, v.102, p.375-378, may, 1980b.
- Versteeg, H. K., Malalasekera, W. *An introduction to computational fluid dynamics – The finite volume method*. London: Longman Scientific & Technical, 1995, 257p.

- Viskanta, R. Natural convection in melting and solidification. In: Kakaç, S., Aung, W., Viskanta, R. *Natural convection – Fundamentals and applications*. Washington: Hemisphere Publishing Co., 1985.
- Viskanta, R. Phase change heat transfer. In: Lane, G. A. *Solar heat storage: Latent heat materials*. Vol.1, Florida: Uniscience Edition, CRC Press, Boca Raton, 1983.
- Viswanath, R., Jaluria, Y. A comparison of different solution methodologies for melting and solidification problems in enclosures. *Numerical Heat Transfer – Part B*, v.24, p.77-105, 1993.
- Wang, Y., Amiri, A., Vafai, K. An experimental investigation of the melting process in a rectangular enclosure. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. v.42, n.19, p.3659-3672, october, 1999.
- Wu, Y. K., Lacroix, M. Numerical study of natural convection dominated melting within an isothermal vertical cylinder. *Transactions of the Canadian Society Mechanical Engineering*, v.17, n.3, p.281-296, 1993.
- Yao, L. S., Chen, F. F. Effects of natural convection in the melted region around a heated horizontal cylinder. *ASME Journal of Heat Transfer*, v.102, p.667-672, november, 1980.
- Yao, L. S., Cherney, W. Transient phase-change around a horizontal cylinder. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v.24, n.12, p.1971-1981, 1981.
- Yao, L. S., Prusa, J. Melting and freezing. *Advances in Heat Transfer*, v.19, p.1-95, 1989.

Apêndice A

Equações para a Determinação das Propriedades Térmicas da Água

O cálculo das propriedades da água a temperatura de mistura, T_{mean} , seja esta dada em função do valor médio entre a temperatura na superfície do cilindro e a temperatura de mudança de fase, foi obtida através das expressões (A1), abaixo. Todas as curvas, das quais foram obtidas as equações (A1), foram ajustadas com o auxílio do programa gráfico GRAPHER. Os dados utilizados para construir essas curvas foram extraídos de Bejan (1993).

$$C_p(T) = -0,002 T^3 + 0,134286 T^2 - 3.63571 T + 4217,01 \quad (\text{A1a})$$

$$\beta(T) = -1,14286 \cdot 10^{-7} T^2 + 1,58857 \cdot 10^{-5} T - 6,17143 \cdot 10^{-5} \quad (\text{A1b})$$

$$L(T) = 0,0666092 T^4 - 1,9977 T^3 + 18,3052 T^2 - 2449,9 T + 2,501 \cdot 10^6 \quad (\text{A1c})$$

$$\mu(T) = -2,06667 \cdot 10^{-8} T^3 + 1,53143 \cdot 10^{-6} T^2 - 6,16119 \cdot 10^{-5} T + 0,00178687 \quad (\text{A1d})$$

$$\nu(T) = -1,33333 \cdot 10^{-11} T^3 + 1,26286 \cdot 10^{-9} T^2 - 5,85524 \cdot 10^{-8} T + 1,7768 \cdot 10^{-6} \quad (\text{A1e})$$

$$k(T) = -6,66679 \cdot 10^{-7} T^4 + 2,00005 \cdot 10^{-5} T^3 - 0,00018334 T^2 + 0,00250002 T + 0,56 \quad (\text{A1f})$$

$$\alpha(T) = -6,66663 \cdot 10^{-14} T^4 + 3,33332 \cdot 10^{-12} T^3 - 5,83332 \cdot 10^{-11} T^2$$

(Alg)

$$+ 8,16666 \cdot 10^{-10} T + 1,33 \cdot 10^{-7}$$