TEORIA DOS CONJUNTOS E ω-LÓGICA

Renato Hyuo de Luna Pedrosa

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPINAS - SÃO PAULO
BRASIL

TEORIA DOS CONJUNTOS E ω-LÓGICA

Renato Hyuda de Luna Pedrosa

Orientador: Prof. Dr. Luiz Paulo de Alcantara

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campinas

1981

A *Lorena*

A meus pais,

Ioléa e *Luiz Humberto*

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Luiz Paulo de Alcantara, pelo apoio e pelas diversas sugestões apresentadas durante a elaboração deste trabalho.

Aos Profs. Ayda Ignez Arruda e Newton Carneiro Affonso da Costa pelo estímulo constante.

Aos demais membros do grupo de Lógica de Campinas e São Paulo, pelo ambiente de entusiasmo e trabalho.

Este trabalho foi financiado pelo CNPq.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

No início da década de quarenta, MacLane e Eilenberg(8) (os números entre parênteses, após nomes, se referem à bibliografia) isolaram os conceitos de *transformação natural entre funtores* e *categoria*, implícitos no desenvolvimento da topologia algébrica. Neste mesmo trabalho, é apontada a impossibilidade de se fundamentarem os novos conceitos nos sistemas tradicionais de teoria dos conjuntos. Tal fato, apesar de imediatamente observado, foi tratado pela primeira vez na literatura, em detalhes, por MacLane(15) em 1959.

Com o objetivo de superar estas dificuldades, várias formulações de teorias de conjuntos foram apresentadas. A idéia central que permeia a maioria das propostas tem origem em um trabalho clássico de Tarski(22), sobre os cardinais inacessíveis introduzidos por Hausdorff. Este tipo de solução, utilizando a noção de *universo* (cf. def. 4.3.1, p.99), difundiu-se através dos trabalhos de Ehresmann(7) e de Grothendieck e seus colaboradores (11).

Em uma série de trabalhos, N.C.A. da Costa (2,3,4 e 5) propõe dois sistemas de teorias de conjuntos, T e T^*, extensões da teoria impredicativa de classes (cf. apêndice C), com o objetivo de fornecer uma fundamentação adequada ao desenvolvimento da teoria das categorias. Estes sistemas, constituindo-se em uma das mais interessantes variantes da teoria dos tipos, apresentam um interesse intrínseco, e diferenciam-se essencialmente dos demais por estarem formulados em uma lógica mais forte que a lógica de primeira ordem. Entre as regras de dedução da lógica subjacente aos sistemas T e T^*, que denotaremos em toda a exposição por L, existe uma regra *infinitária* (cf. p. 5, regra *R3*), cuja aplicação exige uma quantidade infinita (enumerável) de premissas. Basicamente, L é uma versão da

ω-*lógica* com duas espécies de variáveis. Orey (20) estudou o caso em que existe um símbolo relacional unário ao qual a regra infinitária associa uma família enumerável de constantes individuais. Em L, o símbolo relacional é substituído por uma segunda espécie de variável, e as constantes são consideradas como termos de segunda espécie. Os axiomas de T e T^* garantem, em última instância, que estas constantes são universos.

Uma solução de outra natureza foi proposta por Lawvere (14), introduzindo uma axiomática para a categoria das categorias. Kreisel (13), ao contrário, considera a noção de categoria demasiadamente técnica para servir como noção fundamental e sugere a formalização dos conceitos de *regra* (rule) e de *estrutura* (structure).

As dificuldades lógicas colocadas pela fundamentação da teoria das categorias têm sido motivo de pesquisas recentes e, certamente, são uma parte importante das questões para as quais a matemática contemporânea deve procurar respostas.

A seguir, apresentamos uma descrição sucinta do conteúdo dos capítulos que compõem este trabalho. Este é, basicamente, um estudo de diversas propriedades da lógica L e dos sistemas T e T^*.

O capítulo 1 contém vários resultados sobre a lógica L. Iniciamos com a apresentação de algumas propriedades sintáticas de L. Na secção 1.2 são estudados os aspectos semânticos de L. Não seguimos a via usual de se reduzir o estudo das lógicas poli-sortidas ao da lógica com apenas uma espécie de variável, em que símbolos relacionais substituem as diversas espécies de variáveis. A semântica para L é introduzida diretamente, e o resultado fundamental do capítulo é o *teorema de completude para* L (teoremas 1.2.7 e 1.2.21). É interessante notar que a demonstração apresentada fornece uma demonstração do teorema de completude para a ω-lógica sem se recorrer ao teorema de omissão de tipos, como é usual (cf. Orey (20)). No capítulo 2 são desenvolvidos os sistemas T e T^*, do ponto de vista da teoria dos conjuntos. O capítulo 3 apresenta a caracterização dos *modelos naturais* de T e T^* (teoremas 3.1.3 e3.2.1). Os resultados são obtidos estabelecendo-se uma relação entre a teoria de Kelley-Morse e os sistemas T e T^*. O capítulo 4 apresenta uma hierarquia de teorias de conjuntos formalizadas na lógica de primeira ordem (as teorias são extensões da teoria de Kelley-Morse), tal que, para cada ordinal $\alpha \neq \phi$ (interno às teorias) temos uma teoria com uma estrutura bem-ordenada de universos de tipo α. Em seguida, mostramos que uma das teorias apresentadas, que designaremos por H_ω, possui os mesmos modelos naturais (na verdade, os mesmos *modelos super-completos*) que T^*. Assim, num sentido preciso , H_ω é a versão em primeira ordem de T^*. Finalmente, apresentamos o esboço de uma formulação da teoria das categorias em H_ω.

Convém observar que a teoria de Zermelo-Fraenkel é a teoria de conjuntos utilizada na meta-linguagem. O apêndice B contém um desenvolvimento resumido desta teoria. O apêndice A apresenta as definições básicas sobre a semântica de primeira ordem . O apêndice C traz os axiomas da teoria de Kelley-Morse. Estes apêndices foram incluídos para uniformizar a notação utilizada no trabalho. Aqui cabe uma advertência. Existem vários símbolos que são utilizados tanto na meta-linguagem quanto nos diversos sistemas formais apresentados. Esperamos que o contexto seja sempre suficientemente claro para dirimir quaisquer ambiguidades.

Para finalizar esta introdução, vamos discutir algumas questões sugeridas pelo nosso estudo. O resultado sobre a completude de L indica uma solução para a questão da tradução entre a ω-lógica poli-sortida e a ω-lógica com apenas uma espécie de variável. A questão se resume em se obter, para cada teoria K cuja ló gica subjacente é uma ω-lógica poli-sortida, uma teoria K' em ω-lógica e uma tradução para as fórmulas da linguagem de K, obtendo-se fórmulas da linguagem de K', tais que uma fórmula é teorema de K se e somente se a sua tradução é teorema de K'. Outra possibilidade de estudo está em se procurar uma extensão do método utilizado para se demonstrar o teorema de completude (basicamente o método das constantes de Henkin) que seja aplicável para lógicas em que existe uma regra infinitária admitindo uma quantidade não-enumerável de premissas. Tais lógicas foram estudadas, entre outros, por Henkin e da Costa (5). Do ponto de vista da fundamentação da teoria das categorias, tem sido estudada a introdução de conjuntos especiais com propriedades mais fracas do que a de ser um universo, mas que permitam as construções fundamentais desta teoria (cf. Feferman (9)). Seria interessante se elaborar uma hierarquia de teoria de conjuntos, nos moldes daquela apresentada no capítulo 4, em que os níveis desempenhassem o papel destes conjuntos especiais.

CAPÍTULO 1

A LÓGICA L

1.0. INTRODUÇÃO

Neste capítulo é estudada a lógica subjacente aos sistemas T e T^*. A parte sintática é desenvolvida abreviadamente, sendo obtidos apenas os resultados essenciais para o estudo dos aspectos semânticos de L. Dentre os resultados mais importantes relativos à sintaxe de L estão o teorema da dedução (1.1.11), a regra de generalização (1.1.13) e a proposição que expressa o fato de que todo objeto de segunda espécie é um objeto de primeira espécie (1.1.20). Quanto à semântica de L, demonstramos o teorema de completude, nas duas versões (1.2.7 e 1.2.21). A chave da demonstração do teorema de completude é a versão do lema de Lindenbaum para L (1.2.20). Como consequências do teorema de completude, é obtida uma versão do teorema de Löwenheim-Skolem (1.2.22) e, através de um contra-exemplo, mostramos que em L não vale o teorema da compacidade.

1.1. A SINTAXE DE L

Iniciamos com a noção fundamental de linguagem.

1.1.1. *Definição*. Uma *linguagem* L é um conjunto de símbolos.

Os símbolos de uma linguagem se dividem em três grupos: *constantes individuais*, *símbolos funcionais* e *símbolos relacionais*. As constantes individuais podem ser de *primeira* ou de *segunda espécie*. Nas linguagens consideradas, o conjunto das constantes de segunda espécie é fixo. Este conjunto é enumerável e seus elementos serão denotados por $V_1,V_2,\dots,V_i,\dots$. O conjunto das constantes de primeira espécie pode ser vazio ou não (e no máximo enumerável). Em geral, denotaremos constantes arbitrárias pelas letras c ou d (com ou sem índices). Os símbolos funcionais serão denotados pela letra f, e os relacionais, pela letra p (eventualmente com índices, em ambos os casos). A cada símbolo funcional ou relacional está associado um número inteiro n não nulo. Dizemos então que o símbolo é n-*ário*. Para cada aridade, admitimos no máximo uma quantidade enumerável de símbolos (funcionais ou relacionais); uma linguagem pode não possuir símbolos funcionais e relacionais. Para simplificar certas definições e demonstrações, consideraremos as constantes individuais de primeira espécie como símbolos funcionais 0-ários.

Antes de definirmos o que são as expressões de uma linguagem, necessitamos dos *símbolos lógicos*. Dentre os símbolos lógicos, temos duas espécies de *variáveis*, e uma quantidade enumerável de variáveis de cada espécie. Representaremos as variáveis de primeira espécie pelas letras x,y e z, com ou sem índices ou marcas (e.g. x,x_1,y',z'', etc.); de maneira análoga, as letras t,u e v representarão variáveis de segunda espécie. Sempre que for necessário, as variáveis serão consideradas ordenadas de maneira fixa; nesta ordenação, serão denotadas por $a_1,a_2,\dots,a_i,\dots$ (observar que existe um conjunto enumerável de variáveis). Os demais símbolos lógicos são os mesmos que para a lógica de primeira ordem (incluindo a igualdade). Consideraremos como primitivos os seguintes símbolos: os conectivos $\neg$ (*não*) e v (*ou*), a igualdade = e o quantificador universal $\forall$ (*qualquer*). Deste ponto em diante estaremos tratando de uma linguagem $\mathbb{L}$ fixa.

1.1.2. *Definição*. Uma *expressão* de L é uma sequência finita de símbolos de L e de símbolos lógicos.

1.1.3. *Definição*. A definição de *termo* de L é indutiva:

(i.) As variáveis e constantes individuais de primeira (segunda) espécie são termos de primeira (segunda) espécie.

(ii.) Se f é um símbolo funcional n-ário ($n \geq 1$) e $r_1, r_2, \ldots, r_n$ são termos quaisquer, $f(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ é um termo de primeira espécie.

(iii.) Uma expressão de L é um termo se e somente se pode ser mostrado que é um termo, com base em (i.) e (ii.).

1.1.4. *Definição*. A definição de *fórmula* de L é indutiva:

(i.) Se r_1 e r_2 são termos quaisquer, $r_1 = r_2$ é uma fórmula (atômica).

(ii.) Se p é um símbolo relacional n-ário ($n \geq 1$) e $r_1, r_2, \ldots, r_n$ são termos quaisquer, $p(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ é uma fórmula (atômica).

(iii.) Se A_1 e A_2 são fórmulas, $\neg A_1$ e $A_1 \vee A_2$ são fórmulas.

(iv.) Se A é uma fórmula e a_i é uma variável qualquer, $\forall a_i A$ é uma fórmula.

(v.) Uma expressão de L é uma fórmula se e somente se pode ser mostrado que é uma fórmula, com base em (i.)-(iv.).

Os símbolos lógicos & (*e*), $\rightarrow$ (*implica*), $\leftrightarrow$ (*é equivalente a*) e $\exists$ (*existe*) são definidos da maneira usual, por abreviação. As noções de *variável livre*, *variável ligada*, etc. são idênticas às das linguagens de primeira ordem (cf. Mendelson (12), p. 48). As *sentenças* de L são as fórmulas de L sem variáveis livres, como é usual. Se A é uma fórmula de L, escreveremos $A(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$ para indicar que A contém ocorrências livres de algumas das variáveis

$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$. Não significa que A contém ocorrências livres destas variáveis, nem que não possa conter outras variáveis livres. A seguir, para uma linguagem determinada L, apresentamos os *axiomas lógicos*.

1.1.5. *Axiomas lógicos*.

Grupo *I*. Axiomas para o cálculo proposicional.

Sejam A, B e C fórmulas.

I.1. $(A \vee A) \to A$.

I.2. $A \to (A \vee B)$.

I.3. $(A \vee B) \to (B \vee A)$.

I.4. $(A \to B) \to ((C \vee A) \to (C \vee B))$.

Grupo *II*. Axiomas para o cálculo de predicados.

Se $A(a_i)$ é uma fórmula e r é um termo, $A(r)$ é a expressão obtida substituindo-se todas as ocorrências livres de a_i, em $A(a_i)$, por r. É imediato (por indução sobre o número de conectivos e quantificadores de $A(a_i)$) que, se $A(a_i)$ é uma fórmula de L e r é um termo de L, $A(r)$ é uma fórmula de L. Se r não substitui, necessariamente, todas as ocorrências livres de a_i , escreveremos $A(a_i,a_i)$ e $A(a_i,r)$. Com estas convenções, são axiomas:

II.1. $\forall a_i A(a_i) \to A(r)$,

onde $A(a_i)$ é uma formula, r é um termo livre para a_i em $A(a_i)$ e, se a_i for de segunda espécie, r também deverá ser.

II.2. $\forall a_i (a_i = a_i)$.

II.3. $(a_i = a_j) \to (A(a_i,a_i) \to A(a_i,a_j))$,

onde $A(a_i,a_i)$ é uma fórmula, a_j é livre para a_i em $A(a_i,a_i)$ nas ocorrências em que a_i é substituída por a_j.

Em seguida, apresentamos as *regras de dedução* de L.

R1. Se A e B são fórmulas, então, de A e $A \rightarrow B$, inferir B.

R2. Se $A(a_i)$ é uma fórmula e B é uma fórmula que não contém ocorrências livres de a_i, então, de $B \rightarrow A(a_i)$, inferir $B \rightarrow \forall a_i A(a_i)$.

R3. Se $A(a_i)$ é uma fórmula e a_i é de segunda espécie, então, de $A(V_1)$, $A(V_2)$, ..., $A(V_j)$,...$(j \geq 1)$, inferir $\forall a_i A(a_i)$.

A partir das regras de dedução, podemos introduzir a noção de *consequência*.

1.1.6. *Definição.* Se Γ é um conjunto de fórmulas e A é uma fórmula, dizemos que A é *associada* a Γ se e somente se A é inferida diretamente de Γ através da regra *R3*.

De uma maneira mais explícita, dizer que A é associada a um conjunto Γ de fórmulas significa que A é da forma $\forall a_i B(a_i)$, a_i é de segunda espécie, $B(a_i)$ é uma fórmula e $B(V_1)$, $B(V_2)$,... são fórmulas de Γ. Se ∇ é o conjunto de fórmulas associadas a Γ, denotamos a união de Γ e ∇ por Γ'.

1.1.7. *Definição.* Uma fórmula A é *consequência finitária* de um conjunto Γ de fórmulas, em símbolos, $\Gamma \Vdash A$, se e somente se existe uma sequência finita de fórmulas B_1, B_2,..., B_n, tal que B_n é A e, para cada j, $1 \leq j \leq n$, vale uma das condições abaixo:

(i.) B_j é um axioma lógico.

(ii.) B_j é uma fórmula de Γ.

(iii.) B_j é inferida de fórmulas que a precedem na sequência, por aplicação de *R1* ou *R2*.

1.1.8. *Definição.* Sejam Γ um conjunto de fórmulas e α um ordinal qualquer. Definimos o conjunto de fórmulas $\Gamma(\alpha)$ indutivamente.

(i.) Se A é uma fórmula, A pertence a $\Gamma(0)$ se e somente se $\Gamma \Vdash A$.

(ii.) Se α é $\beta+1$, então A pertence a $\Gamma(\alpha)$ se e somente se $\Gamma(\beta)' \Vdash A$.

(iii.) Se α é limite, $\Gamma(\alpha)$ é a união de $\{\Gamma(\beta) : \beta<\alpha\}$.

1.1.9. *Definição.* Uma fórmula A é *consequência* de um conjunto Γ de fórmulas, em símbolos, $\Gamma \vdash A$, se e somente se existe um ordinal α tal que A pertence a $\Gamma(\alpha)$.

A definição de consequência, nesta forma, é devida a Orey(20). Dada uma linguagem L, uma *teoria em* L é um conjunto de sentenças de L. Um conjunto de *axiomas* para uma teoria K em L é um conjunto de fórmulas Γ de L, tal que, para uma fórmula A de L, $K \vdash A$ se e somente se $\Gamma \vdash A$. Dada uma linguagem L, as fórmulas que são consequências do conjunto vazio são os *teoremas do cálculo de predicados de* L (escreveremos $\vdash A$ no lugar de $\phi \vdash A$). Se K é uma teoria, e $K \vdash A$, dizemos que A é *teorema* de K (também $\vdash_K A$, ou $\vdash A$, se não houver possibilidade de confusão). Se $\vdash_K A$, então, para algum ordinal α , A pertence a $K(\alpha)$. As propriedades de teoremas são demonstradas por indução (transfinita) sobre α. Vamos passar ao estudo de algumas propriedades sintáticas de L .

1.1.10. *Proposição. Se* A *é uma fórmula que é instância de uma tautologia do cálculo proposicional clássico, então* $\Vdash$ A *(logo,* $\vdash$ A*).*

Demonstração. Consequência imediata dos axiomas *I.1-I.4* e de *R1*.

1.1.11. *Teorema da dedução.*

Sejam L *uma linguagem,* A *uma fórmula fechada de* L , Γ *um conjunto de fórmulas de* L *e* B *uma fórmula qualquer de* L. *Se* $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, *então* $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Demonstração. Vamos denotar $\Gamma \cup A$ por S.

a) Suponha que A está em S(0). Então existe uma sequência $B_1, B_2, \ldots, B_n$, tal que B_n é B, com as propriedades expressas na definição 1.1.7. Supondo que a hipótese vale para $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$, vamos mostrar que vale para B_n.

a.1) Se B_n é um axioma lógico, então $\vdash B_n$, logo $\Gamma \vdash B_n$; como $B_n \rightarrow (A \rightarrow B_n)$ é instância de uma tautologia, então $\vdash B_n \rightarrow (A \rightarrow B_n)$; logo, por *R1*, $\Gamma \vdash A \rightarrow B_n$.

a.2) Se B_n é uma fórmula de S, então B_n é A ou é uma fórmula de Γ. Se B_n é A, então $\Gamma \vdash A \rightarrow B_n$; se B_n é uma fórmula de Γ, então $\Gamma \vdash B_n$, caindo no caso a.1).

a.3) Se existem $i, j < n$, tais que B_j é $B_i \rightarrow B_n$, então, pela hipótese de indução, $\Gamma \vdash A \rightarrow B_i$ e $\Gamma \vdash A \rightarrow (B_i \rightarrow B_n)$. Tomando uma instância da tautologia $(C_1 \rightarrow (C_2 \rightarrow C_3)) \rightarrow ((C_1 \rightarrow C_2) \rightarrow (C_1 \rightarrow C_3))$, obtemos, por *R1*, $\Gamma \vdash A \rightarrow B_n$.

a.4) Se existe $i \leq n$ tal que B_i é $C_1 \rightarrow C_2$ e B_n é $C_1 \rightarrow \forall a_j C_2$, onde a_j não ocorre livre em C_1 , então, pela hipótese de indução, $\Gamma \vdash A \rightarrow (C_1 \rightarrow C_2)$. Mas $(A \rightarrow (C_1 \rightarrow C_2)) \leftrightarrow (A \ \& \ C_1 \rightarrow C_2)$ é instância de uma tautologia; logo, por *R1*, $\Gamma \vdash A \ \& \ C_1 \rightarrow C_2$. Aplicando *R2*, $\Gamma \vdash A \ \& \ C_1 \rightarrow \forall a_j C_2$. Por outra instância da tautologia mencionada acima, $\Gamma \vdash A \rightarrow (C_1 \rightarrow \forall a_j C_2)$.

Com isso mostramos que a propriedade vale para os elementos de $S(0)$.

b) Suponha que a propriedade vale para os elementos de $S(\alpha)$ e vamos mostrar que também vale para os elementos de $S(\alpha+1)$. Em primeiro lugar, vamos mostrar que vale para os elementos de $S(\alpha)'$, o conjunto das fórmulas associadas a $S(\alpha)$. Então, seja B da forma $\forall a_i C(a_i)$, onde a_i é de segunda espécie, e suponhamos que $C(V_1)$, $C(V_2)$,... são fórmulas de S. Pela hipótese de indução, $\Gamma \vdash A \to C(V_1)$, $\Gamma \vdash A \to C(V_2)$,.... Aplicando *R3*, $\Gamma \vdash \forall a_i (A \to C(a_i))$. Por *II.1*, $\Gamma \vdash \forall a_i (A \to C(a_i)) \to (A \to C(a_i))$; logo, por *R1*, $\Gamma \vdash A \to C(a_i)$; como a_i não ocorre livre em A, então, por *R2*, $\Gamma \vdash A \to \forall a_i C(a_i)$. Agora, repetindo os passos a.1) a a.4) para o conjunto $S(\alpha)'$, obtemos que $S(\alpha+1)$ é tal que seus ele - mentos possuem a propriedade desejada.

c) Se α é um ordinal limite e se B está em $S(\alpha)$, então existe um ordinal $\beta<\alpha$, tal que B está em $S(\beta)$. Pela hipótese de indução, $\Gamma \vdash A \to B$, terminando a demonstração.

Observando-se a demonstração do teorema da dedução, nota-se que para se demonstrar a propriedade para as consequências finitárias de S não se utili - zou em nenhum passo a regra *R3*, obtendo-se o seguinte resultado.

1.1.12. *Teorema da dedução finitária.*

Sob as condições de 1.1.11, *se* $\Gamma \cup \{A\} \Vdash B$ *, então* $\Gamma \Vdash A \to B$.

Vamos mostrar que vale a regra de generalização, finitária ou não.

1.1.13. *Regra de generalização.*

Se S *é um conjunto de fórmulas e* A *é uma fórmula, então:*

i.) $S \vdash A$ *se e somente se* $S \vdash \forall a_i A$;

ii.) $S \Vdash A$ *se e somente se* $S \Vdash \forall a_i A$,

onde a_i *é uma variável qualquer.*

Demonstração.

i.) Suponha que $S \vdash A$. Então, seja B a fórmula $\forall a_i (a_i = a_i)$. Logo, $S \cup \{B\} \vdash A$; como B é fechada, pelo teorema da dedução obtemos $S \vdash B \to A$. Mas B é um axioma lógico; logo, $S \vdash B$. Como a_i não ocorre livre em B, $S \vdash B \to \forall a_i A$. Aplicando *R1*, $S \vdash \forall a_i A$. O mesmo resultado poderia ser obtido a partir da tautologia $C_1 \to \to (C_2 \to C_1)$. A recíproca é imediata e a demonstração de *ii.)* é totalmente análoga.

Se A é uma fórmula, o *fecho* de A (escrito $\overline{A}$) é definido como sendo a fórmula obtida de A quantificando-se todas as variáveis livres de A, na ordem induzida pela ordenação $a_1, a_2, \ldots$. A proposição que se segue é de demonstração imediata, por indução sobre o número de váriáveis livres de A (aplicamos a regra de generalização).

1.1.14. *Proposição. Se* A *é uma fórmula e* S *é um conjunto de fórmulas, então:*

i.) $S \vdash A$ *se e somente se* $S \vdash \overline{A}$;

ii.) $S \Vdash A$ *se e somente se* $S \Vdash \overline{A}$.

Com este resultado, fica claro que se uma teoria K for introduzida por um conjunto de axiomas, K possui o mesmo conjunto de teoremas que a teoria obtida considerando-se os fechos dos axiomas de K.

1.1.15. *Proposição.* *Sob as mesmas condições que R2, se* $\vdash A(a_i) \to B$ *, então* $\vdash \exists a_i A(a_i) \to B$.

Demonstração. Como $\vdash A(a_i) \to B$, então $\vdash \neg B \to \neg A(a_i)$. Logo, por *R2*, $\vdash \neg B \to \forall a_i \neg A(a_i)$. Logo, $\vdash \neg \forall a_i \neg A(a_i) \to B$; por definição, $\vdash \exists a_i A(a_i) \to B$.

Vamos adotar a seguinte convenção: escreveremos $A(V_n)$ por $A(V_1)$, $A(V_2)$,.... Assim, $\vdash A(V_n)$ significa $\vdash A(V_1)$, $\vdash A(V_2)$, ... O mesmo vale para $A(V_m)$. A seguir, apresentamos algumas propriedades de teoremas envolvendo fómulas com variáveis de segunda espécie.

1.1.16. *Proposição.* *Sejam* a_i *uma variável de segunda espécie e* $A(a_i)$ *uma fórmula; então* $\vdash \forall a_i A(a_i)$ *se e somente se* $\vdash A(V_n)$.

1.1.17. *Proposição.* *Se* $A(a_i)$ *é uma fórmula,* a_i *é uma variável de segunda espécie e* B *é uma fórmula que não contém* a_i *livre, então, se* $\vdash B \to A(V_n)$ *, então* $\vdash B \to \forall a_i A(a_i)$.

1.1.18. *Proposição.* *Sob as condições de* 1.1.17 *, se* $\vdash A(V_n) \to B$ *, então* $\vdash \exists a_i A(a_i) \to B$.

1.1.19. *Proposição.* *Sejam* a_i *uma variável de segunda espécie e* $A(a_i)$ *uma fórmula. Se existe um inteiro* $p \geq 1$ *tal que* $\vdash A(V_p)$*, então* $\vdash \exists a_i A(a_i)$.

A proposição que se segue é importante, pois possibilitará uma simplificação na apresentação e desenvolvimento de uma teoria. A rigor, uma definição que englobe objetos de ambas as espécies deveria conter uma cláusula para cada espécie (de variáveis ou termos, no caso mais geral). A proposição garante que todo objeto de segunda espécie é também de primeira espécie.

1.1.20. *Proposição. Se* a_i *é uma variável de segunda espécie e* a_j *é uma variável de primeira espécie, então* $\vdash \forall a_i \exists a_j (a_i = a_j)$.

Demonstração. Vamos mostrar que $\vdash \exists a_j (V_n = a_j)$. Por *II.1* , $\vdash \forall a_j \neg (V_n = a_j) \rightarrow \neg (V_n = V_n)$. Logo, $\vdash V_n = V_n \rightarrow \exists a_j (V_n = a_j)$; mas é imediato que $\vdash (V_n = V_n)$. Resulta que $\vdash \exists a_j (V_n = a_j)$; por 1.1.16., $\vdash \forall a_i \exists a_j (a_i = a_j)$.

As propriedades apresentadas nesta secção mostram que, do ponto de vista da sintaxe, *L* é bem semelhante à lógica de primeira ordem.

1.2. ASPECTOS SEMÂNTICOS DE *L*

Dada uma linguagem L, uma *interpretação* M *para* L consiste em um conjunto D, diferente do vazio, que é o *domínio* de M, e em uma *função de interpretação*, que associa a cada constante individual c um elemento c^M de D, a cada símbolo funcional n-ário f uma operação f^M,n-ária, em D e, a cada símbolo relacional n-ário p, uma relação n-ária p^M em D. Dada uma teoria K em L, uma *interpretação para* K é uma interpretação para L. Intuitivamente, D é o campo das variáveis de primeira espécie e $\{V_1^M, V_2^M, \ldots\} \subseteq D$ é o campo das variáveis de segunda espécie. Rigorosamente, estas propriedades serão garantidas pela noção de *satisfação*, que será apresentada a seguir. As variáveis são consideradas ordenadas, como na secção anterior. Vamos definir um conjunto de sequências de ele -

mentos do domínio de uma interpretação M.

1.2.1. *Definição.* $\Sigma^M = D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_i \times \ldots$ ($i \geq 1$, inteiro), onde D_i é D se a_i for de primeira espécie e é $\{V_1^M, V_2^M, \ldots\}$ se a_i for de segunda espécie (M é uma interpretação para uma linguagem L e D é o domínio de M).

1.2.2. *Definição.* Sejam L uma linguagem, M uma interpretação para L e $s \in \Sigma^M$. Vamos definir uma função s*, que associa a cada termo de L um elemento de D.

i.) Se r é a_j, $s^*(r)$ é s_j (a j-ésima componente de s).

ii.) Se r é V_j, $s^*(V_j)$ é V_j^M (a interpretação de V_j).

iii.) Se r é $f(r_1,r_2,\ldots,r_n)$, $s^*(r)$ é $f^M(s^*(r_1),s^*(r_2),\ldots,s^*(r_n))$.

Se $n = 0$, f é uma constante individual e $s^*(f)$ é $f^M \in D$. A seguir, definimos quando é que uma sequência s *satisfaz* uma fórmula A.

1.1.3. *Definição.* Sejam L uma linguagem, A uma fórmula de L, M uma interpretação para L, e $s \in \Sigma^M$.

i.) Se A é $r_1 = r_2$, s satisfaz A se e somente se $s^*(r_1) = s^*(r_2)$.

ii.) Se A é $p(r_1,r_2,\ldots,r_n)$, s satisfaz A se e somente se $p^M(s^*(r_1), s^*(r_2),\ldots,s^*(r_n))$.

iii.) Se A é $\neg B$, s satisfaz A se e somente se s não satisfaz B.

iv.) Se A é $B \vee C$, s satisfaz A se e somente se s satisfaz B ou s satisfaz C.

v.) Se A é $\forall a_j B$, s satisfaz A se e somente se qualquer $s' \in \Sigma^M$, dife rindo de s no máximo na j-ésima posição, satisfaz B.

É interessante notar que, se a_j é de segunda espécie, em 1.2.3.v.), então $s'_j \in \{V_1^M, V_2^M, \ldots\}$. Assim não são necessárias restrições quanto à espécie da variável, possibilitando uma definição de satisfação idêntica à da lógica de primeira ordem.

1.2.4. *Definição.* Sejam L uma linguagem, M uma interpretação para L e A uma fórmula de L. A é *verdadeira* para M, em símbolos, $\models_M A$, se e somente se toda sequência $s \in \Sigma^M$ satisfaz A. A é *falsa* para M se e somente se nenhuma sequência $s \in \Sigma^M$ satisfaz A.

Logo, A é falsa para M se e somente se $\neg A$ é verdadeira para M.

1.2.5. *Definição.* Sejam M uma interpretação para uma linguagem L e S um conjunto de fórmulas de L. M é um *modelo* de S se e somente se toda fórmula de S é verdadeira para M.

Assim, uma interpretação M para uma teoria K é um modelo de K se e somente se toda sentença de K é verdadeira para M.

1.2.6. *Definição.* Sejam L uma linguagem, S uma conjunto de fŕmulas de L e A uma fórmula de L. A é *consequência semântica* de S, em símbolos, $S \models A$, se e somente se, para todo modelo M de S, A é verdadeira para M.

Se K é uma teoria em L, e A é uma fórmula de L que é consequência semântica de K, escreveremos também $\models_K A$. Se $S = \phi$, em 1.2.6, escreveremos $\models A$, e A é dita uma fórmula *logicamente válida*. O restante desta secção será ocupado pela demonstração do seguinte teorema, que mostra que as noções de consequência sintática e consequência semântica estão intimamente relacionadas.

1.2.7. *Teorema de completude (1ª versão).*

Sejam L *uma linguagem,* K *uma teoria em* L *e* A *uma fórmula de* L. *Então* $\vdash_K A$ *se e somente se* $\models_K A$.

Para mostrar que, se $\vdash_K A$, então $\models_K A$, basta mostrar que, se B é uma fórmula e S é um conjunto de fórmulas de uma linguagem L, então, se $S \vdash B$ então $S \models B$. Basicamente, dado um modelo M de S, devemos mostrar que os axiomas lógicos são verdadeiros para M e que, se as premissas das regras de dedução forem verdadeiras para M, as conclusões também o serão. Vamos precisar de algumas propriedades da função s*. Para os quatro lemas que se seguem, suponha que M é uma interpretação para uma linguagem L e todos os termos e fórmulas envolvidos são termos e fórmulas de L.

1.2.8. *Lema.* *Se todas as variáveis de um termo* r *ocorrem na lista* a_{i_1}, $a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ $(k \geq 0)$, *e se as sequências* $s, s' \in \Sigma^M$ *são tais que* $s_{i_j} = s'_{i_j}$ $(1 \leq j \leq k)$, *então* $s^*(r) = s'^*(r)$.

Demonstração. A demonstração é imediata, por indução sobre o comprimento de r.

1.2.9. *Lema.* *Se* A *é uma fórmula, as variáveis livres de* A *ocorrem na lista* $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$, *e* $s, s' \in \Sigma^M$ *são tais que* $s_{i_j} = s'_{i_j}$ $(1 \leq j \leq k)$ *,então* s *satisfaz* A *se e somente se* s' *satisfaz* A.

Demonstração. A demonstração é feita por indução sobre o comprimento de A.

Caso 1. A é $r_1 = r_2$. Logo, por 1.2.8, $s^*(r_1) = s'^*(r_1)$ e $s^*(r_2) = s'^*(r_2)$. Resulta que s satisfaz A se e somente se s' satisfaz A.

Caso 2. A é $p(r_1, r_2, \ldots, r_n)$. O raciocínio é inteiramente análogo ao do caso 1.

Caso 3. A é $\neg B$. Logo, pela hipótese de indução, como as variáveis de B estão entre $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$, s não satisfaz B se e somente se s' não satisfaz B. Logo, s satisfaz A se e somente se s' satisfaz A.

Caso 4. A é B v C. Raciocínio análogo ao do caso 3.

Caso 5. A é $\forall a_j B$. Logo, as variáveis livres de B estão entre $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$. Suponha que s satisfaz A. Então, toda sequência de Σ^M que difere de s no máximo na j-ésima posição satisfaz B. Sejam $s'' \in \Sigma^M$, diferente de s' no máximo na j-ésima posição, e s''' a sequência idêntica a s, exceto na j-ésima posição, onde $s'''_j = s''_j$. Logo, $s''' \in \Sigma^M$ e s''' difere de s no máximo na j-ésima posição; resulta que s''' satisfaz B. Como $s'''_{i_n} = s''_{i_n}$, $1 \leq n \leq k$ e $s'''_j = s''_j$, então, aplicando a hipótese de indução, s'' satisfaz B se e somente se s''' satisfaz B. Logo, s'' satisfaz B, donde s' satisfaz A. A recíproca resulta por simetria.

Como corolário a este resultado, vale observar que se A é uma sentença, ou toda sequência satisfaz A ou nehuma sequência satisfaz A, isto é, ou A é verdadeira para M ou A é falsa para M.

1.2.10. *Lema.* *Se* r_1 *e* r_2 *são termos,* $s \in \Sigma^M$ *,* r_3 *resulta de* r_1 *substituindo-se todas as ocorrências de* a_i *por* r_2 *, com a condição de, se* a_i *for de segunda espécie, então* r_2 *é de segunda espécie, e se* s' *resulta de* s *substituindo-se a i-ésima componente por* $s^*(r_2)$ *, então* $s' \in \Sigma^M$ *e* $s^*(r_3) = s'^*(r_1)$.

Demonstração. A condição imposta sobre r_2, no caso de a_i ser de segunda espécie, garante que $s' \in \Sigma^M$. Assim, podemos aplicar a definição 1.2.2. A demonstração é feita por indução sobre o comprimento de r_1.

Caso 1. Se r_1 é a_i, então r_3 é r_2. Logo, $s^*(r_3) = s'^*(r_1)$.

Caso 2. Se r_1 é a_j, diferente de a_i, então r_3 é a_j. Como $s_j = s'_j$, pois $i \neq j$, então $s'^*(r_1) = s^*(r_3)$.

Caso 3. Se r_1 é V_k, então r_3 é V_k, donde $s^*(r_3) = V_k^M = s'^*(r_1)$.

Caso 4. Se r_1 é $f(r_{k_1}, r_{k_2}, \ldots, r_{k_n})$, então seja r'_{k_j} $(1 \leq j \leq n)$ obtido de r_{k_j} substituindo-se a_i por r_2. Logo, $r_3 = f(r'_{k_1}, r'_{k_2}, \ldots, r'_{k_n})$. Pela hipótese de indução, $s^*(r'_{k_j}) = s'^*(r_{k_j})$ $(1 \leq j \leq n)$. É imediato que $s'^*(r_1) = s^*(r_3)$.

Com isso, está terminada a demonstração.

1.2.11. *Lema.* *Sejam* $A(a_i)$ *uma fórmula,* r *um termo (de segunda espécie, se* a_i *for uma variável de segunda espécie) livre para* a_i *em* $A(a_i)$ *,* $s \in \Sigma^M$ *, e* s' *obtida a partir de* s *substituindo-se a i-ésima componente de* s *por* $s^*(r)$ *. Então,* $s' \in \Sigma^M$ *e* s *satisfaz* $A(r)$ *se e somente se* s' *satisfaz* $A(a_i)$.

Demonstração. A cláusula em relação à espécie de r garante que $s' \varepsilon \Sigma^M$. A demonstração é feita por indução sobre o número de conectivos e quantificadores de $A(a_i)$.

Caso 1. $A(a_i)$ é $r_1 = r_2$. Seja r_j' ($j = 1,2$) o termo obtido de r_j substituindo-se as ocorrências de a_i por r. Logo, $A(r)$ é $r_1' = r_2'$. Por 1.2.10, $s^*(r_j') = s'^*(r_j)$ ($j = 1,2$) ; então, $s^*(r_1') = s^*(r_2')$ se e somente se $s'^*(r_1) = s'^*(r_2)$.

Caso 2. $A(a_i)$ é $p(r_1,r_2,\ldots,r_n)$. O raciocínio é inteiramente análogo ao do caso anterior.

Caso 3. $A(a_i)$ é $\neg B(a_i)$. Então $A(r)$ é $\neg B(r)$ e, pela hipótese de indução, s não satisfaz $B(r)$ se e somente se s' não satisfaz $B(a_i)$. Logo, s satisfaz $A(r)$ se e somente se s' satisfaz $A(a_i)$.

Caso 4. $A(a_i)$ é $B(a_i) \vee C(a_i)$. Pela hipótese de indução, como no caso anterior.

Caso 5. $A(a_i)$ é $\forall a_j B(a_i)$.

Caso 5a. a_j é a_i. Logo, $A(r)$ é $A(a_i)$, pois a_i não ocorre livre em $A(a_i)$. Por 1.1.9, s satisfaz $A(r)$ se e somente se s' satisfaz $A(a_i)$.

Caso 5b. a_j é diferente de a_i. Suponha que s' satisfaz $A(a_i)$. Seja $s'' \varepsilon \Sigma^M$, diferindo de s no máximo na j-ésima posição. Seja s''' igual a s', exceto na j-ésima posição, onde é igual a s''. Logo, $s''' \varepsilon \Sigma^M$. Como s' satisfaz A, s''' satisfaz $B(a_i)$. Como r é livre para a_i em A, e podemos supor que a_i ocorre livre em $B(a_i)$ (senão voltamos ao caso 5a.), então r não contém a_j. Logo, por 1.2.8, $s^*(r) = s''^*(r)$, pois s e s'' só diferem na j-ésima posição. Pela hipótese de indução, s''' satisfaz $B(a_i)$ se e somente se s'' satisfaz $B(r)$, pois s''' pode ser obtida de s'' substituindo-se a i-ésima componente por $s''^{*}(r)$. Logo, s'' satisfaz B(r), e s satisfaz A(r). A recíproca é obtida de maneira análoga, terminando a demonstração.

Como corolário a este resultado obtemos que se $A(a_i)$ é uma fórmula, a_i é uma variável de segunda espécie, $s \in \Sigma^M$ e $s^*(a_i) = V_k^M$ (o que sempre ocorre para algum $k \geq 1$), então s satisfaz $A(a_i)$ se e somente se s satisfaz $A(V_k)$.

Vamos passar à demonstração da primeira parte do teorema de completude.

1.2.12. *Teorema de correção.*

Se A *é uma fórmula e* S *é um conjunto de fórmulas de uma linguagem* L *, e* $S \vdash A$ *, então* $S \models A$.

Demonstração. A demonstração é efetuada por indução sobre a dedução de A, como é usual. Por definição, as fórmulas do conjunto S são verdadeiras para qualquer modelo de S. A demonstração de que os axiomas lógicos *I.1-I.4*, *II.2* e *II.3* são logicamente válidos é inteiramente análoga à demonstração para o cálculo de predicados de primeira ordem, já que não há restrições quanto às espécies das variáveis e termos envolvidos. Que as regras *R1* e *R2* preservam a validade resulta da mesma observação, já que são regras do cálculo de predicados de primeira ordem e não envolvem restrições quanto à espécie das variáveis. Assim, para mostrar que as fórmulas de S(0) possuem a propriedade expressa no enunciado do teorema, só falta mostrar que o axioma *II.1* é consequência semântica de S. Sejam $A(a_i)$ uma fórmula e r um termo (de segunda espécie se a_i o for) livre para a_i em $A(a_i)$. Sejam M um modelo qualquer de S e $s \in \Sigma^M$. Vamos mostrar que se s satisfaz $\forall a_i A(a_i)$, então s satisfaz A(r). (Que é equivalente a mostrar que s não satisfaz $\forall a_i A(a_i)$ ou s satisfaz $A(r)$.) Seja s' a sequência obtida de s substituindo-se a i-ésima componente de s por $s^*(r)$. Por 1.2.11, s satisfaz $A(r)$ se e somente se s' satisfaz $A(a_i)$. Como s' difere de s no máximo na i-ésima posição, então s' satisfaz $A(a_i)$, logo s satisfaz $A(r)$. Como o caso em que α é limite é imediato, basta mostrar para $S(\alpha)$, se $\alpha = \beta+1$. Inicialmente, suponha que A é da forma $\forall a_i B(a_i)$ e $B(V_1)$, $B(V_2)$,.... são fórmulas de $S(\beta)$, com a_i de segunda espécie. Pela hipótese de indução, $B(V_1)$, $B(V_2)$,.... são todas consequências semânticas de S. Vamos mostrar que A também o é. Sejam M um modelo de S e $s \in \Sigma^M$. Se $s' \in \Sigma^M$ difere de s no máximo na i-ésima posição, vamos mostrar que s' satisfaz $B(a_i)$. Suponha que $s'^*(a_i) = V_k^M$; por 1.2.11, s' satisfaz $B(a_i)$ se e somente se s' satisfaz $B(V_k)$ (ver comentário logo após o lema 1.2.11). Como $B(V_k)$ é consequência semântica de S, s' satisfaz $B(V_k)$, logo, s' satisfaz $B(a_i)$. Resulta que s satisfaz A. Assim, mostramos que as fórmulas de $S(\beta)$' verificam o teorema; aplicando o mesmo raciocínio que foi utilizado para as fórmulas de $S(0)$, obtemos que as fórmulas de $S(\alpha)$ verificam o teorema, terminando a demonstração.

Como corolário ao teorema de correção, vamos mostrar que uma fórmula é verdadeira para uma interpretação (da linguagem da fórmula) se e somente se o seu fecho o for.

1.2.13. *Corolário. Se* A *é uma fórmula de* L *, e* S *é um conjunto de fórmulas de* L *, então* $S \models A$ *se e somente se* $S \models \overline{A}$.

Demonstração. Por 1.1.18, como $\{A\} \vdash A$, então $\{A\} \vdash \overline{A}$. Logo, por 1.2.12, $\{A\} \models \overline{A}$. Se M é um modelo de S e $S \models A$, então M é um modelo de $\{A\}$, logo $\overline{A}$ é verdadeira para M. Resulta que $S \models \overline{A}$. A recíproca é obtida por simetria.

O mesmo resultado vale para a generalização, pela proposição 1.1.13. Por 1.2.13, fica garantido que se S é um conjunto de axiomas para uma teoria K, e A é um teorema de K, então $K \models A$ se e somente se $S \models A$.

1.2.14. *Definição.* Se K é uma teoria em L, K é *consistente em* L se e somente se não existe uma fórmula A de L tal que $\vdash_K A$ e $\vdash_K \neg A$. K é *finitariamente consistente em* L se e somente se não existe uma fórmula A de L tal que $\Vdash_K A$ e $\Vdash_K \neg A$.

1.2.15. *Proposição. Se* K *é uma teoria em* L, *e* A *é uma sentença de* L *tal que* $\neg A$ *não é teorema de* K, *então* $K_0 = K \cup A$ *é consistente em* L.

Demonstração. Suponha que K_0 é inconsistente. Então existe B em L tal que $\vdash_{K_0} B$ e $\vdash_{K_0} \neg B$. Como $B \to (\neg B \to \neg A)$ é instância de uma tautologia, então $\vdash_{K_0} B \to (\neg B \to \neg A)$. Logo, $\vdash_{K_0} \neg A$, aplicando *R1* duas vezes. Resulta que $\{A\} \vdash_K \neg A$; aplicando o teorema da dedução, $\vdash_K A \to \neg A$. Como $(A \to \neg A) \to \neg A$ é instância de uma tautologia, então $\vdash_K \neg A$, por *R1* , em contradição à hipótese de que $\neg A$ não é teorema de K.

1.2.16. *Definição.* Se a_i e a_j são variáveis distintas, de mesma espécie, e $A(a_i)$ é uma fórmula, então $A(a_i)$ e $A(a_j)$ são *similares* se e somente se a_j é livre para a_i em $A(a_i)$ e $A(a_i)$ não contém ocorrências livres de a_j.

Logo, se $A(a_i)$ e $A(a_j)$ são similares, a_i ocorre livre em $A(a_i)$ exatamente onde a_j ocorre livre em $A(a_j)$; além disso $A(a_j)$ e $A(a_i)$ são similares, pois a_i é livre para a_j em $A(a_j)$ e a_i não ocorre livre em $A(a_j)$.

1.2.17. *Proposição.* *Se* $A(a_i)$ *e* $A(a_j)$ *são similares, então*

$$\vdash \forall a_i A(a_i) \leftrightarrow \forall a_j A(a_j).$$

Demonstração. Por *II.1* , $\vdash \forall a_i A(a_i) \rightarrow A(a_j)$. Como a_j não ocorre livre em $\forall a_i A(a_i)$, então, aplicando *R2*, $\vdash \forall a_i A(a_i) \rightarrow \forall a_j A(a_j)$. Da mesma maneira, obtemos $\vdash \forall a_j A(a_j) \rightarrow \forall a_i A(a_i)$. A proposição resulta de instâncias das tautologias $(C_1 \& C_2) \rightarrow (C_1 \& C_2)$ e $((C_1 \& C_2) \rightarrow C_3) \leftrightarrow (C_1 \rightarrow (C_2 \rightarrow C_3))$.

1.2.18. ***Definição.*** Dizemos que uma teoria K (em L) é *completa em* L se e somente se, para toda sentença A de L, $\vdash_K A$ ou $\vdash_K \neg A$.

1.2.19. *Definição.* Sejam K e K_0 teorias em uma linguagem L. K_0 é *extensão* de K se e somente se $K \subseteq K_0$. K_0 é *extensão finita* de K se e somente se K_0 for extensão de K e a diferença entre K_0 e K for um conjunto finito.

A proposição que se segue é uma versão do lema de Lindenbaum para a lógica *L*.

1.2.20. *Proposição. Sejam* L *uma linguagem e* K *uma teoria consistente em* L. *Então existem teorias* K_0 *e* K_1 *em* L, *satisfazendo as seguintes propriedades:*

i.) K_0 *é extensão consistente (em* L*) de* K, *e, se* $S \cup \{A\}$ *é um conjunto de fórmulas de* L, *então* $K_0 \cup S \vdash A$ *se e somente se* $K_0 \cup S \Vdash A$.

ii.) K_1 *é extensão de* K, *e é consistente e completa em* L.

Demonstração. Como as expressões de uma linguagem formam um conjunto enumerável, o conjunto das fórmulas de L é um conjunto enumerável. Vamos considerar as fórmulas de L com exatamente uma variável livre, tais que esta variável é de segunda espécie. Seja $A_1(a_{i_1})$, $A_2(a_{i_2})$, ... uma ordenação destas fórmulas e seja a_{i_n} a variável livre de $A_n(a_{i_n})$. Vamos obter uma hierarquia $K \subseteq J_1 \subseteq J_2 \subseteq$ ... de teorias consistentes em L, com a propriedade de que, para cada $n \geq 1$, existe uma constante de segunda espécie V_{j_n} tal que $J_n \Vdash \forall a_{i_n} A_n(a_{i_n}) \vee \neg A_n(V_{j_n})$. Suponha que J_1, J_2, ... , J_{n-1} estejam definidas e satisfaçam a propriedade acima, além de serem consistentes em L. Se $\neg\forall a_{i_n} A_n(a_{i_n})$ não for teorema de J_{n-1}, seja $J_n = J_{n-1} \cup \{\forall a_{i_n} A_n(a_{i_n})\}$. Por 1.2.15, J_n é consistente em L e, por uma instância da tautologia $B \rightarrow (B \vee C)$, vale que $\forall a_{i_n} A_n(a_{i_n}) \vee \neg A_n(V_1)$ é teorema finitário de J_n. Se $J_{n-1} \vdash \neg\forall a_{i_n} A_n(a_{i_n})$, então, como J_{n-1} é consistente em L, para algum V_{j_n}, $A_n(V_{j_n})$ não é teorema de J_{n-1}, caso contrário $J_{n-1} \vdash \forall a_{i_n} A_n(a_{i_n})$, por *R3*, em contradição à hipótese de J_{n-1} ser consistente. Seja então J_n a teoria obtida acrescentando-se $\neg A_n(V_{j_n})$ à teoria J_{n-1}. Por raciocínio análogo ao do caso anterior, J_n verifica as propriedades requeridas. J_1 é obtida de K de maneira totalmente análoga, verificando também as propriedades já mencionadas. Por indução, cada teoria J_n $(n \geq 1)$ é consistente. Seja $K_0 = \cup\{J_1, J_2, \ldots\}$. É imediato que K_0 é finitariamente consistente, pois a dedução finitária de alguma contradição envolveria apenas um número finito de fórmulas do conjunto K_0; logo, seria uma dedução em algum J_n, que é consistente. O fato que garante que K_0 é consistente é que , a partir de K_0, as noções de consequência e consequência finitária coincidem. Seja S um conjunto qualquer de fórmulas de L, e A uma fórmula de L. Seja $R = K_0 \cup S$. <u>Afirmação:</u> $R \vdash A$ se e somente se $R \Vdash A$. Que a condição é suficiente é imediato. Vamos mostrar que é também necessária. A demonstração é feita por indução sobre α , se A pertence a $R(\alpha)$.

Caso 1. Suponha que $A \in R(0)$. Logo, $R \Vdash A$, por definição.

Caso 2. Suponha que $A \in R(\alpha+1)$. Basta mostrar que $R(0)$ é fechado para a regra

R3. Então, seja A da forma $\forall a_i B(a_i)$, onde a_i é de segunda espécie, e vamos supor que $B(V_1)$, $B(V_2)$, ... são fórmulas de $R(0)$. Se a_i não ocorre livre em $B(a_i)$, então $B(a_i)$ é $B(V_j)$ $(j \geq 1)$; logo, A está em $R(0)$. Podemos supor, então, que a_i ocorre livre em $B(a_i)$. Seja $C_1(V_j)$ o fecho de $B(V_j)$. Logo, por 1.1.14.b), $C_1(V_j)$ está em $R(0)$. Seja $C_2(a_i)$ a fórmula obtida de $B(a_i)$, generalizando-se para todas as variáveis livres de $B(a_i)$, exceto para a_i (a generalização é efetuada na ordem que seria realizada para se obter o fecho de $B(a_i)$). É imediato que $C_2(V_j)$ é $C_1(V_j)$. Logo, vamos considerar estas fórmulas como sendo $C(V_1)$, $C(V_2)$, ..., e $C_2(a_i)$ é $C(a_i)$. Como a_i é a única variável livre de $C(a_i)$, $C(a_i)$ é $A_n(a_{i_n})$, para algum n. Suponha, em primeiro lugar, que $\forall a_i C(a_i)$ está em J_n. Logo, está em K_0, logo em $R(0)$. Aplicando *II.1* e *R1*, obtemos que $C(a_i)$ está em $R(0)$. Repetindo o mesmo processo para as variáveis que foram generalizadas, obtemos que $B(a_i) \in R(0)$. Como a generalização é uma regra finitária , $\forall a_i B(a_i) \in R(0)$. Por outro lado, se $\forall a_i C(a_i)$ não está em J_n, então, para algum V_j, $\neg C(V_j)$ está em J_n, logo, em $R(0)$. Mas $C(V_j) \in R(0)$. Logo, existem duas possibilidades. Se R for finitariamente consistente, então este caso é impossível e terminamos. Se R for finitariamente inconsistente, então, por causa da tautologia $B_1 \,\&\, \neg B_1 \to B_2$, toda fórmula de L é consequência finitária de R e não há nada a demonstrar. Logo, $R(0)$ é fechado para a regra *R3*, resulta que $R(\alpha) = R(0)$, para todo ordinal α, e está demonstrada a afirmação feita acima . Vamos mostrar que K_0 é consistente. Suponha que existe uma fórmula A de L tal que $K_0 \vdash A \,\&\, \neg A$. Logo, pelo que acabamos de mostrar, $K_0 \Vdash A \,\&\, \neg A$, em contradição com o fato de K_0 ser finitariamente consistente. Assim, K_0 é consistente em L e, para todo conjunto de fórmulas S de L, $K_0 \cup S \vdash A$ se e somente se $K_0 \cup S \Vdash A$, para toda fórmula A de L. Vamos obter uma extensão consistente e completa (em L) de K_0 (logo, de K). Sejam B_1, B_2, ... as fórmulas fechadas de L. Vamos definir uma hierarquia de teorias consistentes em L, $K_0 \subseteq J^1 \subseteq J^2 \subseteq$ ... . Suponha que J^1, J^2, ..., J^{n-1} estão definidas. Se $\neg B_n$ não é teorema de J^{n-1}, seja $J^n = J^{n-1} \cup \{B_n\}$. Logo, se J^{n-1} for consistente, J^n também o será, por 1.2.15. Caso contrário, $J^n = J^{n-1}$. J^1 é obtida de K_0 de maneira análoga, sendo também consistente. Logo, por indução, para cada n ($n \geq 1$), J^n é consistente. Seja $K_1 = \bigcup\{J^1, J^2, \ldots\}$; é imediato que K_1 é completa em L, e também que é finitariamente consistente em L. Suponha que existe uma fórmula A de L, tal que $K_1 \vdash A \& \neg A$. Logo, se S é o conjunto de fórmulas acrescentadas a teoria K_0 para se obter K_1, $K_0 \cup S \vdash A \& \neg A$. Pelo que já foi demonstrado acerca de K_0, $K_0 \cup S \Vdash A \& \neg A$. Logo, $K_1 \Vdash A \& \neg A$, contra o fato de que K_1 é finitariamente consistente. Logo, K_1 é consistente em L, terminando a demonstração.

1.2.21. *Teorema de completude ($2^{\underline{a}}$ versão).*

Sejam L *uma linguagem e* K *uma teoria em* L. *Então,* K *é consistente em* L *se e somente se* K *possui um modelo enumerável.*

Demonstração. Suponha que K possui um modelo enumerável M. Seja A uma fórmula de L tal que $K \vdash A \& \neg A$. Então, A é verdadeira para M e $\neg A$ também é verdadeipara M, pelo teorema de correção, o que é impossível. Logo, K é consistente em L. Suponha que K é consistente em L e vamos obter um modelo enumerável para K. Seja K_0 a extensão de K cuja existência a proposição 1.2.20.i.) garante. Seja L' a linguagem obtida acrescentando-se um conjunto enumerável $\{c_1, c_2, \ldots\}$ de novas constantes individuais (de primeira espécie) a L. Vamos mostrar que K_0 é consistente em L'. Para isso, mostraremos que, se A é uma fórmula de L', então $K_0 \vdash A$ se e somente se $K_0 \Vdash A$ (nas deduções podem ocorrer fórmulas de L').

Se A está em $K_0(0)$, então, por definição, $K_0 \Vdash A$. Vamos mostrar que $K_0(0)$ é fechado para a regra *R3*. Suponha que A é da forma $\forall a_i B(a_i)$, onde a_i é uma variável de segunda espécie, e $B(V_1)$, $B(V_2)$, ... são fórmulas de $K_0(0)$. Logo, a dedução de cada $B(V_j)$ ($j \geq 1$) envolve apenas um número finito de fórmulas. Sejam $d_1, d_2, \ldots, d_n$ as novas constantes que ocorrem em $B(a_i)$ (logo, em $B(V_j)$). Como $B(V_1)$ é teorema finitário de K_0 (na linguagem L'), então apenas um número finito de novas constantes e de variáveis de primeira espécie ocorrem na dedução de $B(V_1)$ (mais precisamente, numa dedução finitária de $B(V_1)$). Substituímos as novas constantes que aparecem na dedução de $B(V_1)$ por variáveis de primeira espécie que não aparecem (a substituição é efetuada numa ordem determinada; logo, as variáveis que são utilizadas são todas distintas). Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ as variáveis que substituíram as constantes $d_1, d_2, \ldots, d_n$, respectivamente, e denotemos por X o conjunto destas variáveis. Como as substituições efetuadas nos axiomas lógicos fornecem novos axiomas lógicos e as regras não são alteradas na sua aplicação (não há alteração nas fórmulas de K_0), obtemos uma dedução em L. Logo, a última fórmula que aparece nesta dedução é $B(V_1)$ com as substituições efetivadas. Seja $C_1(V_1)$ esta fórmula. Repetimos o processo descrito acima, substituindo as novas constantes que aparecem na dedução de $B(V_j)$ ($j \geq 2$) por variáveis de primeira espécie que não aparecem na dedução nem no conjunto X, obtendo os teoremas $C_2(V_2)$, $C_3(V_3)$, ... Vamos mostrar que $K_0 \vdash C_1(V_2)$, a dedução sendo obtida com fórmulas de L. Sejam $y_1, y_2, \ldots, y_n$ as variáveis que entraram no lugar das constantes $d_1, d_2, \ldots, d_n$, respectivamente, para se obter $C_2(V_2)$. Como $K_0 \vdash C_2(V_2)$, então $K_0 \vdash \forall y_1 C_2(V_2)$ (as deduções são todas em L). Como x_1 não ocorre em $C_2(V_2)$, aplicamos o axioma *II.1* e a regra *R1*, obtendo uma fórmula que é $C_2(V_2)$ tendo x_1 no lugar de y_1, e é teorema de K_0 em L. Repetimos este processo, substituindo y_k por x_k $(2 \leq k \leq n)$, o que é possível, pois x_k não ocorre na fórmula em que vai substituir y_k. É imediato que obtemos que $K_0 \vdash C_1(V_2)$. Repetindo para $C_j(V_j)$ $(3 \leq j)$, obtemos $K_0 \vdash C_1(V_1)$, $K_0 \vdash C_1(V_2)$, ... Aplicando *R3* , $K_0 \vdash \forall a_i C_1(a_i)$. Por 1.2.20.I.), $K_0 \Vdash \forall a_i C_1(a_i)$. Aplicando *II.1* e *R1* n vezes, substituimos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por $d_1, d_2, \ldots, d_n$, respectivamente e obtemos que $\forall a_i B(a_i)$ está em $K_0(0)$, pois mostramos que $\forall a_i C_1(a_i)$ está em $K_0(0)$ (estamos considerando, neste caso, que podem ocorrer fórmulas de L'). Logo, $K_0(0)$ é fechado para a regra *R3* . Resulta que $K_0(\alpha) = K_0(0)$, para todo ordinal α. Suponha agora que existe uma fórmula de L' , A, tal que $K_0 \vdash A \,\&\, \neg A$. Pelo que acabamos de mostrar, $K_0 \Vdash A \,\&\, \neg A$. Seja uma dedução finitária de $A \& \neg A$; obtemos uma dedução em L, substituindo todas as constantes novas que aparecem nesta dedução por variáveis que não aparecem (variáveis de primeira espécie) . Assim, obtemos a dedução de uma contradição que é uma fórmula de L, a partir de K_0, o que é impossível, pois K_0 é consistente em L. Logo, K_0 é consistente em L'.

Seja agora $A_1(a_{i_1})$, $A_2(a_{i_2})$, ... uma enumeração das fórmulas de L' com exatamente uma váriavel livre, e seja a_{i_k} a variável livre de $A_k(a_{i_k})$. Vamos obter uma hierarquia de teorias em L', $K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots \subseteq K_n \subseteq \ldots$, tal que, para cada $n \geq 1$, K_n satisfaz as seguintes propriedades:

1_n.) K_n é consistente em L'.

2_n.) K_n é uma extensão finita de K_0.

3_n.) Se a_{i_n} é de segunda espécie, então existe uma constante V_{j_n} tal que

$$K_n \vdash \forall a_{i_n} A_n(a_{i_n}) \vee \neg A_n(V_{j_n}) \;;$$

se a_{i_n} é de primeira espécie, então existe uma das novas constantes, c_{j_n}, tal que $$K_n \vdash \forall a_{i_n} A_n(a_{i_n}) \vee \neg A_n(c_{j_n}).$$

Suponha que temos K_{n-1} com as propriedades acima e vamos obter K_n. Estamos considerando $n \geq 2$. Se a_{i_n} é de segunda espécie, então, se $\neg\forall a_{i_n} A_n(a_{i_n})$ não é teorema de K_{n-1}, $K_n = K_{n-1} \cup \{\forall a_{i_n} A_n(a_{i_n})\}$. Por 1.2.15, K_n é consistente em L' ; além disso, é imediato que valem também 2_n.) e 3_n.), pela hipótese de indução. Caso contrário, existe V_{j_n} tal que $A_n(V_{j_n})$ não é teorema de K_{n-1}, senão teríamos que $\vdash_{K_{n-1}} \forall a_{i_n} A_n(a_{i_n})$, em contradição à hipótese de indução. Então, tomamos $K_n = K_{n-1} \cup \{\neg A_n(V_{j_n})\}$ e, novamente, K_n satisfaz 1_n.), 2_n.) e 3_n.). Se a_{i_n} for de primeira espécie, seja c_{j_n} uma das novas constantes que não aparece em nenhuma das fórmulas de $K_{n-1} \cup \{A_n\}$, o que é possível, pois c_{j_n} não pode ocorrer em nenhuma fórmula de K_0 e, por hipótese de indução, K_{n-1} é uma extensão finita de K_0. Acrescentamos a K_{n-1}, para obter K_n, a sentença

$$(S_n) \qquad \forall a_{i_n} A_n(a_{i_n}) \vee \neg A_n(c_{j_n}).$$

Logo, 2_n.) e 3_n.) valem. Vamos mostrar que K_n é consistente em L'. Suponha que não. Logo, toda fórmula é teorema de K_n (fórmula de L'). Em particular,

$$K_n \vdash \neg(S_n).$$

Como (S_n) é fechada, $K_{n-1} \vdash (S_n) \to \neg(S_n)$, pelo teorema da dedução . Pela instância de tautologia $((S_n) \to \neg(S_n)) \to \neg(S_n)$, $K_{n-1} \vdash \neg(S_n)$. Logo,

$$K_{n-1} \vdash \neg\forall a_{i_n} A_n(a_{i_n}) \quad \text{e} \quad K_{n-1} \vdash A_n(c_{j_n}).$$

Seja B a fórmula obtida pela conjunção das sentenças acrescentadas a K_0 para se ter K_{n-1}, o que é possível, pois o conjunto destas sentenças é finito. Logo , $K_0 \vdash B \to A_n(c_{j_n})$, pelo teorema da dedução, pois B é fechada. Como foi visto na demonstração de que K_0 é consistente em L', se $K_0 \vdash A$, então $K_0 \Vdash A$. Resulta que $K_0 \Vdash B \to A_n(c_{j_n})$. Do fato de que $K_{n-1} \Vdash B$, por *R1* obtemos $K_{n-1} \Vdash A_n(c_{j_n})$. Seja então uma dedução finitária de $A_n(c_{j_n})$ e seja x uma variável de primeira espécie que não aparece nesta dedução. Substituímos todas as ocorrências de c_{j_n} na dedução finitária de $A_n(c_{j_n})$ por x. Como c_{j_n} não ocorre nem em $A_n(a_{i_n})$, nem nas fórmulas de K_{n-1}, obtivemos uma dedução de $A_n(x)$. Aplicando a generalização, $K_{n-1} \vdash \forall x A_n(x)$. Como $A_n(x)$ e $A_n(a_{i_n})$ são similares, então, por 1.2.17, $K_{n-1} \vdash \forall a_{i_n} A_n(a_{i_n})$, em contradição à hipótese de indução. Logo, K_n é consistente em L'. Para terminar a elaboração da hierarquia, falta mostrar que existe K_1 satisfazendo 1_1.), 2_1.) e 3_1.). Obtemos K_1 de K_0, de maneira totalmente análoga a como obtemos K_n de K_{n-1}, considerando a fórmula $A_1(a_{i_1})$. Assim, por indução, cada K_n é consistente. Seja $K^0 = \cup\{K_0, K_1, \ldots\}$. É imediato que K^0 é finitariamente consistente, pois K_0, K_1, ... são todas consistentes. Observando a elaboração da hierarquia, e, se K^1 é a teoria obtida de K_0 satisfazendo 1.2.20.i.), é fácil notar que $K^1 \subseteq K^0$; logo, se S é um conjunto de fórmulas de L' e A é uma fórmula de L', então $K^0 \cup S \vdash A$ se e somente se $K^0 \cup S \Vdash A$. Logo, como K^0 é finitariamente consistente em L', K^0 é consistente em L'. Aplicando 1.2.20, seja J uma extensão de K^0, consistente e completa em L'. Seja T o conjunto dos termos fechados de L', i.e., dos termos sem variáveis de L'. Definimos a seguinte relação em T: se $r_1, r_2 \in T$, $r_1 \approx r_2$ se e somente se $J \vdash r_1 = r_2$. Em virtude dos axiomas *II.2* e *II.3*, esta relação é uma relação de equivalência. Seja D o conjunto das classes de equivalência dos elementos de T determinadas por esta relação. Vamos definir uma interpretação M para L', tendo como domínio o conjunto D. Se $r \in T$, denotamos a classe de equivalência a que r pertence por $\bar{r}$. Se c é uma constante de L', c^M é $\bar{c}$.

Se f é um símbolo funcional n-ário, e $r_1,r_2,\ldots,r_n \in T$, então

$$f^M(\overline{r}_1,\overline{r}_2,\ldots,\overline{r}_n) = \overline{f(r_1,r_2,\ldots,r_n)}.$$

Devido às propriedades da igualdade, está claro que esta definição não depende dos representantes escolhidos. Se p é um símbolo relacional n-ário de L' (logo, de L) e $r_1,r_2,\ldots,r_n \in T$, então

$$p^M(\overline{r}_1,\overline{r}_2,\ldots,\overline{r}_n) \text{ se e somente se } J \vdash p(r_1,r_2,\ldots,r_n).$$

Novamente, está claro que a definição não depende dos representantes utilizados. Vamos mostrar que M, assim definida, é um modelo de J. Basta mostrar que se A é uma sentença de L', A é verdadeira para M se e somente se $J \vdash A$. A demonstração é feita por indução sobre o número de conectivos e quantificadores de A.

Caso 1. A é $r_1 = r_2$. Imediato, pela definição de M.

Caso 2: A é $p(r_1,r_2,\ldots,r_n)$. Novamente pela definição de M.

Caso 3. A é $\neg B$. Se $J \vdash A$, então é falso que $J \vdash B$, pois J é consistente. Como B é fechada, aplicamos a hipótese de indução, obtendo que B é falsa para M (B é fechada). Logo, por definição, A é verdadeira para M. Se A é verdadeira para M, então B é falsa para M. Pela hipótese de indução, é falso que B é teorema de J; como J é completa em L', $J \vdash A$.

Caso 4. A é $B \vee C$. Se $J \vdash A$, suponha que A é falsa para M. Logo, como B e C são fechadas, B e C são falsas para M. Pela hipótese de indução, e como J é completa em L', $J \vdash \neg B$ e $J \vdash \neg C$. Como $J \vdash B \vee C$ e $J \vdash \neg B$, então, tomando uma instância da tautologia $(B_1 \vee B_2) \& \neg B_1 \rightarrow B_2$, resulta que $J \vdash C$, em contradição ao fato de que J é consistente em L'. Logo, A é verdadeira para M. Por outro lado, suponha que A é verdadeira para M.

Como A é verdadeira para M , e B e C são fechadas, então B é verdadeira para M ou C é verdadeira para M. Em ambos os casos, pela hipótese de indução, obtemos $J \vdash A$.

Caso 5. A é $\forall a_i B$. Se B é fechada, aplicamos a hipótese de indução e o fato de que B é verdadeira para M se e somente se $\forall a_i B$ o for. Podemos supor então que a_i ocorre livre em B. Como A é fechada, existe um $n \geq 1$ tal que B é $A_n(a_{i_n})$ e a_i é a_{i_n}.

Caso 5a. Suponha que a_i é de primeira espécie. Se $J \vdash A$, suponha que A é falsa para M. Logo, para alguma sequência $s \in \Sigma^M$, s não satisfaz $B(a_i)$. Seja $s^*(a_i) = \overline{r}$. Logo, por 1.2.11, s não satisfaz $B(r)$. Como $B(r)$ é fechada, $B(r)$ é falsa para M. Pela hipótese de indução, $J \vdash \neg B(r)$. Como $J \vdash A$, e r é livre para a_i em $B(a_i)$, aplicamos o axioma *II.1*, obtendo $J \vdash B(r)$, o que é impossível , pois J é consistente em L'. Logo, A é verdadeira para M. Por outro lado, suponha que A é verdadeira para M mas que é falso que $J \vdash A$. Como J é completa em L', $J \vdash \neg A$. Sabemos que $J \vdash (S_n)$. Logo, $J \vdash \neg A_n(c_{j_n})$. Resulta que $A_n(c_{j_n})$ é falsa para M, pela hipótese de indução e pela consistência de J. Mas A é verdadeira para M, donde , aplicando *II.1*, $A_n(c_{j_n})$ é verdadeira para M, pelo teorema de correção. Logo, $J \vdash A$.

Caso 5b. Suponha que a_i é de segunda espécie. A demonstração é totalmente análoga à do caso 5a.

Assim, M é um modelo de J. Considerando a função de interpretação restrita à linguagem L, é imediato que obtemos uma interpretação (em D) que é modelo de K. Além disso, D é enumerável, terminando a demonstração de 1.2.21.

Como consequência de 1.2.21, vale uma versão do teorema de *Löwenheim-Skolem*, para as linguagens consideradas.

1.2.22. *Teorema. Se* L *é uma linguagem e* K *é uma teoria em* L, *então, se* K *tem um modelo,* K *tem um modelo enumerável.*

Com um exemplo, vamos mostrar que não vale o *teorema da compacidade*. Seja L a linguagem cujos únicos símbolos são as constantes de segunda espécie. Seja K o conjunto das seguintes sentenças: $\neg\forall t(V_1 = t)$, $V_1 = V_2$, $V_1 = V_3, \ldots, V_1 = V_i, \ldots$ $(i \geq 2)$. Como $V_1 = V_i$, aplicando *R3*, obtemos $K \vdash \forall t(V_1 = t)$. Logo, K é inconsistente. Seja J um sub-conjunto finito de K. Seja p o maior i tal que $V_1 = V_i$ está em J. Seja D um conjunto com dois elementos (distintos) a e b. Interpretamos V_i, $i \leq p$, como sendo a e V_i, $i > p$, como sendo b. É imediato que obtemos um modelo de J. Logo, J é consistente e não vale o teorema da compacidade, que afirma que, se todo sub-conjunto finito de um conjunto de fórmulas é consistente, então o conjunto mesmo é consistente.

Para finalizar, vamos estabelecer a seguinte notação. Se L é uma linguagem cujos símbolos são $V_1, V_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots, c_n, f_1, f_2, \ldots, f_m, p_1, p_2, \ldots, p_q$, denotaremos uma interpretação M para L da seguinte maneira:

$$M = (D, V_1^M, V_2^M, \ldots, c_1^M, c_2^M, \ldots, c_n^M, f_1^M, f_2^M, \ldots, f_m^M, p_1^M, p_2^M, \ldots, p_q^M).$$

CAPÍTULO 2

OS SISTEMAS T E T*

2.0. INTRODUÇÃO

Neste capítulo será apresentado o desenvolvimento de duas teorias, T e T*, cuja lógica subjacente é L. A linguagem L considerada possui, além das constantes de segunda espécie, um único símbolo, um símbolo relacional binário, cujas propriedades (expressas pelos axiomas de T e T*) caracterizam-nas como teorias de classes. As constantes V_1, V_2, ... são consideradas classes especiais, com a propriedade de serem fechadas para certas operações típicas da teoria de conjuntos. Esta propriedade garante que cada V_I é um *universo*, no sentido de Tarski (2.1.138). T é desenvolvida extensivamente e T* de maneira sumária, já que existe forte analogia entre ambas e T* é formalmente mais simples. A apresentação segue de perto o apêndice de Kelley(12), onde é tratada uma versão da teoria impredicativa de classes. Os axiomas desta teoria (conhecida como teoria de Kelley-Morse ou, abreviadamente, como KM) podem ser encontrados no apêndice C, mais adiante.

2.1. O SISTEMA T

O símbolo relacional binário de L será denotado por ε, como é usual. Assim, os termos de L são as váriáveis e as constantes V_1, V_2, ... ; as fórmulas atômicas são da forma $r_1 = r_2$ e $r_1 \varepsilon r_2$, onde r_1 e r_2 são termos de L. Ao contrário de KM (e de T*), T não possui uma *classe universal*, pois não existe um *esquema de classificação* universal em T (cf. 2.1.9). O primeiro axioma de T expressa a relação fundamental entre a igualdade e a relação de *pertinência* (ε).

2.1.1. *Axioma de extensionalidade.*

(T.I) $\forall z(z \varepsilon x \leftrightarrow z \varepsilon y) \rightarrow x = y$.

A proposição 1.1.20 nos garante que os objetos de segunda espécie também são testados na verificação de igualdade de x e y, e que a igualdade de objetos de segunda espécie (em relação a outros de qualquer espécie) também é garantida pela propriedade expressa pelo antecedente de (T.I).

2.1.2. *Definição.*

(i.)	$x \neq y$	*see*	$\neg(x = y)$;
(ii.)	$x \notin y$	*see*	$\neg(x \varepsilon y)$;
(iii.)	$x \subseteq y$	*see*	$\forall z(z \varepsilon x \rightarrow z \varepsilon y)$;
(iv.)	$x \subset y$	*see*	$x \subseteq y \;\&\; x \neq y$.

Nas definições, a expressão *see* será utilizada como símbolo de definição meta-linguística. As expressões definidas acima são lidas da maneira usual, e.g. $x \subseteq y$ é lida x está contido em y e $x \subset y$, x está contido propriamente em y.

Nesta secção, o símbolo $\vdash$ será utilizado no lugar de $\vdash_T$ e pensamos sempre no conjunto de todos os axiomas de T. O fato de um teorema de T ser enunciado antes da apresentação de um axioma significa, simplesmente, que aquele axioma não é necessário para a dedução do teorema. As deduções dos teoremas não estão rigorosamente formalizadas, mas são tais que sempre é possível se obter uma dedução formal a partir dos axiomas de T.

2.1.3. *Proposição.*

(i.) $\vdash \forall z(z \varepsilon x \leftrightarrow z \varepsilon y) \leftrightarrow x = y$;

(ii.) $\vdash (x \subseteq y \ \& \ y \subseteq x) \leftrightarrow x = y$.

Demonstração. Imediata, como para a maioria das proposições que se seguem.

2.1.4. *Proposição.*

(i.) $\vdash x \subseteq x$;

(ii.) $\vdash x \subseteq y \ \& \ y \subseteq z \rightarrow x \subseteq z$.

A seguir, apresentamos as primeiras propriedades dos *níveis*, como serão chamadas as constantes V_1, V_2, ...

2.1.5. *Axiomas estruturais.*

(T.II) $x \varepsilon V_n \rightarrow x \subseteq V_n$.

(T.III) $x \subseteq V_n \rightarrow x \varepsilon V_{n+1}$.

Seguindo a convenção adotada no capítulo 1, p. 10, (T.II) afirma que todos os níveis são *transitivos* ; observação análoga vale para (T.III) .

2.1.6. *Proposição.* $\vdash V_n \varepsilon V_{n+1} \ \& \ V_n \subseteq V_{n+1}$.

2.1.7. *Proposição.* *Se* $p > n$, $\vdash V_n \varepsilon V_p \ \& \ V_n \subseteq V_p$.

A demonstração é feita por indução (meta-matemática) sobre a diferença p-n.

2.1.8. *Proposição.* $\vdash \forall t \forall u (t \in u \ \vee \ t = u \ \vee \ u \in t)$.

Demonstração. Existem três possibilidades para V_n e V_p, em função de n e p. Se $p < n$, $\vdash V_p \in V_n$, logo $\vdash V_p \in V_n \ \vee \ V_p = V_n \ \vee \ V_n \in V_p$. Se $p = n$ ou $n < p$, obtemos o mesmo resultado. Logo, por uma demonstração meta-matemática por casos, $\vdash V_p \in V_n \ \vee \ V_p = V_n \ \vee \ V_n \in V_p$. Aplicando *R3*, $\vdash \forall u (V_p \in u \ \vee \ V_p = u \ \vee \ u \in V_p)$. Aplicando novamente *R3*, obtemos a proposição.

Basicamente, a diferença fundamental entre T e T* está determinada pelo esquema de classificação que, no caso de T, para cada fórmula e cada nível, garante a existência da classe cujos elementos são os elementos do nível que satisfazem a fórmula. Em T*, a classe é sub-classe da classe universal, não existente em T.

2.1.9. *Esquema de classificação.*

(T.IV) $$\exists x \forall a_i (a_i \in x \leftrightarrow A(a_i) \ \& \ a_i \in V_{n-1}),$$

onde a_i é uma variável de primeira ou segunda espécie e $A(a_i)$ é uma fórmula em que x não ocorre.

Esta não é a formulação original apresentada por da Costa(3), mas é equivalente, eliminando-se a necessidade de se introduzir o classificador $\{\ldots : \ldots\}_n$ como símbolo primitivo. Este, um para cada $n \geq 2$, é introduzido por definição contextual.

2.1.10. *Definição.* Se $A(a_i)$ é uma fórmula e a_i é uma variável qualquer,

$$y \varepsilon \{a_i : A(a_i)\}_n \quad \textit{see} \quad \exists x(\forall a_i(a_i \varepsilon x \leftrightarrow a_i \varepsilon V_{n-1} \ \& \ A(a_i)) \ \& \ y \varepsilon x).$$

Utilizaremos esta definição constantemente, no que se segue. Passamos à apresentação da álgebra de classes.

2.1.11. *Definição.*

(i.) x/n *see* $\{z\colon z\varepsilon x\}_n$;

(ii.) $x \cup_n y$ *see* $\{z\colon z\varepsilon x \ \vee \ z\varepsilon y\}_n$;

(iii.) $x \cap_n y$ *see* $\{z\colon z\varepsilon x \ \& \ z\varepsilon y\}_n$.

A existência dos termos definidos em 2.1.11 é garantida pelo esquema de classificação.

2.1.12. *Proposição.*

(i.) $\vdash x \cup_n x = x/n$;

(ii.) $\vdash x \cap_n x = x/n$;

(iii.) $\vdash x \cup_n V_{n-1} = x/n$;

(iv.) $\vdash x \cap_n V_{n-1} = x/n$.

2.1.13. *Proposição.*

(i.) $\vdash x \cup_n y = y \cup_n x$;

(ii.) $\vdash x \cap_n y = y \cap_n x$.

2.1.14. *Proposição.*

(i.) $\vdash (x \cap_n y) \cap_n z = x \cap_n (y \cap_n z)$;

(ii.) $\vdash (x \cup_n y) \cup_n z = x \cup_n (y \cup_n z)$.

2.1.15. *Proposição.*

(i.) $\vdash x \cap_n (y \cup_n z) = (x \cap_n y) \cup_n (x \cap_n z)$;

(ii.) $\vdash x \cup_n (y \cap_n z) = (x \cup_n y) \cap_n (x \cup_n z)$.

Vamos definir o *complemento* e o *complemento relativo* (em um nível).

2.1.16. *Definição.*

(i.) $\sim_n x$ *see* $\{y : y \notin x\}_n$;

(ii.) $x \sim_n y$ *see* $x \cap_n (\sim_n y)$.

2.1.17. *Proposição.* $\vdash \sim_n (\sim_n x) = x/n$.

2.1.18. *Leis de de Morgan.*

(i.) $\vdash \sim_n (x \cup_n y) = (\sim_n x) \cap_n (\sim_n y)$;

(ii.) $\vdash \sim_n (x \cap_n y) = (\sim_n x) \cup_n (\sim_n y)$.

A seguir, definimos a *classe vazia*.

2.1.19. *Definição.* ϕ_n *see* $\{x : x \neq x\}_n$.

2.1.20. *Proposição.* *Para quaisquer* m *e* n, $\vdash \phi_m = \phi_n$.

Demonstração. Pela definição 2.1.19, para todo x, $x \notin \phi_n$ e $x \notin \phi_m$. Logo, pelo axioma de extensionalidade, $\phi_n = \phi_m$.

2.1.21. *Definição.* ϕ *see* ϕ_2.

Quando qualquer noção (definida) de T, como termos, relações, funções , etc., for tal que não existe dependência dos níveis, teremos uma noção universal, como é o caso da classe vazia.

2.1.22. *Proposição.*

(i.) $\vdash x \notin \phi$;

(ii.) $\vdash \phi \cup_n x = x/n$;

(iii.) $\vdash \phi \cap_n x = \phi$.

2.1.23. *Proposição.* $\vdash \sim_n \phi = V_{n-1} \ \& \sim_n V_{n-1} = \phi$.

2.1.24. *Definição.*

(i.) $\cup_n x$ *see* $\{y : \exists z(z \in x \ \& \ y \in z)\}_n$;

(ii.) $\cap_n x$ *see* $\{y : \forall z(z \in x \rightarrow y \in z)\}_n$.

2.1.25. *Proposição.* $\vdash \cap_n \phi = V_{n-1} \ \& \ \cup_n \phi = \phi$.

Demonstração. $z \in \cap_n \phi \leftrightarrow \forall y(y \in \phi \rightarrow z \in y) \ \& \ z \in V_{n-1}$. Como $\forall y(y \notin \phi)$, então $z \in \cap_n \phi \leftrightarrow z \in V_{n-1}$; $z \in \cup_n \phi \leftrightarrow z \in V_{n-1} \ \& \ \exists y(y \in \phi \ \& \ z \in y)$. Logo, para qualquer z, $z \notin \cup_n \phi$.

2.1.26. *Proposição.*

(i.) $\vdash \phi \subseteq x$;

(ii.) $\vdash y \subseteq V_{n-1} \rightarrow (x \subseteq y \leftrightarrow x \cup_n y = y)$;

(iii.) $\vdash y \subseteq V_{n-1} \rightarrow (x \subseteq y \leftrightarrow x \cap_n y = x)$.

2.1.27. *Proposição.*

(i.) $\vdash y \subseteq x \rightarrow (\cup_n y \subseteq \cup_n x) \;\&\; (\cap_n x \subseteq \cap_n y)$;

(ii.) $\vdash y \subseteq V_{n-1} \rightarrow (x \in y \rightarrow (x \subseteq \cup_n y))$;

(iii.) $\vdash x \in y \rightarrow \cap_n y \subseteq x$.

O axioma que se segue garante que toda sub-classe de um elemento de um nível é também elemento deste nível, e que os níveis são fechados por partes.

2.1.28. *Axioma das partes.*

(T.V) $\qquad x \in V_n \rightarrow \exists y(y \in V_n \;\&\; \forall z(z \subseteq x \rightarrow z \in y))$.

2.1.29. *Proposição.* $\quad \vdash x \in V_n \;\&\; z \subseteq x \rightarrow z \in V_n$.

Demonstração. Se $x \in V_n$, (T.V) garante que existe $y \in V_n$ tal que, se $x' \subseteq$ $\subseteq x$, então $x' \in y$. Logo, $z \in y$. Como V_n é transitivo, por (T.II) , então $z \in V_n$.

2.1.30. *Proposição.* $\quad \vdash \phi = \cap_n V_{n-1} \;\&\; V_{n-1} = \cup_n V_{n-1}$.

2.1.31. *Proposição.*

(i.) $\vdash (x \neq \phi \;\&\; x \subseteq V_{n-1}) \rightarrow \cap_n x \in V_{n-1}$;

(ii.) $\vdash \cap_n x \in V_{n-1} \rightarrow x \neq \phi$.

2.1.32. *Definição.* 2^x_n *sse* $\{y : y \subseteq x\}_n$.

2.1.33. *Proposição.* $\vdash 2_n^{V_{n-1}} = V_{n-1}$.

2.1.34. *Proposição.* $\vdash x \varepsilon V_{n-1} \rightarrow 2_n^x \varepsilon V_{n-1}$.

Não é possível provar que, para todo x, $x \notin x$. Mas, no caso particular dos níveis, o axioma das partes garante esta propriedade.

2.1.35. *Proposição.* $\vdash V_n \notin V_n$.

Demonstração. Seja $R_{n+1} = \{x : x \notin x\}_{n+1}$. Então, $R_{n+1} \subseteq V_n$. Se $V_n \varepsilon V_n$, então, pela proposição 2.1.29, $R_{n+1} \varepsilon V_n$. Logo, $R_{n+1} \varepsilon R_{n+1} \leftrightarrow R_{n+1} \notin R_{n+1}$, contradição.

2.1.36. *Definição.* $\{x\}_n$ *see* $\{y : x \varepsilon V_{n-1} \rightarrow x = y\}_n$.

2.1.37. *Proposição.* $\vdash x \varepsilon V_{n-1} \leftrightarrow \{x\}_n \varepsilon V_{n-1}$.

Demonstração. Se $x \varepsilon V_{n-1}$, então $2_n^x \varepsilon V_{n-1}$. Como $\{x\}_n \subseteq 2_n^x$, então $\{x\}_n \varepsilon V_{n-1}$. Se $x \notin V_{n-1}$, então $\{x\}_n = V_{n-1} \notin V_{n-1}$.

2.1.38. *Proposição.* $\vdash x \varepsilon V_{n-1} \rightarrow \forall y (y \varepsilon \{x\}_n \leftrightarrow y = x)$.

2.1.39. *Proposição.* $\vdash x \notin V_{n-1} \leftrightarrow \{x\}_n = V_{n-1}$.

2.1.40. *Proposição.*

(i.) $\vdash x \varepsilon V_{n-1} \rightarrow \cup_n \{x\}_n = x \ \& \ \cap_n \{x\}_n = x$;

(ii.) $\vdash x \notin V_{n-1} \rightarrow \cup_n \{x\}_n = V_{n-1} \ \& \ \cap_n \{x\}_n = \phi$.

O axioma da união, que se segue, substitui o axioma do par.

2.1.41. *Axioma da união.*

(T.VI) $x \in V_{n-1}$ & $y \in V_{n-1} \rightarrow x \cup_n y \in V_{n-1}$.

2.1.42. *Definição.* $\{x,y\}_n$ *see* $\{x\}_n \cup_n \{y\}_n$.

2.1.43. *Proposição.*

(i.) $\vdash (x \in V_{n-1}$ & $y \in V_{n-1}) \rightarrow \{x,y\}_n \in V_{n-1}$;

(ii.) $\vdash (x \notin V_{n-1} \vee y \notin V_{n-1}) \leftrightarrow \{x,y\}_n = V_{n-1}$;

(iii.) $\vdash \{x,y\}_n \in V_{n-1} \rightarrow (x \in V_{n-1}$ & $y \in V_{n-1})$.

2.1.44. *Proposição.* $\vdash x \in V_{n-1}$ & $y \in V_{n-1} \rightarrow (z \in \{x,y\}_n \leftrightarrow (z=x \vee z=y))$.

2.1.45. *Proposição.*

(i.) $\vdash x \in V_{n-1}$ & $y \in V_{n-1} \rightarrow (\cap_n \{x,y\}_n = x \cap_n y$ & $\cup_n \{x,y\}_n = x \cup_n y)$;

(ii.) $\vdash x \notin V_{n-1} \vee y \notin V_{n-1} \rightarrow (\cap_n \{x,y\}_n = \phi$ & $\cup_n \{x,y\}_n = V_{n-1})$.

Para as definições de *relação* e *função* , necessitamos da noção de *par ordenado*.

2.1.46. *Definição.* $(x,y)_n$ *see* $\{\{x\}_n, \{x,y\}_n\}_n$.

2.1.47. *Proposição.*

(i.) $\vdash x \in V_{n-1}$ & $y \in V_{n-1} \leftrightarrow (x,y)_n \in V_{n-1}$;

(ii.) $\vdash x \notin V_{n-1} \vee y \notin V_{n-1} \leftrightarrow (x,y)_n = V_{n-1}$.

2.1.48. *Proposição.* $\vdash x \in V_{n-1}$ & $y \in V_{n-1} \rightarrow \cup_n (x,y)_n = \{x,y\}_n$ &

$\& \cap_n(x,y)_n=\{x\}_n \ \& \cup_n \cup_n(x,y)_n=x\cup_n y \ \& \cup_n\cap_n(x,y)_n=x \ \& \cap_n\cup_n(x,y)_n=x\cap_n y \ \&$
$\& \cap_n\cap_n(x,y)_n=x$.

2.1.49. *Proposição.* $\vdash x\notin V_{n-1} \vee y\notin V_{n-1} \rightarrow \cup_n\cap_n(x,y)_n=\phi \ \& \cap_n\cap_n(x,y)_n=$
$=V_{n-1} \ \& \cap_n\cup_n(x,y)_n=\phi \ \& \cup_n\cup_n(x,y)_n=V_{n-1}$.

2.1.50. *Definição.*

(i.) $1^{\underline{a}}co_n x$ *see* $\cap_n\cap_n x$;

(ii.) $2^{\underline{a}}co_n x$ *see* $(\cap_n\cup_n x) \cup_n (\cup_n\cup_n x \sim_n \cup_n\cap_n x)$.

2.1.51. *Proposição.* $\vdash 2^{\underline{a}}co_n V_{n-1} = V_{n-1}$.

2.1.52. *Proposição.* $\vdash x\varepsilon V_{n-1} \ \& \ y\varepsilon V_{n-1} \rightarrow (1^{\underline{a}}co_n(x,y)_n=x \ \& \ 2^{\underline{a}}co_n(x,y)_n=y)$.

A proposição que se segue garante a propriedade fundamental dos pares ordenados.

2.1.53. *Proposição.*

$\vdash x\varepsilon V_{n-1} \ \& \ y\varepsilon V_{n-1} \rightarrow ((x,y)_n=(x',y')_n \leftrightarrow (x=x' \ \& \ y=y'))$.

Demonstração. Como $x\varepsilon V_{n-1}$ e $y\varepsilon V_{n-1}$, se $(x',y')_n=(x,y)_n$, então $(x',y')_n\varepsilon V_{n-1}$; logo, $x'\varepsilon V_{n-1}$ e $y'\varepsilon V_{n-1}$. Se $x\neq x'$, então $x'\notin\{x\}_n$ e $x\notin\{x'\}_n$. Logo, $\{x'\}_n\neq\{x\}_n$; então, como $\{x'\}_n\varepsilon(x',y')_n=(x,y)_n$, $\{x'\}_n=\{x,y\}_n$. Logo, $x\varepsilon\{x'\}_n$, contradição . De forma análoga se $y=y'$. A recíproca é imediata.

Passamos à noção de *relação*.

2.1.54. *Definição.* $rel_n(x)$ *see* $x \quad V_{n-1}$ & $\forall y(y \varepsilon x \to \exists x' \exists x''(y=(x',x'')_n)$.

Assim, uma relação de tipo n é uma classe de pares ordenados, contida em V_{n-1}.

2.1.55. *Definição.*

$x \circ_n y$ *see* $\{z : \exists x' \exists y' \exists z'(y' \varepsilon V_{n-1}$ & $z=(x',z')_n$ & $(x',y')_n \varepsilon y$ & & $(y',z')_n \varepsilon x)\}_n$.

A notação utilizada nesta definição pode ser simplificada da seguinte maneira. Tomamos, como definição de $x \circ_n y$, a classe

$\{(x',z')_n : \exists y'(y' \varepsilon V_{n-1}$ & $(x',y')_n \varepsilon y$ & $(y',z')_n \varepsilon x)\}_n$.

Esta notação será muito utilizada, no que se segue.

2.1.56. *Proposição.* $\vdash (x \circ_n y) \circ_n z = x \circ_n (y \circ_n z)$.

2.1.57. *Proposição.*

(i.) $\vdash x \circ_n (y \cup_n z) = (x \circ_n y) \cup_n (x \circ_n z)$;

(ii.) $\vdash x \circ_n (y \cap_n z) = (x \circ_n y) \cap_n (x \circ_n z)$.

2.1.58. *Definição.* x_n^{-1} *see* $\{(y,z)_n : (z,y)_n \varepsilon x\}_n$.

2.1.59. *Proposição.* $\vdash rel_n(x_n^{-1})$.

2.1.60. *Proposição.* $\vdash rel_n(x) \to (x_n^{-1})_n^{-1} = x$.

2.1.61. *Proposição.* $\vdash (x \circ_n y)_n^{-1} = y_n^{-1} \circ_n x_n^{-1}$.

Com estes resultados, podemos estudar as *funções* em $\mathbb{T}$.

2.1.62. *Definição.*

$fun_n(x)$ *see* $rel_n(x)$ & $\forall y \forall z \forall z'((y,z)_n \varepsilon x$ & $(y,z')_n \varepsilon x \rightarrow z=z')$.

2.1.63. *Proposição.* $\vdash fun_n(x)$ & $fun_n(y) \rightarrow fun_n(x \circ_n y)$.

2.1.64. *Definição.*

(i.) $dom_n(x)$ *see* $\{y : \exists z(z\varepsilon V_{n-1}$ & $(y,z)_n \varepsilon x)\}_n$;

(ii.) $Im_n(x)$ *see* $\{z : \exists y(y\varepsilon V_{n-1}$ & $(y,z)_n \varepsilon x)\}_n$.

As condições $z\varepsilon V_{n-1}$ e $y\varepsilon V_{n-1}$ impedem que, se $V_{n-1}\varepsilon x$, então $dom_n(x) = V_{n-1}$ e $Im_n(x) = V_{n-1}$, o que não estaria de acordo com as noções intuitivas de domínio e imagem.

2.1.65. *Proposição.* $\vdash dom_n(V_{n-1}) = V_{n-1}$ & $Im_n(V_{n-1}) = V_{n-1}$.

2.1.66. *Definição.* $x_n(y)$ *see* $\cap_n\{z : (y,z)_n \varepsilon x\}_n$.

Logo, se $fun_n(x)$, então $z \varepsilon x_n(y)$ se z pertence à segunda coordenada de cada elemento de x cuja primeira coordenada é y.

2.1.67. *Proposição.*

(i.) $\vdash x \subseteq V_{n-1} \rightarrow (y \not\varepsilon dom_n(x) \rightarrow x_n(y) = V_{n-1})$;

(ii.) $\vdash y \varepsilon \sim_n dom_n(x) \rightarrow x_n(y) = V_{n-1}$;

(iii.) $\vdash y \in dom_n(x) \rightarrow x_n(y) \in V_{n-1}$.

Demonstração.

(i.) Se $y \notin dom_n(x)$, $y \notin V_{n-1} \vee \forall z(z \in V_{n-1} \rightarrow (y,z)_n \notin x)$. Por definição, $x_n(y) = \cap_n \{z : (y,z) \in x\}_n$; como $z' \in \{z : (y,z)_n \in x\}_n \leftrightarrow z' \in V_{n-1}$ & $(y,z')_n \in x$, então, se $\forall z(z \in V_{n-1} \rightarrow (y,z)_n \notin x)$, resulta que $\{z : (y,z)_n \in x\}_n = \phi$; logo, $x_n(y) = V_{n-1}$; se $y \notin V_{n-1}$, então $\forall \dot{z}((y,z)_n = V_{n-1})$; como $V_{n-1} \notin x$, pois $x \subseteq V_{n-1}$, então $\forall z((y,z)_n \notin x)$. Logo, $\{z : (y,z)_n \in x\}_n = \phi$, e $x_n(y) = V_{n-1}$.

(ii.) Se $y \in \sim_n dom_n(x)$, $y \in V_{n-1}$ e $y \notin dom_n(x)$; logo, qualquer z, se $z \in V_{n-1}$, então $(y,z)_n \notin x$. Logo, $\{z : (y,z)_n \in x\}_n = \phi$, donde $x_n(y) = V_{n-1}$.

(iii.) Se $y \in dom_n(x)$, então $y \in V_{n-1}$ e $\exists z(z \in V_{n-1}$ & $(y,z)_n \in x)$. Logo, $\{z : (y,z)_n \in x\}_n \neq \phi$. Por 2.1.31.(i.), $x_n(y) \in V_{n-1}$.

A proposição seguinte garante que as funções (em cada nível) têm a caracterização intuitiva.

2.1.68. *Proposição.* $\vdash fun_n(x) \rightarrow x = \{(y,z)_n : z = x_n(y)\}_n$.

2.1.69. *Proposição.*

$$\vdash fun_n(x) \;\&\; fun_n(y) \rightarrow (x=y \leftrightarrow \forall \dot{z}(z \in V_{n-1} \rightarrow x_n(z) = y_n(z))) .$$

2.1.70. *Axioma da substituição.*

(T.VII) $\quad fun_n(x) \;\&\; dom_n(x) \in V_{n-1} \rightarrow im_n(x) \in V_{n-1}$.

2.1.71. *Axioma de amalgamação.*

(T.VIII) $\quad x \in V_{n-1} \rightarrow \cup_n x \in V_{n-1}$.

Estes axiomas possibilitarão a demonstração de que os níveis são fechados por *produtos cartesianos*.

2.1.72. *Definição.* $x \times_n y$ *see* $\{(x',y')_n : x' \varepsilon x \ \& \ y' \varepsilon y\}_n$.

2.1.73. *Proposição.* $\vdash x \varepsilon V_{n-1} \ \& \ y \varepsilon V_{n-1} \rightarrow \{x\}_n \times_n y \ \varepsilon \ V_{n-1}$.

Demonstração. Seja z a classe $\{(x',y')_n : x' \varepsilon y \ \& \ y' = (x,x')_n\}_n$. Logo, $dom_n(z) = y$ e $im_n(z) = \{x\}_n \times_n y$; aplicamos o axioma da substituição.

2.1.74. *Proposição.* $\vdash x \varepsilon V_{n-1} \ \& \ y \varepsilon V_{n-1} \rightarrow x \times_n y \ \varepsilon \ V_{n-1}$.

Demonstração. Seja z a classe $\{(x',y')_n : x' \varepsilon x \ \& \ y' = \{x'\}_n \times_n y\}_n$. Logo, $dom_n(z) = x$ e $\bigcup_n im_n(z) = x \times_n y$. Aplicamos a proposição anterior e os axiomas da substituição e de amalgamação.

2.1.75. *Proposição.* $\vdash fun_n(x) \ \& \ dom_n(x) \ \varepsilon \ V_{n-1} \rightarrow x \ \varepsilon \ V_{n-1}$.

2.1.76. *Definição.*

y_n^x *see* $\{z : fun_n(z) \ \& \ dom_n(z) = x \ \& \ im_n(z) \subseteq y\}_n$.

2.1.77. *Proposição.* $\vdash x \ \varepsilon \ V_{n-1} \ \& \ y \ \varepsilon \ V_{n-1} \rightarrow y_n^x \ \varepsilon \ V_{n-1}$.

2.1.78. *Definição.*

(i.) $z : x \overset{n}{\rightarrow} y$ *see* $fun_n(z) \ \& \ dom_n(z) = x \ \& \ im_n(z) \subseteq y$;

(ii.) z $sobre_n$ y *see* $fun_n(z) \ \& \ im_n(z) = y$;

(iii.) $inj_n(z)$ *see* $fun_n(z) \ \& \ \forall x \forall y (x \varepsilon dom_n(z) \ \& \ y \varepsilon dom_n(z) \ \& \ x \neq y \rightarrow z_n(x) \neq z_n(y))$.

2.1.79. *Proposição.* $\vdash \mathrm{inj}_n(z) \rightarrow \mathrm{fun}_n(z)\ \&\ \mathrm{fun}_n(z_n^{-1})$.

A seguir, discutimos as relações de *ordem*.

2.1.80. *Definição.*

(i.) $x\ z_n\ y$ *see* $(x,y)_n \in V_{n-1}\ \&\ (x,y)_n \in z$;

(ii.) $z\ \mathrm{con}_n\ x$ *see* $x \subseteq V_{n-1}\ \&\ \forall x'\forall x''(x'\in x\ \&\ x''\in x \rightarrow x'\ z_n\ x''\ \vee\ x'=x''\ \vee$
$\vee\ x''\ z_n\ x')$;

(iii.) $z\ \mathrm{tr}_n\ x$ *see* $x \subseteq V_{n-1}\ \&\ \forall y\forall y'\forall y''(y\in x\ \&\ y'\in x\ \&\ y''\in x\ \&\ y' z_n y''\ \&$
$\&\ y z_n y' \rightarrow y z_n y'')$.

Definições alternativas seriam obtidas com a cláusula $z \subseteq V_{n-1}$, em 2.1.80.(i.) e (ii.), mas, neste caso, se $\neg(z \subseteq V_{n-1})$, não seria possível que $z\ \mathrm{con}_n\ x$, mesmo que $x \subseteq V_{n-1}$ e a segunda parte da definição fosse satisfeita. Este é o caso da relação de pertinência, que será estudada mais adiante (2.1.91).

2.1.81. *Proposição.*

(i.) $\vdash x\ z_n\ y \rightarrow x\ z_{n+1}\ y$;

(ii.) $\vdash z\ \mathrm{con}_n\ x \rightarrow z\ \mathrm{con}_{n+1}\ x$;

(iii.) $\vdash z\ \mathrm{tr}_n\ x \rightarrow z\ \mathrm{tr}_{n+1}\ x$;

(iv.) $\vdash x\ z_n\ y\ \&\ z \subseteq z' \rightarrow x\ z'_n\ y$;

(v.) $\vdash z\ \mathrm{con}_n\ x\ \&\ z \subseteq z' \rightarrow z'\ \mathrm{con}_n\ x$

2.1.82. *Definição.* $z\ \mathrm{assim}_n\ x$ *see* $x\subseteq V_{n-1}\ \&\ \forall y\forall y'(y\in x \& y'\in x \& y z_n y' \rightarrow \neg(y' z_n y))$.

2.1.83. *Proposição.* $\vdash$ z assim_n x $\rightarrow$ z assim_{n+1} x .

2.1.84. *Definição.*

(i.) y z-1ºel$_n$ x *see* $x \subseteq V_{n-1}$ & $y \in x$ & $\forall y'(y' \in x \rightarrow \neg(y' z_n y))$;

(ii.) z BO_n x *see* z con_n x & $\forall y(y \subseteq x$ & $y \neq \phi \rightarrow \exists y'(y'$ z-1ºel$_n y))$.

2.1.85. *Proposição.* $\vdash$ z BO_n x $\rightarrow$ z tr_n x & z assim_n x .

Demonstração. Se $x' \varepsilon x$ e $x'' \varepsilon x$, então $\{x', x''\}_n \subseteq x$; se x' z-1ºel$_n$ $\{x', x''\}_n$, então $\neg(x'' z_n x')$. No outro caso $\neg(x' z_n x'')$. Logo, z assim_n x. Se é falso que z tr_n x, então existem y,y',y'' em x tais que $y z_n y'$, $y' z_n y''$, mas $\neg(y z_n y'')$. Como z con_n x e z assim_nx, então $y'' z_n y$, pois $y'' \neq y$. Logo, $\{y\}_n \cup_n \{y'\}_n \cup_n$ $\cup_n \{y''\}_n \subseteq x$ não possui primeiro elemento, contradição.

2.1.86. *Definição.*

y z-sec$_n$ x *see* $y \subseteq x$ & z BO_n x & $\forall x' \forall y'(x' \varepsilon x$ & $y' \varepsilon y$ & $x' z_n y' \rightarrow x' \varepsilon y)$.

2.1.87. *Proposição.*

$\vdash y \neq \phi$ & $\forall y'(y' \varepsilon y \rightarrow y'$ z-sec$_n$ x$)$ $\rightarrow$ $(\cup_n y$ z-sec$_n$x & $\cap_n y$ z-sec$_n$ x$)$

2.1.88. *Proposição.*

$\vdash$ y z-sec$_n$ x & $y \neq x$ $\rightarrow$ $\exists x'(x' \varepsilon x$ & $y = \{y' : y' \varepsilon x$ & $y' z_n x'\}_n)$.

Demonstração. Se y z-sec$_n$ x e $y \neq x$, então $x \sim_n y \neq \phi$. Logo, existe x' z-1ºel$_n$ $x \sim_n y$. Se $y' \varepsilon x$ e $y' z_n x'$, então $y' \not\varepsilon x \sim_n y$, logo $y' \varepsilon y$. Por outo lado, se $y' \varepsilon y$, como $x' \not\varepsilon y$ e y z-sec$_n$ x, é falso que $x' z_n y'$; logo, $y' z_n x'$. Assim, $y = \{y' :$ $y' \varepsilon x$ & $y' z_n x'\}_n$, terminando a demonstração.

2.1.89. *Proposição.* $\vdash y \text{ z-sec}_n\, x \;\&\; y' \text{ z-sec}_n\, x \;\rightarrow\; y \subseteq y' \vee y' \subseteq y.$

2.1.90. *Definição.*

$z\ x\text{-}y\ PO_n$ *see* $fun_n(z)\ \&\ x\ BO_n\ dom_n(z)\ \&\ y\ BO_n\ im_n(z)\ \&\ \forall x'\forall y'(x'\varepsilon$ $\varepsilon dom_n(z)\ \&\ y'\varepsilon dom_n(z)\ \&\ x' x_n y' \rightarrow z_n(x') y_n z_n(y'))$.

Seguem-se as propriedades usuais das funções que preservam a ordenação. Os *ordinais* são definidos sem a utilização do axioma da regularidade, ao contrário de como é feito em Kelley(12).

2.1.91. *Definição.* E_n *see* $\{(x,y)_n : x \varepsilon y\}_n$.

2.1.92. *Definição.* $Ord_n(x)$ *see* $E_n\ BO_n\ x\ \&\ \forall y(y \varepsilon x \rightarrow y \subseteq x)$.

2.1.93. *Proposição.* $\vdash Ord_n(x) \rightarrow x \notin x$.

Demonstração. Como $E_n\ BO_n\ x$, então E_n assim$_n$ x; logo, $x \notin x$.

2.1.94. *Proposição.*

$\vdash Ord_n(x)\ \&\ y \subseteq x\ \&\ y \neq x\ \&\ \forall z(z\varepsilon y \rightarrow z\subseteq y) \rightarrow y \varepsilon x.$

2.1.95. *Proposição.* $\vdash Ord_n(x)\ \&\ Ord_n(y) \rightarrow x \subseteq y \vee y \subseteq x$.

Demonstração. Temos que, para todo z, $z\varepsilon(x\cap_n y) \rightarrow z\ (x\cap_n y)$. Logo, por 2.1.94, $x\cap_n y \varepsilon x$ ou $x\cap_n y = x$. No segundo caso, $x \subseteq y$. Se $x\cap_n y \varepsilon x$, então é impossível que $x\cap_n y \varepsilon y$, pois senão $x\cap_n y \varepsilon x\cap_n y$, o que não pode acontecer, pois $E_n\ BO_n\ (x\cap_n y)$. Por 2.1.94, $x\cap_n y = y$, e resulta que $y \subseteq x$.

2.1.96. *Proposição.*

(i.) $\vdash \mathrm{Ord}_n(x)\ \&\ \mathrm{Ord}_n(y) \ \rightarrow\ x \varepsilon y\ \vee\ x = y\ \vee\ y \varepsilon x$;

(ii.) $\vdash \mathrm{Ord}_n(x)\ \&\ y \varepsilon x \ \rightarrow\ \mathrm{Ord}_n(y)$.

2.1.97. *Definição* $\quad ON_n$ *see* $\{x : \mathrm{Ord}_n(x)\}_n$.

2.1.98. *Proposição.*

(i.) $\vdash \mathrm{Ord}_n(ON_n)\ \&\ ON_n \not\in V_{n-1}$;

(ii.) $\vdash y\ E_n\text{-sec}_n\ ON_n \ \rightarrow\ \mathrm{Ord}_n(y)$.

2.1.99. *Definição.*

(i.) $x < y$ *see* $x \varepsilon y$;

(ii.) $x \leq y$ *see* $x \varepsilon y\ \vee\ x = y$.

2.1.100. *Proposição.*

(i.) $\vdash \mathrm{Ord}_n(x)\ \&\ \mathrm{Ord}_n(y) \ \rightarrow\ (x \leq y \ \leftrightarrow\ x \subseteq y)$;

(ii.) $\vdash \mathrm{Ord}_n(x) \ \rightarrow\ x = \{y\colon y < x\ \&\ y \varepsilon ON_n\}_n$;

(iii.) $\vdash x \subseteq ON_n \ \rightarrow\ \mathrm{Ord}_n(\cup_n x)$;

(iv.) $\vdash x \subseteq ON_n\ \&\ x \neq \phi \ \rightarrow\ \cap_n x \varepsilon x\ \&\ (\cap_n x)\ E_n\text{-1ºel}_n\ x$.

2.1.101. *Definição.*

(i.) x_n^+ *see* $x \cup_n \{x\}_n$;

(ii.) x^+ *see* $x \cup_2 \{x\}_2$.

Quando estamos tratando com elementos de V_1, as duas últimas noções coincidem.

2.1.102. *Proposição.* $\vdash x \in ON_n \rightarrow \cup_n(x_n^+) = x$.

Vamos apresentar a definição de *restrição* , que será muito utilizada para funções.

2.1.103. *Definição.* $z|^n x$ *see* $z \cap_n (x \times_n V_{n-1})$.

2.1.104. *Proposição.* $\vdash fun_n(z) \rightarrow (fun_n(z|^n x) \;\&\; dom_n(z|^n x) = x \cap_n dom_n(z) \;\&$
$\&\; \forall y(y \in dom_n(z|^n x) \rightarrow (z|^n x)_n(y) = z_n(y)))$.

2.1.105. *Proposição.* $\vdash (fun_n(z) \;\&\; Ord_n(dom_n(z)) \;\&\; \forall y(y \in dom_n(z) \rightarrow z_n(y) =$
$= x_n(z|^n y)) \;\&\; fun_n(z') \;\&\; Ord_n(dom_n(z')) \;\&\; \forall y'(y' \in dom_n(z') \rightarrow z'_n(y') =$
$= x_n(z'|^n y'))) \rightarrow z \subseteq z' \vee z' \subseteq z$.

2.1.106. *Teorema de definição por indução.*

$\vdash \forall z(z \subseteq V_{n-1} \rightarrow \exists z'(fun_n(z') \;\&\; Ord_n(dom_n(z')) \;\&\; \forall x(x \in ON_n \rightarrow z'_n(x) =$
$= z_n(z'|^n x)))$.

Demonstração. Seja $z' = \{(x,y)_n : x \in ON_n \;\&\; \exists z''(fun_n(z'') \;\&\; Ord_n(dom_n(z'')) \;\&$
$\&\; \forall x'(x' \in dom_n(z'') \rightarrow z''_n(x') = z_n(z''|^n x')) \;\&\; (x,y)_n \in z'')\}_n$. É fácil mostrar que z' satisfaz as propriedades do enunciado do teorema. Além disso, a proposição anterior garante que z' é unica.

Notar que, se $dom_n(z') \neq ON_n$, então $z_n(z') = V_{n-1}$ e $z'_n(x) = V_{n-1}$, para todo $x \in ON_n$ tal que $dom_n(z') \leq x$. Se $z_n(\phi) = V_{n-1}$, então $z' = \phi$.

Para o estudo dos *inteiros* , i.e. ordinais finitos, necessitamos do axioma de infinidade.

2.1.107. *Axioma de infinidade.*

(T.IX) $\exists x(x \in V_1 \ \& \ \phi \in x \ \& \ \forall y(y \in x \rightarrow y^+ \in x)$.

2.1.108. *Proposição* $\vdash \phi \in V_1$.

2.1.109. *Definição.*

(i.) $\text{int}_n(x)$ *see* $\text{Ord}_n(x) \ \& \ (E_n)_n^{-1} \ BO_n \ x$;

(ii.) $\text{int}(x)$ *see* $\text{Ord}_2(x) \ \& \ (E_2)_2^{-1} \ BO_2 \ x$.

2.1.110. *Proposição.* $\vdash \text{int}(x) \leftrightarrow \text{int}_n(x)$.

Demonstração. É imediato que $\text{int}(x) \rightarrow \text{int}_n(x)$. Suponha que $\text{int}_n(x)$. Basta provar que $x \subseteq V_1$. Como $\phi \in V_1$ e $\text{int}_2(\phi)$, vamos supor $x \neq \phi$. Logo $\phi \in x$, pois $x \not\subseteq \phi$ e $x \neq \phi$. Seja $z = \{y: y \in x \ \& \ y \in V_1\}_2$. Logo, $\phi \in z$. Seja z' E_n^{-1}-1ºel$_n$ z. Então $z' \in x$ e $z' \in V_1$. Como $\text{Ord}_2(y')$, por (T.IX) , $\text{Ord}_2(y'^+)$. Logo $y'^+ \not\subseteq x$ e $x \subseteq V_1$.

2.1.111. *Definição.* ω *see* $\{x: \text{int}(x)\}_2$.

Vamos apresentar os postulados de Peano, para os inteiros de T .

2.1.112. *Postulados de Peano.*

(i.) $\vdash x \in \omega \rightarrow x^+ \in \omega$;

(ii.) $\vdash \phi \in \omega$ & $(x \in \omega \rightarrow x^+ \neq \phi)$;

(iii.) $\vdash x \in \omega$ & $y \in \omega$ & $x^+ = y^+ \rightarrow x = y$;

(iv.) $\vdash x \quad \omega$ & $\phi \in x$ & $\forall y(y \in x \rightarrow y^+ \in x) \rightarrow x = \omega$.

2.1.113. *Proposição.* $\vdash \omega \in ON_2$.

Passamos agora a discutir o axioma da escolha e suas consequências, entre as quais a da possibilidade de se definir o *cardinal* de uma classe qualquer.

2.1.114. *Definição.*

$FE_n(z)$ *see* $fun_n(z)$ & $\forall x(x \in dom_n(z) \rightarrow z_n(x) \in x)$.

2.1.115. *Axioma da escolha.*

(T.X) $\exists z(FE_n(z)$ & $dom_n(z) = (V_{n-1} \sim_n \{\phi\})$.

Escrevemos $\{\phi\}$ no lugar de $\{\phi\}_n$ ou $\{\phi\}_2$, já que $\{\phi\}_2 = \{\phi\}_n$, para cada n. Como consequência do axioma da escolha, vamos mostrar que todo elemento de um nível pode ser bem-ordenado.

2.1.116. *Teorema da boa-ordem de Zermelo.*

$\vdash x \in V_{n-1} \rightarrow \exists y \exists z(y \in ON_n$ & $z: y \overset{\Omega}{\rightarrow} x$ & z $sobre_n$ x & $inj_n(z))$

Demonstração. Contruímos z por indução transfinita. Seja z' tal que $fun_n(z')$ e $z'_n(x') = C_n(x \sim_n (Im_n(x')))$, para cada classe $x' \in V_{n-1}$, onde C é a função escolha para V_{n-1}, cuja existência o axioma da escolha garante. Pelo teorema de definição por indução; existe z tal que $fun_n(z)$, $Ord_n(dom_n(z))$ e $z_n(y') =$

$= z'_n(z|^n y')$, para cada $y' \varepsilon ON_n$. Logo, $z_n(y') = C_n(x \sim_n im_n(z|^n y'))$; como C é uma função escolha, se $y' \varepsilon dom_n(z)$, então $z_n(y') \varepsilon x \sim_n (im_n(z|^n y'))$. Se $z_n(y') = z_n(y'')$, $y' < y''$, então $z_n(y'') \varepsilon im_n(z|^n y'')$, em contradição ao fato de que $z_n(y'') \varepsilon x \sim_n (im_n(z|^n y''))$; logo, $y'=y''$ e $inj_n(z)$. Com isso, é impossível que $dom_n(z) = ON_n$, senão, como $fun_n(z_n^{-1})$ e $dom_n(z_n^{-1}) \subseteq x \varepsilon V_{n-1}$, então, pelo axioma da substituição, $im_n(z_n^{-1}) = ON_n \varepsilon V_{n-1}$, contradição. Logo, $dom_n(z) \varepsilon ON_n$. Como $dom_n(z) \notin dom_n(z)$, $z_n(dom_n(z)) = V_{n-1}$ e $C_n(x \sim_n \sim_n im_n(z)) = V_{n-1}$, pois $C_n(x \sim_n im_n(z)) = z'_n(z) = z_n(dom_n(z))$ e $z = z|^n dom_n(z)$. Como $dom_n(C) = V_{n-1} \sim_n \{\phi\}$, $x \sim_n im_n(z) = \phi$. Logo, $x = im_n(z)$, pois $x \varepsilon V_{n-1}$, terminando a demonstração.

Seguem-se as consequências usuais do axioma da escolha, como o *princípio de maximalidade de Hausdorff*, *o lema de Zorn-Kuratowski*, *etc*. Passamos agora à uma breve apresentação dos cardinais em $\mathbb{T}$. Inicialmente, definimos uma relação de equivalência em V_{n-1}.

2.1.117. *Definição.*

$x \equiv_n y$ *see* $\exists z(z: x \overset{n}{\rightarrow} y$ & z sobre$_n$ y & $inj_n(z))$

2.1.118. *Definição.*

(i.) $card_n(x)$ *see* $Ord_n(x)$ & $\forall y(y \varepsilon ON_n$ & $y < x \rightarrow \neg(x \equiv_n y))$;

(ii.) C_n *see* $\{x: card_n(x)\}_n$.

2.1.119. *Proposição.* $\vdash E_n\ BO_n\ C_n$.

2.1.120. *Definição.* Cd^n *see* $\{(x,y)_n : x \equiv_n y \ \& \ y \in C_n\}_n$.

Para cada $x \in V_{n-1}$, $Cd^n_n(x)$ é o *cardinal* de x.

2.1.121. *Proposição.*

$\vdash fun_n(Cd^n) \ \& \ dom_n(Cd^n) = V_{n-1} \ \& \ Im_n(Cd^n) = C_n$.

2.1.122. *Proposição.*

(i.) $\vdash x \in V_{n-1} \rightarrow Cd^n_n(x) \equiv_n x$;

(ii.) $\vdash x \in V_{n-1} \ \& \ Cd^n_n(x) = Cd^n_n(y) \rightarrow y \in V_{n-1}$;

(iii.) $\vdash x \in V_{n-1} \rightarrow (Cd^n_n(x) = Cd^n_n(y) \leftrightarrow x \equiv_n y)$;

(iv.) $\vdash x \in C_n \rightarrow x \in V_{n-1} \ \& \ Cd^n_n(x) = x$;

(v.) $\vdash y \in ON_n \ \& \ x \quad y \rightarrow Cd^n_n(x) \leq y$;

(vi.) $\vdash y \in V_{n-1} \ \& \ x \quad y \rightarrow Cd^n_n(x) \leq Cd^n_n(y)$.

O teorema de Bernstein-Schröder, apresentado a seguir, pode ser demonstrado sem se recorrer ao axioma da escolha, mas, assumindo-se este último, a demonstração é bem simples.

2.1.123. *Teorema de Bernstein-Schröder.*

$\vdash x \in V_{n-1} \ \& \ y \in V_{n-1} \ \& \ x' \subseteq x \ \& \ y' \subseteq y \ \& \ x \equiv_n y' \ \& \ y \equiv_n x' \rightarrow$
$\rightarrow x \equiv_n y$.

Demonstração. Utilizando-se a proposição 2.1.122, $Cd^n_n(x) = Cd^n_n(y') \leq Cd^n_n(y) =$
$= Cd^n_n(x') \leq Cd^n_n(x)$.

2.1.124. *Proposição.*

$\vdash \mathrm{fun}_n(z)$ & $z \in V_{n-1} \rightarrow Cd_n^n(\mathrm{im}_n(z)) \leq Cd_n^n(\mathrm{dom}_n(z))$.

2.1.125. *Teorema de Cantor.*

$\vdash x \in V_{n-1} \rightarrow Cd_n^n(x) < Cd_n^n(2_n^x)$.

Demonstração. Seja $z = \{(x',\{x'\}_n)_n : x' \in x\}_n$. Logo, $z{:}x \overset{\text{p}}{\rightarrow} 2_n^x$ e $\mathrm{inj}_n(z)$. Assim, $Cd_n^n(x) \leq Cd_n^n(2_n^x)$. Se $Cd_n^n(x) = Cd_n^n(2_n^x)$, existe $z'{:}x \overset{\text{p}}{\rightarrow} 2_n^x$ tal que $\mathrm{inj}_n(z')$ e z' sobre_n 2_n^x . Logo, existe $x' \in x$ tal que $z_n'(x') = \{y: y \in x \ \&\ y \notin z_n(y)\}_n$. Logo , $x' \in z_n(x') \leftrightarrow x' \notin z_n(x')$; contradição.

2.1.126. *Proposição.* $\vdash C_n \notin V_{n-1}$.

2.1.127. *Proposição.* $\vdash \omega \subseteq C_n$ & $\omega \in C_n$.

A seguir, definimos quais são as classes finitas.

2.1.128. *Definição.* $\mathrm{fin}(x)$ *see* $Cd_2^2(x) \in \omega$.

2.1.129. *Proposição.*

(i.) $\vdash \mathrm{fin}(x) \rightarrow x \in V_n$;

(ii.) $\vdash \mathrm{fin}(x) \leftrightarrow \exists z(z \ BO_2\ x \ \&\ z_2^{-1}\ BO_2\ x)$.

Desta última proposição segue-se que uniões, intersecções, produto cartesiano, conjunto das partes, etc. de classes finitas são classes finitas. Se $x \subseteq V_1$, vamos escrever $Cd(x)$ no lugar de $Cd_2^2(x)$.

2.1.130. *Proposição.*

(i.) $\vdash fin(x)\ \&\ y \subseteq x\ \&\ Cd(x) = Cd(y) \rightarrow x = y$;

(ii.) $\vdash \neg fin(x)\ \&\ x \in V_{n-1} \rightarrow \exists y(y \subset x\ \&\ x \equiv_n y)$;

(iii.) $\vdash x \in ON_n \sim_n \omega \rightarrow Cd_n^n(x_n^+) = Cd_n^n(x)$;

(iv.) $\vdash x \in C_n \sim_n \omega \rightarrow Cd_n^n(x\ X_n\ x) = x$.

2.1.131. *Proposição.*

$$\vdash \exists z(z{:}ON_n \overset{n}{\rightarrow} C_n \sim_n \omega\ \&\ z\ E_n\text{-}E_n\ PO_n\ \&\ z\ sobre_n(C_n \sim_n \omega)).$$

Pode ser demonstrado que a função, cuja existência a proposição 2.1.131 garante, é única. Denotamos esta função por $\aleph^n$ (função *aleph* em V_{n-1}), e escrevemos $\aleph_\alpha^n$, para $\alpha \in ON_n$. A continuação do estudo dos ordinais e cardinais, como por exemplo o estudo da aritmética cardinal, é feita de maneira totalmente análoga àquela para a teoria de Kelley-Morse, sempre relativamente a um nível.

2.1.132. *Axioma da regularidade.*

(T.XI) $\qquad x \neq \phi\ \&\ x \in V_{n-1} \rightarrow \exists y(y \in x\ \&\ x \cap_n y = \phi)$.

2.1.133. *Proposição.* $\quad \vdash x \in V_{n-1} \rightarrow x \notin x$.

É interessante notar que podemos enfraquecer a condição de (T.XI).

2.1.134. *Proposição.*

$$\vdash x \neq \phi\ \&\ x \subseteq V_{n-1} \rightarrow \exists y(y \in x\ \&\ y \cap_n x = \phi) .$$

Demonstração. Se $x \subseteq V_{n-1}$, então $x \in V_n$, por (T.III). Logo, existe $y \in x$ tal que $y \cap_{n+1} x = \phi$. Como $y \in V_{n-1}$ e $x \subseteq V_{n-1}$, então $y \cap_n x = y \cap_{n+1} x$; logo, $y \cap_n x = \phi$.

Até o presente momento da exposição, não foi discutida a possibilidade de existirem classe que não pertençam a nenhum nível. Praticamente todas as propriedades até agora provadas valem apenas para elementos dos níveis, com exceção das consequências diretas do axioma de extensionalidade. O último axioma garante que toda classe é elemento de alguma classe de segunda espécie. Este axioma possibilitará uma caracterização mais precisa dos modelos super-completos de T (cf. teorema 3.1.3).

2.1.135. *Axioma de caracterização.*

(T.XII) $\forall x \exists t (x \in t)$.

Vamos introduzir a noção de *universo*, em T.

2.1.136. *Definição.* $U_n(x)$ *see* (vale a conjunção das condições abaixo:)

(i.) $x \in V_n$;

(ii.) $\forall y (y \in x \rightarrow y \subseteq x)$;

(iii.) $\forall y (y \in x \rightarrow 2^y_{n+1} \in x)$;

(iv.) $\forall y \forall z (y \in x \;\&\; z \in x \rightarrow \{y,z\}_{n+1} \in x)$;

(v.) $\forall y \forall z (y \in x \;\&\; z \in x \rightarrow y \times_{n+1} z \in x)$;

(vi.) $\forall y (\mathrm{fun}_{n+1}(y) \;\&\; \mathrm{dom}_{n+1}(y) \in x \rightarrow \bigcup_{n+1}(\mathrm{im}_{n+1}(y)) \in x)$.

2.1.137. *Definição.* $UN_n(x)$ *see* $U_n(x)$ & $\omega \varepsilon x$.

2.1.138. *Proposição.* *Se* $m < n$, $\vdash UN_n(V_m)$.

Com este resultado, encerramos o desenvolvimento de T.

2.2. O SISTEMA T*

A linguagem de T* é a mesma que a de T. Omitiremos as definições de T* que são idênticas às de T.

2.2.1. *Axioma de extensionalidade.*

(T.I) $\forall z(z \varepsilon x \leftrightarrow z \varepsilon y) \rightarrow x = y$.

São obtidas as consequências usuais do axioma de extensionalidade (cf. 2.1.3 e 2.1.4.).

2.2.2. *Axiomas estruturais.*

(T.II) $x \varepsilon V_n \rightarrow x \subseteq V_n$;

(T.III) $x \subseteq V_n \rightarrow x \varepsilon V_{n+1}$.

Valem as proposições 2.1.6, 2.1.7 e 2.1.8. Vamos apresentar o esquema de classificação de T*.

2.2.3. *Esquema de classificação.*

(T*.IV) $\exists x \forall a_i (a_i \in x \leftrightarrow A(a_i) \mathbin{\&} \exists y(a_i \in y))$,

onde a_i é uma variável de primeira ou segunda espécie e $A(a_i)$ é uma fórmula em que x não ocorre.

Assim, dada uma fórmula, existe a classe dos objetos que são elementos de alguma classe e que satisfazem a fórmula. Os elementos de alguma classe são os *conjuntos* e as classes que não são conjuntos são as *classes próprias*.

2.2.4. *Definição.*

(i.) $M(x)$ *sse* $\exists y(x \in y)$;

(ii.) $C(x)$ *sse* $\neg M(x)$.

O *classificador* é introduzido por definição contextual.

2.2.5. *Definição.* Se $A(a_i)$ é uma fórmula e a_i é uma variável de primeira ou segunda espécie,

$$y \in \{a_i : A(a_i)\} \quad \textit{sse} \quad \exists x(\forall a_i(a_i \in x \leftrightarrow M(a_i) \mathbin{\&} A(a_i)) \mathbin{\&} y \in x) .$$

Se x é a classe cuja existência (T*.IV) garante, a definição 2.2.5 nos dá a notação $\{a_i : A(a_i)\}$ para x.

2.2.6. *Definição.*

(i.) ϕ *sse* $\{x : x \neq x\}$;

(ii.) U *see* $\{x: x = x\}$.

2.2.7. *Definição.*

(i.) $x \cup y$ *see* $\{z: z \in x \vee z \in y\}$;

(ii.) $x \cap y$ *see* $\{z: z \in x \ \& \ z \in y\}$;

(iii.) $\cup x$ *see* $\{z: \exists y(y \in x \ \& \ z \in y)\}$;

(iv.) $\cap x$ *see* $\{z: \forall y(y \in x \rightarrow z \in y)\}$;

(v.) $\sim x$ *see* $\{y: y \notin x\}$;

(vi.) $x \sim y$ *see* $x \cap (\sim y)$.

2.2.8. *Axioma das partes.*

(T*.V) $x \in V_n \rightarrow \exists y(y \in V_n \ \& \ \forall z(z \subseteq x \rightarrow z \in y))$.

2.2.9. *Proposição.* $\vdash x \in V_n \ \& \ y \subseteq x \rightarrow y \in V_n$.

Observar que escrevemos $\vdash$ no lugar de $\vdash_{T*}$.

2.2.10. *Definição.* 2^x *see* $\{y: y \subseteq x\}$.

2.2.11. *Proposição.*

(i.) $\vdash (x \in V_n \rightarrow 2^x \in V_n) \ \& \ 2^U = U$;

(ii.) $\vdash V_n \notin V_n$.

2.2.12. *Definição.*

(i.) $\{x\}$ *see* $\{y: M(x) \rightarrow x = y\}$;

(ii.) $\{x,y\}$ *see* $\{x\} \cup \{y\}$;

(iii.) (x,y) *see* $\{\{x\},\{x,y\}\}$.

2.2.13. *Axioma da união.*

(T*.VI) $$x \varepsilon V_n \ \& \ y \varepsilon V_n \ \rightarrow \ x \cup y \ \varepsilon \ V_n .$$

2.2.14. *Proposição.*

(i.) $\vdash x \varepsilon V_n \ \rightarrow \ \{x\} \varepsilon V_n$;

(ii.) $\vdash x \varepsilon V_n \ \& \ y \varepsilon V_n \ \rightarrow \ \{x,y\} \varepsilon V_n$;

(iii.) $\vdash x \varepsilon V_n \ \& \ y \varepsilon V_n \ \rightarrow \ (x,y) \varepsilon V_n$.

2.2.15. *Proposição.*

$$\vdash x\varepsilon V_n \ \& \ y\varepsilon V_n \ \rightarrow \ ((x,y)=(x',y') \ \leftrightarrow \ x=x' \ \& \ y=y')$$

2.2.16. *Definição.*

(i.) $\mathrm{rel}(x)$ *see* $\forall z(z \varepsilon x \ \rightarrow \ \exists y \exists y'(z=(y,y')))$;

(ii.) $x \circ y$ *see* $\{z: \exists x' \exists y' \exists z'(z=(x',z') \ \& \ (x',y')\varepsilon y \ \& \ (y',z')\varepsilon x)\}$;

(iii.) x^{-1} *see* $\{(y,z): (z,y) \varepsilon x\}$;

(iv.) $\mathrm{fun}(x)$ *see* $\mathrm{rel}(x) \ \& \ \forall y \forall z \forall x'((x',y) \ \varepsilon x \ \& \ (x',z)\varepsilon x \ \rightarrow \ z=y)$;

(v.) $\mathrm{dom}(x)$ *see* $\{y: \exists z((y,z) \ \varepsilon \ x)\}$;

(vi.) $\mathrm{Im}(x)$ *see* $\{y: \exists z((z,y) \ \varepsilon \ x)\}$;

(vii.) $x(y)$ *see* $\bigcap\{z: (y,z) \ \varepsilon \ x\}$.

2.2.17. *Proposição.*

(i.) $\vdash x \not\varepsilon \ \mathrm{dom}(z) \ \rightarrow \ z(x) = \mho$;

(ii.) $\vdash z \subseteq V_n \ \rightarrow \ \forall y(y \ \varepsilon \ \mathrm{dom}(z) \ \leftrightarrow \ z(y) \ \varepsilon \ V_n)$;

(iii.) $\vdash \mathrm{fun}(z)\ \&\ z \subseteq V_n \rightarrow z = \{(y,y'): z(y)=y'\}$;

(iv.) $\vdash \mathrm{fun}(x)\ \&\ \mathrm{fun}(y)\ \&\ x \subseteq V_n\ \&\ y \subseteq V_n \rightarrow (x=y \leftrightarrow \forall z(z \in V_n \rightarrow x(z)=y(z)))$.

A seguir, apresentamos os axiomas da substituição e de amalgamação.

2.2.18. *Axioma da substituição.*

(T*.VII) $\mathrm{fun}(z)\ \&\ z \subseteq V_n\ \&\ \mathrm{dom}(z) \in V_n \rightarrow \mathrm{im}(z) \in V_n$.

2.2.19. *Axioma de amalgamação.*

(T*.VIII) $x \in V_n \rightarrow \bigcup x \in V_n$.

2.2.20. *Definição.*

(i.) $x \times y$ *see* $\{(x',y'): x' \in x\ \&\ y' \in y\}$;

(ii.) x^y *see* $\{z: \mathrm{fun}(z)\ \&\ \mathrm{dom}(z) = y\ \&\ \mathrm{im}(z) \subseteq x\}$.

2.2.21. *Proposição.*

(i.) $\vdash x \in V_n\ \&\ y \in V_n \rightarrow x \times y \in V_n$;

(ii.) $\vdash x \in V_n\ \&\ y \in V_n \rightarrow x^y \in V_n$.

Passamos às definições relativas às relações de *ordem*.

2.2.22. *Definição.*

(i.) $x z y$ *see* $(x,y) \in z$;

(ii.) z con x *see* $\forall y \forall y'(y \in x\ \&\ y' \in x \rightarrow yzy' \vee y=y' \vee y'zy)$;

(iii.) z tr x *see* $\forall y \forall x' \forall y'(y \in x\ \&\ y' \in x\ \&\ x' \in x\ \&\ yzx'\ \&\ x'zy' \rightarrow yzy')$;

(iv.) y z-1ºel x *see* $y \varepsilon x$ & $\forall y'(y' \varepsilon x \rightarrow \neg(y' z y))$;

(v.) z BO x *see* z con x & $\forall y(y \subseteq x$ & $y \neq \phi \rightarrow \exists y'(y'$ z-1ºel $y))$.

2.2.23. *Definição.*

(i.) E *see* $\{(x,y): x \varepsilon y\}$;

(ii.) $\mathrm{Ord}(x)$ *see* E BO x & $\forall y(y \varepsilon x \rightarrow y \subseteq x)$;

(iii.) ON *see* $\{x: \mathrm{Ord}(x)\}$;

(iv.) x^+ *see* $x \cup \{x\}$.

2.2.24. *Proposição.* $\vdash \mathrm{Ord}(x) \rightarrow x \notin x$.

2.2.25. *Axioma de infinidade.*

(T*.IX) $\exists x(x \varepsilon V_1$ & $\phi \varepsilon x$ & $\forall y(y \varepsilon x \rightarrow y^+ \varepsilon x))$.

2.2.26. *Definição.* ω *see* $\{x: \mathrm{Ord}(x)$ & E^{-1} BO $x\}$.

2.2.27. *Proposição.* $\vdash \phi \varepsilon V_n$ & $\omega \varepsilon V_n$.

2.2.28. *Definição.*

FE(z) *see* fun(z) & $\forall x(x \varepsilon \mathrm{dom}(z) \rightarrow z(x) \varepsilon x)$.

2.2.29. *Axioma da escolha.*

(T*.X) $\exists z(\mathrm{FE}(z)$ & $\mathrm{dom}(z) = U \sim \{\phi\})$.

2.2.30. *Axioma da regularidade.*

(T*.XI) $x \neq \phi \rightarrow \exists y(y \varepsilon x$ & $x \cap y = \phi)$.

2.2.31. *Axioma de caracterização.*

(T*.XII) $\quad M(x) \rightarrow \exists t(x \varepsilon t)$.

Como para T, é possível mostrar que os níveis de T* são *universos.*

CAPÍTULO 3

OS MODELOS NATURAIS DE $\mathbb{T}$ E $\mathbb{T}^*$

3.0. INTRODUÇÃO

A caracterização dos *modelos naturais* é parte fundamental do estudo semântico de teorias de conjuntos. Os resultados básicos, como as relações com cardinais fortemente inacessíveis e com modelos super-completos (cf. B.31 e 3.0.2), foram estabelecidos na série de artigos clássicos de Shepherdson(21). Os resultados foram obtidos para a teoria de von Neumann-Bernays-Gödel, mas se aplicam de maneira totalmente análoga à teoria de Kelley-Morse e, com algumas modificações (cf. Montague & Vaught (19)), à teoria de Zermelo-Fraenkel. Um modelo natural de uma teoria de conjuntos é um modelo cujo domínio é da forma $R(\alpha)$ (i.e. um elemento da hierarquia de von Neumann), e o símbolo relacional de pertinência da teoria é interpretado como sendo a relação de pertinência do domínio do modelo. Uma vez que, como vamos mostrar, a existência de cardinais fortemente inacessíveis está intimamente relacionada com a disponibilidade de modelos naturais, consideramos o *axioma de inacessibilidade*, ($\mathbb{ZF}$.XI), como parte integrante de $\mathbb{ZF}$ (cf. apêndice B).

Antes de passarmos à discussão sobre os modelos naturais de $\mathbb{T}$ e $\mathbb{T}^*$, vamos enunciar alguns resultados sobre os modelos naturais e super-completos da teoria de Kelley-Morse, cujos axiomas podem ser encontrados no apêndice C. Os modelos de $\mathbb{KM}$ são da forma (D,V^M,ε^M), onde D é o campo das classes, V^M o campo dos conjuntos e ε^M é a interpretação do símbolo relacional de pertinência de

KM (cf. apêndice A, sobre a semântica de primeira ordem).

3.0.1. *Definição.* Se D é um conjunto, ε_D é o conjunto de todos os pares (x,y) tais que $x \in D$, $y \in D$ e $x \in y$.

Vamos definir os modelos super-completos de KM.

3.0.2. *Definição.* $M = (D, V^M, \varepsilon^M)$ é um *modelo super-completo* de KM se e somente se M é um modelo de KM e são satisfeitas as seguintes condições:

(I.) ε^M é ε_D ;

(II.) Se $x \in D$ e $y \in x$, então $y \in V^M$;

(III.) Se $x \subseteq V^M$, então $x \in D$.

Esta é a definição como aparece em Shepherdson(21); é fácil mostrar que, para modelos de KM , as cláusulas (II.) e (III.) podem ser substituídas por:

(II.)' Se $x \in D$ e $y \in x$, então $y \in D$;

(III.)' Se $x \in D$ e $y \subseteq x$, então $y \in D$.

Assim, um modelo super-completo é um modelo cujo domínio é transitivo e fechado para sub-conjuntos de elementos, e o símbolo relacional ε é interpretado pela relação de pertinência restrita ao domínio do modelo. A seguir, temos a definição de modelo natural de KM.

3.0.3. *Definição.* $M = (D, V^M, \varepsilon^M)$ é um *modelo natural* de KM se e somente se

M for um modelo de KM e existir um ordinal α tal que $M = (R(\alpha), V^M, \varepsilon_{R(\alpha)})$.

As duas proposições que se seguem apresentam a caracterização completa dos modelos naturais de KM, em função dos modelos super-completos e dos cardinais fortemente inacessíveis. Pela proposição B.24, todo modelo natural de KM é modelo super-completo de KM. A proposição 3.0.5. nos garante a recíproca deste resultado.

3.0.4. *Proposição.* $M = (R(\alpha), V^M, \varepsilon_{R(\alpha)})$ *é um modelo natural de* KM *se e somente se* $M = (R(\beta+1), R(\beta), \varepsilon_{R(\beta+1)})$ *, onde* β *é um cardinal fortemente inacessível.*

3.0.5. *Proposição.* $M = (D, V^M, \varepsilon_D)$ *é um modelo super-completo de* KM *se e somente se existe um cardinal fortemente inacessível* α *tal que*

$$M = (R(\alpha+1), R(\alpha), \varepsilon_{R(\alpha+1)}).$$

Estes resultados serão utilizados na caracterização dos modelos naturais de T e T*.

3.1. MODELOS NATURAIS DE T

Seguindo-se a convenção estabelecida ao final do capítulo 1, os modelos de T são da forma

$$M = (D, V_1^M, V_2^M, \ldots, \varepsilon^M) ,$$

onde D é o campo dos objetos de primeira espécie, $\{V_1^M, V_2^M, \ldots\} \subseteq D$ é o campo dos objetos de segunda espécie e ε^M é a interpretação do símbolo relacional de de pertinência. A seguir, são apresentadas as definições de modelos super-completos e modelos naturais de T.

3.1.1. *Definição.* $M = (D, V_1^M, V_2^M, \ldots, \varepsilon^M)$ é um *modelo super-completo* de T se e somente se M é um modelo de T e são satisfeitas as seguintes condições:

(i.) ε^M é ε_D ;

(ii.) Se $x \in D$ e $y \in x$, então $y \in D$;

(iii.) Se $x \in D$ e $y \subseteq x$, então $y \in D$.

3.1.2. *Definição.* M é um *modelo natural* de T se e somente se M é modelo de T e existe um ordinal α tal que $M = (R(\alpha), V_1^M, V_2^M, \ldots, \varepsilon_{R(\alpha)})$.

O teorema que se segue fornece a caracterização dos modelos super-completos (e também dos modelos naturais) de T, e sua demonstração ocupará o restante desta secção.

3.1.3. *Teorema.*

$M = (D, V_1^M, V_2^M, \ldots, \varepsilon_D)$ *é um modelo super-completo de* T *se e somente se existem cardinais fortemente inacessíveis* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots$ *(*$i \geq 1$*, inteiro)* , *tais que*

$$M = (R(\beta), R(\alpha_1), R(\alpha_2), \ldots, \varepsilon_{R(\beta)}) ,$$

onde $\beta = \bigcup\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ *e, se* $1 \leq i < j$, i, j *inteiros,* $\alpha_i < \alpha_j$.

Este resultado é consequência do fato de que existe uma relação entre as noções de T (termos, operações e relações) e as noções de ZF, para uma interpretação $M = (D, V_1^M, V_2^M, \ldots, \varepsilon^M)$ satisfazendo as condições 3.1.1.(i.), (ii.) e (iii.) e, além disso, tal que, para cada $i \geq 1$, V_i^M satisfaz as condições 3.1.1.(ii.) e (iii.), i.e. se $x \in V_i^M$ e $y \in x$ ou $y \subseteq x$, então $y \in V_i^M$ (é imediato que ε^M restrita a V_i^M é $\varepsilon_{V_i^M}$, neste caso, pois V_i^M e D são transitivos). Uma tal interpretação de T é uma *interpretação super-completa* de T. Veremos que todo modelo super-completo de T é uma interpretação super-completa de T. A relação mencionada acima, existente entre as noções de T e de ZF, estabelece que as noções de T são *absolutas* (relativamente a ZF), num sentido que será esclarecido, para uma interpretação super-completa. Esta idéia de que as noções de uma teoria (de conjuntos) são absolutas para determinadas interpretações foi utilizada pela primeira vez por Gödel, em suas demonstrações de consistência relativa (Cf. Gödel(10)).

Antes de continuarmos, vamos estabelecer algumas convenções sobre a notação. Sejam M uma interpretação de T, $s = (s_1, s_2, \ldots) \in \Sigma^M$ e r um termo da linguagem de T, cujas variáveis ocorrem todas na lista $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$ (estamos considerando as variáveis ordenadas como no capítulo 1). Representamos $s^*(r)$ por

$$r^M|s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_n}| \,.$$

Analogamente, se A é uma fórmula da linguagem de T, cujas variáveis livres ocorrem todas na lista $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$, abreviamos a expressão s *satisfaz* A por

$$M \models A|s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_n}| \,.$$

Estas notações estão justificadas pelos lemas 1.2.8. e 1.2.9. Se, em T, $x \subseteq y$, escreveremos $Q(x,y)$, para simplificar o enunciado do lema que se segue, que afirma que a relação "estar contido" e a operação "partes de (no nível V_{n-1})" são absolutas para um modelo super-completo.

3.1.4. *Lema.* *Se* $M = (D, V_1^M, V_2^M, \ldots, \varepsilon_D)$ *for um modelo super-completo de* $\mathbb{T}$, $x \in D$ *e* $y \in D$, *então:*

(i.) $M \models Q|x,y|$ *se e somente se* $x \subseteq y$;

(ii.) *Se* $x \in V_{n-1}^M$, *então* $2_n^M|x| = P(x)$.

Demonstração.

(i.) Seja z qualquer, e suponha $z \in x$. Como D é transitivo, $z \in D$. Supondo que $M \models Q|x,y|$, então, como $z \in D$ e $z \in x$, $z \in y$. Logo, $x \subseteq y$. A recíproca é trivial.

(ii.) Suponha que $z \in 2_n^M|x|$; então $z \in D$ e, como "$\subseteq$" é absoluto, $z \subseteq x$; logo, $z \in P(x)$. Suponha que $z \in P(x)$. Logo, $z \subseteq x$. Por 3.1.1.(iii.), $z \in D$. Como $x \in V_{n-1}^M$, então , por 2.1.29 e por M ser modelo de $\mathbb{T}$, $z \in V_{n-1}^M$. Logo, $z \in 2_n^M|x|$.

Sejam $L_{\mathbb{T}}$ e $L_{\mathbb{KM}}$ as linguagens de $\mathbb{T}$ e $\mathbb{KM}$, respectivamente. Vamos relacionar as fórmulas de $L_{\mathbb{KM}}$ com as fórmulas de $L_{\mathbb{T}}$. Para cada fórmula de $L_{\mathbb{KM}}$, vamos obter uma fórmula de $L_{\mathbb{T}}$. Podemos considerar as variáveis da lógica de primeira ordem como sendo as variáveis de primeira espécie da lógica L, sem perda de generalidade.

3.1.5. *Definição.* Se A é uma fórmula de $L_{\mathbb{KM}}$ e V_i é uma constante de segunda espécie de $L_{\mathbb{T}}$, definimos A^i indutivamente (r_1 e r_2 são termos, B e C são fórmulas de L_{KM}):

a.) Se A é $r_1 = r_2$, então A^i é A.

b.) Se A é $r_1 \varepsilon r_2$, então A^i é A.

c.) Se A é $V(r_1)$, A^i é $r_1 \varepsilon V_i$.

d.) Se A é $\neg B$, então A^i é $\neg B^i$.

e.) Se A é $B \vee C$, então A^i é $B^i \vee C^i$.

f.) Se A é $\forall b_k B$, então A^i é $\forall b_k (b_k \subseteq V_i \rightarrow B^i)$.

Observando-se que os termos de L_{KM} são as variáveis, logo, variáveis de primeira espécie da lógica L, logo, termos de L_T, resulta que A^i é uma fórmula de L_T, por indução sobre o comprimento de A. A variável b_k é a k-ésima variável da lógica de primeira ordem, na ordem estabelecida para a definição da semântica de primeira ordem (cf. apêndice A).

Seja $M = (D, V_1^M, V_2^M, \ldots, \varepsilon_D)$ um modelo super-completo de $\mathbb{T}$, e consideremos $M_i = (P(V_i^M), V_i^M, \varepsilon_{P(V_i^M)})$, para cada $i \geq 1$, como interpretação para KM. Se $s \varepsilon \Sigma_{M_i}$ (cf. apêndice A), vamos definir uma sequência $s_o \varepsilon \Sigma^M$, a partir de s.

3.1.6. *Definição.* Se a_i é uma variável de primeira espécie, na ordem fixada no capítulo 1, $(s_o)_i = s\ (a_i)$, considerando-se a_i como variável da lógica de primeira ordem (se a_i é b_j, $(s_o)_i$ é a j-ésima componente se s) ; se a_i é uma variável de segunda espécie, $(s_o)_i = V_1^M$.

Com esta definição, conseguimos o seguinte resultado, fundamental para a demonstração do teorema 3.1.3.

3.1.7. *Lema.* *Se* M *é um modelo super-completo de* T, $s \in \Sigma_{M_i}$ $(M_i = (P(V_i^M), V_i^M, \varepsilon_{P(V_i^M)}))$, *e* A *é uma fórmula de* L_{KM}, *então* $s_o \in \Sigma^M$ *e* s *satisfaz* A *se e somente se* s_o *satisfaz* A^i. *(O resultado vale para cada* $i \geq 1$ *.)*

Demonstração. Para mostrar que $s_o \in \Sigma^M$, basta mostrar que $P(V_i^M) \subseteq D$. Como, por 2.1.6, $V_i^M \in V_{i+1}^M$, então $2_{i+2}^M |V_i^M| \in V_{i+1}^M \in D$, por 2.1.34. Pelo lema 3.1.4, $2_{i+2}^M |V_i^M| = P(V_i^M)$, pois $V_i^M \in V_{i+1}^M$. Logo, como D é transitivo, $P(V_i^M) \in D$, e pelo mesmo motivo, $P(V_i^M) \subseteq D$. Logo, $s_o \in \Sigma^M$.

A demonstração de que s satisfaz A se e somente se s_o satisfaz A^i é feita por indução sobre o comprimento de A, levando-se em conta a maneira como s_o é obtida de s. Vamos adotar a seguinte convenção: se b_j é uma variável da lógica de primeira ordem, b_j é a k_j-ésima variável da lógica L, i.e. b_j é a_{k_j}.

Caso 1. Se A é $b_j = b_p$, então A^i é A; logo, $s_j = s_p$ se e somente se $(s_o)_{k_j} = (s_o)_{k_p}$, pois $s_j = (s_o)_{k_j}$ e $s_p = (s_o)_{k_p}$, por definição.

Caso 2. Se A é $b_j \varepsilon b_p$, então A^i é A ; como $s_j \in P(V_i^M)$, $s_p \in P(V_i^M)$ e $\varepsilon_{P(V_i^M)} \subseteq \varepsilon_D$, o resultado é trivial.

Caso 3. Se A é $V(b_j)$, então A^i é $a_{k_j} \varepsilon V_i$. Se s satisfaz A, então $s_j \in V_i^M$, logo, $(s_o)_{k_j} \in V_i^M$; logo, s_o satisfaz A^i. Se s_o satisfaz A^i, então $(s_o)_{k_j} \in V_i^M$, logo $s_j \in V_i^M$ e s satisfaz A.

Caso 4. Se A é $\neg B$, então A^i é $\neg B^i$. Pela hipótese de indução, s não satisfaz B se e somente se s_o não satisfaz B^i. Logo, s satisfaz A se e somente se

s_o satisfaz A^i.

Caso 5. Se A é B v C, então A^i é B^i v C^i. Aplicamos a hipótese de indução, como para o caso 4.

Caso 6. Se A é $\forall b_j B$, A^i é $\forall a_{k_j}(a_{k_j} \subseteq V_i \rightarrow B^i)$.

Suponha que s satisfaz A. Logo, para toda sequência $s' \in \Sigma_{M_i}$, diferindo de s no máximo na j-ésima posição, s' satisfaz B. Seja $s_o' \in \Sigma^M$, diferente de s_o no máximo na k_j-ésima posição. Devemos mostrar que s_o' satisfaz $a_{k_j} \subseteq V_i \rightarrow B^i$, ou seja, que s_o' não satisfaz $a_{k_j} \subseteq V_i$ ou que s_o' satisfaz B^i. Suponhamos o contrário. Logo, s_o' satisfaz $a_{k_j} \subseteq V_i$ e s_o' não satisfaz B^i. Como s_o' satisfaz $a_{k_j} \subseteq V_i$, então $(s_o')_{k_j} \subseteq V_i^M$, pois as noções envolvidas são absolutas para M. Logo, $(s_o')_{k_j} \in P(V_i^M)$. Como s_o' difere de s_o apenas na k_j-ésima posição, então, se a_{k_p} é uma variável de primeira espécie qualquer, $(s_o')_{k_p} \in P(V_i^M)$. Seja então $s^1 \in \Sigma_{M_i}$ tal que $(s^1)_p = (s_o')_{k_p}$. (Lembrar que b_p é a_{k_p}). Resulta que s^1 difere de s no máximo na j-ésima posição; logo, s^1 satisfaz B. Como $s_o' = (s^1)_o$, então pela hipótese de indução, s^1 satisfaz B se e somente se $(s^1)_o$ satisfaz B^i. Resulta que s_o' satisfaz B^i, em contradição ao que foi suposto. Logo, s_o' satisfaz $a_{k_j} \subseteq V_i \rightarrow B^i$, donde s_o satisfaz A^i.

Por outro lado, suponha que s_o satisfaz A^i. Logo, toda sequência $s^1 \in \Sigma^M$, diferindo de s_o no máximo na k_j-ésima posição, satisfaz $a_{k_j} \subseteq V_i \rightarrow B^i$. Seja $s' \in \Sigma_{M_i}$, diferente de s no máximo na j-ésima posição. Então, $(s')_o$ difere de s_o no máximo na k_j-ésima posição, donde $(s')_o$ satisfaz $a_{k_j} \subseteq V_i \rightarrow B^i$.

Como $((s')_o)_{k_j} \varepsilon P(V_i^M)$, então $(s')_o$ satisfaz B^i. Pela hipótese de indução s' satisfaz B se e somente se $(s')_o$ satisfaz B^i. Logo, s' satisfaz B e s satisfaz A, terminando a demonstração.

Com este resultado, podemos obter a seguinte propriedade dos modelos super-completos de T.

3.1.8. *Lema.* *Se* $M = (D, V_1^M, V_2^M, \ldots, \varepsilon_D)$ *é um modelo super-completo de* T, *então*

$$M_i = (P(V_i^M), V_i^M, \varepsilon_{P(V_i^M)})$$

é um modelo super-completo de KM , *para cada* $i \geq 1$.

Demonstração. Em primeiro lugar, M_i satisfaz as condições (i.)-(iii.) da definição 3.0.2. A condição 3.0.2.(i.) é satisfeita pela definição de M_i. Se $x \varepsilon P(V_i^M)$ e $y \varepsilon x$, então $x \subseteq V_i^M$, logo $y \varepsilon V_i^M$, satisfazendo 3.0.2.(ii.). Se $x \subseteq V_i^M$, então $x \varepsilon P(V_i^M)$, satisfazendo 3.0.2.(iii.). Resta mostrar que os axiomas de KM são verdadeiros para M_i. Seja A um axioma de KM; por 3.1.7, se $s \varepsilon \Sigma_{M_i}$, então s satisfaz A se e somente se s_o satisfaz A^i. Se mostrarmos que A^i é verdadeira para M, então A é verdadeira para M_i. Vamos mostrar que assim é , para cada axioma de KM.

1. (KM.I) $\forall x \forall y (\forall z (z \varepsilon x \leftrightarrow z \varepsilon y) \rightarrow x = y)$.

Logo, $(KM.I)^i$ é $\forall x (x \subseteq V_i \rightarrow \forall y (y \subseteq V_i \rightarrow (\forall z (z \subseteq V_i \rightarrow (z \varepsilon x \leftrightarrow z \varepsilon y)) \rightarrow x = y)))$.

Devido ao fato de que V_i é transitivo, então, pelo axioma de extensionalidade de T, $(KM.I)^i$ é equivalente à fórmula

$\forall x \forall y (x \subseteq V_i \ \& \ y \subseteq V_i \ \rightarrow \ (\forall z (z \epsilon x \leftrightarrow z \epsilon y) \rightarrow x = y))$.

Esta fórmula é consequência imediata do axioma de extensionalidade de $\mathbb{T}$. Logo, é teorema de $\mathbb{T}$ e é verdadeira para M. Resulta que (KM.I) é verdadeira para M_i.

2. (KM.II) é o esquema de classificação de KM. Então, se A(y) é uma fórmula de L_{KM} em que x não ocorre, temos

$$\exists x \forall y (y \epsilon x \ \leftrightarrow \ V(y) \ \& \ A(y)).$$

Vamos denotar esta fórmula por B. Então, B^i é a fórmula

$\exists x (x \subseteq V_i \ \& \ \forall y (y \subseteq V_i \rightarrow (y \epsilon x \ \leftrightarrow \ y \epsilon V_i \ \& \ (A(y))^i)))$. Em $\mathbb{T}$, como, se $y \epsilon V_i$, então $y \subseteq V_i$ e $x \subseteq V_i$, B^i é equivalente a fórmula

$$\exists x \forall y (y \epsilon x \ \leftrightarrow \ y \epsilon V_i \ \& \ (A(y))^i),$$

que é uma instância de ($\mathbb{T}$.IV). Logo, (KM.II) é verdadeiro para M_i.

3. (KM.III) $\qquad V(x) \rightarrow \exists z (V(z) \ \& \ \forall y (y \ x \rightarrow y \epsilon z))$.

Logo, $(\text{KM.III})^i$ é a fórmula

$x \epsilon V_i \ \rightarrow \ \exists z (z \subseteq V_i \ \& \ z \epsilon V_i \ \& \ \forall y (y \subseteq V_i \rightarrow (y \subseteq x \rightarrow y \epsilon z)))$.

Em $\mathbb{T}$, esta fórmula é equivalente à fórmula

$x \epsilon V_i \ \rightarrow \ \exists z (z \epsilon V_i \ \& \ \forall y (y \subseteq x \rightarrow y \epsilon z))$,

que é uma instância de ($\mathbb{T}$.V). Logo, (KM.III) é verdadeira para M_i.

4. (KM.IV) $\qquad V(x) \ \& \ V(y) \ \rightarrow \ V(x \cup y)$.

Logo, $(\text{KM.IV})^i$ é $x \epsilon V_i \ \& \ y \epsilon V_i \ \rightarrow \ (x \cup y)^i \epsilon V_i$. Por definição, $z \epsilon (x \cup y) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow V(z) \ \& \ (z \epsilon x \lor z \epsilon y)$. Logo, $z \epsilon (x \cup y)^i \leftrightarrow z \epsilon V_i \ \& \ (z \epsilon x \lor z \epsilon y)$. Logo, $(x \cup y)^i =$ $= x \cup_{i+1} y$. Logo, $(\text{KM.IV})^i$ é

$$x\varepsilon V_i \ \&\ y\varepsilon V_i \ \rightarrow\ x\cup_{i+1} y\varepsilon V_i,$$

que é uma instância de (T.VI). Resulta que (KM.IV) é verdadeira para M_i.

5. (KM.V) $\qquad \forall x(\mathrm{fun}(x)\ \&\ V(\mathrm{dom}(x)) \ \rightarrow\ V(\mathrm{im}(x)))$.

Logo, $(\mathrm{KM.V})^i$ é $\forall x(x\subseteq V_i \rightarrow (((\mathrm{fun}(x))^i\ \&\ (\mathrm{dom}(x))^i\varepsilon V_i) \rightarrow (\mathrm{im}(x))^i\varepsilon V_i))$. Como foi feito para 4., é fácil mostrar que esta fórmula é equivalente a

$\forall x(\mathrm{fun}_{i+1}(x)\ \&\ \mathrm{dom}_{i+1}(x)\varepsilon V_i \ \rightarrow\ \mathrm{im}_{i+1}(x)\varepsilon V_i)$, que é uma instância de (T.VII). Vamos mostrar que, se $x\subseteq V_i$, então $(\mathrm{dom}(x))^i$ é $\mathrm{dom}_{i+1}(x)$. Por definição, $z\varepsilon\mathrm{dom}(x)$ se e somente se $V(z)$ e $\exists y((z,y)\varepsilon x)$. É uma simples verificação mostrar que $(z'\varepsilon(z,y))^i$ é a fórmula $z'\varepsilon(z,y)_{i+1}$. Logo, $(z\varepsilon\mathrm{dom}(x))^i$ é a fórmula $z\varepsilon V_i$ & $\&\exists y(y\subseteq V_i\ \&\ (z,y)_{i+1}\varepsilon x)$. Como $x\subseteq V_i$, então, se $(z,y)_{i+1}\varepsilon x$, resulta que $y\varepsilon V_i$, logo, que $y\subseteq V_i$. Assim, $(z\varepsilon\mathrm{dom}(x))^i$ se e somente se $z\varepsilon\mathrm{dom}_{i+1}(x)$. Como $(\mathrm{KM.V})^i$ é equivalente a uma instância de (T.VII), (KM.V) é verdadeira para M_i.

A demonstração para os axiomas (KM.VI), (KM.VII), (KM.VIII) e (KM.IX) é inteiramente análoga ao que foi feito até o momento. Vamos mostrar que (KM.X), o axioma da classe universal de KM, é verdadeira para M_i.

6. (KM.X) $\qquad V(x) \ \leftrightarrow\ \exists y(x\ \varepsilon\ y)$.

$(\mathrm{KM.X})^i$ é $x\ \varepsilon\ V_i \ \leftrightarrow\ \exists y(y\subseteq V_i\ \&\ x\ \varepsilon\ y)$. Como $x\varepsilon V_i \leftrightarrow V_i\subseteq V_i\ \&\ x\varepsilon V_i$ é teorema de T, então, por *II.1*, $(\mathrm{KM.X})^i$ é teorema de T. Logo, (KM.X) é verdadeira para M_i, terminando a demonstração.

Com este resultado, podemos obter uma primeira caracterização dos modelos super-completos de $\mathbb{T}$.

3.1.9. *Proposição.* *Se* $M = (D, V_1^M, V_2^M, \ldots, \varepsilon_D)$ *é um modelo super-completo de* $\mathbb{T}$, *então existem cardinais fortemente inacessíveis* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_j, \ldots$ *(*$j \geq 1$ *, inteiro), tais que* $V_i^M = R(\alpha_i)$ *(*$i \geq 1$ *, inteiro) e, se* $1 \leq j < k$, *inteiros, então* $\alpha_j < \alpha_k$.

Demonstração. Como $M_i = (P(V_i^M), V_i^M, \varepsilon_{P(V_i^M)})$ é um modelo super-completo de $\mathbb{T}$, por 3.1.8, então, por 3.0.5, existe um cardinal fortemente inacessível α_i tal que $V_i^M = R(\alpha_i)$. Como $V_i^M \varepsilon V_j^M$, se $i < j$, então $\alpha_i < \alpha_j$, por B.24.

Com a proposição que se segue, demonstramos a primeira parte do teorema 3.1.3.

3.1.10. *Proposição.* *Se* $M = (D, R(\alpha_1), R(\alpha_2), \ldots, \varepsilon_D)$ *é um modelo super-completo de* $\mathbb{T}$, *então* $D = R(\beta)$, *onde* $\beta = \cup\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$.

Demonstração. Por (T.XII), se $x \varepsilon D$, então existe um α_i tal que $x \varepsilon R(\alpha_i)$. Logo, $D = \cup\{R(\alpha_1), R(\alpha_2), \ldots\}$. Por B.24, existe um ordinal β tal que $D = R(\beta)$. Como $R(\alpha_i) \subseteq R(\beta)$, então $\alpha_i \leq \beta$, para todo $i \geq 1$; resulta que $\cup\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\} = \gamma \leq \beta$. Logo, $R(\gamma) \subseteq R(\beta)$. Por outro lado, $\alpha_i \varepsilon \alpha_{i+1} \leq \gamma$, logo, $\alpha_i \varepsilon \gamma$, para todo $i \geq 1$. Assim, $R(\alpha_i) \subseteq R(\gamma)$, para todo $i \geq 1$, donde $R(\beta) \subseteq R(\gamma)$. Resulta que $\beta = \cup\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$.

A demonstração de que a condição do teorema 3.1.3 é necessária é consequência imediata das proposições 3.1.9 e 3.1.10. A seguir, demonstramos que a condição é também suficiente.

3.1.11. *Proposição.* *Se* $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_i,\ldots$ *(i ≥ 1, inteiro) são cardinais fortemente inacessíveis tais que* $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$, *então*

$$M = (R(\beta), R(\alpha_1), R(\alpha_2), \ldots, \varepsilon_{R(\beta)})$$

é modelo de T, *onde* $\beta = \bigcup\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\}$.

Demonstração. É consequência da proposição B.24 que a interpretação M é uma interpretação super-completa para T. A demonstração se baseia no fato de que as noções de T são absolutas para M. Para simplificar a notação, vamos redefinir algumas noções de T.

a.) $Z(x)$ see $x=\phi$;

b.) $UN_n(x,y)$ see $x \cup_n y$;

c.) $INT_n(x,y)$ see $x \cap_n y$;

d.) $UNIT_n(x)$ see $\{x\}_n$;

e.) $PAR_n(x,y)$ see $\{x,y\}_n$;

f.) $POR_n(x,y)$ see $(x,y)_n$;

g.) $COM_n(x,y)$ see $x \sim_n y$.

A seguir, enunciamos o resultado sobre a relação entre as noções de T e de ZF. Sejam M como no enunciado da proposição, e x,y elementos de $R(\beta)$. Então:

(i.) $M \models Q|x,y|$ se e somente se $x \subseteq y$;

(ii.) $M \models Z(x)$ se e somente se $x = \phi$;

(iii.) Se $x \subseteq R(\alpha_{n-1})$ e $y \subseteq R(\alpha_{n-1})$, então $UN_n^M|x,y| = x \cup y$;

(iv.) Se $x \subseteq R(\alpha_{n-1})$ e $y \subseteq R(\alpha_{n-1})$, então $INT_n^M|x,y| = x \cap y$;

(v.) Se $x \in R(\alpha_{n-1})$ e $y \in R(\alpha_{n-1})$, então $UNIT_n^M|x| = \{x\}$, $PAR_n^M|x,y| = \{x,y\}$ e $POR_n^M|x,y| = (x,y)$;

(vi.) $M \models fun_n|x|$ se e somente se $x \subseteq R(\alpha_{n-1})$ e $fun(x)$;

(vii.) Se $x \subseteq R(\alpha_{n-1})$, então $dom_n^M|x| = dom(x)$ e $im_n^M|x| = im(x)$;

(viii.) Se $x \subseteq R(\alpha_{n-1})$ e $y \subseteq R(\alpha_{n-1})$, então $COM_n^M|x,y| = x \sim y$;

(ix.) $M \models FE_n|x|$ se e somente se $x \subseteq R(\alpha_{n-1})$, $fun(x)$ e se $z \in dom(x)$, $x(z) \varepsilon z$.

A demonstração destas propriedades é simples mas bastante longa. Como exemplos, mostraremos (ii.) e (iii.).

(ii.) Suponha que $M \models Z(x)$; logo, se $z \varepsilon R(\beta)$, então $z \not\varepsilon x$. Se $z \varepsilon x$, então, como $R(\beta)$ é transitivo, $z \varepsilon R(\beta)$. Logo, para qualquer z, $z \not\varepsilon x$, donde $x = \phi$. A recíproca é imediata.

(iii.) Suponha que $z \varepsilon UN_n^M|x,y|$;logo, $z \varepsilon R(\alpha_{n-1})$ e $z \varepsilon x$ ou $z \varepsilon y$. Logo $z \varepsilon x \cup y$. Por outro lado, se $z \varepsilon x \cup y$, então $z \varepsilon x$ ou $z \varepsilon y$. Logo, $z \varepsilon R(\alpha_{n-1})$ e $z \varepsilon R(\beta)$. Resulta que $z \varepsilon UN_n^M|x,y|$.

Procedemos de maneira análoga para os demais ítens, observando que $R(\beta)$ e $R(\alpha_i)$ ($i \geq 1$, inteiro) são transitivos e fechados para sub-conjuntos de elementos. A demonstração de que os axiomas de $\mathbb{T}$ são verdadeiros para M decorre das propriedades (i.)-(ix.) e segue as técnicas usuais deste tipo de demonstração. Como exemplos, vamos mostrar que o esquema de classificação (T.IV), o axioma da substituição (T.VII) e o axioma de caracterização (T.XII) são verdadeiros para M.

1. (T.IV) $\exists x \forall a_i (a_i \varepsilon x \leftrightarrow a_i \varepsilon V_{n-1} \,\&\, A(a_i))$, onde $A(a_i)$ é uma fórmula em

que x não ocorre e a_i é uma variável qualquer.

Sem perda de generalidade, podemos supor que a_i é a única variável livre de $A(a_i)$ (se existir alguma), caso contrário tomamos as generalizações das variáveis livres de $A(a_i)$, exceto a_i. Resulta que $A(a_i)$ é verdadeira para M se e somente se a fórmula obtida o for. Se a_i é uma variável de primeira espécie, tomamos o conjunto $x = \{y: y \in R(\alpha_{n-1})\ \&\ M \models A|x|\}$; logo, $x \subseteq R(\alpha_{n-1})$ e $x \in R(\beta)$. Se a_i é uma variável de segunda espécie, tomamos o conjunto $x = \{y: y \in R(\alpha_{n-1})\ \&\ y \in \{R(\alpha_1), R(\alpha_2), \ldots\}\ \&\ M \models A|y|\}$. Novamente, $x \in R(\beta)$. Logo, (T.IV) é verdadeiro para M.

2. (T.VII) $\quad fun_n(x)\ \&\ dom_n(x) \in V_{n-1} \rightarrow im_n(x) \in V_{n-1}$. Se $x \subseteq V^M_{n-1}$, $fun(x)$ e $dom(x) \in R(\alpha_{n-1})$, então, como α_{n-1} é fortemente inacessível, resulta que $M_{n-1} = (P(R(\alpha_{n-1}), R(\alpha_{n-1}), \varepsilon_{P(R(\alpha_{n-1}))})$ é modelo natural de KM, por 3.0.5. Logo, por (KM.V), $im(x) \in R(\alpha_{n-1})$. Assim, pelas propriedades (vi.) e (vii.) acima, obtemos que, se $M \models fun_n|x|$ e $dom^M_n|x| = dom(x)$, então $im^M_n|x| \in R(\alpha_{n-1})$. Logo, (T.VII) é verdadeira para M.

3. (T.XII) $\quad \forall x \exists t (x \in t)$. Se $x \in R(\beta)$, então, como $R(\beta) = \cup\{R(\alpha_1), R(\alpha_2), \ldots\}$, existe α_i tal que $x \in R(\alpha_i)$. Logo, (T.XII) é verdadeira para M, terminando a demonstração.

3.2. MODELOS NATURAIS DE T*

Os modelos de T* são da forma $M = (D, V^M_1, V^M_2, \ldots, \varepsilon^M)$. As definições de interpretações super-completas, modelos super-completos e modelos naturais de T* são idênticas às definições correspondentes para T. A versão do teorema 3.1.3

para T^* é enunciada a seguir.

3.2.1. *Teorema.*

$M = (D, V_1^M, V_2^M, \ldots, \varepsilon_D)$ *é um modelo super-completo de* T^* *se e somente se existem cardinais fortemente inacessíveis* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots$ *($i \geq 1$, inteiro) tais que* $M = (R(\beta+1), R(\alpha_1), R(\alpha_2), \ldots, \varepsilon_{R(\beta+1)})$, *onde* $\beta = \cup\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ *e, se* $1 \leq i < j$, i, j *inteiros,* $\alpha_i < \alpha_j$.

A demonstração do teorema 3.2.1 é totalmente análoga à demonstração do teorema 3.1.3. Adotamos para T^* as mesmas convenções estabelecidas para T na secção anterior, com modificações óbvias. Dada uma fórmula de L_{KM}, obtemos uma fórmula de L_{T^*} da maneira como prescreve a definição 3.1.5. Também, para um modelo super-completo $M = (D, V_1^M, V_2^M, \ldots, \varepsilon_D)$ de T^*, tomamos $M_i = (P(V_i^M), V_i^M, \ldots, \varepsilon_{P(V_i^M)})$ e, se $s \in \Sigma_{M_i}$, definimos s_o como em 3.1.6. O lema que se segue é demonstrado exatamente da mesma maneira que o lema 3.1.7.

3.2.2. *Lema.* *Se* M *é um modelo super-completo de* T^* *e* $s \in \Sigma_{M_i}$, *então* $s_o \in \Sigma^M$ *e, se* A *é uma fórmula de* L_{KM}, s *satisfaz* A *se e somente se* s_o *satisfaz* A^i.

Com este resultado, mostramos que M_i é modelo super-completo de KM, sendo suficiente mostrar que, se A é um axioma de KM, A^i é uma fórmula verdadeira para M. Assim, pela proposição 3.0.5, para cada $i \geq 1$, existe um cardinal fortemente inacessível α_i tal que $V_i^M = R(\alpha_i)$ e $\alpha_i < \alpha_j$, se $i < j$. A proposição que se segue garante que a condição do teorema 3.2.1 é necessária.

3.2.3. *Proposição. Se* $M = (D, R(\alpha_1), R(\alpha_2), \ldots, \varepsilon_D)$ *é um modelo super-completo de* T^*, *então* $D = R(\beta+1)$, *onde* $\beta = \bigcup\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$.

Demonstração. Seja $V = \bigcup\{R(\alpha_1), R(\alpha_2), \ldots\}$. Então, por B.24, existe um ordinal β tal que $V = R(\beta)$. Como, por (T^*.XII), $\bigcup\{V_1, V_2, \ldots\} = U$, então $V \in D$. Seja $\gamma = \bigcup\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$. Como $\alpha_i \in \alpha_{i+1} \leq \gamma$, então $\alpha_i < \gamma$, para $i \geq 1$. Resulta que $R(\alpha_i) \subseteq R(\gamma)$, para $i \geq 1$, donde $R(\beta) \subseteq R(\gamma)$. Logo, $\beta \leq \gamma$. Como $R(\alpha_i) \subseteq R(\beta)$, para cada $i \geq 1$, então $\alpha_i \leq \beta$, logo $\gamma \leq \beta$. Assim, $\beta = \gamma$. Se $x \in D$, então se $y \in x$, $y \in D$. Logo, $y \in V = R(\beta)$. Assim $x \subseteq V$, logo $x \in P(V) = R(\beta+1)$. Se $x \in R(\beta+1)$, então $x \subseteq V$, logo $x \in D$. Resulta que $R(\beta+1) = D$.

Com a proposição que se segue, terminamos a demonstração do teorema 3.2.1.

3.2.4. *Proposição. Se* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots$ *(i* ≥ 1, *inteiro) são cardinais fortemente inacessíveis, tais que* $\alpha_i < \alpha_j$ *(*$1 \leq i < j$, *inteiros), então*

$$M = (R(\beta+1), R(\alpha_1), R(\alpha_2), \ldots, \varepsilon_{R(\beta+1)})$$

é modelo de T^*, *onde* $\beta = \bigcup\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$.

Demonstração. Como no caso de T, a demonstração é consequência de que as noções de T^* são absolutas para M, no sentido das propriedades (i.)-(ix.), p. 79 e 80. No caso de T^* inexistem as restrições quanto aos níveis, pois as definições são universais, No mais, a demonstração é análoga à demonstração da proposição 3.1.11.

CAPÍTULO 4

OS SISTEMAS H_Θ E H_{Θ^+}

4.0. INTRODUÇÃO

A finalidade deste capítulo é apresentar uma hierarquia de teorias de conjuntos, uma para cada ordinal $\alpha \neq \phi$, sendo todas formalizadas no cálculo de predicados de primeira ordem (com igualdade). Pretende-se, com isso, obter uma teoria de primeira ordem com características semelhantes às de T e T^*. Na secção 4.2 são estudados os modelo naturais de uma das teorias da hierarquia , H_ω. Como resultado, mostramos que T^* e H_ω possuem os mesmos modelos super-completos; de maneira mais precisa, dado um modelo super-completo de T^*, obtemos um modelo super-completo de H_ω, e vice-versa. Finalmente, na secção 4.3, apresentamos uma breve introdução à formulação da teoria de categorias em H_ω.

4.1. A HIERARQUIA

Seguiremos a notação apresentada no apêndice A. Denotaremos por H uma teoria qualquer da hierarquia. A linguagem de H (de todas as teorias da hierarquia) possui dois símbolos relacionais. O símbolo relacional binário de pertinência, denotado por ε, e um símbolo relacional unário N, tal que a fórmula N(x) é lida x é um nível. As definições de símbolos de H que são símbolos de T^* serão omitidas. O símbolo $\vdash$ será utilizado no lugar de $\vdash_H$. Iniciamos a apresentação com o axioma de extensionalidade.

4.1.1. *Axioma de extensionalidade.*

(H.I) $\forall z(z\varepsilon x \leftrightarrow z\varepsilon y) \rightarrow x=y.$

4.1.2. *Proposição.*

(i.) $\vdash \forall z(z\varepsilon x \leftrightarrow z\varepsilon y) \leftrightarrow x=y$;

(ii.) $\vdash x \subseteq x$;

(iii.) $\vdash x\subseteq y \;\&\; y\subseteq x \leftrightarrow x=y$;

(iv.) $\vdash x\subseteq y \;\&\; y\subseteq z \rightarrow x\subseteq z$.

A seguir, apresentamos o esquema de classificação, que garante a existência de classes que podem ser obtidas a partir de fórmulas.

4.1.3. *Esquema de classificação.*

(H.II) $\exists x\forall y(y\varepsilon x \leftrightarrow \exists z(y\varepsilon z) \;\&\; A(y)),$

onde $A(y)$ é uma fórmula em que x não ocorre.

A restrição $\exists z(y\varepsilon z)$ impede que se possa derivar a *antinomia de Russell* da maneira usual. Para se obter uma teoria *predicativa* (e que, no caso, seria finitamente axiomatizável), basta exigir que as variáveis quantificadas de $A(y)$ percorram apenas *conjuntos*, i.e. z tal que $M(z)$ (cf. def. 2.2.4.(i.)). Introduzimos o *classificador* por definição contextual.

4.1.4. *Definição.* Se $A(y)$ é uma fórmula,

$z \varepsilon \{y: A(y)\}$ *sse* $\exists x(\forall y(y\varepsilon x \leftrightarrow M(y) \;\&\; A(y)) \;\&\; z\varepsilon x).$

Resulta que, se a fórmula A(y) satisfizer a condição de (H.II), a classe $\{y: A(y)\}$ tem sua existência garantida.

4.1.5. *Proposição.*

(i.) $\vdash x \in U \leftrightarrow M(x)$;

(ii.) $\vdash x \subseteq U \;\&\; \phi \subseteq x$;

(iii.) $\vdash x \notin \phi$.

A seguir, apresentamos algumas propriedades da álgebra de classes de H.

4.1.6. *Proposição.*

(i.) $\vdash z \in x \cup y \leftrightarrow z \varepsilon x \vee z \varepsilon y$;

(ii.) $\vdash z \in x \cap y \leftrightarrow z \varepsilon x \;\&\; z \varepsilon y$.

4.1.7. *Proposição.*

(i.) $\vdash x \cup x = x \;\&\; x \cap x = x$;

(ii.) $\vdash x \cup U = U \;\&\; x \cap U = x$;

(iii.) $\vdash x \cup \phi = x \;\&\; x \cap \phi = \phi$.

4.1.8. *Proposição.*

(i.) $\vdash (x \cup y = y \cup x) \;\&\; (x \cap y = y \cap x)$;

(ii.) $\vdash (x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$;

(iii.) $\vdash (x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$;

(iv.) $\vdash x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$;

(v.) $\vdash x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$.

4.1.9. *Proposição.*

(i.) $\vdash \sim(\sim x) = x$;

(ii.) $\vdash \sim\phi = U \;\&\; \sim U = \phi$;

(iii.) $\vdash \sim(x \cup y) = (\sim x) \cap (\sim y)$;

(iv.) $\vdash \sim(x \cap y) = (\sim x) \cup (\sim y)$.

4.1.10. *Proposição.*

(i.) $\vdash \cap\phi = U \;\&\; \cup\phi = \phi$;

(ii.) $\vdash x \subseteq y \leftrightarrow x \cup y = y$;

(iii.) $\vdash x \subseteq y \leftrightarrow x \cap y = x$.

Vamos iniciar a apresentação das propriedades dos níveis. Basicamente, relativizamos os axiomas de KM aos níveis. O primeiro axioma afirma que os níveis são classes transitivas.

4.1.11. *Axioma de transitividade.*

(H.III) $\quad N(x) \rightarrow \forall y(y \in x \rightarrow y \subseteq x)$.

O axioma das partes garante que os níveis são fechados para a operação de partes.

4.1.12. *Axioma das partes.*

(H.IV) $\quad N(x) \rightarrow \forall y(y \in x \rightarrow \exists z(z \in x \;\&\; \forall z'(z' \subseteq y \rightarrow z' \in z)))$.

A próxima proposição expressa o fato de que os níveis são fechados para sub-classes de elementos.

4.1.13. *Proposição.* $\vdash N(x)\ \&\ y\varepsilon x\ \&\ z\subseteq y \rightarrow z\varepsilon x$.

Demonstração. Seja $z'\varepsilon x$ tal que , se $z\subseteq y$, então $z\varepsilon z'$; a existência de tal z' é garantida pelo axioma das partes. Logo, como $z\varepsilon z'$ e $z'\varepsilon x$, $z\varepsilon x$, pelo axioma de transitividade.

4.1.14. *Proposição.*

(i.) $\vdash N(x) \rightarrow (\bigcup x=x\ \&\ \bigcap x=\phi)$;

(ii.) $\vdash N(x)\ \&\ y\subseteq x \rightarrow (y\neq\phi \rightarrow \bigcap y\varepsilon x)$.

É interessante notar que as propriedades expressas pelas proposições 4.1.13 e 4.1.14 não valem se tomarmos U no lugar de x (sem supor N(U)), mas valeriam caso fosse exigido que todo conjunto pertencesse a algúm nível. Muitas das proposições que se seguem estão neste mesmo caso.

4.1.15. *Proposição.*

(i.) $\vdash 2^U = U$;

(ii.) $\vdash N(x)\ \&\ y\subseteq x \rightarrow (2^y\varepsilon x\ \&\ \forall z(z\varepsilon 2^y \leftrightarrow z\subseteq y))$.

Apesar de não ser possível mostrar que a classe universal é uma classe própria (cf. def. 2.2.4.(ii.)), pode-se mostrar que existe uma classe própria.

4.1.16. *Proposição.* $\vdash \exists x C(x)$.

Demonstração. Seja $R = \{x: x\notin x\}$. Se $M(R)$, então $R\varepsilon R \leftrightarrow R\notin R$.

4.1.17. *Proposição.* $\vdash N(x) \rightarrow x\notin x$.

4.1.18. *Proposição.*

(i.) $\vdash C(x) \rightarrow \{x\}=U$;

(ii.) $\vdash M(x) \rightarrow \forall y(y\varepsilon\{x\} \leftrightarrow y=x)$.

4.1.19. *Proposição.* $\vdash N(x) \rightarrow \forall y(y\varepsilon x \leftrightarrow \{y\}\varepsilon x)$.

Demonstração. Se $y\varepsilon x$, então $M(y)$, logo $\{y\}\subseteq 2^y\varepsilon x$. Logo $\{y\}\varepsilon x$. Se $\{y\}\varepsilon x$, então $\{y\}\subseteq x$, pelo axioma de transitividade. Se $M(y)$, então, por 4.1.18.(ii.) , $y\varepsilon\{y\}$, logo $y\varepsilon x$. Se $C(y)$, então, por 4.1.18.(i.), $\{y\}=U$. Logo $U\subseteq x$ e, como $x\subseteq U$, $x=U=\{y\}$. Resulta que $x\varepsilon x$, pois $\{y\}\varepsilon x$, em contradição ao resultado da proposição 4.1.17.

4.1.20. *Axioma da união.*

(H.V) $N(x) \rightarrow \forall y\forall z(y\varepsilon x \ \& \ z\varepsilon x \rightarrow y\cup z\varepsilon x)$.

4.1.21. *Proposição.*

(i.) $\vdash M(x) \ \& \ M(y) \rightarrow \forall z(z\varepsilon\{x,y\} \leftrightarrow z=x \vee z=y)$;

(ii.) $\vdash N(x) \rightarrow \forall y\forall z(y\varepsilon x \ \& \ z\varepsilon x \leftrightarrow \{y,z\}\varepsilon x)$.

(iii.) $\vdash N(x) \rightarrow \forall y\forall z(y\varepsilon x \ \& \ z\varepsilon x \leftrightarrow (y,z)\varepsilon x)$;

(iv.) $\vdash N(x) \ \& \ y\varepsilon x \ \& \ z\varepsilon x \rightarrow ((y,z)=(y',z') \leftrightarrow y=y' \ \& \ z=z')$.

A seguir, apresentamos algumas propriedades das relações e funções. As definições envolvidas podem ser encontradas na página 62.

4.1.22. *Proposição.*

(i.) $\vdash N(x) \ \& \ x'\subseteq x \ \& \ y\subseteq x \ \& \ z\subseteq x \rightarrow (x' \circ y) \circ z = x' \circ (y \circ z)$;

(ii.) $\vdash N(x) \ \& \ y\subseteq x \ \& \ rel(y) \rightarrow rel(y^{-1})$.

4.1.23. *Proposição.*

(i.) $\vdash x \notin dom(z) \rightarrow z(x) = U$;

(ii.) $\vdash N(x) \; \& \; z \subseteq x \rightarrow \forall y(y \varepsilon dom(z) \leftrightarrow z(x) \varepsilon x)$;

(iii.) $\vdash N(x) \; \& \; fun(z) \; \& \; z \subseteq x \rightarrow z = \{(y,y') : z(y)=y'\}$;

(iv.) $\vdash N(x) \; \& \; fun(z) \; \& \; fun(z') \; \& \; z \subseteq x \; \& \; z' \subseteq x \rightarrow (z=z' \leftrightarrow \forall y(y \varepsilon x \rightarrow z(y) =$
$= z'(y)))$.

4.1.24. *Axioma da substituição.*

(H.VI) $N(x) \rightarrow \forall z(fun(z) \; \& \; z \subseteq x \; \& \; dom(z) \varepsilon x \rightarrow im(z) \varepsilon x)$.

4.1.25. *Axioma de amalgamação.*

(H.VII) $N(x) \rightarrow \forall y(y \varepsilon x \rightarrow \bigcup y \varepsilon x)$.

4.1.26. *Proposição.* $\vdash N(x) \; \& \; y \varepsilon x \; \& \; z \varepsilon x \rightarrow y \times z \; \varepsilon \; x \; \& \; z^{y} \; \varepsilon \; x$.

4.1.27. *Definição.*

(i.) $z: x \rightarrow y$ *see* $fun(z) \; \& \; dom(z)=x \; \& \; im(z) \subseteq y$;

(ii.) z sobre y *see* $fun(z) \; \& \; im(z)=y$;

(iii.) $inj(z)$ *see* $fun(z) \; \& \; \forall x \forall y(x \varepsilon dom(z) \; \& \; y \varepsilon dom(z) \; \& \; x \neq y \rightarrow z(x) \neq z(y))$.

As definições acerca de relações de ordem e ordinais podem ser encontradas no capítulo 2, def. 2.2.22 e 2.2.23. Precisamos de mais algumas definições.

4.1.28. *Definição.*

(i.) $x < y$ *see* $x \; \varepsilon \; y$;

(ii.) $\mathrm{lim}(x)$ *sse* $\mathrm{Ord}(x)\ \&\ x\neq\phi\ \&\ \forall y(x\neq y^{+})$;

(iii.) $\mathrm{suc}(x)$ *sse* $\mathrm{Ord}(x)\ \&\ \exists y(x=y^{+})$.

O axioma que se segue exige que todo nível tenha como elemento um conjunto *infinito.*

4.1.29. *Axioma de infinidade.*

(H.VIII) $N(x) \rightarrow \exists y(y\in x\ \&\ \phi\in y\ \&\ \forall z(z\in y \rightarrow z^{+}\in y))$.

4.1.30. *Proposição.*

(i.) $\vdash \mathrm{Ord}(x) \rightarrow x\notin x$;

(ii.) $\vdash N(x) \rightarrow \phi\in x\ \&\ \omega\in x$.

Os dois axiomas apresentados a seguir, o axioma da escolha e o axioma de regularidade, são os últimos que são comuns a todas as teorias da hierarquia.

4.1.31. *Axioma da escolha.*

(H.IX) $\exists z(\mathrm{FE}(z)\ \&\ \mathrm{dom}(z) = U\sim\{\phi\})$.

4.1.32. *Axioma de regularidade.*

(H.X) $x\neq\phi \rightarrow \exists y(y\in x\ \&\ y\cap x=\phi)$.

Com os axiomas até agora apresentados está claro que uma interpretação tal que o único elemento do domínio é o conjunto vazio é modelo de H. Em seguida, introduzimos os axiomas necessários para que H possua uma estrutura de níveis de tipo limite. Exigiremos a existência de um nível, em primeiro lugar.

4.1.33. *Axioma de existência (I).*

(L.I) $\exists x(N(x))$.

Seja Θ um ordinal limite (i.e. tal que $lim(\Theta)$) fixo no nível cuja existência (L.I) garante. O axioma que se segue ordena os níveis segundo a boa-ordem de Θ.

4.1.34. *Axioma estrutural (I).*

(L.II) $\exists z(fun(z)$ & $dom(z)=\Theta$ & $\forall x(x\varepsilon\Theta \to N(z(x)))$ & $\forall x(N(x) \to x\varepsilon im(z))$ & & $\forall x\forall y(x\varepsilon\Theta$ & $y\varepsilon\Theta$ & $x\varepsilon y \to z(x)\varepsilon z(y)))$.

4.1.35. *Definição.* Se z é a função dada em (L.II) e $\alpha\varepsilon\Theta$, N_α+ *see* $z(\alpha)$.

O último axioma exige que todo conjunto seja elemento de algum nível.

4.1.36. *Axioma de caracterização.*

(L.III) $M(x) \to \exists y(N(y)$ & $x\varepsilon y)$.

A teoria cujos axioma são (H.I)-(H.X), (L.I)-(L.III) será denotada por H_Θ .

4.1.37. *Proposição.* $H_\Theta \vdash \forall x(N(x) \to M(x))$.

Demonstração. Se $N(x)$, então $x\varepsilon im(z)$, a função dada pelo axioma estrutural. Logo existe $\alpha\varepsilon\Theta$ tal que $x=z(\alpha)$. Como Θ é limite, $\alpha^+\varepsilon\Theta$ e $x\varepsilon z(\alpha^+)$.

4.1.38. *Proposição.* $H_\Theta \vdash \neg N(U)$.

4.1.39. *Proposição.* $H_\Theta \vdash C(U)$.

4.1.40. *Proposição.* $H_\Theta \vdash N(x) \;\&\; N(y) \rightarrow x\varepsilon y \vee x=y \vee y\varepsilon x$.

Vamos apresentar os axiomas para que a teoria possua uma estrutura de níveis de tipo sucessor. Em lugar de exigirmos que exista um nível, afirmamos que a classe universal é um nível.

4.1.41. *Axioma de existência.(II).*

(S.I) $N(U)$.

O axioma estrutural, neste caso, difere de (L.II) pois a imagem da função engloba apenas os níveis que são conjuntos. Seja Θ um ordinal qualquer em U.

4.1.42. *Definição.* $\mathcal{N}$ *see* $\{x: N(x)\}$.

4.1.43. *Axioma estrutural (II).*

(S.II) $\exists z(z:\Theta \rightarrow \mathcal{N} \;\&\; z \text{ sobre } \mathcal{N} \;\&\; \forall x\forall y(x\varepsilon\Theta \;\&\; y\varepsilon\Theta \;\&\; x\varepsilon y \rightarrow z(x)\varepsilon z(y)))$.

Denotamos a teoria cujos axiomas são (H.I)-(H.X), (S.I) e (S.II) por $H_\Theta+$. Observar que a estrutura de níveis de $H_\Theta+$ possui exatamente Θ^+ elementos. Se $\Theta=\phi$, $H_\Theta+$ é a teoria de Kelley-Morse, axiomatizada de maneira diferente. Na secção seguinte estudaremos os modelos naturais de uma das teorias da hierarquia apresentada. A teoria estudada será H_ω.

4.2. MODELOS NATURAIS DE H_ω

Uma interpretação para H_ω é da forma $M = (D, N^M, \varepsilon^M)$, onde D é um conjunto diferente do vazio, N^M é o sub-conjunto dos níveis e ε^M é a interpretação do símbolo de pertinência.

4.2.1. *Definição.* $M = (D, N^M, \varepsilon^M)$ é um *modelo super-completo* de H_ω se e somente se M é um modelo de H_ω e são satisfeitas as seguintes condições:

(I.) ε^M é ε_D (cf. def. 3.0.1) ;

(II.) Se $x \varepsilon D$ e $y \varepsilon x$, então $y \varepsilon D$;

(III.) Se $x \varepsilon D$ e $y \subseteq x$, então $y \varepsilon D$.

4.2.2. *Definição.* $M = (D, N^M, \varepsilon^M)$ é um *modelo natural* de H_ω se e somente se M é modelo de H_ω e existe um ordinal α tal que $M = (R(\alpha), N^M, \varepsilon_{R(\alpha)})$.

O resultado fundamental desta secção é enunciado a seguir.

4.2.3. *Teorema.*

Uma interpretação M *para* H_ω *é um modelo super-completo de* H_ω *se e somente se existem cardinais fortemente inacessíveis* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots$ *(*$i \geq 1$*, inteiro) tais que, se* $1 \leq i < j$*, inteiros,* $\alpha_i < \alpha_j$ *e*

$$M = (R(\beta+1), \{R(\alpha_1), R(\alpha_2), \ldots\}, \varepsilon_{R(\beta+1)}),$$

onde $\beta = \cup\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$.

A demonstração deste teorema segue a mesma linha das demonstrações dos teoremas 3.1.3 e 3.2.1. Basicamente, vamos relacionar cada nível com a classe universal de KM. Inicialmente observamos que as noções de H_ω são definidas exatamente da mesma maneira que as de KM, logo, como mostrou Shepherdson(15), as noções de H_ω são *absolutas* para qualquer interpretação satisfazendo as condições (I.)-(III.) da definição 4.2.1. Vamos determinar a forma de N^M, se M for um modelo super-completo de H_ω.

4.2.4. *Lema.* *Se* $M = (D, N^M, \varepsilon_D)$ *for um modelo super-completo de* H_ω *, então* $N^M = \{N_1^M, N_2^M, \ldots\}$, $i \geq 1$, *inteiro e, se* $1 \leq i < j$, *inteiros, então* $N_i^M \varepsilon N_j^M$.

(Adotamos as convenções estabelecidas no capítulo 3, p. 70 ; logo, N_i^M é a interpretação do termo N_i, definido em 4.1.35.)

Demonstração. Como as noções de H são absolutas para M, então, se $M \models N^M[x]$, para $x \varepsilon D$, então , para algum inteiro n de H_ω, $x = N_{n+1}^M$. A segunda parte do lema é consequência imediata do axioma (L.II).

Para cada fórmula da linguagem de KM e cada nível N_i de H_ω, vamos definir uma transformada , que será uma fórmula da linguagem de H_ω. Observar que as variáveis utilizadas são as mesmas e que os termos de L_{KM} (a linguagem de KM) são as variáveis.

4.2.5. *Definição.* Sejam A uma fórmula de L_{KM} e N_n um nível de H_ω; definimos A^n indutivamente.

a.) Se A é $b_i = b_j$, então A^n é A.

b.) Se A é $b_i \varepsilon b_j$, então A^n é A.

c.) Se A é $V(b_i)$, então A^n é $b_i \varepsilon N_n$.

d.) Se A é $\neg B$, então A^n é $\neg B^n$.

e.) Se A é $B \vee C$, então A^n é $B^n \vee C^n$.

f.) Se A é $\forall b_j B$, então A^n é $\forall b_j(b_j \subseteq N_n \rightarrow B^n)$.

Seja $M = (D, \{N_1^M, N_2^M, \ldots\}, \varepsilon_D)$ um modelo super-completo de H_ω. Como existe uma relação entre os ordinais de H_ω e os ordinais da meta-linguagem, faz sentido escrever $M_n = (P(N_n^M), N_n^M, \varepsilon_{P(N_n^M)})$ como interpretação para KM, para cada $n \geq 1$. Como a noção de partes é absoluta para M, então $P(N_n^M) \subseteq D$, logo $\Sigma_{M_n} \subseteq \Sigma_M$. Podemos enunciar a proposição análoga ao lema 3.1.7.

4.2.6. *Lema. Se* $M = (D, \{N_1^M, N_2^M, \ldots\}, \varepsilon_D)$ *é um modelo super-completo de* H_ω, *e se* $s \in \Sigma_{M_n}$ *e* A *é uma fórmula de* L_{KM}, *então* s *satisfaz* A *se e somente se* s *satisfaz* A^n.

Demonstração. A demonstração, por indução sobre o comprimento de A, é análoga à demonstração do lema 3.1.7. Vamos mostrar apenas para o caso em que A é da forma $\forall b_i B$. Logo, A^n é $\forall b_i(b_i \subseteq N_n \rightarrow B^n)$. Suponha que s satisfaz A. Logo, para toda sequência $s' \in \Sigma_{M_n}$, diferindo de s no máximo na i-ésima posição, s' satisfaz B. Seja $s'' \in \Sigma_M$, diferindo de s no máximo na i-ésima posição. Devemos mostrar que s'' satisfaz $b_i \subseteq N_n \rightarrow B^n$. Suponha o contrário: então s'' satisfaz $b_i \subseteq N_n$ e não satisfaz B^n. Como as noções de H_ω são absolutas para M, então $s''_i \in P(N_n^M)$. Como s'' difere de s no máximo na i-ésima posição, então $s'' \in \Sigma_{M_n}$. Logo, s'' satisfaz B se e somente se s'' satisfaz B^n, logo s'' satisfaz B^n, em contradição à hipótese assumida. Logo s'' satisfaz $b_i \subseteq N_n \rightarrow B^n$, donde s satisfaz A^n. A recíproca é trivial.

Demonstração de que a condição do teorema 4.2.3 *é necessária.*

Em primeiro lugar, vamos mostrar que se M é um modelo super-completo de H_ω então M_n, como definido na página anterior, é um modelo super-completo de KM. Pelo lema 4.2.6, basta mostrar que, se A é um axioma de KM , então A^n é verdadeiro para M, pois M_n satisfaz as condições (i.)-(iii.) de 3.0.2. A demonstração deste fato segue as mesmas linhas que a demonstração do lema 3.1.8. Assim, para cada $n \geq 1$, inteiro, existe um cardinal fortemente inacessível α_n tal que $N_n^M = R(\alpha_n)$ e, se $1 \leq n < m$, inteiros, $\alpha_n < \alpha_m$. Resta mostrar que $D = R(\beta+1)$, para $\beta = \cup\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$. A demonstração é praticamente idêntica à da proposição 3.2.3, utilizando-se o axioma estrutural (L.II), o axioma de caracterização (L.III) e a proposição 4.1.37.

Demonstração de que a condição do teorema 4.2.3 *é suficiente.*

Devido ao fato de que as noções de H_ω são absolutas para $M = (R(\beta+1), \{R(\alpha_1), R(\alpha_2), \ldots\}, \varepsilon_{R(\beta+1)})$, a demonstração é absolutamente análoga à demonstração da proposição 3.0.5 (demonstração de que a condição é suficiente).Vamos mostrar que os axiomas especiais, (L.I)-(L.III), são verdadeiros para M. Que (L.I) é verdadeiro para M é imediato pois $N^M \neq \phi$. Como os ordinais são absolutos para M, a função cuja existência (L.II) garante é a função que enumera $R(\alpha_1), R(\alpha_2), \ldots$. Para mostrar que (L.III) é verdadeiro para M, seja $x \varepsilon R(\beta+1)$ tal que existe $y \varepsilon R(\beta+1)$ com $x \varepsilon y$. Logo $x \varepsilon R(\beta)$, donde existe um α_n tal que $x \varepsilon R(\alpha_n)$.

Com este resultado, é fácil notar que, se M é um modelo super-completo de T* (cf. 3.2.1), então, com os cardinais fortemente inacessíveis que o teorema 3.2.1 garante que existem, é possível se obter um modelo super-completo de H_ω.

De maneira análoga, se M é um modelo super-completo de H_ω obtemos um modelo super-completo de T^*. Vale notar que o método utilizado para a caracterização dos modelos super-completos de H_ω pode ser utilizado, com a mesma finalidade, para as demais teorias apresentadas na secção 4.1.

4.3. CATEGORIAS EM H_ω

O que se segue é uma discussão informal sobre a formulação da noção de categoria em H_ω. Desde a introdução do conceito de categoria e das noções correlatas, tem sido pesquisada uma fundamentação conveniente para os novos objetos e as novas construções matemáticas introduzidas. Assim, do ponto de vista da teoria das categorias e suas aplicações, seria interessante se poder estudar a categoria de todos os conjuntos, de todos os grupos , etc. Estas categorias não existem em uma teoria de conjuntos como ZF. Mesmo em KM, podemos formar a categoria S de todos os conjuntos de KM , mas não podemos obter a categoria de todos os funtores de S em S. Este problema se coloca de uma maneira mais concreta (evitando o linguajar *platonista*): dadas duas categorias C_1 e C_2, quando seria legítimo se considerar a categoria de todos os funtores de C_1 em C_2? Várias alternativas foram propostas com a finalidade de se solucionarem estas e outras questões. Aquela que tem sido mais utilizada pelos matemáticos em geral é a de se trabalhar em teorias de conjuntos em que se assume a existência de um ou mais *universos*, cuja definição apresentamos a seguir (o desenvolvimento que se segue será realizado em H_ω).

4.3.1. *Definição.* *(x é um universo normal)*

$UN(x)$ *see* (a conjunção das seguintes condições:)

(i.) $y \in x \rightarrow y \subseteq x$;

(ii.) $\omega \in x$;

(iii.) $y \in x \rightarrow 2^y \in x$;

(iv.) $y \in x \ \& \ z \in x^y \rightarrow Im(z) \in x$.

4.3.2. *Proposição.* $\vdash N(x) \rightarrow UN(x)$.

As noções de *categoria*, *classe dos objetos* de uma categoria C (ob(C)), *classe dos morfismos* de uma categoria C (mor(C)), *classe dos morfismos entre* $x,y \in ob(C)$ ($hom_C(x,y)$), *funtor*, *transformação natural*, etc., podem ser encontradas no livro de MacLane(17).

4.3.3. *Definição.* Uma categoria C é dita *n-grande* se e somente se $ob(C) \subseteq N_n$ e $mor(C) \subseteq N_n$. Uma categoria C é *n-pequena* se e somente se $ob(C) \in N_n$ e $mor(C) \in N_n$.

Um exemplo de uma categoria n-grande é a categoria cujos objetos são os elementos de N_n e os morfismos são as funções entre estes objetos. Denotaremos esta categoria por CON_n, a categoria dos conjuntos pertencentes a N_n. Se C é n-grande, então C é n+1-pequena, pois se $x \subseteq N_n$, então $x \in N_{n+1}$. Pelo axioma da substituição, a categoria dos sub-conjuntos finitos de N_n é n-pequena (os morfismos são as funções entre os sub-conjuntos finitos de N_n). Se C_1 e C_2 são duas categorias n-pequenas então $C_1 \times C_2$, o produto de C_1 e C_2 (cf. MacLane(17) p. 36), é uma categoria n-pequena. Se C_1 ou C_2 for n-grande, então $C_1 \times C_2$ será n-grande.

4.3.4. *Definição.* Uma categoria n-grande C é *localmente* *n-pequena* se e somente se, para $x,y \in ob(c)$, $hom_C(x,y) \in N_n$ (cf. MacLane (16)).

CON_n é localmente n-pequena, pois se $x,y \in N_n$, então $hom_{CON_n}(x,y) = y^x \in N_n$. Dadas duas categorias C_1 e C_2, seja $C_1^{C_2}$ a categoria cujos objetos são os funtores de C_2 em C_1 e cujos morfismos são as transformações naturais entre tais funtores.

4.3.5. *Proposição.*

(i.) *Se* C_1 *e* C_2 *são* n-*pequenas, então* $C_1^{C_2}$ *é* n-*pequena;*

(ii.) *Se* C_1 *é* n-*grande e* C_2 *é* n-*pequena, então* $C_1^{C_2}$ *é* n-*grande;*

(iii.) *Se* C_1 *é localmente* n-*pequena e* C_2 *é* n-*pequena, então* $C_1^{C_2}$ *é localmente* n-*pequena ;*

(iv.) *Se* C_1 *e* C_2 *são* n-*grandes, então* $C_1^{C_2}$ *é* n+1-*pequena.*

Para a demonstração desta proposição, ver MacLane(17), p.16, com exceção do item (iv.), que é trivial. Quando C_2 é n-grande, mesmo com C_1 n-pequena, $C_1^{C_2}$ pode não ser n-grande. Seja $C_2 = CON_n$ e C_1 a categoria com dois objetos a e b, com um único morfismo (distinto das identidades) $a \rightarrow b$. Considerando-se a e b distintos, o cardinal de $ob(C_1^{C_2})$ é o mesmo de 2^{N_n}, que não pode estar contido em N_n. Outra categoria que pode ser obtida é CAT_n, a teoria de todas as categorias n-pequenas, cujos morfismos são os funtores entre tais categorias. É fácil notar que CAT_n é localmente n-pequena. A categoria das categorias n-grandes é uma categoria localmente n+1-pequena, pela proposição 4.3.5.(iv.).

Seguindo-se as idéias até aqui apresentadas, é possível se desenvolver toda a teoria de categorias em H_ω. As construções básicas da matemática, como a do *anel dos inteiros*, dos *corpos dos reais e dos complexos*, etc., podem ser realizadas já em N_1, e as construções realizadas em N_n podem ser estudadas, do ponto de vista da teoria das categorias, em N_{n+1} ou em N_{n+2}, de maneira análoga aos exemplos aqui tratados. Como último exemplo, vamos enunciar o lema de Yoneda para categorias localmente n-pequenas. A demonstração pode ser encontrada em MacLane(17), p.61.

4.3.6. *Lema de Yoneda.*

Se $S\colon C \to CON_n$ *é um funtor,* C *é localmente* n*-pequena, e* $x \in ob(C)$, *então existe uma bijeção*

$$f\colon NAT(hom_C(x,-),S) \to Sx$$

que leva cada transformação natural $\tau\colon hom_C(x,-) \dot{\to} S$ *em* $\tau_x id_x$*, a imagem da identidade* $id_x\colon x \to x$. *(*$NAT(S_1,S_2)$ *é o conjunto das transformações naturais de* S_1 *em* S_2*.)*

APÊNDICE A

A SEMÂNTICA DE PRIMEIRA ORDEM

As definições básicas e o desenvolvimento das propriedades da *lógica de primeira ordem* podem ser encontrados em Mendelson(18) ou em Chang&Keisler(1). Basicamente, seguiremos Chang&Keisler(1), exceto na maneira de introduzir a *semântica*, que será adaptada de Mendelson(18). A noção de *linguagem de primeira ordem* é a usual. As *constantes individuais* serão denotadas pela letra c, os *símbolos funcionais* pela letra f, e os *símbolos relacionais*, pela letra p (com ou sem índices, em todos os casos). Os *símbolos lógicos* que consideramos primitivos são: $\neg$ (não), $\vee$ (ou), $=$ (igual a) e $\forall$ (para todo). Existe uma quantidade enumerável de *variáveis individuais*, que consideramos ordenadas; nesta ordem, serão denotadas por $b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots$ $(i \geq 1)$. Os conjuntos dos *termos* e das *fórmulas* de uma linguagem são definidos da maneira usual.

Dada uma linguagem de primeira ordem L, uma *interpretação* M para L consiste em um conjunto D, diferente do vazio, que é o *domínio* de M, e uma *função de interpretação*, que associa a cada constante c um elemento c^M de D, a cada símbolo funcional f n-ário de L, uma operação n-ária f^M em D e, a cada símbolo relacional n-ário p de L, uma relação n-ária p^M em D. Intuitivamente, as variáveis percorrem os elementos de D. Seja Σ_M o conjunto das sequências enumeráveis de elementos de D. Vamos definir uma função s^*, para cada $s=(s_1,s_2,\ldots) \in \Sigma_M$, que associa a cada termo de L um elemento de D (M é uma interpretação para L).

A.1. *Definição.* A definição de s^* é indutiva:

(i.) Se r é b_j, $s^*(r)$ é s_j.

(ii.) Se r é uma constante individual c, $s^*(r)$ é c^M.

(iii.) Se r é $f(r_1,r_2,\ldots,r_n)$, $s^*(r)$ é $f^M(s^*(r_1),s^*(r_2),\ldots,s^*(r_n))$.

A.2. *Definição.* Sejam M uma interpretação para uma linguagem L, A uma fórmula de L e $s \in \Sigma_M$.

(i.) Se A é $r_1 = r_2$, s satisfaz A se e somente se $s^*(r_1) = s^*(r_2)$.

(ii.) Se A é $p(r_1,r_2,\ldots,r_n)$, s satisfaz A se e somente se $p^M(s^*(r_1),s^*(r_2),\ldots,s^*(r_n))$.

(iii.) Se A é $\neg B$, s satisfaz A se e somente se s não satisfaz B.

(iv.) Se A é $B \vee C$, s satisfaz A se e somente se s satisfaz B ou satisfaz C.

(v.) Se A é $\forall b_j B$, s satisfaz A se e somente se, para toda sequência $s' \in \Sigma_M$, diferente de s no máximo na j-ésima posição, s' satisfaz B.

A.3. *Definição.* Sejam M uma interpretação para uma linguagem L e A uma fórmula de L. A é *verdadeira para* M, em símbolos, $M \models A$ ou $\models_M A$, se e somente se toda sequência s de Σ_M satisfaz A.

A.4. *Definição.* Sejam M uma interpretação para uma linguagem L e S um conjunto de fórmulas de L. M é um *modelo de* S se e somente se toda fórmula de S é verdadeira para M.

APÊNDICE B

A TEORIA DE ZERMELO-FRAENKEL

Apresentamos, neste apêndice, um desenvolvimento sumário da teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF, abreviadamente). Seguiremos de perto o capítulo 2 de Drake(6). ZF é uma teoria de primeira ordem, cuja linguagem possui apenas um símbolo, o símbolo relacinal binário ε. Os símbolos $\neq$, $\not\varepsilon$, $\subseteq$, e $\subset$ são definidos da maneira usual.

B.1. *Axioma de extensionalidade.*

(ZF.I) $\forall z(z\varepsilon x \leftrightarrow z\varepsilon y) \rightarrow x=y$.

Utilizaremos o classificador {...:...}, definido contextualmente.

B.2. *Definição.* Se A(y) é uma fórmula onde y ocorre livre,

$x \in \{y: A(y)\}$ *see* $\exists z(\forall z'(z'\varepsilon z \leftrightarrow A(z)) \ \& \ x\varepsilon z)$.

B.3. *Axioma do conjunto vazio.*

(ZF.II) $\exists x \forall y(y \not\varepsilon x)$.

Por B.2 e B.3, existe o conjunto definido a seguir.

B.4. *Definição.* ϕ *see* $\{x: x \neq x\}$.

B.5. *Axioma do par.*

(ZF.III) $\exists x \forall y(y \in x \leftrightarrow y=z \vee y=z')$.

B.6. *Definição.*

(i.) $\{x,y\}$ *see* $\{z\colon z=x \vee z=y\}$;

(ii.) $\{x\}$ *see* $\{x,x\}$;

(iii.) (x,y) *see* $\{\{x\},\{x,y\}\}$.

B.7. *Axioma da união.*

(ZF.IV) $\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \exists z'(z \in z' \ \& \ z' \in x))$.

B.8. *Definição.* $\bigcup x$ *see* $\{y\colon \exists z(y \in z \ \& \ z \in x)\}$.

B.9. *Definição.* $x \cup y$ *see* $\bigcup\{x,y\}$.

B.10. *Axioma das partes.*

(ZF.V) $\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$.

B.11. *Definição.* $P(x)$ *see* $\{y\colon y \subseteq x\}$.

B.12. *Axioma dos sub-conjuntos.*

(ZF.VI) $\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \in x \ \& \ A(z))$,

onde $A(z)$ é uma fórmula em que z ocorre livre e y não ocorre.

B.13. *Definição.*

(i.) $x \cap y$ *see* $\{z\colon z \in x \ \& \ z \in y\}$;

(ii.) $x \sim y$ *see* $\{z\colon z \in x \ \&\ z \notin y\}$.

B.14. *Axioma da substituição.*

(ZF.VII) $\forall x \forall y \forall z(A(x,y) \ \&\ A(x,z) \rightarrow y=z) \rightarrow \forall z \exists x' \forall y(y \in x' \leftrightarrow \exists x(x \in z \ \&\ A(x,y)))$,

onde $A(x,y)$ é uma fórmula em que x e y ocorrem livres e x' não ocorre.

B.15. *Axioma de infinidade.*

(ZF.VIII) $\exists x(\phi \in x \ \&\ \forall y(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$.

B.16. *Axioma da escolha.*

(ZF.IX) $\forall x(x \in z \rightarrow (x \neq \phi \ \&\ \forall y(y \in z \rightarrow (x \cap y = \phi \lor x=y)))) \rightarrow \exists x \forall y \exists z'(y \in z \rightarrow x \cap y = \{z'\})$.

B.17. *Axioma de regularidade.*

(ZF.X) $x \neq \phi \rightarrow \exists y(y \in x \ \&\ y \cap x = \phi)$.

Antes de podermos definir a *hierarquia de von Neumann* (B.23) e os *cardinais fortemente inacessíveis* (B.31), que nos interessam particularmente, precisamos de algumas noções de ZF.

B.18. *Definição.* $\cap x$ *see* $\{z\colon \exists y(y \in x) \ \&\ \forall y(y \in x \rightarrow z \in y)$.

B.19. *Proposição.* $\vdash \cap \phi = \phi$.

B.20. *Definição.*

(i.) $\mathrm{rel}(x)$ *see* $\forall y(y \in x \rightarrow \exists z \exists z'(y=(z,z')))$;

(ii.) $\mathrm{fun}(x)$ *see* $\mathrm{rel}(x) \ \&\ \forall y \forall z \forall z'((y,z) \in x \ \&\ (y,z') \in x \rightarrow z=z')$;

(iii.) $\mathrm{dom}(x)$ *see* $\{y: \exists z((y,z)\varepsilon x)\}$;

(iv.) $\mathrm{im}(x)$ *see* $\{y: \exists z((z,y)\varepsilon x)\}$;

(v.) x^{-1} *see* $\{(y,z): (z,y)\varepsilon x\}$;

(vi.) $x:y \to z$ *see* $\mathrm{fun}(x) \,\&\, \mathrm{dom}(x)=y \,\&\, \mathrm{im}(x)\subseteq z$;

(vii.) ${}^{y}x$ *see* $\{z: z:y \to x\}$.

B.21. *Definição.*

(i.) $\mathrm{con}(x)$ *see* $\forall y\forall z(y\varepsilon x \,\&\, z\varepsilon x \;\to\; y\varepsilon z \vee z\varepsilon y \vee y=z)$;

(ii.) $\mathrm{Ord}(x)$ *see* $\mathrm{con}(x) \,\&\, \forall y(y\varepsilon x \;\to\; y\subseteq x)$;

(iii.) $x < y$ *see* $\mathrm{Ord}(x) \,\&\, \mathrm{Ord}(y) \,\&\, x\varepsilon y$;

(iv.) $x \leq y$ *see* $x < y \vee x=y$;

(v.) $x+1$ (ou x^{+}) *see* $x\cup\{x\}$.

Utilizaremos as letras gregas minúsculas $\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma',\ldots$ como variáveis para ordinais.

B.22. *Definição.*

(i.) $\mathrm{suc}(x)$ *see* $\mathrm{Ord}(x) \,\&\, \exists\alpha(x=\alpha+1 \vee x=\phi)$;

(ii.) $\mathrm{lim}(x)$ *see* $\mathrm{Ord}(x) \,\&\, \neg(\mathrm{suc}(x))$;

(iii.) $\mathrm{int}(x)$ *see* $\mathrm{suc}(x) \,\&\, \forall y(y < x \;\to\; \mathrm{suc}(y))$;

(iv.) ω *see* $\{x: \mathrm{int}(x)\}$.

B.23. *Definição.* $R(\alpha)$ *see* $\{P(R(\beta)): \beta < \alpha\}$.

B.24. *Proposição.*

(i.) $\alpha \leq \beta$ *se e somente se* $R(\alpha)\subseteq R(\beta)$;

(ii.) *Se* $x \in y$ *e* $y \in R(\alpha)$, $x \in R(\alpha)$;

(iii.) *Se* $x \subseteq y$ *e* $y \in R(\alpha)$, $x \in R(\alpha)$;

(iv.) $R(\alpha+1) = P(R(\alpha))$;

(v.) *Se* $\lim(\alpha)$, $R(\alpha) = \bigcup\{R(\beta): \beta < \alpha\}$;

(vi.) *Se* x *é um conjunto de ordinais, então existe um ordinal* β *tal que* $\bigcup\{R(\alpha): \alpha \in x\} = R(\beta)$.

Esta proposição pode ser encontrada em Montague&Vaught(19).

B.25. *Definição.* $\mathrm{Inj}(x)$ *see* $\mathrm{fun}(x)$ & $\mathrm{fun}(x^{-1})$.

B.26. *Definição.*

(i.) $x \equiv y$ *see* $\exists z(\mathrm{Inj}(z)$ & $\mathrm{dom}(z)=x$ & $\mathrm{im}(z)=y)$;

(ii.) $\mathrm{Card}(x)$ *see* $\mathrm{Ord}(x)$ & $\forall\alpha(\alpha < x \to \neg(\alpha \equiv x))$

Com base no axioma da escolha é possível mostrar que, para todo conjunto x, existe um único cardinal β (i.e. tal que $\mathrm{Card}(\beta)$) tal que $x \equiv \beta$. Denotamos este β por $\overline{\overline{x}}$.

B.27. *Definição.* Se $\alpha \neq \phi$ e β são cardinais, α^{β} *see* $(\overline{\overline{{}^{\beta}\alpha}})$.

B.28. *Definição.* $\alpha \mathrm{\ cf\ } \beta$ *see* $\alpha \leq \beta$ & $\exists z(z:\alpha \to \beta$ & $\beta = \bigcup \mathrm{Im}(z))$.

B.29. *Definição.* $\mathrm{cf}(\alpha)$ *see* $\bigcap\{\beta: \beta \mathrm{\ cf\ } \alpha\}$.

B.30. *Definição.* (α *é fortemente limite*).

$\mathrm{flim}(\alpha)$ *see* $\mathrm{Card}(\alpha)$ & $\forall\beta(\mathrm{Card}(\beta)$ & $\beta < \alpha \to 2^{\beta} < \alpha)$,

onde 2 é $\{\phi,\{\phi\}\}$.

B.31. *Definição.* (α é um *cardinal fortemente inacessível.*)

Inac(α) *see* $\omega < \alpha$ & flim(α) & cf(α)=α.

Podemos enunciar o axioma que afirma que todo ordinal é majorado por um cardinal fortemente inacessível.

B.32. *Axioma de inacessibilidade.*

(ZF.XI) $\forall\alpha\, \exists\beta$(Inac($\beta$) & $\alpha < \beta$) .

APÊNDICE C

A TEORIA DE KELLEY-MORSE

O que se segue é uma axiomatização, em primeira ordem, da *teoria impredicativa de classes*. As idéias básicas desta teoria têm origens nos trabalhos de von Neumann e Bernays e foram desenvolvidas por Mostowski, Morse e Kelley. A apresentação que se segue é uma adaptação dos sistemas de Chang&Keisler(1), p. 510-511, e de Kelley(12). Os símbolos da linguagem de KM(como designaremos a teoria considerada) são o símbolo ε e um símbolo relacional unário V, tal que a fórmula $V(x)$ é lida x *é um conjunto*.

C.1. *Axioma de extensionalidade.*

(KM.I) $$\forall x \forall y (\forall z (z \varepsilon x \leftrightarrow z \varepsilon y) \rightarrow x = y) .$$

C.2. *Esquema de classificação.*

(KM.II) $$\exists x \forall y (y \varepsilon x \leftrightarrow V(y) \ \&\ A(y)),$$

onde $A(y)$ é uma fórmula em que x não ocorre.

As fórmulas $x \neq y$, $x \not\varepsilon y$, $x \subseteq y$ e $x \subset y$ são definidas da maneira usual.

C.3. *Definição.* Se $A(z)$ é uma fórmula,

$y \varepsilon \{z: A(z)\}$ *see* $\exists x (\forall z (z \varepsilon x \leftrightarrow V(z) \ \&\ A(z)) \ \&\ y \varepsilon x)$.

C.4. *Definição.*

(i.) $x \cup y$ *see* $\{z: z\varepsilon x \vee z\varepsilon y\}$;

(ii.) $x \cap y$ *see* $\{z: z\varepsilon x \ \& \ z\varepsilon y\}$.

C.5. *Axioma das partes.*

(KM.III) $V(x) \rightarrow \exists z(V(z) \ \& \ \forall y(y \subseteq x \rightarrow y\varepsilon z))$.

C.6. *Axioma da união.*

(KM.IV) $V(x) \ \& \ V(y) \rightarrow V(x \cup y)$.

C.7. *Definição.*

(i.) ϕ *see* $\{x: x \neq x\}$;

(ii.) U *see* $\{x: x=x\}$;

(iii.) $\sim x$ *see* $\{y: y \not\varepsilon x\}$;

(iv.) $x \sim y$ *see* $x \cap (\sim y)$;

(v.) $\cup x$ *see* $\{y: \exists z(y\varepsilon z \ \& \ z\varepsilon x)\}$.

C.8. *Definição.*

(i.) $\{x\}$ *see* $\{y: V(x) \rightarrow x=y\}$;

(ii.) $\{x,y\}$ *see* $\{x\} \cup \{y\}$;

(iii.) (x,y) *see* $\{\{x\},\{x,y\}\}$.

C.9. *Definição.*

(i.) $rel(x)$ *see* $\forall z(z\varepsilon x \rightarrow \exists y \exists y'(z=(y,y')))$;

(ii.) $fun(x)$ *see* $rel(x) \ \& \ \forall y \forall z \forall z'((y,z)\varepsilon x \ \& \ (y,z')\varepsilon x \rightarrow z=z')$;

(iii.) $dom(x)$ *see* $\{y: \exists z((y,z)\varepsilon x)\}$;

(iv.) $Im(x)$ *see* $\{y: \exists z((z,y)\varepsilon x)\}$.

C.10. *Axioma da substituição.*

(KM.V) $\forall x(\mathrm{fun}(x)\ \&\ V(\mathrm{dom}(x)) \rightarrow V(\mathrm{Im}(x)))$.

C.11. *Axioma de amalgamação.*

(KM.VI) $V(x) \rightarrow V(\bigcup x)$.

C.12. *Axioma de infinidade.*

(KM.VII) $\exists x(V(x)\ \&\ \phi\varepsilon x\ \&\ \forall y(y\varepsilon x \rightarrow y\cup\{y\}\varepsilon x))$.

C.13. *Axioma de regularidade.*

(KM.VIII) $\forall x(x\neq\phi \rightarrow \exists y(y\varepsilon x\ \&\ x\cap y=\phi))$.

C.14. *Definição.*

(i.) $x(y)$ *see* $\bigcap\{z\colon (y,z)\varepsilon x\}$;

(ii.) $FE(x)$ *see* $\mathrm{fun}(x)\ \&\ \forall y(y\varepsilon \mathrm{dom}(x) \rightarrow x(y)\varepsilon y)$.

C.15. *Axioma da escolha.*

(KM.IX) $\exists x(FE(x)\ \&\ \mathrm{dom}(x)= \sim\{\phi\})$.

C.16. *Axioma da classe universal.*

(KM.X) $V(x) \leftrightarrow \exists y(x\varepsilon y)$.

BIBLIOGRAFIA

1. Chang, C.C. & Keisler, H.J. *Model Theory*. Amsterdam, North-Holland, 1977. 554 p.

2. da Costa, N.C.A. On two systems of set theory. Amsterdam, *Konikl. Ned. Ak. Wet.*, series A, 68: 95-99, 1965.

3. ———— . Two formal systems of set theory. Amsterdam, *Konikl. Ned. Ak. Wet.*, series A, 70: 45-51, 1967.

4. ———— . On the underlying logic of two systems of set theory. Amsterdam, *Konikl. Ned. Ak. Wet.*, series A, 73: 1-8, 1970.

5. ———— . α-models and the systems T and T*. *Notre Dame J. of Formal Logic*, 15: 443-454, 1974.

6. Drake, F.R. *Set Theory. An introduction to large cardinals*. Amsterdam, North-Holland, 1974. 351 p.

7. Ehresmann, Ch. *Catégories et Structures*. Paris, Dunod, 1965.

8. Eilenberg, S. & MacLane, S. General theory of natural equivalences. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 58: 231-294, 1945.

9. Feferman, S. Set-theoretical foundations of category theory. In: *Reports of the Midwest Category Seminar (III)*. New York, Springer-Verlag, 1969. P. 201-247. (Lecture notes in mathematics, 106).

10. Gödel, K. *The Consistency of the Continuum Hypothesis.* Princeton, Princ. Univ. Press, 1940. (Ann. math. studies 3).

11. Grothendieck, A. et alii. *Théorie de Topos et Cohomologie Etale des Schémas.* 2 ed. New York, Springer-Verlag, 1972. 525 p. (Lecture notes in math., 269).

12. Kelley, J.L. *General Topology.* New York, Springer-Verlag, 1955. 258 p. (Graduate texts in mathematics, 27).

13. Kreisel, G. Category theory and the foundations of mathematics. Appendix II to (9).

14. Lawvere, F.W. The category of categories as a foundation of mathematics. In: *Proc. of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla 1965.* New York, Springer-Verlag, 1966. P. 1-20.

15. MacLane, S. Locally small categories and the foundations of set theory. In: *Proc. Symp. on the Foundations of Mathematics, Infinitistic Methods.* Warsaw, 1959. P. 25-43.

16. ———— . One universe as a foundation for category theory. In: *Reports of the Midwest Category Seminar (III).* New York, Springer-Verlag, 1969. P. 192-201. (Lecture notes in mathematics, 106).

17. ———— . *Categories for the Working Mathematician.* New York, Springer-Verlag, 1971. 262 p. (Graduate texts in mathematics, 5).

18. Mendelson, E. *Introduction to Mathematical Logic.* 2 ed. New York, D. Van Nostrand, 1979. 328 p.

19. Montague, R. & Vaught, R.L. Natural models of set theories. Warsaw, *Fund. Math.*, 47: 219-242, 1959.

20. Orey, S. On ω-consistency and related properties. Providence, *J. Symb. Logic*, 21: 246-252, 1956.

21. Shepherdson, J.C. Inner model for set theory, I; II; III. Providence, *J. Symb. Logic*, 16: 161-190, 1951; 17: 225-237, 1952; 18: 145-167, 1953.

22. Tarski, A. Ueber unerreichbare Kardinalzahlen. Warsaw, *Fund. Math.*, 30: 68-89, 1938.