

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO  
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

Simulação Perfeita da Medida Invariante do  
Modelo de Silo Bi-dimensional

Mariana Rodrigues

Dissertação de Mestrado orientada pela

Profa. Dra. Nancy Lopes Garcia

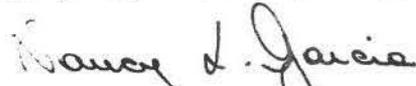


UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE

# Simulação Perfeita da Medida Invariante do Modelo de Silo Bi-dimensional

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Mariana Rodrigues e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 17 de maio de 2001.



Prof. Dra. Nancy Lopes Garcia

Banca Examinadora:

- 1 Profª. Dra. Nancy Lopes Garcia (IMECC - UNICAMP)
- 2 Prof. Dr. Pablo Augusto Ferrari (IME - USP)
- 3 Profª. Dra. Elisabeti Kira (IME - USP)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Estatística.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Rodrigues, Mariana

R618s      Simulação perfeita da medida invariante do modelo de silo bi-  
dimensional / Mariana Rodrigues -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2001.

Orientador : Nancy Lopes Garcia

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

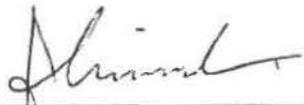
1. Métodos de simulação. 2. Silos. I. Garcia, Nancy Lopes. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,  
Estatística e Computação Científica. III. Título.

**Dissertação de Mestrado defendida em 17 de maio de 2001 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

  
\_\_\_\_\_  
Prof (a). Dr (a). **NANCY LOPES GARCIA**

  
\_\_\_\_\_  
Prof (a). Dr (a). **PABLO AUGUSTO FERRARI**

  
\_\_\_\_\_  
Prof (a). Dr (a). **ELISABETI KIRA**

## Resumo

O objetivo desta dissertação é a geração de amostras aleatórias da única distribuição estacionária associada ao modelo estocástico para armazenagem de grãos em um silo finito e bi-dimensional. Uma vez que esta distribuição estacionária não pode ser manipulada analiticamente, necessitamos de um método de simulação estocástica para obtermos amostras desta distribuição. O método de simulação estocástica proposto foi o método “Acoplamento do Passado” (“Coupling From The Past”(CFTP)), desenvolvido por Propp e Wilson. Tal método permite obtermos amostras independentes e distribuídas exatamente da distribuição estacionária de interesse de uma cadeia de Markov com espaço de estados finito ou limitado. Entretanto, no caso do problema dos silos o espaço de estados é ilimitado superiormente, isto é, não existe um estado maximal. A fim de aplicarmos CFTP a este problema foi necessário um truncamento do espaço de estados inicial e, neste caso, a amostra obtida não tem exatamente a distribuição desejada. Para testarmos o desempenho do algoritmo considerando esta restrição, procuramos comparar os resultados teóricos de alguns momentos do vetor aleatório associado ao modelo em questão, tais como média e matriz de covariâncias, com as estimativas obtidas através dos dados gerados.

## Abstract

The goal of this paper is the generation of random samples of unique stationary distribution associated to the stochastic model for grain storage in a finite and bi-dimensional silo. Once this stationary distribution can not be manipulated analytically, a method of stochastic simulation is needed to obtain samples from this distribution. The method of stochastic simulation used was “Coupling From the Past”(CFTP), developed by Propp and Wilson. This method allows to obtain independent and identical samples exactly from the target stationary distribution of a Markov chain with finite or bounded state spaces. However, in the case of the silos, the space of state is unbounded on the upper-level, hence there is not a maximal state. As for the application of CFTP to the problem of the silos, there was a need to trunk the initial space of states and, in this case, the sample obtained did not have the exact target distribution. To test the performance of the algorithm considering the restriction of having trunked the initial space of states, we compared the theoretical results of some moments of the random array of the model being studied, such as mean and covariance matrix, to the estimates obtained through the generated data.

Dedico este trabalho ao Marcel,  
pelo apoio incondicional e por tantas outras coisas.

## Agradecimentos

Agradeço a Nancy pelo incentivo, apoio e amizade.

Agradeço meus queridos pais pela fé em minha pessoa e pelo apoio constante. Agradeço a Gabi, o Gú e o Mateus pelo apoio, carinho e paciência.

Agradeço as super amigas Jana, Val, Lú, Márcia Maria, Carla, Eriquinha, Biu, Rosani e Greta pela amizade que ainda perdura.

Agradeço aos amigos Ed, Carioca, Mineiro e Fer pelo apoio, carinho e companheirismo.

Agradeço ao Dú e a Carol por serem fiéis torcedores que me acompanharam desde início desta etapa.

Agradeço a força dos amigos Bel e Alê (por todos churrascos que não pude ir), Jú e Cabelo, Xande e Clau, Dani e João, Leo, Bicudo, Mitch, Alê, Carlinhos, Júlia, Jarra e Fá, Silvia e Motinha, Nogueira e Adriana, Paulão e Fer, Gi e Gú, Deco e Tina, Nanci e Alcir, Cyntia e Junião, Cacá e Rô, Lê e Lélío, Iara, Toninho, Dudú e Cris, Tatinho, Rafão, Carol e Araçá.

Agradeço aos colegas de mestrado: Marcelo, Raquel, Celeste, Rui, Nilo, Camila, Nevena, Clécio, Benilton e Tati, Robertinha.

Agradeço aos professores Mauro Marques e Mário Gneri pelo incentivo aos estudos e pela amizade.

Agradeço a amizade da querida professora Hildete e dos professores Fildor e Hotta.

Agradeço ao professor Ronaldo Dias pelo incentivo aos estudos.

Agradeço ao professor Herve pelo apoio e disposição quando precisei de sua ajuda.

Agradeço aos professores Moretti e Petrônio pela amizade e por sanarem

as dúvidas do Matlab.

Agradeço ao professor Aluísio pelas dicas computacionais.

Agradeço a CAPES pela bolsa concedida.

Por fim, agradeço ao Chico pelo companheirismo, ainda que mudo, de todas as horas.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Simulação Perfeita e o problema dos silos . . . . .	1
<b>2</b>	<b>O problema dos silos</b>	<b>4</b>
2.1	Definição do problema e suas propriedades . . . . .	4
2.2	A prova da existência de uma única medida invariante . . . . .	6
2.2.1	Parte I: Prova da existência . . . . .	7
2.2.2	Parte II. Prova da unicidade da medida invariante $\pi$ . . . . .	10
2.3	Covariâncias . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Acoplamento do Passado - “Coupling From The Past”(CFTP)</b>	<b>16</b>
3.1	Acoplamento do Passado . . . . .	16
3.1.1	O algoritmo CFTP . . . . .	19
3.2	Monotonicidade . . . . .	19
3.2.1	O algoritmo CFTP considerando-se monotonicidade . . . . .	20
3.3	O vício causado pelo usuário impaciente . . . . .	21
3.4	Simulando perfeitamente num espaço de estados ilimitado . . . . .	22
3.4.1	O algoritmo CFTP dominado . . . . .	24

<b>4</b>	<b>Aplicação do algoritmo CFTP ao problema dos silos</b>	<b>25</b>
4.1	Impondo restrições ao espaço de estados . . . . .	25
4.1.1	Quantificando o erro causado pelo truncamento do espaço de estados inicial . . . . .	27
4.2	Aplicação . . . . .	28
4.2.1	O algoritmo CFTP aplicado ao problema dos silos . . .	30
<b>5</b>	<b>Simulações</b>	<b>32</b>
5.1	Considerações preliminares . . . . .	32
5.2	Resultado das simulações . . . . .	34
5.2.1	Tempos de acoplamento . . . . .	39
5.3	Investigando a distribuição do tempo de acoplamento ( $T(K)$ ) como função do tamanho do silo ( $N$ ) . . . . .	43
5.4	Conclusão . . . . .	46
<b>A</b>	<b>Matrizes de covariância</b>	<b>47</b>
<b>B</b>	<b>Programas implementados no MATLAB</b>	<b>54</b>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Simulação Perfeita e o problema dos silos

Desde a última década o método de Monte Carlo via Cadeias de Markov (Monte Carlo Markov Chain (MCMC)) vem sendo fortemente usado para amostrar de distribuições de probabilidade que são complexas ou difíceis de serem lidadas analiticamente. A fim de gerar uma única amostra de  $\pi$  através de MCMC, iniciamos a cadeia de Markov  $X_t$  em um estado qualquer de uma distribuição  $\pi_0$  e evoluímos esta cadeia por  $M$  passos, a partir de  $t = 0$ , com  $M$  suficientemente grande, de maneira que a probabilidade de que esta cadeia esteja no estado  $i$  no instante  $M$  convergirá para  $\pi(i)$ . Este processo pode ser chamado de simulação para o futuro. Infelizmente pode ser difícil determinarmos quão grande  $M$  deve ser de modo que a cadeia atinja, com precisão pré-estabelecida, a estacionariedade.

Como solução deste problema, recentemente vêm sendo desenvolvidas técnicas que permitem produzirmos amostras exatamente da distribuição in-

variante  $\pi$  de uma determinada cadeia de Markov. Este conjunto de técnicas é chamado de Simulação Perfeita e não requer conhecimento prévio do valor de  $M$  e nem quão grande o mesmo deve ser.

Diversas técnicas de Simulação Perfeita têm sido propostas na literatura. Uma delas foi desenvolvida por Propp e Wilson (1996), os quais propuseram um método através do qual é possível amostrarmos da distribuição exata  $\pi$ , de uma cadeia de Markov com espaço de estados finito. Tal método baseia-se em acoplamento de trajetórias com diferentes estados iniciais e permite obtermos amostras independentes e distribuídas exatamente da distribuição de interesse  $\pi$ . Este método é comumente chamado de “Acoplamento do Passado” (CFTP - “Coupling from the Past”). Artigos sobre o método CFTP podem ser encontrados na página <http://www.dimacs.rutgers.edu/~dbwilson>.

O objetivo desta dissertação foi utilizar o algoritmo CFTP para gerar-mos amostras da única medida invariante associada ao processo descrito no problema dos silos.

O problema dos silos é uma formulação matemática para armazenagem de grãos em um silo finito, bi-dimensional, onde a coordenada vertical assume o sentido de tempo e a coordenada horizontal o sentido de espaço. Cada grão suporta o peso dos grãos das camadas mais altas e tem seu próprio peso igual a 1. O peso de cada grão é distribuído entre dois grãos vizinhos das camadas mais baixas de maneira probabilística através de uma distribuição uniforme. Este modelo é um sistema linear da forma daquele proposto por Liggett(1985), com a restrição de que, neste caso, o tempo é discreto.

A existência de uma única medida estacionária foi provada por Ferrari,

Garcia e Martinez(2000). Apesar de sua forma analítica não ser conhecida, é possível determinar alguns momentos do vetor aleatório associado ao modelo, tais como média e matriz de covariâncias.

No capítulo 2 são detalhadas as provas da existência e unicidade da medida invariante, bem como o cálculo dos momentos desta distribuição.

No capítulo 3 é descrito o algoritmo CFTP e como este permite obtermos amostras com distribuição exata da qual queremos amostrar no caso de espaço de estados finito e/ou quando a função de transição da cadeia é monótona e o espaço de estados tem um estado minimal e um estado maximal. Também descrevemos uma desvantagem do algoritmo, conhecida por “o vício causado pelo usuário impaciente”.

No capítulo 4 apresentamos o algoritmo “CFTP Dominado”, que é um algoritmo proposto por Kendall (1998) e é utilizado quando o espaço de estados é ilimitado. Vários trabalhos sobre CFTP aplicado a espaço de estados ilimitado têm sido publicados, dentre eles vale a pena citar Murdoch e Green (1998a), Murdoch e Green (1998b) e Murdoch (1998). Ainda neste capítulo descrevemos as adaptações feitas para a aplicação do algoritmo CFTP no problema do silos; neste caso, mostrou-se como o modelo pode ser escrito na forma matricial de forma a se obter maior otimização das simulações.

Por fim, o capítulo 5 traz os resultados obtidos através das simulações, bem como os vetores das médias e matrizes de covariâncias amostrais para silos de diversos tamanhos (5, 15, 21). Além disso, verificamos o bom desempenho do algoritmo modificado através da comparação dos momentos amostrais e teóricos.

# Capítulo 2

## O problema dos silos

### 2.1 Definição do problema e suas propriedades

Considere o modelo de estocagem de grãos em um silo bi-dimensional, tal que a coordenada vertical assume o sentido de tempo e a coordenada horizontal o sentido de espaço. Cada grão suporta o peso dos grãos das camadas mais altas e tem seu peso igual a 1. Além disso, o peso de cada grão é distribuído entre dois grãos vizinhos das camadas mais baixas. Denotando-se  $W_t(x)$  como o peso carregado pela partícula localizada na  $x$ -ésima posição no nível  $t$ , este satisfaz o seguinte sistema de equações:

$$W_t(x) = 1 + W_{t-1}(x+1)U_{t-1}(x+1) + W_{t-1}(x-1)(1 - U_{t-1}(x-1)) \quad (2.1)$$
$$W_t(0) = W_t(N+1) = 0,$$

para  $x \in I := \{1, \dots, N\}$ , onde  $\{U_t(x) : x \in I\}$  são variáveis aleatórias independentes com distribuição comum  $U[0, 1]$ . Além disso,  $U_{(s \geq t)}(x)$  são

independentes de  $W_t(x)$ , para todo  $x \in I$ .

Denotando-se  $w_t(x) = \mathbb{E}[W_t(x)]$  e  $x \in I \cup \{0, N + 1\}$ , temos

$$\begin{aligned}
w_t(x) &= \mathbb{E}[1 + W_{t-1}(x+1)U_{t-1}(x+1) + W_{t-1}(x-1)(1 - U_{t-1}(x-1))] \\
&= 1 + \mathbb{E}[W_{t-1}(x+1)]\mathbb{E}[U_{t-1}(x+1)] + \mathbb{E}[W_{t-1}(x-1)]\mathbb{E}[(1 - U_{t-1}(x-1))] \\
&= 1 + \frac{1}{2}\mathbb{E}[W_{t-1}(x+1)] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[W_{t-1}(x-1)] \\
&= 1 + \frac{1}{2}w_{t-1}(x+1) + \frac{1}{2}w_{t-1}(x-1), \tag{2.2}
\end{aligned}$$

para  $x \in I$  e  $w_t(0) = w_t(N + 1) = 0$ .

O processo descrito por (2.1) é um processo Markoviano com tempo discreto e espaço de estados contínuo. Assuma que o processo  $(W_t : t \geq 1)$  tem medida invariante  $\pi$ , com primeiro momento finito, e seja  $W_\bullet(x)$  o vetor aleatório com distribuição de probabilidade segundo esta medida invariante. A média do vetor aleatório  $W_\bullet(x)$  é denotada por  $w_\pi(x) = \mathbb{E}_\pi[W_\bullet(x)]$  satisfaz a equação

$$w_\pi(x) = 1 + \frac{1}{2}w_\pi(x+1) + \frac{1}{2}w_\pi(x-1) \tag{2.3}$$

para  $x \in I \cup \{0, N + 1\}$ .

Note que a solução da equação (2.3) é o tempo de saída da caixa  $\{1, \dots, N\}$  de um passeio aleatório simétrico simples e tem perfil quadrático dado por

$$w_\pi(x) = x(N + 1 - x),$$

para  $x \in I$  e  $w_\pi(0) = w_\pi(N + 1) = 0$ .

## 2.2 A prova da existência de uma única medida invariante

**Lema 2.4** *Seja  $\nu$  qualquer distribuição inicial para  $W_0$ , não necessariamente invariante, satisfazendo  $\mathbb{E}_\nu[W_0(x)] = x(N + 1 - x)$ , então para todo  $t \geq 0$*

$$\mathbb{E}_\nu[W_t(x)] = x(N + 1 - x),$$

onde  $x \in I \cup \{0, N + 1\}$ .

Prova. Vale para  $t = 0$  por hipótese. Suponha que  $\mathbb{E}_\nu[W_t(x)] = x(N + 1 - x)$ ,  $x \in \{0, 1, \dots, N + 1\}$ . Então, por (2.2),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\nu[W_{t+1}(x)] &= 1 + \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu[W_t(x + 1)] + \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu[W_t(x - 1)] \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x + 1)(N - x) + \frac{1}{2}(x - 1)(N + 2 - x) \\ &= x(N + 1 - x).\end{aligned}$$

■

**Teorema 2.5** *Existe uma única medida invariante  $\pi$  para o processo com média de perfil finito. Sob esta medida invariante,  $W_\bullet$  satisfaz*

$$\mathbb{E}_\pi[W_\bullet(x)] = x(N + 1 - x) \tag{2.6}$$

para  $x \in I \cup \{0, N + 1\}$ .

A prova do Teorema (2.5) é dada em duas partes. A Parte I contém a prova da existência da medida invariante e a Parte II contém a prova da unicidade desta medida invariante.

## 2.2.1 Parte I: Prova da existência

Para provar a existência de uma medida invariante do processo  $W_t(x)$  precisamos dos seguintes resultados. Seja  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  a  $\sigma$ -álgebra dos Borelianos em  $\mathbb{R}^d$ .

**Teorema 2.7** *Seja uma família de medidas de probabilidade  $\{\mu_\alpha, \alpha \in \mathcal{I}\}$  em  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ , onde  $\mathcal{I}$  é um conjunto de índices arbitrários. Para que toda seqüência contenha uma subseqüência que converge em distribuição a uma medida de probabilidade, é necessário e suficiente que a seguinte condição seja satisfeita: para qualquer  $\varepsilon > 0$  existe um retângulo finito  $I$  tal que*

$$\inf_{\alpha \in \mathcal{I}} \mu_\alpha(I) > 1 - \varepsilon. \quad (2.8)$$

Uma família de funções de probabilidade satisfazendo (2.8) é dita ser “tight”. Além disso, podemos dizer que uma família de medidas de probabilidade é relativamente compacta - o limite pode não pertencer à família - se, e somente se, ela é “tight”.

Prova. Ver Chung(1992). ■

Considere a família de medidas de probabilidade  $\mathcal{M} = \{\mu_t, t \geq 0\}$  em  $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ , tal que  $\mu_t$  é a distribuição de probabilidade do vetor  $W_t$ , e  $\mu_0 = \nu$ , onde  $\nu$  satisfaz

$$\mathbb{E}_\nu[W_\bullet(x)] = x(N + 1 - x). \quad (2.9)$$

Seja

$$\mu_t(A) = P_\nu(W_t \in A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N).$$

Então, tomando  $I = [0, M]^N$

$$\begin{aligned}\mu_t(I) &= \mathbb{P}_\nu(W_t(x) \in I) \\ &= \mathbb{P}_\nu(W_t \leq M, \forall x = 1, \dots, N)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}1 - \mu_t(I) &= \mathbb{P}_\nu(W_t(x) > M, \text{ para algum } x = 1, \dots, N) \\ &\leq \sum_{x=1}^N \mathbb{P}_\nu(W_t(x) > M) \\ &\leq \sum_{x=1}^N \frac{\mathbb{E}_\nu[W_t(x)]}{M} \\ &= \sum_{x=1}^N \frac{x(N+1-x)}{M}, \text{ por (2.4).}\end{aligned}$$

Assim, escolhendo  $M$  suficientemente grande tal que

$$\sum_{x=1}^N \frac{x(N+1-x)}{M} < \varepsilon,$$

temos que

$$\mu_t(I) > 1 - \varepsilon, \tag{2.10}$$

para todo  $t$ .

Portanto, uma vez que  $\mathcal{M}$  satisfaz as condições do teorema (2.7), a família de medidas de probabilidade  $\mathcal{M}$  é “tight”, e, assim, existe uma subsequência que converge a uma medida de probabilidade. Seja  $\mu_t \in \mathcal{M}$  e  $\forall A \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ , tal que

$$\mu_{t+1}(A) = \int_S \mu_t(dy) \mathbb{P}(y, A). \tag{2.11}$$

Uma vez que não podemos garantir que o limite de  $\mu_{t+1}$  seja o mesmo limite de  $\mu_t$ , não podemos garantir que o limite seja uma medida invariante. Por outro lado, tomando médias de Cezaro, isto é

$$\pi_t(A) = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^t \mu_j(A),$$

por (2.10),  $\exists I$  tal que  $\pi_t(I) > 1 - \varepsilon, \forall t$ . Portanto temos que  $\{\pi_t\}$  também é “tight” e é possível garantir a existência de uma subsequência que converge a uma medida de probabilidade, ou seja, existe  $\{t_n\}_{n \geq 1}, t_n \rightarrow \infty$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , tal que

$$\pi_{t_n} \rightarrow \pi. \quad (2.12)$$

Provemos que esta medida de probabilidade  $\pi$  é uma medida invariante. Utilizando o resultado (2.11) temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^{t_n} \mu_{j+1}(A) &= \frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^{t_n} \int_{\mathcal{S}} \mu_j(dy) \mathbb{P}(y, A) \\ \frac{1}{t_n} \sum_{j=2}^{t_n+1} \mu_j(A) &= \int_{\mathcal{S}} \frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^{t_n} \mu_j(dy) \mathbb{P}(y, A) \\ \frac{1}{t_n} \left( \sum_{j=1}^{t_n} \mu_j(A) - \mu_1(A) + \mu_{t_n+1}(A) \right) &= \int_{\mathcal{S}} \frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^{t_n} \mu_j(dy) \mathbb{P}(y, A). \end{aligned}$$

Aplicando o limite em ambos os lados da última igualdade, para  $t_n \rightarrow \infty$ , e utilizando o resultado (2.12), temos que

$$\pi(A) = \int_{\mathcal{S}} \pi(dy) \mathbb{P}(y, A). \quad (2.13)$$

Por (2.13),  $\pi$  é uma medida invariante. Resta provar que esta medida invariante é única.

## 2.2.2 Parte II. Prova da unicidade da medida invariante $\pi$

A fim de provar unicidade da medida invariante utilizamos acoplamento. É fácil ver que, acoplando os processos utilizando as mesmas variáveis aleatórias uniformes, o processo definido por (2.1) é atrativo, isto é, se  $X_0(x) \geq Y_0(x)$  ( $X_0(x) \leq Y_0(x)$ ) para  $x \in I$ , então  $X_t(x) \geq Y_t(x)$  ( $X_t(x) \leq Y_t(x)$ ) para  $x \in I$  e todo  $t \geq 1$ . Supondo  $X_0 \geq Y_0$ , temos

$$\begin{aligned}
 d(t) &= \frac{1}{N} \sum_{x=1}^N \mathbb{E}[X_t(x) - Y_t(x)] \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{x=1}^N \mathbb{E}\{U_{t-1}(x+1)[X_{t-1}(x+1) - Y_{t-1}(x+1)] \\
 &\quad + [X_{t-1}(x-1) - Y_{t-1}(x-1)] - U_{t-1}(x-1)[X_{t-1}(x-1) - Y_{t-1}(x-1)]\} \\
 &= \frac{1}{N} \mathbb{E}[X_{t-1}(1) - Y_{t-1}(1)] - \frac{1}{2N} \mathbb{E}[X_{t-1}(1) - Y_{t-1}(1)] + \frac{1}{2N} \mathbb{E}[(X_{t-1}(2) - Y_{t-1}(2)) \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + (X_{t-1}(N-1) - Y_{t-1}(N-1))] + \frac{1}{2N} \mathbb{E}(X_{t-1}(N) - Y_{t-1}(N)) \\
 &= d(t-1) - \frac{1}{2N} \mathbb{E}[(X_{t-1}(1) - Y_{t-1}(1)) + (X_{t-1}(N) - Y_{t-1}(N))].
 \end{aligned}$$

Como  $X_t(1) \geq Y_t(1)$  e  $X_t(N) \geq Y_t(N)$ , temos  $d(t-1) \geq d(t)$ .

Desta forma, os números  $d(1), d(2), \dots$  formam uma sequência não crescente de números reais e a sequência tem limite. Portanto

$$d(t-1) - d(t) = \mathbb{E}[X_t(1) - Y_t(1) + X_t(N) - Y_t(N)] \rightarrow 0, \quad (2.14)$$

quando  $t \rightarrow \infty$ . Isto é,

$$\mathbb{E}[X_{t-1}(1) - Y_{t-1}(1)] \rightarrow 0 \text{ e } \mathbb{E}[X_{t-1}(N) - Y_{t-1}(N)] \rightarrow 0, \quad (2.15)$$

quando  $t \rightarrow \infty$ . Uma vez que temos as equações

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{t-1}(1) - Y_{t-1}(1)] &= \mathbb{E}[1 + X_{t-1}(2)U_{t-1}(2) - 1 - Y_{t-1}(2)U_{t-1}(2)] \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_{t-2}(2) - Y_{t-2}(2)]\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{t-1}(N) - Y_{t-1}(N)] &= \mathbb{E}[1 + X_{t-1}(N-1)U_{t-1}(N-1) - 1 - Y_{t-1}(N-1)U_{t-1}(N-1)] \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_{t-2}(N-1) - Y_{t-2}(N-1)],\end{aligned}$$

é imediato ver que

$$\mathbb{E}[X_{t-2}(2) - Y_{t-2}(2)] \rightarrow 0 \text{ e } \mathbb{E}[X_{t-1}(N-1) - Y_{t-1}(N-1)] \rightarrow 0, \quad (2.16)$$

quando  $t \rightarrow \infty$ . Usando o mesmo argumento, temos que

$$\mathbb{E}[X_{t-1}(2) - Y_{t-1}(2)] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_{t-2}(3) - Y_{t-2}(3)] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_{t-2}(1) - Y_{t-2}(1)]$$

e

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{t-1}(N-1) - Y_{t-1}(N-1)] &= \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_{t-2}(N) - Y_{t-2}(N)] \\ &\quad + \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_{t-2}(N-2) - Y_{t-2}(N-2)].\end{aligned}$$

Além disso, por (2.15) e (2.16) temos que

$$\mathbb{E}[X_{t-2}(3) - Y_{t-2}(3)] \rightarrow 0 \text{ e } \mathbb{E}[X_{t-2}(N-2) - Y_{t-2}(N-2)] \rightarrow 0,$$

quando  $t \rightarrow \infty$ . Desta forma, podemos escrever

$$\mathbb{E}[X_t(x) - Y_t(x)] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_{t-1}(x+1) - Y_{t-1}(x+1)] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_{t-1}(x-1) - Y_{t-1}(x-1)]. \quad (2.17)$$

Calculando (2.17) a partir de  $x = 1$  e sabendo que

$$\mathbb{E}[X_{t-1}(x) - Y_{t-1}(x)] \rightarrow 0 \text{ e } \mathbb{E}[X_{t-1}(x-1) - Y_{t-1}(x-1)] \rightarrow 0$$

quando  $t \rightarrow \infty$ , então

$$\mathbb{E}[X_{t-1}(x+1) - Y_{t-1}(x+1)] \rightarrow 0,$$

quando  $t \rightarrow \infty$ , para  $(x+1) \geq \frac{N}{2}$ .

Calculando (2.17) a partir de  $x = N$  e sabendo que

$$\mathbb{E}[X_{t-1}(x) - Y_{t-1}(x)] \rightarrow 0 \text{ e } \mathbb{E}[X_{t-1}(x+1) - Y_{t-1}(x+1)] \rightarrow 0$$

quando  $t \rightarrow \infty$ , então

$$\mathbb{E}[X_{t-1}(x-1) - Y_{t-1}(x-1)] \rightarrow 0,$$

quando  $t \rightarrow \infty$ , para  $(x-1) \leq \frac{N}{2}$ . Logo,

$$\mathbb{E}[X_t(x) - Y_t(x)] \rightarrow 0, \tag{2.18}$$

quando  $t \rightarrow \infty$ , para todo  $x \in \{1, \dots, N\}$ .

Uma vez que as variáveis aleatórias  $X_t(x) - Y_t(x)$  são não-negativas, pela Desigualdade de Markov, dado  $\varepsilon' > 0$

$$\mathbb{P}_\nu[(X_t(x) - Y_t(x)) \geq \varepsilon'] \leq \frac{\mathbb{E}_\nu[X_t(x) - Y_t(x)]}{\varepsilon'}. \tag{2.19}$$

Assim, por (2.18), temos que (2.19) converge a zero, quando  $t \rightarrow \infty$ , para todo  $x = 1, \dots, N$ . Logo, para  $X_0 \geq Y_0$

$$X_t(x) - Y_t(x) \rightarrow 0$$

em probabilidade, quando  $t \rightarrow \infty$ . Na realidade  $X_t(x) - Y_t(x) \rightarrow 0$  quase certamente, quando  $t \rightarrow \infty$  (Barros, Ferrari, Garcia e Martinez. *Asymptotic behavior of a stationary silo with absorbing walls* (2001). Preprint submetido.). Entretanto a convergência em probabilidade é suficiente para nossos propósitos.

Seja  $X_t$  com distribuição inicial  $\pi$  e  $(Y_0(x) : x \in I)$  um vetor aleatório não negativo e arbitrário, tal que sua distribuição tenha primeiro momento e  $Y_0(0) = Y_0(N+1) = 0$ . Nós podemos definir

$$\bar{Y}_0(x) = Y_0(x) \vee X_0(x) \text{ e } \underline{Y}_0(x) = Y_0(x) \wedge X_0(x).$$

Acoplando os quatro processos usando a equação (2.1), temos que

$$\underline{Y}_t(x) \leq X_t(x) \leq \bar{Y}_t(x) \text{ e } \underline{Y}_t(x) \leq Y_t(x) \leq \bar{Y}_t(x),$$

para todo  $t \geq 0$ . Usando o argumento acima, temos que

$$Y_t(x) - \underline{Y}_t(x) \rightarrow 0$$

em probabilidade, quando  $t \rightarrow \infty$ . Uma vez que

$$|X_t(x) - Y_t(x)| \leq \bar{Y}_t(x) - \underline{Y}_t(x), \quad (2.20)$$

temos que

$$X_t(x) - Y_t(x) \rightarrow 0 \quad (2.21)$$

em probabilidade, quando  $t \rightarrow \infty$ .

Portanto, na classe das distribuições iniciais com primeiro momento finito, existe uma única medida invariante. ■

## 2.3 Covariâncias

Utilizando-se a existência de uma única medida invariante para o vetor aleatório definido por  $W_\bullet$  é possível obtermos um sistema de equações lineares para as variâncias e covariâncias da medida invariante. Denote  $\sigma_{x,y} = Cov(W_\bullet(x), W_\bullet(y))$ . Sabemos que se o processo tem como distribuição inicial a medida invariante  $\pi$ , então para todo  $t \geq 0$  a distribuição do processo no tempo  $t$  é  $\pi$  e portanto

$$Cov(W_t(x), W_t(y)) = \sigma_{x,y}$$

para todo  $x, y \in I$ .

Considerando um silo de tamanho  $N$  e o fato de que

$$V(XY) = V(X)V(Y) + E^2(X)V(Y) + E^2(Y)V(X),$$

para quaisquer variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , independentes, temos

$$\begin{aligned} Cov(W_t(i)U_t(j), W_t(i)U_t(j)) &= V(W_t(i)U_t(j)) \\ &= V(W_t(i))V(U_t(j)) + E^2(W_t(i))V(U_t(j)) + E^2(U_t(j))V(W_t(i)) \\ &= \frac{1}{12}V(W_t(i)) + \frac{1}{12}E^2(W_t(i)) + \frac{1}{4}V(W_t(i)) \\ &= \frac{1}{3}V(W_t(i)) + \frac{1}{12}E^2(W_t(i)), \text{ para quaisquer } i \text{ e } j. \\ &= \frac{1}{3}\sigma_{i,i} + \frac{1}{12}E^2(W_t(i)). \end{aligned}$$

Utilizando o resultado anterior para calcularmos  $\sigma_{x,y} = Cov(W_\bullet(x), W_\bullet(y))$ ,

temos que

$$\begin{aligned}\sigma_{i,i} &= \frac{1}{3}\sigma_{i+1,i+1} + \frac{1}{2}\sigma_{i-1,i+1} + \frac{1}{3}\sigma_{i-1,i-1} + \frac{1}{12}E^2(W_{t-1}(i-1)) + \frac{1}{12}E^2(W_{t-1}(i+1)), \\ \sigma_{i,i+2} &= \frac{1}{4}\sigma_{i+1,i+3} + \frac{1}{6}\sigma_{i+1,i+1} - \frac{1}{12}E^2(W_{t-1}(i+1)) + \frac{1}{4}\sigma_{i-1,i+3} + \frac{1}{4}\sigma_{i-1,i+1}, \\ \sigma_{i,j} &= \frac{1}{4}\sigma_{i+1,j+1} + \frac{1}{4}\sigma_{i+1,j-1} + \frac{1}{4}\sigma_{i-1,j+1} + \frac{1}{4}\sigma_{i-1,j-1}, \text{ para } |i-j| > 2.\end{aligned}\tag{2.22}$$

## Capítulo 3

# Acoplamento do Passado - “Coupling From The Past” (CFTP)

### 3.1 Acoplamento do Passado

Seja  $X_t$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ , uma cadeia de Markov com tempo discreto (podendo assumir valores negativos e positivos), definida no espaço de estados  $\mathcal{S}$  (finito), com matriz de transição  $P_{x_t, x_{t+1}}$  e distribuição invariante  $\pi$ .

Qualquer cadeia de Markov homogênea pode ser representada da maneira como é simulada, isto é,

$$X_t = \phi(X_{t-1}, U_t),$$

onde  $\{U_t, t = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$  é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e  $\phi$  é uma função determinística chamada

de função de transição, tal que sua relação com a matriz de transição  $P$ , é dada por

$$P(x_{t+1}, x_t) = \mathbb{P}(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}) = \mathbb{P}(\phi(x_{t-1}, U_t) = x_t).$$

O método de CFTP consiste em simularmos cadeias de Markov de tamanho  $M$ ,  $M > 0$ , iniciando as cadeias de todos os possíveis estados do espaço de estados  $\mathcal{S}$ . Iniciando as cadeias nos  $n$  possíveis estados de  $\mathcal{S}$  e utilizando a seqüência de variáveis aleatórias  $\mathbf{U} = \{U_{-M}, \dots, U_{-1}\}$ , conduzimos a simulação de  $-M$  a  $0$ , atualizando cada uma das  $n$  cadeias através da mesma função de transição  $\phi$ , e da mesma seqüência de variáveis aleatórias  $\mathbf{U}$ . Uma vez que utilizamos a mesma seqüência de variáveis aleatórias na atualização das cadeias, é possível que em algum tempo tempo  $t$ ,  $-M < t \leq 0$ , as cadeias coalesçam em um único estado. Caso isso aconteça, tomamos  $X_0$  como o ponto amostrado da distribuição de interesse  $\pi$ . Caso contrário, fazemos  $t = -M'$ ,  $M' > M$ , e, reaproveitando a seqüência de valores aleatórios gerada anteriormente, isto é, gerando somente a seqüência de variáveis aleatórias  $\mathbf{U}' = \{U_{-M'}, \dots, U_{-M-1}\}$ , reiniciamos o processo.

Com o intuito de representar formalmente o método CFTP, consideremos a seqüência de variáveis aleatórias  $\mathbf{U}$  definida anteriormente e denominando  $\phi_t(x, u_t) = \phi(x, u_t)$ , consideremos

$$F_{-t}^0(i, \mathbf{U}) = \phi_{-1}(\phi_{-2}(\dots \phi_{-t+1}(\phi_{-t}(i, U_{-t}), U_{-t+1}), \dots, U_{-2}), U_{-1})$$

o estado da cadeia no tempo  $0$ , uma vez que a mesma foi iniciada em  $i$ , no tempo  $-t$ . Particularmente,  $F_{-M}^0(i, u)$  representa a saída da simulação no tempo  $t = 0$ , tendo a cadeia sido iniciada em  $i$ , no tempo  $t = -M$ . Note

que não há necessidade de mantermos os valores individuais de  $\phi_t$ ; ao invés disto, atualizamos  $F_t^0$  segundo a regra  $F_t^0(i, \mathbf{U}) = F_{t+1}^0(\phi_t(i, u_t), \mathbf{U})$ .

Iniciando as cadeias em todos os possíveis estados de  $\mathcal{S}$ , consideramos que as cadeias coalesceram num único estado quando  $F_{-t}^0(i, \mathbf{U})$  for constante para todo  $i \in \mathcal{S}$ . Seja

$$\Gamma = \inf\{M; F_{-M}^0(i, \mathbf{U}) = \text{constante}, \forall i \in \mathcal{S}\}, \quad (3.1)$$

onde  $\Gamma$  é o tempo de coalescência das cadeias de Markov iniciadas em todos os possíveis estados de  $\mathcal{S}$ . Note que se tomarmos  $M' > \Gamma$  e aplicarmos o CFTP a partir de  $M'$ , considerando as mesma condições iniciais e as mesmas seqüências aleatórias, o valor de  $F_{-M'}^0$  será igual ao valor de  $F_{-\Gamma}^0$ . Desta forma, não há necessidade de avançarmos num passado além de  $\Gamma$ .

Como ilustração, suponha uma cadeia de Markov com matriz de probabilidades  $P_{i,j}$  e função de transição  $\phi$ , tal que  $F_{-M}^0$  seja constante, para todo  $i \in \mathcal{S}$ , em  $\Gamma = -1000$ . Se simularmos em direção ao passado utilizando  $M'$  igual a um milhão, sob as mesma condições iniciais e utilizando as mesmas seqüências aleatórias, conseqüentemente as amostras  $F_{-1.000}^0$  e  $F_{-1.000.000}^0$  serão iguais em  $t = 0$ . Notemos que à medida que  $t$  tende à  $\infty$ , a probabilidade de  $F_{-t}^0$  tornar-se constante tende a 1.

Desta forma, percebemos que, descartando a necessidade de determinarmos um valor inicial grande o suficiente para  $M$ , e, executando a simulação do passado em direção ao presente de forma que  $F_{-M}^0$  seja constante, temos que a probabilidade limite ao simularmos do passado em direção ao presente será igual à probabilidade limite quando simulamos do presente em direção ao futuro. Neste caso o limite é igual a  $\pi$ . Assim, sem definirmos um limite para  $M$ , a simulação do passado em direção ao presente gera uma amostra

com distribuição de probabilidade igual a distribuição estacionária da cadeia de Markov.

O problema do método CFTP é que se  $\mathcal{S}$  é muito grande, ou infinito, o algoritmo não é aplicável.

### 3.1.1 O algoritmo CFTP

Seja  $\mathbf{U} = \{\dots, u_{-3}, u_{-2}, u_{-1}\}$ . O algoritmo CFTP pode ser definido da seguinte forma:

$t \leftarrow 0$

$F_0^0(i, \mathbf{U}) = \phi_{-1}(i, u_{-1})$ , para todo  $i \in \mathcal{S}$

Repita

$t \leftarrow t - 1$

gere  $u_t$

$F_t^0(i, \mathbf{U}) = F_{t+1}^0(\phi_t(i, u_t), \mathbf{U})$ , para todo  $i \in \mathcal{S}$ .

Até que  $F_t^0$  seja constante.

## 3.2 Monotonicidade

Suponha que o espaço de estados  $\mathcal{S}$  (possivelmente muito grande ou infinito) da cadeia de Markov  $X_t$ , definida anteriormente, admita alguma ordenação parcial. Com respeito a esta ordenação parcial, quando a função de transição  $\phi$  é tal que, se  $x \leq y \Rightarrow \phi(x, u) \leq \phi(y, u)$  para todo  $u$ , dizemos que a função de transição é monótona.

Se mais ainda,  $\mathcal{S}$  tem a propriedade de que existe um único estado minimal e um único estado maximal,  $\hat{0}$  e  $\hat{1}$ , respectivamente, o algoritmo de CFTP pode ser implementado considerando-se apenas o estado minimal,  $\hat{0}$ , e o estado maximal,  $\hat{1}$ , garantindo-se que, se todos os estados possíveis fossem considerados para  $t = -M$ , os mesmos encontrariam-se no mesmo estado em  $t = 0$ , uma vez que os caminhos iniciados em  $\hat{0}$  e  $\hat{1}$  tivessem acoplado em um único estado em  $t = 0$ .

### 3.2.1 O algoritmo CFTP considerando-se monotonicidade

Seja  $\mathbf{U} = \{\dots, u_{-3}, u_{-2}, u_{-1}\}$ . Considerando o caso em que  $\mathcal{S}$  tem a propriedade de que existe um único estado minimal e um único estado maximal,  $\hat{0}$  e  $\hat{1}$ , respectivamente, o algoritmo de CFTP pode ser implementado da seguinte forma

$t \leftarrow 0$

$F_0^t = \phi_{-1}(i, u_{-1})$ , para  $i = \hat{0}, \hat{1}$

Repita

$t \leftarrow t - 1$

gere  $u_t$

$F_t^0(i, \mathbf{U}) = F_{t+1}^0(\phi_t(i, u_t), \mathbf{U})$ , para  $i = \hat{0}, \hat{1}$ .

Até que  $F_t^0$  seja constante.

### 3.3 O vício causado pelo usuário impaciente

Através do algoritmo CFTP é possível obtermos, exatamente, amostras de uma distribuição estacionária  $\pi$ . De qualquer maneira, para obtermos amostras não viciadas é crucial que a simulação execute suas interações até que uma amostra seja retornada. Desta forma, devemos considerar o tempo de acoplamento  $\Gamma$ , e o ponto amostrado, denotado por  $F_0$ , como variáveis aleatórias dependentes (veja Propp e Wilson(1996), Seção 2.1). Assim, se por exemplo, um usuário impaciente abortar a simulação do algoritmo CFTP antes da amostra ter sido retornada, a amostra obtida será viciada.

Considere o exemplo a seguir, apresentado por Fismen(1997).

**Exemplo 3.2** *Seja uma cadeia de Markov definida no espaço de estados  $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ , com a seguinte matriz de transição*

$$P_{x,y} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.5 & 0.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

A distribuição estacionária encontrada foi  $\pi(0) = 1/3$ ,  $\pi(1) = 1/3$ ,  $\pi(2) = 1/3$ . A regra de transição que assegura monotonicidade é dada por  $X_t = \max(X_{t-1} - 1, 0)$ , se  $U \leq 0.5$ ; e  $X_t = \min(X_{t-1} + 1, 2)$ , se  $U > 0.5$ . Suponha que o algoritmo CFTP tenha sido iniciado com uma cadeia no estado minimal  $\hat{0} = 0$ , e outra no estado maximal  $\hat{1} = 2$ , respectivamente.

Além disso, considere a situação em que um usuário impaciente aborte a simulação em  $M_0$  iterações, tal que  $M_0 = 2$ . Assuma  $Z$  o valor obtido quando

as cadeias coalesceram em um único valor em  $t = 0$ . As situações abaixo configuram o cenário da simulação quando um usuário aborta as simulações em  $M_0 = 2$ .

- $U_{-1} \leq 0.5$  e  $U_0 \leq 0.5$  :  $Z = 0$
- $U_{-1} \leq 0.5$  e  $U_0 > 0.5$  :  $Z =$  não definido
- $U_{-1} > 0.5$  e  $U_0 \leq 0.5$  :  $Z =$  não definido
- $U_{-1} > 0.5$  e  $U_0 > 0.5$  :  $Z = 2$

Observamos através do exemplo dado que os estados 0 e 2 são os únicos possíveis de serem amostrados e que, neste caso, o algoritmo CFTP produzirá uma amostra  $Z$  governada pela distribuição de probabilidade  $\pi'(0) = 1/2$ ,  $\pi'(1) = 0$ ,  $\pi'(2) = 1/2$ , a qual é viciada pois não é igual a  $\pi$ .

Uma maneira de diminuir este vício seria aumentar o valor de  $M_0$ , de maneira que aumentasse a probabilidade do estado 1 ser amostrado. De qualquer forma, a amostra sempre será viciada.

### 3.4 Simulando perfeitamente num espaço de estados ilimitado

Como vimos anteriormente, o algoritmo CFTP é aplicável somente para cadeias de Markov definidas em espaço de estados limitado. Desta forma, não é possível aplicarmos algoritmo CFTP para amostrarmos da distribuição estacionária de cadeia de Markov definida no espaço de estados ilimitado, uma vez não seria possível definirmos um estado minimal e um estado maximal.

Como solução, Kendall(1998) propôs um método que usa um truque na construção da função de transição, de forma que, no espaço de estados ilimitado, coalescência deixa de ser um problema. Este método é denominado “CFTP dominado” (Dominated CFTP).

A idéia deste do “CFTP dominado” é encontrar uma outra cadeia  $C_t$  - escolhida de forma que saibamos simular de sua distribuição de equilíbrio - que domine a cadeia que possui distribuição da qual desejamos amostrar.

Neste caso, a cadeia  $C_t$  deve satisfazer as seguintes propriedades:

- As cadeias  $C_t$  e  $X_t$  devem ser atualizadas através das mesma variáveis aleatórias. A regra de transição pode ser escrita como

$$(X_{t+1}, C_{t+1}) = [\phi_1(X_t, U_{t+1}), \phi_2(C_t, U_{t+1})].$$

- Se  $x \leq c$  então  $\phi_1(x, u) \leq \phi_2(c, u)$  para todo  $u$ .
- Para qualquer valor  $x$  e tempo  $t < 0$ , quase certamente existe  $s < t$  tal que  $X_t \leq C_t$  se  $X_u = x$  para  $u < s$ . Isto garante que, se rodarmos as cadeias em direção a um passado distante o suficiente, eventualmente teremos  $X_t < C_t$ , de forma que a partir deste tempo  $t$  a cadeia  $X_t$  estará dominada por  $C_t$ .
- $C_t$  tem distribuição limite conhecida, através da qual podemos simular diretamente.
- Dado  $C_t$ , nós sabemos a distribuição condicional de  $(C_{t-1}, U_t)$  e podemos amostrar desta distribuição. Isto significa que devemos estar aptos a simular  $C_t$  em direção ao passado. Neste caso é interessante que  $C_t$  seja uma cadeia reversível.

### 3.4.1 O algoritmo CFTP dominado

A seguir, encontra-se o algoritmo CFTP dominado.

1. Simule  $C_0$  da distribuição de equilíbrio de  $C_t$
2. Escolha  $M > 0$
3. Gere  $C_{-1}|C_0, C_{-2}|C_{-1}, \dots, C_{-M}|C_{-M+1}$
4. Use os valores  $U_t$ , gerados de acordo com  $C_t$ , para verificar se o subconjunto  $X_{-M} \in \{x < C_{-M}\}$  coalesce em  $t = 0$ . Se sim, aceite  $X_0$  como ponto amostrado. Caso contrário, escolha um valor maior para  $M$  e repita o procedimento<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Devemos lembrar que ao reiniciarmos o processo devemos reutilizar os valores  $C_t$  e  $U_t$  simulados anteriormente.

# Capítulo 4

## Aplicação do algoritmo CFTP ao problema dos silos

### 4.1 Impondo restrições ao espaço de estados

Para o modelo proposto em (2.1), denotamos o espaço de estados por  $\mathcal{S} = [0, \infty)^N$ , onde  $N$  é o tamanho do silo. O espaço de estados  $\mathcal{S}$  não é limitado superiormente e neste caso não existe um estado maximal que torne possível a aplicação do algoritmo CFTP para amostrarmos de  $\pi$ . Uma vez que este processo é definido num espaço de estados ilimitado, poderíamos utilizar o algoritmo “CFTP dominado”, descrito na Seção 3.4.1, para gerarmos amostras aleatórias da distribuição  $\pi$ . No entanto, sobre esta distribuição estacionária temos informação somente sobre sua unicidade, média e matriz de variâncias e covariâncias, de forma que não foi possível determinarmos uma cadeia  $C_t$  que dominasse o processo  $(W_t : t \geq 1)$ . Desta forma, não foi possível utilizarmos o algoritmo “CFTP dominado” para obtermos amostras

da distribuição de interesse  $\pi$ . Como solução definimos um valor  $K$  como o estado maximal em  $t = -M$  e aplicamos o algoritmo CFTP. Entretanto, ao truncarmos o espaço de estados inicial não estamos mais amostrando da distribuição estacionária  $\pi$  e sim de uma outra distribuição de probabilidade. Chame esta distribuição de  $\pi'$ .

O objetivo é tornar a diferença  $\| \pi - \pi' \|$  pequena o suficiente para obtermos amostras com distribuição de probabilidade muito próxima daquela associada ao espaço de estados inicial sem restrição. Para que isto seja satisfeito, a idéia é iniciarmos a simulação em  $t = -M$ , com um valor  $K$  que seja suficientemente grande de tal forma que em  $t = -M$ , sob a medida invariante, os estados maiores que  $K$  ocorram com probabilidade muito pequena.

Esta última condição é essencial; se iniciarmos a cadeia em  $-M' < -T(K)$ , onde  $T(K)$  é o tempo de acoplamento, e reiniciarmos o algoritmo CFTP a partir de  $-M'$ , considerando-se as mesmas condições iniciais e as mesmas seqüências de variáveis aleatórias, gostaríamos que  $F_{-M'}^{T(K)} \in [0, K]^N$  e  $F_{-M'}^0 = F_{-T(K)}^0$ .

Resta dizer que ao truncarmos o espaço de estados inicial cometemos um vício da forma daquele praticado pelo usuário impaciente, como descrito na Seção 3.3.

### 4.1.1 Quantificando o erro causado pelo truncamento do espaço de estados inicial

Considere o processo  $W_t$  definido em (2.1). Seja

$$\begin{aligned}\pi(A) &= \mathbb{P}(W_0 \in A, W_{-T(K)} \in [0, K]^N | W_{-\infty} = x) + \mathbb{P}(W_0 \in A, W_{-T(K)} \notin [0, K]^N | W_{-\infty} = x) \\ &= I + II,\end{aligned}\tag{4.1}$$

tal que

$$\begin{aligned}I &= \mathbb{P}(W_0 \in A | W_{-T(K)} \in [0, K]^N, W_{-\infty} = x) \times \mathbb{P}(W_{-T(K)} \in [0, K]^N | W_{-\infty} = x) \\ &= \pi'_K(A) \times \pi(W_{-T(K)} \in [0, K]^N).\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}1 - \pi(W_{-T(K)}(x) \in [0, K]^N) &= \mathbb{P}_\pi(W_{-T(K)}(x) > K, \text{ para algum } x = 1, \dots, N) \\ &\leq \sum_{x=1}^N \mathbb{P}_\pi(W_{-T(K)}(x) > K) \\ &\leq \sum_{x=1}^N \frac{\mathbb{E}_\pi[W_{-T(K)}(x)]}{K} \\ &= \sum_{x=1}^N \frac{x(N+1-x)}{K}, \text{ por (2.4)}.\end{aligned}$$

Assim, para qualquer  $\delta > 0$  podemos escolher  $K$  suficientemente grande tal que

$$\sum_{x=1}^N \frac{x(N+1-x)}{K} < \delta,$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_0 \in A, W_{-T(K)} \notin [0, K]^N | W_{-\infty} = x) &\leq \mathbb{P}(W_{-T(K)} \notin [0, K]^N | W_{-\infty} = x) \\ &\leq \delta.\end{aligned}$$

Desta forma, concluímos que a diferença  $\| \pi(A) - \pi'_K(A) \|$  (norma da variação total) torna-se arbitrariamente pequena quando  $K$  é suficientemente grande, pois

$$\begin{aligned}
\| \pi(A) - \pi'_K(A) \| &= \sup_A |\pi'_K(A)[\pi(W_{-T(K)} \in [0, K]^N) - 1] \\
&\quad + |\mathbb{P}(W_0 \in A, W_{-T(K)} \notin [0, K] | W_{-\infty} = x)| \\
&\leq \sup_A |\pi'_K(A)[1 - \pi(W_{-T(K)} \in [0, K]^N)]| \\
&\quad + \sup_A |\mathbb{P}(W_0 \in A, W_{-T(K)} \notin [0, K] | W_{-\infty} = x)| \\
&= \sup_A |\pi'_K(A)| \times |[1 - \pi(W_{-T(K)} \in [0, K]^N)]| \\
&\quad + \sup_A |\mathbb{P}(W_0 \in A, W_{-T(K)} \notin [0, K] | W_{-\infty} = x)| \\
&\leq 2\delta
\end{aligned} \tag{4.2}$$

## 4.2 Aplicação

Considere o processo definido em (2.1). Seja  $\phi : [0, \infty)^N \times \mathbb{M}_N \rightarrow [0, \infty)^N$ , tal que  $\mathbb{M}_N$  é o espaço de matrizes  $N \times N$  com elementos em  $[0, 1]$ , definida por

$$\phi(W, \mathbb{U}) = \mathbb{1} + \mathbb{U}W,$$

onde  $\mathbb{1} = (1, \dots, 1)'$ . Sejam as matrizes  $W_{N \times 1}$  e  $\mathbb{U}_{N \times N}$  tais que

$$W_t = \begin{pmatrix} W_t(1) \\ \vdots \\ W_t(N) \end{pmatrix}; \mathbb{U}_t = \begin{pmatrix} 0 & U_t(2) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 - U_t(2) & 0 & U_t(3) & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 - U_t(N-1) & 0 & U_t(N) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 - U_t(N-1) & 0 \end{pmatrix}.$$

Considerando as matrizes  $W_t$  e  $\mathbb{U}_t$ , tal que  $\{U_t(j), j = 1, \dots, N\}$  é uma família de variáveis aleatórias independentes cujas componentes são variáveis

aleatórias independentes e identicamente distribuídas segundo uma  $U(0, 1)$ , temos que o modelo proposto em (2.1) pode ser definido como

$$\begin{aligned} W_t &= \mathbb{1} + \mathbb{U}_{t-1} W_{t-1} \\ &= \phi(W_{t-1}, \mathbb{U}_{t-1}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Defina  $\hat{0} = (0, \dots, 0)'$  e  $\hat{1} = (K, \dots, K)'$  os estados minimal e maximal, respectivamente. Além disso, considere  $W_0^{(i)}$  a cadeia de Markov iniciada em  $i$ , no tempo  $t = 0$ . Vimos como parte da prova do Teorema 2.5 que acoplando os processos utilizando  $\phi$  e as mesmas variáveis aleatórias uniformes, o processo definido por (2.1) é atrativo. Desta forma, se  $W_0^{(\hat{0})}(x) \leq W_0^{(\hat{1})}(x)$  para  $x \in \{1, \dots, N\}$ , então  $W_t^{(\hat{0})}(x) \leq W_t^{(\hat{1})}(x)$  para  $x \in \{1, \dots, N\}$  e todo  $t \geq 1$ . Assim, temos que  $\phi$  é uma função de transição monótona que satisfaz as propriedades de monotonicidade definidas na Seção 3.2.

Considere o tempo inicial  $t = -M$ . Seja  $M = -1$  e  $W_{-1}^{(i)} = i$ . Então

$$\begin{aligned} \phi_{-1}(W_{-1}^{(i)}, \mathbb{U}_{-1}) &= W_0 \\ &= \mathbb{1} + \mathbb{U}_{-1} W_{-1}^{(i)}. \end{aligned}$$

Seja  $M = -2$  e  $W_{-2}^{(i)} = i$ . Então

$$\begin{aligned} \phi_{-1}(\phi_{-2}(W_{-2}^{(i)}, \mathbb{U}_{-2}), \mathbb{U}_{-1}) &= W_0 \\ &= \mathbb{1} + \mathbb{U}_{-1} W_{-1} \\ &= \mathbb{1} + \mathbb{U}_{-1} [\mathbb{1} + \mathbb{U}_{-2} W_{-2}] \\ &= \mathbb{1} + \mathbb{U}_{-1} \mathbb{1} + \mathbb{U}_{-1} \mathbb{U}_{-2} W_{-2}^{(i)}. \end{aligned}$$

Seja  $M = -3$  e  $W_{-3}^{(i)} = i$ . Então

$$\begin{aligned}
\phi_{-1}(\phi_{-2}(\phi_{-3}(W_{-3}^{(i)}, \mathbb{U}_{-3}), \mathbb{U}_{-2}), \mathbb{U}_{-1}) &= W_0 \\
&= \mathbb{1} + \mathbb{U}_{-1}W_{-1} \\
&= \mathbb{1} + \mathbb{U}_{-1}[\mathbb{1} + \mathbb{U}_{-2}W_{-2}] \\
&= \mathbb{1} + \mathbb{U}_{-1}\mathbb{1} + \mathbb{U}_{-1}\mathbb{U}_{-2}W_{-2} \\
&= \mathbb{1} + \mathbb{U}_{-1}\mathbb{1} + \mathbb{U}_{-1}\mathbb{U}_{-2}[\mathbb{1} + \mathbb{U}_{-3}W_{-3}] \\
&= \mathbb{1} + \mathbb{U}_{-1}\mathbb{1} + \mathbb{U}_{-1}\mathbb{U}_{-2}\mathbb{1} + \mathbb{U}_{-1}\mathbb{U}_{-2}\mathbb{U}_{-3}W_{-3}^{(i)}.
\end{aligned}$$

Desta forma, seja  $M = -L$  e  $W_{-L}^{(i)} = i$ . Então

$$\begin{aligned}
\phi_{-1}(\phi_{-2}(\phi_{-3}(\dots, \phi_{-L+1}(\phi_{-L}(W_{-L}^{(i)}, \mathbb{U}_{-L}), \mathbb{U}_{-L+1}), \dots, \mathbb{U}_{-3}), \mathbb{U}_{-2}), \mathbb{U}_{-1}) &= W_0 \\
&= \mathbb{1} + \mathbb{U}_{-1}W_{-1} \\
&= \mathbb{1} + \mathbb{U}_{-1}[\mathbb{1} + \mathbb{U}_{-2}W_{-2}] \\
&= \mathbb{1} + \mathbb{U}_{-1}[\mathbb{1} + \mathbb{U}_{-2}[\mathbb{1} + \mathbb{U}_{-3}W_{-3}]] \\
&= \dots \\
&= \mathbb{1} + \mathbb{U}_{-1}\mathbb{1} + \mathbb{U}_{-1}\mathbb{U}_{-2}\mathbb{1} + \mathbb{U}_{-1}\mathbb{U}_{-2}\mathbb{U}_{-3}\mathbb{1} + \dots + \mathbb{U}_{-1}\mathbb{U}_{-2}\mathbb{U}_{-3}\dots\mathbb{U}_{-L+1}\mathbb{1} + \\
&\quad \mathbb{U}_{-1}\mathbb{U}_{-2}\mathbb{U}_{-3}\dots\mathbb{U}_{-L}W_{-L}^{(i)}.
\end{aligned}$$

#### 4.2.1 O algoritmo CFTP aplicado ao problema dos silos

Consideremos  $W_{-M}^{(\hat{0})}$  e  $W_{-M}^{(\hat{1})}$  duas cadeias de Markov sendo iniciadas nos estados  $\hat{0} = (0, \dots, 0)'$  e  $\hat{1} = (K, \dots, K)'$ , respectivamente, no tempo  $t = -M$ . Desta forma, o algoritmo CFTP aplicado ao problema dos silos é dado por:

$t \leftarrow 0$

$A \leftarrow (0, \dots, 0)'_{1 \times N}$

$\mathbb{I} \leftarrow (1, \dots, 1)'_{1 \times N}$

$V \leftarrow \mathbb{I}_N$  ( $\mathbb{I}_N =$  matriz identidade de ordem  $N$ )

Repita

$t \leftarrow t - 1$

$W_t^{(\hat{0})} \leftarrow \hat{0}$

$W_t^{(\hat{1})} \leftarrow \hat{1}$

gere  $\mathbb{U}_t$

$V \leftarrow V \times \mathbb{U}_t$

$W_0^{(\hat{0})} \leftarrow \mathbb{I} + A + V \times W_t^{(\hat{0})}$

$W_0^{(\hat{1})} \leftarrow \mathbb{I} + A + V \times W_t^{(\hat{1})}$

$A \leftarrow A + V \times \mathbb{I}$

Até que  $\| W_0^{(\hat{1})} - W_0^{(\hat{0})} \|_{\infty} < \epsilon$ .

A função  $\| \cdot \|_{\infty}$  é a norma infinita. O valor de  $\epsilon$  adotado na construção dos programas foi de  $10^{-5}$ .

# Capítulo 5

## Simulações

### 5.1 Considerações preliminares

As amostras aleatórias foram geradas através do algoritmo CFTP descrito na Seção 4.2.1. Uma vez que o espaço de estados inicial foi truncado em  $K$ , procuramos avaliar o desempenho do algoritmo comparando a média e matriz de covariâncias teóricas do vetor aleatório com as estimativas obtidas através dos dados gerados.

Foram simuladas  $m$  amostras de tamanho  $n$  para cada um dos silos de tamanho 5, 15 e 21, respectivamente. Representemos cada amostra de tamanho  $n$  por

$$\{W^{(1,i)}, \dots, W^{(n,i)}\}, \text{ para } i = 1, \dots, m. \quad (5.1)$$

As componentes de cada uma das amostras são representadas por vetores coluna. Além disso estas componentes são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas segundo a distribuição  $\pi'_K$ , com média  $\mu$  e matriz

de covariâncias  $\Sigma$ . Como as amostras são independentes entre si, aplicando o teorema central do limite multivariado, temos que

$$\overline{W}^{(i)} = \frac{W^{(1,i)} + \dots + W^{(n,i)}}{n}, \text{ para todo } i = 1, \dots, m, \quad (5.2)$$

converge a uma distribuição normal multivariada com média  $\mu$  e matriz de covariâncias  $\frac{\Sigma}{n}$ . Devemos assumir  $n$  suficiente grande e maior do  $N$ .

Neste trabalho testaremos somente a igualdade de médias e covariâncias. Do ponto de vista do teste de hipóteses, este problema pode ser formulado da seguinte forma:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \times H_1 : \mu \neq \mu_0, \quad (5.3)$$

tal que  $\mu_0$  é a média teórica descrita em (2.9), e

$$H'_0 : \Sigma = \Sigma_0/n \times H'_1 : \Sigma \neq \Sigma_0/n, \quad (5.4)$$

tal que  $\Sigma_0$  é a matriz de covariâncias teórica obtida através da solução do sistema linear descrito em (2.22).

Uma vez que  $\overline{W}^{(1)}, \dots, \overline{W}^{(m)}$  é uma amostra aleatória independente e identicamente distribuída segundo uma Normal multivariada denotada por  $N_N(\mu, \frac{\Sigma}{n})$ , o teste apropriado para igualdade de médias definida em (5.3) é da forma

$$T^2 = m(\overline{W} - \mu_0)' S^{-1} (\overline{W} - \mu_0),$$

onde

$$\overline{W} = \frac{\overline{W}^{(1)} + \dots + \overline{W}^{(m)}}{m}$$

e

$$S^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (\bar{W}^{(j)} - \bar{W})(\bar{W}^{(j)} - \bar{W})'.$$

A estatística  $T^2$  tem distribuição  $\frac{(m-1)N}{(m-N)} F_{N,m-N}$ , onde  $F_{N,m-N}$  denota uma variável aleatória com distribuição  $F$  com  $N$  e  $(m-N)$  graus de liberdade.

No teste para igualdade de variâncias definida em (5.4) temos que o teste apropriado é o teste da razão de verossimilhança, denotado por

$$\Lambda = \frac{\sup_{\mu} L(\mu, \Sigma_0)}{\sup_{\mu, \Sigma} L(\mu, \Sigma)}, \quad (5.5)$$

onde

$$L(\mu, \Sigma) = (\det \Sigma)^{-m/2} \exp(\text{traço}(-1/2 \Sigma^{-1} A)) \exp[-1/2 m (\bar{W} - \mu)' \Sigma^{-1} (\bar{W} - \mu)].$$

Nesta última expressão temos que  $A = mS^2$ . O numerador em (5.5) é encontrado fazendo-se  $\mu = \bar{W}$  e o denominador fazendo-se  $\mu = \bar{W}$  e  $\Sigma = \frac{A}{m}$ .

A região crítica do teste é da forma  $-2 \log \Lambda \leq c_{\alpha}$  e  $c_{\alpha}$  é escolhido de tal forma que o tamanho do teste seja  $\alpha$ . A distribuição de  $-2 \log \Lambda$ , sob a hipótese nula, está descrita em Muirhead (1946).

## 5.2 Resultado das simulações

Para a amostra definida em (5.2), os valores de  $n$  e  $m$  são, respectivamente, 50 e 100. O nível de significância adotado foi  $\alpha = 5\%$ .

A Tabela 5.1 mostra o erro cometido ao truncarmos o espaço de estados. Como já mencionado, o erro é a razão entre a soma das componentes do vetor de média de um silo de tamanho  $N$  e o valor  $K$  adotado.

Tabela 5.1: Erro cometido ao truncarmos o espaço de estados inicial para silos de tamanho  $N$

$N$	$K$	$\delta$
5	10.000	0.035
15	30.000	0.03
21	50.000	0.035

As Figuras 5.1 a 5.2 mostram que o vetor de média observada é muito próximo do vetor de média teórica. A Tabela 5.2 traz os resultados que confirmam que a média teórica do vetor aleatório  $W_t$  é um valor plausível para a população de média  $\mu$ .

Tabela 5.2: Resultado do teste de igualdade de médias, considerando-se silos de tamanho  $N$

$N$	$\frac{(m-N)}{[(m-1)N]} T^2$	valor-p	Rejeita $H_0$
5	1.14	0.34	Não
15	1.23	0.27	Não
21	1.05	0.41	Não

A Tabela 5.3 traz os resultados que confirmam que a matriz de covariância teórica do vetor aleatório  $W_t$  é um valor plausível para a população de matriz de covariância  $\Sigma_0/n$ .

Tabela 5.3: Resultado do teste de igualdade de covariâncias, considerando-se silos de tamanho  $N$

$N$	$-2 \log \Lambda$	valor-p	Rejeita $H_0$
5	21.05	0.876	Não
15	137.6	0.877	Não
21	235.6	0.584	Não

Figura 5.1: Peso médio teórico e observado de um silo de tamanho  $N = 5$

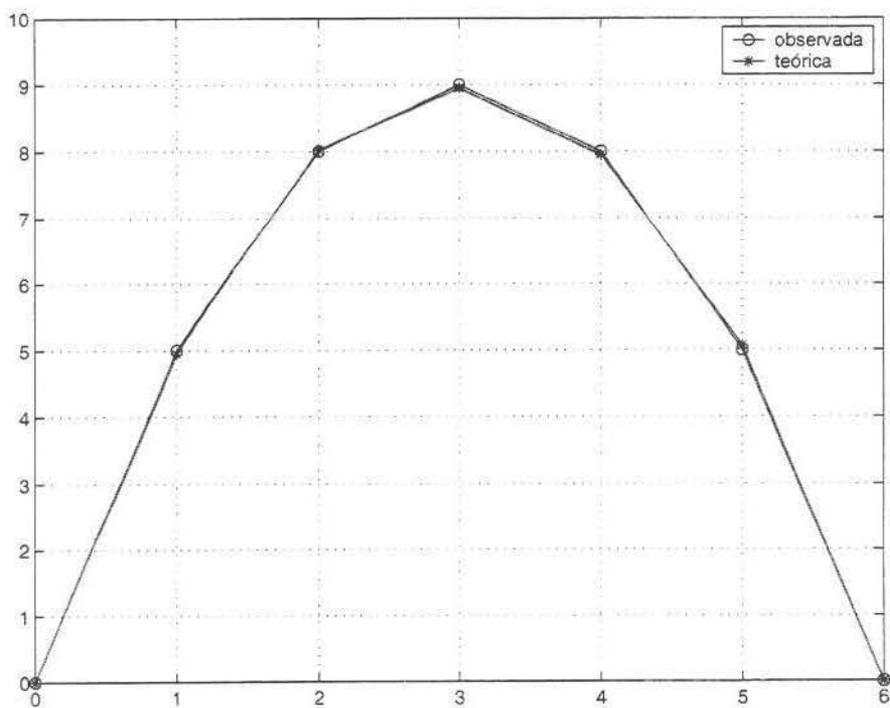


Figura 5.2: Peso médio teórico e observado de um silo de tamanho  $N = 15$

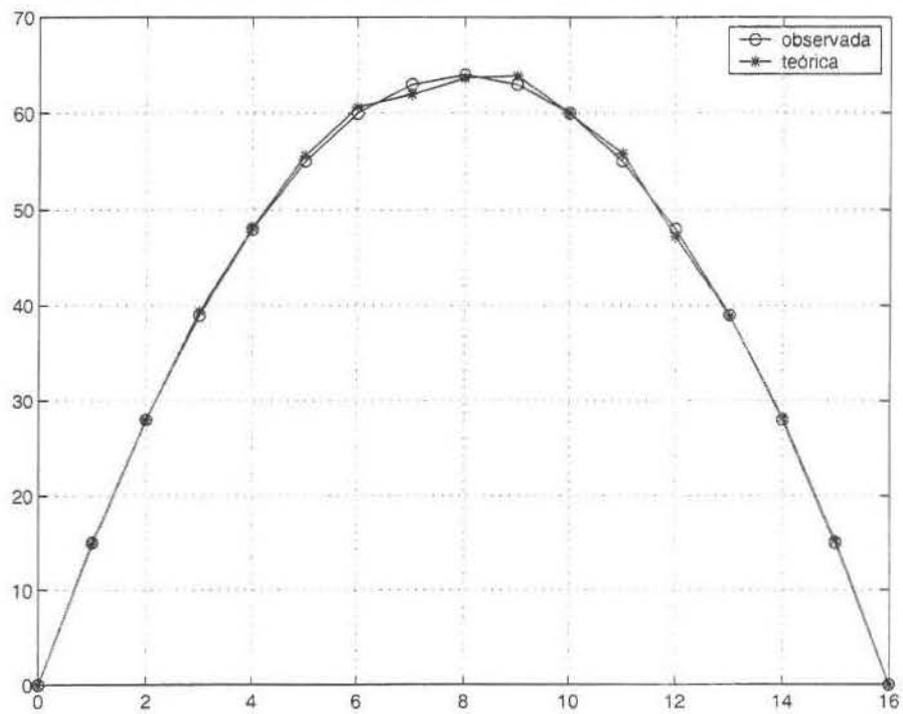
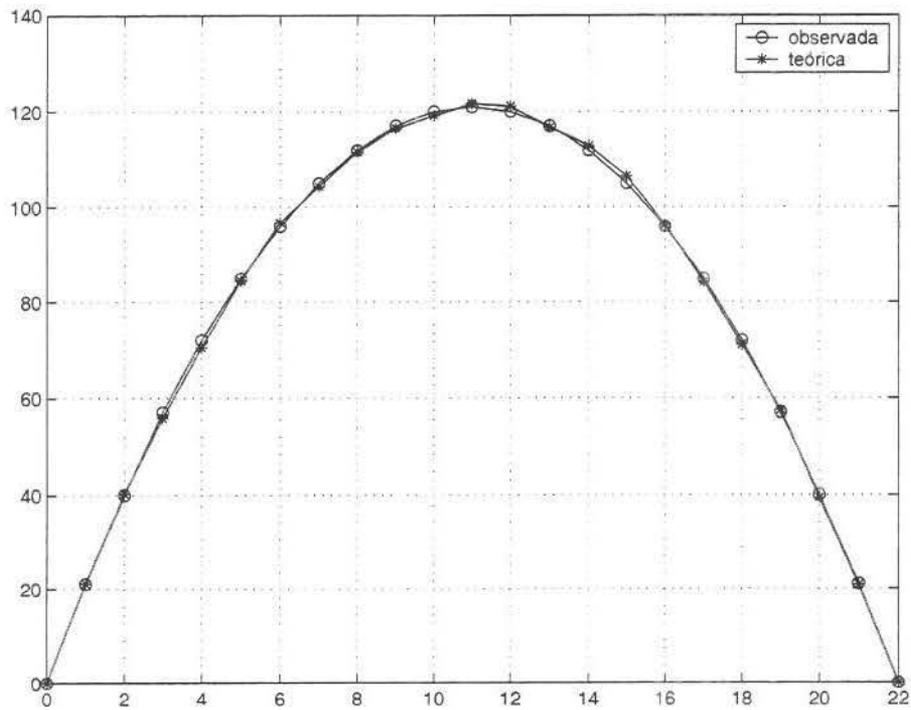


Figura 5.3: Peso médio teórico e observado de um silo de tamanho  $N = 21$



### 5.2.1 Tempos de acoplamento

Analisando-se as Figuras 5.4 a 5.6 é razoável considerarmos, para cada um dos silos de tamanho  $N = 5, 15, 21$ , que os tempos são distribuídos aproximadamente segundo uma distribuição Normal. A Tabela 5.4 traz os intervalos de confiança para a média dos tempos de acoplamento.

Tabela 5.4: Intervalo de confiança para o tempo médio de acoplamento  $(\overline{T(K)})$ , considerando-se silos de tamanho  $N$  e o valor  $K$

$N$	$K$	$\bar{T}$	$S$	IC(95%)
5	10.000	140.2	12	(139.89; 140.55)
15	30.000	1160.4	54.5	(1159.9; 1161.9)
21	50.000	2268.7	87.5	(2266.25; 2271.11)

Figura 5.4: Histograma de frequência relativa dos tempos de acoplamento para um silo de tamanho 5

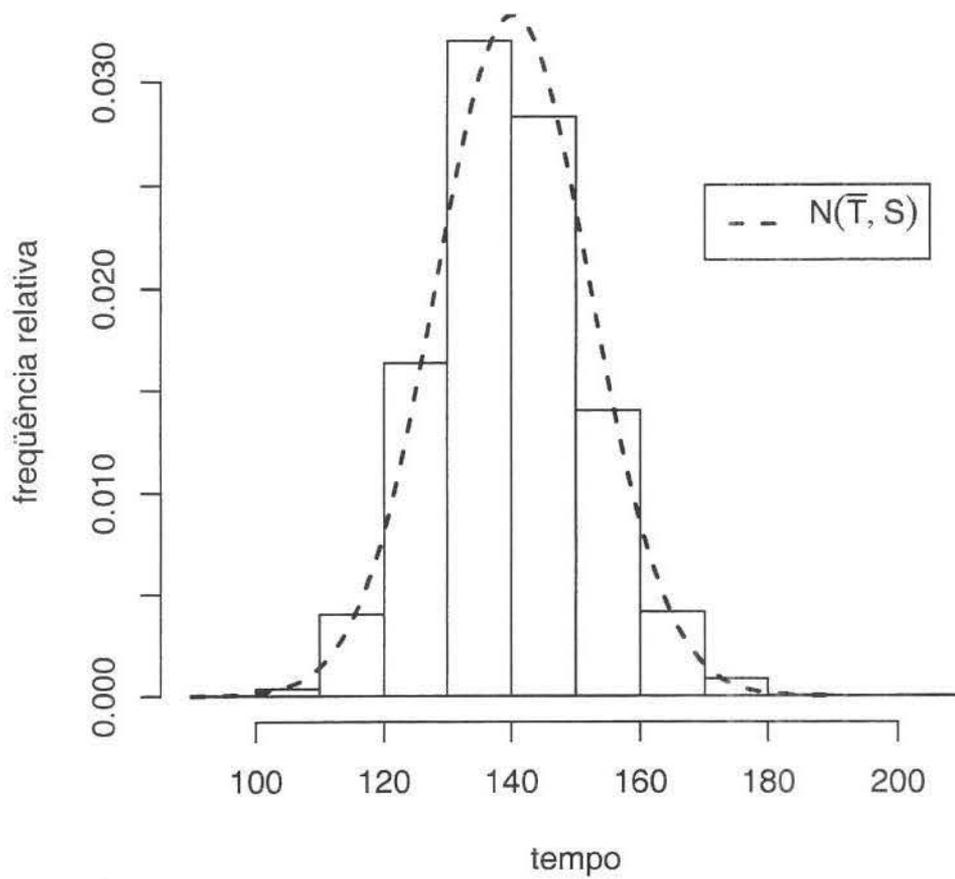


Figura 5.5: Histograma de frequência relativa dos tempos de acoplamento para um silo de tamanho 15

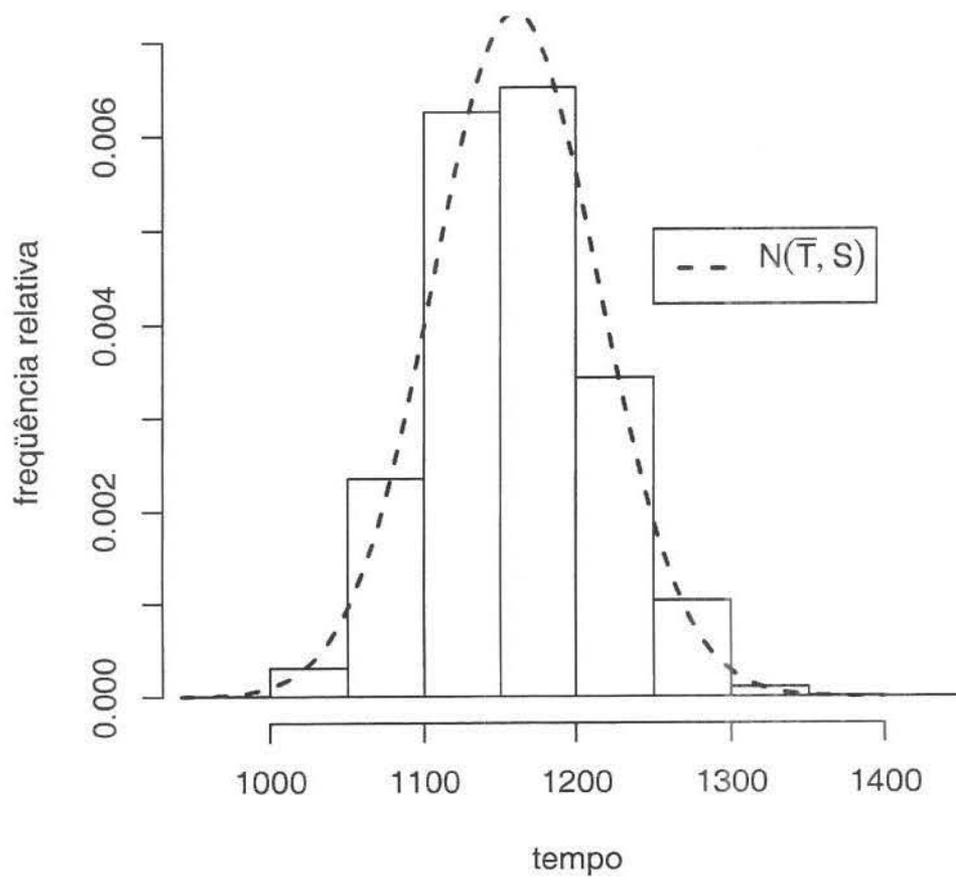
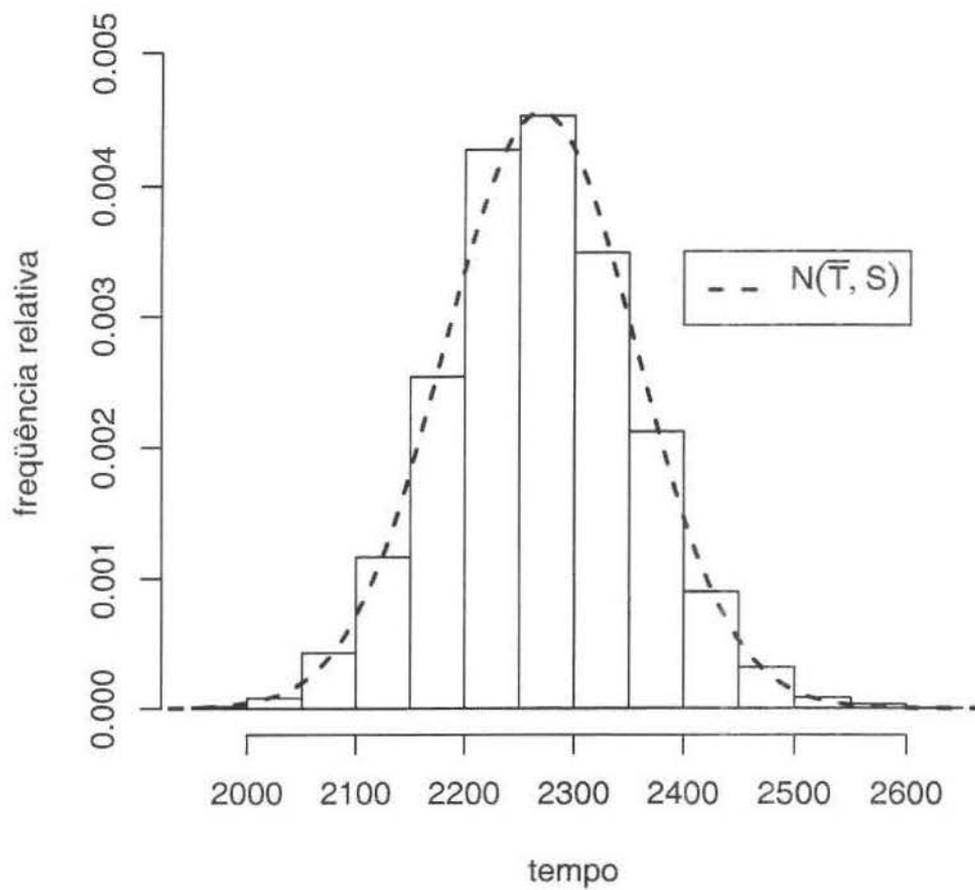


Figura 5.6: Histograma de frequência relativa dos tempos de acoplamento para um silo de tamanho 21



### 5.3 Investigando a distribuição do tempo de acoplamento ( $T(K)$ ) como função do tamanho do silo ( $N$ )

Com o intuito de verificar empiricamente qual a distribuição do tempo de acoplamento  $T(K)$  como função do tamanho do silo  $N$  geramos, para cada silo de tamanho  $N$ , uma observação correspondente ao tempo de acoplamento  $T(K)$ . Esperamos que o tempo de acoplamento, observado em número de interações, aumente consideravelmente à medida que o tamanho do silo cresce; além disso, consideramos a hipótese de que  $T(K) = N^\alpha$ , para  $\alpha$  constante. Tomando o logaritmo, temos que

$$\log(T(K)) = \alpha \log(N) + C, \quad (5.6)$$

onde  $C$  é constante.

Os tempos observados encontram-se na Tabela . Através da Tabela 5.6, observamos que o valor da variável  $\alpha$  e da constante  $C$  é aproximadamente 2, de tal forma que o tempo estimado ( $\hat{T}(K)$ ) é dado por

$$\log(\hat{T}(K)) = 2 * \log(N) + 2. \quad (5.7)$$

Tabela 5.5: Tempo de acoplamento ( $T(K)$ ), considerando-se silos de tamanho  $N$

$N$	$T(K) = \text{n\u00fameros de passos}$	$N$	$T(K) = \text{n\u00fameros de passos}$
5	132	115	82328
15	1233	125	95160
25	3524	135	112647
35	6978	145	135361
45	11353	155	152432
55	16760	165	172733
65	24382	175	196077
75	33157	185	221404
85	44529	195	246185
95	55541	205	271789
105	65801		

Tabela 5.6: Análise de Regressão

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	1	21153	21153	5683378	<.0001
Error	14998	55.82244	0.00372		
Corrected Total	14999	21209			

Root MSE	0.06101	R-Square	0.9974
Dependent Mean	6.57371	Adj R-Sq	0.9974
Coeff Var	0.92806		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr >  t
C	1	1.81809	0.00206	884.25	<.0001
alpha	1	1.93790	0.0008129	2383.98	<.0001

## 5.4 Conclusão

Através das Figuras 5.1 a 5.3 observamos que a média observada é bem próxima da média teórica. Além disso, através do teste para comparação de médias notamos que a hipótese de igualdade das médias não é rejeitada em nenhum dos casos. No caso das matrizes de covariância também obtivemos bons resultados, uma vez a hipótese de igualdade de covariâncias não é rejeitada para os silos de diversos tamanhos. Estes resultados mostram que em termos do primeiro e segundo momentos as observações satisfazem os resultados teóricos associados à medida invariante. Portanto, podemos concluir que ainda que o algoritmo CFTP seja construído segundo um truncamento, o mesmo permite obtermos bons resultados.

Apesar de termos obtido bons resultados, não podemos deixar de comentar que para a adaptação do algoritmo CFTP ao problema dos silos definimos o acoplamento das cadeias segundo um erro a priori. Por este motivo, e, pelo fato de truncarmos o espaço de estados inicial, seria interessante se futuramente conseguíssemos propor um algoritmo através do qual fosse possível obtermos, de forma exata, amostras da distribuição invariante  $\pi$ .

## Apêndice A

### Matrizes de covariância

Matriz de covariância teórica para  $N = 5$ .

10.89	0.00	-4.05	0.00	-1.50
0.00	16.68	0.00	-6.02	0.00
-4.05	0.00	18.77	0.00	-4.05
0.00	-6.02	0.00	16.68	0.00
-1.50	0.00	-4.05	0.00	10.89

Matriz de covariância estimada para  $N = 5$ .

10.29	0.18	-4.06	-0.07	-1.51
0.18	16.38	-0.64	-6.03	0.11
-4.06	-0.64	18.73	0.16	-4.11
-0.07	-6.03	0.16	16.54	-0.01
-1.51	0.11	-4.11	-0.01	11.24

Matriz de covariância teórica para  $N = 15$ .

217.12	0.00	1.46	0.00	-25.48	0.00	-32.50	0.00	-29.74	0.00	-22.57	0.00	-13.79	0.00	-4.61
0.00	455.02	0.00	-37.31	0.00	-64.61	0.00	-65.37	0.00	-53.58	0.00	-36.72	0.00	-18.43	0.00
1.46	0.00	712.57	0.00	-94.22	0.00	-106.24	0.00	-93.03	0.00	-68.97	0.00	-41.54	0.00	-13.79
0.00	-37.31	0.00	967.28	0.00	-153.12	0.00	-141.85	0.00	-111.30	0.00	-74.29	0.00	-36.72	0.00
-25.48	0.00	-94.22	0.00	1196.02	0.00	-202.61	0.00	-165.53	0.00	-117.67	0.00	-68.97	0.00	-22.57
0.00	-64.61	0.00	-153.12	0.00	1376.79	0.00	-235.17	0.00	-173.80	0.00	-111.30	0.00	-53.58	0.00
-32.50	0.00	-106.24	0.00	-202.61	0.00	1492.45	0.00	-246.48	0.00	-165.53	0.00	-93.03	0.00	-29.74
0.00	-65.37	0.00	-141.85	0.00	-235.17	0.00	1532.23	0.00	-235.17	0.00	-141.85	0.00	-65.37	0.00
-29.74	0.00	-93.03	0.00	-165.53	0.00	-246.48	0.00	1492.45	0.00	-202.61	0.00	-106.24	0.00	-32.50
0.00	-53.58	0.00	-111.30	0.00	-173.80	0.00	-235.17	0.00	1376.79	0.00	-153.12	0.00	-64.61	0.00
-22.57	0.00	-68.97	0.00	-117.67	0.00	-165.53	0.00	-202.61	0.00	1196.02	0.00	-94.22	0.00	-25.48
0.00	-36.72	0.00	-74.29	0.00	-111.30	0.00	-141.85	0.00	-153.12	0.00	967.28	0.00	-37.31	0.00
-13.79	0.00	-41.54	0.00	-68.97	0.00	-93.03	0.00	-106.24	0.00	-94.22	0.00	712.57	0.00	1.46
0.00	-18.43	0.00	-36.72	0.00	-53.58	0.00	-65.37	0.00	-64.61	0.00	-37.31	0.00	455.02	0.00
-4.61	0.00	-13.79	0.00	-22.57	0.00	-29.74	0.00	-32.50	0.00	-25.48	0.00	1.46	0.00	217.12

Matriz de covariância estimada para  $N = 15$ .

207.68	7.93	-2.70	-0.94	-33.77	-3.67	-16.87	1.52	-22.58	-19.85	-23.48	-4.51	-9.11	12.05	-5.65
7.93	447.95	1.22	-54.32	-10.62	-48.46	5.70	-64.39	3.74	-63.86	8.97	-20.61	-7.17	-18.87	3.12
-2.70	1.22	734.23	-11.75	-89.72	4.80	-100.65	22.78	-111.53	-41.25	-108.60	-24.31	-28.77	15.56	-3.97
-0.94	-54.32	-11.75	1005.02	-14.27	-174.88	15.19	-145.15	7.46	-91.29	13.93	-87.90	22.93	-33.18	0.03
-33.77	-10.62	-89.72	-14.27	1265.74	6.79	-205.34	22.13	-139.08	-16.10	-153.44	15.02	-70.50	-12.79	-12.00
-3.67	-48.46	4.80	-174.88	6.79	1381.21	-27.68	-249.06	-36.18	-170.07	20.93	-108.95	-27.75	-46.88	5.01
-16.87	5.70	-100.65	15.19	-205.34	-27.68	1491.24	-21.45	-261.76	26.87	-156.85	2.96	-120.99	-2.10	-30.52
1.52	-64.39	22.78	-145.15	22.13	-249.06	-21.45	1541.25	-26.48	-245.97	-2.92	-127.78	2.59	-63.63	-8.56
-22.58	3.74	-111.53	7.46	-139.08	-36.18	-261.76	-26.48	1555.05	14.45	-175.24	42.89	-115.74	-1.21	-51.99
-19.85	-63.86	-41.25	-91.29	-16.10	-170.07	26.87	-245.97	14.45	1370.81	-23.11	-159.50	0.10	-66.62	-1.36
-23.48	8.97	-108.60	13.93	-153.44	28.93	-156.85	-2.92	-175.24	-23.11	1205.36	-22.16	-85.39	-5.43	-20.15
-4.51	-20.61	-24.31	-87.90	15.02	-108.95	2.96	-127.78	42.89	-159.50	-22.16	955.33	-10.68	-36.77	13.53
-9.11	-7.17	-26.77	22.93	-70.50	-27.75	-120.99	2.59	-115.74	0.10	-85.39	-10.68	714.53	-25.58	11.58
12.05	-18.87	15.56	-33.18	-12.79	-46.88	-2.10	-63.63	-1.21	-66.62	-5.43	-36.77	-25.58	470.41	1.79
-5.65	3.12	-3.97	0.03	-12.00	5.01	-30.52	-8.56	-51.99	-1.36	-20.15	13.53	11.58	1.79	223.49

Matriz de covariância teórica para  $N = 21$ .

495.34	0.00	51.51	0.00	-16.24	0.00	-49.11	0.00	-61.52	0.00	-61.78	0.00	-55.06	0.00	-44.61	0.00	-32.41	0.00	-19.54	0.00	-6.52
0.00	1087.10	0.00	13.21	0.00	-78.15	0.00	-118.27	0.00	-127.79	0.00	-119.34	0.00	-100.92	0.00	-77.53	0.00	-52.10	0.00	-26.08	0.00
51.51	0.00	1768.45	0.00	-80.77	0.00	-166.49	0.00	-195.98	0.00	-191.89	0.00	-168.62	0.00	-135.37	0.00	-97.73	0.00	-58.70	0.00	-19.54
0.00	13.21	0.00	2506.02	0.00	-204.15	0.00	-265.38	0.00	-272.48	0.00	-247.93	0.00	-206.30	0.00	-156.75	0.00	-104.54	0.00	-52.10	0.00
-16.24	0.00	-80.77	0.00	3257.30	0.00	-336.90	0.00	-362.15	0.00	-339.92	0.00	-291.29	0.00	-229.91	0.00	-164.00	0.00	-97.73	0.00	-32.41
0.00	-78.15	0.00	-204.15	0.00	3978.59	0.00	-463.75	0.00	-446.98	0.00	-392.29	0.00	-318.64	0.00	-237.95	0.00	-156.75	0.00	-77.53	0.00
-49.11	0.00	-166.49	0.00	-336.90	0.00	4629.20	0.00	-573.27	0.00	-512.57	0.00	-425.37	0.00	-327.97	0.00	-229.91	0.00	-135.37	0.00	-44.61
0.00	-118.27	0.00	-265.38	0.00	-463.75	0.00	5173.79	0.00	-657.12	0.00	-553.89	0.00	-436.68	0.00	-318.64	0.00	-206.30	0.00	-100.92	0.00
-61.52	0.00	-195.98	0.00	-362.15	0.00	-573.27	0.00	5583.80	0.00	-709.63	0.00	-567.99	0.00	-425.37	0.00	-291.29	0.00	-168.62	0.00	-55.06
0.00	-127.79	0.00	-272.48	0.00	-446.98	0.00	-657.12	0.00	5838.30	0.00	-727.49	0.00	-553.89	0.00	-392.29	0.00	-247.93	0.00	-119.34	0.00
-61.78	0.00	-191.89	0.00	-339.92	0.00	-512.57	0.00	-709.63	0.00	5924.56	0.00	-709.63	0.00	-512.57	0.00	-339.92	0.00	-191.89	0.00	-61.78
0.00	-119.34	0.00	-247.93	0.00	-392.29	0.00	-553.89	0.00	-727.49	0.00	5838.30	0.00	-657.12	0.00	-446.98	0.00	-272.48	0.00	-127.79	0.00
-55.06	0.00	-168.62	0.00	-291.29	0.00	-425.37	0.00	-567.99	0.00	-709.63	0.00	5583.80	0.00	-573.27	0.00	-362.15	0.00	-195.98	0.00	-61.52
0.00	-100.92	0.00	-206.30	0.00	-318.64	0.00	-436.68	0.00	-553.89	0.00	-657.12	0.00	5173.79	0.00	-463.75	0.00	-265.38	0.00	-118.27	0.00
-44.61	0.00	-135.37	0.00	-229.91	0.00	-327.97	0.00	-425.37	0.00	-512.57	0.00	-573.27	0.00	4629.20	0.00	-336.90	0.00	-166.49	0.00	-49.11
0.00	-77.53	0.00	-156.75	0.00	-237.95	0.00	-318.64	0.00	-392.29	0.00	-446.98	0.00	-463.75	0.00	3978.59	0.00	-204.15	0.00	-78.15	0.00
-32.41	0.00	-97.73	0.00	-164.00	0.00	-229.91	0.00	-291.29	0.00	-339.92	0.00	-362.15	0.00	-336.90	0.00	3257.30	0.00	-80.77	0.00	-16.24
0.00	-52.10	0.00	-104.54	0.00	-156.75	0.00	-206.30	0.00	-247.93	0.00	-272.48	0.00	-265.38	0.00	-204.15	0.00	2506.02	0.00	13.21	0.00
-19.54	0.00	-58.70	0.00	-97.73	0.00	-135.37	0.00	-168.62	0.00	-191.89	0.00	-195.98	0.00	-166.49	0.00	-80.77	0.00	1768.45	0.00	51.51
0.00	-26.08	0.00	-52.10	0.00	-77.53	0.00	-100.92	0.00	-119.34	0.00	-127.79	0.00	-118.27	0.00	-78.15	0.00	13.21	0.00	1087.10	0.00
-6.52	0.00	-19.54	0.00	-32.41	0.00	-44.61	0.00	-55.06	0.00	-61.78	0.00	-61.52	0.00	-49.11	0.00	-16.24	0.00	51.51	0.00	495.34

Matriz de covariância estimada para  $N = 21$ .

495.07	0.37	45.99	-26.77	-21.55	20.05	-21.02	6.49	-91.11	6.33	-72.64	-61.91	-35.23	7.18	-30.44	18.62	-51.01	20.52	-10.35	5.70	3.42
0.37	1099.73	-22.64	34.87	-15.05	-61.89	-4.87	-114.51	38.73	-163.19	45.37	-100.04	-22.15	-135.81	22.78	-81.51	45.35	-67.66	-23.68	-14.73	7.53
45.99	-22.64	1626.55	-57.05	-67.68	16.22	-217.91	-12.68	-97.60	46.23	-143.23	72.68	-117.39	-31.50	-160.54	-53.49	-96.02	-24.99	-11.51	6.82	-39.13
-26.77	34.87	-57.05	2452.77	45.44	-224.76	-45.19	-287.44	89.42	-214.46	-62.91	-289.13	19.05	-140.41	-6.00	-205.71	30.29	-110.21	-35.36	-21.51	9.77
-21.55	-15.05	-67.68	45.44	3202.33	-15.31	-268.31	1.63	-383.05	101.24	-373.17	-56.71	-318.60	-17.91	-168.30	54.30	-190.67	47.98	-136.08	-17.87	-18.76
20.05	-61.89	16.22	-224.76	-15.31	1078.00	-49.76	-387.27	20.71	-409.12	30.20	-394.17	-26.39	-311.94	78.01	-224.82	-42.08	-197.59	80.01	-100.90	-16.52
-21.02	-4.87	-217.91	-45.19	-268.31	-49.76	4614.40	-11.91	-442.41	102.15	-490.28	-31.55	-497.71	228.33	-258.98	-111.66	-272.80	12.72	-127.56	21.15	-73.69
6.49	-114.51	-12.68	-287.44	1.63	-387.27	-11.91	5166.91	117.00	-668.87	-43.40	-548.24	-0.77	-414.84	-54.82	-300.93	-126.22	-227.83	43.28	-136.18	-3.21
-91.11	38.73	-97.60	89.42	-383.05	20.71	-442.41	117.00	5489.52	-52.23	-740.11	-58.61	-454.98	45.59	-424.14	-39.12	-298.93	76.20	-132.29	-54.37	-52.54
6.33	-163.19	46.23	-214.46	101.24	-409.12	102.15	-668.87	-52.23	5626.92	-42.81	-602.16	71.51	-538.42	-109.36	-385.76	16.68	-200.07	-55.73	-137.35	-68.91
-72.64	45.37	-143.23	-62.91	-373.17	30.20	-490.28	-43.40	-740.11	-42.81	5852.78	-43.26	-804.09	-94.86	-417.54	59.76	-324.71	-79.92	-207.07	-10.07	-78.63
-61.91	-100.04	72.68	-289.13	-56.21	-394.17	-31.55	-548.24	-58.61	-602.16	-43.26	5921.52	136.24	-814.09	51.76	-465.03	39.40	-269.04	-20.50	-135.41	13.70
-35.23	-22.15	-117.39	19.05	-318.60	-26.39	-497.71	-0.77	-454.98	71.51	-804.09	136.24	5505.33	64.62	-512.93	36.69	-314.35	-4.09	-141.89	26.47	-40.21
7.18	-135.81	-31.50	-140.41	-17.91	-311.94	228.33	-414.84	45.59	-538.42	-94.86	-814.09	64.62	5339.67	-46.34	-518.15	-56.47	-241.38	-22.73	-108.05	23.26
-38.44	22.78	-168.54	-6.00	-168.30	78.01	-258.98	-54.82	-424.14	-109.36	-417.54	51.76	-512.93	-46.34	4613.80	59.94	-354.92	-107.45	-189.01	32.85	-42.13
18.62	-81.51	-53.49	-205.71	54.30	-224.82	-111.66	-300.93	-39.12	-385.76	59.76	-465.03	36.69	-518.15	59.94	4034.00	2.96	-164.18	9.58	-67.74	12.57
-51.01	45.35	-96.02	30.29	-190.67	-42.08	-272.80	-126.22	-298.93	16.68	-324.71	39.40	-314.35	-56.47	-354.92	2.96	3288.34	-60.28	-87.62	-43.93	-3.18
20.52	-67.66	-24.99	-110.21	47.98	-197.59	12.72	-227.83	76.20	-200.07	-79.92	-269.04	-4.09	-241.38	-107.45	-164.18	-60.28	2481.86	-18.80	30.72	-3.08
-10.35	-23.68	-11.51	-35.36	-136.08	80.01	-127.56	43.28	-132.29	-55.73	-207.07	-20.50	-141.89	-22.73	-189.01	9.58	-87.62	-18.80	1766.30	-2.83	59.47
5.70	-14.73	6.82	-21.51	-17.87	-100.90	21.15	-136.18	-54.37	-137.35	-10.07	-135.41	26.47	-108.05	32.85	-67.74	-43.93	30.72	-2.83	1083.38	-6.69
3.42	7.53	-39.13	8.77	-18.76	-16.52	-73.69	-3.21	-52.54	-68.91	-78.63	13.70	-40.21	23.26	-42.13	12.57	-3.18	-3.08	59.47	-6.69	480.73

## Apêndice B

# Programas implementados no MATLAB

A função amostra executa a função coupsilos, a qual recebe como parâmetros o tamanho do silo (n), a semente, o valor de K (onde truncamos o espaço de estados inicial) e o número de observações a serem geradas (nobs).

```
function valor=amostra(n,semente,maximo,nobs)

    echo off; rand('state',semente); format long; tic;

    x=[]; for i=1:nobs
        x=coupsilos5(n,maximo);
    end;

    tfim = toc; disp(tfim); valor=0;
```

```
function [valor] = coupsilos(n,maximo)
```

```
    e=10-5;
```

```
    u=[];
```

```
    u(1:n,1)=0;
```

```
    fim=0;
```

```
    t = 0;
```

```
    nmat=2;
```

```
    v=[];
```

```
    v=eye(n);
```

```
    i = 1;
```

```
    mat1=zeros(n,1);
```

```
    mat2=zeros(n,1);
```

```
    vet1=zeros(n,1);
```

```
    vet2=zeros(n,1);
```

```
    vet1(:,1)=0;
```

```
    vet2(:,1)=maximo;
```

```
    acumula=zeros(n,1);
```

```
    m=[];
```

```
    while (fim==0)
```

```
        t = t-1;
```

```
        for k=1:n
```

```

        u(k,1) = rand;
    end;

    m = zeros(n,n);
    x = zeros(n,1,nmat);
    m(1,2)=u(2);
    m(n,n-1)=1-(u(n-1));

    for j=2:n-1
        m(j,j-1)=1-u(j-1);
        m(j,j+1)=u(j+1);
    end;

    i=i+1;

    v = v*m;
    mat1 = ones(n,1) + acumula + v*vet1;
    mat2 = ones(n,1) + acumula + v*vet2;
    acumula=acumula+v*ones(n,1);

    if ((norm(mat1-mat2,inf)) < e) & (fim==0)
        mat1 = mat2;
        tacoplou = i;
        fim=1;
    end;

```

```

end;

cabecalho=' ';
for i=1:n
    cabecalho = strcat(cabecalho,' %12.10f');
end;
cabecalho = strcat(cabecalho(2:length(cabecalho)),'\n');

nomearq1 = strcat('c:\users\mariana\novos\amostra',num2str(n),'.dat');
nomearq2 = strcat('c:\users\mariana\novos\tempos',num2str(n),'.dat');

fid=fopen(nomearq1,'a');
fprintf(fid,cabecalho,mat1');
fclose(fid);

fid=fopen(nomearq2,'a');
fprintf(fid,'%12.1f\n',(-1)*t);
fclose(fid);

valor = mat1;

```

# Referências Bibliográficas

- [Chung, 1992] Chung, K. L. (1992). *A course in probability theory*.
- [Ferrari et al., 2000] Ferrari, P. A., Garcia, N. L., and Martinez, S. (2000). The problem of the silos. Technical Report 19/00, Unicamp.
- [Fismen, 1997] Fismen, M. (1997). Exact simulation using Markov chains. Master's thesis.
- [Kendall, 1998] Kendall, W. (1998). Perfect simulation for the area-interaction point process. *Probability Towards 2000*, pages 218–234.
- [Ligget, 1985] Ligget, T. M. (1985). *Interacting particle systems*. Springer, New York.
- [Muirhead, 1946] Muirhead, R. J. (1946). *Aspects of multivariate statistical theory*.
- [Murdoch and Green, 1998a] Murdoch, D. and Green, P. J. (1998a). Exact sampling from a continuous state space. *Scandinavian Journal of Statistics*, 25:483–502.

[Murdoch, 2000] Murdoch, D. J. (2000). Exact sampling for bayesian inference: Unbonded state spaces. *American Mathematical Society*, 26.

[Murdoch and Green, 1998b] Murdoch, D. J. and Green, P. (1998b). Exact sampling for bayesian inference: towards general purpose algorithms. *Bayesian Statistics*, 6.