ERRATA nos 2 exemplares da tese do aluno Junior Cesar Alves Soares:

Em folha de rosto:

Onde se lê:	Leia-se:
Campinas-SP 19 de dezembro de 2011	Campinas, 2011

Prof. Dr. Luiz Koodi Hotta
Coordenador CPG/IMECC
Matric. 042471 - UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática Aplicada

Simetrias de Lie
da equação de Burgers generalizada

Junior Cesar Alves Soares
Mestrado em Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Igor Leite Freire

Este trabalho contou com suporte financeiro da Agência Financiadora CAPES.

Campinas-SP
19 de dezembro de 2011

Simetrias de Lie
da equação de Burgers generalizada

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Junior Cesar Alves Soares** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 03 de Novembro de 2011.

Igor Leite Freire

Prof. Dr. Igor Leite Freire
Orientador

Banca examinadora:
Prof. Dr. Igor Leite Freire (UFABC)
Prof. Dr. Yuri Dimitrov Bozhkov (UNICAMP)
Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva (UFABC)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática Aplicada**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

	Soares, Junior Cesar Alves, 1986-
So11s	Simetrias de Lie da equação de Burgers generalizada / Junior Cesar Alves Soares. – Campinas, [S.P.: s.n.], 2011.
	98f. : il.
	Orientador: Igor Leite Freire.
	Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
	1.Burgers, Equação de. 2.Equação de calor. 3.Lie, Simetrias de. 4. Hopf-Cole, Transformação de. I. Freire, Igor Leite. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título

Informações para Biblioteca Digital

Título em Inglês: Lie point symmetries of generalized Burgers' equation

Palavras-chave em inglês (Key-words): Burgers' equation. Heat equation. Lie point symmetry. Hopf-Cole transformation.

Área de Concentração: Matemática Aplicada.

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada.

Banca Examinadora: Prof. Dr. Igor Leite Freire [Orientador] (UFABC)
Prof. Dr. Yuri Dimitrov Bozhkov (UNICAMP)
Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva (UFABC)

Data da defesa: 03/11/2011

Programa de Pós-graduação: Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 03 de novembro de 2011 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

____
Prof.(a). Dr(a). IGOR LEITE FREIRE

____
Prof.(a). Dr(a). YURI DIMITROV BOZHKOV

____
Prof.(a). Dr(a). MÁRCIO FABIANO DA SILVA

Aos meus pais, Vicente de Paula Soares
e Maria Luzenil Alves Soares,
e a minha irmã
Rafaela Alves Soares.

Agradecimentos

Aqui, quero prestar uma homenagem às pessoas que me ajudaram a alcançar essa conquista tão importante na minha vida profissional.

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pela força e paz de espírito que me deu nesses anos aqui em Campinas, sem a qual não suportaria as dificuldades e os desafios. Agradeço às pessoas mais importantes de minha vida, meus pais, pelo carinho, amor e investimento que vem de longa data. Sem vocês seria impossível este triunfo.

Agradeço a minha irmã Rafaela, minha amiga e conselheira, por todos os momentos de apoio.

Agradeço a Mary por ter juntamente comigo sonhado com a conquista desse curso de mestrado.

Agradeço a todos os colegas de mestrado que juntamente comigo trilharam essa fase tão importante na formação matemática, em especial a Marta Macufa, Felipe Fidalgo, Bruno Amaro, Raphael Vilamiu, Luiz Rafael e Felipe Chaves.

Agradeço ao meu orientador, Igor Leite Freire, que desde a graduação tem me ajudado, dando conselhos e orientações valiosíssimas para minha carreira matemática e que foi a ponte para que eu viesse para UNICAMP cursar pós-graduação.

Agradeço ao Cristiano Torrezan que ao longo desses anos se mostrou sempre prestativo e que me ajudou muito.

Agradeço ao meu orientador de graduação, Aldi Nestor, que me apoiou nesse projeto de cursar pós-graduação, dando dicas de como buscar uma formação matemática.

Agradeço ao meu grande amigo, Samuel Barreto, pelas palavras de motivação.

Agradeço aos meus parentes, em especial, ao meu avô, José Emiliano Soares, que nas muitas conversas que tivemos e, principalmente nas histórias que narrou a respeito de sua própria vida fez com que eu pensasse em alçar voos mais altos. Agradeço a minha querida avó, Maria Madalena, pelo carinho, amor e pelo cafezinho maravilhoso que só ela sabe fazer.

Agradeço ao Pr. Geovani que me acolheu tão bem na Igreja do Nazareno de Campinas, agradeço ao Pr. Rafael Borges da Igreja Batista Casa de Deus Campinas.

Agradeço ao Pr. Osvaldo Araújo Coutinho, da Igreja Batista Nacional-MT, pelas orações, pelo carinho e amizade. Agradeço a todos aqueles que direta e indiretamente participaram da minha formação, aqueles que limpavam a sala onde eu estudava, em especial, à dona Lourdes, aos funcionários da biblioteca, em especial, a Geani, também, aos funcionários da secretaria de pós-graduação, em especial, Lívia, Edinaldo e Tânia.

Agradeço aos professores do IMECC, em especial, aos professores Aurélio Ribeiro Leite de Oliveira, Márcia Aparecida Gomes Ruggiero, João Frederico da Costa Azevedo Meyer e Yuri Dimitrov Bozhkov.

Aos amigos conquistados em Campinas Kênio Silva, Luiz Fernando, Juliano Souza.

Aos meus companheiros de república Marcos, Michael, Gilberto e Fernando pelo apoio, amizade e pelo ambiente familiar.

Agradeço ao povo Brasileiro que através da Capes me deu apoio financeiro.

“Bendize, ó minha alma, ao SENHOR,
e tudo o que há em mim bendiga o seu santo nome.
Bendize, ó minha alma, ao SENHOR,
e não te esqueças de nenhum de seus benefícios.”
Salmos 103:1-2.

Resumo

Neste trabalho, é estudada uma generalização da equação de Burgers do ponto de vista da teoria de simetrias de Lie.

Palavras−chave
Equação de Burgers, equação de calor, simetrias de Lie, transformação de Hopf-Cole.

Abstract

In this work, a generalization of Burgers equation is studied from the point of view of Lie point symmetry theory.

Keywords Burgers' equation, heat equation, Lie point symmetry, Hopf-Cole transformation.

Sumário

Capítulo 1

Introdução às simetrias de Lie

As simetrias estão presentes nas leis que regem a natureza. Neste trabalho, estudaremos uma classe de equações do ponto de vista da teoria de simetrias de Lie.

A teoria que usaremos no presente trabalho começou a ser elaborada no século XIX pelo matemático norueguês Sophus Lie. Ele estava investigando os grupos contínuos de transformações que deixam as equações diferenciais invariantes inaugurando a área de simetrias de equações diferenciais (ver [11]). Essa teoria dá condições para que encontremos soluções de equações diferenciais com um algoritmo bem definido.

1.1 Grupos de transformações de Lie a um parâmetro

A seguir, definiremos o que é um grupo de transformações de pontos de Lie e apresentaremos a demonstração do teorema fundamental de Lie de maneira análoga à vista em [3, 5, 10, 12]. Além disso, utilizaremos, ao longo da dissertação, a convenção de Einstein, isto é, índices repetidos são somados.

Definição 1. *Seja $D \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, não-vazio, conexo. O conjunto de transformações $x^* = X(x;\epsilon)$ definido para cada $x = (x^1, x^2, ..., x^n) \in D$, dependendo de um* *parâmetro* $\epsilon \in S \subset \mathbb{R}$ *e munido de uma lei de composição de parâmetros*

$$\phi : S \times S \to S$$

forma um grupo de transformações em D *se:*

1. *Para cada parâmetro* ϵ *em* S *as transformações são injetivas em* D*, em particular* x^* *pertence a* D*;*

2. *O par* (S, ϕ) *forma um grupo* G*;*

3. *Se* e *denota o elemento neutro de* G*, então, para todo* $x \in D$*, temos* $x^* = X(x; e) = x$*;*

4. *Se* $x^* = X(x; \epsilon)$ *e* $x^{**} = X(x^*; \delta)$*, então,* $x^{**} = X(x; \phi(\epsilon, \delta))$*.*

Definição 2. *Um grupo de transformações define um grupo de transformações de pontos de Lie (GTPL) a* 1*-parâmetro se adicionarmos às propriedades anteriores as seguintes:*

1. ϵ *é um parâmetro contínuo, isto é,* S *é um intervalo de* $\mathbb{R}$*. Sem perda de generalidade,* $\epsilon = 0$ *corresponde ao elemento identidade;*

2. X *é infinitamente diferenciável com respeito a* $x \in D$ *e é uma função analítica de* $\epsilon \in S$*;*

3. $\phi(\epsilon, \delta)$ *é uma função analítica de* ϵ *e* δ*, para todo* $\epsilon, \delta \in S$*.*

1.2 Transformações infinitesimais

Considere um grupo de Lie a 1-parâmetro

$$x^* = X(x; \epsilon) \tag{1.1}$$

com identidade $\epsilon = 0$ e lei de composição ϕ. Fazendo a expansão de (1.1) em série de Taylor em torno de $\epsilon = 0$:

$$\begin{aligned} x^* &= x + \epsilon \left(\frac{\partial X(x;\epsilon)}{\partial \epsilon} \right) \Bigg|_{\epsilon=0} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= x + \epsilon \xi(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \tag{1.2}$$

onde

$$\xi(x) = \left(\frac{\partial X(x;\epsilon)}{\partial \epsilon} \right) \Bigg|_{\epsilon=0}. \tag{1.3}$$

A transformação

$$x \mapsto x + \epsilon \xi(x) \tag{1.4}$$

é chamada de transformação infinitesimal do (GTPL) (1.1), sendo $\xi(x) = (\xi^1(x), \cdots, \xi^n(x))$ chamado de infinitésimo.

1.3 Primeiro Teorema Fundamental de Lie

O seguinte lema será de grande importância para a demonstração do Primeiro Teorema Fundamental de Lie.

Lema 1. *Seja $x^* = X(x;\epsilon)$ um grupo de transformações de pontos de Lie. Então, vale a seguinte igualdade:*

$$X(x; \epsilon + \Delta\epsilon) = X(X(x;\epsilon); \phi(\epsilon^{-1}, \epsilon + \Delta\epsilon)), \tag{1.5}$$

onde ϵ^{-1} e $\Delta\epsilon$ denotam, respectivamente, o elemento inverso de ϵ e um pequeno incremento em ϵ.

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
X(X(x;\epsilon);\phi(\epsilon^{-1},\epsilon+\Delta\epsilon)) &= X(x;\phi(\epsilon,\phi(\epsilon^{-1},\epsilon+\Delta\epsilon))) \\
&= X(x;\phi(\phi(\epsilon,\epsilon^{-1}),\epsilon+\Delta\epsilon)) \\
&= X(x;\phi(0,\epsilon+\Delta\epsilon)) \\
&= X(x;\epsilon+\Delta\epsilon).
\end{aligned}
$$

$\square$

Teorema 1. *(Primeiro Teorema Fundamental de Lie). Existe uma parametrização $\tau(\epsilon)$ tal que a transformação do grupo de Lie* (1.1) *é equivalente à solução de um problema de valor inicial (PVI) para o sistema de equações diferenciais de primeira ordem:*

$$
\begin{cases} \dfrac{dx^*}{d\tau} &= \xi(x^*), \\ x^*\Big|_{\tau=0} &= x. \end{cases} \tag{1.6}
$$

Em particular,

$$
\tau(\epsilon) = \int_0^{\epsilon} \Gamma(\epsilon')d\epsilon', \tag{1.7}
$$

onde

$$
\Gamma(\epsilon) = \frac{\partial\phi(a,b)}{\partial b}\Bigg|_{(a,b)=(\epsilon^{-1},\epsilon)} \tag{1.8}
$$

e $\Gamma(0) = 1$.

O Primeiro Teorema Fundamental de Lie nos mostra que as transformações infinitesimais contêm as informações essenciais para a determinação de um (GTPL) a 1-parâmetro, isto é, fornece-nos o problema de valor inicial que o fluxo através do ponto x obedece. Além disso, pelo mesmo teorema, pode-se sempre (re)parametrizar um dado grupo em termos do parâmetro τ de modo que, para valores τ' e τ'', a lei de composição se torne

$$\phi(\tau', \tau'') = \tau' + \tau''.$$

Ademais, as transformações (1.1) definem um fluxo estacionário dado por (1.6), valendo, também, a recíproca.

Demonstração. Primeiro, fazendo a expansão em série de Taylor de (1.1) em relação ao último argumento, obtemos:

$$X(x; \epsilon + \Delta\epsilon) = x^* + \frac{\partial X(x; \Delta\epsilon)}{\partial \epsilon} \Delta\epsilon + \mathcal{O}((\Delta\epsilon)^2). \tag{1.9}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \phi(\epsilon^{-1}, \epsilon + \Delta\epsilon) &= \phi(\epsilon^{-1}, \epsilon) + \Gamma(\epsilon)\Delta\epsilon + \mathcal{O}((\Delta\epsilon)^2) \\ &= \Gamma(\epsilon)\Delta\epsilon + \mathcal{O}((\Delta\epsilon)^2) \end{aligned}$$

onde $\Gamma(\epsilon)$ é o definido por (1.8).

Pelo Lema 1,

$$\begin{aligned} X(x; \epsilon + \Delta\epsilon) &= X(x^*; \phi(\epsilon^{-1}, \epsilon + \Delta\epsilon)) \\ &= X(x^*; \Gamma(\epsilon)\Delta\epsilon + \mathcal{O}((\Delta\epsilon)^2)) \\ &= X(x^*; 0) + \Delta\epsilon\Gamma(\epsilon)\frac{\partial X}{\partial \delta}(x^*; \delta)\Big|_{\delta=0} + \mathcal{O}((\Delta\epsilon)^2) \\ &= x^* + \Gamma(\epsilon)\xi(x^*)\Delta\epsilon + \mathcal{O}((\Delta\epsilon)^2). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Comparando (1.9) com (1.10), obtemos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} \frac{dx^*}{d\epsilon} &= \Gamma(\epsilon)\xi(x^*), \\ x^*(0) &= x. \end{aligned}$$

Segue, então, de (1.2), que $\Gamma(0) = 1$. Consequentemente, a aplicação

$$\tau(\epsilon) := \int_0^{\epsilon} \Gamma(\epsilon')d\epsilon'$$

cumpre (1.6). O teorema de Existência e Unicidade para um sistema de equações diferenciais nos garante que (1.6) tem solução única. Desde que (1.1) é solução deste problema, completamos a prova do teorema. □

1.4 Geradores infinitesimais

Em virtude do Primeiro Teorema Fundamental de Lie, de agora em diante, sem perda de generalidade, assumiremos que o (GTPL) é parametrizado de tal forma que sua lei de composição seja dada por

$$\phi(a, b) = a + b,$$

onde

$$\epsilon^{-1} = -\epsilon \quad \text{e} \quad \Gamma(\epsilon) = 1.$$

Definição 3. *O operador diferencial*

$$X = X(x) = \xi(x).\nabla = \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{1.11}$$

onde ∇ é o operador gradiente

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) \tag{1.12}$$

que é chamado de gerador infinitesimal do (GTPL) (1.1)*.*

Para toda função diferenciável $F(x) = F(x^1, x^2, \ldots, x^n)$,

$$XF(x) = \xi(x).\,\nabla F(x) = \xi^i(x)\frac{\partial F(x)}{\partial x^i}.$$

Em particular,

$$\begin{aligned} Xx &= \xi(x).\,\nabla x = \xi^i(x)\frac{\partial x}{\partial x^i} \\ &= \xi^1\left(\frac{\partial x}{\partial x^1}\right) + \xi^2\left(\frac{\partial x}{\partial x^2}\right) + \cdots + \xi^n\left(\frac{\partial x}{\partial x^n}\right) \\ &= \xi^i(x)e_i = \xi(x). \end{aligned}$$

Teorema 2. *O (GTPL) a* 1*-parâmetro pode ser escrito da seguinte maneira:*

$$x^* = e^{\epsilon X}x = x + \epsilon Xx + \frac{\epsilon^2}{2}X^2x + \cdots = [1 + \epsilon X + \frac{\epsilon^2}{2}X^2 + \cdots]x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\epsilon^k}{k!}X^kx \tag{1.13}$$

onde o operador X é definido por (1.11) *e o operador $X^k = XX^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots,$ sendo $X^0F(x) = F(x)$ para qualquer função diferenciável $F(x)$.*

Demonstração. Sejam

$$X = X(x) = \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{e} \quad X(x^*) = \xi^i(x^*)\frac{\partial}{\partial x^{*i}}, \tag{1.14}$$

onde

$$x^* = X(x;\epsilon) \tag{1.15}$$

é o (GTPL). Do Teorema de Taylor, expandindo (1.15) em torno de $\epsilon = 0$, temos

$$x^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \left(\frac{\partial^k X(x;\epsilon)}{\partial \epsilon^k} \right) \bigg|_{\epsilon=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \left(\frac{d^k x^*}{d\epsilon^k} \right) \bigg|_{\epsilon=0}. \tag{1.16}$$

Para toda função diferenciável $F(x)$

$$\frac{d}{d\epsilon} F(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x^*)}{\partial x^{*i}} \frac{dx^{*i}}{d\epsilon} = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x^*) \frac{\partial F(x^*)}{\partial x^{i*}} = X(x^*)F(x^*). \tag{1.17}$$

Portanto, disso segue

$$\frac{dx^*}{d\epsilon} = X(x^*)x^* \tag{1.18}$$

$$\frac{d^2 x^*}{d\epsilon^2} = \frac{d}{d\epsilon} \left(\frac{dx^*}{d\epsilon} \right) = X(x^*)X(x^*)x^* \tag{1.19}$$

e, em geral,

$$\frac{d^k x^*}{d\epsilon^k} = X^k(x^*)x^*, \qquad k = 1, 2, \ldots \quad . \tag{1.20}$$

Consequentemente,

$$\frac{d^k x^*}{d\epsilon^k} \bigg|_{\epsilon=0} = X^k(x)x, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{1.21}$$

da qual vem (1.13).

Portanto, a expansão na série de Taylor em torno de $\epsilon = 0$ da função $X(x;\epsilon)$, a qual define um (GTPL) com a lei de composição $\phi(a,b) = a + b$, é determinado pelo coeficiente de seu termo de $\mathcal{O}(\epsilon)$, o qual é o infinitesimal

$$\left.\frac{\partial X(x;\epsilon)}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \xi(x). \tag{1.22}$$

□

Corolário 1. *Se $F(x)$ é uma função infinitamente diferenciável, então, para o (GTPL)* (1.1) *com gerador infinitesimal* (1.11)*, teremos $F(x^*) = F(e^{\epsilon X}x) = e^{\epsilon X}F(x)$.*

Demonstração. Podemos escrever

$$F(e^{\epsilon X}x) = F(x^*) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!}\left(\left.\frac{d^kF(x^*)}{d\epsilon^k}\right|_{\epsilon=0}\right).$$

De (1.17), temos que

$$\frac{d^2F(x^*)}{d\epsilon^2} = X^2(x^*)F(x^*)$$

e, portanto,

$$\frac{d^kF(x^*)}{d\epsilon^k} = X^k(x^*)F(x^*).$$

Assim,

$$\left.\frac{d^kF(x^*)}{d\epsilon^k}\right|_{\epsilon=0} = X^k(x)F(x).$$

Consequentemente, $F(x^*) = F(e^{\epsilon X}x) = e^{\epsilon X}F(x)$. □

1.5 Funções invariantes

Definição 4. *Uma função infinitamente diferenciável $F(x)$ é uma função invariante do (GTPL)* (1.1) *se, e somente se,*

$$F(x^*) \equiv F(x). \tag{1.23}$$

Se $F(x)$ é uma função invariante por (1.1)*, então, $F(x)$ é chamada um invariante de* (1.1) *e é dita ser invariante por* (1.1) .

Teorema 3. *Uma função $F(x)$ é invariante sob um (GTPL)* (1.1) *se, e somente se,*

$$XF(x) \equiv 0. \tag{1.24}$$

Demonstração.

$$F(x^*) \equiv e^{\epsilon X}F(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} X^k F(x) \equiv F(x) + \epsilon XF(x) + \frac{\epsilon^2}{2!} X^2 F(x) + ... \tag{1.25}$$

Suponha $F(x^*) \equiv F(x)$. Então, $XF(x) \equiv 0$ segue de (1.25). Reciprocamente, seja $F(x)$ tal que $XF(x) = 0$. Então, $X^n F(x) \equiv 0$, para $n = 1, 2...$ Portanto, de (1.25), $F(x^*) \equiv F(x)$. □

Teorema 4. *Para um (GTPL)* (1.1)*, a identidade*

$$F(x^*) \equiv F(x) + \epsilon \tag{1.26}$$

vale se, e somente se, $F(x)$ é tal que

$$XF(x) \equiv 1. \tag{1.27}$$

Demonstração. Seja $F(x)$ tal que (1.26) seja válida. Então,

$$F(x^*) = F(x) + \epsilon = F(x) + \epsilon XF(x) + \frac{\epsilon^2}{2!} X^2 F(x) + ... \tag{1.28}$$

Portanto, $XF(x) \equiv 1$. Reciprocamente, seja $F(x)$ satisfazendo (1.27). Então, $X^n F(x) \equiv 0$, $n = 2, 3, \cdots$, e obtemos $F(x^*) \equiv e^{\epsilon X} F(x) \equiv F(x) + \epsilon XF(x) \equiv F(x) + \epsilon$. □

1.6 Pontos, curvas e superfícies invariantes

Definição 5. *Um ponto x e uma superfície $F(x) = 0$ são ditos invariantes pelo $(GTPL)$ (1.1) se, e somente se, $x^* = x$ sob (1.1) e $F(x^*) = 0$ quando $F(x) = 0$.*

Definição 6. *Uma curva $F(x, y) = 0$ é uma curva invariante por um $(GTPL)$*

$$x^* = X(x, y; \epsilon) = x + \epsilon \xi(x, y) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{1.29}$$

$$y^* = Y(x, y; \epsilon) = y + \epsilon \eta(x, y) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{1.30}$$

com gerador infinitesimal

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{1.31}$$

se, e somente se, $XF(x, y) = 0$ quando $F(x, y) = 0$.

Teorema 5. *Uma superfície escrita na forma $F(x) = x^n - f(x^1, \ldots, x^{n-1}) = 0$, é uma superfície invariante sob (1.1) se, e somente se, $XF(x) = 0$ quando $F(x) = 0$.*

Definição 7. *A família de superfícies $\omega(x) = c$, onde c é uma constante, é uma família de superfícies invariantes sob (1.1) se, e somente se, $\omega(x^*) = c^*$ quando $\omega(x) = c$, onde c e c^* são constantes.*

Definição 8. *A família de superfícies $\omega(x, y) = c$, onde c é uma constante, é uma família de superfícies invariantes sob (1.29), (1.30) se, e somente se, $\omega(x^*, y^*) = c^*$ quando $\omega(x, y) = c$, onde c e c^* são constantes.*

Teorema 6.
1. *Uma família de superfícies $\omega(x) = c$ é invariante sob a ação de (1.1) se, e somente se, $X\omega = \Omega(\omega)$ para alguma função $\Omega(\omega) \in C^\infty$.*

2. *Uma família de curvas $\omega(x, y) = c$ é uma família de superfícies invariantes para (1.29),*

(1.30) *se, e somente se,*

$$X\omega = \xi(x,y)\frac{\partial\omega}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial\omega}{\partial y} = \Omega(\omega),$$

para alguma função $\Omega(\omega) \in C^\infty$.

Demonstração. Seja $\omega(x) = c$ uma família de superfícies invariantes por (1.1). Então,

$$\omega(x^*) = e^{\epsilon X}\omega(x) = \omega(x) + \epsilon X\omega(x) + \frac{\epsilon^2}{2}X^2\omega(x) + \cdots = c^* = C(c,\epsilon).$$

Portanto, $X\omega(x) = \Omega(\omega)$ para alguma função $\Omega(\omega)$ quando $\omega(x) = c$. Segue que

$$X^2\omega = \Omega' X\omega = \Omega'(\omega)\Omega(\omega).$$

Reciprocamente, suponha $X\omega = \Omega(\omega)$ para alguma função $\Omega(\omega) \in C^\infty$. Então,

$$X^2\omega = \Omega'(\omega)\Omega(\omega) \quad \text{e} \quad X^n\omega = f_n(\omega),$$

para alguma função $f_n(\omega)$, $n = 1, 2, \ldots$ Consequentemente, se $\omega(x) = c$, então,

$$\omega(x^*) = e^{\epsilon X}\omega = \omega(x) + \epsilon X\omega(x) + \frac{\epsilon^2}{2}X^2\omega(x) + \cdots = \omega(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\epsilon^n f_n(\omega(x))}{n!} = c^*.$$

□

1.7 Transformações estendidas ou prolongamentos

Nesta seção, além de apresentar algumas notações, será introduzida a noção de uma transformação estendida. Tomamos $x = (x^1, \ldots, x^n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, onde D é um aberto não-vazio, e $u = u(x)$ é uma função infinitamente diferenciável definida em D com valores em algum subconjunto de $\mathbb{R}$.

Para todo $k \in \mathbb{N}$, $\partial^k u$ denotará o conjunto de todas as k-ésimas derivadas de $u(x)$,

$$D_i = \frac{D}{Dx^i} := \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial}{\partial u} + u_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j} + \cdots + u_{ii_1 \ldots i_n} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \ldots i_n}} \tag{1.32}$$

é operador de derivação total e $u_i := \dfrac{\partial u}{\partial x^i}$, $u_{ij} := \dfrac{\partial u}{\partial x^i \partial x^j}$, etc. Simbolizamos por

$$du = \partial u dx \tag{1.33}$$

a soma

$$du := u_i dx^i \tag{1.34}$$

e mais geralmente,

$$d\partial^{k-1} u = \partial^k u dx$$

representará o conjunto de equações

$$du_{i_1 \ldots i_{k-1}} := u_{i_1 \ldots i_{k-1} j} dx^j, \quad i_l = 1, \ldots, n \quad \text{para} \quad l = 1, \ldots, k-1.$$

1.7.1 Transformações estendidas: uma variável dependente e n variáveis independentes

No estudo da invariância de equações diferenciais parciais de ordem k com n variáveis independentes $x = (x^1, \cdots, x^n)$ e uma variável dependente $u = u(x)$, somos levados ao problema de encontrar as extensões das transformações do espaço (x, u) no espaço $(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u)$.

Nesta subseção, encontraremos a extensão do gerador X dado na Definição 3 até uma determinada ordem k, bem como determinaremos seus coeficientes infinitesimais.

Considere o conjunto de transformações de pontos,

$$x^{i*} = X^i(x, u; \epsilon) = x^i + \epsilon \xi^i(x, u) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{1.35}$$

$$u^* = U(x, u; \epsilon) = u + \epsilon \eta(x, u) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{1.36}$$

$i = 1, 2, \cdots, n$, agindo sobre o espaço (x, u), com gerador infinitesimal

$$X = \xi^i(x, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x, u)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{1.37}$$

A k-ésima extensão de (1.35) e (1.36) é dada por,

$$x^{i*} = X^i(x, u; \epsilon) = x^i + \epsilon \xi^i(x, u) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{1.38}$$

$$u^* = U(x, u; \epsilon) = u + \epsilon \eta(x, u) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{1.39}$$

$$u_i^* = U_i(x, u, \partial u; \epsilon) = u_i + \epsilon \eta_i^{(1)}(x, u, \partial u) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{1.40}$$

$$\vdots \tag{1.41}$$

$$\begin{aligned} u^*_{i_1 i_2 \cdots i_k} &= U_{i_1 i_2 \cdots i_k}(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u; \epsilon) \\ &= u_{i_1 i_2 \cdots i_k} + \epsilon \eta^{(k)}_{i_1 i_2 \cdots i_k}(x, u, \cdots, \partial^k u) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \tag{1.42}$$

onde $i = 1, 2, \cdots, n$ e $i_l = 1, 2, \cdots, n$, para $l = 1, 2, \cdots, k$ com $k \geqslant 1$. Seus k-ésimos infinitesimais estendidos são:

$$\left(\xi(x, u), \eta(x, u), \eta^{(1)}(x, u, \partial u), \cdots, \eta^{(k)}(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u)\right), \tag{1.43}$$

com o k-ésimo gerador infinitesimal estendido correspondendo a:

$$X^{(k)} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \eta_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial u_i} + \cdots + \eta^{(k)}_{i_1 i_2 \cdots i_k} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \cdots i_k}}, \quad k \geqslant 1. \tag{1.44}$$

A fórmula explícita para o infinitesimal estendido $\eta^{(k)}$ resulta do teorema a seguir.

Teorema 7. *Os coeficientes* $\eta_i^{(1)}, \cdots, \eta_{i_1 i_2 \cdots i_k}^{(k)}$*, em* (1.44)*, satisfazem*

$$\eta_i^{(1)} = D_i\eta - (D_i\xi^j)u_j, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{1.45}$$

$$\eta_{i_1 i_2 \cdots i_k}^{(k)} = D_{i_k}\eta_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1}}^{(k-1)} - (D_{i_k}\xi^j)u_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} j}, \tag{1.46}$$

$i_l = 1, 2, \cdots, n$ *para* $l = 1, 2, \cdots, k$ *com* $k \geqslant 2$.

Demonstração. Por (1.35) e considerando uma matriz $n \times n$ temos;

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} D_1(x^1 + \epsilon\xi^1) & \cdots & D_1(x^n + \epsilon\xi^n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_n(x^1 + \epsilon\xi^1) & \cdots & D_n(x^n + \epsilon\xi^n) \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= I + \epsilon B + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned}$$

onde I é a matriz identidade de ordem n e

$$B = \begin{bmatrix} D_1\xi^1 & \cdots & D_1\xi^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_n\xi^1 & \cdots & D_n\xi^n \end{bmatrix}. \tag{1.47}$$

Para ϵ suficientemente pequeno, a matriz A é inversível, logo,

$$A^{-1} = I - \epsilon B + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{1.48}$$

Por (1.40), (1.47) e (1.48) pode-se escrever na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} u_1 + \epsilon\eta_1^{(1)} \\ u_2 + \epsilon\eta_2^{(1)} \\ \vdots \\ u_n + \epsilon\eta_n^{(1)} \end{bmatrix} = (I - \epsilon B) \begin{bmatrix} u_1 + \epsilon D_1\eta \\ u_2 + \epsilon D_2\eta \\ \vdots \\ u_n + \epsilon D_n\eta \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

e então,

$$\begin{bmatrix} \eta_1^{(1)} \\ \eta_2^{(1)} \\ \vdots \\ \eta_n^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1\eta \\ D_2\eta \\ \vdots \\ D_n\eta \end{bmatrix} - B \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix},$$

levando à (1.45). Então, de (1.40), (1.43), (1.47) e (1.48), é possível escrever

$$\begin{bmatrix} u_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 1} + \epsilon\eta^{(k)}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 1} \\ u_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 2} + \epsilon\eta^{(k)}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 2} \\ \vdots \\ u_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} n} + \epsilon\eta^{(k)}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} n} \end{bmatrix} = (I - \epsilon B) \begin{bmatrix} u_1 + \epsilon D_1\eta \\ u_2 + \epsilon D_2\eta \\ \vdots \\ u_n + \epsilon D_n\eta \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

e, portanto,

$$\begin{bmatrix} \eta^{(k)}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 1} \\ \eta^{(k)}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 2} \\ \vdots \\ \eta^{(k)}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1\eta^{(k-1)}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1}} \\ D_2\eta^{(k-1)}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1}} \\ \vdots \\ D_n\eta^{(k-1)}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1}} \end{bmatrix} - B \begin{bmatrix} u_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 1} \\ u_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 2} \\ \vdots \\ u_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} n} \end{bmatrix}$$

com $i_l = 1, 2, \cdots, n$ para $l = 1, 2, \cdots, k-1$ com $k \geqslant 2$, assim, temos (1.46). □

Exemplo 1: Utilizando o resultado deste teorema faremos o cálculo de $\eta_x^{(1)}, \eta_t^{(1)}, \eta_{xx}^{(2)}$, ou seja, as extensões infinitesimais no espaço (x, t, u) (mais detalhes ver o Capítulo 3). Assim,

$$\eta_x^{(1)} = D_x\eta - \left(D_x\xi^j\right) u_j, \quad j = 1, 2, \tag{1.49}$$

onde chamaremos

$$\xi^1 = \xi, \quad \xi^2 = \tau. \tag{1.50}$$

Além disso,

$$D_x = \partial_x + u_x\partial_u + u_{xt}\partial_{u_t} + u_{xx}\partial_{u_x} + \cdots . \tag{1.51}$$

Substituindo (1.50) em (1.49) e aplicando (1.51), obtemos

$$\eta_x^{(1)} = \eta_x + (\eta_u - \xi_x)\, u_x - \tau_x u_t - \xi_u (u_x)^2 - \tau_u u_x u_t. \tag{1.52}$$

Para $\eta_t^{(1)}$, temos

$$\eta_t^{(1)} = D_t\eta - \left(D_t\xi^j\right) u_j \tag{1.53}$$

com

$$D_t = \partial_t + u_t\partial_u + u_{xt}\partial_{u_x} + u_{tt}\partial_{u_t} + \cdots . \tag{1.54}$$

Substituindo (1.50) em (1.53) e aplicando (1.54), obtemos

$$\eta_t^{(1)} = \eta_t + (\eta_u - \tau_t)\, u_t - \xi_t u_x - \tau_u (u_t)^2 - \xi_u u_x u_t. \tag{1.55}$$

Analogamente, para $\eta_{xx}^{(2)}$, temos

$$\eta_{xx}^{(2)} = D_x\eta_x^{(1)} - \left(D_x\xi^j\right) u_j. \tag{1.56}$$

e substituindo (1.50) em (1.56) e aplicando (1.51), obtemos

$$\begin{aligned}\eta_{xx}^{(2)} =&\eta_{xx} + (2\eta_{xx} - \xi_{xx})\, u_x - \tau_{xx} u_t + (\eta_u - 2\xi_x)\, u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} + (\eta_{uu} - 2\xi_{xu})\,(u_x)^2 \\ &- 2\tau_{xu} u_x u_t - \xi_{uu}(u_x)^3 - \tau_{uu}(u_x)^2 u_t - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt}. \qquad (1.57)\end{aligned}$$

1.8 Invariância de uma equação diferencial parcial

Sejam $x = (x^1, \cdots, x^n) \in D$ e $u : D \to \mathbb{R}$ diferenciável. Uma equação diferencial parcial de ordem k é uma relação

$$F(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u) = 0, \qquad (1.58)$$

que associa as variáveis independentes $x \in D$, dependentes $u : D \to \mathbb{R}$ e derivadas de u até ordem k. Para qualquer solução $u = \theta(x)$ de (1.58) a igualdade,

$$(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u) = (x, \theta(x), \partial\theta(x), \partial^2\theta(x), \cdots, \partial^k\theta(x)) \qquad (1.59)$$

define uma solução que está na superfície

$$F(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u) = 0.$$

Definição 9. *O (GTPL) a 1-parâmetro*

$$\begin{aligned} x^* &= X(x, u; \epsilon), \qquad (1.60)\\ u^* &= U(x, u; \epsilon), \end{aligned}$$

deixa a equação diferencial parcial (1.58) *invariante se, e somente se, suas k-ésimas extensões definidas em* (1.38) – (1.43) *deixam invariantes* (1.58).

Definição 10. *Seja*

$$X = \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{1.61}$$

o gerador infinitesimal de (1.60). *O operador X é admitido pela Equação Diferencial Parcial* (1.58) *se seu k-ésimo gerador infinitesimal estendido*

$$\begin{aligned} X^{(k)} = {} & \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u} + \eta_i^{(1)}(x,u,\partial u)\frac{\partial}{\partial u_i} + \cdots \\ & + \eta^{(k)}_{i_1 i_2 \cdots i_k}(x,u,\partial u,\cdots,\partial^k u)\frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \cdots i_k}}, \end{aligned} \tag{1.62}$$

satisfaz a equação

$$X^{(k)}F(x,u,\partial u,\cdots,\partial^k u) = 0, \quad \textit{quando} \quad F(x,u,\partial u,\cdots,\partial^k u) = 0. \tag{1.63}$$

Nesse caso, a transformação infinitesimal (1.60) que corresponde ao operador dado em (1.61) é chamada simetria de Lie da equação diferencial parcial e, por abuso de linguagem, identificaremos a transformação infinitesimal com seu respectivo gerador infinitesimal, chamando-o também de simetria de Lie da equação diferencial parcial (1.58).

A condição de invariância (1.63), ao ser aplicada concretamente em uma equação diferencial parcial, conduzirá-nos a um sistema linear de equações diferenciais parciais envolvendo os coeficientes de $\xi^i(x,u), \eta(x,u)$ da simetria (1.61). A solução desse sistema, no qual surgem constantes arbitrárias que, ao serem substituídas em (1.61), darão-nos uma combinação linear de todas as simetrias que deixam a equação diferencial parcial (1.58) invariante.

Exemplo 2: Sejam $F(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{tt},u_{xt}) = u_t - u_{xx} - uu_x$ e o gerador

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{1.64}$$

Mostraremos que (1.64) é um gerador de simetria da equação $u_t = u_{xx} - uu_x$. A extensão de segunda ordem de (1.64) é

$$X^{(2)} = X + \eta_x^{(1)} \frac{\partial}{\partial_{u_x}} + \eta_t^{(1)} \frac{\partial}{\partial_{u_t}} + \eta_{xx}^{(2)} \frac{\partial}{\partial_{u_{xx}}}, \tag{1.65}$$

onde $\eta_x^{(1)}$, $\eta_t^{(1)}$ e $\eta_{xx}^{(2)}$ são dados respectivamente por (1.52), (1.55) e (1.57). Sabendo que $\xi = x, \tau = 2t, \eta = -u$. temos, $\eta_x^{(1)} = -2u_x, \eta_t^{(1)} = -3u_t, \eta_{xx}^{(2)} = -3u_{xx}$. Dessa forma, aplicando $X^{(2)}$ em F temos,

$$X^{(2)}F = XF + \eta_x^{(1)} \frac{\partial F}{\partial u_x} + \eta_t^{(1)} \frac{\partial F}{\partial u_t} + \eta_{xx}^{(2)} \frac{\partial F}{\partial u_{xx}}.$$

Sabendo que $XF = uu_x$, $\dfrac{\partial F}{\partial u_x} = -u$, $\dfrac{\partial F}{\partial u_t} = 1$ e $\dfrac{\partial F}{\partial u_{xx}} = -1$, obtemos

$$X^{(2)}F = uu_x - \eta_x^{(1)} u + \eta_t^{(1)} - \eta_{xx}^{(2)}.$$

Assim,

$$X^{(2)}F = -3(u_t - u_{xx} - uu_x) = -3F.$$

Logo, $X^{(2)}F = 0$ quando $F = 0$.

Teorema 8. ***Critério para invariância de uma equação diferencial parcial***

Sejam X e $X^{(k)}$ dados respectivamente em (1.61) *e* (1.62)*. Então,* (1.60) *é admitido pela equação diferencial parcial se, e somente se,*

$$X^k F(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u) = 0 \quad \textit{quando} \quad F(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u) = 0. \tag{1.66}$$

Para simplificar a demonstração com respeito à quantidades de índices, faremos as seguintes convenções:

1. $\xi \dfrac{\partial}{\partial x}$ denotará $\xi^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$;
2. $\eta^{(l)} \dfrac{\partial}{\partial u_l}$ denotará $\eta^{i_1 \cdots i_l} \dfrac{\partial}{\partial u_{i_1 \cdots i_l}}, 1 \leqslant l \leqslant k$;

3. u_l denotará $u_{i_1 i_2 \cdots i_l}$, $1 \leqslant l \leqslant k$; valendo a mesma convenção para η;

4. F^* denotará F nos pontos (1.60).

Demonstração. Suponha que F seja invariante sob (1.60). Então,

$$\begin{aligned} F^* &= F(x + \epsilon\xi + \mathcal{O}(\epsilon^2), u + \epsilon\eta + \mathcal{O}(\epsilon^2), \cdots, u_k + \epsilon\eta^{(k)} + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \\ &= F + \epsilon\left(\xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial F}{\partial u} + \cdots + \eta^{(k)}\frac{\partial F}{\partial u_k} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \\ &= F + \epsilon X^{(k)}F + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned}$$

de onde vemos que (1.66) é verdadeira se, e somente se, é invariante, encerrando, assim, a demonstração. □

1.9 Soluções invariantes

Considere uma E.D.P de ordem k, com $k > 1$, que admita um (GTPL) a 1-parâmetro com gerador infinitesimal (1.61). Assumamos que $\xi(x, u) = (\xi^1, \cdots, \xi^n) \neq 0$.

Definição 11. *A função $u = \theta(x)$ é uma solução invariante de* (1.58) *correspondente a* (1.61)*, admitida pela E.D.P* (1.58) *se, e somente se,*

1. $u = \theta(x)$ é uma superfície invariante de (1.61)*;*

2. $u = \theta(x)$ é uma solução de (1.58)*.*

Ou, de maneira equivalente, $u = \theta(x)$ é uma solução invariante de (1.58) em relação ao (1.61) se, e somente se, $u = \theta(x)$ satisfaz

1. $X(u - \theta(x)) = 0$ quando $u = \theta(x)$, isto é,

$$\xi^i(x, \theta(x))\frac{\partial\theta(x)}{\partial x^i} = \eta(x, \theta(x)), \tag{1.67}$$

2. $F = 0$ para $u_j = \dfrac{\partial \theta}{\partial x^j}$, $j \in \{1, \cdots, k\}$.

As soluções invariantes podem ser encontradas de duas maneiras:

- **Método da Forma Invariante:** Resolvemos a condição da superfície ser invariante (equação (1.66)), resolvendo as equações características

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x,u)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x,u)} = \cdots = \frac{du}{\eta(x,u)} \tag{1.68}$$

quando $u = \theta(x)$. Se $(v_1(x,u), v_2(x,u), \cdots, v_{n-1}(x,u), v(x,u))$ são n invariantes independentes de (1.68) com $v_u \neq 0$, então, a solução $u = \theta(x)$ é dada implicitamente pela forma invariante

$$v(x,u) = \zeta(v_1, \cdots, v_{n-1}), \tag{1.69}$$

onde ζ é uma função arbitrária de $v_1, \cdots, v_{n-1}$.

- **Método da Substituição Direta:** Suponha que $\xi^n \neq 0$. Assim,

$$u_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\xi^i}{\xi^n} u_i + \frac{\eta}{\xi^n}. \tag{1.70}$$

Quando encontramos soluções invariantes da E.D.P (1.58), qualquer termo envolvendo derivadas de u com respeito a x^n pode ser expresso em termos de x, u e derivadas de u com respeito a $x^1, \cdots, x^{n-1}$. Consequentemente, obtemos uma nova equação diferencial com variável dependente u e variáveis independentes $(x^1, \cdots, x^{n-1})$ e parâmetro x^n. Qualquer solução dessa nova equação diferencial define uma solução invariante da E.D.P (1.58). No caso particular, em que $n = 2$, esse método nos fornece uma equação diferencial ordinária.

Capítulo 2

A Equação de Burgers

Neste capítulo, discutiremos brevemente a equação de Burgers, que é um caso particular da classe de EDPs estudadas nesta dissertação. As equações diferenciais são a maneira mais natural de descrever os fenômenos que ocorrem na natureza. Através delas, matemáticos e físicos tentam desvendar os mistérios que permeiam tais fenômenos na esperança de entendê-los e até mesmo reproduzi-los em laboratório. O estudo feito aqui é do ponto de vista matemático. É claro que isso não exime a importância física e suas valiosas interpretações.

A equação de Burgers surgiu por volta de 1915, em um trabalho do físico Bateman. Ela tem sido de grande interesse na física, devido às suas propriedades estatísticas e por causa de sua similaridade com as equações de Navier-Stokes de dimensão 1 (ver [13]). A forma não-homogênea da equação de Burgers tem muitas aplicações no estudo de dinâmica de gases, acústica, fenômenos de difusão e advecção. A equação original é

$$\nu u_{xx} = u_t + u u_x, \tag{2.1}$$

onde o "vetor velocidade" u é uma função de x, t apenas e a "viscosidade cinemática" ν é um parâmetro positivo.

O interesse matemático nessa equação advém do fato de que ela, apesar de ser uma equação não-linear, é altamente tratável e sua solução exata e completa é conhecida em termos de valores iniciais [6]. É interessante observar que a equação (2.1) vem se consolidando como equação modelo para testes e comparações de técnicas computacionais. Nesse sentido, vale a pena destacar o trabalho [2] que, além de estabelecer tabelas comparativas, apresenta 35 soluções distintas de problemas de valor inicial para a equação (2.1) em um domínio infinito, bem como soluções para problemas de valores de condições de contorno e inicial finitos.

O termo não-linear na equação (2.1) dá origem a uma onda que se move em determinada direção. Essa onda, eventualmente dissipa-se e a solução não-linear tende à mesma forma da solução linearizada, porém, com amplitude menor.

Em termos de classificação, a equação de Burgers (2.1) é uma equação diferencial parcial não-linear parabólica de segunda ordem.

Como dissemos acima, a equação (2.1) possui solução exata conhecida, uma das técnicas utilizadas para sua resolução é a chamada transformação de Hopf-Cole.

2.1 Transformação de Hopf-Cole

Consideremos a equação (2.1) escrevendo-a como,

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0. \tag{2.2}$$

Chamando $u = u(x,t)$ e $v = v(x,t)$ e introduzindo a mudança de variáveis

$$u = -2\nu \frac{v_x}{v} \tag{2.3}$$

obtemos:

$$\begin{aligned} u_t &= -2\nu\frac{v_{tx}}{v} + 2\nu\frac{v_x v_t}{v^2}, \\ u_x &= -2\nu\frac{v_{xx}}{v} + 2\nu\frac{v_x^2}{v^2}, \\ u_{xx} &= -2\nu\frac{v_{xxx}}{v} + 6\nu\frac{v_x v_{xx}}{v^2} - 4\nu\frac{v_x^3}{v^3}. \end{aligned}$$

Substituindo em (2.2), obtemos

$$0 = u_t + uu_x - \nu u_{xx} = \frac{v_x}{v}\left[\nu v_{xx} - v_t\right] - \left(\nu v_{xx} - v_t\right)_x .$$

Dessa maneira, se $v = v(x,t)$ for solução da equação do calor,

$$u_t = \nu u_{xx},$$

então, $u = u(x,t)$ dada por (2.3) será solução da equação (2.1). Essa transformação tão notável reduz o problema não-linear em um problema de valor inicial da equação do calor. Mais detalhes podem ser encontrados em [6, 7].

Nesta dissertação, estudaremos as simetrias de Lie da equação

$$u_t = u_{xx} - g(u)u_x, \tag{2.4}$$

onde $g(u)$ é infinitamente diferenciável. Tomando g(u)=0 em (2.4), obtemos a bem conhecida equação do calor

$$u_t = u_{xx}, \tag{2.5}$$

que é um modelo matemático para a difusão de calor em sólidos e se g(u)=u em (2.4), obtemos a equação de Burgers (2.2) com $\nu = 1$.

As simetrias de (2.2) e (2.5) são conhecidas, vide [3]. O que faremos na dissertação é um estudo aprofundado e complementar aos resultados obtidos em [4] com respeito à equação (2.4). Essa equação é um caso particular da EDP,

$$u_t = F(x,t,u,u_x)u_{xx} + G(x,t,u,u_x). \tag{2.6}$$

Capítulo 3

Simetrias da equação de Burgers generalizada

Neste capítulo, será demonstrado o teorema central do trabalho, no qual obteremos os geradores infinitesimais de simetria da equação (2.4). Primeiramente, enunciaremos alguns resultados importantes para demonstração do teorema. Esses podem ser vistos com mais detalhes em [8].

A equação de Burgers generalizada,

$$u_t = u_{xx} - g(u)u_x, \tag{3.1}$$

é um caso particular da equação (2.6) tomando

$$F(x,t,u,u_x) = 1 \quad \text{e} \quad G(x,t,u,u_x) = g(u)u_x. \tag{3.2}$$

Um gerador do (GTPL) da equação (2.6) é da forma:

$$X = \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{3.3}$$

O que faremos neste ponto será encontrar um sistema de equações que nos fornecerão as simetrias. Essas equações são chamadas de equações determinantes.

3.1 As equações determinantes

Seja

$$L(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{tt},u_{xt}) = u_t - u_{xx} + g(u)u_x. \tag{3.4}$$

Então, $L = 0$ se, e somente se, vale (3.1). O seguinte resultado está demonstrado em [8].

Proposição 1. (*Lagno – Samoilenko*) *Suponha que* (3.3) *seja um gerador de simetria da equação* (2.6). *Então,*

$$X = \tau(t)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{3.5}$$

onde as funções τ, ξ, η, F *e* G *satisfazem as seguintes equações*

$$(2\xi_x + 2u_x\xi_u - \tau^{'})F = \tau F_t + \xi F_x + \eta F_u + (\eta_x + u_x\eta_u - u_x\xi_x - u_x^2\xi_u)F_{u_x} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}&\eta_t - u_x\xi_t + (\eta_u - \tau^{'} - u_x\xi_u)G + (u_x\xi_{xx} - \eta_{xx} - 2u_x\eta_{xu} - u_x^2\eta_{uu} + \\ &+ 2u_x^2\xi_{xu} + u_x^3\xi_{uu})F = \tau G_t + \xi G_x + \eta G_u + (\eta_x + u_x\eta_u - u_x\xi_x - u_x^2\xi_u)G_{u_x},\end{aligned} \tag{3.7}$$

com $\tau^{'} = \dfrac{d\tau}{dt}$.

Teorema 9. *A Equação* (2.4) *possui o seguinte conjunto linearmente independente de equações determinantes:*

$$\tau^{'} = 2\xi_x, \tag{3.8}$$

$$(-\alpha u - \beta)g^{'}(u) - \xi_x g(u) + \xi_t + 2\alpha_x = 0, \tag{3.9}$$

$$\beta_t - \beta_{xx} + \alpha_x u g(u) + \beta_x g(u) + \alpha_t u - \alpha_{xx} u = 0. \tag{3.10}$$

Demonstração. Sabendo que (2.4) é um caso particular de (2.6) e fazendo as substituições (3.2) nas equações (3.6) e (3.7), obtemos:

$$(2\xi_x + 2u_x\xi_u - \tau^{'}) = 0, \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}&\eta_t - u_x\xi_t + (\eta_u - \tau^{'} - u_x\xi_u)g(u)u_x + (u_x\xi_{xx} - \eta_{xx} - 2u_x\eta_{xu}) - \\ &-u_x^2\eta_{uu} + 2u_x^2\xi_{xu} + u_x^3\xi_{uu} = \eta g^{'}(u)u_x + (\eta_x + u_x\eta_u - u_x\xi_x - u_x^2\xi_u)g(u).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Reescrevendo as equações (3.11) e (3.12) agrupando os termos do tipo $1, u_x, u_x^2, u_x^3$, teremos,

$$2\xi_x - \tau^{'} + (2\xi_u)\, u_x = 0, \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}&\eta_t - \eta_{xx} + \Big(-\xi_t + \eta_u g(u) - \tau^{'} g(u) + \xi_{xx} - 2\eta_{xu}\Big)\, u_x + (-\xi_u g(u) - \eta_{uu} + 2\xi_{xu})\, u_x^2 + \\ &+ (\xi_{uu})\, u_x^3 = \eta_x g(u) + \Big(\eta g^{'}(u) + \eta_u g(u) - \xi_x g(u)\Big)\, u_x + (-\xi_u g(u))\, u_x^2.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Como o conjunto $\{1, u_x, u_x^2, u_x^3\}$ é linearmente independente encontramos o seguinte sistema,

$$2\xi_x - \tau^{'} = 0, \tag{3.15}$$

$$2\xi_u = 0, \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}&\eta_t - \eta_{xx} = \eta_x g(u), \\ &\eta_u g(u) - \xi_t - \tau^{'} g(u) + \xi_{xx} - 2\eta_{xu} = \eta g^{'}(u) + \eta_u g(u) - \xi_x g(u),\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$2\xi_{xu} - \eta_{uu} - \xi_u g(u) = -\xi_u g(u), \tag{3.18}$$

$$\xi_{uu} = 0. \tag{3.19}$$

Da Proposição 1, temos que τ depende apenas de t. De (3.16), concluímos que

$$\xi(x, t, u) = \xi(x, t).$$

Assim, substituindo $\xi = \xi(x,t)$ em (3.15), (3.17) e (3.18) obtemos,

$$2\xi_x - \tau^{'} = 0,$$

$$\eta_t - \eta_{xx} = \eta_x g(u), \tag{3.20}$$

$$\eta_u g(u) - \xi_t - \tau^{'} g(u) - 2\eta_{xu} = \eta g^{'}(u) + \eta_u g(u) - \xi_x g(u), \tag{3.21}$$

$$\eta_{uu} = 0. \tag{3.22}$$

De (3.22), temos que η é linear em u, ou seja, existem funções $\alpha = \alpha(x,t)$ e $\beta = \beta(x,t)$ tais que

$$\eta = \alpha(x,t)u + \beta(x,t). \tag{3.23}$$

Agora, substituindo (3.23) em (3.20) e (3.21), teremos

$$\tau^{'} = 2\xi_x,$$

$$(-\alpha u - \beta)g^{'}(u) - \xi_x g(u) + \xi_t + 2\alpha_x = 0,$$

$$\beta_t - \beta_{xx} + \alpha_x u g(u) + \beta_x g(u) + \alpha_t u - \alpha_{xx} u = 0.$$

E o teorema está provado. $\square$

Em particular, observamos que qualquer gerador infinitesimal de simetria da Equação (3.1) será da forma:

$$S = \xi(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(t)\frac{\partial}{\partial t} + (\alpha(x,t)u + \beta(x,t))\frac{\partial}{\partial u}. \tag{3.24}$$

3.2 Geradores infinitesimais da equação de Burgers generalizada

Nesta seção, serão apresentados os geradores infinitesimais da equação (2.4). Note que para cada $g(u)$ dada, tem-se geradores diferentes.

Teorema 10. *O maior (GTPL) da equação* (2.4)*, ou seja,*

$$u_t = u_{xx} - g(u)u_x,$$

com uma função arbitrária $g(u)$, é determinado pelos operadores,

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad T = \frac{\partial}{\partial t}. \tag{3.25}$$

Para algumas escolhas especiais da função $g(u)$, o grupo pode ser aumentado. Abaixo listaremos as funções $g(u)$ que aumentam o grupo de simetrias e os respectivos geradores adicionados a (3.25).

1. *Se $g(u) = u$, então, $B_{11} = tx\frac{\partial}{\partial x} + t^2\frac{\partial}{\partial t} + (x - tu)\frac{\partial}{\partial u}$, $B_{12} = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}$ e $B_{13} = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}$.*

2. *Se $g(u) = u^p, p \neq 0, 1$, então, o gerador adicional será $B_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{p}u\frac{\partial}{\partial u}$.*

3. *Se $g(u) = \ln u$, então, o gerador infinitesimal adicional será $B_3 = t\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}$.*

4. *Se $g(u) = e^{bu}, b \neq 0$, então $B_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial u}$.*

5. *Se $g(u) = \frac{1 - u}{1 + u}$, então, $B_5 = (x - t)\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + (1 + u)\frac{\partial}{\partial u}$.*

6. *Se $g(u) = \frac{1}{1 + u}$, então, $B_6 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + (1 + u)\frac{\partial}{\partial u}$.*

7. *Se* $g(u) = \dfrac{u}{1+u}$, *então, o gerador infinitesimal será*
$B_7 = (x+t)\dfrac{\partial}{\partial x} + 2t\dfrac{\partial}{\partial t} + (1+u)\dfrac{\partial}{\partial u}$.

8. *Se* $g(u) = \dfrac{u}{1-u}$, *então, o gerador infinitesimal será*
$B_8 = (x-t)\dfrac{\partial}{\partial x} + 2t\dfrac{\partial}{\partial t} + (u-1)\dfrac{\partial}{\partial u}$.

9. *Se* $g(u) = \dfrac{1+u}{u}$, *então, o gerador infinitesimal será* $B_9 = (x+t)\dfrac{\partial}{\partial x} + 2t\dfrac{\partial}{\partial t} + u\dfrac{\partial}{\partial u}$.

10. *Se* $g(u) = 0$, *então, os geradores infinitesimais serão*
$Q_1 = -4xt\dfrac{\partial}{\partial x} - 4t^2\dfrac{\partial}{\partial t} + (x^2u + 2tu)\dfrac{\partial}{\partial u}$, $\quad Q_2 = -2t\dfrac{\partial}{\partial x} + xu\dfrac{\partial}{\partial u}$, $Q_3 = u\dfrac{\partial}{\partial u}$,
$Q_4 = x\dfrac{\partial}{\partial x} + 2t\dfrac{\partial}{\partial t}$ *e* $Q_{\beta_1} = \beta_1\dfrac{\partial}{\partial u}$, *onde* β_1 *é uma solução da equação* $u_t = u_{xx}$.

11. *Se* $g(u) = 1$, *então, os geradores infinitesimais serão*
$Q_5 = -4tx\dfrac{\partial}{\partial x} - 4t^2\dfrac{\partial}{\partial t} + (x^2 - 2xt + 2t + t^2)u\dfrac{\partial}{\partial u}$, $Q_6 = -2t\dfrac{\partial}{\partial x} + (xu - tu)\dfrac{\partial}{\partial u}$, $Q_7 = u\dfrac{\partial}{\partial u}$,
$Q_8 = (x+t)\dfrac{\partial}{\partial x} + 2t\dfrac{\partial}{\partial t}$ *e* $Q_{\beta_2} = \beta_2\dfrac{\partial}{\partial u}$, *onde* β_2 *é uma solução da equação* $u_t + u_x = u_{xx}$.

Vamos demonstrar este teorema para cada $g(u)$ listada acima.

3.3 Caso $g(u)$ arbitrária

Resolvendo o sistema (3.8) – (3.10) para uma $g(u)$ arbitrária e sabendo que o seguinte conjunto $\left\{1, u, g(u), ug(u), g'(u), ug'(u)\right\}$ é linearmente independente, obtemos

$$\beta = 0, \tag{3.26}$$

$$\alpha = 0, \tag{3.27}$$

$$\xi_x = 0, \tag{3.28}$$

$$\xi_t + 2\alpha_x = 0, \tag{3.29}$$

$$\tau' = 2\xi_x. \tag{3.30}$$

De (3.27) e (3.29), obtemos que $\xi_t = 0$ e por (3.28), concluímos que $\xi = c_1$. De (3.30), concluímos que $\tau = c_2$.

Além disso, $\eta = \alpha u + \beta = 0$. Portanto,

$$S = c_1 \frac{\partial}{\partial x} + c_2 \frac{\partial}{\partial t} \tag{3.31}$$

3.4 Caso $g(u) = u$

Substituindo $g(u) = u$ em (3.9) e (3.10), obtemos

$$\begin{cases} \tau^{'} = 2\xi_x, \\ (-\alpha u - \beta) - \xi_x u + \xi_t + 2\alpha_x = 0, \\ \beta_t - \beta_{xx} + \alpha_x u^2 + \beta_x u + \alpha_t u - \alpha_{xx} u = 0. \end{cases}$$

Agrupando os termos em $u^2, u, 1$, temos

$$\begin{cases} \tau^{'} = 2\xi_x, \\ (-\alpha - \xi_x)u - \beta + \xi_t + 2\alpha_x = 0, \\ \alpha_x u^2 + (\beta_x + \alpha_t - \alpha_{xx})u + \beta_t - \beta_{xx} = 0. \end{cases}$$

O conjunto $\{u^2, u, 1\}$ é linearmente independente; logo, o sistema anterior pode ser escrito como,

$$\tau^{'} = 2\xi_x, \tag{3.32}$$

$$\alpha + \xi_x = 0, \tag{3.33}$$

$$\xi_t - \beta + 2\alpha_x = 0, \tag{3.34}$$

$$\alpha_x = 0, \tag{3.35}$$

$$\beta_x + \alpha_t - \alpha_{xx} = 0, \tag{3.36}$$

$$\beta_t - \beta_{xx} = 0. \tag{3.37}$$

De (3.35), temos que

$$\alpha = \alpha(t).$$

De (3.34), temos que

$$\xi_t = \beta. \tag{3.38}$$

Segue de (3.36) que

$$\beta_x = -\alpha_t. \tag{3.39}$$

Derivando em (3.39), com respeito a x, obtemos

$$\beta_{xx} = 0 \tag{3.40}$$

e concluímos que $\beta_t = 0$ em (3.37). Logo, β não depende de t. De (3.40), obtemos

$$\beta = c_1 x + c_2.$$

Voltando em (3.39) concluímos que $\alpha_t = -c_1$, ou seja,

$$\alpha = -c_1 t + c_3.$$

Agora, em (3.33) $\xi_x = -\alpha$, ou seja,

$$\xi = c_1 tx - c_3 x + \psi(t),$$

por (3.38), encontramos

$$\psi(t) = c_2 t + c_4,$$

logo,

$$\xi = c_1 tx - c_3 x + c_2 t + c_4.$$

Agora, pode-se calcular τ por (3.32)

$$\tau = c_1 t^2 - 2c_3 t + c_5.$$

Além disso, tem-se que $\eta = (-c_1 tu + c_3 u) + c_1 x + c_2$. Assim, o operador infinitesimal estendido será

$$S = c_1 \underbrace{\left(tx\frac{\partial}{\partial x} + t^2\frac{\partial}{\partial t} + (x - tu)\frac{\partial}{\partial u}\right)}_{B_{11}} + c_2 \underbrace{\left(t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}\right)}_{B_{12}} + c_3 \underbrace{\left(x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}\right)}_{B_{13}} +$$
$$+ c_4\frac{\partial}{\partial x} + c_5\frac{\partial}{\partial t}.$$

3.5 Caso $g(u) = u^p$

Seja $g(u) = u^p$ com $p \neq 0$ e $p \neq 1$. Substituindo $g(u)$ e $g^{'}(u)$ em (3.9) e (3.10), temos

$$\begin{cases} \tau^{'} = 2\xi_x, \\ p(-\alpha u - \beta)u^{p-1} - \xi_x u^p + \xi_t + 2\alpha_x = 0, \\ \beta_t - \beta_{xx} + \alpha_x u^{p+1} + \beta_x u^p + \alpha_t u - \alpha_{xx} u = 0. \end{cases}$$

Agrupando os termos em $u^{p+1}, u^p, u^{p-1}, u, 1$, temos

$$\begin{cases} \tau^{'} = 2\xi_x, \\ (-p\alpha - \xi_x)u^p - p\beta_x u^{p-1} + \xi_t + 2\alpha_x = 0, \\ \alpha_x u^{p+1} + \beta_x u^p + (\alpha_t - \alpha_{xx})u + \beta_t - \beta_{xx} = 0. \end{cases}$$

O conjunto $\{u^{p+1}, u^p, u^{p-1}, u, 1\}$ é linearmente independente, se $p \neq 0, \pm 1$ e 2. Dessa forma, o sistema anterior pode ser escrito como

$$p\alpha + \xi_x = 0, \tag{3.41}$$

$$p\beta = 0, \tag{3.42}$$

$$\xi_t + 2\alpha_x = 0, \tag{3.43}$$

$$\alpha_x = 0, \tag{3.44}$$

$$\beta_x = 0, \tag{3.45}$$

$$\alpha_t - \alpha_{xx} = 0, \tag{3.46}$$

$$\beta_t - \beta_{xx} = 0, \tag{3.47}$$

$$\tau^{'} = 2\xi_x. \tag{3.48}$$

De (3.44), concluímos que $\alpha = \alpha(t)$. Por (3.46),

$$\alpha^{'}(t) = 0, \tag{3.49}$$

logo, $\alpha = c_1$. De (3.41), temos

$$\xi = -pc_1 x + \psi(t),$$

e de (3.43)

$$\psi(t) = c_2.$$

Logo,

$$\xi = -pc_1 x + c_2. \tag{3.50}$$

Agora, calculando τ por (3.48), obtemos

$$\tau(t) = -2pc_1 t + c_3. \tag{3.51}$$

Por (3.50), $\beta = 0$. Logo, $\eta = c_1 u$.

Assim, o operador (3.24) será

$$S = -pc_1 \underbrace{\left(x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{p}u\frac{\partial}{\partial u} \right)}_{B_2} + c_2\frac{\partial}{\partial x} + c_3\frac{\partial}{\partial t}$$

Os casos $p = -1$ e $p = 2$ foram calculados separadamente e o resultado obtido é equivalente ao caso geral, cuja solução, para esses casos particulares, é S, com $p = -1$ ou $p = 2$, respectivamente.

3.6 Caso $g(u) = \ln u$

Seja $g(u) = \ln u$, com $u > 0$. Substituindo $g(u)$ e $g^{'}(u)$ em (3.9) e (3.10), temos

$$\begin{cases} \tau^{'} = 2\xi_x, \\ (-\alpha u - \beta)\dfrac{1}{u} - \xi_x \ln u + \xi_t - 2\alpha_x = 0, \\ \beta_t - \beta_{xx} + \alpha_x u \ln u + \beta_x \ln u + \alpha_t u - \alpha_{xx} u = 0. \end{cases}$$

agrupando os termos em $u \ln u, \ln u, \dfrac{1}{u}, u, 1$, temos

$$\begin{cases} \tau^{'} = 2\xi_x, \\ -\xi_x \ln u - \beta\dfrac{1}{u} - \alpha + \xi_t + 2\alpha_x = 0, \\ \alpha_x u \ln u + \beta_x \ln u + (\alpha_t - \alpha_{xx})u - \beta_{xx} + \beta_t = 0. \end{cases}$$

O conjunto $u \ln u, \ln u, \dfrac{1}{u}, u, 1$ é linearmente independente, obtemos, então,

$$\xi_x = 0, \tag{3.52}$$

$$\beta = 0, \tag{3.53}$$

$$\xi_t - \alpha + 2\alpha_x = 0, \tag{3.54}$$

$$\alpha_x = 0, \tag{3.55}$$

$$\beta_x = 0, \tag{3.56}$$

$$\alpha_t - \alpha_{xx} = 0, \tag{3.57}$$

$$\beta_{xx} - \beta_t = 0, \tag{3.58}$$

$$\tau^{'} = 2\xi_x. \tag{3.59}$$

De (3.55) e (3.57), temos que $\alpha = c_1$. De (3.54), temos que $\xi_t = c_1$ e ainda, por (3.52), concluímos que

$$\xi = c_1 t + c_2. \tag{3.60}$$

Logo, por (3.59) obtemos que $\tau^{'} = 0$, segue que $\tau = c_3$.

Além disso, $\eta = c_1 u$.

Assim, o operador (3.24) será

$$S = c_1 \underbrace{\left(t\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u} \right)}_{B_3} + c_2\frac{\partial}{\partial x} + c_3\frac{\partial}{\partial t}.$$

3.7 Caso $g(u) = e^{bu}$

Seja $g(u) = e^{bu}$ com $b = const. \neq 0$. Substituindo $g(u)$ e $g^{'}(u)$ em (3.9) e (3.10), temos

$$\begin{cases} \tau^{'} = 2\xi_x, \\ b(-\alpha u - \beta)e^{bu} - \xi_x e^{bu} + \xi_t + 2\alpha_x = 0, \\ \beta_t - \beta_{xx} + \alpha_x u e^{bu} + \beta_x e^{bu} + \alpha_t u - \alpha_{xx} u = 0. \end{cases}$$

Agrupando os termos em $ue^{bu}, e^{bu}, u, 1$, temos

$$\begin{cases} \tau^{'} = 2\xi_x, \\ (-b\alpha u e^{bu}) + (-b\beta - \xi_x)e^{bu} + \xi_t + 2\alpha_x = 0, \\ \alpha_x u e^{bu} + \beta_x e^{bu} + (\alpha_t - \alpha_{xx})u - \beta_{xx} + \beta_t = 0. \end{cases}$$

O conjunto $\{ue^{bu}, e^{bu}, u, 1\}$ é linearmente independente, logo, o sistema anterior pode ser escrito como

$$b\alpha = 0, \tag{3.61}$$

$$b\beta + \xi_x = 0, \tag{3.62}$$

$$\xi_t + 2\alpha_x = 0, \tag{3.63}$$

$$\beta_{xx} - \beta_t = 0, \tag{3.64}$$

$$\alpha_x = 0, \tag{3.65}$$

$$\beta_x = 0, \tag{3.66}$$

$$\alpha_t - \alpha_{xx} = 0, \tag{3.67}$$

$$\tau^{'} = 2\xi_x. \tag{3.68}$$

Por (3.61), $\alpha = 0$. De (3.63), $\xi_t = 0$, logo $\xi = \xi(x)$. De (3.64) e (3.66), $\beta = c_1$. De (3.62), $\xi_x = -bc_1$, logo,

$$\xi = -bc_1 x + c_2.$$

De (3.68), concluímos que $\tau = -2pc_1 t + c_3$.

Além disso, $\eta = c_1$. Assim, o operador (3.3) será

$$S = -bc_1 \underbrace{\left(x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{b}u\frac{\partial}{\partial u} \right)}_{B_4} + c_2\frac{\partial}{\partial x} + c_3\frac{\partial}{\partial t}$$

3.8 Caso $g(u) = \frac{1-u}{1+u}$

Substituindo $g(u)$ e $g^{'}(u)$ em (3.9) e (3.10), temos

$$\begin{cases} \tau^{'} = 2\xi_x, \\ (-\alpha u - \beta)\dfrac{-2}{(1+u)^2} - \xi_x \left(\dfrac{1-u}{1+u}\right) + \xi_t + 2\alpha_x = 0, \\ \beta_t - \beta_{xx} + \alpha_x u \left(\dfrac{1-u}{1+u}\right) + \beta_x \left(\dfrac{1-u}{1+u}\right) + \alpha_t u - \alpha_{xx} u = 0. \end{cases}$$

Agrupando os termos em $u^2, u, 1$, obtemos

$$\begin{cases} \tau^{'} = 2\xi_x, \\ (\xi_t + \xi_x + 2\alpha_x)u^2 + (2\xi_t + 2\alpha + 4\alpha_x)u + (2\alpha_x + \xi_t - \xi_x + 2\beta) = 0, \\ (-\alpha_x + \alpha_t - \alpha_{xx})u^2 + (\alpha_t - \beta_{xx} - \beta_x + \beta_t + \alpha_x - \alpha_{xx})u + \beta_x - \beta_{xx} + \beta_t = 0. \end{cases}$$

O conjunto $\{u^2, u, 1\}$ é linearmente independente dessa forma,

$$\xi_t + \xi_x + 2\alpha_x = 0, \tag{3.69}$$

$$2\xi_t + 2\alpha + 4\alpha_x = 0, \tag{3.70}$$

$$2\alpha_x + \xi_t - \xi_x + 2\beta = 0, \tag{3.71}$$

$$\alpha_t - \alpha_x - \alpha_{xx} = 0, \tag{3.72}$$

$$\alpha_t - \beta_{xx} - \beta_x + \beta_t + \alpha_x - \alpha_{xx} = 0, \tag{3.73}$$

$$\beta_x - \beta_{xx} + \beta_t = 0, \tag{3.74}$$

$$\tau^{'} = 2\xi_x. \tag{3.75}$$

Agora, resolvemos da seguinte maneira: em (3.72), isolamos α_x, em (3.74), isolamos β_x, depois, substituímos ambos em (3.73) obtendo $\alpha_x = \beta_x$.

Em (3.70), derivamos a equação toda com respeito a variável x, obtendo

$$2\alpha_x + 2\xi_{xt} + 4\alpha_{xx} = 0. \tag{3.76}$$

Em (3.71) derivamos a equação toda com respeito a variável x e multiplicamos por 2 , obtendo

$$4\beta_x - 2\xi_{xx} + 2\xi_{xt} + 4\alpha_{xx} = 0. \tag{3.77}$$

Por (3.75), podemos concluir que $\xi_{xx} = 0$. Assim, subtraindo a equação (3.76) da equação (3.77), encontramos que $\alpha_x = 0$. Logo, α não depende de x, consequentemente, β também não depende de x. Por (3.72) e (3.74), temos que β e α não dependem de t. Portanto,

$$\alpha = \beta = c_1.$$

Além disso, por (3.70), obtemos

$$\xi = -c_1 t + \psi(x)$$

e na equação (3.71), encontramos que

$$\psi(x) = c_1 x + c_2.$$

Ademais, por (3.75), concluímos que

$$\tau = 2c_1 t + c_3$$

e

$$\eta = \alpha u + \beta,$$

ou seja,

$$\eta = c_1 u + c_1.$$

Assim, o operador infinitesimal estendido será

$$S_5 = c_1 \underbrace{\left((x-t)\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + (1+u)\frac{\partial}{\partial u}\right)}_{B_5} + c_2\frac{\partial}{\partial x} + c_3\frac{\partial}{\partial t}.$$

3.9 Caso $g(u) = \frac{1}{1+u}$

Seja $g(u) = \dfrac{1}{1+u}$ substituindo $g(u)$ e $g^{'}(u)$ em (3.9), (3.10), temos

$$\begin{cases} \tau^{'} = 2\xi_x, \\ (-\alpha u - \beta)\dfrac{-1}{(1+u)^2} - \xi_x\left(\dfrac{1}{1+u}\right) + \xi_t + 2\alpha_x = 0, \\ \beta_t - \beta_{xx} + \alpha_x u\left(\dfrac{1}{1+u}\right) + \beta_x\left(\dfrac{1}{1+u}\right) + \alpha_t u - \alpha_{xx} u = 0. \end{cases}$$

Agrupando os termos em $u^2, u, 1$.

$$\begin{cases} \tau^{'} = 2\xi_x, \\ (\xi_t + \alpha_x)u^2 + (\alpha - \xi_x + 2\xi_t + 4\alpha_x)u + (\beta - \xi_x + \xi_t + 2\alpha_x), \\ (\alpha_t - \alpha_{xx})u^2 + (\beta_t - \beta_{xx} + \alpha_x + \alpha_t - \alpha_{xx})u + \beta_t - \beta_{xx} + \beta_x = 0. \end{cases}$$

O conjunto $\{u^2, u, 1\}$ é linearmente independente dessa forma,

$$\xi_t + 2\alpha_x = 0, \tag{3.78}$$

$$\alpha - \xi_x + 2\xi_t + 4\alpha_x = 0, \tag{3.79}$$

$$\beta - \xi_x + \xi_t + 2\alpha_x = 0, \tag{3.80}$$

$$\alpha_t - \alpha_{xx} = 0, \tag{3.81}$$

$$\beta_t - \beta_{xx} + \alpha_x + \alpha_t - \alpha_{xx} = 0, \tag{3.82}$$

$$\beta_t - \beta_{xx} + \beta_x = 0, \tag{3.83}$$

$$\tau^{'} = 2\xi_x. \tag{3.84}$$

Em (3.83), isolamos β_x, em seguida usamos (3.81) e (3.83) em (3.82), logo,

$$\beta_x = \alpha_x.$$

Em seguida, isolamos ξ_t em (3.78) e substituímos em (3.79) e encontramos

$$\xi_x = \alpha. \tag{3.85}$$

Por (3.84) temos que $\xi_{xx} = 0$. Assim, derivando (3.85) com respeito a x, temos $\alpha_x = 0$, dessa maneira α não depende de x. Da mesma forma, β não depende de x. Além disso por (3.81), concluímos que α não depende de t e por (3.83), temos que β não depende de t. Dessa forma, $\alpha = \beta = const$. De (3.78), $\xi_t = 0$, logo, ξ não depende de t, portanto, $\xi = \psi(x)$. Agora, multiplicamos (3.80) por -2 e somamos a (3.79), obtemos

$$-2\beta + \alpha + \xi_x = 0.$$

Como

$$\beta = \alpha = c_1$$

teremos que

$$\xi = c_1 x + c_2.$$

Além disso, por (3.84),

$$\tau = 2c_1 t + c_3$$

e

$$\eta = c_1 u + c_1.$$

Dessa maneira,

$$S = c_1 \underbrace{\left(x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + (1+u)\frac{\partial}{\partial u} \right)}_{B_6} + c_2 \frac{\partial}{\partial x} + c_3 \frac{\partial}{\partial t}.$$

3.10 Caso $g(u) = \frac{u}{1+u}$

Substituindo $g(u)$ e $g^{'}(u)$ em (3.9) e (3.10), temos

$$\begin{cases} \tau^{'} = 2\xi_x, \\ (-\alpha u - \beta)\dfrac{1}{(1+u)^2} - \xi_x \left(\dfrac{u}{1+u} \right) + \xi_t + 2\alpha_x = 0, \\ \beta_t - \beta_{xx} + \alpha_x \left(\dfrac{u^2}{1+u} \right) + \beta_x \left(\dfrac{u}{1+u} \right) + \alpha_t u - \alpha_{xx} u = 0. \end{cases}$$

Agrupando os termos em $u^2, u, 1$, temos

$$\begin{cases} \tau^{'} = 2\xi_x, \\ (\xi_t + 2\alpha_x - \xi_x)u^2 + (2\xi_t - \xi_x - \alpha + 4\alpha_x)u - \beta + \xi_t + 2\alpha_x = 0, \\ (\alpha_x + \alpha_t - \alpha_{xx})u^2 + (\alpha_t - \beta_{xx} + \beta_x + \beta_t - \alpha_{xx})u - \beta_{xx} + \beta_t = 0. \end{cases}$$

O conjunto $\{u^2, u, 1\}$ é linearmente independente, logo

$$\xi_t + 2\alpha_x - \xi_x = 0, \tag{3.86}$$

$$2\xi_t - \xi_x - \alpha + 4\alpha_x = 0, \tag{3.87}$$

$$\xi_t - \beta + 2\alpha_x = 0, \tag{3.88}$$

$$\alpha_x + \alpha_t - \alpha_{xx} = 0, \tag{3.89}$$

$$\alpha_t - \beta_{xx} + \beta_x + \beta_t - \alpha_{xx} = 0, \tag{3.90}$$

$$\beta_{xx} - \beta_t = 0, \tag{3.91}$$

$$\tau^{'} = 2\xi_x. \tag{3.92}$$

Em (3.89), isolamos α_x, em seguida usamos (3.89) e (3.91) na equação (3.90), logo, temos

$$\alpha_x = \beta_x.$$

Em seguida, isolamos ξ_t em (3.86), substituímos em (3.87) e encontramos $\xi_x = -\alpha$, por (3.92), temos que $\xi_{xx} = 0$, logo,

$$\xi_{xx} = \alpha_x$$

nos fornece $\alpha_x = 0$. Desta maneira, α não depende de x e, consequentemente, β também não depende de x. Além disso, por (3.91), concluímos que β não depende de t e por (3.89), α não depende de t . Dessa forma,

$$\alpha = \beta = const.$$

De (3.88), $\xi_t = \beta$, obtemos, assim,

$$\xi = c_1 t + \psi(x).$$

Agora, por (3.86),

$$\psi^{'}(x) = c_1,$$

ou seja,

$$\psi(x) = c_1 x + c_2.$$

Portanto,

$$\xi = c_1 t + c_1 x + c_2.$$

Além disso, por (3.92),

$$\tau = 2c_1 t + c_3$$

e

$$\eta = c_1 u + c_1.$$

Portanto o operador (3.3) será,

$$S = c_1 \underbrace{\left((x+t)\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + (1+u)\frac{\partial}{\partial u}\right)}_{B_7} + c_2\frac{\partial}{\partial x} + c_3\frac{\partial}{\partial t}.$$

3.11 Caso $g(u) = \frac{u}{1-u}$

Seja $g(u) = \dfrac{u}{1-u}$ substituindo $g(u)$ e $g^{'}(u)$ em (3.9) e (3.10), temos

$$\begin{cases} \tau^{'} = 2\xi_x, \\ (-\alpha u - \beta)\dfrac{1}{(1-u)^2} - \xi_x\left(\dfrac{u}{1-u}\right) + \xi_t + 2\alpha_x = 0, \\ \beta_t - \beta_{xx} + \alpha_x\left(\dfrac{u^2}{1-u}\right) + \beta_x\left(\dfrac{u}{1-u}\right) + \alpha_t u - \alpha_{xx} u = 0. \end{cases}$$

Agrupando os termos em $u^2, u, 1$, temos, assim,

$$\begin{cases} \tau^{'} = 2\xi_x, \\ (\xi_t + \xi_x + 2\alpha_x)u^2 + (-2\xi_t - \xi_x - \alpha - 4\alpha_x)u + \xi_t - \beta + 2\alpha_x = 0, \\ (\alpha_x - \alpha_t + \alpha_{xx})u^2 + (\alpha_t + \beta_{xx} + \beta_x - \alpha_{xx} - \beta_t)u - \beta_{xx} + \beta_t = 0. \end{cases}$$

O conjunto $\{u^2, u, 1\}$ é linearmente independente, logo, obtemos o sistema

$$\xi_t + \xi_x + 2\alpha_x = 0, \tag{3.93}$$

$$2\xi_t + \xi_x + \alpha + 4\alpha_x = 0, \tag{3.94}$$

$$2\alpha_x - \beta + \xi_t = 0, \tag{3.95}$$

$$\alpha_x - \alpha_t + \alpha_{xx} = 0, \tag{3.96}$$

$$\alpha_t + \beta_{xx} + \beta_x - \alpha_{xx} - \beta_t = 0, \tag{3.97}$$

$$\beta_{xx} - \beta_t = 0, \tag{3.98}$$

$$\tau^{'} = 2\xi_x. \tag{3.99}$$

Isolando α_t em (3.96) e substituindo esse resultado e (3.98) em (3.97), obtemos $-\beta_x = \alpha_x$. Em seguida, isolamos ξ_t em (3.93), substituimos em (3.94), temos

$$\xi_x = \alpha. \tag{3.100}$$

Substituindo ξ_t em (3.95), temos

$$\xi_x = -\beta. \tag{3.101}$$

De (3.100) e (3.101), obtemos

$$-\alpha = \beta.$$

Subtraindo (3.98) de (3.96), obtemos $\alpha_x = 0$, logo, α não depende de x. Agora, em (3.96),

$$\alpha_t = 0,$$

α não depende de t. Consequentemente, β não depende de x e nem de t. Assim,

$$\alpha = c_1$$

e

$$\beta = -c_1.$$

De (3.95), concluímos que

$$\xi = -c_1 t + \psi(x),$$

substituindo em (3.93), teremos que

$$\psi(x) = c_1 x + c_2,$$

assim,

$$\xi = -c_1 t + c_1 x + c_2.$$

Agora, em (3.99), concluímos que

$$\tau = 2c_1 t + c_3,$$

além disso,

$$\eta = c_1 u - c_1.$$

Portanto, o operador (3.3) será

$$S = c_1 \underbrace{\left((x-t)\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + (u-1)\frac{\partial}{\partial u}\right)}_{B_8} + c_2\frac{\partial}{\partial x} + c_3\frac{\partial}{\partial t}.$$

3.12 Caso $g(u) = \frac{1+u}{u}$

Substituindo $g(u)$ e $g^{'}(u)$ em (3.9) e (3.10) temos

$$\begin{cases} \tau^{'} = 2\xi_x, \\ (-\alpha u - \beta)\left(\dfrac{-1}{u^2}\right) - \xi_x\left(\dfrac{1+u}{u}\right) + \xi_t + 2\alpha_x = 0, \\ \beta_t - \beta_{xx} + \alpha_x u\left(\dfrac{1+u}{u}\right) + \beta_x\left(\dfrac{1+u}{u}\right) + \alpha_t u - \alpha_{xx} u = 0. \end{cases} \tag{3.102}$$

Agrupando os termos em $u^2, u, 1$, temos, assim,

$$\begin{cases} \tau^{'} = 2\xi_x, \\ (\xi_t - \xi_x + 2\alpha_x)u^2 + (-\xi_x + \alpha)u + \beta = 0, \\ (\alpha_t - \alpha_{xx} + \alpha_x)u^2 + (-\beta_{xx} + \beta_x + \beta_t + \alpha_x)u + \beta_x = 0. \end{cases} \tag{3.103}$$

O conjunto $\{u^2, u, 1\}$ é linearmente independente; dessa forma, temos

$$\xi_t - \xi_x + 2\alpha_x = 0, \tag{3.104}$$

$$\xi_x - \alpha = 0, \tag{3.105}$$

$$\beta = 0, \tag{3.106}$$

$$\alpha_t - \alpha_{xx} + \alpha_x = 0, \tag{3.107}$$

$$\beta_x - \beta_{xx} + \beta_t + \alpha_x = 0, \tag{3.108}$$

$$\beta_x = 0, \tag{3.109}$$

$$\tau^{'} = 2\xi_x. \tag{3.110}$$

De (3.106), (3.108) e (3.109), concluímos que $\alpha = \alpha(t)$. De (3.107), obtemos $\alpha = c_1$. De (3.105),

$$\xi = c_1 x + \psi(t).$$

De (3.104), temos que $\psi(t)^{'} = c_1$, ou seja, $\psi(t) = c_1 t + c_2$. Logo,

$$\xi = c_1 x + c_1 t + c_2.$$

Por (3.110),

$$\tau = 2c_1 t + c_3.$$

Além disso,

$$\eta = c_1 u.$$

Portanto, o operador (3.3) ficará

$$S = c_1 \underbrace{\left((x+t)\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u} \right)}_{B_9} + c_2\frac{\partial}{\partial x} + c_3\frac{\partial}{\partial t}.$$

3.13 Caso $g(u) = 0$

A equação (2.4) passa a ser $u_t = u_{xx}$ (conhecida como equação do calor). De (3.8), (3.9), (3.10) e substituindo $g(u) = g^{'}(u) = 0$, temos

$$\begin{cases} \tau^{'} = 2\xi_x, \\ (\alpha_t - \alpha_{xx})u + \beta_t - \beta_{xx} = 0, \\ \xi_t + 2\alpha_x = 0. \end{cases}$$

O conjunto $\{u, 1\}$ é linearmente independente, logo,

$$\alpha_t = \alpha_{xx}, \tag{3.111}$$

$$\beta_t = \beta_{xx}, \tag{3.112}$$

$$\xi_t = -2\alpha_x, \tag{3.113}$$

$$\tau^{'} = 2\xi_x. \tag{3.114}$$

Como $\tau^{'}$ depende apenas de t, concluímos que $\xi_{xx} = 0$ e, assim,

$$\xi_{xxt} = -2\alpha_{xxx}$$

logo,

$$\alpha_{xxx} = 0.$$

Portanto,

$$\alpha = f(t)x^2 + q(t)x + h(t).$$

Por outro lado, temos que

$$\alpha_t = \alpha_{xx},$$

logo,

$$f^{'}(t)x^2 + q^{'}(t)x + h^{'}(t) = 2f(t).$$

Concluímos, assim, que

$$\alpha = c_1x^2 + c_2x + 2c_1t + c_3.$$

Temos pelo sistema que

$$\xi_t = 2\alpha_x$$

e disso

$$\xi_t = -2(2c_1x + c_2).$$

Assim,

$$\xi = -4c_1xt - 2c_2t + \psi(x),$$

como

$$\xi_{xx} = 0,$$

chegamos que

$$\psi(x) = c_4x + c_5.$$

Portanto,

$$\xi = -4c_1xt - 2c_2t + c_4x + c_5. \tag{3.115}$$

Assim,

$$\tau^{'} = 2\xi_x,$$

logo,

$$\tau = -4c_1t^2 + 2c_4t + c_6$$

e

$$\eta = (c_1x^2 + c_2x + 2c_1t + c_3)u + \beta.$$

Portanto, o operador infinitesimal estendido ficará

$$S = c_1 \underbrace{\left(4xt\frac{\partial}{\partial x} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} - (x^2u + 2tu)\frac{\partial}{\partial u}\right)}_{Q_1} + c_2 \underbrace{\left(2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u}\right)}_{Q_2} + c_3 \underbrace{\left(u\frac{\partial}{\partial u}\right)}_{Q_3} +$$
$$+ c_4 \underbrace{\left(x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}\right)}_{Q_4} + c_5\frac{\partial}{\partial x} + c_6\frac{\partial}{\partial t} + \underbrace{\beta_1\frac{\partial}{\partial u}}_{Q_{\beta_1}}.$$

3.14 Caso $g(u) = 1$

A equação (2.4) passa a ser $u_t = u_{xx} + u_x$. De (3.8), (3.9) e (3.10) e substituindo $g(u) = 1$ e $g^{'}(u) = 0$, temos

$$\begin{cases} \tau^{'} = 2\xi_x, \\ -\xi_x + \xi_t + 2\alpha_x = 0, \\ (\alpha_t - \alpha_{xx} + \alpha_x)u + \beta_t - \beta_{xx} + \beta_x = 0. \end{cases} \tag{3.116}$$

O conjunto $\{u, 1\}$ é linearmente independente, logo,

$$\xi_t - \xi_x + 2\alpha_x = 0, \tag{3.117}$$

$$\alpha_t - \alpha_{xx} + \alpha_x = 0, \tag{3.118}$$

$$\beta_t - \beta_{xx} + \beta_x = 0, \tag{3.119}$$

$$\tau^{'} = 2\xi_x. \tag{3.120}$$

De (3.120), temos que

$$\xi_{xx} = 0. \tag{3.121}$$

Derivando duas vezes (3.117) com respeito a x, obtemos $\alpha_{xxx} = 0$. Logo,

$$\alpha = f(t)x^2 + g(t)x + h(t). \tag{3.122}$$

Isolando α_{xx} em (3.118), temos

$$\alpha_{xx} = \alpha_x + \alpha_t. \tag{3.123}$$

De (3.122) e (3.123), obtemos

$$\alpha = c_1x^2 + (c_2 - 2c_1t)x + 2c_1t + c_1t^2 - c_2t + c_3.$$

De (3.121), temos que $\xi = w(t)x + v(t)$ e de (3.117), concluímos que $w(t) = -4c_1t + c_4$ e $v(t) = -2c_2t + c_4t + c_5$. Logo,

$$\xi = -4c_1tx + c_4x + c_4t - 2c_2t + c_5.$$

De (3.120), obtemos que

$$\tau = -4c_1t^2 + 2c_4t + c_6.$$

Além disso,

$$\eta = (c_1x^2 + (c_2 - 2c_1t)x + 2c_1t + c_1t^2 - c_2t + c_3)u + \beta.$$

Onde β satisfaz a equação

$$\beta_x + \beta_t = \beta_{xx}. \tag{3.124}$$

Portanto,

$$S = c_1 \underbrace{\left(-4tx\frac{\partial}{\partial x} - 4t^2\frac{\partial}{\partial t} + (x^2 - 2xt + 2t + t^2)u\frac{\partial}{\partial u}\right)}_{Q_5} + c_2 \underbrace{\left(-2t\frac{\partial}{\partial x} + (xu - tu)\frac{\partial}{\partial u}\right)}_{Q_6} +$$
$$+ c_3 \underbrace{\left(u\frac{\partial}{\partial u}\right)}_{Q_7} + c_4 \underbrace{\left((x+t)\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}\right)}_{Q_8} + c_5\frac{\partial}{\partial x} + c_6\frac{\partial}{\partial t} + \underbrace{\beta_2\frac{\partial}{\partial u}}_{Q_{\beta_2}}.$$

Capítulo 4

Álgebras de Lie

As álgebras de Lie são uma parte do que hoje é conhecido genericamente por teoria de Lie. Essa teoria teve suas origens por volta de 1870 a partir da ideia, aparentemente singela, de abordar as equações diferenciais sob o mesmo ponto de vista que adotado por Galois para equações algébricas. O programa, lançado por Sophus Lie e Felix Klein, consistia em estudar as equações diferenciais via seus grupos de simetrias (ver [9]).

4.1 Definições básicas

Definição 12. *Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de um produto* (*colchete ou comutador*)

$$[.,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \tag{4.1}$$

com as seguintes propriedades :

1. *é bilinear,*
2. *antissimétrico, isto é, $[X, X] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ (o que implica $[X, Y] = -[Y, X]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ e é equivalente se o corpo de escalares não é de característica dois)*

e

3. *satisfaz a identidade de Jacobi, isto é, para todo* $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

$$[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0. \tag{4.2}$$

Definição 13. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie. Uma subálgebra de* $\mathfrak{g}$ *é um subespaço vetorial* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$ *que é fechado pelo colchete, isto é,* $[X,Y] \in \mathfrak{h}$ *se* $X, Y \in \mathfrak{h}$.

Definição 14. *Uma transformação linear* $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *(com* $\mathfrak{g}$ *e* $\mathfrak{h}$ *álgebras de Lie) é um*

- *homomorfismo se* $\psi\,[X,Y] = [\psi X, \psi Y]$;
- *isomorfismo se for um homomorfismo inversível;*
- *automorfismo se é um isomorfismo e* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$.

As álgebras $\mathfrak{g}$ *e* $\mathfrak{h}$ *são isomorfas se existe um isomorfismo* $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$.

4.2 Classificação das álgebras de Lie de simetrias

No capítulo anterior, encontramos os geradores infinitesimais de simetria para cada $g(u)$ listada no Teorema 10. Nesta seção, vamos classificar as álgebras de Lie de simetria da equação de Burgers. Uma vez que os casos não lineares admitem, no máximo 5 geradores de simetrias, segue que a álgebra de Lie desses possui dimensão menor ou igual a 5. Com isso, é possível usar a classificação feita em [14] para descobrir a quais álgebras de Lie clássicas as álgebras de Lie de simetrias dos casos não lineares são isomorfas. Lembremos que:

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad T = \frac{\partial}{\partial t}\ , \ B_{11} = tx\frac{\partial}{\partial x} + t^2\frac{\partial}{\partial t} + (x - tu)\frac{\partial}{\partial u}, \quad B_{12} = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u},$$

$$B_{13} = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u},\ B_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{p}u\frac{\partial}{\partial u},\ B_3 = t\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u},$$

$$B_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial u},\ B_5 = (x-t)\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + (1+u)\frac{\partial}{\partial u},\quad B_6 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + (1+u)\frac{\partial}{\partial u},$$

$$B_7 = (x+t)\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + (1+u)\frac{\partial}{\partial u},\quad B_8 = (x-t)\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + (u-1)\frac{\partial}{\partial u},$$

$$B_9 = (x+t)\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u}.$$

O teorema a seguir decorre imediatamente da definição do colchete de Lie.

Teorema 11. *As álgebras de Lie de simetrias da equação* (2.4) *são as seguintes:*

1. *Se* $g(u) = u$, *então,* $[X, B_{11}] = B_{12}, \quad [X, B_{13}] = X, \quad [T, B_{11}] = B_{13}, \quad [T, B_{12}] = X,$ $[T, B_{13}] = 2T, \quad [B_{11}, B_{13}] = -2B_{11}, \quad [B_{12}, B_{13}] = -B_{12}.$

2. *Se* $g(u) = u^p, p \neq 0, 1,$ *então* $[X, B_2] = X, \quad [T, B_2] = 2T.$

3. *Se* $g(u) = \ln u$, *então,* $[T, B_3] = X.$

4. *Se* $g(u) = e^{bu}, b \neq 0,$ *então,* $[X, B_4] = X, \quad [T, B_4] = 2T.$

5. *Se* $g(u) = \dfrac{1-u}{1+u}$, *então,* $[X, B_5] = X, \quad [T, B_5] = -X + 2T.$

6. *Se* $g(u) = \dfrac{1}{1+u}$, *então,* $[X, B_6] = X, \quad [T, B_6] = 2T.$

7. *Se* $g(u) = \dfrac{u}{1+u}$, *então,* $[X, B_7] = X, \quad [T, B_7] = X + 2T.$

8. *Se* $g(u) = \dfrac{u}{1-u}$, *então,* $[X, B_8] = X, \quad [T, B_8] = -X + 2T.$

9. *Se* $g(u) = \dfrac{1+u}{u}$, *então,* $[X, B_9] = X, \quad [T, B_9] = X + 2T.$

A demonstração do teorema é direta.

Sejam $\mathfrak{g}_1 := \{X, T, B_{11}, B_{12}, B_{13}\}$ e $\mathfrak{g}_i := \{X, T, B_i\}$, $2 \leqslant i \leqslant 9$ álgebras de Lie.

Corolário 2. *Valem os seguintes isomorfismos* $\mathfrak{g}_2 \cong \mathfrak{g}_4 \cong \mathfrak{g}_6$, $\mathfrak{g}_5 \cong \mathfrak{g}_8$, $\mathfrak{g}_7 \cong \mathfrak{g}_9$. *E, realizando uma mudança de base,* $\mathfrak{g}_5 \cong \mathfrak{g}_7$.

Demonstração. Seja $v \in \mathfrak{g}_2$. Então, esse elemento é uma combinação linear do tipo $v = aX + bT + cB_2$ com a, b e c escalares. Definimos $\psi : \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{g}_4$ tal que $\psi(v) = aX + bT + cB_4$. Logo, ψ é um isomorfismo. O isomorfismo $\mathfrak{g}_4 \cong \mathfrak{g}_6$ é verificado de forma análoga, bem como $\mathfrak{g}_5 \cong \mathfrak{g}_8$ e $\mathfrak{g}_7 \cong \mathfrak{g}_9$. Para $\mathfrak{g}_5 \cong \mathfrak{g}_7$ definimos $\psi : \mathfrak{g}_5 \to \mathfrak{g}_7$ tal que $\psi(v) = -aX + bT + cB_7$, onde $v = aX + bT + cB_5$ e temos, assim, que ψ é isomorfismo. □

Corolário 3. $\mathfrak{g}_2 \cong \mathfrak{g}_7$

Demonstração. Tome $\psi : \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{g}_7$ da seguinte forma: para $v = aX + bT + cB_2 \in \mathfrak{g}_2$ e definamos $\psi(v) = aX + b(X + T) + cB_7$. Dessa forma, temos que ψ é um isomorfismo. □

Faremos no próximo teorema a classificação dessas álgebras de Lie, para tanto, utilizaremos a notação da referência [14] na qual $A^{\alpha}_{i,j}$, significa a j-ésima álgebra de Lie de dimensão i e o índice α fornece o valor dos parâmetros contínuos dos quais a álgebra depende.

Teorema 12. *Dadas as álgebras encontradas no Teorema* 8*, temos que:*
$\mathfrak{g}_1 \cong A_{5,40}$, $\mathfrak{g}_2 \cong \mathfrak{g}_4 \cong \mathfrak{g}_5 \cong \mathfrak{g}_6 \cong \mathfrak{g}_7 \cong \mathfrak{g}_8 \cong \mathfrak{g}_9 \cong A^{\frac{1}{2}}_{3,5}$, $\mathfrak{g}_3 \cong A_{3,1}$.

Demonstração. Em [14] é mostrado que se $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ é uma base de $A_{5,40}$, então,
$[e_1, e_2] = 2e_1$, $[e_1, e_3] = -e_2$, $[e_2, e_3] = 2e_3$, $[e_1, e_4] = e_5$, $[e_2, e_4] = e_4$,
$[e_2, e_5] = -e_5$, $[e_3, e_5] = e_4$.

Tomemos $\psi : A_{5,40} \to \mathfrak{g}_1$ uma transformação linear cuja a imagem dos elementos da base são da seguinte forma:

$\psi(e_1) = T$, $\psi(e_2) = B_{13}$, $\psi(e_3) = -B_{11}$, $\psi(e_4) = B_{12}$, $\psi(e_5) = X$.

É fácil ver que ψ é homomorfismo e, além disso, que ψ^{-1} existe, logo, ψ é isomorfismo.

Agora, para $\mathfrak{g}_2 \cong \mathfrak{g}_5$, tomemos:

$e_1 := X$, $e_2 := -X + T$, $e_3 := B_5$.

Portanto, $[e_1, e_3] = e_1$ e $[e_2, e_3] = [-X + T, B_5] = 2e_2$. Em [14], os autores definem a álgebra $A_{3,5}^{\frac{1}{2}}$ como álgebra de dimensão 3 com as seguintes constantes de estrutura: $[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_3] = ae_2$, onde $a \in \mathbb{R}$ é tal que $|a| \in (0, 1)$. Fazendo a seguinte mudança de base $e_1 = T$, $e_2 = X$ e $e_3 = \dfrac{1}{2}B_9$ e tomando a transformação linear $\psi : \mathfrak{g}_9 \rightarrow \mathfrak{g}_9$ definida como $\psi(v) = ae_2 + be_1 + 2ce_3$, com $v = aX + bT + cB_9$, obtemos que ψ é um isomorfismo. Consequentemente, $\mathfrak{g}_9 \cong A_{3,5}^{\frac{1}{2}}$.

Tomemos $\psi : \mathfrak{g}_3 \rightarrow A_{3,1}$ uma transformação linear cuja a imagem dos elementos da base são da seguinte forma: $\psi(e_1) = X$, $\psi(e_2) = T$ e $\psi(e_3) = B_3$. E podemos concluir que ψ é isomorfismo. $\square$

Capítulo 5

Séries de Lie

De acordo com o Teorema 2, podemos escrever cada (GTPL) em uma série denominada série de Lie. O que vamos apresentar aqui será uma consequência desse teorema aplicado a cada gerador infinitesimal encontrado no Teorema 10. Assim, teremos o seguinte:

$$e^{\epsilon X}(x,t,u) = (e^{\epsilon X}x, e^{\epsilon X}t, e^{\epsilon X}u). \tag{5.1}$$

5.1 Caso $g(u) = u$

5.1.1 Operador infinitesimal B_{11}

Sabemos do Capítulo 3 que $B_{11} = tx\dfrac{\partial}{\partial x} + t^2\dfrac{\partial}{\partial t} + (x - tu)\dfrac{\partial}{\partial u}$.

Substituindo B_{11} no lugar de X em (5.1), obtemos $e^{\epsilon B_{11}}(x,t,u) = (e^{\epsilon B_{11}}x, e^{\epsilon B_{11}}t, e^{\epsilon B_{11}}u)$. Logo,

$$e^{\epsilon B_{11}}x = \left(1 + \epsilon B_{11} + \frac{\epsilon^2}{2!}B_{11}^2 + \cdots\right)x = x + \epsilon B_{11}x + \frac{\epsilon^2}{2!}B_{11}^2 x + \cdots,$$

onde

$$B_{11}x = \left(tx\frac{\partial}{\partial x} + t^2\frac{\partial}{\partial t} + (x - tu)\frac{\partial}{\partial u}\right)x = tx.$$

Além disso,

$$B_{11}^2 x = B_{11}(B_{11}x) = 2t^2 x, \cdots, B_{11}^n x = B_{11}(B_{11}^{n-1}x) = n!t^n x.$$

Analogamente, para t, obtemos $B_{11}t = t^2, B_{11}^2 t = 2t^2, \cdots, B_{11}^n t = n!t^{n+1}$ e

$B_{11}u = x - tu$ e para $n > 1, n \in \mathbb{N}$, $B_{11}^n u = 0$. E, portanto,

$$\begin{aligned} e^{\epsilon B_{11}}(x,t,u) &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i (t^i x), \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i (t^i), u + \epsilon(x - tu) \right) \\ &= \left(\frac{x}{1-\epsilon t}, \frac{t}{1-\epsilon t}, u + \epsilon(x - tu) \right) \end{aligned}$$

5.1.2 Operador infinitesimal B_{12}

Sabemos do Capítulo 3 que $B_{12} = t\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial u}$.

Substituindo B_{12} no lugar de X em (5.1), obtemos $e^{\epsilon B_{12}}(x,t,u) = (e^{\epsilon B_{12}}x, e^{\epsilon B_{12}}t, e^{\epsilon B_{12}}u)$.

Logo,

$$e^{\epsilon B_{12}}x = \left(1 + \epsilon B_{12} + \frac{\epsilon^2}{2!}B_{12}^2 + \cdots \right) x = x + \epsilon B_{12}x + \frac{\epsilon^2}{2!}B_{12}^2 x + \cdots,$$

onde

$$B_{12}x = \left(t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} \right) x = t, \cdots, B_{12}^n x = 0, \text{para todo}, n > 1.$$

Analogamente, para t, obtemos $B_{12}^n t = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo, $n > 1, n \in \mathbb{N}$, $B_{12}^n u = 0$.

Assim, concluímos que $e^{\epsilon B_{12}}(x,t,u) = (x + \epsilon t, t, u + \epsilon)$.

5.1.3 Operador infinitesimal B_{13}

Sabemos do Capítulo 3 que $B_{13} = x\dfrac{\partial}{\partial x} + 2t\dfrac{\partial}{\partial t} - u\dfrac{\partial}{\partial u}$.

Substituindo B_{11} no lugar de X em (5.1), obtemos $e^{\epsilon B_{13}}(x,t,u) = (e^{\epsilon B_{13}}x, e^{\epsilon B_{13}}t, e^{\epsilon B_{11}}u)$.

Logo,

$$e^{\epsilon B_{13}}x = \left(1 + \epsilon B_{13} + \frac{\epsilon^2}{2!}B_{13}^2 + \cdots\right)x = x + \epsilon B_{13}x + \frac{\epsilon^2}{2!}B_{13}^2 x + \cdots,$$

onde

$$B_{13}x = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}\right)x = x, \cdots, B_{12}^n x = x \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Analogamente, para t, obtemos $B_{11}^n t = 2^n t$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo , $n \in \mathbb{N}$, $B_{11}^n u = (-1)^n u$. Dessa forma, concluímos que

$$e^{\epsilon B_{13}}(x,t,u) = \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\epsilon^i}{i!}x, \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(2\epsilon)^i}{i!}t, \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\epsilon^i}{i!}(-1)^i u\right) = (e^{\epsilon}x, e^{2\epsilon}t, e^{-\epsilon}u).$$

5.2 Caso $g(u) = u^p$

5.2.1 Operador infinitesimal B_2

Sabemos do Capítulo 3 que $B_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{p}u\frac{\partial}{\partial u}$.

Substituindo B_2 no lugar de X em (5.1), obtemos $e^{\epsilon B_2}(x,t,u) = (e^{\epsilon B_2}x, e^{\epsilon B_2}t, e^{\epsilon B_2}u)$.

Logo,

$$B_2 x = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{p}u\frac{\partial}{\partial u}\right)x = x, \cdots, B_{12}^n x = x \quad \text{para todo,} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Analogamente, obtemos que $B_2^n t = 2^n t$ e $B_2^n u = \left(\frac{-1}{p}\right)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dessa forma, concluímos que

$$e^{\epsilon B_2}(x,t,u) = \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\epsilon^i}{i!}x, \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\epsilon^i}{i!}(2^i)t, \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\epsilon^i}{i!}(\frac{-1}{p})^i u\right) = (e^{\epsilon}x, e^{2\epsilon}t, e^{\frac{-\epsilon}{p}}u).$$

5.3 Caso $g(u) = \ln u$

5.3.1 Operador infinitesimal B_3

Sabemos do Capítulo 3 que $B_3 = t\dfrac{\partial}{\partial x} + u\dfrac{\partial}{\partial u}$.

Substituindo B_3 no lugar de X em (5.1), obtemos $e^{\epsilon B_3}(x,t,u) = (e^{\epsilon B_3}x, e^{\epsilon B_3}t, e^{\epsilon B_3}u)$.

Logo,

$$B_3 x = \left(t\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}\right)x = t, \cdots, B_3^n x = 0 \text{para todo} n > 1, n \in \mathbb{N}.$$

Analogamente, obtemos que $B_3^n t = 0$ e $B_3^n u = u$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, concluímos que

$$e^{\epsilon B_3}(x,t,u) = \left(x + \epsilon t, t, \sum_{i=0}^{n} \frac{\epsilon^i}{i!}u\right) = (x + \epsilon t, t, e^{\epsilon}u).$$

5.4 Caso $g(u) = e^{bu}$

5.4.1 Operador infinitesimal B_4

Sabemos do Capítulo 3 que $B_4 = x\dfrac{\partial}{\partial x} + 2t\dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{1}{b}\dfrac{\partial}{\partial u}$.

Substituindo B_4 no lugar de X em (5.1), obtemos $e^{\epsilon B_4}(x,t,u) = (e^{\epsilon B_4}x, e^{\epsilon B_4}t, e^{\epsilon B_4}u)$.

Logo,

$$B_4 x = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{b}u\frac{\partial}{\partial u}\right)t = x, \cdots, B_4^n x = x \text{para todo} n \in \mathbb{N}.$$

Analogamente, obtemos que $B_4^n t = 2^n t$ e $B_4^n u = \left(\frac{-1}{b}\right)u$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, concluímos que

$$e^{\epsilon B_4}(x,t,u) = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\epsilon^i}{i!}x, \sum_{i=0}^{n} \frac{\epsilon^i}{i!}(2^i)t, u + \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon^i}{i!}(\frac{-1}{b})^i\right) = (e^{\epsilon}x, e^{2\epsilon}t, e^{\frac{-\epsilon}{b}}u).$$

5.5 Caso $g(u) = \frac{1-u}{1+u}$

5.5.1 Operador infinitesimal B_5

Sabemos do Capítulo 3 que $B_5 = (x-t)\dfrac{\partial}{\partial x} + 2t\dfrac{\partial}{\partial t} + (1+u)\dfrac{\partial}{\partial u}$.

Substituindo B_5 no lugar de X em (5.1), obtemos $e^{\epsilon B_5}(x,t,u) = (e^{\epsilon B_5}x, e^{\epsilon B_5}t, e^{\epsilon B_5}u)$.

Logo,

$$e^{\epsilon B_5}x = \left(1 + \epsilon B_5 + \frac{\epsilon^2}{2!}B_5^2 + \cdots\right)x = x + \epsilon B_5 x + \frac{\epsilon^2}{2!}B_5^2 x + \cdots ,$$

onde

$$\begin{aligned}
B_5 x &= \left((x-t)\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + (1+u)\frac{\partial}{\partial u}\right)x = x - t,\\
B_5^2 x &= B_5(x-t) = (x-t) - (2.1)t,\\
B_5^3 x &= B_5(x-3t) = (x-t) - (2.3)t,\\
B_5^4 x &= B_5(x-7t) = (x-t) - (2.7)t,\\
&\vdots\\
B_5^n x &= x - 2(2^n - 1)t \quad n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Analogamente, para t, obtemos $B_5^n t = 2^n t$ e $B_5^n u = (1+u)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dessa forma, concluímos que

$$\begin{aligned}
e^{\epsilon B_5}(x,t,u) &= \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\epsilon^i}{i!}(x - 2(2^n-1)t), \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\epsilon^i}{i!}(2^i)t, u + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\epsilon^i}{i!}(1+u)\right)\\
&= (xe^{\epsilon} - e^{2\epsilon} + te^{\epsilon}, e^{2\epsilon}t, e^{\epsilon}(1+u) - 1).
\end{aligned}$$

5.6 Caso $g(u) = \frac{1}{1+u}$

5.6.1 Operador infinitesimal B_6

Sabemos do Capítulo 3 que $B_6 = x\dfrac{\partial}{\partial x} + 2t\dfrac{\partial}{\partial t} + (1+u)\dfrac{\partial}{\partial u}$.

Substituindo B_6 no lugar de X em (5.1), obtemos $e^{\epsilon B_6}(x,t,u) = (e^{\epsilon B_6}x, e^{\epsilon B_6}t, e^{\epsilon B_6}u)$.

Logo,

$$e^{\epsilon B_6}x = \left(1 + \epsilon B_6 + \frac{\epsilon^2}{2!}B_6^2 + \cdots\right)x = x + \epsilon B_6 x + \frac{\epsilon^2}{2!}B_6^2 x + \cdots,$$

onde

$$B_6 x = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + (1+u)\frac{\partial}{\partial u}\right)x = x, \cdots, B_6^n x = x \text{para todo} n \in \mathbb{N}.$$

Analogamente, para t, obtemos $B_6^n t = 2^n t$ e $B_6^n u = (1+u)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dessa forma, concluímos que

$$e^{\epsilon B_6}(x,t,u) = \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\epsilon^i}{i!}x, \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\epsilon^i}{i!}(2^i), \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\epsilon^i}{i!}(1+u)\right) = (e^{\epsilon}x, e^{2\epsilon}t, e^{\epsilon}(1+u) - 1).$$

5.7 Caso $g(u) = \frac{u}{1+u}$

5.7.1 Operador infinitesimal B_7

Sabemos do Capítulo 3 que $B_7 = (x+t)\dfrac{\partial}{\partial x} + 2t\dfrac{\partial}{\partial t} + (1+u)\dfrac{\partial}{\partial u}$.

Substituindo B_7 no lugar de X em (5.1), obtemos $e^{\epsilon B_7}(x,t,u) = (e^{\epsilon B_7}x, e^{\epsilon B_7}t, e^{\epsilon B_7}u)$.

Logo,

$$e^{\epsilon B_7}x = \left(1 + \epsilon B_7 + \frac{\epsilon^2}{2!}B_7^2 + \cdots\right)x = x + \epsilon B_7 x + \frac{\epsilon^2}{2!}B_7^2 x + \cdots,$$

onde

$$
\begin{aligned}
&B_7 x = ((x+t)\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + (1+u)\frac{\partial}{\partial u})x = x+t,\\
&B_7^2 x = B_7(x+t) = (x+t) + (2.1)t,\\
&B_7^3 x = B_7(x+3t) = (x+t) + (2.3)t,\\
&B_7^4 x = B_7(x+7t) = (x+t) + (2.7)t,\\
&\vdots\\
&B_7^n x = (x+t) + 2(2^n-1)t = x + (2^{n+1}-1)t, n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Analogamente, para t, obtemos $B_7^n t = 2^n t$, e $B_7^n u = (1+u)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, concluímos que

$$
\begin{aligned}
e^{\epsilon B_7}(x,t,u) &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!}(x + (2^{i+1}-1)t), \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!}(2^i), \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!}(1+u) \right)\\
&= (xe^{\epsilon} + e^{2\epsilon} - te^{\epsilon}, e^{2\epsilon}t, e^{\epsilon}(1+u) - 1).
\end{aligned}
$$

5.8 Caso $g(u) = \frac{u}{1-u}$

5.8.1 Operador infinitesimal B_8

Sabemos do Capítulo 3 que $B_8 = (x-t)\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + (u-1)\frac{\partial}{\partial u}$.

Substituindo B_8 no lugar de X em (5.1), obtemos $e^{\epsilon B_8}(x,t,u) = (e^{\epsilon B_8}x, e^{\epsilon B_8}t, e^{\epsilon B_8}u)$.

Logo,

$$
\begin{aligned}
B_8 x &= \left((x-t)\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + (u-1)\frac{\partial}{\partial u}\right) x = x - t,\\
B_8^2 x &= B_8(x-t) = (x-t) - (2.1)t,\\
B_8^3 x &= B_8(x-3t) = (x-t) - (2.3)t,\\
B_8^4 x &= B_8(x-7t) = (x-t) - (2.7)t,\\
&\vdots\\
B_8^{n+1} x &= B_8(x - 2^n t) = x - (2^{n+1}+1)t, n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Analogamente, para t, obtemos $B_8^n t = 2^n t$ e $B_8^n u = (u-1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, concluímos que

$$
\begin{aligned}
e^{\epsilon B_8}(x,t,u) &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!}(x - (2^i+1)t), \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!}(2^i), \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!}(u-1)\right)\\
&= (e^{\epsilon}x - e^{2\epsilon}t - e^{\epsilon}t, e^{2\epsilon}, 1 + e^{\epsilon}(u-1)).
\end{aligned}
$$

5.9 Caso $g(u) = \frac{1+u}{u}$

5.9.1 Operador infinitesimal B_9

Sabemos do Capítulo 3 que $B_9 = (x+t)\dfrac{\partial}{\partial x} + 2t\dfrac{\partial}{\partial t} + u\dfrac{\partial}{\partial u}$.

Substituindo B_9 no lugar de X em (5.1), obtemos $e^{\epsilon B_9}(x,t,u) = (e^{\epsilon B_9}x, e^{\epsilon B_9}t, e^{\epsilon B_9}u)$.

Logo,

$$B_9 x = \left((x+t)\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u}\right) x = x + t,$$

$$B_9^2 x = B_9(x+t) = (x+t) + (2.1)t,$$

$$B_9^3 x = B_9(x+3t) = (x+t) + (2.3)t,$$

$$B_9^4 x = B_9(x+7t) = (x+t) + (2.7)t,$$

$$\vdots$$

$$B_9^{n+1} x = B_9(x+2^n t) = (x+t) + (2^n)t = x + (2^n+1)t \quad n \in \mathbb{N}.$$

Analogamente, para t, obtemos $B_9^n t = 2^n t$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. $B_9^n u = u$.

Dessa forma, concluímos que

$$\begin{aligned} e^{\epsilon B_9}(x,t,u) &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!}(x + (2^n+1)t), \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!}(2^i)t, \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!}u\right) \\ &= (xe^{\epsilon} - e^{2\epsilon} + te^{\epsilon}, e^{2\epsilon}t, e^{\epsilon}u). \end{aligned}$$

5.10 Caso $g(u) = 0$

5.10.1 Operador infinitesimal Q_1

Sabemos do Capítulo 3 que $Q_1 = 4xt\frac{\partial}{\partial x} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} - (x^2u + 2tu)\frac{\partial}{\partial u}$. Nesse caso, utilizaremos uma outra maneira para chegar no ponto devido, à dificuldade que encontramos na utilização vista nos casos predecessores. Temos o seguinte P.V.I,

$$\begin{cases} \dfrac{dx^*}{d\epsilon} = \xi(x^*, t^*), \\ \\ \dfrac{dt^*}{d\epsilon} = \tau(x^*, t^*), \\ \\ \dfrac{du^*}{d\epsilon} = \eta(x^*, t^*, u^*), \\ \\ (x^*, t^*, u^*)\Big|_{\epsilon=0} = (x, t, u). \end{cases} \tag{5.2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx^*}{d\epsilon} = 4x^*t^*, \\ \\ \dfrac{dt^*}{d\epsilon} = 4t^{*2}, \\ \\ \dfrac{du^*}{d\epsilon} = -(x^{*2} + 2t^*)u^*, \\ \\ (x^*, t^*, u^*)\Big|_{\epsilon=0} = (x, t, u). \end{cases}$$

Dessa forma, temos que

$$\begin{cases} dx^* = 4x^*t^*d\epsilon, \\ \\ dt^* = 4t^{*2}d\epsilon, \\ \\ du^* = -(x^{*2} + 2t^*)u^*d\epsilon, \\ \\ (x^*, t^*, u^*)\Big|_{\epsilon=0} = (x, t, u). \end{cases}$$

Assim, obtemos

$$x^* = \frac{x}{1-4t\epsilon},$$

$$t^* = \frac{t}{1-4t\epsilon},$$

$$u^* = \sqrt{1-4t\epsilon}\exp\left[\frac{-x^2\epsilon}{(1-4t\epsilon)}\right]u.$$

Portanto,

$$e^{\epsilon Q_1}(x^*, t^*, u^*) = \left(\frac{x}{1-4t\epsilon}, \frac{t}{1-4t\epsilon}, \sqrt{1-4t\epsilon}\exp\left[\frac{-x^2\epsilon}{(1-4t\epsilon)}\right]u\right).$$

5.10.2 Operador infinitesimal Q_2

Sabemos do Capítulo 3 que $Q_2 = -2t\dfrac{\partial}{\partial x} + xu\dfrac{\partial}{\partial u}$.

Analogamente ao caso anterior, teremos que resolver um P.V.I.

$$\begin{cases} \dfrac{dx^*}{d\epsilon} = \xi(x^*, t^*), \\[2ex] \dfrac{dt^*}{d\epsilon} = \tau(x^*, t^*), \\[2ex] \dfrac{du^*}{d\epsilon} = \eta(x^*, t^*, u^*), \\[2ex] (x^*, t^*, u^*)\Big|_{\epsilon=0} = (x, t, u). \end{cases} \tag{5.3}$$

Dessa forma, temos que

$$\begin{cases} \dfrac{dx^*}{d\epsilon} = -2t^*, \\ \\ \dfrac{dt^*}{d\epsilon} = 0, \\ \\ \dfrac{du^*}{d\epsilon} = x^*u^*, \\ \\ (x^*, t^*, u^*)\Big|_{\epsilon=0} = (x, t, u). \end{cases}$$

Assim, obtemos

$$x^* = -2t\epsilon + x,$$

$$t^* = t,$$

$$u^* = e^{-t\epsilon^2 + x\epsilon}u.$$

Portanto,

$$e^{\epsilon Q_2}(x^*, t^*, u^*) = \left(-2t\epsilon + x, t, e^{-t\epsilon^2 + x\epsilon}u\right)$$

5.10.3 Operador infinitesimal Q_3

Sabemos do Capítulo 3 que $Q_3 = u\dfrac{\partial}{\partial u}$.

Substituindo Q_3 no lugar de X em (5.1), obtemos $e^{\epsilon Q_3}(x, t, u) = (e^{\epsilon Q_3}x, e^{\epsilon Q_3}t, e^{\epsilon Q_3}u)$.

Logo,

$$Q_3 x = \left(u\frac{\partial}{\partial u}\right)x = 0, \cdots, Q_3^n x = 0 \quad n \in \mathbb{N}.$$

Analogamente, para t, obtemos $Q_3^n t = 2^n t$, e $Q_3^n u = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dessa forma, concluímos que

$$e^{\epsilon Q_3}(x,t,u) = \left(x, t, \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!} u\right) = (x, t, e^{\epsilon} u).$$

5.10.4 Operador infinitesimal Q_4

Sabemos do Capítulo 3 que $Q_4 = x\dfrac{\partial}{\partial x} + 2t\dfrac{\partial}{\partial t}$.

Substituindo Q_4 no lugar de X em (5.1), obtemos $e^{\epsilon Q_4}(x,t,u) = (e^{\epsilon Q_4}x, e^{\epsilon Q_4}t, e^{\epsilon Q_4}u)$.

Logo,

$$Q_4 x = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}\right) x = x, \cdots, Q_4^n x = x \quad n \in \mathbb{N}.$$

Analogamente, para t, obtemos $Q_4^n t = 2^n t$, e $Q_4^n u = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dessa forma, concluímos que

$$e^{\epsilon Q_4}(x,t,u) = \left(e^{\epsilon} x, e^{2\epsilon} t, u\right).$$

5.10.5 Operador infinitesimal Q_{β_1}

Sabemos do Capítulo 3 que $Q_{\beta_1} = \beta_1 \dfrac{\partial}{\partial u}$.

Substituindo Q_{β_1} no lugar de X em (5.1), obtemos $e^{\epsilon Q_{\beta_1}}(x,t,u) = (e^{\epsilon Q_{\beta_1}}x, e^{\epsilon Q_{\beta_1}}t, e^{\epsilon Q_{\beta_1}}u)$.

Logo,

$$Q_{\beta_1} x = \left(\beta\frac{\partial}{\partial u}\right) x = 0, \cdots, Q_{\beta_1}^n x = 0 \quad n \in \mathbb{N}.$$

Analogamente, para t, obtemos $Q_{\beta_1}^n t = 0$, e $Q_{\beta_1}^n u = u$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dessa forma, concluímos que

$$e^{\epsilon Q_{\beta_1}}(x,t,u) = (x, t, (1 + \beta\epsilon)u).$$

5.11 Caso $g(u) = 1$

5.11.1 Operador infinitesimal Q_6

Sabemos do Capítulo 3 que $Q_6 = 2t\dfrac{\partial}{\partial x} + (t-x)u\dfrac{\partial}{\partial u}$. Nesse caso, utilizaremos a mesma ideia usada na seção 5.10 . Temos o seguinte P.V.I,

$$\begin{cases} \dfrac{dx^*}{d\epsilon} = \xi(x^*, t^*), \\ \\ \dfrac{dt^*}{d\epsilon} = \tau(x^*, t^*), \\ \\ \dfrac{du^*}{d\epsilon} = \eta(x^*, t^*, u^*), \\ \\ (x^*, t^*, u^*)\Big|_{\epsilon=0} = (x, t, u). \end{cases} \tag{5.4}$$

Dessa forma, temos que

$$\begin{cases} \dfrac{dx^*}{d\epsilon} = 2t^*, \\ \\ \dfrac{dt^*}{d\epsilon} = 0, \\ \\ \dfrac{du^*}{d\epsilon} = (t^* - x^*)u^*, \\ \\ (x^*, t^*, u^*)\Big|_{\epsilon=0} = (x, t, u). \end{cases}$$

Assim, obtemos

$$x^* = 2t\epsilon + x,$$

$$t^* = t,$$

$$u^* = e^{(t-t\epsilon-x)\epsilon}u.$$

Logo, pela condição inicial,

$$e^{\epsilon Q_6}(x^*, t^*, u^*) = \left(2t\epsilon + x, t, e^{(t-t\epsilon-x)\epsilon}u\right).$$

5.11.2 Operador infinitesimal Q_7

Sabemos do Capítulo 3 que $Q_7 = u\dfrac{\partial}{\partial u}$.

Substituindo Q_7 no lugar de X em (5.1), obtemos $e^{\epsilon Q_7}(x, t, u) = (e^{\epsilon Q_7}x, e^{\epsilon Q_7}t, e^{\epsilon Q_7}u)$.

Logo,

$$Q_7 x = \left(u\frac{\partial}{\partial u}\right)x = 0, \cdots, Q_7^n x = 0 \quad n \in \mathbb{N}.$$

Analogamente, para t, obtemos $Q_7^n t = 0$, e $Q_7^n u = u$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dessa forma, concluímos que

$$e^{\epsilon Q_7}(x, t, u) = (x, t, e^{\epsilon}u).$$

5.11.3 Operador infinitesimal Q_8

Sabemos do Capítulo 3 que $Q_8 = (x + t)\dfrac{\partial}{\partial x} + 2t\dfrac{\partial}{\partial t}$.

Substituindo Q_8 no lugar de X em (5.1), obtemos $e^{\epsilon Q_8}(x,t,u) = (e^{\epsilon Q_8}x, e^{\epsilon Q_8}t, e^{\epsilon Q_8}u)$.

Logo,

$$Q_8 x = \left((x+t)\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}\right) x = x+t, \cdots, Q_8^n x = x + (2^n - 1)t, n \in \mathbb{N}.$$

Analogamente, para t, obtemos $Q_8^n t = 2^n t$ e $Q_8^n u = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dessa forma, concluímos que

$$e^{\epsilon Q_8}(x,t,u) = \left(e^{\epsilon}x + e^{2\epsilon}t - e^{\epsilon}t, e^{2\epsilon}t, u\right).$$

5.11.4 Operador infinitesimal Q_{β_2}

Sabemos do Capítulo 3 que $Q_{\beta_2} = \beta\dfrac{\partial}{\partial u}$.

Substituindo Q_{β_2} no lugar de X em (5.1), obtemos $e^{\epsilon Q_\beta}(x,t,u) = (e^{\epsilon Q_{\beta_2}}x, e^{\epsilon Q_{\beta_2}}t, e^{\epsilon Q_{\beta_2}}u)$.

Logo,

$$Q_{\beta_2} x = \left(\beta\frac{\partial}{\partial u}\right) x = 0, \cdots, Q_{\beta_2}^n x = 0 \quad n \in \mathbb{N}.$$

Analogamente, para t, obtemos $Q_{\beta_2}^n t = 0$ e, para $n = 1$ temos $Q_{\beta_2}u = \beta_2$ e, para $n \geqslant 2$, temos que $Q_{\beta_2}^n u = 0$.

Dessa forma, concluímos que

$$e^{\epsilon Q_{\beta_2}}(x,t,u) = (x, t, u + \beta_2\epsilon).$$

Capítulo 6

Soluções e aplicações

Neste Capítulo, encontraremos a solução da equação, $u_t = u_{xx} - uu_x$, usando as simetrias de Lie e a transformação de Hopf-Cole.

6.1 Soluções da equação de Burgers via simetrias

Primeiramente, vamos encontrar soluções para essa equação. Tomemos $u_t = 0$, assim, teremos que u depende apenas de x e

$$u^{''}(x) - u(x)u^{'}(x) = 0.$$

Logo, como

$$\frac{d}{dx}\left[u^{'}(x) - \frac{u^2}{2}\right] = 0,$$

obtemos

$$u^{'} = \frac{c_1 + u^2}{2}.$$

Além disso,

$$\frac{du}{c_1 + u^2} = \frac{dx}{2},$$

integrando

$$\int \frac{du}{c_1 + u^2} = \frac{x}{2} + \frac{c_2}{2}.$$

Vamos dividir por casos para cada valor da constante c_1.

6.1.1 Caso $c_1 = 0$

$$\int u^{-2} du = \frac{x + c_2}{2},$$

assim,

$$-\frac{1}{u} = \frac{x + c_2}{2},$$

logo,

$$u = \frac{-2}{c_2 + x}. \tag{6.1}$$

6.1.2 Caso $c_1 = a^2, a \neq 0$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{x + c_2}{2}$$

e

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{x + c_2}{2}$$

assim,

$$\frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{x + c_2}{2}.$$

Dessa forma,

$$\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) = a\left(\frac{x + c_2}{2}\right),$$

e ainda,

$$\frac{u}{a} = \tan\left(\frac{ax + ac_2}{2}\right),$$

e, portanto,

$$u = a \tan\left(\frac{ax + ac_2}{2}\right). \tag{6.2}$$

6.1.3 Caso $c_1 = -a^2, a \neq 0$

$$\int \frac{du}{-a^2 + u^2} = \frac{c_2 + x}{2},$$

assim,

$$\frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| = -\frac{c_2 + x}{2},$$

e

$$\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| = -a(c_2 + x),$$

além disso,

$$\left|\frac{u+a}{u-a}\right| = Ce^{-ax},$$

e

$$u + a = Ce^{-ax}(u - a),$$

logo,

$$u = -a\frac{1 + Ce^{-ax}}{1 - Ce^{-ax}}. \tag{6.3}$$

Dessa forma, encontramos três soluções independentes do tempo. Considere a primeira solução

$$u = \frac{-2}{c_2 + x}$$

e a transformação associada ao gerador $X = t\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial u}$ dada por,

$$(x^*, t^*, u^*) \longmapsto (x + \epsilon t, t, u + \epsilon). \tag{6.4}$$

Assim, temos que

$$u = \frac{-2}{c_2 + x} = f(x,t)$$

é uma solução da equação de Burgers. Logo, usando a transformação (6.4), temos

$$u + \epsilon = f(x + \epsilon t, t),$$

que, também, é uma solução. Como

$$f(x + \epsilon t, t) = \frac{-2}{c_2 + x + \epsilon t},$$

segue que

$$u = \frac{-2}{c_2 + x + \epsilon t} - \epsilon$$

é outra solução da equação de Burgers. E, analogamente, para (6.2) e (6.3), temos

$$u = a \tan\left(\frac{a(x + \epsilon t) + ac_2}{2}\right) - \epsilon$$

e

$$u = -a\frac{1 + Ce^{-a(x+\epsilon t)}}{1 - Ce^{-a(x+\epsilon t)}} - \epsilon$$

que são novas soluções para equação de Burgers, o interessante, que a princípio dependiam apenas da variável x e via simetrias chegamos em novas soluções que dependem das variáveis x e t.

6.2 Soluções invariantes

Nesta seção, encontraremos soluções invariantes da equação do calor utilizando métodos mostrado no Capítulo 1 que são o método da forma invariante (1.68) e o método da substituição direta (1.70).

A simetria que utilizaremos aqui será $Q_1 = 4xt\dfrac{\partial}{\partial x} + 4t^2\dfrac{\partial}{\partial t} - (x^2u + 2tu)\dfrac{\partial}{\partial u}$.

Pelo **método da forma invariante**, utilizando da condição de invariância de superfície (1.67), temos que

$$4xtu_x + 4t^2u_t = -(x^2 + 2t)u \tag{6.5}$$

e as equações características correspondentes são dadas por

$$\frac{dx}{4xt} = \frac{dt}{4t^2} = \frac{du}{-(x^2 + 2t)u}. \tag{6.6}$$

Essa solução das equações características gera dois invariantes de Q_1:

$$\zeta = \frac{x}{t}, \quad \rho = \sqrt{t}\exp\left(\frac{x^2}{4t}\right)u. \tag{6.7}$$

Portanto, a solução da condição de invariância de superfície (6.5) é dado pela forma invariante,

$$\sqrt{t}\exp\left(\frac{x^2}{4t}\right)u = \Phi\left(\frac{x}{t}\right).$$

Em u, temos

$$u = \Theta(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right)\Phi(\zeta). \tag{6.8}$$

Substituindo (6.8) na equação do calor, teremos que

$$\Phi''(\zeta) = 0.$$

Portanto, as soluções invariantes da equação do calor oriundas da simetria Q_1 são dadas por

$$u = \Theta(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left[C_1 + C_2\left(\frac{x}{t}\right)\right]\exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right). \tag{6.9}$$

Onde C_1, C_2 são constantes quaisquer.

6.3 Utilizando a transformação de Hopf-Cole

Agora utilizaremos a transformação de Hopf-Cole para encontrar uma solução da equação de Burgers. Tomemos uma solução da equação do calor,

$$v = \frac{x}{t\sqrt{t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right), \tag{6.10}$$

com $C_1 = 0, C_2 = 1$. Lembrando que a transformação de Hopf-Cole é da forma

$$u = -2\frac{v_x}{v}$$

e considerando a solução da equação do calor dada por (6.10), obtemos

$$u = \frac{-2t + x^2}{tx},$$

que é uma solução da equação de Burgers.

Conclusões

Este trabalho foi motivado primeiramente pelo artigo [4] que faz um estudo da equação de Burgers generalizada do ponto de vista das simetrias de Lie. Para chegar aos resultados aqui mostrados usamos como referência para as definições e teoremas o livro [3].

O caminho escolhido para construção desta dissertação levou em conta aplicação da teoria em uma EDP. Vale ressaltar que essa teoria tem aplicações análogas em EDO; contudo, nosso interesse neste trabalho era encontrar soluções invariantes da EDP estudada via simetrias e a transformação de Hopf-Cole.

Como foi visto ao longo do trabalho essa, teoria contribui no sentido de possuir um algoritmo bem definido que nos fornece os geradores de simetria da equação trabalhada. Fizemos, ainda, a classificação das álgebras de simetrias em álgebras de Lie clássicas, estabelecendo os isomorfismos. A particularidade desta dissertação foi calcular as séries de Lie que, em certo sentido, é o mesmo que olharmos para os pontos transformados, ou seja, visualizar a transformação de pontos agindo na solução. Isso ficou claro quando encontramos uma nova solução da equação de Burgers via simetrias, no Capítulo 6.

Com o que apresentamos, ao longo, dessa dissertação é possível pensar em novos trabalhos que utilizem essa teoria para encontrar soluções invariantes de EDPs e fazer um estudo semelhante ao feito nesse trabalho.

Referências Bibliográficas

[1] E. R. Benton, Solutions illustrating the decay of dissipation layers in Burgers' nonlinear diffusion equation, The Phys. Fluids, vol.10, 2113-19, (1967).

[2] E. R. Benton and G. W. Platzman, A table of solutions of the one-dimensional Burgers' equation. Quart. Appl. Math., vol.30, 195-212, (1972).

[3] G. W. Bluman and S. C. Anco, Symmetry and integration methods for differential equations, Applied Mathematics , Springer, vol. 35, (2000).

[4] I. L. Freire, Note on Lie point symmetries of Burgers' equation, TEMA, vol.11, 151-157, (2010).

[5] I. L. Freire, Simetrias de Lie de equações diferenciais parciais semilineares envolvendo o operador de Kohn-Laplace no grupo de Heisenberg, Tese de Doutorado em Matemática Aplicada, UNICAMP, Campinas, (2008).

[6] E.Hopf. The partial differential equation $u_t + uu_{xx} = \mu u_{xx}$, Comm. Pure Appl. Math., vol. 3, 201-230, (1950).

[7] J. Kevorkian, Partial differential equation: analytical solution techniques, Texts in Applied Mathematics , Springer, vol. 35, (2000).

[8] V. I. Lagno and A. M. Samoilenko, Group classification of nonlinear evolution equations:

invariance under semisimple local transformation groups, Diff. Eq., vol. 38, 384-391, (2002).

[9] L. A. B. S. Martin, Álgebras de Lie, Editora da UNICAMP, Campinas, (2010).

[10] A. C. G. Martins, Simetrias de Lie e soluções exatas de equação diferenciais quasilineares, Tese de Doutorado em Matemática, UNICAMP, Campinas, (2002).

[11] F.Oliveri, Lie symmetries of differential equations: classical results and recent contributions, Symmetry, 658-706, (2010).

[12] P. J. Olver, Applications of Lie groups to differential equations. GMT , Springer, New York, vol. 107, (1986).

[13] B. C. Pasa, Equação de Burgers: Propriedades e comportamento assintótico, Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, (2005).

[14] J. Patera, R. T. Sharp, P.Winternitz and H. Zassenhaus, Invariants of real low dimension Lie algebras, J.Math.Phys., vol. 17, 986-994, (1976).