

UMA GENERALIZAÇÃO DE FATORES EM GRAFOS

IARA CIURRIA STAVROPOULOU



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

T/UNICAMP
St29g

4542

CAMPINAS - SÃO PAULO
BRASIL



COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO

UNICAMP AUTORIZAÇÃO PARA QUE A UNICAMP POSSA FORNECER, A PRE-
ÇO DE CUSTO, CÓPIAS DA TESE A INTERESSADOS

Nome do Aluno: Iara Ciurria Stavropoulou

Nº de Identificação: 765194

Endereço para Correspondência:

Curso: Matemática Aplicada

Nome do Orientador: Prof. Dr. Cláudio Leonardo Lucchesi

Título da Dissertação ou Tese: Uma Generalização de Fatores em Grafos

Data proposta para a Defesa: 13 de Agosto de 1982

(O Aluno deverá assinar um dos 3 itens abaixo)

1) Autorizo a Universidade Estadual de Campinas a partir desta data, a fornecer, a preço de custo, cópias de minha Dissertação ou Tese a interessados.

30/7/1982

Data

assinatura do aluno

2) Autorizo a Universidade Estadual de Campinas, a fornecer, a partir de dois anos após esta data, a preço de custo, cópias de minha Dissertação ou Tese a interessados.

1/1
Data

assinatura do aluno

3) Solicito que a Universidade Estadual de Campinas me consulte, dois anos após esta data, quanto à minha autorização para o fornecimento de cópias de minha Dissertação ou Tese, a preço de custo, a interessados.

1/1
Data

assinatura do aluno

De acordo
Cláudio L. Lucchesi
Orientador

UMA GENERALIZAÇÃO DE FATORES EM GRAFOS

IARA CIURRIA STAVROPOULOU

Orientador: PROF. DR. CLÁUDIO LEONARDO LUCCHESI

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Este trabalho foi realizado com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-CNPq e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP.

AGOSTO/1982

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Ofereço este trabalho aos meus pais, Humberto Ciurria e Mafalda Pavan Ciurria, como uma forma de agradecimento pelo amor, dedicação, incentivo e enorme esforço dispendido em minha educação.

AGRADECIMENTOS

- Ao Professor Dr. CLÁUDIO LEONARDO LUCCHESI, sempre amigo, mi nha gratidão pelo estímulo, dedicação e excelente orientação.
- Ao KONSTANTINOS, meu marido, cujo incentivo e apoio ajudaram-me a superar os momentos difíceis.
- Ao Professor Dr. EDGAR E. M. RECHTSCHAFFEN pela orientação de um trabalho anterior a este, o qual levou-me à Teoria dos Grafos.
- Ao Professor Dr. MIGUEL TAUBE NETTO pela amizade e incentivo ao meu desenvolvimento.
- Ao Senhor RAUL DOS SANTOS pela presteza e excelente trabalho de datilografia.
- Ao CNPq e FAPESP pelo suporte financeiro concedido.
- E a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

UMA GENERALIZAÇÃO DE FATORES EM GRAFOS

RESUMO

É apresentada uma condição necessária e suficiente para que um grafo finito possua um subgrafo gerador em que cada vértice tenha seu grau num intervalo especificado. Este resultado generaliza outros obtidos por Hall e Tutte em que o intervalo de cada vértice é reduzido a um ponto. A demonstração é construtiva, e obtém-se um algoritmo polinomial que determina um subgrafo que mais se aproxima, num sentido bem definido, das especificações desejadas. Mostra-se ainda que ao se atribuir pesos às arestas, o problema se torna então NP-completo.

São apresentadas também algumas aplicações elementares do teorema, as quais incluem fluxos em redes e seqüências gráficas.

A GENERALIZATION OF FACTORS IN GRAPHS

ABSTRACT

A necessary and sufficient condition for a finite graph to have a spanning subgraph in which the degree of each vertex lies in a specified interval is presented. This result generalizes others that were obtained by Hall and Tutte, in which the interval of each vertex is reduced to a single point. The proof is constructive and a polynomial algorithm is obtained. This algorithm determines a subgraph which, in a well defined sense, is as close as possible to the desired specifications. It is shown that when we associate weights with the edges, the problem becomes NP-complete.

Some direct applications of the theorem are also presented, which include flows in networks and graphic sequences.

CONTEÚDO

	Pág.
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO I - DEFINIÇÕES E NOTAÇÃO BÁSICAS	3
1. Simbologia e Notação	4
2. Grafos	4
3. Tipos de Grafos	5
4. Subgrafos	6
5. Maximalidade e Minimalidade	6
6. Cortes de Arestas - Grau de um Vértice	7
7. Passeios	9
8. Conexidade	10
9. Digrafos ou Grafos Orientados	10
CAPÍTULO II - DEFINIÇÃO GERAL DO PROBLEMA DO f-FATOR E SUAS PARTICULARIZAÇÕES	13
1. O Problema do f-Fator	13
2. Análise de Resultados Particulares e sua Generalização ...	15
CAPÍTULO III - RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DO f-FATOR	28
1. Introdução	28
2. Caracterização de um Conjunto f-Ótimo	29
3. Passeios Fundamentais	33
4. Demonstração do Teorema da f-Optimalidade	36
5. Consequências do Teorema da f-Optimalidade	46
6. Uma Generalização NP-Completa	52
CAPÍTULO IV - APLICAÇÕES	58
1. Introdução	58
2. f-Fatores em Grafos Biparticionáveis e em Digrafos	58
3. f-Solubilidade	63
4. Fluxo Máximo num Digrafo	67

	Pág.
5. Aresta Cromaticidade de Grafos Biparticionáveis.....	73
6. Seqüências Gráficas	76
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	81
ÍNDICE DE NOTAÇÕES.....	84
ÍNDICE ALFABÉTICO	88

INTRODUÇÃO

Em geral, o termo fator designa um subgrafo gerador de um grafo dado, em que o grau de cada vértice tem um valor previamente especificado. Equivalentemente, o termo fator pode designar o conjunto das arestas do referido subgrafo.

Em 1935, Hall [16] obteve uma condição necessária e suficiente para que um grafo biparticionável possua um subconjunto x de arestas tal que cada vértice incide em exatamente uma aresta de x . Em 1947, Tutte [18] generalizou esta condição para um grafo não necessariamente biparticionável. Em 1952, Tutte [19] generalizou ainda mais o teorema, definindo para cada vértice v um número inteiro não negativo $f(v)$ que deve ser o número de arestas do fator que incide em v .

Neste trabalho associamos, a cada vértice v , um par ordenado $(f_1(v), f_2(v))$ de números inteiros, com $f_1(v) \leq f_2(v)$. Generalizamos então a definição de fator que agora designa um conjunto x de arestas tal que cada vértice v incide em no mínimo $f_1(v)$ e no máximo $f_2(v)$ arestas de x . Determinamos uma condição necessária e suficiente para que um grafo admita um fator. A demonstração desta condição, que é apresentada no capítulo III, evoluiu a partir de demonstrações do teorema de Tutte com f constante e igual a 1 em todos os vértices [5] e [11]. Como subproduto da demonstração, obtivemos um algoritmo polinomial que determina um conjunto de arestas que mais se aproxima, num sentido bem definido, de um fator.

A necessidade da referida condição é apresentada no capítulo II como um estudo progressivo das condições particulares já conhecidas, porém sob um ponto de vista um pouco diferente.

No capítulo III é demonstrada a suficiência da condição; esse capítulo contém ainda outro resultado original: se generalizarmos a definição de fator atribuindo pesos às arestas, obteremos um problema NP-completo.

Finalizamos o trabalho apresentando no capítulo IV algumas aplicações do teorema. Conseguimos obter, como consequência do mesmo, resultados não triviais, alguns dos quais clássicos.

CAPÍTULO I

DEFINIÇÕES E NOTAÇÃO BÁSICAS

O objetivo deste capítulo é apresentar as definições e notações básicas da Teoria dos grafos que serão utilizadas no decorrer deste trabalho. Muitas destas definições e notações foram retiradas das referências [3], [7] e [2]; as demais foram introduzidas de acordo com as necessidades do trabalho.

Convém ressaltar que vamos considerar apenas grafos finitos, ou seja, grafos que apresentam um número finito de vértices e de arestas.

Ao leitor familiarizado com a literatura, recomenda-se a leitura da seção 1 antes dos demais capítulos, e a consulta a este capítulo quando necessitar de alguma definição. No final deste trabalho, apresentamos uma lista dos principais símbolos e um índice alfabético das definições

1 - SIMBOLOGIA E NOTAÇÃO

De um modo geral, quando não houver possibilidade de interpretação ambígua, simplificaremos as notações ou denominações, suprimindo algumas letras, símbolos ou palavras. Por exemplo, chamaremos de componente (f,B) -ímpar às componentes de um subgrafo, determinado a partir de B , que possuem certas propriedades com relação a f e B ; o conjunto de todas as componentes (f,B) -ímpares será denotado por $I(f,B)$. Quando não houver dúvidas com relação a f e B , diremos apenas componente ímpar e denotaremos $I(f,B)$ por I .

Sejam f e g duas funções reais com mesmo domínio D . Usaremos as seguintes notações:

$f \leq g$ quando $f(a) \leq g(a)$ para cada $a \in D$.

$f = g$ quando $f(a) = g(a)$ para cada $a \in D$.

$f(X) = \{f(a) \mid a \in X\}$ para $X \subseteq D$

2 - GRAFOS

Um grafo G consiste de um conjunto finito VG de elementos chamados vértices, um conjunto finito AG de elementos chamados arestas e uma função incidência $eG: AG \rightarrow VG$ que associa a cada aresta α um par não ordenado $eG\alpha = \{u,v\}$ de vértices (u,v não necessariamente distintos) chamados extremos de α .

Os grafos podem ser representados por diagramas, onde cada

vértice é representado por um ponto e cada aresta por uma linha ligando os pontos que representam seus extremos. (Subentende-se que nenhuma linha passa por pontos que representem vértices outros que os extremos da aresta correspondente).

Muitos termos utilizados na teoria dos grafos advêm da representação em diagramas. Assim, os extremos de uma aresta são incidentes à aresta, e vice-versa. Os extremos de uma aresta são adjacentes (mesmo que coincidam); são adjacentes também arestas com pelo menos um extremo em comum. Para X um subconjunto de VG , $AdjG(X)$ denota o conjunto dos vértices de G adjacentes a pelo menos um dos vértices de X . Uma aresta é um laço se seus extremos coincidem, uma ligação caso contrário. Arestas distintas com o mesmo par de extremos são chamadas arestas paralelas.

A cardinalidade de um grafo G é o inteiro $|VG| + |aG|$. O grafo vazio é o grafo de cardinalidade zero, sem vértices nem arestas.

Usaremos normalmente a letra G para designar um grafo; assim, de acordo com a nossa convenção, omitiremos a letra G quando não houver possibilidade de ambigüidade e escreveremos por exemplo, V , a , e , Adj , ao invés de VG , aG , eG , $AdjG$, respectivamente.

3 - TIPOS DE GRAFOS

Grafo simples é aquele que não contém laços nem arestas paralelas.

Grafo completo é um grafo simples em que quaisquer dois vértices distintos são adjacentes. Um grafo completo com exatamente n vértices

tices é denotado por K_n ; em particular, o K_3 é chamado de triângulo.

Uma bipartição de um grafo G é um par não ordenado X, Y tal que $X \cup Y = VG$, $X \cap Y = \emptyset$ e cada aresta de G tem um extremo em X , o outro em Y . Um grafo é biparticionável se admite uma bipartição.

4 - SUBGRAFOS

Um grafo H é um subgrafo de outro G ($H \subseteq G$) se VH inclui VH , aG inclui aH e, eH é a restrição de eG a aH . Se $H \neq G$ então H é um subgrafo próprio de G .

Para X um subconjunto de VG , o subgrafo de G gerado por X , $G[X]$, é o subgrafo H de G tal que $VH = X$ e aH é o conjunto das arestas de G que têm ambos os extremos em X . Ainda, $G-X$ abrevia $G[V \setminus X]$ e para v um vértice em V , $G-v$ abrevia $G-\{v\}$.

Um grafo H gera outro G se $H \subseteq G$ e $G = G[VH]$. Um grafo H é um subgrafo gerador de G se H gera G . Assim, um grafo H gera G se e somente se $H \subseteq G$ e $VH = VG$.

5 - MAXIMALIDADE E MINIMALIDADE

Dado um conjunto C de conjuntos, dizemos que um conjunto m em C é máximo em C se nenhum conjunto em C possui cardinalidade maior do que a de m ; analogamente, m é mínimo em C se nenhum conjunto em C possui cardinalidade menor do que a de m .

Dizemos que um conjunto m em C é maximal em C se nenhum conjunto em C inclui propriamente m ; analogamente, m é minimal em C se nenhum conjunto em C é um subconjunto próprio de m .

Dado um conjunto C de grafos, um grafo G é máximo em C se nenhum outro grafo em C tem cardinalidade maior do que a de G ; um grafo H é maximal em C se H não é subgrafo próprio de nenhum grafo em C . Analogamente se definem grafos mínimos e grafos minimais.

6 - CORTES DE ARESTAS - GRAU DE UM VÉRTICE

Dado um par não ordenado X, Y de subconjuntos de V , não necessariamente disjuntos, $\lambda_G(X, Y)$ denota o conjunto das arestas com um extremo em X , o outro em Y . Note que $\lambda(X, Y) = \lambda(Y, X)$.

Quando o par constituir uma partição de V , pode-se omitir um dos termos escrevendo apenas $\lambda(X)$ ou $\lambda(Y)$. Dizemos ainda que $\lambda(X)$ é o corte de arestas associado a X . Note que $\lambda(X) = \lambda(V \setminus X)$ e que $\lambda(\emptyset) = \emptyset = \lambda(V)$.

Um conjunto d de arestas é um corte de arestas se existir um subconjunto X de V tal que $d = \lambda(X)$.

Dado um par não ordenado X, Y de subconjuntos de V , não necessariamente disjuntos, define-se

$$g_G(X, Y) = |\lambda(X, Y)| + |\lambda(X \cap Y, X \cap Y)|$$

Quando $Y = V$ denotamos $g(X, V)$ por $g(X)$. Note que

$$g(X) = |\lambda(X)| + 2|\lambda(X, X)| = |\lambda(X)| + 2|a_G[X]|$$

Para v um vértice em V , $g(v)$ abrevia $g(\{v\})$ e é chamado grau do vér

tice v . Observe que $g(v)$ é o número de arestas que incidem em v , laços contados duas vezes. Se $g(v) = 0$ dizemos que v é isolado em G .

Dado agora um subconjunto x de a , $\lambda_x(X, Y)$ denota $x \cap \lambda(X, Y)$ e

$$g_x(X, Y) = |\lambda_x(X, Y)| + |\lambda_x(X \cap Y, X \cap Y)|.$$

Em particular, $g_x(v)$, o grau do vértice v relativo a x , é o número de arestas em x incidentes em v , laços contados duas vezes. Note que para $x = a$, $g_a(v) = g(v)$. Para α uma aresta em a , $g_\alpha(v)$ abrevia $g\{\alpha\}(v)$.

Como consequência imediata das definições apresentadas, temos o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 1 - $g(V) = 2|a|$ e $g_x(V) = 2|x|$.

■

COROLÁRIO 2 - Em todo grafo, o número de vértices com grau (grau relativo) ímpar é par.

■

Dizemos que os vértices $u, v \in V$ são x -adjacentes se existe uma aresta $\alpha \in x$ tal que $e_\alpha = \{u, v\}$. Por outro lado, $\text{Adj}_x(v)$ denota $\text{Adj}_H(v)$ onde H é o subgrafo gerador de G tal que $aH = x$.

Seja agora S um subconjunto de V ; $V_S(G)$ denota o conjunto de todos os vértices v em V tais que $\text{Adj}(v) \subseteq S$. Desse modo, $V_\emptyset(G)$ denota o conjunto de todos os vértices isolados em G . Observe ainda que

$$V_S(G) \setminus S = V_\emptyset(G-S)$$

7 - PASSEIOS

Um passaio P em G é uma seqüência finita e não vazia $(v_0, \alpha_1, v_1, \dots, \alpha_n, v_n)$, cujos termos são alternadamente vértices v_i em V e arestas α_j em a , e tal que, para todo i , $1 \leq i \leq n$, v_{i-1} e v_i são os extremos de α_i . Admite-se o caso em que $n = 0$, no qual P é então dito degenerado.

O comprimento de P é o inteiro n . Os vértices extremos de P , v_0 e v_n , não necessariamente distintos, são chamados respectivamente de origem e término de P ; v_1, v_2, \dots, v_{n-1} , também não necessariamente distintos e podendo coincidir com a origem ou término de P , são chamados vértices internos de P ; se $n > 0$ então as arestas α_1 e α_n são a aresta-origem e a aresta-término de P , respectivamente; VP e aP denotam os conjuntos $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ e $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ respectivamente; o passeio P passa pelos vértices de VP e pelas arestas de aP .

O passeio $R(P) = (v_n, \alpha_n, v_{n-1}, \dots, \alpha_1, v_0)$ é o reverso de P .

Uma seção de P é um passeio que é uma subseqüência de termos consecutivos de P .

Se as arestas $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de P forem duas a duas distintas então P é uma trilha. Se os vértices v_0, \dots, v_n forem dois a dois distintos então P é um caminho.

Seja agora $Q = (u_0, \beta_1, u_1, \beta_2, \dots, \beta_m, u_m)$ um passeio tal que $u_0 = v_n$. Então a seqüência $(v_0, \alpha_1, v_1, \dots, \alpha_n, v_n, \beta_1, u_1, \dots, \beta_m, u_m)$, um passeio, é o produto de P e Q nessa ordem, sendo indicado por $P o Q$.

8 - CONEXIDADE

Dois vértices u e v de um grafo G são ligados em G se existe um passeio de u a v em G . Convém ressaltar que u e v são ligados se e somente se existe um caminho de u a v em G . Desta definição segue imediatamente que a relação de ligação é de equivalência. Portanto, induz uma partição p de V tal que dois vértices são ligados se e somente se pertencem ao mesmo elemento de p . Cada elemento X de p gera um subgrafo de G , $G[X]$, que é chamado componente de G .

Um grafo G é conexo se quaisquer dois de seus vértices são ligados, ou seja, se G é vazio ou se G possui uma única componente; se G não é conexo, dizemos que G é desconexo.

9 - DIGRAFOS OU GRAFOS ORIENTADOS

Uma orientação de um grafo é um par ordenado (e^+, e^-) de funções, ambas de a em V , tais que para cada aresta α em a , $e^+ \alpha$ e $e^- \alpha$ são os extremos de α em G : $e^+ \alpha$ é o extremo inicial de α e $e^- \alpha$ é o extremo final de α . Um digrafo ou um grafo orientado D consiste de um grafo GD , chamado de grafo subjacente de D , e de uma orientação de GD .

Na representação de um digrafo por um diagrama, colocamos, em cada aresta α , uma flecha que aponta de $e^+ \alpha$ para $e^- \alpha$.

Podemos aplicar a um digrafo todos os conceitos ou propriedades definidos para grafos (não orientados), subentendendo-se que estamos aplicando o conceito ou propriedade ao seu grafo subjacente.

Assim, podemos dizer que um digrafo é conexo, ou que P é um passeio num digrafo, etc.

Neste trabalho, confundiremos a notação D de um digrafo com a notação GD de seu grafo subjacente.

Vamos agora apresentar as definições e notações que nos serão necessárias.

Seja D um digrafo, X e Y subconjuntos de V , v um vértice em V e x um subconjunto de a .

O conjunto das arestas α de a tais que $e^+\alpha \in X$ e $e^-\alpha \in Y$ ($e^+\alpha \in Y$ e $e^-\alpha \in X$) é denotado por $\lambda^+_{D}(X,Y)$ ($\lambda^-_{D}(X,Y)$); note que

$$\lambda(X,Y) \cup \lambda(X \cap Y, X \cap Y) = \lambda^+(X,Y) \cup \lambda^-(X,Y).$$

Se X, Y constituir uma partição de V então $\lambda^+(X,Y)$ ($\lambda^-(X,Y)$) é denotado por $\lambda^+(X)$ ou $\lambda^+(Y)$ ($\lambda^-(X)$ ou $\lambda^-(Y)$).

Define-se ainda

$$g^+_{D}(X,Y) = |\lambda^+(X,Y)| \text{ e } g^-_{D}(X,Y) = |\lambda^-(X,Y)|$$

Note que

$$g(X,Y) = g^+(X,Y) + g^-(X,Y).$$

Denotamos $g^+(X,V)$ e $g^-(X,V)$ respectivamente por $g^+(X)$ e $g^-(X)$.

Observe que

$$g^+(X) = |\lambda^+(X)| + |\lambda^+(X,X)| = |\lambda^+(X)| + |aG[X]|$$

$$g^-(X) = |\lambda^-(X)| + |\lambda^-(X,X)| = |\lambda^-(X)| + |aG[X]|$$

O semi-grau exterior de v é definido por $g^+(\{v\})$ e denotado por $g^+(v)$; $g^+(v)$ é o número de arestas que possuem v como extremo inicial, laços contados uma só vez. De maneira análoga define-se o semi-grau interior de v , $g^-(v)$. Temos então que $g(v) = g^+(v) + g^-(v)$.

Denotamos ainda $x \cap \lambda^+(X,Y)$ e $x \cap \lambda^-(X,Y)$ respectivamente por $\lambda^+_x(X,Y)$ e $\lambda^-_x(X,Y)$. Define-se então $g^+_x(X,Y)$, $g^-_x(X,Y)$, $g^+_x(v)$ e $g^-_x(v)$ por

$$g^+_x(X,Y) = |\lambda^+_x(X,Y)|; \quad g^-_x(X,Y) = |\lambda^-_x(X,Y)|;$$

$$g^+_x(v) = g^+_x(\{v\},V); \quad g^-_x(v) = g^-_x(\{v\},V).$$

Finalmente, dado um subconjunto S de V , define-se

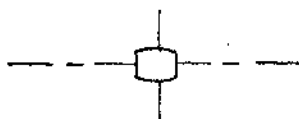
$$V_S^+(D) = \{v \in V / \text{Adj}^+(v) \subseteq S\} \quad \text{e}$$

$$V_S^-(D) = \{v \in V / \text{Adj}^-(v) \subseteq S\} \quad \text{onde}$$

$$\text{Adj}^+(v) = \{u \in V / u = e^-_\alpha \text{ para alguma aresta } \alpha \text{ com } e^+_\alpha = v\}$$

e

$$\text{Adj}^-(v) = \{u \in V / u = e^+_\alpha \text{ para alguma aresta } \alpha \text{ com } e^-_\alpha = v\}.$$



CAPÍTULO II

DEFINIÇÃO GERAL DO PROBLEMA DO f-FATOR E SUAS PARTICULARIZAÇÕES

Neste capítulo vamos apresentar uma generalização de fatores em grafos finitos. A fim de encontrar naturalmente a generalização de resultados conhecidos, vamos reestudá-los com um enfoque novo.

1 - O PROBLEMA DO f-FATOR

Dado um grafo G , uma função restrição $f: V \rightarrow Z \times Z$ é uma função que associa, a cada vértice v em V , o par ordenado $(f_1(v), f_2(v))$ com $f_1(v) \leq f_2(v)$. Se f é uma função restrição em G , usaremos a notação $f = (f_1, f_2)$.

Dizemos que G é f-fatorável quando existe um subconjunto x de a tal que $f_1 \leq g x \leq f_2$; nesse caso, x é um f-fator em G (figura 1) ^①

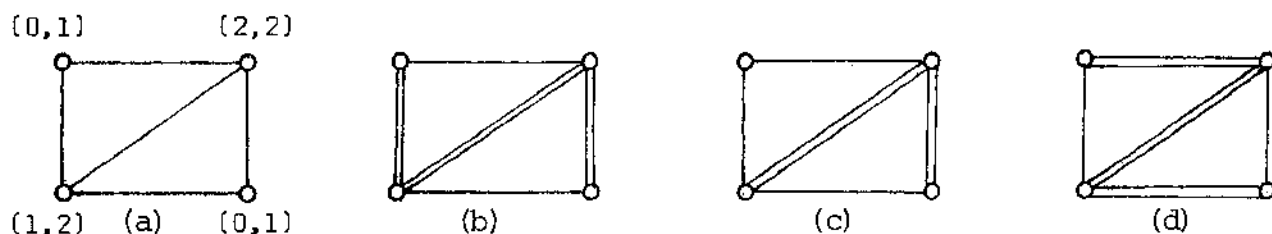


Figura 1. (a) um grafo G onde a função restrição f está indicada em cada vértice; (b-d) exemplos de f -fatores em G .

① Seguindo a nomenclatura mais comum na literatura, poderíamos equivalentemente definir um f -fator como sendo um subgrafo H gerador de G tal que $f_1 \leq gH \leq f_2$

O problema do f -fator consiste em determinar condições necessárias e suficientes para que um grafo dado seja f -fatorável, e conseguir um algoritmo eficiente que determine um f -fator quando G for f -fatorável.

A solução para este problema, que será apresentada no Capítulo III, é um pouco mais completa pois determinaremos condições necessárias e suficientes para que um subconjunto x de a esteja, num sentido que será definido, o mais próximo possível em G de um f -fator; como sub-produto da demonstração obteremos um algoritmo polinomial que determina tal subconjunto ótimo (convém ressaltar aqui que se G admite um f -fator então um subconjunto ótimo será necessariamente um f -fator).

Considere agora uma função $f: V \rightarrow Z$ e um subconjunto x de a . Dizemos que x é um f -emparelhamento em G se $g x \leq f$ e uma f -cobertura de V se $g x \geq f$. Por outro lado, se $g x = f$ então x é um f -emparelhamento perfeito em G e uma f -cobertura perfeita de V , recebendo também neste caso, o nome de f -fator em G . Note que esta definição de f -fator nada mais é do que uma particularização da definição anterior de f -fator: basta redefinirmos f como sendo a função restrição (f, f) .

Observe que x é um f -fator em G se e somente se x é uma f_1 -cobertura de V e um f_2 -emparelhamento em G . Por sua vez, toda f_1 -cobertura de V e todo f_2 -emparelhamento em G são f -fatores particulares: basta fazer respectivamente $f = (f_1, g)$ e $f = (0, f_2)$.

Por outro lado, veremos no Capítulo III que, se G não é f -fatorável então um subconjunto ótimo não precisa ser uma f_1 -cobertura

de V , nem um f_2 -emparelhamento em G . Porém, se for requerido, nosso algoritmo pode determinar um subconjunto ótimo que seja ou uma f_1 -cobertura ou um f_2 -emparelhamento, desde que tenhamos respectivamente $f_1 \leq g$ ou $f_2 \geq 0$; basta para isso fornecer dados iniciais adequados.

2 - ANÁLISE DE RESULTADOS PARTICULARES E SUA GENERALIZAÇÃO

Conforme observamos anteriormente, quando a função restrição f possui $f_1 = f_2$, o problema do f -fator pode ser simplificado considerando-se $f(v)$ como sendo o inteiro $f_1(v)$ ao invés do par ordenado $(f_1(v), f_1(v))$. Neste caso recaímos em problemas já estudados, os quais passaremos a analisar. Esta análise será feita sob um ponto de vista um pouco diferente, o que nos permitirá visualizar uma condição necessária para que um grafo G seja f -fatorável, sendo f uma função restrição arbitrária; posteriormente provaremos que esta condição é também suficiente.

Vamos começar nossa análise com o caso $f = 1$, i.e. $f(v) = 1$ para todo v em V . Observe que neste caso, um 1-fator em G é um emparelhamento perfeito em G . Vejamos então quais condições um subconjunto x de arestas deve satisfazer, a fim de ser um 1-fator em G .

Suponhamos inicialmente que G seja biparticionável. Seja então x um 1-fator em G e S um subconjunto de V . Como cada vértice em $V_\emptyset(G-S)$ é adjacente unicamente a vértices em S e $gx(S) = |S|$ (pois x é um 1-fator em G), é obvio que para que cada vértice em $V_\emptyset(G-S)$ seja incidente a uma aresta em x , devemos ter $|V_\emptyset(G-S)| \leq |S|$. Philip

Hall [16] provou a suficiência de uma condição equivalente a esta; deste modo podemos enunciar o seguinte teorema:

TEOREMA DE HALL (1935) Um grafo G com bipartição X, Y é 1-fatorável se e somente se

- (i) $|X \cap V_\emptyset(G-S)| \leq |S|$ para cada $S \subseteq Y$
 e
 (ii) $|Y \cap V_\emptyset(G-S)| \leq |S|$ para cada $S \subseteq X$ ②

COROLÁRIO Um grafo G biparticionável é 1-fatorável se e somente se

$$|V_\emptyset(G-S)| \leq |S| \text{ para cada } S \subseteq V.$$

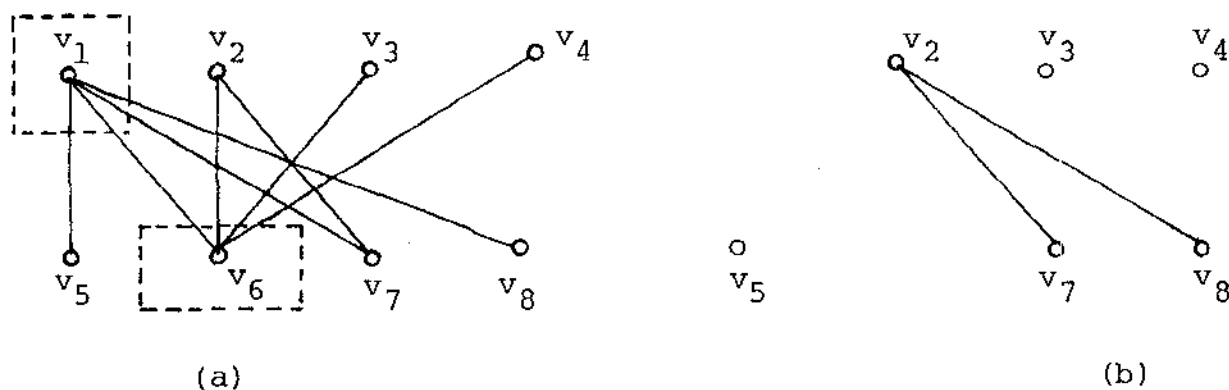


Figura 2. (a) um grafo G que não é 1-fatorável;
 (b) $G - \{v_1, v_6\}$ com 3 vértices isolados.

② Como conseqüência imediata de [16], no qual Hall caracteriza representantes de classes de subconjuntos, temos o teorema: "Um grafo G com bipartição X, Y possui um 1-fator se e somente se, $|Adj(S)| \geq |S|$ para cada $S \subseteq X$ e cada $S \subseteq Y$ "

Se G não for biparticionável, a condição do corolário do teorema de Hall, apesar de necessária, não é suficiente para garantir a existência de um 1-fator: basta verificar que um triângulo satisfaz a referida condição mas não possui um 1-fator. Vamos então analisar um pouco mais a existência de um 1-fator num grafo não biparticionável.

Considere um subconjunto S de V e seja K uma componente de $G-S$. Então, para todo subconjunto x de a temos

$$g_x(VK) + g_x(VK, S) \equiv 0 \pmod{2} \quad (I)$$

pois estamos contando duas vezes as arestas de x com pelo menos um extremo em VK . Deste modo, se x for um 1-fator em G então devemos ter

$$|VK| + g_x(VK, S) \equiv 0 \pmod{2}$$

Observamos assim que se $|VK|$ for ímpar e x um 1-fator em G então $g_x(VK, S)$ é não nulo, ou seja, para cada componente K de $G-S$ com um número ímpar de vértices, x contém pelo menos uma aresta em $\lambda(VK, S)$; sendo x um 1-fator, é óbvio que o número de tais arestas não pode exceder $|S|$.

Define-se então uma componente ímpar de $G-S$ como sendo uma componente com um número ímpar de vértices; denotemos o conjunto de todas as componentes ímpares de $G-S$ por $I(G-S)$. Vimos que $|I(G-S)| \leq |S|$ é uma condição necessária para a existência de um 1-fator em G ; William T. Tutte [18] mostrou também a suficiência desta condição.

TEOREMA I DE TUTTE (1947) Um grafo G é 1-fatorável se e somente se

$$|I(G-S)| \leq |S| \text{ para cada } S \subseteq V .$$

Doravante citaremos essa condição como sendo a condição I de Tutte.

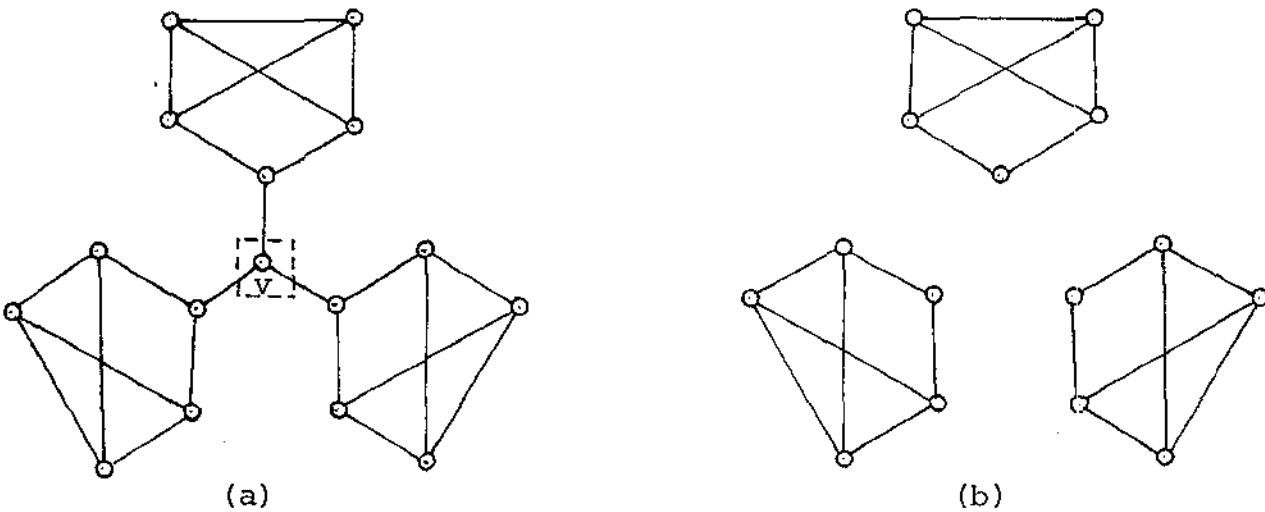


Figura 3. (a) um grafo G que não é 1-fatorável;
(b) $G-v$ com 3 componentes ímpares.

Vamos agora experimentar com generalizações do teorema I de Tutte para o caso em que $f: V \rightarrow \mathbb{Z}$ é uma função arbitrária. Para tanto, dado um subconjunto S de V , tentemos inicialmente generalizar a definição de componente ímpar de $G-S$.

De acordo com (I), se x for um f -fator em G então

$$f(VK) + g_x(VK, S) \equiv 0 \pmod{2} \quad (\text{II})$$

donde se conclui que para cada componente K de $G-S$ com $f(VK)$ ímpar, x utiliza pelo menos uma aresta de $\lambda(VK, S)$; sendo x um f -fator, é

óbvio que o número de tais arestas não deve exceder $f(S)$.

Denotemos por $I_0(f, G-S)$ o conjunto de todas as componentes K de $G-S$ com $f(VK)$ ímpar; temos o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 1 - Se G é f -fatorável então

$$|I_0(f, G-S)| \leq f(S) \quad (\forall S \subseteq V) \quad \blacksquare \quad (III)$$

Verifica-se porém que esta condição, apesar de necessária, não é suficiente: basta analisar o grafo da figura 4(a) e constatar que o mesmo satisfaz (III) mas não é f -fatorável. Para mostrar a validade de (III), basta notar que $f(v)$ é ímpar em apenas dois vértices, e estes são adjacentes; deste modo, $|I_0(f, G-S)| \leq 1$ valendo a igualdade somente se precisamente um daqueles vértices está em S .

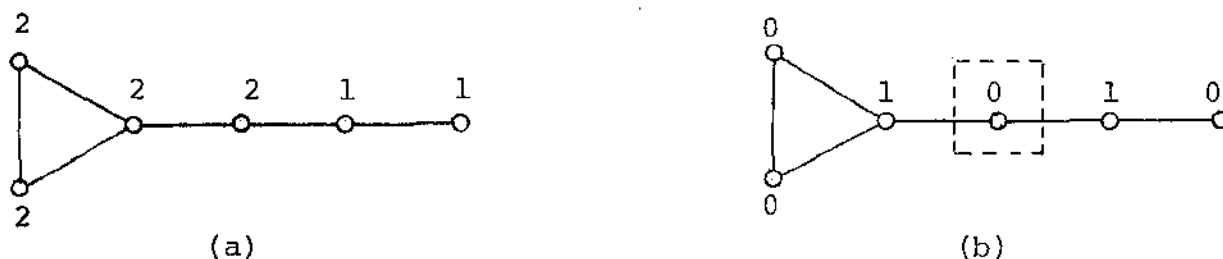


Figura 4. (a) um grafo G com f indicada em cada vértice.

G satisfaz (III) mas não é f -fatorável;

(b) o grafo G com f^* indicada em cada vértice.

Vamos então analisar um pouco mais nosso problema através da dualidade que passaremos a definir.

Seja $f = (f_1, f_2)$ uma função restrição em G . Define-se a função restrição f^* dual de f como sendo a folga de (f_2, f_1) com rela-

ção a (g, g) , i.e., $f^* = (g - f_2, g - f_1)$. Note que $(f^*)^* = f$. Por outro lado, considerando-se o caso $f = (f, f)$, podemos definir o dual de uma função $f: V \rightarrow Z$ como sendo $f^* = g - f$; deste modo podemos indicar $f^* = (f_2^*, f_1^*)$.

Seja agora x um subconjunto de a . Define-se o dual de x como sendo o complementar de x com relação a a , i.e., $x^* = a \setminus x$. Note que $(x^*)^* = x$.

PROPOSIÇÃO 2 - Um subconjunto x de a é um f -emparelhamento em G se e somente se x^* é uma f^* -cobertura de V .

Demonstração: $gx \leq f \iff g - gx \geq g - f \iff gx^* \geq f^*$. ■

COROLÁRIO 3 - Dada uma função restrição $f = (f_1, f_2)$, um subconjunto x de a é um f -fator em G se e somente se x^* é um f^* -fator em G . ■

COROLÁRIO 4 - Seja $f = (f_1, f_2)$ uma função restrição em G . Então G é f -fatorável se e somente se G é f^* -fatorável. ■

Voltemos então à nossa discussão sobre a não suficiência da condição (III) com relação à existência de um f -fator em G . Convém lembrar que estamos considerando $f(v)$ como sendo um inteiro.

Vimos que o grafo G na figura 4(a) satisfaz (III) com relação

a f , porém através da figura 4(b) observa-se que G não satisfaz (III) com relação a f^* (basta tomar como S o vértice assinalado); assim, pela necessidade de (III) e Corolário 4 concluímos que G não pode ser f -fatorável.

Conseguimos, desta maneira, uma condição necessária mais forte do que (III):

PROPOSIÇÃO 5 - Se G é f -fatorável então

- (i) $|I_0(f, G-S)| \leq f(S)$ para cada $S \subseteq V$
 e (IV)
 (ii) $|I_0(f^*, G-S)| \leq f^*(S)$ para cada $S \subseteq V$ ■

Novamente, porém, verifica-se que a condição (IV), apesar de necessária, não é suficiente: basta analisar a figura 5. Note que, como na figura 4, somente dois vértices tem $f(f^*)$ ímpar, e estes são adjacentes.

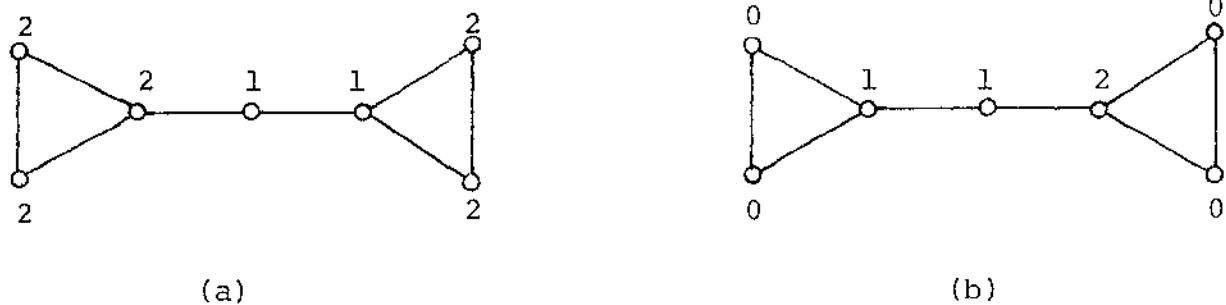


Figura 5. Um grafo G com f indicado em cada vértice em (a) e f^* em (b). G satisfaz (IV) mas não é f -fatorável.

Voltemos então a analisar os argumentos que nos forneceram a condição (III), lembrando agora que para G possuir um f -fator, deve também possuir um f^* -fator.

Vimos em (II) que se x é um f -fator em G e S é um subconjunto de V então $f(VK) + g_x(VK, S) \equiv 0 \pmod{2}$, ou seja, para cada componente K de $G-S$ com $f(VK)$ ímpar, x utiliza pelo menos uma aresta em $\lambda(VK, S)$. Analogamente, sendo x^* um f^* -fator em G , temos que para cada componente K de $G-S$ com $f^*(VK)$ ímpar, x utiliza pelo menos uma aresta em $\lambda(VK, S)$.

Levando em conta estas duas observações, vamos considerar dois subconjuntos disjuntos S e T de V , e analisar as componentes K de $G-(S \cup T)$ tais que

$$g_x(VK, S) + g_{x^*}(VK, T) > 0$$

sempre que x for um f -fator em G .

Uma G -tripla é uma partição $B = (S, T, U)$ de V em 3 blocos disjuntos, alguns eventualmente vazios. Dada uma função $f: V \rightarrow Z$, uma componente (f, B) -ímpar de $G[U]$ é uma componente K tal que

$$f(VK) + g(VK, T) \equiv 1 \pmod{2}$$

O conjunto de todas as componentes (f, B) -ímpares de $G[U]$ é denotado por $I(f, B)$.

PROPOSIÇÃO 6 - Se K é uma componente (f, B) -ímpar de $G[U]$ e x é um f -fator em G então

$$g_x(VK,S) + g_x^*(VK,T) \equiv 1 \pmod{2}.$$

Demonstração: Sendo x um f -fator, para cada componente K em $G[U]$ temos

$$f(VK) + g_x(VK,T) + g_x(VK,S) \equiv 0 \pmod{2}$$

ou seja,

$$f(VK) + g(VK,T) - g_x^*(VK,T) + g_x(VK,S) \equiv 0 \pmod{2}$$

Assim, se K é (f,B) -ímpar então

$$g_x(VK,S) + g_x^*(VK,T) \equiv 1 \pmod{2}.$$

■

Pela proposição 6 concluímos que se x é um f -fator em G e K é uma componente (f,B) -ímpar de $G[U]$ então ou x utiliza pelo menos uma aresta em $\lambda(VK,S)$ ou x^* utiliza pelo menos uma aresta em $\lambda(VK,T)$. Sendo x um f -fator, é óbvio que $g_x(VK,S)$ e $g_x^*(VK,T)$ são limitados respectivamente por $f(S)$ e $f^*(T)$. Assim, temos o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 7 - Se G é f -fatorável então

$$|I(f,B)| \leq f(S) + f^*(T) \tag{V}$$

para cada G -tripla $B = (S,T,U)$

■

Verifica-se porém, que esta condição ainda não é suficiente

para G possuir um f -fator: basta analisar o grafo da figura 6.

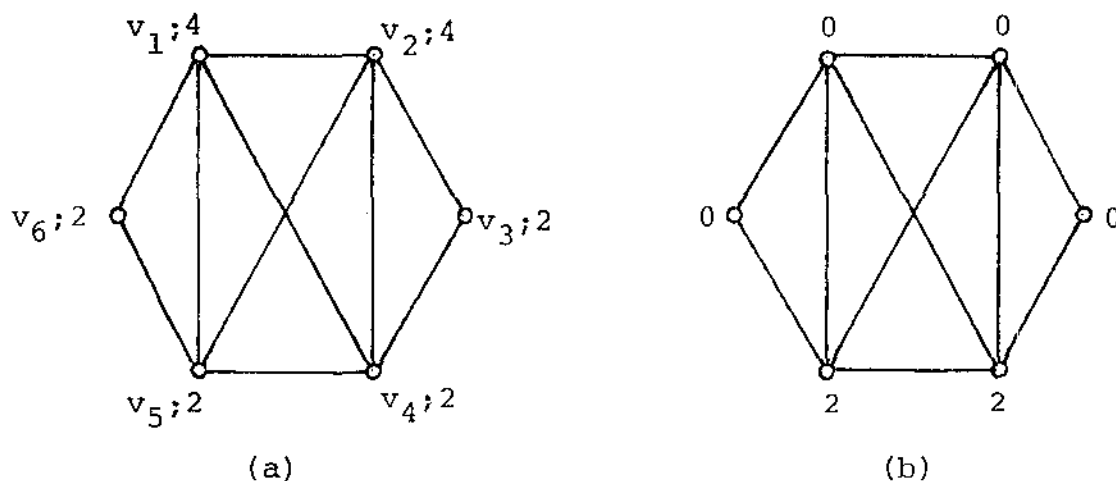


Figura 6. um grafo G com f indicada em cada vértice em (a) e f^* em (b). G satisfaz (V) mas não é f -fatorável.

Verifiquemos que o grafo da figura 6 satisfaz a condição (V).

Se $S = \emptyset$ então nenhuma componente K de $G[U]$ é (f, B) -ímpar pois $f(VK)$ é par e $g(VK, T)$ também. Podemos então supor que S é não vazio; neste caso, $f(S) + f^*(T) \geq 2$ e para todo $X \subseteq V$, $G-X$ tem no máximo duas componentes. Deste modo a condição (V) é satisfeita e é fácil ver que G não possui um f -fator.

Analisando com mais detalhe o grafo da figura 6., nota-se que para a G -tripla $B = (\{v_4, v_5\}, \{v_1, v_2\}, \{v_3, v_6\})$ temos

$$|I(f, B)| = 2 < f(S) + f^*(T) = 4 + 0.$$

Porém, $g(T, S) = 4$ e cada aresta α em $\lambda(T, S)$ ou está em x e utiliza uma unidade de $f(S)$, ou está em x^* e utiliza uma unidade de $f^*(T)$. Deste modo, para G possuir um f -fator deveríamos ter

$$|I(f,B)| + g(T,S) \leq f(S) + f^*(T)$$

o que não ocorre nesse caso.

Encontramos então uma nova condição necessária cuja suficiência foi provada por Tutte em [19]. Temos assim o seguinte teorema, cuja condição será por nós denominada condição II de Tutte.

TEOREMA II DE TUTTE (1952) Um grafo G é f -fatorável se e somente se

$$|I(f,B)| + g(T,S) \leq f(S) + f^*(T)$$

para cada G -tripla $B = (S,T,U)$.

Seja agora $f = (f_1, f_2)$ uma função restrição arbitrária. A obtenção de uma condição necessária para a existência de um f -fator em G tornou-se praticamente imediata e intuitiva.

Dada uma G -tripla $B = (S,T,U)$ e $f = (f_1, f_2)$, uma componente (f,B) -ímpar de $G[U]$ é uma componente K de $G[U]$ tal que $i(K;f,B) = 1$ onde

$$i(K;f,B) = \begin{cases} 1, & \text{se } f_1(VK) = f_2(VK) \text{ e } f_1(VK) + g(VK,T) \equiv 1 \pmod{2} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O conjunto de todas as componentes (f,B) -ímpares de $G[U]$ é de notado por $I(f,B)$.

PROPOSIÇÃO 8 - Seja $f = (f_1, f_2)$ uma função restrição em G . Se G é f -fatorável então

$$|I(f, B)| + g(T, S) \leq f_2(S) + f_1^*(T) \quad (VI)$$

para cada G -tripla $B = (S, T, U)$. ■

Mostraremos no capítulo III que esta condição é também suficiente para que G seja f -fatorável.

Observe que se existir um vértice v em V tal que $f_1(v) > g(v)$ então G não é f -fatorável. De fato, basta testar (VI) com $B = (\emptyset, \{v\}, V \setminus \{v\})$. Por dualidade, se $f_2(v) < 0$ então faça $S = \{v\}$ e $T = \emptyset$ (note que se $f_2(v) < 0$ então $f_2^*(v) > g(v)$).

Damos a seguir um resumo (figura 7) dos principais resultados desta seção.

É fácil mostrar que se $f_1 = f_2$ então a condição (VI) da proposição 8 é equivalente à condição II de Tutte. Por sua vez, se $f = 1$ então as condições I e II de Tutte são equivalentes. Finalmente, se G for biparticionável então a condição I de Tutte e a condição do corolário do teorema de Hall são equivalentes. Deixamos a cargo do leitor a verificação destas equivalências.

RESULTADOS PRINCIPAIS DESTA SEÇÃO

GRAFO	FUNÇÃO RESTRIÇÃO	COMPONENTES K RELEVANTES			RESULTADOS
		NOME	DEFINIÇÃO	NOTAÇÃO PARA O CONJUNTO DESSAS COMPONENTES	
G COM BIPARTIÇÃO X, Y	f = 1	VÉRTICE ISOLADO	Dado $S \subseteq V$, K é uma componente de G-S constituída por um vértice isolado em G-S	$V_{\emptyset}(G-S)$	<u>TEOREMA DE HALL</u> (1935) G é l-fatorável se e somente se (i) $ X \cap V_{\emptyset}(G-S) \leq S \quad (\forall S \subseteq Y)$ e (ii) $ Y \cap V_{\emptyset}(G-S) \leq S \quad (\forall S \subseteq X)$
G BIPARTICIONÁVEL					<u>COROLÁRIO DO TEOREMA DE HALL</u> G é l-fatorável se e somente se $ V_{\emptyset}(G-S) \leq S \quad (\forall S \subseteq V)$
G QUALQUER	f = 1	COMPONENTE ÍMPAR	Dado $S \subseteq V$, K é uma componente de G-S tal que $ VK \equiv 1 \pmod{2}$	I(G-S)	<u>TEOREMA I DE TUTTE</u> (1947) G é l-fatorável se e somente se $ I(G-S) \leq S \quad (\forall S \subseteq V)$
G QUALQUER	f: V → Z	COMPONENTE (f,B)-ÍMPAR	Dado $B = (S, T, U)$, K é uma componente de $G[U]$ tal que $f(VK) + g(VK, T) \equiv 1 \pmod{2}$	I(f, B)	<u>TEOREMA II DE TUTTE</u> (1952) G é f-fatorável se e somente se $ I(f, B) + g(T, S) \leq f(S) + f^*(T)$ para cada G-tripla $B = (S, T, U)$
G QUALQUER	$\bar{f} = (f_1, f_2)$	COMPONENTE (f,B)-ÍMPAR	Dado $B = (S, T, U)$, K é uma componente de $G[U]$ tal que $f_1(VK) = f_2(VK)$ e $f_1(VK) + g(VK, T) \equiv 1 \pmod{2}$	I(f, B)	<u>PROPOSIÇÃO 8</u> - Se G é f-fatorável então $ I(f, B) + g(T, S) \leq f_2(S) + f_1^*(T) \quad (VI)$ para cada G-tripla $B = (S, T, U)$.

Figura 7.

CAPÍTULO III

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DO f-FATOR

1 - INTRODUÇÃO

Seja G um grafo, $f = (f_1, f_2)$ uma função restrição em G , x um subconjunto de a e v um vértice em V . Define-se o f-desvio de x em v por

$$\Delta(v; x, f) = \begin{cases} f_1(v) - gx(v) , & \text{se } gx(v) < f_1(v) \\ 0 & , \quad \text{se } f_1(v) \leq gx(v) \leq f_2(v) \\ gx(v) - f_2(v) , & \text{se } gx(v) > f_2(v) \end{cases}$$

O f-desvio de x é então dado por $\Delta(V; x, f)$. Dizemos que x é f-ótimo se x é um subconjunto de a que apresenta o menor f-desvio possível, i.e.,

$$\Delta(V; x, f) = \min\{\Delta(V; y, f) / y \subseteq a\} = \Delta_m .$$

Observe que G é f-fatorável se e somente se $\Delta_m = 0$, ou seja, G é f-fatorável se e somente se qualquer conjunto f-ótimo é um f-fator.

O objetivo deste capítulo é resolver o problema do f-fator de uma maneira mais completa do que a definição do mesmo dada em II.1. Mais precisamente, nossos objetivos serão:

- determinar as características de um subconjunto x de a que seja f-ótimo.

- determinar um algoritmo eficiente que encontre tal subconjunto x .
- determinar condições necessárias e suficientes para que tenhamos $\Delta_m = 0$, ou seja, condições necessárias e suficientes para que G seja f -fatorável.

2 - CARACTERIZAÇÃO DE UM CONJUNTO f -ÓTIMO

Consideremos agora uma função restrição $f = (f_1, f_2)$, uma G -tripla $B = (S, T, U)$ e uma componente K de $G[U]$. Conforme foi visto no capítulo II, K é ímpar se e somente se $i(K) = 1$ onde

$$i(K) = \begin{cases} 1, & \text{se } f_1(VK) = f_2(VK) \text{ e } f_1(VK) + g(VK, T) \equiv 1 \pmod{2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Também vimos que o conjunto de todas as componentes ímpares de $G[U]$ é denotado por I e

$$|I| = \sum i(K) \text{ onde a somatória é sobre todas as componentes } K \text{ de } G[U].$$

Consideremos também um subconjunto x de a . Vamos denotar por $\delta(K)$ a quantidade

$$\Delta(VK) + g_x(VK, S) + g_x^*(VK, T).$$

LEMA 1 - Se $f_1(VK) = f_2(VK)$ então

$$\delta(K) \equiv i(K) \pmod{2}.$$

Demonstração: Sendo $f_1(VK) = f_2(VK)$, então

$$i(K) \equiv f_1(VK) + g(VK, T) \pmod{2} \quad (1)$$

Ademais, por definição de função restrição, $f_1 \leq f_2$; assim, $f_1(VK) = f_2(VK)$ implica em $f_1(v) = f_2(v)$ para cada v em VK . Então,

$$\Delta(v) = |g_x(v) - f_1(v)| \equiv [g_x(v) - f_1(v)] \pmod{2}$$

Assim,

$$\delta(K) \equiv [g_x(VK) - f_1(VK)] + g_x(VK, S) + g_x^*(VK, T) \pmod{2} \quad (2)$$

Por outro lado,

$$g_x(VK) \equiv g_x(VK, S) + g_x(VK, T) \pmod{2} \quad (3)$$

De (2-3) vem que

$$\delta(K) \equiv f_1(VK) + g(VK, T) \pmod{2} \quad (4)$$

De (4) e (1) segue a condição enunciada. ■

TEOREMA 2 - $\Delta(V) \geq |I| + g(T,S) - f_2(S) - f_1^*(T)$.

Ademais, vale a igualdade se e somente se as cinco propriedades seguintes forem satisfeitas:

$$(A) \quad gx(v) \geq f_2(v) \quad (\forall v \in S)$$

$$(B) \quad gx(v) \leq f_1(v) \quad (\forall v \in T)$$

$$(C) \quad \alpha G[S] \subseteq x^*$$

$$(D) \quad \alpha G[T] \subseteq x$$

$$(E) \quad \delta(K) = i(K) \text{ para cada componente } K \text{ de } G[U].$$

Demonstração: É fácil ver que

$$\Delta(S) \geq gx(S) - f_2(S) \tag{1}$$

com igualdade se e somente se (A)

e,

$$\Delta(T) \geq f_1(T) - gx(T) = gx^*(T) - f_1^*(T) \tag{2}$$

com igualdade se e somente se (B).

Por outro lado,

$$gx(S) \geq gx(S,U) + gx(S,T) \tag{3}$$

com igualdade se e somente se (C)

e,

$$gx^*(T) \geq gx^*(T,U) + gx^*(T,S) \tag{4}$$

com igualdade se e somente se (D).

Por outro lado, pelo lema 1 temos que $\delta(K) \geq i(K)$ para cada componente K de $G[U]$, ou seja,

$$\Delta(VK) \geq i(K) - g_x(VK,S) - g_x^*(VK,T)$$

Assim,

$$\Delta(U) \geq |I| - g_x(U,S) - g_x^*(U,T) \quad (5)$$

com igualdade se e somente se (E).

Somando as desigualdades (1-5) temos:

$$\Delta(V) \geq |I| + g(T,S) - f_2(S) - f_1^*(T)$$

com igualdade se e somente se (A-E). ■

COROLÁRIO 3 - Se G é f -fatorável então

$$|I(B)| + g(T,S) \leq f_2(S) + f_1^*(T)$$

para cada G -tripla $B = (S,T,U)$. ■

COROLÁRIO 4 - Se valer a igualdade no enunciado do teorema 2 então x é ótimo. ■

Observe que o corolário 3 é exatamente a proposição II.2.8 , uma condição necessária para que G seja f -fatorável. Por sua vez, o corolário 4 apresenta uma condição suficiente para que x seja ótimo. Mostraremos a seguir que essas condições são necessárias e suficientes. Isto será feito produzindo x_0 e B_0 que satisfaçam a igualdade no enunciado do teorema 2, qualquer que seja G e f . A demonstração será construtiva e na verdade apresentaremos um algoritmo eficiente para obter x_0 e B_0 . Dessa forma alcançaremos nossos objetivos, a saber, a caracterização de um conjunto ótimo, a obtenção de um algoritmo eficiente que determina um conjunto ótimo e a determinação de uma condição necessária e suficiente para que G seja f -fatorável. Em suma, nossos objetivos se concentrarão agora na demonstração do seguinte teorema:

TEOREMA DA f -OTIMALIDADE Se x é ótimo então existe uma tripla
 $B = (S, T, U)$ tal que

$$\Delta(V) = |I| + g(T, S) - f_2(S) - f_1^*(T).$$

Para demonstrar este teorema utilizaremos alguns conceitos que envolvem passeios; esses conceitos serão introduzidos na próxima seção.

3 - PASSEIOS FUNDAMENTAIS

Sejam dados um grafo G e um subconjunto x de a . Dizemos que

um passeio $P = (v_0, \alpha_1, v_1, \dots, \alpha_n, v_n)$ é x-alternado se para todo i tal que $1 \leq i \leq n-1$, uma das arestas α_i e α_{i+1} pertence a x , a outra a x^* . Observe que se $n \leq 1$ então P é trivialmente alternado.

Seja agora $f = (f_1, f_2)$ uma função restrição em G . Dizemos que P , alternado e não degenerado, é (f, x) -interessante se uma das alternativas abaixo for verificada:

- (i) $gx(v_0) < f_1(v_0)$ e $\alpha_1 \in x^*$
(ii) $gx(v_0) > f_2(v_0)$ e $\alpha_1 \in x$

O passeio P interessante é do tipo x se $\alpha_n \in x$ e do tipo x^* se $\alpha_n \in x^*$.

Estendemos estas definições ao passeio degenerado $P = (v_0)$, dizendo que P é (f, x) -interessante do tipo x se $gx(v_0) < f_1(v_0)$ e (f, x) -interessante do tipo x^* se $gx(v_0) > f_2(v_0)$.

LEMA 1 - Se P é um passeio interessante então P é do tipo x ou do tipo x^* , mas não de ambos os tipos.

Demonstração: Se $n > 0$ então o tipo de P é determinado pela pertinência ou não de α_n em x . Se $n = 0$ então, por definição, ou $gx(v_0) < f_1(v_0) \leq f_2(v_0)$ ou $gx(v_0) > f_2(v_0) \geq f_1(v_0)$. Em todos os casos P é de precisamente um dos tipos. ■

LEMA 2 - Se $n > 0$, então P é do tipo x (tipo x^*) se e somente se

$P' = (v_0, \alpha_1, v_1, \dots, \alpha_{n-1}, v_{n-1})$ é do tipo x^* (tipo x) e $\alpha_n \in x$ ($\alpha_n \in x^*$).

Demonstração: Se P é do tipo x e $n > 0$ então $\alpha_n \in x$. Se $n=1$ então $gx(v_0) > f_2(v_0)$ pois $\alpha_1 \in x$; se $n > 1$ então $\alpha_{n-1} \in x^*$ pois P é alternado. Em ambos os casos, P' é do tipo x^* .

Reciprocamente, suponhamos que P' é do tipo x^* e $\alpha_n \in x$. Se $n = 1$ então $gx(v_0) > f_2(v_0)$; se $n > 1$ então $\alpha_{n-1} \in x^*$. Em ambos os casos, P é do tipo x . ■

Dizemos que P , interessante do tipo x , é (f,x)-melhorante se P for uma trilha e $gx(v_n) \geq f_1(v_n) + 1$, com igualdade somente se $v_0 \neq v_n$. Dizemos que P , interessante do tipo x^* , é (f,x)-melhorante se P for uma trilha e $gx(v_n) \leq f_2(v_n) - 1$, com igualdade somente se $v_0 \neq v_n$. Observe que se P é melhorante então $n > 0$.

LEMA 3 - Se P é (f,x)-melhorante então x não é ótimo.

Demonstração: Suponhamos que P seja melhorante do tipo x ; desse modo, $n > 0$, $\alpha_n \in x$ e $gx(v_n) \geq f_1(v_n) + 1$ com igualdade somente se $v_n \neq v_0$.

Seja $x' = x \oplus aP$.^① Mostremos que $\Delta(V; x') < \Delta(V; x)$.

Sendo P uma trilha alternada, é óbvio que $gx(v) = gx'(v)$ para todo v em $V \setminus \{v_0, v_n\}$. Resta mostrar que

$$\Delta(\{v_0, v_n\}; x') < \Delta(\{v_0, v_n\}; x)$$

Suponhamos inicialmente que $v_n = v_0$. Nesse caso temos que $gx(v_n) \geq f_1(v_n) + 2$; portanto, como P é interessante, $\alpha_1 \in x$ e $gx(v_n) > f_2(v_n)$. Assim,

① $x \oplus aP$ denota $(x \cup aP) \setminus (x \cap aP)$

$$gx'(v_n) = gx(v_n) - 2 \geq f_1(v_n) \quad e \quad (1)$$

$$\Delta(v_n; x) = gx(v_n) - f_2(v_n) > 0 \quad (2)$$

De (1-2) segue que

$$\Delta(v_n; x') = \max\{0, gx'(v_n) - f_2(v_n)\} < \Delta(v_n; x)$$

Suponhamos então que $v_n \neq v_0$. Nesse caso, $gx'(v_n) = gx(v_n) - 1 \geq f_1(v_n)$ e, obviamente, $\Delta(v_n; x') \leq \Delta(v_n; x)$. A demonstração estará completa se mostrarmos que $\Delta(v_0; x') < \Delta(v_0; x)$.

Se $gx(v_0) < f_1(v_0)$ então $\alpha_1 \in x^*$; assim, $gx'(v_0) = gx(v_0) + 1 \leq f_1(v_0)$ donde se conclui que

$$\Delta(v_0; x') = f_1(v_0) - gx'(v_0) < \Delta(v_0; x).$$

Analogamente, se $gx(v_0) > f_2(v_0)$ então $\alpha_1 \in x$, $gx'(v_0) = gx(v_0) - 1$ e

$$\Delta(v_0; x') = gx'(v_0) - f_2(v_0) < \Delta(v_0; x)$$

De fato, $\Delta(V; x') < \Delta(V; x)$ e portanto x não é ótimo.

De maneira análoga demonstra-se que se P é melhorante do tipo x^* então x não é ótimo. ■

4 - DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DA f-OTIMALIDADE

Suponhamos que x seja um conjunto ótimo. Denotemos por Z_x o

conjunto de todos os vértices em V que são términos de trilhos interessantes do tipo x ; por Z_x^* o conjunto de todos os vértices em V que são términos de trilhos interessantes do tipo x^* . é fácil ver que Z_x e Z_x^* não são necessariamente disjuntos. Denotemos por Z o conjunto $Z_x \cup Z_x^*$.

Denotemos agora por B a tripla (S, T, U) onde

$$S = Z_x^* \setminus Z_x, \quad T = Z_x \setminus Z_x^* \quad \text{e} \quad U = V \setminus (S \cup T)$$

Vamos mostrar que

$$\Delta(V) = |I| + g(T, S) - f_2(S) - f_1^*(T)$$

Para tanto, vamos mostrar que B satisfaz as condições (A-E) do teorema 2.2, a saber,

$$(A) \quad gx(v) \geq f_2(v) \quad (\forall v \in S)$$

$$(B) \quad gx(v) \leq f_1(v) \quad (\forall v \in T)$$

$$(C) \quad aG[S] \subseteq x^*$$

$$(D) \quad aG[T] \subseteq x$$

$$(E) \quad \delta(K) = i(K) \quad \text{para cada componente } K \text{ de } G[U].$$

A validade de (A) e (B) segue imediatamente do lema 1 abaixo:

LEMA 1 - As duas propriedades abaixo são verificadas:

- (i) para todo v em Z_x^* , $gx(v) \geq f_2(v) - 1$, com igualdade somente se $f_1(v) = f_2(v)$ e $v \in U$.
- (ii) para todo v em Z_x , $gx(v) \leq f_1(v) + 1$, com igualdade somente se $f_1(v) = f_2(v)$ e $v \in U$.

Demonstração: (i) Seja v um vértice em Z_x^* e P uma trilha interessante do tipo x^* com término v . Como x é ótimo, então P não é melhorante e portanto $gx(v) \geq f_2(v) - 1$, com igualdade somente se v é a origem de P . Mas se vale a igualdade $gx(v) = f_2(v) - 1$ então também vale $gx(v) \geq f_1(v) - 1$. Porém, o desvio de x em v , origem de P , é positivo; assim $gx(v) = f_1(v) - 1$ e portanto $f_1(v) = f_2(v)$. Ademais, como $gx(v) < f_1(v)$, então v pertence também a Z_x , pois (v) é interessante do tipo x . Assim, $v \in Z_x^* \cap Z_x \subseteq U$.

A demonstração de (ii) é análoga e fica a cargo do leitor. ■

A validade de (C) e (D) segue imediatamente do lema 2 abaixo:

LEMA 2 - Seja α uma aresta, u e v seus extremos.

- (i) se $u \in Z_x^*$ e $\alpha \in x$ então ou u ou v pertence a Z_x , e $v \in Z$.
- (ii) se $u \in Z_x$ e $\alpha \in x^*$ então ou u ou v pertence a Z_x^* , e $v \in Z$.

Demonstração: (i) Suponhamos que $u \in Z_x^*$ e $\alpha \in x$. Seja P uma trilha interessante do tipo x^* com término u .

Se (v, α, u) é uma seção de P então, pelo lema 3.2, $v \in Z_x^*$ e $u \in Z_x$. Se (u, α, v) é uma seção de P então, pelo mesmo lema, $u \in Z_x^*$

e $v \in Z_x$. Finalmente, se $\alpha \notin aP$ então, novamente pelo lema 3.2, $Po(u, \alpha, v)$ é uma trilha interessante do tipo x e portanto $v \in Z_x$.

A demonstração de (ii) é análoga e fica a cargo do leitor. ■

Para completar a demonstração do teorema, resta mostrar (E), i.e., que $\delta(K) = i(K)$ para cada componente K de $G[U]$. Ora, se $\delta(K) = 0$ e $f_1(VK) \neq f_2(VK)$ então $i(K) = 0$; se $\delta(K) = 0$ e $f_1(VK) = f_2(VK)$ então, pelo lema 2.1, temos que $i(K) = 0$. Resta então verificar a validade de (E) para as componentes K de $G[U]$ com $\delta(K) > 0$. Em vista do lema 2.1, é suficiente mostrar que para essas componentes temos $f_1(VK) = f_2(VK)$ e $\delta(K) = 1$.

Consideremos então uma componente K de $G[U]$ tal que $\delta(K) > 0$; vamos provar que $\delta(K) = 1$ e $f_1(VK) = f_2(VK)$.

LEMA 3 - $VK \subseteq Z_x \cap Z_x^*$.

Demonstração: Como $0 < \delta(K) = \Delta(VK) + g_x(VK, S) + g_x^*(VK, T)$, então ou x apresenta desvio em um vértice $v \in VK$, ou $\lambda_x(VK, S) \cup \lambda_x^*(VK, T) \neq \emptyset$. No primeiro caso, $v \in Z$, por definição de Z ; no segundo, o extremo em VK da aresta de $\lambda_x(VK, S) \cup \lambda_x^*(VK, T)$ pertence a Z , pelo lema 2. Nos dois casos, Z encontra VK . Mas, $VK \subseteq U$ e K é conexo, portanto $VK \subseteq Z_x \cap Z_x^*$, pelo lema 2 e definição de U . ■

Dentre as trilhas interessantes com término em VK , escolha uma, $N = (u_0, \alpha_1, u_1, \dots, \alpha_n, u_n)$, que seja minimal, i.e., que não seja seção de nenhuma outra distinta de N . Pelo lema 3.2, $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\} \subseteq V \setminus VK$.

Note que admitimos $n = 0$, caso em que $\Delta(u_n) > 0$; a figura 1 mostra as situações possíveis.

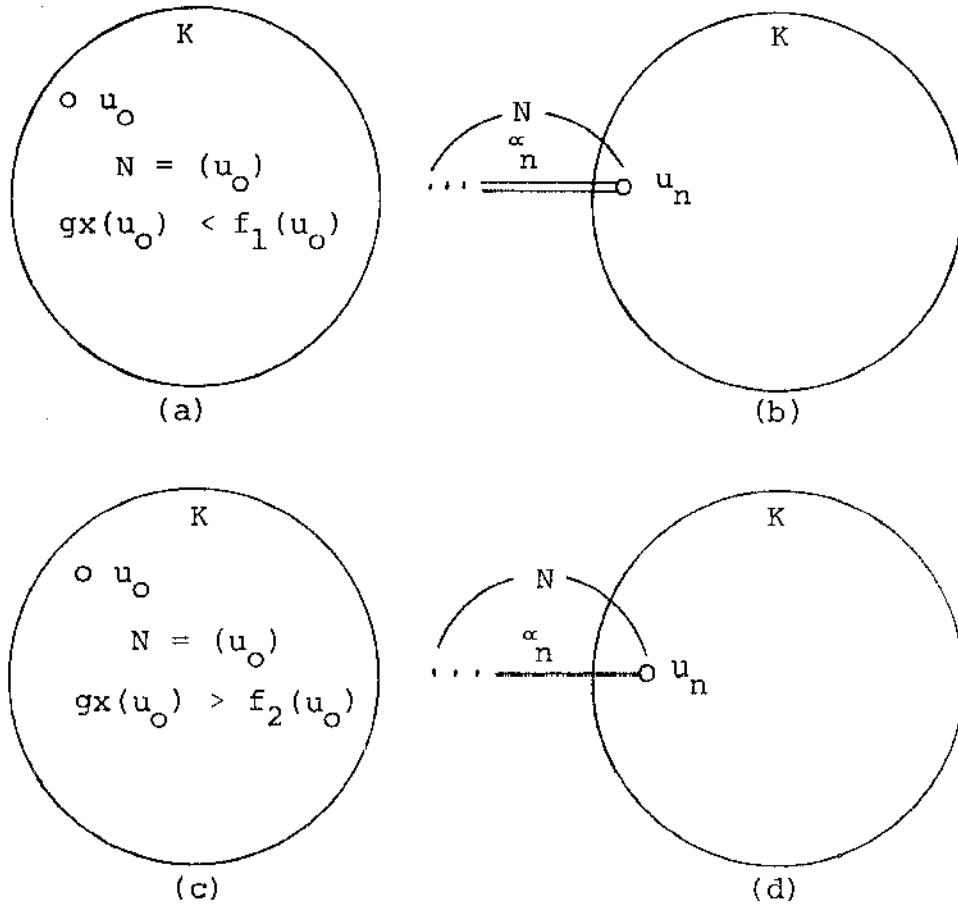


Figura 1. (a-b) N é interessante do tipo x ;
 (c-d) N é interessante do tipo x^*

LEMA 4 - Se $N \circ M = (u_0, \alpha_1, u_1, \dots, \alpha_m, u_m)$ com $m \geq n$ e

$L = (v_0, \beta_1, v_1, \dots, \beta_\ell, v_\ell = u_m)$ são trilhas interessantes de tipos distintos e M é uma trilha em K , então existe uma trilha M' em K , de u_n a u_m , tal que $N \circ M'$ é interessante e de tipo diferente do de $N \circ M$; ademais, $aM' \subseteq aM \cup aL$.

Demonstração: Por indução em m .

Para cada s tal que $0 \leq s \leq \ell$ seja N_s o passeio $N \circ M \circ (v_\ell, \beta_\ell, \dots, v_{s+1}, \beta_{s+1}, v_s)$ e L_s a trilha $(v_0, \beta_1, v_1, \dots, \beta_s, v_s)$ (figura 2).

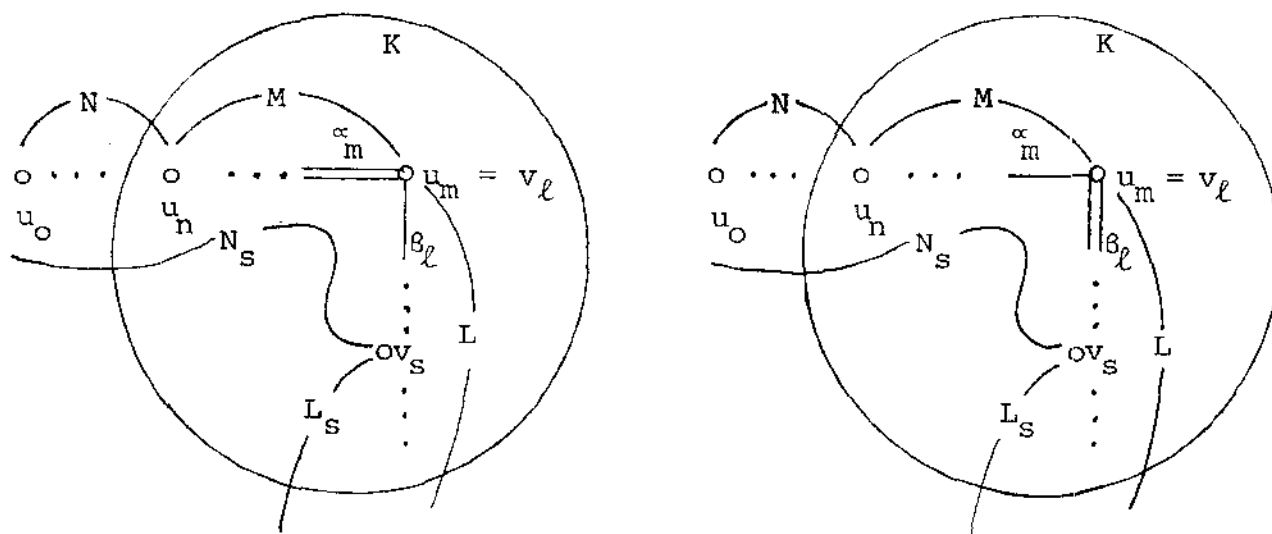


Figura 2.

Lema 4.1 - Para cada s tal que $0 \leq s \leq \ell$, N_s e L_s são ambos passeios interessantes, e de tipos diferentes.

Demonstração: Por indução em $\ell - s$. Se $s = \ell$ então $N_s = N \circ M$ e $L_s = L$:

nesse caso a tese vale por hipótese. Suponhamos então que $s < \ell$. Por hipótese de indução, N_{s+1} e L_{s+1} são ambos passeios interessantes e de tipos diferentes. Se $\beta_{s+1} \in x$ então L_{s+1} é do tipo x e portanto N_{s+1} é tipo x^* ; nesse caso, pelo lema 3.2, L_s é do tipo x^* e N_s é do tipo x . Analogamente, se $\beta_{s+1} \in x^*$ então L_s é do tipo x e N_s do tipo x^* . Em ambos os casos, L_s e N_s são interessantes e de tipos diferentes. ■

Seja r o menor inteiro tal que $0 \leq r \leq \ell$ e N_r é uma trilha.

Lema 4.2 - A trilha $(v_r, \beta_{r+1}, v_{r+1}, \dots, \beta_\ell, v_\ell)$ está em K . Ademais, se $r = 0$ então $u_0 = v_0$.

Demonstração: Como N_r e L são trilhas então para todo s tal que $r \leq s \leq \ell$ temos que N_s e L_s são trilhas. Pelo lema 4.1, são trilhas de tipos diferentes. Assim, $v_r, v_{r+1}, \dots, v_\ell$ são todos vértices (de uma mesma componente) de U . Mas $v_\ell \in VK$, logo, $(v_r, \beta_{r+1}, v_{r+1}, \dots, \beta_\ell, v_\ell)$ é uma trilha em K .

Suponhamos ainda que $r = 0$. Então $N_0 = N \circ M \circ R(L)$ e $L_0 = (v_0)$ são interessantes e de tipos diferentes. Pelo lema 3.1, N_0 é não degenerada. Seja γ a aresta-término de N_0 . Se $\gamma \in x^*$ então N_0 é do tipo x^* e $gx(v_0) < f_1(v_0)$; se $\gamma \in x$ então N_0 é do tipo x e $gx(v_0) > f_2(v_0)$. Em ambos os casos, N_0 é melhorante, a menos que $u_0 = v_0$. Pela otimalidade de x , $u_0 = v_0$. ■

Consideremos inicialmente o caso em que $r = 0$ e portanto $u_0 \in VK$. Pela minimalidade de N , $n = 0$ e portanto $u_n = v_r$. Assim, a asserção vale com $M' = L$.

Suponhamos então que $r > 0$. Pela definição de r , existe um inteiro t tal que $1 \leq t \leq m$ e $\alpha_t = \beta_r$. Logo, (u_{t-1}, α_t, u_t) é igual a (v_{r-1}, β_r, v_r) ou ao seu reverso. A figura 3 exemplifica as duas situações.

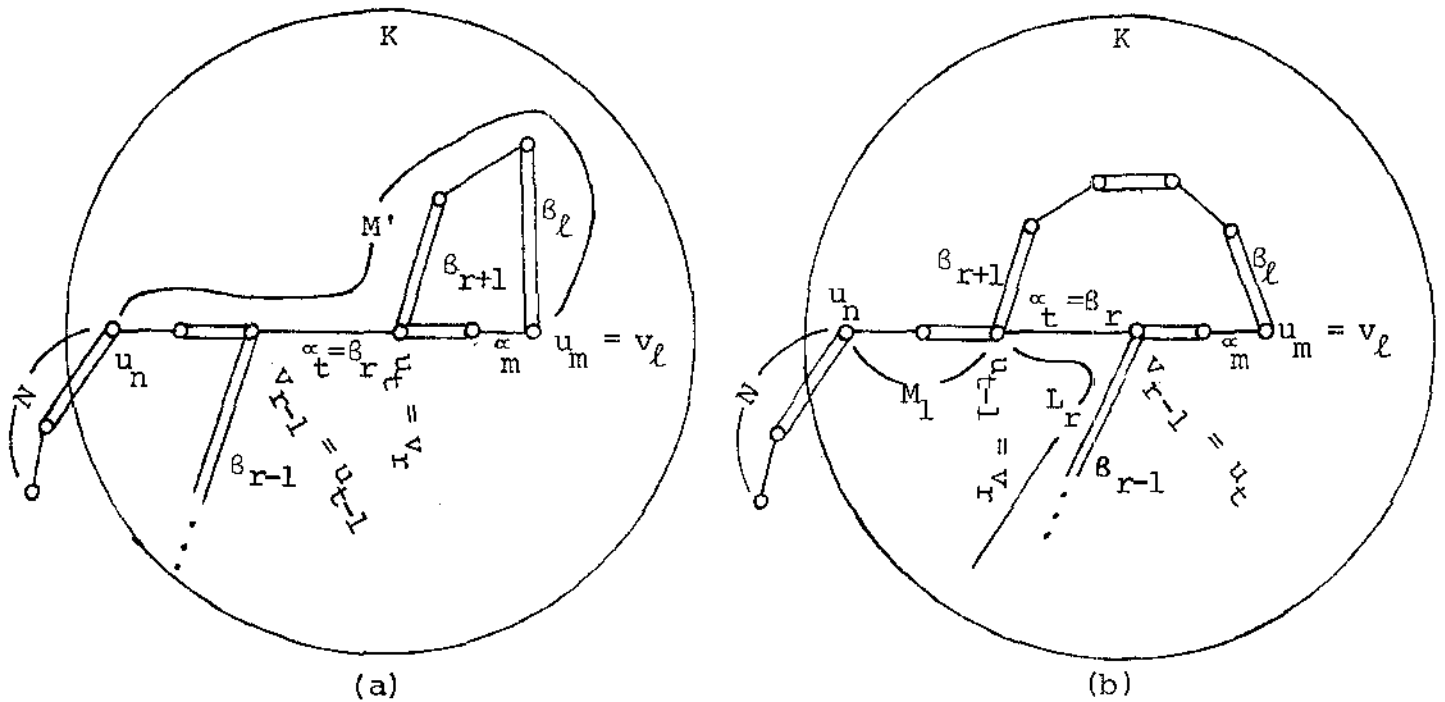


Figura 3. (a) $(u_{t-1}, \alpha_t, u_t) = (v_{r-1}, \beta_r, v_r)$;
 $M' = (u_n, \alpha_{n+1}, u_{n+1}, \dots, \alpha_t, u_t) \circ (v_r, \beta_{r+1}, v_{r+1}, \dots, \beta_l, v_l)$.
 (b) $(u_{t-1}, \alpha_t, u_t) = (v_r, \beta_r, v_{r-1})$;
 $M_1 = (u_n, \alpha_{n+1}, u_{n+1}, \dots, \alpha_{t-1}, u_{t-1})$ e $L_r = (v_r, \beta_1, v_1, \dots, \beta_r, v_r)$.

Se $(u_{t-1}, \alpha_t, u_t) = (v_{r-1}, \beta_r, v_r)$ então $u_t = v_r \in VK$ e portanto $t \geq n$, pela minimalidade de N . Nesse caso, a asserção vale com

$$M' = (u_n, \alpha_{n+1}, u_{n+1}, \dots, \alpha_t, u_t) \circ (v_r, \beta_{r+1}, v_{r+1}, \dots, \beta_l, v_l).$$

Resta considerar o caso em que $(u_{t-1}, \alpha_t, u_t) = (v_r, \beta_r, v_{r-1})$.

Como $u_{t-1} = v_r \in VK$, então, pela minimalidade de N , $t-1 \geq n$. Seja M_1 a trilha $(u_n, \alpha_{n+1}, u_{n+1}, \dots, \alpha_{t-1}, u_{t-1})$. Aplicando a hipótese de indução com M_1 e L_r no lugar de M e L , temos que existe em K uma trilha M'_1 de u_n a v_r tal que $aM'_1 \subseteq aM_1 \cup aL_r$ e $N \cap M'_1$ é interessante e do

mesmo tipo que L_r . Assim, a asserção também vale neste caso, com

$$M' = M_1' \circ (v_r, \beta_{r+1}, v_{r+1}, \dots, \beta_\ell, v_\ell). \blacksquare$$

LEMA 5 - Para todo vértice v em VK existem em K trilhas Q e Q^* , ambas de u_n a v , tais que $N \circ Q$ e $N \circ Q^*$ são interessantes e de tipos distintos.

Demonstração: Seja X o conjunto de vértices de VK para os quais existem pelo menos uma das trilhas Q e Q^* . Ora, $u_n \in X$ e portanto $X \neq \emptyset$.

Pelo lema 4, existem ambas as trilhas para cada v em X ; basta então mostrar que $X = VK$.

Suponhamos que $X \subsetneq VK$. Como $X \neq \emptyset$, então $\lambda(X, VK \setminus X)$ é não vazio; seja α uma de suas arestas, u e v seus extremos, respectivamente em X e $VK \setminus X$. Seja P aquele de Q e Q^* tal que $N \circ P \circ (u, \alpha, v)$ é um passeio interessante. Se (u, α, v) é uma seção de $N \circ P$ ou se (v, α, u) é uma seção de $N \circ P$ então obviamente $v \in X$. Se $N \circ P$ não passa por α então $N \circ P \circ (u, \alpha, v)$ é uma trilha. Em ambos os casos, $v \in X$, contradizendo a hipótese de que $v \in VK \setminus X$. \blacksquare

LEMA 6 - $f_1(VK) = f_2(VK)$. Ademais, $\Delta(VK) \leq 1$, com igualdade somente se $n = 0$.

Demonstração: Seja v um vértice em VK . Pelo lema 3 temos que $v \in Z_X \cap Z_X^*$; então, pelo lema 1, $f_2(v) - 1 \leq$

$\leq gx(v) \leq f_1(v) + 1$ com ambas as desigualdades estritas a menos que $f_1(v) = f_2(v)$. Se ambas as desigualdades forem estritas, então $f_2(v) \leq gx(v) \leq f_1(v) \leq f_2(v)$ e portanto $gx(v) = f_1(v) = f_2(v)$. Assim, $f_1(VK) = f_2(VK)$. Ademais, $\Delta(v) \leq 1$ pois $f_1(v) - 1 \leq gx(v) \leq f_2(v) + 1$.

Suponhamos que $\Delta(VK) \geq 1$; seja v tal que $\Delta(v) > 0$. Pelo lema 5, existem trilhas Q e Q^* em K , ambas de u_n a v , tais que $N \circ Q$ e $N \circ Q^*$ são trilhas interessantes do tipo x e x^* respectivamente. Se $gx(v) > f_2(v)$ então $N \circ Q$ é melhorante, a menos que $v = u_0$; se $gx(v) < f_1(v)$ então $N \circ Q^*$ é melhorante, a menos que $v = u_0$. Como x é ótimo, temos em ambos os casos que $v = u_0$. Pela minimalidade de N , $v = u_n$ e $n = 0$. Como essa conclusão vale para todo v em VK tal que $\Delta(v) > 0$, temos que $\Delta(VK) = \Delta(u_n) \leq 1$ com igualdade somente se $n = 0$. ■

LEMA 7 - Se $\alpha \in \lambda_x(VK, S) \cup \lambda_{x^*}(VK, T)$ então $n > 0$ e $\alpha = \alpha_n$.

Demonstração: Seja v o extremo de α em VK , u seu outro extremo. Pelo lema 5, existe P em K de u_n a v tal que $N \circ P$ é uma trilha e $N \circ P \circ (v, \alpha, u)$ é um passeio interessante, do tipo x se $u \in S$, do tipo x^* se $u \in T$. Assim, $N \circ P \circ (v, \alpha, u)$ não é uma trilha, pois $u \notin U$. Mas $N \circ P$ é uma trilha; por definição de N , $(u, \alpha, v) = (u_{n-1}, \alpha_n, u_n)$. ■

COROLÁRIO 8 - $\delta(K) = 1$ e $f_1(VK) = f_2(VK)$.

Demonstração: Pelos lemas 6 e 7 temos que $f_1(VK) = f_2(VK)$ e $\delta(K) \leq 1$.

Porém, por hipótese, $\delta(K) > 0$; assim, $\delta(K) = 1$. ■

Com o corolário 8 concluímos a validade de (E) para a tripla B. Assim, x é ótimo e

$$\Delta(V) = |I| + g(T,S) - f_2(S) - f_1^*(T). \quad \blacksquare$$

5 - CONSEQÜÊNCIAS DO TEOREMA DA f-OTIMALIDADE

Conforme observamos na seção 2, com o teorema da f-otimalidade caracterizamos completamente os conjuntos f-ótimos e os grafos f-fatoráveis; essa caracterização havia sido iniciada com os corolários 2.4 e 2.3, e agora estamos em condições de completá-la:

COROLÁRIO 1 - (Caracterização de conjuntos f-ótimos) Um subconjunto x de a é f-ótimo se e somente se

$$\Delta(V) = |I| + g(T,S) - f_2(S) - f_1^*(T)$$

para alguma G-tripla B = (S,T,U).

COROLÁRIO 2 - (Caracterização de grafos f-fatoráveis) G é f-fatorável se e somente se

$$|I| + g(T,S) \leq f_2(S) + f_1^*(T)$$

para cada tripla B = (S,T,U).

■

Com base na demonstração do teorema da f -otimalidade podemos ainda construir um algoritmo eficiente que nos determina um conjunto ótimo x e uma tripla B que prova essa otimalidade, satisfazendo a igualdade do corolário 1. Observe que na demonstração do teorema da f -otimalidade partimos da hipótese que nos eram fornecidos, além de G e $f = (f_1, f_2)$, um conjunto ótimo x , os conjuntos Z_x e Z_x^* e, para cada vértice em $Z_x (Z_x^*)$, uma trilha interessante $P(v)$ ($P^*(v)$) do tipo x (tipo x^*) com término v . Construimos então, a partir de $Z = Z_x \cup Z_x^*$, a tripla $B = (S, T, U)$ dada por

$$S = Z_x^* \setminus Z_x, \quad T = Z_x \setminus Z_x^* \quad (1)$$

e provamos que B , assim definida, satisfaz as condições (A-E) do teorema 2.2, ou seja,

$$\Delta(V) = |I| + g(T, S) - f_2(S) - f_1^*(T).$$

Podemos porém, obter um conjunto f -ótimo, com base na demonstração do teorema da f -otimalidade, a partir de um subconjunto qualquer x de a (eventualmente $x = \emptyset$) e de uma quádrupla x -ideal: diremos que uma quádrupla $I = (Y, Y^*, P, P^*)$ é x -ideal se $Y \subseteq Z_x$, $Y^* \subseteq Z_x^*$, P e P^* são funções com domínio Y e Y^* respectivamente, e tais que para cada v em Y , $P(v)$ (v em Y^* , $P^*(v)$) é uma trilha interessante do tipo x (tipo x^*) com término v . Podemos então definir a tripla $B(I) = (S, T, U)$ onde

$$S = Y^* \setminus Y, \quad T = Y \setminus Y^*$$

e verificar se $B(I)$ satisfaz as condições (A-E) do teorema 2.2. Se todas forem verdadeiras então x é ótimo; caso contrário, a demonstração do teorema da f -otimalidade nos mostra como aumentar $|Y| + |Y^*|$ ou como diminuir o desvio de x .

Mais precisamente, podemos ordenar quádruplas x -ideais (com x fixo) pela relação $(Y, Y^*, P, P^*) < (Y_1, Y_1^*, P_1, P_1^*)$ se e somente se $Y \subseteq Y_1$, $Y^* \subseteq Y_1^*$ com pelo menos uma das inclusões própria. Com base na demonstração do teorema da f -otimalidade, pode-se descrever um algoritmo, que chamaremos otimalidade, e que tem os seguintes parâmetros:

- o grafo G
- a função restrição f
- um subconjunto x (eventualmente vazio) de a
- uma quádrupla ideal $I = (Y, Y^*, P, P^*)$
(eventualmente $I = (\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$). ②

A cada execução de otimalidade (G, f, x, I) , um dos 3 casos necessariamente ocorre:

- caso 1: $B(I)$ satisfaz as condições (A-E) do teorema 2.2.
- caso 2: um subconjunto x_1 de a é obtido, com
 $\Delta(V; x_1) < \Delta(V; x)$
- caso 3: uma nova quádrupla x -ideal I_1 é obtida com $I < I_1$.

É então imediato o algoritmo que determina x ótimo, dados G e f :

② Estamos denotando funções com domínio vazio por \emptyset .

Procedimento xótico (G,f)Início $x \leftarrow \emptyset ;$ Repita $I \leftarrow \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset ;$ Repitacaso, $x, I \leftarrow$ otimalidade (G, f, x, I) até que caso $\neq 3$ até que caso = 1;devolva xFim.

Para obter o algoritmo otimalidade, basta observar que as demonstrações dos lemas 4.1-4.7 são construtivas, isto é, contêm informação suficiente para a codificação de algoritmos que verificam a validade do enunciado ou obtêm uma trilha melhorante ou uma nova quadrupla ideal. Deixamos a cargo do leitor a descrição desses algoritmos em linguagem mais ortodoxa.

O algoritmo otimalidade assim obtido é certamente polinomial; de fato, com uma estrutura de dados adequada é possível implementar otimalidade de tal forma que a execução requeira não mais do que $c(|a| + 1)(|V| + 1)$ operações elementares, onde c é uma constante que não depende dos parâmetros. Assim, em vista da proposição a seguir demonstrada, xótico também é polinomial, nunca exigindo mais do que $d(|a| + 1)^2(|V| + 1)^2$ operações elementares, onde d é uma constante que não depende nem de G nem de f .

PROPOSIÇÃO 3 - O procedimento x̄timo executa o algoritmo otimalidade no m̄ximo $(2|a| + 1)(2|V| + 1)$ vezes.

Demonstraç̄o: Para cada subconjunto x de a , o maior n̄mero de chamadas consecutivas de otimalidade que fornecem o caso 3 ̄ limitado por $2|V|$, pois a cada chamada de otimalidade (G, f, x, I) em que o caso 3 ocorre, ̄ obtida uma nova qūdrupla x -ideal I_1 com $I < I_1$; assim, denotando $I = (Y, Y^*, P, P^*)$ e $I_1 = (Y_1, Y_1^*, P_1, P_1^*)$ temos que $|Y| + |Y^*| < |Y_1| + |Y_1^*| \leq 2|V|$. Logo, a cada $2|V|$ chamadas de otimalidade no pior caso, obt̄m-se uma ocorr̄ncia do caso 2 ou do caso 1.

Por outro lado, denotando por V_1 o conjunto $\{v \in V / g(v) < f_1(v)\}$ e por V_2 o conjunto $\{v \in V / f_2(v) < 0\}$ temos que

$$\Delta(V; x) \geq [f_1(V_1) - g(V_1)] - f_2(V_2) \quad (\forall x \subseteq a)$$

Ademais,

$$\Delta(V; \emptyset) \leq f_1(V_1) - f_2(V_2) + g(V \setminus (V_1 \cup V_2))$$

Logo,

$$\Delta(V; \emptyset) - \Delta(V; x) \leq g(V) = 2|a| \quad (\forall x \subseteq a)$$

A cada chamada de otimalidade em que o caso 2 ocorre, o desvio do subconjunto de a obtido ̄ estritamente menor do que o desvio do con

junto fornecido. Assim, no máximo $2|a|$ ocorrências do caso 2 acontecem.

Denotando então por $\# i$ ($i = 1, 2, 3$) o número de chamadas de otimalidade que fornecem o caso i , temos:

$$\# 1 = 1$$

$$\# 2 \leq 2 |a|$$

$$\# 3 \leq (2|V|) \# 2 + (2|V|) \# 1 \leq 4|a||V| + 2|V|$$

De fato, x ótimo executa o algoritmo otimalidade no máximo $2|a| + 2|V| + 4|a||V| + 1$ vezes.

■

Seja x um conjunto f -ótimo, ou seja, $\Delta(V;x) = \Delta_m$. É óbvio que se $\Delta_m = 0$ então x é um f -fator em G , sendo portanto uma f_1 -cobertura de V em um f_2 -emparelhamento em G . Porém, se $\Delta_m > 0$ então x pode não ser uma f_1 -cobertura nem um f_2 -emparelhamento (figura 1.b onde $\Delta_m = 2 = \Delta(V;x)$).

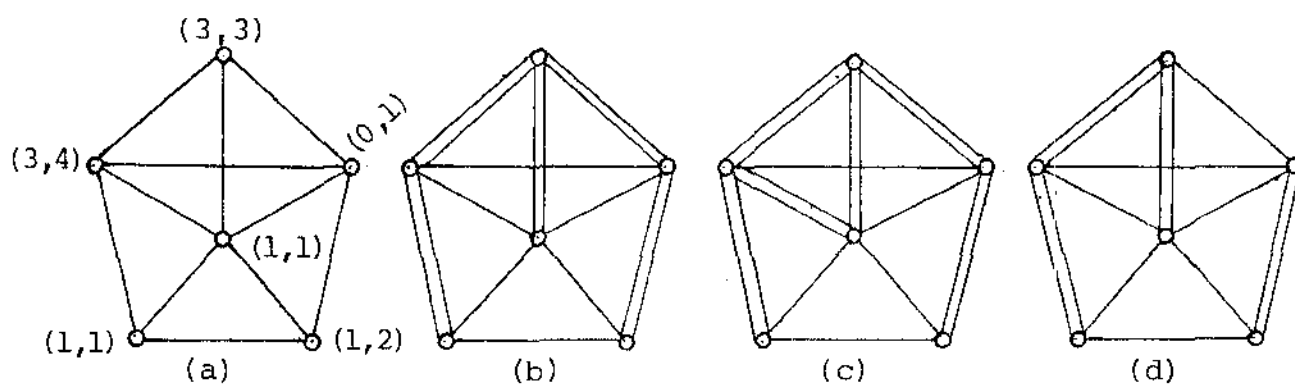


Figura 1. (a) um grafo G onde $f = (f_1, f_2)$ está indicada por um par ordenado em cada vértice; (b) um conjunto x ótimo que não é uma f_1 -cobertura de V , nem um f_2 -emparelhamento em G ; (c) uma f_1 -cobertura ótima; (d) um f_2 -emparelhamento ótimo.

No entanto, a demonstração do lema 3.3 nos garante que se iniciarmos no procedimento ótimo com uma f_1 -cobertura (f_2 -emparelhamento) então obteremos um conjunto ótimo que é uma f_1 -cobertura (f_2 -emparelhamento), se e somente se $f_1 \leq g$ ($f_2 \geq 0$) (figura 1).

6 - UMA GENERALIZAÇÃO NP-COMPLETA

Vamos generalizar o problema da determinação de um f -fator colocando pesos nas arestas do grafo. Mais precisamente, dado um grafo G e uma função restrição $f = (f_1, f_2)$, seja $k: a \rightarrow Z$ uma função ponderação que a cada aresta α em a associa um inteiro não negativo $k(\alpha)$ chamado peso de α . Dizemos que G é (f, k) -fatorável quando existe um subconjunto x de a tal que

$$f_1(v) \leq \sum_{\alpha \in x} k(\alpha) g^\alpha(v) \leq f_2(v) \quad (\forall v \in V) ;$$

nesse caso, x é um (f, k) -fator em G .

O problema de determinar se um grafo G é ou não (f, k) -fatorável é NP-completo conforme mostraremos a seguir.

O conceito de algoritmo polinomial (em tempo) e as definições de classes P, NP e de problemas NP-completos são bem conhecidos e podem ser encontrados em [1] ou [4] ou [14].

Convém lembrar que problemas NP-completos, "os mais difíceis" na classe NP, incluem problemas clássicos como o problema da mochila

la, o da programação linear inteira, e o do caixeiro viajante, para os quais não se conhecem até hoje algoritmos polinomiais. Mais ainda, a existência de um algoritmo polinomial para qualquer problema NP-completo implica na existência de algoritmos polinomiais para todos os problemas em NP (inclusive os NP-completos).

TEOREMA 1 - O problema de decidir se um grafo G é ou não (f,k) -fatorável é NP-completo.

Demonstração: O problema certamente pertence a NP: dado um subconjunto x de a , para verificar se x é ou não um (f,k) -fator basta calcular $\sum_{\alpha \in x} k(\alpha)g^\alpha(v)$ e verificar se este número se encontra entre $f_1(v)$ e $f_2(v)$, para cada $v \in V$. Assim, a verificação de uma solução pode ser feita por meio de um algoritmo polinomial, ou seja, o problema está em NP.

Stephen Cook, em 1971 [17], mostrou que o problema da satisfatibilidade é NP-completo; vamos então reduzi-lo polinomialmente ao nosso problema. Para tanto considere uma fórmula booleana C do cálculo proposicional em forma normal conjuntiva, envolvendo variáveis do conjunto $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$. Isto é, denotando os operadores lógicos por $-$ (negação), \vee (ou), \wedge (e), temos

$$C = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_N \quad (N \geq 1) \quad \text{onde}$$

$$C_i = l_{i1} \vee l_{i2} \vee \dots \vee l_{in_i} \quad (1 \leq i \leq N, n_i \geq 1) \quad \text{onde}$$

$$l_{ij} = u_r \quad \text{ou} \quad l_{ij} = \bar{u}_r \quad \text{para algum } u_r \text{ em } U$$

$$(1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq n_i)$$

A partir de C , vamos definir um grafo G , uma função restrição $f = (f_1, f_2)$ e uma função ponderação k . O grafo G é simples e tem bipartição X, Y onde

$$X = \{v_1, v_2, \dots, v_m, C_1, C_2, \dots, C_N\}$$

$$Y = \{u_1, u_2, \dots, u_m, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m\}$$

e tal que

$$\text{Adj}(v_i) = \{u_i, \bar{u}_i\} \quad (1 \leq i \leq m)$$

$$\text{Adj}(C_i) = \{\ell_{ij} / 1 \leq j \leq n_i\} \quad (1 \leq i \leq N)$$

A função restrição f é definida por:

$$f(v_i) = (N, N) \quad (1 \leq i \leq m)$$

$$f(C_i) = (1, n_i) \quad (1 \leq i \leq N)$$

$$f(w) = (0, N) \quad (\forall w \in Y)$$

A função ponderação k é dada por

$$k(\alpha) = \begin{cases} N, & \text{se } \alpha \text{ incide em } \{v_1, \dots, v_m\} \\ 1, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Exemplo: Considere $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ e seja

$$C = (u_1 \vee u_3) \wedge (\bar{u}_2) \wedge (u_1 \vee \bar{u}_1 \vee \bar{u}_3).$$

Assim, $N = 3, m = 4,$

$$C_1 = (u_1 \vee u_3); n_1 = 2; l_{11} = u_1; l_{12} = u_3;$$

$$C_2 = (\bar{u}_2); n_2 = 1; l_{21} = \bar{u}_2;$$

$$C_3 = (u_1 \vee \bar{u}_1 \vee \bar{u}_3); n_3 = 3; l_{31} = u_1; l_{32} = \bar{u}_1; l_{33} = \bar{u}_3;$$

O grafo G e as funções f e k estão indicados na figura 1.

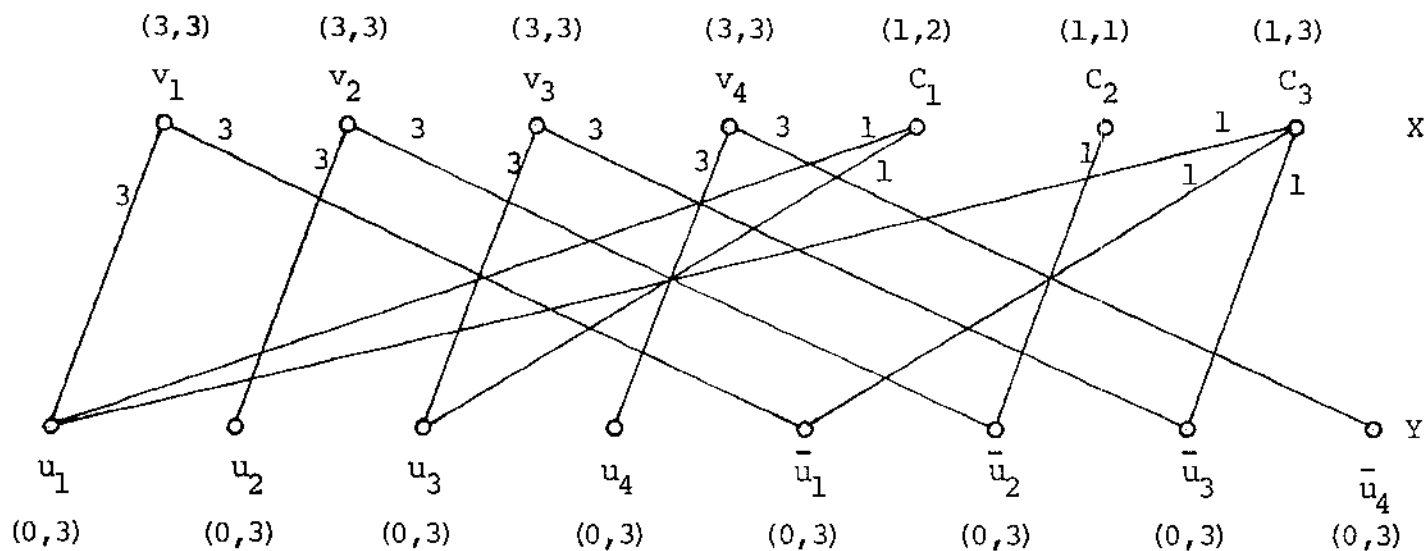


Figura 1. O grafo G definido a partir de U e C ; a função restrição $f = (f_1, f_2)$ está indicada em cada vértice e a função ponderação k em cada aresta.

É fácil ver que dados U e C é possível obter G, f e k em tempo polinomial.

Resta mostrar que C é satisfazível se e somente se G é (f, k) -fatorável, i.e., existe uma interpretação I das variáveis em U , que lhes atribui o valor verdadeiro ou falso, e que faz com que C tenha o valor verdadeiro se e somente se G admite um (f, k) -fator.

Suponha que C é satisfazível, seja I uma interpretação que faz com que C tenha o valor verdadeiro. Seja

$$W = \{u_i \in Y / I(u_i) = \text{verdadeiro}\} \cup \{\bar{u}_i \in Y / I(u_i) = \text{falso}\}$$

$$\text{e } F = Y \setminus W.$$

Seja então $x \subseteq a$ definido por:

$$\text{Adjx}(v_i) = F \cap \{u_i, \bar{u}_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$\text{Adjx}(C_i) = W \cap \{\ell_{ij} / 1 \leq j \leq n_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

É fácil ver que x é um (f, k) -fator em G :

- (1) $gx(v_i) = N$ ($i = 1, 2, \dots, m$), pois v_i é x -adjacente a precisamente um dos vértices u_i e \bar{u}_i , a saber, aquele que pertence a F ; ademais, a aresta correspondente tem peso N .
- (2) $1 \leq gx(C_i) \leq n_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$), pois $\text{Adjx}(C_i)$ é precisamente o conjunto $\{\ell_{ij} / 1 \leq j \leq n_i \text{ e } I(\ell_{ij}) = \text{verdadeiro}\}$. Note que esse conjunto é não vazio pois C_i assume o valor verdadeiro segundo a interpretação I ; assim $gx(C_i) \geq 1$. Por outro lado, todas as arestas incidentes em C_i tem peso 1 e então $gx(C_i) \leq n_i$.
- (3) $0 \leq gx(w) \leq N$ ($\forall w \in W$) pois se $w \in W$ então $\text{Adjx}(w) = \{C_i (1 \leq i \leq N) / w = \ell_{ij} \text{ para algum } j, 1 \leq j \leq n_i\}$
- (4) $gx(w) = N$ ($\forall w \in F$) pois se $w \in F$ então $w = u_i$ ou $w = \bar{u}_i$ para algum i , $1 \leq i \leq m$, $\text{Adjx}(w) = \{v_i\}$, e a aresta em x que liga v_i a w tem peso N .

Reciprocamente, se x é um (f,k) -fator em G , então C é satisfazível fazendo

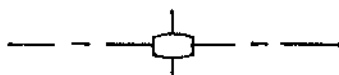
$$I(u_i) = \begin{cases} \text{verdadeiro,} & \text{se } \bar{u}_i \text{ for } x\text{-adjacente a } v_i \\ \text{falso} & , \text{ se } u_i \text{ for } x\text{-adjacente a } v_i \end{cases}$$

para $i = 1, 2, \dots, m$.

De fato,

- (1) obviamente I é uma interpretação sobre U pois como $f(v_i) = (N, N)$ e as arestas incidentes em v_i tem peso N , então precisamente um de u_i e \bar{u}_i é x -adjacente a v_i , para $i = 1, 2, \dots, m$.
- (2) cada C_i , $1 \leq i \leq N$, assume o valor verdadeiro segundo I . De fato, $f(C_i) = (1, n_i)$ e portanto C_i é x -adjacente a pelo menos um vértice, digamos w , em $\{u_j, \bar{u}_j\}$; por sua vez, w não pode ser x -adjacente a v_j pois $f(u_j) = f(\bar{u}_j) = (0, N)$ e as arestas com um extremo em v_j tem peso N . Assim, $I(w) = \text{verdadeiro}$ e portanto C_i assume o valor verdadeiro segundo I .

Em suma, é trivial verificar se um subconjunto x de a é ou não um (f,k) -fator; ademais, se existir um algoritmo polinomial para determinar se G é ou não (f,k) -fatorável então teremos, mediante a redução acima, um algoritmo polinomial para determinar se uma fórmula é ou não satisfazível. Assim, essa generalização de f -fator é um problema NP-completo. ■



CAPÍTULO IV
A P L I C A Ç Õ E S

1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo vamos mencionar algumas aplicações do Corolário III.5.2 , apresentando alguns resultados bem conhecidos como simples conseqüências do mesmo.

Para dar maior uniformidade ao capítulo, apresentaremos inicialmente uma formulação equivalente ao Corolário III.5.2:

TEOREMA 1 - Seja $f = (f_1, f_2)$ uma função restrição em G . O grafo G é f -fatorável se e somente se

$$|I(f, B)| + f_1(T) \leq f_2(S) + g(T, V \setminus S)$$

para cada G -tripla $B = (S, T, U)$



As condições do Corolário III.5.2 e do teorema 1 são equivalentes; a demonstração é imediata ficando a cargo do leitor.

2 - f .FATORES EM GRAFOS BIPARTICIONÁVEIS E EM DIGRAFOS

O teorema 1.1 apresenta uma condição necessária e suficiente para um grafo G ser f -fatorável; quando G é biparticionável, a condição pode ser simplificada.

TEOREMA 1 - Um grafo G biparticionável é f -fatorável se e somente se

$$f_1(T) \leq f_2(S) + g(T, V \setminus S)$$

para todo par S, T de subconjuntos disjuntos de V .

Demonstração: A necessidade da condição é imediata, pelo teorema 1.1.

Basta portanto demonstrar que a desigualdade enunciada implica na desigualdade do teorema 1.1 quando G é biparticionável.

Para tanto, suponha que

$$f_1(T') \leq f_2(S') + g(T', V \setminus S') \quad (1)$$

para todo par S', T' de subconjuntos disjuntos de V . Seja $B = (S, T, U)$ uma G -tripla, vamos demonstrar que

$$|I(f, B)| + f_1(T) \leq f_2(S) + g(T, V \setminus S) \quad (2)$$

por indução em $|I(f, B)|$

Se $I(f, B) = \emptyset$, (2) segue imediatamente de (1). Suponha então que $I(f, B) \neq \emptyset$ e adote como hipótese de indução que

$$|I(f, B')| + f_1(T') \leq f_2(S') + g(T', V \setminus S')$$

para toda G -tripla $B' = (S', T', U')$ com $|I(f, B')| < |I(f, B)|$.

Seja X, Y uma bipartição de G e K uma componente em $I(f, B)$; sejam M e N tais que

$$\begin{aligned} \{M, N\} &= \{X \cap V_K, Y \cap V_K\} \text{ e} \\ f_1(M) - g(T, M) &\leq f_1(N) - g(T, N) \end{aligned} \quad (3)$$

Seja $S' = S \cup M$, $T' = T \cup N$, $U' = U \setminus V \setminus K$ e B' a G -tripla (S', T', U') .

É fácil ver que

$$|I(f, B)| = |I(f, B')| + 1 \quad (4)$$

e

$$f_1(T) = f_1(T') - f_1(N) \quad (5)$$

Pela hipótese de indução,

$$|I(f, B')| + f_1(T') \leq f_2(S') + g(T', V \setminus S') \quad (6)$$

De (4-6) vem que

$$|I(f, B)| + f_1(T) \leq f_2(S') + g(T', V \setminus S') - f_1(N) + 1 \quad (7)$$

Ademais,

$$f_2(S') = f_2(S) + f_2(M) \quad (8)$$

$$g(T', V \setminus S') = g(T, V \setminus S) - g(T, M) + g(T, N) \quad (9)$$

De (7-9) vem que

$$|I(f, B)| + f_1(T) \leq f_2(S) + g(T, V \setminus S) + [f_2(M) - g(T, M)] - [f_1(N) - g(T, N)] + 1 \quad (10)$$

Por outro lado, como $K \in I(f, B)$ temos

$$f_2(M) = f_1(M) \quad e \quad (11)$$

$$f_1(M) + f_1(N) + g(T, M) + g(T, N) \equiv 1 \pmod{2} \quad (12)$$

De (3), (11) e (12) temos

$$f_2(M) - g(T, M) < f_1(N) - g(T, N) \quad (13)$$

Assim, de (10) e (13) segue que

$$|I(f,B)| + f_1(T) \leq f_2(S) + g(T, V \setminus S)$$

ou seja, $B = (S, T, U)$ satisfaz a desigualdade (2).

De fato, pelo teorema 1.1, G é f -fatorável. ■

É um exercício padrão demonstrar a condição seguinte, a partir do teorema 1:

COROLÁRIO 2 - Um grafo G com bipartição X, Y é f -fatorável se e somente se

$$(i) \quad f_1(T) \leq f_2(S) + g(T, Y \setminus S) \quad (\forall T \subseteq X) \quad (\forall S \subseteq Y)$$

e

$$(ii) \quad f_1(T) \leq f_2(S) + g(T, X \setminus S) \quad (\forall T \subseteq Y) \quad (\forall S \subseteq X)$$

Considere agora um digrafo D . Uma função restrição f em D é um par ordenado (f^+, f^-) de funções $f^+, f^-: VD \rightarrow Z \times Z$ tais que $f^+ = (f_1^+, f_2^+)$ e $f^- = (f_1^-, f_2^-)$ com $f_1^+ \leq f_2^+$ e $f_1^- \leq f_2^-$.

Dizemos que D é f -fatorável se existir um subconjunto x de a tal que

$$f_1^+ \leq g^+x \leq f_2^+ \quad \text{e} \quad f_1^- \leq g^-x \leq f_2^- ;$$

nesse caso dizemos que x é um f -fator em D .

TEOREMA 3 - D é f -fatorável se e somente se

$$(i) \quad f_1^+(T) \leq f_2^-(S) + g^+D(T, V \setminus S) \quad e$$

$$(ii) \quad f_1^-(T) \leq f_2^+(S) + g^-D(T, V \setminus S)$$

para todo par S, T de subconjuntos (não necessariamente disjuntos) de VD .

Demonstração: A partir do digrafo D , vamos construir um grafo G com bipartição V^+, V^- e $|V^+| = |V^-| = |VD|$ da seguinte maneira:

- (a) a cada vértice v em VD corresponde um vértice, v^+ , em V^+ e um vértice, v^- , em V^- ;
- (b) $a_G = a_D$ de tal forma que, se em D , $e^+ = u$ e $e^- = v$, então em G , $e = \{u^+; v^-\}$.

Vamos agora definir uma função restrição h em G por

$$h(v^+) = f^+(v) \quad e \quad h(v^-) = f^-(v) \quad (\forall v \in VD)$$

É imediato que um subconjunto x de aD é um f -fator em D se e somente se x é um h -fator em G . Pelo Corolário 2 temos que G é h -fatorável se e somente se

$$(i) \quad f_1^+(T) \leq f_2^-(S) + gG(T, V^- \setminus S) \quad (\forall T \subseteq V^+) \quad (\forall S \subseteq V^-) \quad e$$

$$(ii) \quad f_1^-(T) \leq f_2^+(S) + gG(T, V^+ \setminus S) \quad (\forall T \subseteq V^-) \quad (\forall S \subseteq V^+)$$

donde segue a condição enunciada. ■

3 - f.SOLUBILIDADE

Dado um grafo G e uma função restrição $f = (f_1, f_2)$, dizemos que G é f-solúvel se existir uma função peso $p: a \rightarrow N$ tal que

$$f_1(v) \leq \sum_{\alpha \in a} p(\alpha)g^\alpha(v) \leq f_2(v)$$

para todo v em V ; nesse caso, p é uma f-solução de G .^①

Observe que se a imagem de p for um subconjunto de $\{0,1\}$ então o conjunto $\{\alpha / p(\alpha) = 1\}$ é um f -fator em G . Por outro lado, se $f_1 = f_2 = 1$ então G é f -solúvel se e somente se G é 1-fatorável.

TEOREMA 1 - Seja $f = (f_1, f_2)$ uma função restrição em G , com $f_1 \geq 0$. O grafo G é f -solúvel se e somente se

$$|I(f, B)| + f_1(T) \leq f_2(S)$$

para cada G -tripla $B = (S, V_\emptyset(G-S), U)$.

Demonstração: Vamos construir um novo grafo G' , a partir de G , tal que:

(a) $V_{G'} = V_G$ e

(b) $g_{G'}(u, v) = m g_G(u, v)$ para todo par u, v de vértices, onde

$$m = |V| + f_2(V).$$

Assim, G' é obtido substituindo-se cada aresta de G por m "cópias" dela. É fácil ver que G é f -solúvel se e somente se G' é f -fatorável.

① Tutte [19] define f -solubilidade para G sem laços e $f: V \rightarrow N^+$.

Pelo teorema 1.1, G' é f -fatorável se e somente se

$$|I(G'; f, B)| + f_1(T) \leq f_2(S) + gG'(T, V \setminus S) \quad (1)$$

para cada G -tripla $B = (S, T, U)$.

A condição (1) é válida para todas as triplas tais que $gG'(T, V \setminus S) \neq 0$ pois

$$|I(G'; f, B)| + f_1(T) \leq |V| + f_2(V) \leq gG'(T, V \setminus S).$$

Por outro lado, como $S \cap T = \emptyset$, $gG'(T, V \setminus S) = 0$ se e somente se $T \subseteq V_\emptyset(G-S)$; nesse caso, $|I(G'; f, B)| = |I(G; f, B)|$.

Assim, G é f -solúvel se e somente se

$$|I(f, B)| + f_1(T) \leq f_2(S) \quad (2)$$

para cada G -tripla $B = (S, T, U)$ com $T \subseteq V_\emptyset(G-S)$.

Suponhamos agora que $B = (S, T, U)$ seja uma tripla com $T \subseteq V_\emptyset(G-S)$; consideremos então a tripla $B' = (S, T', U')$ com $T' = V_\emptyset(G-S)$ e $U' = U \setminus V_\emptyset(G-S)$. É claro que

$$|I(f, B)| = |I(f, B')| + |X| \quad \text{e} \quad |X| \leq f_1(X)$$

onde X é o conjunto dos vértices v em $U \cap V_\emptyset(G-S)$ com $f_2(v) = f_1(v) \equiv 1 \pmod{2}$. Assim,

$$|I(f, B)| + f_1(T) \leq |I(f, B')| + f_1(T')$$

donde se conclui que (2) vale para toda tripla $B = (S, T, U)$ com $T \subseteq V_\emptyset(G-S)$ se e somente se (2) vale para toda tripla $B = (S, T, U)$ com $T = V_\emptyset(G-S)$. De fato, G é f -solúvel se e somente se (2) vale para cada G -tripla $B = (S, T, U)$, com $T = V_\emptyset(G-S)$. ■

TEOREMA 2 - Seja f uma função restrição, com $f_1 \geq 0$. Um grafo G biparticionável é f -solúvel se e somente se

$$f_1(V_{\emptyset}(G-S)) \leq f_2(S) \quad (\forall S \subseteq V)$$

Demonstração: Seja G' o grafo construído a partir de G tal que

(a) $VG' = VG$ e

(b) $g_{G'}(u,v) = m g_G(u,v)$ para todo par u,v de vértices, onde $m = f_2(V)$.

Temos que G é f -solúvel se e somente se G' é f -fatorável. Pelo teorema 2.1, G' é f -fatorável se e somente se

$$f_1(T) \leq f_2(S) + g_{G'}(T, V \setminus S) \quad (1)$$

para todo par S, T de subconjuntos disjuntos de VG .

De maneira análoga à demonstração do teorema 1, prova-se que (1) equivale a

$$f_1(V_{\emptyset}(G-S)) \leq f_2(S) \quad (\forall S \subseteq V) \quad \blacksquare$$

COROLÁRIO 3 - Seja f uma função restrição, com $f_1 \geq 0$. Um grafo G com bipartição X, Y é f -solúvel se e somente se

(i) $f_1(X \cap V_{\emptyset}(G-S)) \leq f_2(S) \quad (\forall S \subseteq Y)$

e

(ii) $f_1(Y \cap V_{\emptyset}(G-S)) \leq f_2(S) \quad (\forall S \subseteq X)$

■

Considere agora um digrafo D e uma função restrição f em D . Dizemos que D é f -solúvel se existir uma função peso $p: aD \rightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$f_1^+(v) \leq \sum_{e^+\alpha=v} p(\alpha) \leq f_2^+(v) \text{ e } f_1^-(v) \leq \sum_{e^-\alpha=v} p(\alpha) \leq f_2^-(v)$$

para todo v em VD ; nesse caso, p é uma f -solução de D

TEOREMA 4 - Seja f uma função restrição, com $f_1 \geq 0$. Um digrafo D é f -solúvel se e somente se

$$(i) \quad f_1^+(V_S^+(D)) \leq f_2^-(S)$$

e

$$(ii) \quad f_1^-(V_S^-(D)) \leq f_2^+(S)$$

para todo subconjunto S de VD .

Demonstração: Seja D' o digrafo construído a partir de D tal que

$$(a) \quad VD' = VD \text{ e}$$

$$(b) \quad g^{+D'}(u,v) = m g^{+D}(u,v)$$

para todo par u,v de vértices, onde

$$m = \max\{f_2^+(VD), f_2^-(VD)\}.$$

Temos que D é f -solúvel se e somente se D' é f -fatorável. De maneira análoga à demonstração do teorema 1 (ou 2), prova-se que a condição enunciada para D equivale à do teorema 2.3 para D' . ■

SUMÁRIO DAS C.N.S. PARA f-FATORAÇÃO E f-SOLUBILIDADE

GRAFO	f-FATORAÇÃO	f-SOLUBILIDADE ($f_1 \geq 0$)
G qualquer	TEOREMA 1.1 $ I(f,B) + f_1(T) \leq f_2(S) + g(T,V \setminus S)$ $\forall B = (S,T,U)$	TEOREMA 3.1 $ I(f,B) + f_1(V_\emptyset(G-S)) \leq f_2(S)$ $\forall B = (S, V_\emptyset(G-S), U)$
G biparti- cionável	TEOREMA 2.1 $f_1(T) \leq f_2(S) + g(T,V \setminus S)$ $(\forall S, T \subseteq V) (S, T \text{ disjuntos})$	TEOREMA 3.2 $f_1(V_\emptyset(G-S)) \leq f_2(S)$ $(\forall S \subseteq V)$
G com bipartição X,Y	COROLÁRIO 2.2 $(i) f_1(T) \leq f_2(S) + g(T, Y \setminus S) \begin{cases} (\forall T \subseteq X) \\ (\forall S \subseteq Y) \end{cases}$ e $(ii) f_1(T) \leq f_2(S) + g(T, X \setminus S) \begin{cases} (\forall T \subseteq Y) \\ (\forall S \subseteq X) \end{cases}$	COROLÁRIO 3.3 $(i) f_1(X \cap V_\emptyset(G-S)) \leq f_2(S) (\forall S \subseteq Y)$ e $(ii) f_1(Y \cap V_\emptyset(G-S)) \leq f_2(S) (\forall S \subseteq X)$
D orientado	TEOREMA 2.3 $(i) f_1^+(T) \leq f_2^-(S) + g^+(T, V \setminus S)$ e $(ii) f_1^-(T) \leq f_2^+(S) + g^-(T, V \setminus S)$ $(\forall S, T \subseteq V) (S, T \text{ não necessariamente disjuntos})$	TEOREMA 3.4 $(i) f_1^+(V_S^+(D)) \leq f_2^-(S)$ e $(ii) f_1^-(V_S^-(D)) \leq f_2^+(S)$ $(\forall S \subseteq V)$

4 - FLUXO MÁXIMO NUM DIGRAFO

Seja D um digrafo com dois vértices, o^+ e o^- , distintos, chamados respectivamente de origem e destino; os demais vértices de VD são chamados vértices intermediários e denotamos $VD \setminus \{o^+, o^-\}$ por ID.

Seja uma função $c: aD \rightarrow N$; c é chamada função capacidade.

Dada uma função $\varphi: aD \rightarrow N$, define-se

$$\varphi^+(v) = \sum_{e^+ \alpha = v} \varphi(\alpha) \quad \varphi^-(v) = \sum_{e^- \alpha = v} \varphi(\alpha) \quad e$$

$$\varphi_o(v) = \varphi^+(v) - \varphi^-(v) \quad (\forall v \in VD).$$

Dizemos que φ é um fluxo em D se e somente se

$$0 \leq \varphi \leq c$$

$$\varphi_o(v) = 0 \quad (\forall v \in ID) \quad e$$

$$\varphi^-(o^+) = \varphi^+(o^-) = 0.$$

Note que para toda função $\varphi: aD \rightarrow N$ temos $\varphi_o(VD) = 0$. Assim, se φ for um fluxo, então

$$\varphi^+(o^+) = \varphi^+(VD) - \varphi^+(ID) = \varphi^-(VD) - \varphi^-(ID) = \varphi^-(o^-).$$

O valor de um fluxo φ é definido por $\text{val } \varphi = \varphi^+(o^+)$. Um fluxo φ é máximo se $\text{val } \varphi \geq \text{val } \varphi'$ para todo fluxo φ' em D .

Um corte separador em D é um corte $\lambda(S)$ tal que $o^+ \in S$ e $o^- \in VD \setminus S$. A capacidade de $\lambda(S)$ é definida por $c(\lambda^+(S))$ e denotada por $c(S)$. Dizemos que $\lambda(S)$ é mínimo se $c(S) \leq c(S')$ para todo corte separador $\lambda(S')$ em D .

Em 1927, Menger [10] apresentou vários resultados envolvendo fluxos máximos e cortes mínimos em digrafos com função capacidade constante igual a 1. Em 1956, Ford e Fulkerson [12] relacionaram flu

xos máximos e cortes mínimos apresentando um teorema que ficou conhecido como "Max-flow Min-cut theorem" e em 1957 [13] apresentaram uma prova construtiva para esse teorema. A partir de então surgiram inúmeras provas para o referido teorema; vamos agora apresentá-lo como consequência do teorema 3.4:

TEOREMA 1 - Seja φ um fluxo num digrafo D e $\lambda(S)$ um corte separador em D . Então

$$\text{val } \varphi \leq c(S)$$

com igualdade se e somente se φ é máximo e $\lambda(S)$ é mínimo.

Demonstração: Sendo φ um fluxo e $\lambda(S)$ um corte separador em D , temos

$$\text{val } \varphi = \varphi^+(o^+) = \varphi^+(s) = \varphi(\lambda^+(S, VD)) - \varphi(\lambda^-(S, VD)) \quad (1)$$

Mas,

$$\varphi(\lambda^+(S, VD)) - \varphi(\lambda^-(S, VD)) = \varphi(\lambda^+(S)) - \varphi(\lambda^-(S)) \quad (2)$$

Por outro lado, sendo $o \leq \varphi \leq c$, de (1-2) segue que

$$\text{val } \varphi \leq c(\lambda^+(S)) = c(S) \quad (3)$$

Provamos que a desigualdade (3) é válida para cada fluxo φ e para cada corte separador $\lambda(S)$ em D ; assim, é imediato que, se valer a igualdade em (3) então φ é máximo e $\lambda(S)$ é mínimo.

Resta agora mostrar que (3) é verificada com igualdade para cada fluxo máximo φ e para cada corte separador mínimo $\lambda(S)$. Para

tanto, é suficiente mostrar a existência de um fluxo φ e de um corte separador $\lambda(S)$ em D tal que $\text{val } \varphi = c(S)$.

A fim de mostrar a existência de um par $\varphi, \lambda(S)$, tal que $\text{val } \varphi = c(S)$, vamos transformar o problema da determinação de um fluxo máximo e de um corte separador mínimo em D , num problema de solubilidade. Para tanto, construiremos um digrafo D' , e, para cada número natural k , definiremos uma função restrição f em D' , de tal forma que:

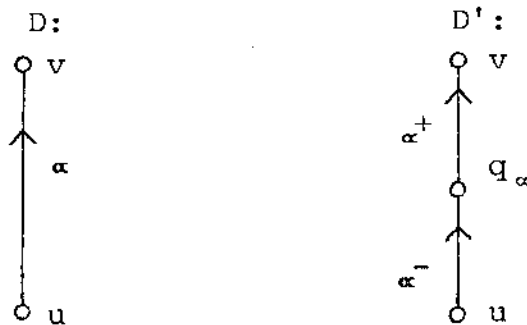
- (a) se D' é f -solúvel então existe um fluxo φ em D tal que $\text{val } \varphi = k$.
- (b) se $k \leq c(S)$ para todo corte separador $\lambda(S)$ em D então D' é f -solúvel.

Desse modo, se $c(S')$ for a capacidade de um corte separador mínimo em D , fazendo $k = c(S')$, garantimos a existência de um fluxo φ' em D tal que $\text{val } \varphi' = c(S')$, o que completa a demonstração do teorema.

Vamos então construir o referido digrafo D' , da seguinte maneira:

- (a) cada aresta α em aD é subdividida em duas, α^+ e α^- , por meio de um novo vértice q_α , tal que $e^+ \alpha^- = e^+ \alpha$, $e^- \alpha^- = q_\alpha = e^+ \alpha^+$ e $e^- \alpha^+ = e^- \alpha$ (figura 1.) O conjunto de todos os vértices q_α será denotado por Q ; assim $VD' = VD \cup Q$.

Figura 1.



(b) a cada vértice em VD' é adicionado um laço.

Seja agora k um número natural. Vamos definir a função restrição $f = (f^+, f^-)$ em D' por:

$$f^+(q_\alpha) = f^-(q_\alpha) = (c(\alpha), c(\alpha)) \quad (\forall \alpha \in aD)$$

$$f^+(o^+) = f^-(o^-) = (k, k)$$

$$f^-(o^+) = f^+(o^-) = (0, 0)$$

$$f^+(v) = f^-(v) = (k, k) \quad (\forall v \in ID)$$

É óbvio que se D' é f -solúvel então existe um fluxo φ em D tal que val $\varphi = k$. Suponhamos então que

$$k \leq c(S)$$

para todo corte separador $\lambda(S)$ em D ; mostremos que D' é f -solúvel.

Seja Z um subconjunto de VD' . Para possibilitar a aplicação do teorema 3.4, mostremos que:

$$(i) \quad f_1^+(V_Z^+(D')) \leq f_2^-(Z) \quad e$$

$$(ii) \quad f_1^-(V_Z^-(D')) \leq f_2^+(Z)$$

Mostremos inicialmente a condição (i).

Como cada vértice em VD' possui um laço nele incidente, temos que $V_Z^+(D') \subseteq Z$. Assim,

$$f_1^+(V_Z^+(D')) = f_1^+(Z) - f_1^+(Z \setminus V_Z^+(D')) \quad (4)$$

Por outro lado, pela definição de f ,

$$f_1^+(Z) = f_2^-(Z) + k|\{o^+\} \cap Z| - k|\{o^-\} \cap Z| \quad (5)$$

De (4-5) conclui-se que (se $o^+ \notin Z$) ou (se $o^- \in Z$) então (i) é trivialmente válida.

Suponhamos então que $o^+ \in Z$ e $o^- \notin Z$; nesse caso, $\lambda(Z \cap VD)$ é um corte separador em D . Assim, por hipótese,

$$k \leq c(Z \cap VD) \quad (6)$$

Ademais, de (4-5) temos

$$f_1^+(V_Z^+(D')) = f_2^-(Z) + k - f_1^+(Z \setminus V_Z^+(D')).$$

Assim, basta mostrar que

$$f_1^+(Z \setminus V_Z^+(D')) \geq k \quad (7)$$

Se existe um vértice $v \in Z \setminus V_Z^+(D')$ tal que $v \in VD$, então (7) é trivialmente válida pois $f_1^+(v) = k$.

Suponhamos então que $Z \setminus V_Z^+(D')$ é um subconjunto de Q . Nesse caso,

$$f_1^+(Z \setminus V_Z^+(D')) \geq c(Z \cap VD) \quad (8)$$

De (6) e (8) temos (7).

Concluimos então que a condição (i) é válida para todo subconjunto Z de VD' . A verificação da condição (ii) é análoga: observando-se que $V_Z^-(D') \subseteq Z$ temos

$$\begin{aligned} f_1^-(V_Z^-(D')) &= f_2^+(Z) + k|\{o^-\} \cap Z| - k|\{o^+\} \cap Z| - \\ &- f_1^-(Z \cap VD \setminus V_Z^-(D')) - f_1^-(Z \cap Q \setminus V_Z^-(D')) \end{aligned} \quad (9)$$

De (9) temos que (se $o^- \notin Z$) ou (se $o^+ \in Z$) ou (se $Z \cap VD \setminus V_Z^-(D') \neq \emptyset$)

então a condição (ii) é trivialmente válida.

Suponhamos então que $o^- \in Z$, $o^+ \notin Z$ e $Z \setminus V_Z^-(D') \subseteq Q$; assim, $\lambda(VD \setminus Z)$ é um corte separador em D e

$$f_1^-(Z \setminus V_Z^-(D')) \geq c(VD \setminus Z) \geq k$$

o que completa a verificação da validade de (ii).

De fato, pelo teorema 3.4, D' é f -solúvel. ■

5 - ARESTA CROMATICIDADE DE GRAFOS BIPARTICIONÁVEIS

Uma k -aresta-coloração ($k \geq 0$) de um grafo G é uma função $c: a \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ tal que para arestas α e β adjacentes, $c(\alpha) \neq c(\beta)$. Um grafo é k -aresta-colorável se admite uma k -aresta-coloração.

É óbvio que se um grafo G possui laços então G não é k -aresta-colorável para nenhum $k \geq 0$. Desse modo, até o final dessa seção, vamos considerar apenas grafos sem laços.

Observe que o grafo vazio é 0-aresta-colorável; note também que todo grafo G é $|a|$ -aresta-colorável e que se G é k -aresta-colorável então é k' -aresta-colorável para todo $k' \geq k$. Podemos assim definir o número aresta-cromático de G , $\chi'(G)$, como sendo o menor k tal que G é k -aresta-colorável; dizemos então que G é $\chi'(G)$ -aresta-cromático.

É imediato que G é k -aresta-colorável se e somente se existe uma partição de a em k blocos, cada um dos quais um emparelhamento em G . Por outro lado, seja $M(G) = \max\{g(v)/v \in V\}$. Como as arestas incidentes num mesmo vértice são todas adjacentes, é óbvio que

$\chi'(G) \geq M(G)$; para verificar que a desigualdade pode ser estrita, basta considerar um triângulo. Provaremos porém, que se G for biparticionável então $\chi'(G) = M(G)$.

No caso geral, caracterizar os grafos G tais que $\chi'(G) = M(G)$ deve ser difícil pois, o teorema das quatro cores é logicamente equivalente à 3-aresta-colorabilidade de grafos 3- regulares, 2-conexos, planares [2] ou [7].

TEOREMA 1 - Seja G um grafo com bipartição X, Y e Q o conjunto dos vértices em V com grau máximo $M(G) > 0$. Nessas condições existe um emparelhamento t em G que cobre Q .

Demonstração: Vamos definir uma função restrição $f = (f_1, f_2)$ em G tal que $f_2 = 1$ e

$$f_1(v) = \begin{cases} 1, & \text{se } v \in Q \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Se mostrarmos que G possui um f -fator t , então t é um emparelhamento em G que cobre Q . Para tanto, de acordo com o teorema 1.1, vamos mostrar que

$$\begin{aligned} f_1(T) &\leq f_2(S) + g(T, Y \setminus S) && (\forall T \subseteq X) (\forall S \subseteq Y) \\ &e \\ f_1(T) &\leq f_2(S) + g(T, X \setminus S) && (\forall T \subseteq Y) (\forall S \subseteq X) \end{aligned}$$

Sejam então T e S subconjuntos arbitrários de X e Y respectivamente. Façamos

$$T_Q = T \cap Q \quad e \quad T_{\bar{Q}} = T \setminus Q$$

Assim,

$$g(T_Q, Y) = M|T_Q| = Mf_1(T) \quad e$$

$$g(T_Q, S) \leq M|S| = Mf_2(S).$$

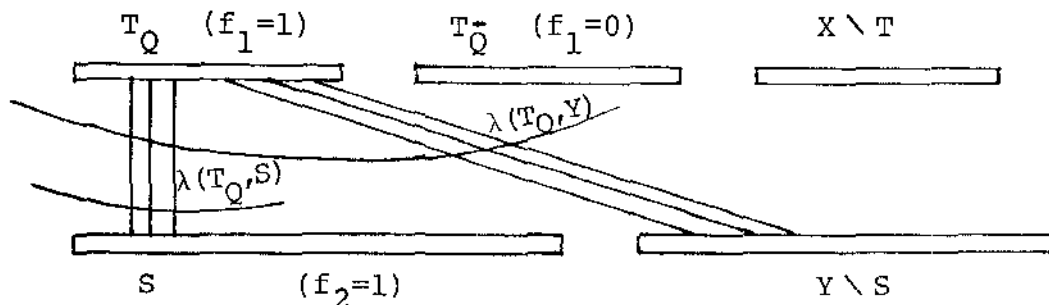


Figura 1.

Então,

$$Mf_1(T) = g(T_Q, S) + g(T_Q, Y \setminus S) \leq Mf_2(S) + g(T_Q, Y \setminus S)$$

ou seja,

$$f_1(T) \leq f_2(S) + \frac{g(T_Q, Y \setminus S)}{M} \leq f_2(S) + g(T, Y \setminus S)$$

Resultado análogo vale para $T \subseteq Y$ e $S \subseteq X$. ■

COROLÁRIO 2 - Se G é um grafo biparticionável então a pode ser expresso como a união de $M(G)$ emparelhamentos dois a dois disjuntos. ■

COROLÁRIO 3 - Se G é um grafo biparticionável então $\chi'(G) = M(G)$. ■

6 - SEQÜÊNCIAS GRÁFICAS

Seja $V = \{1, 2, \dots, p\}$ um subconjunto de N e $f = (f_1, f_2)$ uma função de V em $Z \times Z$. A seqüência $Sf = (f(1), f(2), \dots, f(p))$ é gráfica se existir um grafo G tal que $VG = V$ e $f_1 \leq gG \leq f_2$; Sf é gráfica estrita se G for simples.

PROPOSIÇÃO 1 - Uma seqüência Sf com $f_2 \geq f_1 \geq 0$ é gráfica se e somente se $f_2(V)$ é par ou $f_2(V) > f_1(V)$.

Demonstração: Seja G um grafo completo com p vértices ao qual foi adicionado um laço em cada vértice. Obviamente, f é uma função restrição em G ; ademais, Sf é gráfica se e somente se G é f-solúvel. Pelo teorema 3.1 temos que G é f-solúvel se e somente se

$$|I(f, B)| + f_1(V_{\emptyset}(G-S)) \leq f_2(S) \quad (1)$$

para toda G -tripla $B = (S, V_{\emptyset}(G-S), U)$.

Como cada vértice em V possui um laço,

$$V_{\emptyset}(G-S) = \emptyset \quad (\forall S \subseteq V) \quad (2)$$

Por outro lado, sendo G um grafo completo,

$$|I(f, B)| \leq 1 \quad (\forall B = (S, T, U)) \quad (3)$$

De (1-3) temos que Sf é gráfica se e somente se

$$f_2(S) > 0 \text{ para todo } S \subseteq V \text{ tal que } f_1(V \setminus S) = f_2(V \setminus S) \equiv 1 \pmod{2} \quad (4)$$

Se $f_2(V)$ é par então (4) é válida pois $f_2(S) \equiv 1 \pmod{2}$ para

todo subconjunto S de V tal que $f_2(V \setminus S) \equiv 1 \pmod{2}$; se $f_2(V) > f_1(V)$, então $f_2(S) > f_1(S)$ para todo subconjunto S de V tal que $f_1(V \setminus S) = f_2(V \setminus S)$. Em ambos os casos, (4) é válida.

Reciprocamente, se (4) vale, fazendo $S = \emptyset$ temos que $f_2(S) = 0$ e portanto ou $f_2(V)$ é par ou $f_1(V) \neq f_2(V)$. ■

COROLÁRIO 2 - A seqüência Sf é gráfica se e somente se

$$(i) \quad f_2 \geq f_1 \quad \text{e} \quad f_2 \geq 0$$

e

$$(ii) \quad f_2(V) \text{ é par ou então existe } v \text{ em } V \text{ tal que} \\ f_2(v) > \max\{0, f_1(v)\}. \quad \blacksquare$$

As soluções encontradas pela proposição 1 e corolário 2 nem sempre nos fornecem grafos simples. Vejamos então alguns resultados que caracterizam as seqüências gráficas estritas.

TEOREMA 3 - A seqüência Sf é gráfica estrita se e somente se

$$f_1(T) \leq r(r-1) + \sum_{v \in V \setminus T} \min\{r, f_2(v)\} \quad (\forall T \subseteq V) \quad (I)$$

com desigualdade estrita se

$$f_1(U_T) = f_2(U_T) \not\equiv r|U_T| \pmod{2}$$

onde $r = |T|$ e

$$U_T = \{v \in V \setminus T / f_2(v) > r\}$$

Demonstração: É óbvio que S_f é gráfica estrita se e somente se K_p é f -fatorável. Pelo teorema 1.1, K_p é f -fatorável se e somente se

$$|I(f,B)| + f_1(T) \leq f_2(S) + g(T, V \setminus S) \quad (1)$$

para toda K_p -tripla $B = (S, T, U)$.

Como K_p é completo, então

$$|I(f,B)| \leq 1 \quad (2)$$

e

$$r(r-1) + r|U| = g(T, V \setminus S) \quad (3)$$

Por outro lado,

$$\sum_{v \in S \cup U} \min\{r, f_2(v)\} \leq f_2(S) + r|U| \quad (4)$$

com igualdade se e somente se

$$\begin{aligned} f_2(v) &\leq r & (\forall v \in S) & \quad e \\ f_2(v) &\geq r & (\forall v \in U) \end{aligned} \quad (a)$$

De (3-4) temos que

$$r(r-1) + \sum_{v \in S \cup U} \min\{r, f_2(v)\} \leq f_2(S) + g(T, V \setminus S) \quad (\forall B = (S, T, U)) \quad (5)$$

com igualdade se e somente se (a).

Se a condição (I) enunciada é satisfeita, então, de (2) e (5) temos que

$$|I(f,B)| + f_1(T) \leq f_2(S) + g(T, V \setminus S) + 1$$

com igualdade somente se

(a)

$$f_1(U) = f_2(U) \not\equiv r|U| \pmod{2} \quad (b) \quad e$$

$$f_1(U_T) \neq f_2(U_T) \text{ ou } f_1(U_T) \equiv r|U_T| \pmod{2} \quad (c)$$

Mas, (a), (b) e (c) levam a uma contradição, pois (a) implica que $U_T \subseteq U$ e $f_2(v) = r$ para todo v em $U \setminus U_T$, o que, com (b), implica que $f_1(U_T) = f_2(U_T) \not\equiv r|U_T| \pmod{2}$, o que contradiz (c). Assim, (I) implica em (1).

Reciprocamente, se (1) vale, então fazendo $U = U_T$, (a) vale, a igualdade vale em (5) e portanto temos que

$$f_1(T) \leq r(r-1) + \sum_{v \in V \setminus T} \min\{r, f_2(v)\} - |I(f,B)|$$

Assim, a desigualdade (I) vale; ademais, considerando (2), a desigualdade (I) é estrita se $|I(f,B)| = 1$, ou seja,

$$f_1(U_T) = f_2(U_T) \quad e \quad f_1(U_T) + r|U_T| \equiv 1 \pmod{2}.$$

Assim, (1) implica na condição (I) enunciada.

Logo, (1) e a condição enunciada são equivalentes; a demonstração está completa. ■

Se $f_1 = f_2 \geq 0$, podemos considerar f como sendo uma função que assume valores em \mathbb{N} . Nesse caso, a particularização do teorema 4 coincide com o teorema demonstrado por Erdős e Gallai em 1960 [15] e

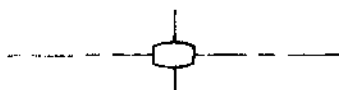
aqui o apresentaremos como corolário 5. Em 1974, Tutte [21] demonstrou esse teorema como consequência da caracterização de grafos f -fatoráveis.

COROLÁRIO 4 - Seja $S_f = (f(1), f(2), \dots, f(p))$ uma seqüência não crescente de naturais. Então S_f é gráfica estrita se e somente se

$$\sum_{i=1}^p f(i) \text{ é par e}$$

$$\sum_{i=1}^r f(i) \leq r(r-1) + \sum_{i=r+1}^p \min\{r, f(i)\}$$

para todo r tal que $1 \leq r \leq p$. ■

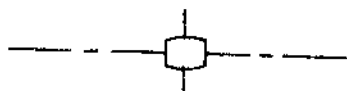


REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] A.V. Aho, J.E. Hopcroft and J.D. Ullman (1976), The Design and Analysis of Computer Algorithms, Addison-Wesley, 3rd Edition.
- [2] C. Berge (1976), Graphs and Hypergraphs, North - Holland, 2nd Edition.
- [3] C.L. Lucchesi (1979), Introdução à Teoria dos Grafos, 129 Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, IMPA.
- [4] C.L. Lucchesi et al., (1979), Aspêctos Teóricos da Computação, Coleção Euclides, IMPA, Rio de Janeiro.
- [5] C.L. Lucchesi, comunicação particular.
- [6] F. Harary (1972), Graph Theory, Addison - Wesley, 3rd Edition.
- [7] J.A. Bondy and U.S.R. Murty (1976), Graph Theory with Applications, American Elsevier Publishing CO., inc.
- [8] J. Edmonds (1965), Paths, Trees and Flowers, Canad. J. Math., 17, 449-467.
- [9] J.E. Graver and W.B. Jurkat (1980), f-factors and related decompositions of graphs, J. Comb. Theory (B), 28, 66-84.
- [10] K. Menger (1927), Zur allgemeinen Kurventheorie, Fund. Math., 10, 96-115.
- [11] L. Lovász, comunicação particular.

- [12] L.R. Ford Jr and D.R. Fulkerson (1956), Maximal flow through a network, Canad. J. Math., 8, 399-404.
- [13] L.R. Ford Jr and D.R. Fulkerson (1957), A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the Hitchcock problem, Canad. J. Math., 9, 210-218.
- [14] M.R. Garey and D.S. Johnson (1979), Computers and Intractability, a Guide to the Theory of NP-Completeness, W.H. Freeman and Company.
- [15] P. Erdős and T. Gallai (1960), Grafos cujos vértices têm grau pré-determinado, Mat. Lapok, 11, 264-274 (em húngaro).
- [16] P. Hall (1935), On representatives of subsets, J. London Math. Soc., 10, 26-30.
- [17] S.A. Cook (1971), The complexity of theorem-proving procedures, Proc. 3rd Ann. ACM Symp. on Theory of Computing, Association for Computing Machinery, New York, 151-158.
- [18] W.T. Tutte (1947), The factorization of Linear Graphs, J. London Math. Soc., 22, 107-111.
- [19] W.T. Tutte (1952), The factors of Graphs, Canad. J. Math., 4, 314-328.
- [20] W.T. Tutte (1954), A short proof of the factor theorem for finite graphs, Canad. J. Math., 6, 347-352.

- [21] W.T. Tutte (1974), Spanning subgraphs with specified valencies , Discrete Math., 9, 97-108.
- [22] W.T. Tutte (1978), The subgraph problem, Annals of Discrete Math., 3, 289-295.



INDICE DE NOTAÇÕES

1 - TABELA DE SÍMBOLOS

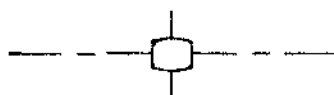
Símbolo	Uso	Referência
\emptyset	\emptyset (conjunto vazio)	
\in	$a \in A$ (relação de pertinência)	
\notin	$a \notin A$ (negação de $a \in A$)	
\subseteq	$A \subseteq B$ (inclusão)	
	$H \subseteq G$ (subgrafo)	6
\subsetneq	$A \subsetneq B$ (inclusão própria)	
\cup	$A \cup B$ (união)	
\cap	$A \cap B$ (intersecção)	
\setminus	$A \setminus B$ (diferença)	
\oplus	$A \oplus B$ (diferença simétrica)	35
\times	$A \times B$ (produto cartesiano)	
\circ	$P \circ Q$ (produto de passeios)	9
\equiv	$a \equiv b \pmod{m}$ (congruência módulo m)	
$\not\equiv$	$a \not\equiv b \pmod{m}$ (negação de $a \equiv b \pmod{m}$)	
$ $	$ m $ (valor absoluto de m , se m é número real)	
	$ A $ (cardinalidade de A , se A é conjunto)	
\leq	$f \leq g$ (f, g : funções)	4
$=$	$f = g$ (f, g : funções)	4
$f(X)$	$f(X)$ (X : subconjunto do domínio de f)	4
$*$	f^* (função dual de f)	19
	x^* (conjunto dual de x)	20
$[]$	$G[X]$ (subgrafo gerado)	6
$-$	$G - X$ ($G[V \setminus X]$)	6
	$G - v$ ($G - \{v\}$)	6

2 - TABELA DE ABREVIACÕES

Abreviação	Uso	Referência
a	aG ou a	4,5
	aP	9
Adj	AdjG(X) ou Adj(X)	5
	Adj x (v)	8
	Adj $^+$ (v)	12
	Adj $^-$ (v)	12
B	B = (S,T,U)	22
D	GD ou D	10
e	eG^α ou e^α	4,5
	e^+^α	10
	e^-^α	10
f^+	$f^+(v)$	61
f^-	$f^-(v)$	61
g	$gG(X,Y)$ ou $g(X,Y)$	7
	$gG(X)$ ou $g(X)$	7
	$gG(v)$ ou $g(v)$	7
	$gx(X,Y)$	8
	$gx(v)$	8
	$g^\alpha(v)$	8
	$g^+D(X,Y)$	11
	$g^-D(X,Y)$	11
	$g^+(X)$	11
	$g^-(X)$	11
	$g^+(v)$	12

Abreviação	Uso	Referência
	$g^-(v)$	12
	$g^+_x(X,Y)$	12
	$g^-_x(X,Y)$	12
	$g^+_x(v)$	12
	$g^-_x(v)$	12
i	$i(K;f,B)$ ou $i(K)$	25,29
I	$I(G-S)$	17
	$I_\circ(f,G-S)$	19
	$I(f,B)$ ou I	22,25,29
ID	ID	67
K_n	K_n (grafo completo)	6
M	$M(G)$	73
N	conjunto dos naturais	
N^+	conjunto dos naturais positivos	
R	$R(P)$	9
Sf	Sf	76
V	VG ou V	4,5
	VP	9
	$V_S(G)$	8
	$V_\emptyset(G)$	8
	$V_S^+(D)$	12
	$V_S^-(D)$	12
val	val Ψ	68
Z	conjunto dos inteiros	
Z	Z	37

Abreviação	Uso	Referência
	Z_x	36
	Z_x^*	37
δ	$\delta(K)$	29
Δ	$\Delta(v; x, f)$ ou $\Delta(v)$	28
	Δ_m	28
φ	φ (fluxo)	68
	$\varphi^+(v)$	68
	$\varphi^-(v)$	68
	$\varphi_0(v)$	68
λ	$\lambda_G(X, Y)$ ou $\lambda(X, Y)$	7
	$\lambda(X)$	7
	$\lambda_X(X, Y)$	8
	$\lambda^+_{D(X, Y)}$ ou $\lambda^+(X, Y)$	11
	$\lambda^-_{D(X, Y)}$ ou $\lambda^-(X, Y)$	11
	$\lambda^+(X)$	11
	$\lambda^-(X)$	11
	$\lambda^+_X(X, Y)$	12
	$\lambda^-_X(X, Y)$	12
χ'	$\chi'(G)$ (número aresta-cromático)	73



ÍNDICE ALFABÉTICO

Este índice foi elaborado em ordem alfabética de acordo com a primeira palavra significativa. Assim, tanto trilha como G-tripla estão no grupo T.

- Adjacência, 5
- x-adjacentes, vértices, 8
- x-alternado, passeio, 34
- Aresta, 4
 - origem, 9
 - término, 9
- k-aresta-coloração, 73
- k-aresta-colorável, grafo, 73
- Arestas
 - adjacentes, 5
 - paralelas, 5
- Bipartição, 6
- Biparticionável, grafo, 6
- Caminho, 9
- Capacidade
 - de um corte, 68
 - função, 68
- Caracterização de
 - conjuntos f-ótimos, 46
 - grafos f-fatoráveis, 46
- Cardinalidade de um grafo, 5
- f-cobertura, 14
 - perfeita, 14
- Completo, grafo, 5
- Componente, 10
 - ímpar, 17
 - (f,B)-ímpar, 22,25
- Comprimento de um passeio, 9
- Condição I de Tutte, 18
- Condição II de Tutte, 25
- Conexo, grafo, 10
- Conjunto f-ótimo, 29
- Corte de arestas, 7
 - associado, 7
- Corte
 - mínimo, 68
 - separador, 68
- Degenerado, passeio, 9
- Desconexo, grafo, 10
- Destino, 67
- f-desvio de um conjunto de arestas, 28
 - num vértice, 28
- Digrafo, 10
 - f-fatorável, 61
 - f-solúvel, 66
- Dual
 - de um conjunto de arestas, 20
 - de uma função, 20
 - função restrição, 19
- f-emparelhamento, 14
 - perfeito, 14
- Estrita, seqüência gráfica, 70
- Extremo, 4
 - final, 10
 - inicial, 10
- f-fator, 13, 14, 61

- (f,k)-fator, 52
- f-fatorável
 - grafo, 13
 - digrafo, 61
- (f,k)-fatorável, grafo, 52
- Final, extremo, 10
- Fluxo, 68
 - valor de, 68
- Função
 - capacidade, 68
 - incidência, 4
 - peso, 63, 66
 - ponderação, 52
 - restrição, 13, 61
 - restrição dual, 19
- Gerado, subgrafo, 6
- Gerador, subgrafo, 6
- Gráfica, seqüência, 76
- Grafo, 4
 - k-aresta-colorável, 73
 - biparticionável, 6
 - completo, 5
 - conexo, 10
 - desconexo, 10
 - f-fatorável, 13
 - (f,k)-fatorável, 52
 - orientado, 10
 - simples, 5
 - f-solúvel, 63
 - subjacente, 10
 - vazio, 5
- Grau de um vértice, 7
 - relativo, 8
- Hall, teorema de, 16
- x-ideal, quádrupla, 47
- Ímpar, componente, 17
- (f,B)-ímpar, componente, 22, 25
- Incidência, 5
 - função, 4
- Inicial, extremo, 10
- (f,x)-interessante, passeio, 34
- Intermediário, vértice, 67
- Interno, vértice, 9
- Isolado, vértice, 8
- Laço, 5
- Ligação, 5
- Ligados, vértices, 10
- Maximal, 6
- Máximo, 6
- (f,x)-melhorante, passeio, 35
- Minimal, 6
- Mínimo, 6
 - corte, 68
- Número aresta-cromático, 73
- Orientação, 10
- Orientado, grafo, 10
- Origem, 67
 - aresta, 9
 - de um passeio, 9
- f-otimalidade, teorema da, 33
- f-ótimo, conjunto, 29
- Paralelas, arestas, 5
- Passagem, 9
- Passeio, 9
 - x-alternado, 34
 - degenerado, 9
 - (f-x)-interessante, 34
 - do tipo x, 34
 - do tipo x^* , 34

- (f,x)-melhrante, 35
- Peso
 - de uma aresta, 52
 - função, 63, 66
- Ponderação, função, 52
- Produto de passeios, 9
- Próprio, subgrafo, 6
- Restrição, função, 13, 61
- Reverso de um passeio, 9
- Seção de um passeio, 9
- Semi-grau
 - exterior, 12
 - interior, 12
- Separador, corte, 68
- Seqüência
 - gráfica, 76
 - gráfica estrita, 76
- Simples, grafo, 5
- f-solução, 63, 66
- f-solúvel
 - grafo, 63
 - digrafo, 66
- Subgrafo, 6
 - gerado, 6
 - gerador, 6
 - próprio, 6
- Subjacente, grafo, 10
- Teorema
 - de Hall, 16
 - da f-otimalidade, 33
 - I de Tutte, 18
 - II de Tutte, 25
- Término, aresta, 9
- Término de um passeio, 9
- Triângulo, 6
- Trilha, 9
- G-tripla, 22
- Tutte
 - condição I de, 18
 - condição II de, 25
 - teorema I de, 18
 - teorema II de, 25
- Valor de um fluxo, 68
- Vazio, grafo, 5
- Vértice, 4
 - intermediário, 67
 - interno, 9
 - isolado, 8
- Vértices
 - adjacentes, 5
 - x-adjacentes, 8
 - ligados, 10