ANÁLISE DE EQUILÍBRIO GERAL APLICADA A ECONOMIAS DISTORCIDAS

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Srta. Esmeralda Palumbo Proença e aprovada pela Comissão Julgadôra.

Campinas, 25 de outubro de 1991

Prof. Dr. José Antonio Scaramucci
(orientador)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada (área de Pesquisa Operacional).

ANÁLISE DE EQUILÍBRIO GERAL
APLICADA A
ECONOMIAS DISTORCIDAS

TESE DE MESTRADO

Esmeralda Palumbo Proença

José Antonio Scaramucci - orientador

UNICAMP - IMECC
Departamento de Matemática Aplicada

Outubro de 1991

Em tudo o que fizeres na tua vida lembres sempre de acrescentar uma pitada de amor e de compreensão e jamais esqueças as pessoas que te possibilitaram chegar aonde estás...

AGRADECIMENTOS

Ao final deste trabalho gostaria de agradecer a todos que de uma forma ou de outra auxiliaram nessa caminhada. De um modo especial

Ao meu orientador Prof. José Antonio Scaramucci pela atenção e dedicação dispensada.

Aos professores que fizeram parte da Comissão Julgadora, José Mário Martinez, Clóvis Perin Filho e Stephen Anthony De Castro pela participação e pelas sugestões apresentadas.

Aos meus pais, Beatriz e Manoel, que sempre acreditaram em mim e sem os quais eu jamais teria chegado até aqui.

A alguém muito especial que no último ano esteve sempre ao meu lado.

Ao meu grande amigo grande, Orlando Bordoni, que colaborou bastante no trabalho computacional e também teve sempre uma palavra de estímulo nos momentos mais difíceis.

Aos colegas de turma Mário, Fermin, Rafael e Marcelo.

A todos os professores que me transmitiram os conhecimentos que carrego, em especial aos professores do IMECC e da PUCCAMP pelo incentivo.

Aos funcionários que foram sempre muito prestativos.

Enfim gostaria de agradecer a Deus, nosso Pai, pela oportunidade de ter conhecido todos vocês.

Muito Obrigada!

Este trabalho é dedicado aos meus avós

Esmeralda e Julio Palumbo

ÍNDICE

Índice de Figuras

INTRODUÇÃO

Esta dissertação introduz novas contribuições ao sistema de suporte computacional para a análise de equilíbrio geral aplicado, PEGASUS, que teve seu desenvolvimento iniciado por Bordoni [3] em sua tese de mestrado na UNICAMP.

Nosso trabalho concentra-se em estender o modelo walrasiano clássico.

Os modelos computáveis de equilíbrio geral têm se tornado cada vez mais importantes na análise de economias onde o foco do estudo é a questão da eqüidade. Aplicações têm sido feitas em finanças públicas, comércio entre nações, problemas ambientais, etc. Sabemos que o equilíbrio econômico corresponde a uma situação em que todos os agentes têm seus objetivos satisfeitos, não possuindo deste modo interesse para modificá-la.

Em 1967, Scarf obteve pela primeira vez uma solução numérica para o problema de equilíbrio econômico geral proposto por Walras no século passado, utilizando uma formulação de ponto fixo (Scarf, [13]).

Mais recentemente, em 1975, MacKinnon sugeriu, originalmente, a abordagem desse problema através de formulações de complementaridade.

Nós aplicaremos a técnica proposta por Mathiesen [9], que resolve o problema através de uma sucessão de problemas de complementaridade linear.

Na primeira parte deste texto descreveremos os aspectos mais importantes do modelo walrasiano clássico, desde a sua definição, construção e resolução.

A segunda parte representa efetivamente nossa contribuição nos trabalhos desenvolvidos na área de análise aplicada de equilíbrio econômico. Veremos como uma economia pode ser distorcida por taxação, subsídio, margem de lucro (*mark-up*), rigidez institucional e transferências de renda. Além disso, descreveremos um tratamento especial dispensado à tecnologia de produção com retornos decrescentes à escala (DRS).

CAPÍTULO 1

ASPECTOS TEÓRICOS DO EQUILÍBRIO WALRASIANO CLÁSSICO

O problema de equilíbrio geral foi inicialmente desenvolvido por Leon Walras no fim do século passado. Contudo, a descrição de Walras foi bastante incompleta do ponto de vista matemático. Foi somente em 1954 que Arrow e Debreu deram uma formulação geral e rigorosa às economias walrasianas. E, o que é mais importante, provaram um teorema de existência de equilíbrio para estas economias. Para tal, Arrow e Debreu necessitaram do teorema do ponto fixo de Kakutani. Como este teorema e mesmo o do ponto fixo de Brouwer só foram obtidos muito após Walras, pode-se entender as limitações das exposições iniciais do equilíbrio geral. Posteriormente, Debreu (1959) clarificou e generalizou ainda mais estes resultados.

1.1 Definição

Um modelo de equilíbrio geral aplicado do tipo walrasiano clássico caracteriza-se pela existência de:

o Um conjunto de bens $B_1,\ldots,B_m$.

o Um conjunto de atividades de produção $P_1,\ldots,P_n$ que convertem certos bens em outros.

o Um conjunto de consumidores $C_1,\ldots,C_{nc}$ que procuram otimizar a sua alocação a partir das suas dotações iniciais até o consumo final.

o Funções de produção que definem as características do setor na economia.

o Funções utilidade que resumem as preferências dos consumidores na economia.

Nossa implementação supõe que todos os agentes são "tomadores de preços". Isso implica que os produtores maximizam seu lucro sujeitos a restrições de tecnologia, os consumidores maximizam sua utilidade sujeitos a restrições de renda, todos os agentes aceitando os preços dados pelo mercado.

Nos modelos de EGC não existe moeda, e todos os preços são determinados em unidades de um determinado bem, que é chamado de numerário.

1.1.1 Oferta e Demanda

A oferta é determinada por:

Oferta = A(p).y + w , onde p é um vetor de preços com m componentes, A(p) é uma matriz mxn de coeficientes a_{ij} dependentes de preços, que relacionam bens B_i e atividades P_j, utilizando para isso em cada atividade uma função de produção com elasticidade de substituição constante, ou seja, do tipo CES recorrente. Essa função será melhor definida no Capitulo 2. Convencionamos que se $a_{ij} < 0$, o bem B_i na atividade P_j é um insumo e, se $a_{ij} > 0$, o bem B_i é produzido pela atividade P_j. É conveniente observar que os coeficientes de insumo-produto são consistentes com uma produção unitária. Essa matriz é denominada matriz de produção Leontief generalizada. O vetor y tem n componentes, expressando o nível em que cada atividade é operada. Finalmente, w é o vetor de dotações, isto é, $w_i = \sum_{k=1}^{nc} w_i^k$, onde nc é o número de consumidores e i=1,...,m.

As demandas $x_i^k(p)$ são também do tipo CES recorrente, tal que $x_i(p) = \sum_{k=1}^{nc} x_i^k(p)$ para i=1,...,m.

No equilíbrio walrasiano temos portanto:

$$A(p).y + w - x(p) \geq 0 \qquad \text{(oferta excedente não-negativa)} \qquad (1)$$

$$p \geq 0 \qquad \text{(preços não-negativos)} \qquad (2)$$

$$p^T.[A(p).y + w - x(p)] = 0 \qquad \text{(oferta excedente implica p = 0)} \qquad (3)$$

A equação (3) surge do fato de que se a oferta for superior à demanda o preço do bem no equilíbrio deve ser zero.

1.1.2 Lucro Unitário

É o lucro devido à produção unitária de um bem B_i numa atividade P_j, ou seja, receita menos custo.

Num equilíbrio geral, os custos computam a remuneração de todos os fatores, podemos então dizer que:

$$p^T.A(p) \leq 0 \qquad \text{(lucro unitário não-positivo)} \qquad (4)$$

$$y \geq 0 \qquad \text{(níveis das atividades não-negativos)} \qquad (5)$$

$$[\ p^T.A(p)\ ].y = 0 \qquad \text{(lucro negativo só se } y = 0 \text{)} \qquad (6)$$

A equação (6) surge do fato de que se o lucro for estritamente negativo não haverá interesse em produzir e, portanto, o nível da produção será zero.

As condições de complementaridade (1)-(6) são representadas usualmente por:

$$w + A(p).y - x(p) \geq 0 \quad : \quad p\geq 0 \qquad (7)$$

$$-p^T.A(p) \geq 0 \quad : \quad y\geq 0 \qquad (8)$$

1.2 Lei de Walras

Num modelo de equilíbrio econômico geral temos que

$$p^T.w = p^T.x(p)$$

<u>Prova:</u>

Tomemos a equação (3), $p^T.[A(p).y + w - x(p)] = 0$. Temos então: $p^T.A(p).y + p^T.w - p^T.x(p) = 0$. Mas pela equação (6), $p^T.A(p).y = 0$. Portanto, $p^T.w = p^T.x(p)$. ∎

A identidade $p^T.w = p^T.x(p)$ é chamada lei de Walras, onde $p^T.w$ representa a renda dos consumidores e $p^T.x(p)$ é o dispêndio.

Usando esse fato podemos provar três proposições muito importantes para o cálculo do equilíbrio econômico walrasiano.

Através da lei de Walras podemos provar, por exemplo, que se (n-1) mercados estiverem em equilíbrio e o preço do mercado restante for positivo temos que esse último também estará em equilíbrio. Esse fato é muito importante do ponto de vista computacional, já que o modelo apresenta uma redundância que é corrigida pela retirada de uma linha e uma coluna da matriz linearizada.

Proposição nº 1

Seja p^* o vetor de equilíbrio, tal que $p^* \in \mathbb{R}^{n-1}$ e p_n^* é o n-ésimo preço e corresponde ao n-ésimo mercado e $p_n^* > 0$. Devemos mostrar que esse n-ésimo mercado também está em equilíbrio.

PROVA:

Se p^* é vetor de equilíbrio, pela lei de Walras, $p^{*T}.(w - x(p^*)) = 0$. Mas:

$$\sum_{i=1}^{n-1} p_i^{*T}.(w_i - x_i(p^*)) = 0 \Rightarrow p_n^{*T}.(w_n - x_n(p^*)) = 0.$$ Como $p_n^* > 0$, segue-se que

$w_n = x_n(p^*)$.▮

Proposição nº 2

Se p^* é um equilíbrio walrasiano e $(w_j - x_j(p^*)) > 0$, então $p_j^* = 0$.

Prova:

Seja p^* um equilíbrio walrasiano, $(w - x(p^*)) \geq 0$ e portanto:

$$p^*.(w - x(p^*)) = \sum_{i=1}^{n} p_i^{*T}.(w_i - x_i(p^*)) \geq 0.$$ Se $(w_j - x_j(p^*)) > 0$ e $p^* > 0$ nós teremos $p^*.(w - x(p^*)) > 0$, contradizendo a lei de Walras.▮

Para a terceira proposição vamos supor que todos os bens são desejáveis no seguinte sentido:

Se $p_i = 0$, então $(x_i(p^*) - w_i) > 0$ para $i=1,\dots,k$, isto é, se algum preço é zero, o excesso de demanda agregado a esse bem é estritamente positivo.

Proposição nº 3

Se todos os bens são desejáveis e p^* é um equilíbrio walrasiano, então $(x(p^*) - w) = 0$.

Prova:

Suponha que $(x_i(p^*) - w_i) < 0$. Então pela Proposição 2 temos $p_i^* = 0$. Mas pela definição de desejabilidade $(x_i(p^*) - w_i) > 0$, o que é uma contradição.∎

1.3 Existência do Equilíbrio Walrasiano

Inicialmente vamos enunciar o teorema do ponto fixo de Brouwer.

Teorema: **(Brouwer)**

Considere $S^{l-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^l : \sum_{i=1}^{l} x_i = 1 \right\}$, denominado simplexo unitário em $\mathbb{R}^l$.

Seja $f\colon S^{l-1} \quad S^{l-1}$ contínua. Então existe $\bar{x} \in S^{l-1}$ tal que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Com esse teorema podemos provar a existência do equilíbrio walrasiano. Inicialmente consideremos economias sem produção, isto é, $n = 0$.

Teorema: **(Existência de equilíbrio)**

Considere $S^{m-1} = \left\{ p \in \mathbb{R}_+^m : \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \right\}$ e z a função excesso de demanda, isto é, $z(p) = \sum_{i=1}^{m} x_i(p) - \sum_{i=1}^{m} w_i$.

Se z: S^{m-1} $\mathbb{R}^m$ é contínua e satisfaz $p.z(p) \equiv 0$, então existe um p^* em S^{m-1} tal que $z(p^*) \leq 0$.

Prova:

Definamos a função g: S^{m-1} S^{m-1} por:

$$g_i(p) = \frac{p_i + \max(0, z_i(p))}{1 + \Sigma_{k=1}^m \max(0, z_k(p))} \qquad \text{para} \quad i=1,\dots,m$$

Note que essa função é contínua pois z e max(,) são funções contínuas e $g(p) \in S^{m-1}$ assim $\sum_{i=1}^{m} g_i(p) = 1$.

Pelo teorema do ponto fixo de Brouwer existe um p^* tal que $p^* = g(p^*)$, isto é,

$$p_i^* = \frac{p_i^* + \max(0, z_i(p^*))}{1 + \Sigma_{k=1}^m \max(0, z_k(p^*))} \qquad \text{para} \quad i=1,\dots,m$$

Nós queremos mostrar que p^* é um vetor de preços do equilíbrio walrasiano. Multiplicando a equação acima por $1 + \Sigma_{k=1}^m \max(0, z_k(p^*))$ temos:

$$p_i^* + p_i^*.\Sigma_{k=1}^m \max(0, z_k(p^*)) = p_i^* + \max(0, z_i(p^*)) \text{ com } i=1,\dots,m$$

ou seja:

$$p_i^*.\Sigma_{k=1}^m \max(0, z_k(p^*)) = \max(0, z_i(p^*)) \qquad \text{com } i=1,\dots,m$$

multiplicando a equação por $z_i(p^*)$:

$$z_i(p^*).p_i^*.\left[\Sigma_{k=1}^m \max(0, z_k(p^*))\right] = z_i(p^*).\max(0, z_i(p^*))$$

Somando as m equações, nós teremos:

$$\left[\Sigma_{k=1}^m \max(0, z_k(p^*))\right].\Sigma_{i=1}^m z_i(p^*).p_i^* = \Sigma_{i=1}^m z_i(p^*).\max(0, z_i(p^*))$$

Como $\Sigma_{i=1}^m z_i(p^*).p_i^* = 0$ pela hipótese, nós temos:

$$\Sigma_{i=1}^m z_i(p^*).\max(0, z_i(p^*)) = 0$$

Cada termo dessa soma é maior ou igual a zero, pois cada um é 0 ou

$(z_i(p^*))^2$. Mas se algum termo for estritamente maior que zero, a equação não tem solução. Portanto, cada termo deve ser zero, podemos concluir então que

$$z_i(p^*) \leq 0 \qquad \text{para } i=1,\ldots m. \blacksquare$$

<u>Teorema:</u> **(Existência de equilíbrio para economias com produção)**

Existe equilíbrio em uma economia se os seguintes itens são satisfeitos:

(1) Cada conjunto de consumo $\mathbb{X}_i$ de um consumidor é fechado, convexo, e limitado inferiormente;

(2) Cada consumidor tem preferências não-saciáveis;

(3) O conjunto $\{(x,x')\in \mathbb{X}_i\times\mathbb{X}_i \mid x$ é preferível a $x'\}$ é fechado;

(4) Cada consumidor possui um vetor de dotações iniciais no interior de seu conjunto de consumo;

(5) Para cada consumidor i, se x_i, x'_i são duas cestas de consumo, então x_i é preferível a x'_i implica que $tx_i + (1-t)x'_i$ é preferível a x'_i para qualquer $0 < t < 1$;

(6) Para cada firma j, 0 é um elemento de $\mathbb{Y}_j$;

(7) $\mathbb{Y}_j$ é fechado e convexo para $j=1,\ldots,n$;

(8) $\mathbb{Y}_j \cap (-\mathbb{Y}_j) = \{\ 0\ \}$ $\quad j=1,\ldots,n$;

(9) $\mathbb{Y}_j \supset (-\mathbb{R}_+)$.

<u>Prova:</u> Ver Debreu [5].$\blacksquare$

1.4 Uma Propriedade do Equilíbrio Walrasiano

Uma propriedade importante do equilíbrio walrasiano é o fato de numa economia com preferências não-saciáveis todo equilíbrio walrasiano exibe uma alocação final de bens que é um ótimo no sentido de Pareto. Essa propriedade será enunciada em forma de teorema, mas para demonstrá-lo temos a necessidade de fazer algumas definições:

Def.1. Uma alocação factível x é um ótimo de Pareto se não existe alocação x' tal que todos os agentes preferem x' a x.

Def.2. Um par alocação-preço (x,p) é um equilíbrio walrasiano se:

(1) $\Sigma x_i = \Sigma w_i$.

(2) x'_i é preferível a x_i, então $p.x'_i > p.w_i$.

Primeiro Teorema do Bem-estar Econômico: Se (x,p) é um equilíbrio walrasiano então x é um ótimo de Pareto.

Prova:

Vamos provar por absurdo.

Suponhamos que x não é um ótimo de Pareto. Então existe x' tal que x'_i é preferível a x_i, $\forall i \Rightarrow$ pela def.2.(2) $\Rightarrow p.x'_i > p.w_i$, $\forall i$; mas usando def.2.(1) $p.\Sigma w_i = p.\Sigma x'_i > p.\Sigma w_i$, o que é um absurdo.■

Segundo Teorema do Bem-estar Econômico: Se x^* é uma alocação ótima de Pareto com $x^*_i \gg 0$ para $i=1,\ldots,m$ e as preferências são convexas, contínuas e monotônicas. Então x^* é um equilíbrio walrasiano para as dotações iniciais $w_i = x^*_i$ para $i=1,\ldots,m$.

Prova:

Seja $\mathbb{P}_i = \{x_i \in \mathbb{R}^k \mid x_i$ é preferível a $x^*_i\}$. Então defina $\mathbb{P} = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}_i = \{z \mid z = \sum x_i$ com $x_i \in \mathbb{P}_i\}$. $\mathbb{P}$ é o conjunto de todas as cestas de agregados que podem ser distribuidas entre os m agentes fornecendo-lhes uma situação melhor. Como cada $\mathbb{P}_i$ é um conjunto convexo por hipótese e a soma de conjuntos convexos é convexo, nós podemos concluir que $\mathbb{P}$ é um conjunto convexo.

Seja $w = \sum x^*_i$ a cesta agregada atual. Como x^* é uma alocação ótima de Pareto, não existe redistribuição de x^* tal que todos todos os agentes melhorem; isto é, $w \notin \mathbb{P}$.

Portanto, pelo teorema do hiperplano separador, existe p tal que:

$$p.z \geq p.\sum x^*_i = p.w \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{P}$$

Reagrupando, nós temos:

$$p.(z - \sum x^*_i) \geq 0 \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{P}$$

Devemos mostrar agora que p é de fato um vetor de preços de equilíbrio. A prova prossegue em três passos:

(1) p é não-negativo, isto é, $p \geq 0$.

Seja $e_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ com 1 na i-ésima posição. Tomemos

$z = w + e_i$ (note que $z \in \mathbb{P}$, portanto substituindo na inequação acima temos:

$$p.(w + e_i - w) \geq 0 \qquad \text{para } i=1,\ldots,k$$

ou seja:

$$p.e_i \geq 0 \qquad \text{para } i=1,\ldots,k$$

o que implica $p \geq 0$ para $i=1,\ldots,k$.

(2) Se y_j é preferível a x_j^*, então $p.y_j \geq p.x_j^*$, para cada agente $j=1,\ldots,m$.

Nós sabemos que, se cada agente i prefere y_i a x_i^*, então

$$p.\sum y_i \geq p.\sum x_i^*$$

Agora suponha que apenas algum agente j prefira alguma cesta y_j a x_j. Então construa uma alocação z retirando um pouco de cada bem do consumidor j e distribuindo para todos os demais agentes, teremos:

$$z_j = y_j(1-\theta)$$

$$z_i = x_i^* + \frac{y_j\theta}{n-1} \qquad i = 1,\ldots,m \quad i \neq j$$

Para θ muito pequeno, a monotonicidade implica que z é preferível no sentido de Pareto a x_i^* e portanto $\Sigma z_i \in \mathbb{P}$. As equações acima sugerem:

$$p.\Sigma z_i \geq p.\Sigma x_i^*$$

$$p.(y_j(1-\theta) + \Sigma_{i\neq j} x_i^* + y_j\theta) = p.(y_j + \Sigma_{i\neq j} x_i^*) \geq$$

$$\geq p.(x_j^* + \Sigma_{i\neq j} x_i^*) = p.\Sigma x_i^*$$

ou seja,

$$p.y_j \geq p.x_j^*$$

Isto mostra que se o agente j prefere y_j a x_j^* seu custo associado é não menor ao de x_j^*. Resta mostrar que nós podemos fazer a desigualdade estrita; isto é:

(3) Se y_j é estritamente preferível a x_j^*, então $p.y_j > p.x_j^*$.

Nós acabamos de mostrar que $p.y_j \geq p.x_j^*$ e pela hipótese $x_j^* \gg 0$

nós mostramos que $p.x_j^* > 0$. Assuma agora que $p.y_j = p.x_j^*$. Como as preferências são contínuas, nós podemos encontrar algum $0 < \theta < 1$ tal que $\theta.y_j$ é estritamente preferível a x_j^*. Pelo argumento da parte (2), $\theta.y_j$ tem um custo associado que é não-menor ao de x_j^*:

$$\theta.p.y_j \geq p.x_j^*$$

Entretanto, se $p.y_j = p.x_j^* > 0$, nós temos que $\theta.p.y_j < p.x_j^*$. Esta contradição termina a prova do teorema.∎

CAPÍTULO 2

CÁLCULO DE EQUILÍBRIO WALRASIANO CLÁSSICO

Este capítulo é um resumo do trabalho de Bordoni [3]. Esse foi o ponto de partida para o nosso trabalho e, portanto, se faz importante sua descrição.

2.1 Construindo um modelo computável de equilíbrio geral

A formulação de um modelo de equilíbrio geral aplicado requer a caracterização da tecnologia de produção e das preferências do consumidor.

A função elasticidade de substituição constante (CES) é largamente usada em análise de equilíbrio geral aplicada. As funções Leontief (coeficientes fixos) e Cobb-Douglas podem ser consideradas casos especiais da função CES quando as elasticidades de substituição são respectivamente 0 e 1. A função produção CES será descritas a seguir.

Vamos supor que uma atividade macroeconômica para uma região possa ser representada por um produto P. A produção de P é descrita por uma tecnologia CES recorrente de dois níveis, como mostra a Figura 1. Os insumos trabalho (L), capital (K), e energia (E) são necessárias para a produção do macrobem P. O agregado N (não-energético) é denominado bem intermediário. Os parâmetros σ^P_N e σ^P_P referem-se às elasticidades de substituição entre L/K e N/E, respectivamente, na produção de P.

Os níveis de produção de N e P, dadas as quantidades de trabalho, a^P_L, capital, a^P_K, e energia, a^P_E, são, respectivamente,

$$y^P_N = \left[\alpha^P_L (a^P_L)^{\rho^P_N} + \alpha^P_K (a^P_K)^{\rho^P_N} \right]^{1/\rho^P_N}$$

$$y^P_P = \left[\alpha^P_N (a^P_N)^{\rho^P_P} + \alpha^P_E (a^P_E)^{\rho^P_P} \right]^{1/\rho^P_P}$$

onde $\rho^P_N = (\sigma^P_N - 1)/\sigma^P_N$ e $\rho^P_P = (\sigma^P_P - 1)/\sigma^P_P$. Os coeficientes α^P_L, α^P_K, α^P_N, e α^P_E, são parâmetros de distribuição da função de produção CES correspondentes aos bens L, K, N, e, E, respectivamente.

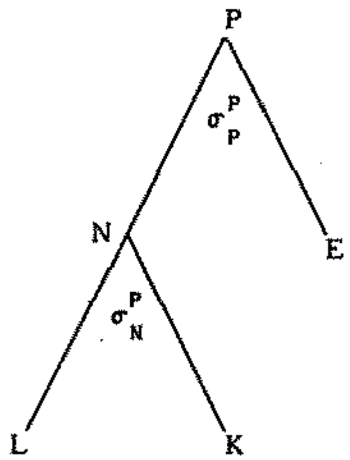


Figura 1: *Tecnologia de Produção CES recorrente.* A produção macroeconômica de uma região tem a estrutura de uma árvore representando substituições sucessivas. No nível inferior, insumos trabalho (L) e capital (K) são usados para obter um agregado não-energético N = L/K. No nível superior N e insumos energéticos (E) são necessários para produzir o macrobem P.

É possível mostrar que as quantidades de trabalho, a^P_L, capital, a^P_K, e energia, a^P_E, associadas com o custo da produção de uma unidade de P são:

$$a^P_L = \left(\alpha^P_L \frac{p_N}{p_L}\right)^{\sigma^P_N} .y^P_N$$

$$a^P_K = \left(\alpha^P_K \frac{p_N}{p_K}\right)^{\sigma^P_N} .y^P_N$$

$$a^P_E = \left(\alpha^P_E \frac{p_P}{p_E}\right)^{\sigma^P_P} .y^P_P$$

onde

$$a^P_N = \left(\alpha^P_N \frac{p_P}{p_N}\right)^{\sigma^P_P} .y^P_P$$

é a quantidade relativa dos insumos não-energéticos e p_L, p_K,

$$p_N = \left[\alpha_L^P . \left(\frac{p_L}{\alpha_L^P}\right)^{1-\sigma_N^P} + \alpha_K^P . \left(\frac{p_K}{\alpha_K^P}\right)^{1-\sigma_N^P}\right]^{1/(1-\sigma_N^P)} \tag{9}$$

p_E, e

$$p_P = \left[\alpha_N^P . \left(\frac{p_N}{\alpha_N^P}\right)^{1-\sigma_P^P} + \alpha_E^P . \left(\frac{p_E}{\alpha_E^P}\right)^{1-\sigma_P^P}\right]^{1/(1-\sigma_P^P)} \tag{10}$$

são os preços de L, K, N, E, e P, respectivamente. As expressões (9) e (10) devem ser modificadas no caso da função produção ser uma Cobb-Douglas. Por exemplo, se $\sigma_N^P = 1$, então (9) será

$$p_N = \left(\frac{p_L}{\alpha_L^P}\right)^{\alpha_L^P} . \left(\frac{p_K}{\alpha_K^P}\right)^{\alpha_K^P}$$

com $\alpha_L^P + \alpha_K^P = 1$.

Apenas para relembrar, o equilíbrio walrasiano consiste em p e y satisfazendo as seguintes condições de complementaridade não-linear:

$$\begin{aligned} w + A(p).y - x(p) \geq 0 \quad &: \quad p \geq 0 \\ -p^T.A(p) \geq 0 \quad &: \quad y \geq 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Para resolver esse problema, a cada iteração (K+1), linearizamos A(p)y, x(p) e $p^T A(p)$ em relação aos preços, usando o vetor p da iteração anterior (K). Usaremos L( ) para representar "linearização de".

$$L(x(p)) = x(p^K) + \nabla_p x(p^K).(p - p^K)$$

Obs: Como a demanda x(p) é homogênea de grau zero em relação ao vetor de preços p, $\nabla_p x(p^K).p^K = 0$ portanto:

$$L(x(p)) = x(p^K) + \nabla_p x(p^K).p = x^K + J^K.p \tag{12}$$

$$L(A(p)y) = A(p^K)y + \nabla_p\left[A(p^K)y\right].(p - p^K)$$

Obs: Como o vetor produção $A(p)y$ é homogêneo de grau zero, pela Lei de Euler temos: $\nabla_p\left(A(p^K)y\right).p^K = 0$ portanto:

$$L(A(p)y) = A(p^K)y + \nabla_p\left(A(p^K)y\right).p = A^K.y + H^K.p \qquad (13)$$

$$L(A^T(p).p) = A^T(p^K).p^K + \nabla_p\left[A^T(p^K).p^K\right](p - p^K) =$$

Pelo Lema de Shephard temos: $\nabla_p\left(A^T(p^K).p^K\right) = A^T(p^K)$, logo:

$$L(A^T(p).p) = A^T(p^K).p = [A^K]^T.p \qquad (14)$$

Substituindo (12)-(13)-(14) em (11) temos:

$$w + A^K.y + H^K.p - x^K - J^K.p \geq 0$$

$$- [A^K]^T.p \geq 0$$

ou seja,

$$\begin{aligned} w - x^K + \left[- J^K + H^K \right].p + A^K.y &\geq 0 \\ - [A^K]^T.p \qquad\qquad &\geq 0 \end{aligned}$$

Após todas essas considerações podemos dizer que o jacobiano que representará esse modelo será do tipo:

$$\left[\begin{array}{c} w - x^K \\ \hline 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} -J^K + H^K & A^K \\ \hline [\,-A^K\,]^T & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} p \\ \hline y \end{array}\right] \geq 0 \qquad (15)$$

onde as derivadas das entradas da matriz de atividades A em relação aos preços são do tipo:

$$\frac{\partial a_E^P}{\partial p_L} = \frac{\partial a_L^P}{\partial p_E} = \frac{\sigma_P^P}{c_P}.a_E^P.a_L^P$$

$$\frac{\partial a_E^P}{\partial p_K} = \frac{\partial a_K^P}{\partial p_E} = \frac{\sigma_P^P}{c_P}.a_E^P.a_K^P$$

$$\frac{\partial a_L^P}{\partial p_K} = \frac{\partial a_K^P}{\partial p_L} = \left[\frac{\sigma_P^P}{c_P} + \frac{\sigma_N^P - \sigma_P^P}{c_N} \right].a_L^P.a_K^P$$

$$\frac{\partial a_E^P}{\partial p_E} = \left[\frac{\sigma_P^P}{c_P} + \frac{-\sigma_P^P}{c_E} \right].\left(a_E^P \right)^2$$

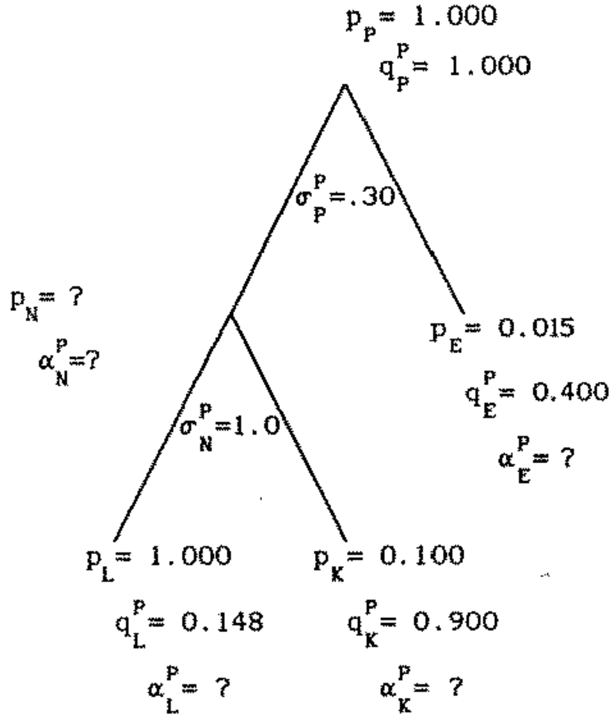
$$\frac{\partial a_L^P}{\partial p_L} = \left[\frac{\sigma_P^P}{c_P} + \frac{\sigma_N^P - \sigma_P^P}{c_N} + \frac{-\sigma_N^P}{c_L} \right].\left(a_L^P \right)^2$$

$$\frac{\partial a_K^P}{\partial p_K} = \left[\frac{\sigma_P^P}{c_P} + \frac{\sigma_N^P - \sigma_P^P}{c_N} + \frac{-\sigma_N^P}{c_K} \right].\left(a_K^P \right)^2$$

2.2 Calibragem

Para determinar os valores dos parâmetros (α), que indicam a participação relativa dos insumos na produção, utilizaremos a técnica da calibragem, que consiste em um processo de ajuste desses parâmetros da função produção para que o modelo consiga reproduzir a realidade observada.

Vamos por exemplo calcular as participações relativas α_L^P, α_K^P, α_E^P, e α_N^P para a atividade de produção descrita na figura abaixo. Onde dispomos de informações como se pode ver a respeito dos preços e quantidades dos insumos observados no mercado. As elasticidades de substituição σ_N^P e σ_P^P são geralmente determinadas econometricamente.



No nosso caso consideramos $\sigma_N^P = 1.$ e $\sigma_P^P = .3$. Esses dados foram extraídos da literatura.

O algoritmo de calibragem consiste em:

Passo 1: Percorrer a árvore das folhas para a raiz calculando o custo mínimo de cada nó_i:

$$c_i = \begin{cases} p_i q_i & \text{se o nó}_i \text{ é uma folha,} \\ \sum_{k=1}^{n} c_k & \text{se o nó}_i \text{ tem } n \text{ descendentes.} \end{cases}$$

e o preço de cada nó_i com n descendentes:

$$p_i = \begin{cases} \prod_{k=1}^{n} \left(\dfrac{p_k}{(c_k/c_i)} \right)^{(c_k/c_i)} & \text{para} \quad \sigma=1 \\ 1 & \text{para} \quad \sigma\neq 1 \end{cases}$$

Passo 2: Percorrer a árvore da raiz para as folhas calculando os alfas:

$$
\alpha_i = \begin{cases} \left(\left(\dfrac{c_i}{c_r} \right) \left(\dfrac{p_i}{p_r} \right)^{(\sigma_r - 1)} \right)^{(1/\sigma_r)} & \text{para} \quad \sigma_r \neq 1 \\ c_i / c_r & \text{para} \quad \sigma_r = 1 \end{cases}
$$

onde o nó i é descendente do nó r.

Os valores obtidos após a resolução são:

$$p_N = .81256$$

$$\alpha^P_L = .62185 \quad , \quad \alpha^P_K = .37815 \quad , \quad \alpha^P_E = .07791 \quad \text{e} \quad \alpha^P_N = 1.49382$$

2.3 Resolução de modelos EGA

Nosso modelo será resolvido através de uma seqüência de *problemas de complementaridade linear.*

A técnica de resolução por complementaridade foi desenvolvida por Mathiesen [9].

Apresentamos abaixo o arquivo de entrada do PEGASUS [3]:

```
DECLARAR:
  MODELO= "CASO BASE"
  BENS= TRABALHO, CAPITAL, ENERGIA, PRODUTO
  ATIVIDADES= PRODUCAO
  CONSUMIDOR= MERCADO
  ARVORES= A1, A2
  NUMERARIO= PRODUTO
DEFINIR:
  ARVORES:
    A1:
      ELEMENTOS= L1, K1, N1, E1, P1
      RELACOES:
        N1= L1, K1
        P1= N1, E1
    A2:
      ELEMENTOS= L2, P2, C2
      RELACAO: C2= L2, P2
  ATIVIDADES:
    PRODUCAO:
      A1:
```

```
        PRODUTO= P1, TRABALHO= L1, CAPITAL= K1, ENERGIA= E1
        ALFAS:
          L1= .62185,  K1= .37815,  N1= 1.49382,  E1= .07791
        SIGMAS:
          N1=1.,  P1= .3
  DEMANDA:
    MERCADO:
      DOTACOES:
        TRABALHO= .209
        CAPITAL= .9
        ENERGIA= .4
      A2:
        TRABALHO= L2, PRODUTO= P2
        ALFAS:
          L2= .2,  P2= .8
        SIGMA:  C2= 1.
  LIMITES:
    INFERIOR:
      TRABALHO= 1.E-10, CAPITAL= 1.E-10, ENERGIA= 1.E-10
      PRODUTO= 1.E-10
INICIALIZAR:
  PRECOS:
    TRABALHO= 1., CAPITAL= .1, ENERGIA= .015, PRODUTO= 1.
  NIVEL:
    PRODUCAO= .244
CONTROLE:
  APROX= .00001, RESULT= 1, LISTAGEM= 1
  EXECUTAR
```

A sua solução é mostrada a seguir. Como esperavamos, os preços e niveis de equilibrio correspondem aos valores encontrados na calibragem.

```
*** PEGASUS 0.92 ***   CASO BASE                              [115]
 LINEARIZACAO: ITERACAO           1
 MILES:            7 ITERACOES, SOLUCAO:C
 RESULTADOS NA ITERACAO           1
   ATIVIDADE              NIVEL          LUCRO
  1       PRODUCAO          .2440           .8370E-10

     BEM                PRECO          OFERTA          DEMANDA
  1       TRABALHO          1.000          .6100E-01        .6100E-01
  2       CAPITAL           .1000          .2778E-10        .0000
  3       ENERGIA           .1500E-01     -.1603E-08        .0000
  4       PRODUTO           1.000          .2440            .2440
 **************************************
 *******   PONTO DE EQUILIBRIO   ********
 **************************************
NIVEIS E PRECOS DA ITERACAO  1 EM EQUILIBRIO
                                  COM PRECISAO .100000E-04
                             TEMPO   0 minutos e 38 segundos
```

O que aconteceria se houvesse uma redução nas dotações de energia dentro de uma economia? Podemos simular uma situação desse tipo. O modelo abaixo apresenta uma redução de 25%, pois as dotações de energia são agora 0,3. O resultado é denominado de análise contrafatual (estática comparativa numérica).

```
DECLARAR:
  MODELO= "CHOQUE NA OFERTA DE ENERGIA"
  BENS= TRABALHO, CAPITAL, ENERGIA, PRODUTO
  ATIVIDADES= PRODUCAO
  CONSUMIDOR= MERCADO
  ARVORES= A1, A2
  NUMERARIO= PRODUTO
DEFINIR:
  ARVORES:
    A1:
      ELEMENTOS= L1, K1, N1, E1, P1
      RELACOES:
        N1= L1, K1
        P1= N1, E1
    A2:
      ELEMENTOS= L2, P2, C2
      RELACAO: C2= L2, P2
  ATIVIDADES:
    PRODUCAO:
      A1:
        PRODUTO= P1, TRABALHO= L1, CAPITAL= K1, ENERGIA= E1
        ALFAS:
          L1= .62185, K1= .37815, N1= 1.49382, E1= .07791
        SIGMAS:
          N1=1., P1= .3
  DEMANDA:
    MERCADO:
      DOTACOES:
        TRABALHO= .209
        CAPITAL= .9
        ENERGIA= .3
      A2:
        TRABALHO= L2, PRODUTO= P2
        ALFAS:
          L2= .2, P2= .8
        SIGMA: C2= 1.
  LIMITES:
    INFERIOR:
      TRABALHO= 1.E-10, CAPITAL= 1.E-10, ENERGIA= 1.E-10
      PRODUTO= 1.E-10
INICIALIZAR:
  PRECOS:
    TRABALHO= 1., CAPITAL= .1, ENERGIA= .015, PRODUTO= 1.
  NIVEL:
```

```
    PRODUCAO= .244
CONTROLE:
  APROX= .00001, RESULT= 1, LISTAGEM= 1
  EXECUTAR
```

Os preços e níveis no equilíbrio são os seguintes:

```
*** PEGASUS 0.92 ***  CHOQUE NA OFERTA DE ENERGIA         [115]
 LINEARIZACAO: ITERACAO         4
 MILES:            1 ITERACOES, SOLUCAO:C
 RESULTADOS NA ITERACAO         4
   ATIVIDADE              NIVEL          LUCRO
  1       PRODUCAO          .2406           .1788E-07

    BEM                 PRECO          OFERTA          DEMANDA
  1       TRABALHO          .9704           .6199E-01       .6199E-01
  2       CAPITAL          .9639E-01      .4076E-08       .0000
  3       ENERGIA          .3735E-01      -.1479E-06      .0000
  4       PRODUTO          1.000           .2406           .2406
****************************************
 *******  PONTO DE EQUILIBRIO  ********
****************************************
NIVEIS E PRECOS DA ITERACAO  4 EM EQUILIBRIO
                                   COM PRECISAO .100000E-04
                              TEMPO   1 minutos e 11 segundos
```

Note que houve uma redução no nível da atividade econômica. Os preços de trabalho e capital também sofreram uma pequena redução. No entanto o preço de energia subiu 149%. Esse resultado é conseqüência da elasticidade de substituição entre o agregado trabalho/capital e energia ser pequena, $\sigma^p_p = 0,3$.

CAPÍTULO 3

TRANSFORMANDO DEMANDA CRS EM ATIVIDADE ARTIFICIAL

Este capítulo inicia a segunda parte deste trabalho e a partir dele começa efetivamente a exposição dos assuntos por nós estudados.

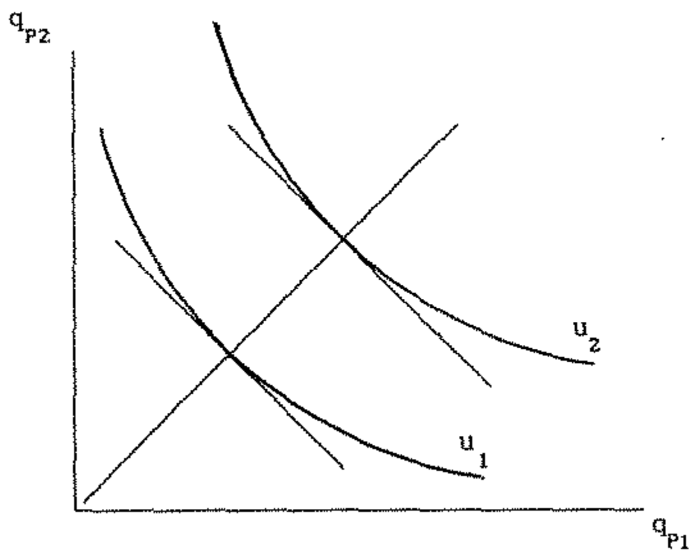
Uma função y=f(x) exibe retornos constantes à escala, isto é, y é CRS, quando as condições abaixo são satisfeitas:

(1) $x \in \mathbb{D} \Rightarrow t.x \in \mathbb{D}, \quad \forall\ t > 0$, onde $\mathbb{D}$ é o domínio da f.

(2) $y \in \mathbb{I} \Rightarrow t.y \in \mathbb{I}, \quad \forall\ t > 0$, onde $\mathbb{I}$ é a imagem da f.

(3) f(x) é homogênea de grau 1.

Isto faz com que o gráfico das curvas de indiferença do consumidor apresente a propriedade da homotetia sendo portanto do seguinte tipo:



A função utilidade correspondente à estrutura CES recorrente indicada na Figura 2, que mostra o consumo do macrobem P1 e do macrobem P2, em quantidades q^C_{P1} e q^C_{P2}, é derivada do consumo aparente do agregado C, dado por

$$q_C^C = \left[\alpha_{P1}^C \left(q_{P1}^C\right)^{\rho_C^C} + \alpha_{P2}^C \left(q_{P2}^C\right)^{\rho_C^C} \right]^{1/\rho_C^C}$$

O parâmetro $\sigma_C^C = 1/(1-\rho_C^C)$ é a elasticidade de substituição entre os bens destinados ao consumo e se σ_C^C for igual a um estaremos diante de uma função utilidade do tipo Cobb-Douglas onde o α_{P1}^C e α_{P2}^C representam, respectivamente, as preferências do consumidor para o bem P_1 e P_2.

A demanda atual q_{P1}^C e q_{P2}^C podem ser determinadas pelas quantidades de P_1 e P_2 usadas como insumo em uma atividade artificial que produz uma cesta de consumo C ao nível $q_C^C = Y^C/p_C$, onde Y^C é a renda do consumidor. Notemos portanto que preferências CES recorrentes podem ser representadas por uma função utilidade Cobb-Douglas reduzida.

Sendo a função CES homotética, as quantidades dos insumos dependem linearmente do nível da atividade.

Dotações são atribuidas para o consumidor representativo da economia C tendo as quantidades w_L^C, w_K^C, e w_E^C, de trabalho, capital, e energia, respectivamente.

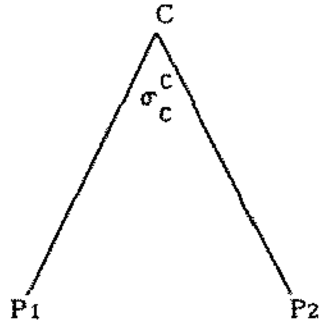


Figura 2: *Preferências CES*. As preferências do consumidor são representadas pela árvore. O macrobem P_1 é combinado com o macrobem P_2 para produzir o consumo agregado final $C = P_1/P_2$.

Imaginemos um modelo bem simples de uma economia fechada onde existe um

(1) agente, o consumidor (C), e cinco (5) bens, sendo três (3) insumos, capital (K), trabalho (L), e energia (E), e dois (2) produtos (P_1 e P_2).

Vamos supor ainda que as produções de P_1 e P_2 sejam dadas por funções do tipo CES Recorrente semelhantes (colocaremos de forma genérica P) a apresentada pela Figura 1. Com $\sigma^P_P = .30$ (elasticidade de substituição entre os bens E e N) e $\sigma^P_N = 1.00$ (elasticidade de substituição entre os bens L e K) na produção de P. Que a demanda seja dada por uma atividade Cobb-Douglas como mostra a Figura 2, onde o agente decide entre consumir P_1 ou P_2, tendo por elasticidade de substituição entre esses bens: $\sigma^C_C = 1.00$

Isto nos dá o seguinte modelo:

MATRIZ 1

Ativ / Bens	y_1	y_2	$\geq$ DEM - DOT	: PREÇOS
L	$-a^{P1}_L$	$-a^{P2}_L$	$-L$	$w \geq 0$
K	$-a^{P1}_K$	$-a^{P2}_K$	$-K$	$r \geq 0$
E	$-a^{P1}_E$	$-a^{P2}_E$	$-E$	$p \geq 0$
P_1	1		$\alpha^C_{P1} . Y_C / \pi_1$	$\pi_1 \geq 0$
P_2		1	$\alpha^C_{P2} . Y_C / \pi_2$	$\pi_2 \geq 0$

$$a^{P1}_L . w + a^{P1}_K . r + a^{P1}_E . p - \pi_1 \geq 0 : y_1 \geq 0$$

$$a^{P1}_L . w + a^{P1}_K . r + a^{P1}_E . p - \pi_2 \geq 0 : y_2 \geq 0$$

Onde:

$$Y_C = w.L + r.K + p.E$$

Trabalhando com a demanda como atividade artificial teremos:

MATRIZ 2

Ativ / Bens	y_1	y_2	y_{art}	≥ DEM - DOT	: PREÇOS
L	$-a_L^{P1}$	$-a_L^{P2}$		$-L$	$w \geq 0$
K	$-a_K^{P1}$	$-a_K^{P2}$		$-K$	$r \geq 0$
E	$-a_E^{P1}$	$-a_E^{P2}$		$-E$	$p \geq 0$
P1	1		$-a_{P1}^{art}$	0	$\pi_1 \geq 0$
P2		1	$-a_{P2}^{art}$	0	$\pi_2 \geq 0$
P_{art}			1	Y_C/π_{art}	$\pi_{art} \geq 0$

$$a_L^P w + a_K^P r + a_E^P p - \pi_1 \geq 0 : y_1 \geq 0$$

$$a_L^P w + a_K^P r + a_E^P p - \pi_2 \geq 0 : y_2 \geq 0$$

$$a_{P1}^{art}\pi_1 + a_{P2}^{art}\pi_2 - \pi_{art} \geq 0 : y_{art} \geq 0$$

Onde:

$$Y_C = w.L + r.K + p.E$$

Note que na matriz de insumo-produto para cada consumidor aparecem uma coluna e uma linha artificiais que representam a cesta de consumo do agente e no ponto de equilíbrio nós temos $y_{art} = Y_C/\pi_{art}$, que é chamado consumo aparente do consumidor C.

Nesse exemplo dado pelas árvores das Figuras 1 e 2 e descrito pela matriz 2, as condições de equilíbrio para mercado aberto e o lucro excedente são portanto:

$$
\begin{array}{llllll}
-a_L^{P1}.y^{P1} & -a_L^{P2}.y^{P2} & & \geq -L & & : \; w \geq 0; \\
-a_K^{P1}.y^{P1} & -a_K^{P2}.y^{P2} & & \geq -K & & : \; r \geq 0; \\
-a_E^{P1}.y^{P1} & -a_E^{P2}.y^{P2} & & \geq -E & & : \; p \geq 0; \\
y^{P1} & & -a_{P1}^{art}.y^{art} \geq & & 0 & : \; \pi 1 \geq 0; \\
 & y^{P2} & -a_{P2}^{art}.y^{art} \geq & & 0 & : \; \pi 2 \geq 0; \\
 & & y^{art} \geq & & x_C & : \; \pi_{art} \geq 0;
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
w.a_L^{P1} + r.a_K^{P1} + p.a_E^{P1} - \pi 1 \geq 0 & : \; y^{P1} \geq 0; \\
w.a_L^{P2} + r.a_K^{P2} + p.a_E^{P2} - \pi 2 \geq 0 & : \; y^{P2} \geq 0; \\
\pi 1.a_{P1}^{art} + \pi 2.a_{P2}^{art} - \pi_{art} \geq 0 & : \; y^{art} \geq 0,
\end{array}
$$

onde y^{P1}, y^{P2} e y^{art} são os níveis das atividades que produzem P_1, P_2 e C respectivamente, e $x_C = Y_C/\pi_{art}$ é a demanda aparente para o consumidor representativo. As demandas de P_1 e P_2 são, respectivamente, $x_{P1}^{C} = a_{P1}^{art}.y^{art}$ e $x_{P2}^{C} = a_{P2}^{art}.y^{art}$. Bem como a renda do consumidor é dada por $Y_C = w.L + r.K + p.E$.

Uma interpretação econômica para o uso da atividade artificial está no fato de podermos imaginar que cada consumidor constrói para si uma cesta de consumo e devota toda sua renda para esse consumo em bloco.

Do ponto de vista do cálculo de equilíbrio econômico essa modificação é muito importante, sem ela seria impossível fazermos distorções nos preços dos bens para o consumo.

Podemos generalizar a idéia de que qualquer função utilidade CES recorrente pode ser representada através de uma atividade artificial, bastando para isso fazermos uma analogia entre as teorias da firma e do consumidor.

Seja $u(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ uma função utilidade CES recorrente, onde $x_1,x_2,\ldots,x_m$ são as quantidades consumidas de m bens.

Queremos mostrar que a solução de

$$\begin{cases} \text{Max} \quad u(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ \text{s/a} \quad p_1.x_1 + p_2.x_2 + \ldots + p_m.x_m \leq Y , \end{cases}$$

onde $p_1, p_2, \ldots, p_m$ são os preços (dados exogenamente) dos m bens e Y é a renda do consumidor, pode ser representada pela atividade artificial

$$\begin{array}{c|c|c|c|l}
 & y & & & \\
 & -a_1 & & & \\
 & -a_2 & & & \\
 & \vdots & & & \\
 & -a_m & & & \\
\hline
 & 1 & & Y/\Pi & : \ \Pi \geq 0 \\
\hline
 & & & &
\end{array}$$

onde $y = \dfrac{Y}{\Pi}$ é o nível máximo de utilidade propiciado por Y e $a_1.y$, $a_2.y, \ldots, a_m.y$ são as demandas dos m bens envolvidos. Note que a função CES recorrente é transformada numa utilidade Cobb-Douglas simplificada.

Por simplicidade, vamos considerar que a função utilidade tenha somente dois argumentos.

Seja o problema

$$\begin{cases} \text{Min} \quad p_1.x_1 + p_2.x_2 \\ \text{s/a} \quad u(x_1, x_2) = 1 \end{cases}$$

A solução desse problema indicada na Figura 3, é (a_1, a_2).

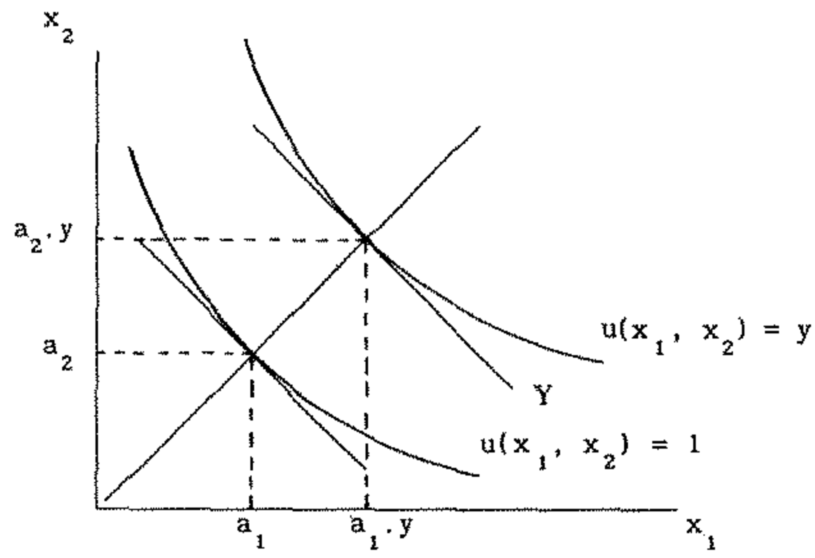


Figura 3: *Demanda como Atividade Artificial.* O ponto (a_1, a_2) maximiza a função utilidade a nível unitário.

Observe que o problema acima é equivalente a encontrar quantidades x_1 e x_2 de dois insumos de forma a minimizar o custo de se produzir a quantidade $u(x_1, x_2) = 1$. Por analogia com a teoria da firma, u seria a função de produção.

Note que (a_1, a_2) é também solução de

$$\begin{cases} \text{Max} \quad u(x_1, x_2) \\ \text{s/a} \quad p_1.x_1 + p_2.x_2 = p_1.a_1 + p_2.a_2 \end{cases}$$

Como u apresenta retornos constantes, a solução de

$$\begin{cases} \text{Max} \quad u(x_1, x_2) \\ \text{s/a} \quad p_1.x_1 + p_2.x_2 = Y \end{cases}$$

é $(a_1.y, a_2.y)$, onde y é a utilidade máxima obtida neste problema. (Varian [14], pág 28).

Então, como $(a_1.y,\ a_2.y)$ é factível para o problema acima, $(p_1.a_1 + p_2.a_2).y = Y$, e, portanto,

$$y = \frac{Y}{p_1.a_1 + p_2.a_2}$$

A condição que impede lucros excedentes para a atividade artificial $\left[\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ 1\ \right]^T$ fornece $p_1.a_1 + p_2.a_2 = \Pi$. O valor de Π corresponde à função dispêndio $v(p_1,\ p_2,\ Y)$.

Assim, $y = \dfrac{Y}{\Pi}$ na solução ótima, conforme queríamos demonstrar. O nível y indica a quantidade de consumo aparente de uma cesta formada pelos dois bens.

Capítulo 4

Distorções

Uma economia real está freqüentemente sujeita a restrições institucionais, tais como rigidez de preços, balanço de pagamentos, tarifas, quotas e limitações sobre preços.

As extensões feitas no PEGASUS acomodam modelos de equilíbrio geral aplicado (EGA) com excedentes gerados na produção, como é o caso de impostos e *mark-up* (margem de lucro). São também permitidas restrições sobre preços relativos, gerando subsídios ou tarifas endógenos que vão racionar ou estimular a produção ou, ainda, racionar as dotações dos consumidores. Esses fatos estendem o modelo neoclássico e são essenciais para muitas aplicações empíricas dos modelos de EGA (Rutherford, [12]).

Se uma economia apresenta um único equilíbrio walrasiano, e acrescentamos a ela uma restrição institucional, que não é satisfeita pelo equilíbrio já existente, teremos formado um novo modelo que será infactível. No entanto, se o multiplicador (variável dual associada à restrição adicional) for usado para distorcer os preços de uma ou mais atividades, ou mesmo as dotações dos consumidores, nós poderemos encontrar uma nova solução factível. Dizemos que a economia foi distorcida para acomodar uma restrição institucional.

4.1 Restrições

PEGASUS até o momento resolve modelos com restrições adicionais que são combinações dos termos apresentados abaixo:

(1) Termos simples:

são compostos por uma constante vezes o preço de um bem, ou seja, $\alpha.p_i$.

(2) Termos valor de produção:

são compostos por uma constante vezes o preço de um bem vezes o nível de uma atividade vezes o coeficiente desse bem nessa atividade, ou seja, $\beta.p_i.y_j.a_{ij}$.

(3) Termos bilineares:

são compostos por uma constante vezes o preço de um bem vezes uma variável auxiliar, ou seja, $\gamma.p_i\mu_k$.

(4) Termos valor de produção bilinear:

são compostos por uma constante vezes o preço de um bem vezes o nível de uma atividade vezes o coeficiente desse bem nessa atividade vezes uma variável auxiliar, ou seja, $\delta.p_i.y_j.a_{ij}.\mu_k$.

Observe que os coeficientes a_{ij} utilizados nos termos valor de produção, independente do fato de serem insumos ou produtos, são sempre quantidades positivas. Note, também, que $y_j.a_{ij}$ é a quantidade total do bem i usado na atividade j. Assim, $p_i.y_j.a_{ij}$ é o dispêndio do bem i na atividade j.

A essas restrições são associadas variáveis μ_i positivas. Apenas quando a restrição for ativa nós teremos μ_i estritamente positiva. Em alguns casos, internamente ao programa usamos $-\mu_i$ para fazer a distorção da economia.

Para ilustrar as aplicações dessas restrições, nos próximos itens apresentaremos alguns exemplos de modelos que as utilizam.

4.2 Distorção de Preços

Imaginemos um modelo bem simples de uma economia fechada onde existe um (1) agente, o consumidor, e quatro (4) bens, sendo três (3) insumos, capital (K), trabalho (L), e energia (E), e um (1) produto (P) que pode ser consumido pelo agente.

Existe também uma restrição que exige que a taxa salarial não pode ser inferior a $\bar{w}.\pi$.

Vamos supor ainda que a produção de P seja dada pela função do tipo CES recorrente descrita pela Figura 1 com $\sigma^P_P = .30$ e $\sigma^P_N = 1.00$. Seja a demanda de tal forma que o agente possa consumir L em forma de lazer (desemprego voluntário) e P também numa atividade Cobb-Douglas, ou seja,

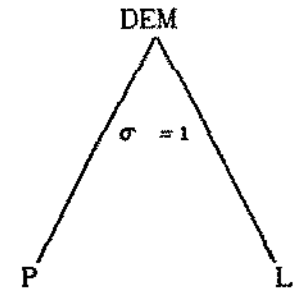


Figura 4: *Preferências CES e Desemprego Voluntário.* O agente decide consumir L em forma de lazer, caso a taxa salarial não atinja um determinado nível, que denotaremos por $\bar{w}$, em relação ao numerário.

Isto nos dá o seguinte modelo:

Bens \ Ativ	$\geq$ y	DEM - DOTAÇÃO	: PREÇOS
L	$-a^P_L$	$-L + \alpha^C_L . Y_E / w$	$w \geq 0$
K	$-a^P_K$	$-K$	$r \geq 0$
E	$-a^P_E$	$-E$	$p \geq 0$
P	1	$\alpha^C_P . Y_E / \pi$	$\pi \geq 0$

$$(1-\mu).a^P_L w + a^P_K r + a^P_E p - \pi \geq 0 \; ; \; y \geq 0$$

$$w - \bar{w}.\pi \geq 0 \; : \; \mu \geq 0$$

Trabalhando com a demanda como atividade artificial teremos:

Bens \ Ativ	y	$\geq$ y_{art}	DEM - DOTAÇÃO	: PREÇOS
L	$-a^P_L$	$-a^{art}_L$	$-L$	$w \geq 0$
K	$-a^P_K$		$-K$	$r \geq 0$
E	$-a^P_E$		$-E$	$p \geq 0$
P	1	$-a^{art}_P$	0	$\pi \geq 0$
P_{art}		1	Y_E / π_{art}	$\pi_{art} \geq 0$

$$(1-\mu)a_L^P w + a_K^P r + a_E^P p - \qquad \pi \qquad \geq 0 : y \quad \geq 0$$

$$a_L^{art} w \qquad\qquad + a_P^{art}\pi - \pi_{art} \geq 0 : y_{art} \geq 0$$

$$w - \bar{w}.\pi \geq 0 : \mu \geq 0$$

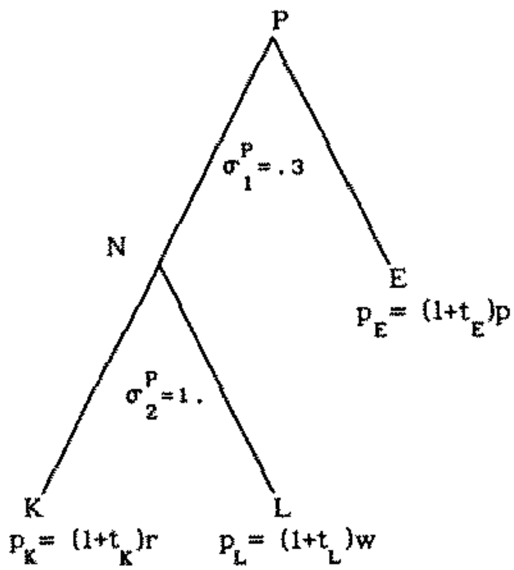
onde $Y_E = w.L + r.K + p.E - \mu.(w.a_L^P.y)$

Observe que se μ for usado para subsidiar a economia seu valor não pode exceder a um (1), já no caso do μ ser usado como tarifa, ou seja, ágio, pode assumir qualquer valor real positivo.

Note ainda que, como os valores dos a's dependem dos preços, quando trabalhamos com uma economia com preços distorcidos o cálculo dos a's se modifica, causando depois modificações nas derivadas e conseqüentemente, modifica-se o jacobiano.

Vejamos como ficarão as novas derivadas:

Dada a árvore:



$$\frac{\partial a^L}{\partial r} = \frac{\partial a^L}{\partial p^L}(1 + t_L) \qquad \frac{\partial a^K}{\partial r} = \frac{\partial a^K}{\partial p^L}(1 + t_L) \qquad \frac{\partial a^E}{\partial r} = \frac{\partial a^E}{\partial p^L}(1 + t_L)$$

$$\frac{\partial a^L}{\partial w} = \frac{\partial a^L}{\partial p^K}(1 + t_K) \qquad \frac{\partial a^K}{\partial w} = \frac{\partial a^K}{\partial p^K}(1 + t_K) \qquad \frac{\partial a^E}{\partial w} = \frac{\partial a^E}{\partial p^K}(1 + t_K)$$

$$\frac{\partial a^L}{\partial p} = \frac{\partial a^L}{\partial p^E}(1 + t_E) \qquad \frac{\partial a^K}{\partial p} = \frac{\partial a^K}{\partial p^E}(1 + t_E) \qquad \frac{\partial a^E}{\partial p} = \frac{\partial a^E}{\partial p^E}(1 + t_E)$$

4.2.1 Resolução

Para esse modelo o arquivo de entrada será:

```
DECLARAR:
  MODELO= "RIGIDEZ SALARIAL: SUBSIDIO"
  BENS= TRABALHO, CAPITAL, ENERGIA, PRODUTO
  ATIVIDADES= PRODUCAO
  CONSUMIDOR= MERCADO
  AUXILIAR= SUBSIDIO
  ARVORES= A1, A2
  NUMERARIO= PRODUTO
DEFINIR:
  ARVORES:
    A1:
      ELEMENTOS= L1, K1, N1, E1, P1
      RELACOES:
        N1= L1, K1
        P1= N1, E1
    A2:
      ELEMENTOS= L2, P2, C2
      RELACAO: C2= L2, P2
  ATIVIDADES:
    PRODUCAO:
      A1:
        PRODUTO= P1, TRABALHO= L1, CAPITAL= K1, ENERGIA= E1
        ALFAS:
          L1= .62185, K1= .37815, N1= 1.49382, E1= .07791
        SIGMAS:
          N1=1., P1= .3
  DEMANDA:
    MERCADO:
      DOTACOES:
        TRABALHO= .209
        CAPITAL= .9
        ENERGIA= .4
      A2:
        TRABALHO= L2, PRODUTO= P2
        ALFAS:
```

```
        L2= .2, P2= .8
      SIGMA: C2= 1.
  RESTRICAO:
    SUBSIDIO:
      TRABALHO= 1.
      PRODUTO= -1.1
  DISTORCOES:
    PRECOS:
      MERCADO:
        PRODUCAO:
          TRABALHO= SUBSIDIO
  LIMITES:
    INFERIOR:
      CAPITAL= 1.E-10, TRABALHO= 1.E-10, ENERGIA= 1.E-10
      PRODUTO= 1.E-10
INICIALIZAR:
  PRECOS:
    CAPITAL= .1, TRABALHO= 1., ENERGIA= .015, PRODUTO= 1.
  NIVEL:
    PRODUCAO= .244
  MULTIPLICADOR:
    SUBSIDIO= .1
CONTROLE:
  APROX= .00001, RESULT= 1, LISTAGEM= 1
  EXECUTAR
```

e teremos como solução:

```
*** PEGASUS 0.92 ***  RIGIDEZ SALARIAL: SUBSIDIO        [115]
 LINEARIZACAO: ITERACAO          3
 MILES:          1 ITERACOES, SOLUCAO:C
 RESULTADOS NA ITERACAO          3
  ATIVIDADE          NIVEL        LUCRO
  1      PRODUCAO       .2485          .5422E-08

     BEM              PRECO        OFERTA        DEMANDA
  1      TRABALHO        1.100          .5648E-01    .5648E-01
  2      CAPITAL         .1017         .5984E-09    .0000
  3      ENERGIA         .1594E-01   -.8010E-07    .0000
  4      PRODUTO         1.000          .2485         .2485

   RESTRICAO   MULTIPLICADOR   VALOR
  1      SUBSIDIO        .1026          .0000
 ****************************************
 *******  PONTO DE EQUILIBRIO  ********
 ****************************************
NIVEIS E PRECOS DA ITERACAO  3 EM EQUILIBRIO
                                 COM PRECISAO .100000E-04
                          TEMPO  1 minutos e 04 segundos
```

4.2.2 Generalização

Modelo com restrições institucionais e distorção de preços:

$$
\begin{aligned}
w + A(p,\mu).y - x(p,y,\mu) &\geq 0 \quad &: \quad p\geq 0\\
-A^T(p,\mu).p &\geq 0 \quad &: \quad y\geq 0\\
Rest(p,y,\mu) &\geq 0 \quad &: \quad \mu\geq 0
\end{aligned}
$$

Para que esse modelo possa ser resolvido como PCL temos que linearizar: $A(p,\mu)y$, $x(p,y,\mu)$, $p^TA(p,\mu)$ e $Rest(p,y,a,\mu)$.

O jacobiano será descrito pela matriz abaixo:

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
\dfrac{\partial(Ay)}{\partial p} - \dfrac{\partial(x)}{\partial p} & \dfrac{\partial(Ay)}{\partial y} - \dfrac{\partial(x)}{\partial y} & \dfrac{\partial(Ay)}{\partial \mu} - \dfrac{\partial(x)}{\partial \mu} \\[2ex]
\dfrac{\partial(-p^T.A)}{\partial p} & 0 & \dfrac{\partial(-p^T.A)}{\partial \mu} \\[2ex]
\dfrac{\partial(Rest)}{\partial p} & \dfrac{\partial(Rest)}{\partial y} & \dfrac{\partial(Rest)}{\partial \mu}
\end{bmatrix}}_{M}
\,.\,
\underbrace{\begin{bmatrix} p \\[2ex] y \\[2ex] \mu \end{bmatrix}}_{z}
\;\geq\;
\underbrace{\begin{bmatrix}
x(p,y,\mu) - w + \dfrac{\partial(Ay)}{\partial \mu}\mu - \dfrac{\partial x}{\partial y}y - \dfrac{\partial x}{\partial \mu}\mu \\[2ex]
\displaystyle\sum_{K=1}^{nrest} \dfrac{\partial(-p^T.A)}{\partial \mu^K}\mu^K \\[2ex]
- Rest + \displaystyle\sum_{K=1}^{m+n+nrest} \dfrac{\partial(Rest)}{\partial z^K} z^K
\end{bmatrix}}_{q}
$$

4.3 Distorção de Dotações

Imaginemos um modelo de uma economia fechada com dois (2) consumidores, o empregado (E) e o inativo (I) e, quatro (4) bens, sendo três (3) insumos (K,L,E) para a produção do quarto bem (P).

Digamos que a atividade de produção seja definida pela função CES Recorrente descrita na Figura 1, onde a elasticidade de substituição $\sigma^{P}_{N} = 1.0$ e $\sigma^{P}_{P} = 0.3$.

Consideremos que o consumidor empregado tem sua demanda descrita pela Figura 4 com $\sigma^{C}_{E} = 1.0$, $\alpha^{E}_{P} = 0.8$ e $\alpha^{E}_{L} = 0.2$.

Sabemos que se a oferta de mão-de-obra é maior do que a demanda, o remuneração do trabalho deve cair e a medida que esse preço vai caindo vamos tendo uma substituição na escolha dos insumos na produção de forma que a demanda vai se tornando cada vez mais próxima da oferta até atingir a igualdade.

Mas considere que existe na economia uma restrição que força o preço de mão-de-obra a ser superior a um determinado preço mínimo. Com a existência dessa restrição adicional teríamos um modelo infactível. Nosso objetivo é então determinar qual o percentual (variável dual associada à restrição adicional) de trabalhadores que deverá ser retirado da economia para que o preço de mão-de-obra encontre-se no nível estabelecido na restrição.

O que nós estamos chamando aqui de inativo é na verdade o consumidor que representará essa parte da população que é retirada do mercado de trabalho contra a sua vontade, trata-se de um desemprego involuntário. Esse consumidor inativo continua tendo dotações de todos os bens da economia (exceto trabalho) que ainda entram na produção, e com a renda gerada ainda pode consumir o bem que está sendo produzido. Sua demanda será do tipo abaixo, onde ele devotará toda a sua renda ao consumo.

Demanda do Consumidor Inativo

Resumindo, temos o seguinte quadro:

Matriz de atividades:

Bens \ Ativ	$\geq$ y	DEM - DOTAÇÃO	: PREÇOS
L	$-a_L^P$	$-L(1-\mu)+\alpha_L^E.Y_E/w$	$w \geq 0$
K	$-a_K^P$	$-K(1-\mu)-K\mu$	$r \geq 0$
E	$-a_E^P$	$-E(1-\mu)-E\mu$	$p \geq 0$
P	1	$\alpha_P^E.Y_E/\pi + Y_I/\pi$	$\pi \geq 0$

Lucro negativo ≥ 0 :

$a_L^P w + a_K^P r + a_E^P p - \pi \geq 0 : y \geq 0$

Restrição:

$w - 1{,}1\pi \geq 0 : \mu \geq 0$

onde $Y_E = (1-\mu).(w.L + r.K + p.E)$

e $Y_I = \mu.(r.K + p.E)$

Note que nessa restrição não temos nenhum limite superior para o valor de μ. Isto faz com que no caso da restrição ser muito forte, o problema linearizado que será resolvido iterativamente possa ter um multiplicador maior que um (1), o que representaria um desemprego superior a cem por cento (100%) e causaria problemas numéricos irrecuperáveis. Esse problema ocorreria apenas durante a resolução da seqüência de problemas de complementaridade linear, pois após a convergência, por mais exigente que seja a restrição, ela será atendida, dada a factibilidade da solução. Para resolver esse problema no lugar da restrição descrita acima colocaremos as que apresentamos abaixo:

Restrições:

$$\begin{aligned} w - 1{,}1\pi \quad + \lambda &\geq 0 : \mu \geq 0 \\ -\mu \quad &\geq -1 : \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

Observe que:

Se $\mu = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ e temos um modelo sem distorção, o que chamamos básico.

Se $0 < \mu < 1 \Rightarrow \lambda = 0$ e temos uma solução com distorção.

Se $\mu = 1 \Rightarrow \lambda$ é liberado $\Rightarrow$ $w - 1{,}1\pi + \lambda = 0$ $\Rightarrow$ $w - 1{,}1\pi \leq 0$.

Desta forma λ funciona como uma variável artificial que permite que o sinal da função seja invertido quando a variável μ atingir seu limite superior (Ahn, [1]).

Isto pode ser entendido, também, fazendo-se a interpretação do Problema de Complementaridade como um Problema de Otimização (Zullo, [15]).

Um Problema de Complementaridade:

$$F(x) \geq 0 \quad : \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{16}$$

corresponde a:

$$\underset{0 \leq x \leq 1}{\text{Min}} \quad g(x) \tag{17}$$

onde

$$g(x) = \int_0^x F(\xi).d\xi \tag{18}$$

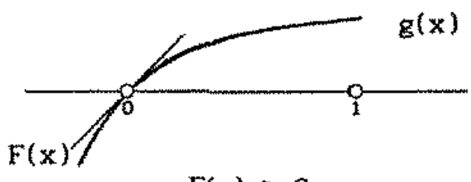
se F for integrável, isto é, se ∇F (o hessiano de g) for simétrico.

Se x não estivesse limitado a condição necessária de primeira (1ª) ordem seria:

$$\nabla g(x) = F(x) = 0$$

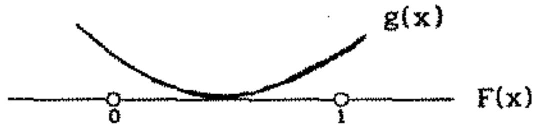
No entanto com x limitado podemos ter uma das hipóteses abaixo:

o Se o mínimo ocorrer em $x = 0$



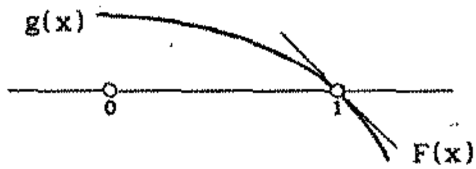
$F(x) \geq 0$

o Se o mínimo ocorrer em $0 < x < 1$



$F(x) = 0$

o Se o mínimo ocorrer em $x = 1$



$F(x) \leq 0$

ou seja:

$$\text{Se} \quad x = 0 \Rightarrow F(x) \geq 0 \tag{19}$$

$$\text{Se } 0 \leq x \leq 0 \Rightarrow F(x) = 0 \tag{20}$$

$$\text{Se} \quad x = 1 \Rightarrow F(x) \leq 0 \tag{21}$$

Note que a desigualdade (21) trocou de sinal. Colocando uma variável de folga $y \geq 0$ teremos:

$$F(x) + y = 0$$

Observe ainda que essa variável y será diferente de zero no caso de x atingir o valor 1, portanto podemos concluir que:

$$x \leq 1 \quad : \quad y \geq 0$$

e teremos então:

$$F(x) + y \geq 0 \quad : \quad x \geq 0 \tag{22}$$

$$-x \geq -1 \quad : \quad y \geq 0 \tag{23}$$

4.3.1 Resolução do exemplo:

O arquivo de entrada do Pegasus será:

```
DECLARAR:
  MODELO= "RIGIDEZ SALARIAL: DESEMPREGO"
```

```
  BENS= TRABALHO, CAPITAL, ENERGIA, PRODUTO
  ATIVIDADES= PRODUCAO
  CONSUMIDORES= EMPREGADO, INATIVO
  AUXILIAR= DESEMPREGO
  ARVORES= A1, A2, A3
  NUMERARIO= PRODUTO
DEFINIR:
  ARVORES:
    A1:
      ELEMENTOS= L1, K1, N1, E1, P1
      RELACOES:
        N1= L1, K1
        P1= N1, E1
    A2:
      ELEMENTOS= L2, P2, C2
      RELACAO: C2= L2, P2
    A3:
      ELEMENTOS= P3, C3
      RELACAO: C3= P3
  ATIVIDADES:
    PRODUCAO:
      A1:
        PRODUTO= P1, TRABALHO= L1, CAPITAL= K1, ENERGIA= E1
        ALFAS:
          L1= .62185, K1= .37815, N1= 1.49382, E1= .07791
        SIGMAS:
          N1=1., P1= .3
  DEMANDA:
    EMPREGADO:
      DOTACOES:
        TRABALHO= .209
        CAPITAL= .9
        ENERGIA= .4
      A2:
        TRABALHO= L2, PRODUTO= P2
        ALFAS:
          L2= .2, P2= .8
        SIGMA: C2= 1.
    INATIVO:
      DOTACOES:
        CAPITAL= .9
        ENERGIA= .4
      A3:
        PRODUTO= P3
        ALFA: P3= 1.
        SIGMA: C3= 1.
  RESTRICAO:
    DESEMPREGO:
      TRABALHO= 1.
      PRODUTO= -1.1
  DISTORCOES:
    DOTACOES:
      EMPREGADO:
```

```
        TRABALHO= DESEMPREGO
        CAPITAL= DESEMPREGO
        ENERGIA= DESEMPREGO
      INATIVO:
        CAPITAL= DESEMPREGO
        ENERGIA= DESEMPREGO
  LIMITES:
    INFERIOR:
      TRABALHO= 1.E-10, CAPITAL= 1.E-10, ENERGIA= 1.E-10
      PRODUTO= 1.E-10
INICIALIZAR:
  PRECOS:
    TRABALHO= 1., CAPITAL= .1, ENERGIA= .015, PRODUTO= 1.
  NIVEL:
    PRODUCAO= .244
  MULTIPLICADOR:
    DESEMPREGO= .1
CONTROLE:
  APROX= .00001, RESULT= 1, LISTAGEM= 1
  EXECUTAR
```

e obtemos como resposta:

```
*** PEGASUS 0.92 ***  RIGIDEZ SALARIAL: DESEMPREGO     [115]
 LINEARIZACAO: ITERACAO          4
 MILES:            1 ITERACOES, SOLUCAO:C
 RESULTADOS NA ITERACAO           4
   ATIVIDADE          NIVEL         LUCRO
  1       PRODUCAO        .2126          .5154E-10

     BEM              PRECO          OFERTA          DEMANDA
  1       TRABALHO        1.100          .4411E-01      .4411E-01
  2       CAPITAL        .8775E-01     .1203E-10      .0000
  3       ENERGIA        .9482E-02    -.1460E-08      .0000
  4       PRODUTO         1.000          .2126          .2126

   RESTRICAO   MULTIPLICADOR   VALOR
  1       DESEMPREGO      .2240          .0000
 ****************************************
 *******  PONTO DE EQUILIBRIO  ********
 ****************************************
NIVEIS E PRECOS DA ITERACAO  4 EM EQUILIBRIO
                                   COM PRECISAO .100000E-04
                          TEMPO   1 minutos e 17 segundos
```

Note que o nível de produção caiu de aproximadamente 8%, a remuneração do capital e o preço dos insumos energéticos também caíram enquanto o valor do trabalho atingiu exatamente o valor fixado na restrição.

Observe ainda que, nesse modelo, sendo a restrição de preço mínimo ativa estamos diante de um modelo de desemprego Clássico, que se caracteriza por um excesso de demanda de bens no mercado e um excesso de oferta de trabalhadores (Kehoe et al. [7]).

4.3.2 Generalização

Modelo com restrições institucionais e distorção de dotações:

$$
\begin{aligned}
w(\mu) + A(p).y - x(p,\mu) &\geq 0 \quad : \quad p \geq 0 \\
-A^T(p).p &\geq 0 \quad : \quad y \geq 0 \\
Rest(p,y,\mu) &\geq 0 \quad : \quad \mu \geq 0
\end{aligned}
$$

Para que esse modelo possa ser resolvido como PCL temos que linearizar: $w(\mu)$, $A(p)y$, $x(p,\mu)$, $p^T A(p)$ e $Rest(p,y,a,\mu)$.

O jacobiano será descrito pela matriz abaixo:

$$
M \quad . \quad z \quad \geq \quad q
$$

$$
\begin{bmatrix}
\frac{\partial(Ay)}{\partial p} - \frac{\partial(x)}{\partial p} & \frac{\partial(Ay)}{\partial y} & \frac{\partial(w)}{\partial \mu} - \frac{\partial(x)}{\partial \mu} \\
\frac{\partial(-p^T A)}{\partial p} & 0 & 0 \\
\frac{\partial(Rest)}{\partial p} & \frac{\partial(Rest)}{\partial y} & \frac{\partial(Rest)}{\partial \mu}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} p \\ y \\ \mu \end{bmatrix}
\geq
\begin{bmatrix}
x(p,\mu) - w(\mu) + \frac{\partial(w)}{\partial \mu}\mu - \frac{\partial(x)}{\partial \mu}\mu \\
0 \\
- Rest + \sum_{K=1}^{m+n+nrest} \frac{\partial(Rest)}{\partial z^K} z^K
\end{bmatrix}
$$

4.4 Distorção de Dotações com Transferências em Bloco

Nessa seção, não temos a pretensão de abordar certas questões que sabemos ser motivo de controvérsia na teoria econômica. Nossa intenção é apenas dar alguma informação a leitores não-economistas.

Tomemos como partida o modelo apresentado na Seção 4.3 e imaginemos que agora nós temos um novo agente na economia, que chamaremos governo. Esse consumidor não possui dotações próprias, mas tem o poder de retirar da economia uma parcela fixa da produção. Ou seja, ele estabelece que, por exemplo, 10% da produção do modelo base seja repassado para suas mãos e ele usará essa renda gerada integralmente no consumo do bem produzido pela economia.

Como será que a economia reage a isso? Será que o índice de desemprego apresentará alguma alteração?

Primeiro vamos entender a diferença entre desemprego voluntário e involuntário. Se ocorre desemprego num mercado livre, podemos dizer que ele provém de uma opção do trabalhador em reter seu trabalho em forma de lazer (como está sendo feito na demanda), pois o salário não lhe parece convidativo. Neste caso, estamos diante de um desemprego voluntário. Entretanto, se a economia apresenta uma rigidez na taxa salarial, a oferta de mão-de-obra poderá exceder sua demanda, o que poderá gerar o desemprego involuntário.

Vejamos inicialmente como ficará a nova matriz de atividades:

Ativ / Bens	$\geq$ y	DEM - DOTAÇÃO	: PREÇOS
L	$-a^P_L$	$-L(1-\mu)+\alpha^E_L . Y_E/w$	$w \geq 0$
K	$-a^P_K$	$-K(1-\mu)-K\mu$	$r \geq 0$
E	$-a^P_E$	$-E(1-\mu)-E\mu$	$p \geq 0$
P	1	$\alpha^E_P . Y_E/\pi + Y_I/\pi + g$	$\pi \geq 0$

Lucro negativo ≥ 0 :

$$a^P_L w + a^P_K r + a^P_E p - \pi \geq 0 : y \geq 0$$

Restrições:

$$w - 1{,}1\pi \quad + \lambda \geq 0 : \mu \geq 0$$

$$- \mu \quad \geq -1 : \lambda \geq 0$$

Onde λ permite a inversão do sinal da desigualdade.

E temos:

$$Y_E = (1-\mu).(w.L + r.K + p.E) - \pi.g$$

$$Y_I = \mu.(r.K + p.E)$$

$$Y_G = \pi.g$$

Uma das nossas perguntas era o que vai acontecer com a taxa de desemprego. Para verificar isso podemos usar o recurso da estática comparativa (Chiang, [4]). Imaginemos que temos a solução do modelo apresentado acima dada por (w, r, p, π, y, μ) para $g = 0$. Vamos investigar a possibilidade de com $g \neq 0$, os valores w, r, p, π, y permanecerem constantes, isso implica em procurar a variação em μ que compensaria as variações em g.

Se w, r, p permanecem constantes não há modificação na escolha dos insumos, isto é, os a's da matriz de atividades não se alteram.

$$-a_L^P.y \geq -L(1-\mu) + \alpha_L^E.Y_E/w \quad : w \geq 0 \tag{24}$$

$$-a_K^P.y \geq -K(1-\mu)-K\mu \quad : r \geq 0 \tag{25}$$

$$-a_E^P.y \geq -E(1-\mu)-E\mu \quad : p \geq 0 \tag{26}$$

$$y \geq \alpha_P^E.Y_E/\pi + Y_I/\pi + g \quad : \pi \geq 0 \tag{27}$$

$$a_L^P.w + a_K^P.r + a_E^P.p - \pi \geq 0 : y \geq 0 \tag{28}$$

$$w - 1{,}1\pi \geq 0 : \mu \geq 0 \tag{29}$$

Com w, r, p, $\pi > 0$, as desigualdades são ativas pela complementaridade. Então, de (24) e (27) vem:

$$F_1 = -a_L^P.y + L(1-\mu) - \alpha_L^E.Y_E/w = 0$$

$$F_2 = y - \alpha_P^E . Y_E/\pi - Y_I/\pi - g = 0$$

Note que (25), (26), (28) e (29) não dependem de g e μ.

Aplicando-se o teorema da função implícita a F_1 e F_2 vem:

$$\frac{d\mu}{dg} = -\frac{\partial F_1/\partial g}{\partial F_1/\partial \mu} = -\frac{\partial F_2/\partial g}{\partial F_2/\partial \mu} = -\frac{-\alpha_L^E . \left(\partial Y_E/\partial g \right)/w}{-L - \alpha_L^E . \left(\partial Y_E/\partial \mu \right)/w},$$

ou seja,

$$\frac{d\mu}{dg} = \frac{\pi}{w.L.(1-\alpha_L^E)/\alpha_L^E - (r.K + p.E)}.$$

Para que haja uma diminuição no índice de desemprego, é necessário que o denominador dessa fração seja negativo, já que o numerador é sempre positivo, isto é, $r.K + p.E > w.L.(1-\alpha_L^E)/\alpha_L^E$.

No nosso caso, $r.K + p.E = 0{,}08277$, enquanto que $w.L.(1-\alpha_L^E)/\alpha_L^E = 0{,}9196$. Assim,

$$\frac{d\mu}{dg} = \frac{1}{0{,}9196 - 0{,}08277} = 1{,}195.$$

Isso indica que o nível de desemprego irá subir com g. Como g = 0,0244, o desemprego deverá subir de aproximadamente 0,029 unidades, passando de 22,4% para 25,3%. Vamos confirmar isso resolvendo o modelo com o auxílio do Pegasus.

4.4.1 Resolução

Neste item estão o arquivo de entrada do Pegasus e a sua respectiva solução:

```
DECLARAR:
   MODELO= "TRANSFERENCIA EM BLOCO DE PRODUTO PARA O GOVERNO"
   BENS= TRABALHO, CAPITAL, ENERGIA, PRODUTO
   ATIVIDADES= PRODUCAO
   CONSUMIDORES= EMPREGADO, INATIVO, GOVERNO
   AUXILIAR= DESEMPREGO
```

```
  ARVORES= A1, A2, A3, A4
  NUMERARIO= PRODUTO
DEFINIR:
  ARVORES:
    A1:
      ELEMENTOS= L1, K1, N1, E1, P1
      RELACOES:
        N1= L1, K1
        P1= N1, E1
    A2:
      ELEMENTOS= L2, P2, C2
      RELACOES:
        C2= L2, P2
    A3:
      ELEMENTOS= P3, C3
      RELACOES:
        C3= P3
    A4:
      ELEMENTOS= P4, C4
      RELACOES:
        C4= P4
  ATIVIDADES:
    PRODUCAO:
      A1:
        PRODUTO= P1, TRABALHO= L1, CAPITAL= K1, ENERGIA= E1
        ALFAS:
          L1= .62185, K1= .37815, E1= .07791, N1= 1.49382
        SIGMAS: P1= .3 ,N1= 1.
  DEMANDA:
    EMPREGADO:
      DOTACOES:
        TRABALHO= .209
        CAPITAL= .900
        ENERGIA= .400
      A2:
        TRABALHO= L2, PRODUTO= P2
        ALFAS:
          L2= .2, P2= .8
        SIGMA:  C2= 1.
    INATIVO:
      DOTACOES:
        CAPITAL= .900
        ENERGIA= .400
      A3:
        PRODUTO= P3
        ALFA:   P3= 1.
        SIGMA:  C3= 1.
    GOVERNO:
      TRANSFERENCIA:
        EMPREGADO:
          PRODUTO=.0244
      A4:
        PRODUTO= P4
```

```
        ALFA:    P4= 1.
        SIGMA:   C4= 1.
  RESTRICOES:
    DESEMPREGO:
      TRABALHO= 1.
      PRODUTO= -1.1
  DISTORCOES:
    DOTACOES:
      EMPREGADO:
        TRABALHO= DESEMPREGO
        CAPITAL= DESEMPREGO
        ENERGIA= DESEMPREGO
      INATIVO:
        CAPITAL= DESEMPREGO
        ENERGIA= DESEMPREGO
  LIMITES:
    INFERIOR:
      CAPITAL= 1.E-10, TRABALHO= 1.E-10, PRODUTO= 1.E-10
      ENERGIA= 1.E-10
INICIALIZAR:
  PRECOS:
    CAPITAL= .1, TRABALHO= 1., PRODUTO= 1., ENERGIA= .015
  NIVEIS:
    PRODUCAO= .244
  MULTIPLICADORES:
    DESEMPREGO= .1
CONTROLE:
  APROX= .00001, RESULT= 1, LISTAGEM= 2
  EXECUTAR


*** PEGASUS 0.92 ***  TRANSFERENCIA EM BLOCO DE PRODUTO
                                     PARA O GOVERNO [115]
 LINEARIZACAO: ITERACAO          4
 MILES:          1 ITERACOES, SOLUCAO:C
 RESULTADOS NA ITERACAO          4
   ATIVIDADE          NIVEL         LUCRO
  1       PRODUCAO        .2126          .5154E-10

     BEM              PRECO          OFERTA        DEMANDA
  1       TRABALHO        1.100          .3802E-01     .3802E-01
  2        CAPITAL       .8775E-01      .1203E-10     .0000
  3       ENERGIA       .9482E-02    -.1460E-08     .0000
  4        PRODUTO        1.000           .2126          .2126

   RESTRICAO   MULTIPLICADOR   VALOR
  1       DESEMPREGO      .2532          .0000
 ****************************************
 *******  PONTO DE EQUILIBRIO  ********
 ****************************************
NIVEIS E PRECOS DA ITERACAO  4 EM EQUILIBRIO
                                   COM PRECISAO .100000E-04
                             TEMPO   1 minutos e 20 segundos
```

Observe que os preços e nível do equilíbrio não se alteraram como era de se esperar e o nível de desemprego subiu de 13,03% atingindo o valor por nós previsto.

A subida na taxa de desemprego pode ser explicada pelo fato da renda do consumidor empregado ter caído de

$$Y_E = (1-\mu).(w.L + r.K + p.E)$$

para

$$Y_E = (1-\mu).(w.L + r.K + p.E) - \pi.g.$$

Levando-se em conta que o empregado tem a sua utilidade por lazer dada por $\alpha_L^E = 0,2$ (constante) e, também, que o preço da mão-de-obra não se alterou na solução final, ele continuará usando uma parcela fixa de $\alpha_L^E/w = 0,1818$ da sua renda, que agora é menor e, portanto, ele se utilizará menos do que nós chamamos desemprego voluntário. Em conseqüência, se o desemprego voluntário diminui e a produção continua no mesmo nível, o desemprego involuntário sobe.

Observe que neste caso é muito difícil classificar esse desemprego como keynesiano ou Clássico. A definição desta taxonomia é controversa. Para Rutherford [12] trata-se de um desemprego do tipo Clássico. Um estudo sobre desemprego Clássico e keynesiano pode ser encontrado em Grandmont (Arrow et al. [2], Capítulo 19).

4.5 Margem de Lucro

Vamos agora imaginar que em um setor da economia (que vamos chamar oligopolista), lucros supranormais de 30% são exigidos. Como modelar a nova economia?. Os exemplos usados anteriormente são simples demais; temos a necessidade de gerar um novo caso base.

4.5.1 Caso Base

Seja uma economia com dois (2) agentes capitalista e trabalhador, cinco (5) bens trabalho, capital, energia produto1 e produto2, e duas (2) atividades concorrência e oligopólio que são descritas pelas árvores abaixo.

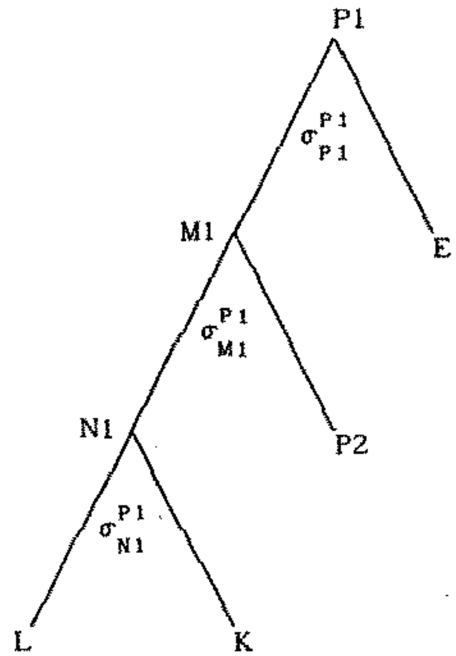


Figura 5: *Árvore correspondente a atividade CONCORRÊNCIA onde P2 é o produto da atividade OLIGOPÓLIO*

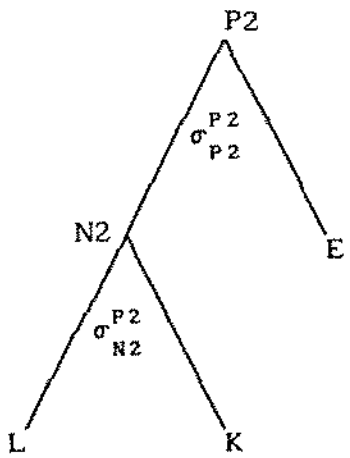


Figura 6: *Árvore correspondente a atividade OLIGOPÓLIO*

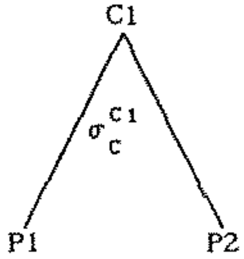


Figura 7: *Árvore correspondente a demanda do consumidor CAPITATISTA*

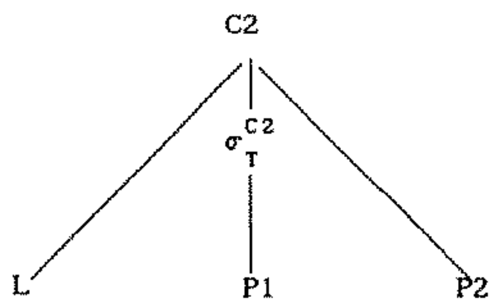


Figura 8: *Árvore correspondente a demanda do consumidor TRABALHADOR*

Ativ / Bens	Y_1	Y_2	≥ DEM - OFERTA	: PREÇOS
L	$-a_L^{P1}$	$-a_L^{P2}$	$-L + \alpha_L^T . Y_T / w$	$w \geq 0$
K	$-a_K^{P1}$	$-a_K^{P2}$	$-K$	$r \geq 0$
E	$-a_E^{P1}$	$-a_E^{P2}$	$-E$	$p \geq 0$
P_1	1		$(\alpha_{P1}^T . Y_T + \alpha_{P1}^C . Y_C)/\pi_1$	$\pi_1 \geq 0$
P_2	$-a_{P2}^{P1}$	1	$(\alpha_{P2}^T . Y_T + \alpha_{P2}^C . Y_C)/\pi_2$	$\pi_2 \geq 0$

$$a_L^{P1}.w + a_K^{P1}.r + a_E^{P1}.p - \pi_1 + a_{P2}^{P1}.\pi_2 \geq 0 \; : \; y_1 \geq 0$$

$$a_L^{P2}.w + a_K^{P2}.r + a_E^{P2}.p \qquad - \qquad \pi_2 \geq 0 \; : \; y_2 \geq 0$$

Neste modelo temos:

$$Y_T = w.L$$

$$Y_C = r.K + p.E$$

4.5.1.1 Resolução

O modelo descrito acima será expresso na linguagem PEGASUS pelo arquivo:

DECLARAR:
MODELO= "CASO BASE PARA MARGEM DE LUCRO"

```
  BENS= TRABALHO, CAPITAL, ENERGIA, PRODUTO1, PRODUTO2
  ATIVIDADES= CONCORRENCIA, OLIGOPOLIO
  CONSUMIDORES= CAPITALISTA, TRABALHADOR
  ARVORES= A1, A2, A3, A4
  NUMERARIO= PRODUTO1
DEFINIR:
  ARVORES:
    A1:
      ELEMENTOS= L1, K1, E1, N1, M1, P11, P21
      RELACOES:
        N1= L1, K1
        M1= N1, P21
        P11= M1, E1
    A2:
      ELEMENTOS= L2, K2, E2, N2, P22
      RELACOES:
        N2= L2, K2
        P22= N2, E2
    A3:
      ELEMENTOS= P13, P23, C3
      RELACAO: C3= P13, P23
    A4:
      ELEMENTOS= L4, P14, P24, C4
      RELACAO: C4= L4, P14, P24
  ATIVIDADES:
    CONCORRENCIA:
      A1:
        TRABALHO= L1, CAPITAL= K1, ENERGIA= E1, PRODUTO1= P11
        PRODUTO2= P21
        ALFAS:
          L1= .57865, K1= .42135, N1= .89748, P21= .10252
          M1= .78021, E1= .07792
        SIGMAS:
          N1= 1.00000, M1= 1.00000, P11= .30000
    OLIGOPOLIO:
      A2:
        TRABALHO= L2, CAPITAL= K2, ENERGIA= E2, PRODUTO2= P22
        ALFAS:
          L2= .62185, K2= .37815, N2= 1.49383, E2= .07792
        SIGMAS:
          N2= 1.00000, P22= .30000
  DEMANDA:
    CAPITALISTA:
      DOTACOES:
        CAPITAL= .900
        ENERGIA= .400
      A3:
        PRODUTO1= P13, PRODUTO2= P23
        ALFAS:
          P13= .5, P23= .5
        SIGMA:  C3= 1.
    TRABALHADOR:
      DOTACOES:
```

```
        TRABALHO= .16975
      A4:
        TRABALHO= L4, PRODUTO1= P14, PRODUTO2= P24
        ALFAS:
          L4= .2, P14= .43594, P24= .36406
        SIGMA:  C4= 1.
  LIMITES:
    INFERIOR:
      TRABALHO= 1.E-10, CAPITAL= 1.E-10, ENERGIA= 1.E-10
      PRODUTO1= 1.E-10, PRODUTO2= 1.E-10
INICIALIZAR:
  PRECOS:
    TRABALHO= 1., CAPITAL= .1, ENERGIA= .015
    PRODUTO1= 1., PRODUTO2= 1.
  NIVEIS:
    CONCORRENCIA= .122, OLIGOPOLIO= .122
CONTROLE:
  APROX= .00001, RESULT= 1, LISTAGEM= 1
  EXECUTAR
```

e sua solução será:

```
*** PEGASUS 0.92 ***  CASO BASE PARA MARGEM DE LUCRO [115]
 LINEARIZACAO: ITERACAO           4
 MILES:              1 ITERACOES, SOLUCAO:C
 RESULTADOS NA ITERACAO           4
   ATIVIDADE            NIVEL         LUCRO
  1      CONCORRENC     .1220          .3005E-07
  2       OLIGOPOLIO    .1220          .2140E-07

     BEM              PRECO        OFERTA        DEMANDA
  1      TRABALHO       1.000         .3395E-01     .3395E-01
  2       CAPITAL       .1000         .2160E-07     .0000
  3      ENERGIA       .1500E-01    -.5989E-07     .0000
  4       PRODUTO1      1.000          .1220          .1220
  5       PRODUTO2      1.000          .1098          .1098
 ****************************************
 *******  PONTO DE EQUILIBRIO  ********
 ****************************************
NIVEIS E PRECOS DA ITERACAO  4 EM EQUILIBRIO
                                 COM PRECISAO .100000E-04
                            TEMPO   1 minutos e 20 segundos
```

4.5.2 Caso Margem de Lucro

Queremos agora que a receita da produção da atividade oligopólio seja 30% maior, e que a renda gerada beneficie o consumidor capitalista. Este princípio foi introduzido por Hall and Hitch [6].

O lucro negativo da atividade oligopólio é escrito como: $+\ w.a_L^{P2} + r.a_K^{P2} + p.a_E^{P2} - \pi 2 \geq 0 \ : \ y2 \geq 0$ onde $\pi 2.y2$ é a receita da atividade, neste modelo queremos ter a receita igual a $(1+\mu)$ vezes o custo, onde $\mu = 0{,}3$ ou seja:

$$\pi 2.y2 = (1+\mu)(\ w.a_L^{P2}.y2 + r.a_K^{P2}.y2 + p.a_E^{P2}.y2\ )$$

Sendo $y > 0$ podemos escrever:

$$(1+\mu).w.a_L^{P2} + (1+\mu).r.a_K^{P2} + (1+\mu).p.a_E^{P2} - \pi 2 \geq 0 \quad : \quad y2 \geq 0$$

Note que tudo se passa como se fossemos fazer uma distorção nos preços, só que a uma taxa fixa, portanto devemos multiplicar cada preço da atividade em questão por 1,3.

A estrutura da matriz de atividades será a mesma só que agora nós teremos os coeficientes da atividade oligopólio calculados por:

$$a_L^{P2} = \left(\alpha_L^{P2} \frac{\pi 2}{(1+\mu)w} \right)^{\sigma_{N2}^{P2}} .y_{N2}, \qquad a_K^{P2} = \left(\alpha_K^{P2} \frac{\pi 2}{(1+\mu)r} \right)^{\sigma_{N2}^{P2}} .y_{N2},$$

$$a_E^{P2} = \left(\alpha_E^{P2} \frac{\pi 2}{(1+\mu)p} \right)^{\sigma_{P2}^{P2}} .y_{P2},$$

e as novas rendas serão:

$$Y_T = w.L$$

$$Y_C = r.K + p.E + \mu.(a_L^{P2}.w + a_K^{P2}.r + a_E^{P2}.p\ ).y2$$

4.5.2.1 Resolução

O modelo descrito acima será expresso na linguagem PEGASUS pelo arquivo:

```
DECLARAR:
   MODELO= "MARGEM DE LUCRO"
   BENS= TRABALHO, CAPITAL, ENERGIA, PRODUTO1, PRODUTO2
   ATIVIDADES= CONCORRENCIA, OLIGOPOLIO
   CONSUMIDORES= CAPITALISTA, TRABALHADOR
   ARVORES= A1, A2, A3, A4
   NUMERARIO= PRODUTO1
DEFINIR:
```

```
ARVORES:
  A1:
    ELEMENTOS= L1, K1, E1, N1, M1, P11, P21
    RELACOES:
      N1= L1, K1
      M1= N1, P21
      P11= M1, E1
  A2:
    ELEMENTOS= L2, K2, E2, N2, P22
    RELACOES:
      N2= L2, K2
      P22= N2, E2
  A3:
    ELEMENTOS= P13, P23, C3
    RELACAO: C3= P13, P23
  A4:
    ELEMENTOS= L4, P14, P24, C4
    RELACAO: C4= L4, P14, P24
ATIVIDADES:
  CONCORRENCIA:
    A1:
      TRABALHO= L1, CAPITAL= K1, ENERGIA= E1, PRODUTO1= P11
      PRODUTO2= P21
      ALFAS:
        L1= .57865, K1= .42135, N1= .89748, P21= .10252
        M1= .78021, E1= .07792
      SIGMAS:
        N1= 1.00000, M1= 1.00000, P11= .30000
  OLIGOPOLIO:
    A2:
      TRABALHO= L2, CAPITAL= K2, ENERGIA= E2, PRODUTO2= P22
      ALFAS:
        L2= .62185, K2= .37815, N2= 1.49383, E2= .07792
      SIGMAS:
        N2= 1.00000, P22= .30000
DEMANDA:
  CAPITALISTA:
    DOTACOES:
      CAPITAL= .900
      ENERGIA= .400
    A3:
      PRODUTO1= P13, PRODUTO2= P23
      ALFAS:
        P13= .5, P23= .5
      SIGMA:  C3= 1.
  TRABALHADOR:
    DOTACOES:
      TRABALHO= .16975
    A4:
      TRABALHO= L4, PRODUTO1= P14, PRODUTO2= P24
      ALFAS:
        L4= .2, P14= .43594, P24= .36406
      SIGMA:  C4= 1.
```

```
DISTORCOES:
  PRECOS:
    CAPITALISTA:
      OLIGOPOLIO:
        TRABALHO= 0.3
        CAPITAL= 0.3
        ENERGIA= 0.3
LIMITES:
  INFERIOR:
    TRABALHO= 1.E-10, CAPITAL= 1.E-10, ENERGIA= 1.E-10
    PRODUTO1= 1.E-10, PRODUTO2= 1.E-10
INICIALIZAR:
 PRECOS:
  TRABALHO= 1., CAPITAL= .1, ENERGIA= .015
  PRODUTO1= 1., PRODUTO2= 1.
 NIVEIS:
  CONCORRENCIA= .122, OLIGOPOLIO= .122
CONTROLE:
 APROX= .00001, RESULT= 1, LISTAGEM= 1
 EXECUTAR
```

e terá por solução:

```
*** PEGASUS 0.92 ***  MARGEM DE LUCRO                    [115]
 LINEARIZACAO: ITERACAO          4
 MILES:           1 ITERACOES, SOLUCAO:C
 RESULTADOS NA ITERACAO          4
   ATIVIDADE           NIVEL         LUCRO
  1      CONCORRENC    .1345          .4548E-06
  2       OLIGOPOLIO   .1075          .5141E-06

     BEM              PRECO        OFERTA        DEMANDA
  1      TRABALHO       .9699        .3395E-01    .3395E-01
  2      CAPITAL      .9809E-01    .1680E-06     .0000
  3      ENERGIA      .1443E-01   -.6426E-05     .0000
  4       PRODUTO1      1.000        .1345        .1345
  5       PRODUTO2      1.266        .9691E-01    .9691E-01
 ***************************************
 *******  PONTO DE EQUILIBRIO  ********
 ***************************************
NIVEIS E PRECOS DA ITERACAO  4 EM EQUILIBRIO
                                 COM PRECISAO .100000E-04
                            TEMPO  1 minutos e 21 segundos
```

Note que existe uma contração no nível da atividade do setor oligopolista e o preço do produto dessa atividade (PRODUTO2) apresenta um aumento de 26,6%

CAPÍTULO 5

TECNOLOGIA COM RETORNOS DECRESCENTES À ESCALA

Uma tecnologia apresenta retornos decrescentes à escala (DRS) se $f(t.x) < t.f(x)$, para todo $t > 1$.

Se isso acontece nós não podemos trabalhar a função como uma função de produção na forma de geração de colunas, pois a variação de quantidade de insumo para quantidade de produção não é mais linear. Portanto, nossa estratégia será trabalhar essa função produção com retornos decrescentes à escala como uma demanda negativa.

Vamos, por exemplo, descrever tal demanda pela estrutura CES recorrente abaixo:

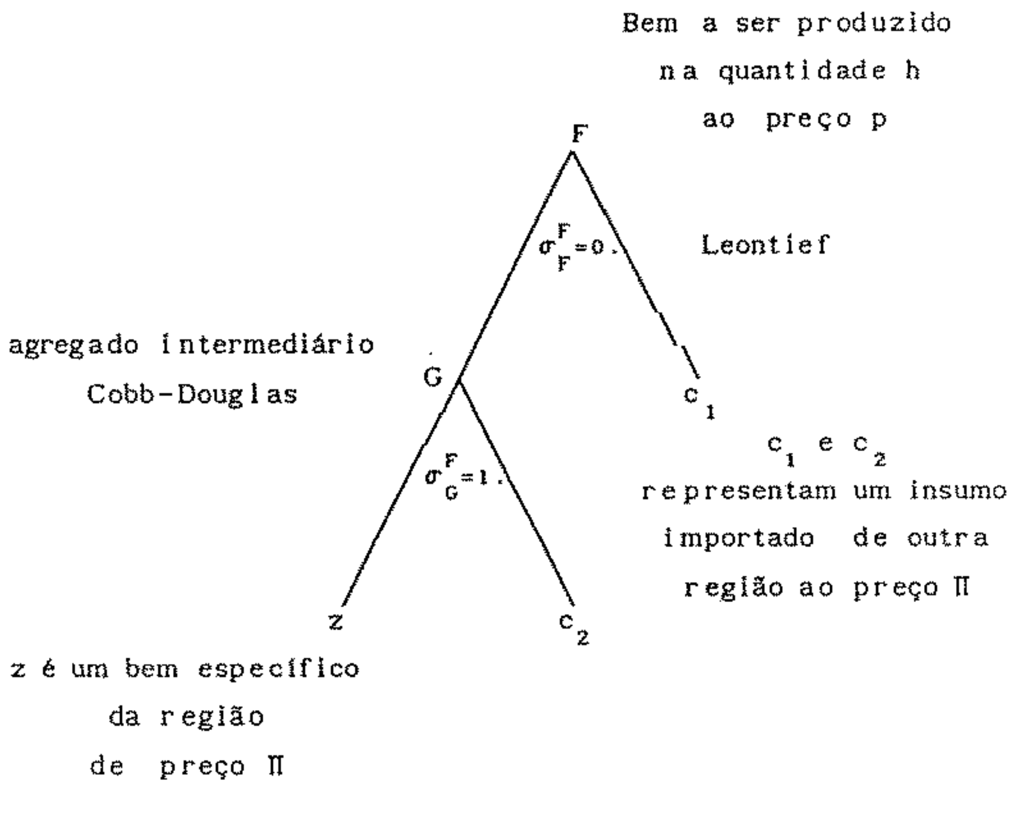


Figura 9: *Tecnologia DRS*

Digamos que estamos querendo produzir um bem F, numa determinada quantidade h, a um preço p, pelas elasticidades de substituição entre os insumos sabemos que:

$$y_G = A.c_2^a.z^{(1-a)}$$

e

$$h = y_F = \min \left\{ \frac{c_1}{\alpha} , \frac{y_G}{\beta} \right\}$$

onde α e β são as quantidades usadas de c_1 e y_G, respectivamente, para produzir uma unidade de F.

Imaginemos que num primeiro caso todos os insumos são variáveis. Então $F(c_1,G(c_2,z))$ exibe retornos constantes. Então, LRAC = LRMC = C (constante) (veja Figura 10)

O custo para produzir a quantidade h de F é C.h. O custo de G embutido é $C.h - \Pi.\alpha.h$. Como G é Cobb-Douglas, o custo $\Pi.z = (1 - a).(C - \Pi.\alpha).h$. Portanto a quantidade ótima de z em F é:

$$z = \frac{(1 - a).(C - \Pi.\alpha).h}{\Pi}$$

Sejam $\Pi.\bar{p}$ e $\bar{h}$, o custo e a quantidade de referência para a região em um certo período (valores de engenharia referentes à tecnologia de produção existente). Podemos com isso dimensionar a produção dessa região, logo, a quantidade de z em F é:

$$z = \frac{(1 - a).(\Pi.\bar{p} - \Pi.\alpha).\bar{h}}{\Pi}$$

Sendo:

MC - Custo Marginal
AC - Custo Médio
LRMC - Custo Marginal a Longo Prazo
LRAC - Custo Médio a Longo Prazo

nas condições de tecnologia enunciadas teremos o seguinte gráfico.

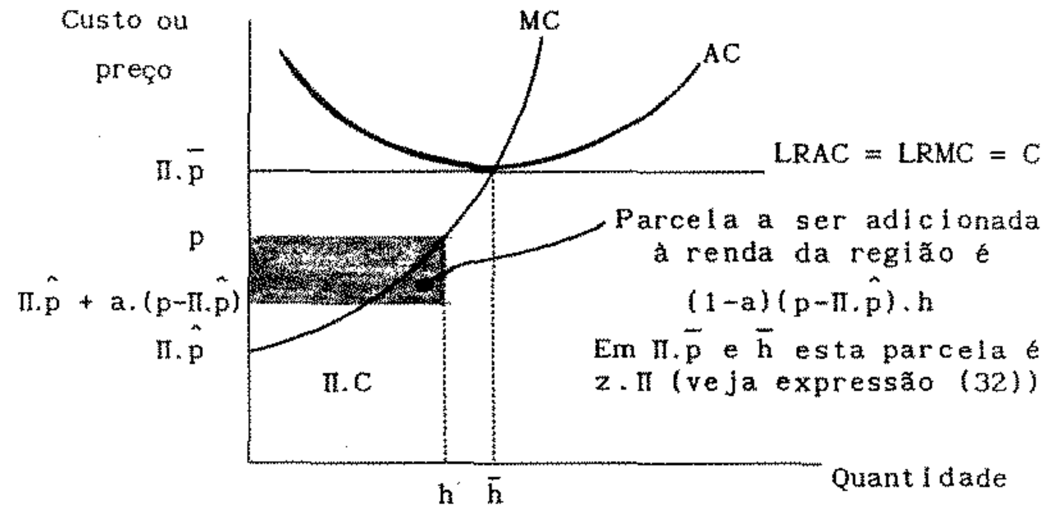


Figura 10: *Gráfico Quantidade-Preço para Tecnologia DRS*

Observe que a renda da produção é sempre positiva. No entanto, isso não implica que existe incentivo para níveis indiscriminados de produção, uma vez que $p \geq \Pi.\hat{p} > 0$ significa que oferta = demanda. Todo E deve ser usado na produção, e isso se dá a preços crescentes.

Agora fixemos o valor de z (curto prazo)

Custo de G é obtido de:

$$C_G(y_G) = \min_{c_2, z} \; \Pi.c_2 + \Pi.z$$

$$\text{s.a} \quad y_G = A.c_2^{a}.z^{(1-a)}$$

Como z é fixo,

$$c_2 = \left(\frac{y_G}{A.z^{(1-a)}} \right)^{1/a}$$

Então, custo de F é:

$$C_F(h) = \Pi.\alpha.h + \Pi.\left(\frac{\beta.h}{A.z^{(1-a)}} \right)^{1/a} + \Pi.z$$

$$MC = \Pi.\alpha + \frac{\Pi}{a}.\left(\frac{\beta}{A}\right)^{1/a}.\left(\frac{h}{z}\right)^{(1-a)/a} = p \tag{30}$$

Como intercepto vertical de MC (curva de oferta) é $\Pi.\hat{p}$,

$$\Pi.\alpha = \Pi.\hat{p} \tag{31}$$

Então,

$$z = \left((1-a).(\Pi.\bar{p} - \Pi.\hat{p}).\bar{h}\right)/\Pi \tag{32}$$

Como MC em $\bar{h}$ é $\bar{\Pi}.p$,

$$\Pi.\bar{p} = \Pi.\hat{p} + \frac{\Pi}{a}.\left(\frac{\beta}{A}\right)^{1/a}.\left(\frac{(1-a)(\Pi.\bar{p} - \Pi.\hat{p})}{\Pi}\right)^{-(1-a)/a}$$

Portanto

$$\frac{\Pi}{a}.\left(\frac{\beta}{A}\right)^{1/a} = \frac{(1-a)^{(1-a)/a}.(\Pi.\bar{p} - \Pi.\hat{p})^{1/a}}{\Pi^{(1-a)/a}} \tag{33}$$

De (30), (32), e (33),

$$h = \bar{h}.\left(\frac{p - \hat{p}.\Pi}{\bar{p}.\Pi - \hat{p}.\Pi}\right)^{a/(1-a)} \tag{34}$$

Como $\quad \nu = \frac{\partial h}{\partial p}.\frac{p}{h}\bigg|_{\bar{p}} =$

$$= \frac{a}{1-a} \cdot \frac{\bar{h}}{\bar{p}.\Pi - \hat{p}.\Pi} \cdot \left(\frac{p - \hat{p}.\Pi}{\bar{p}.\Pi - \hat{p}.\Pi} \right)^{(a/(1-a))-1} \cdot \frac{p}{\bar{h}.\left(\frac{p - \hat{p}.\Pi}{\bar{p}.\Pi - \hat{p}.\Pi} \right)^{a/(1-a)}} =$$

$$= \frac{a}{1-a} \cdot \frac{p}{p - \Pi.\hat{p}} \Bigg|_{\Pi.\bar{p}} = \frac{a}{1-a} \cdot \frac{\Pi.\bar{p}}{\Pi.\bar{p} - \Pi.\hat{p}} ,$$

$$a = \frac{\nu.(\bar{p} - \hat{p})}{\bar{p} + \nu.(\bar{p} - \hat{p})} \tag{35}$$

De (34) e (35)

$$h = \bar{h}.\left(\frac{p - \hat{p}.\Pi}{\bar{p}.\Pi - \hat{p}.\Pi} \right)^{(\nu.(\bar{p} - \hat{p})/\bar{p})}$$

Gastos com $c_1 + c_2$ embutídos em C_F são

$$\Pi.C = \Pi.(c_1 + c_2) = \Pi.\alpha.h + \Pi.\left(\frac{\beta.h}{A.z^{1-a}} \right)^{1/a}$$

De (31), (32) e (33), este custo é

$$\Pi.\hat{p}.h + \frac{a.(\Pi.\bar{p} - \Pi.\hat{p})}{\bar{h}^{(1-a)/a}}.h^{1/a} = \left[\Pi.\hat{p} + \frac{a.(\Pi.\bar{p} - \Pi.\hat{p}).h^{(1-a)/a}}{\bar{h}^{(1-a)/a}} \right].h$$

De (34),

$$\frac{h}{\bar{h}} = \left(\frac{p - \Pi.\hat{p}}{\Pi.\bar{p} - \Pi.\hat{p}} \right)^{a/(1-a)}$$

Portanto,

$$\Pi.C = \left[\Pi.\hat{p} + a.(p - \Pi.\hat{p}) \right] . h$$

Todo esse trabalho sobre retornos decrescentes a escala está baseado em Manne e Rutherford [8]. Na página 25 desse trabalho encontramos a expressão:

$$p.E - \Pi.C = p.(E_L + h) - \Pi.C = p.E_L + \left[p - \Pi.\hat{p} - a.(p - \Pi.\hat{p}) \right].h =$$

$$= p.E_L + \underbrace{(1 - a).(p - \Pi.\hat{p}).h}_{\substack{\text{"Renda" derivada da} \\ \text{extração de petróleo de} \\ \text{alto custo}}}$$

Portanto,

$$VE_j = \sum_t p_t.E_{Ljt} + \frac{\bar{p}_t.(p_t - \hat{p}_{jt})}{\bar{p}_t + \nu_{jt}.(\bar{p}_t - \hat{p}_{jt})}.h_{jt}$$

Note que em $\Pi.C$ não está incluido o "custo" de z. Em $\bar{p}$ e $\bar{h}$ temos $\bar{p}.\bar{h} = \Pi.C + z$, isto é, "lucro" (descontando-se z) é zero, conforme se esperava (veja Figura 10).

Um exemplo onde aparece a tecnologia de produção DRS é dado abaixo.

Um produtor que detém os direitos de exploração de um determinado mineral tem função oferta dada por:

$$h = \bar{h}. \left(\frac{p - \hat{p}.\Pi}{\bar{p}.\Pi - \hat{p}.\Pi} \right)^{(\nu.(\bar{p} - \hat{p})/\bar{p})} ,$$

onde $\bar{p}$ é o preço de referência do bem a ser produzido no mercado, $\hat{p}$ é o preço mínimo a partir do qual a produção se torna viável, e Π é o preço de um outro bem que é usado na produção de h, na quantidade:

$$C = \frac{\hat{p}.\Pi + \dfrac{\nu.(\bar{p} - \hat{p})}{\bar{p} + \nu.(\bar{p} - \hat{p})}.(p - \hat{p}.\Pi)}{\Pi}.h$$

Resumido temos portanto

	Preço	Quant
BEM 1 (mina)	p	h
BEM 2 (insumo)	Π	C

Mudanças que ocorrem na matriz de atividades

Devemos adicionar:

(1) Na linha do BEM 1 a parcela - h.

(2) Na linha do BEM 2 a parcela C.

(3) Na renda do consumidor k1 (produtor do bem 1) a parcela + p.h.

(4) Na renda do consumidor k2 (fornecedor do bem 2) a parcela - Π.C.

(5) No caso do consumidor k ser ao mesmo tempo produtor e fornecedor sua renda deverá ser acrescida das parcelas + p.h - Π.C

Um modelo com tecnologia DRS é expresso na liguagem PEGASUS pelo arquivo abaixo, onde no bloco referente a oferta temos as seguintes correspondências:

PRECO corresponde a $\bar{p}$

QUANTIDADE corresponde a $\bar{h}$

ELASTICIDADE corresponde ao ν

MINIMO corresponde ao $\hat{p}$

```
DECLARAR:
  MODELO= "OFERTA DE ENERGIA DE ALTO-CUSTO"
  BENS= TRABALHO, CAPITAL, ENERGIA, PRODUTO
  ATIVIDADES= PRODUCAO
  CONSUMIDOR= MERCADO
  ARVORES= A1, A2
  NUMERARIO= PRODUTO
DEFINIR:
  ARVORES:
    A1:
      ELEMENTOS= L1, K1, N1, E1, P1
      RELACOES:
        N1= L1, K1
        P1= N1, E1
    A2:
      ELEMENTOS= L2, P2, C2
      RELACAO: C2= L2, P2
  ATIVIDADES:
    PRODUCAO:
      A1:
        PRODUTO= P1, TRABALHO= L1, CAPITAL= K1, ENERGIA= E1
        ALFAS:
          L1= .62185, K1= .37815, N1= 1.49382, E1= .07791
        SIGMAS:
          N1=1., P1= .3
  DEMANDA:
    MERCADO:
      DOTACOES:
        TRABALHO= .209
        CAPITAL= .9
        ENERGIA= .4
      A2:
        TRABALHO= L2, PRODUTO= P2
        ALFAS:
          L2= .2, P2= .8
        SIGMA: C2= 1.
  OFERTA:
    MERCADO: ENERGIA
    REFERENCIA: PRECO=.03 , QUANTIDADE=.036
                ELASTICIDADE=1.
    MINIMO=.005
    INSUMO=PRODUTO
  LIMITES:
    INFERIOR:
      CAPITAL= 1.E-10, TRABALHO= 1.E-10, ENERGIA= 1.E-10
      PRODUTO= 1.E-10
INICIALIZAR:
  PRECOS:
    TRABALHO= 1., CAPITAL= .1, ENERGIA= .015, PRODUTO= 1.
  NIVEL:
    PRODUCAO= .244
CONTROLE:
```

```
  APROX= .00001, RESULT= 1, LISTAGEM= 1
  EXECUTAR
```

E sua solução é apresentada abaixo:

```
*** PEGASUS 0.92 ***  OFERTA DE ENERGIA DE ALTO-CUSTO      [115]
  LINEARIZACAO: ITERACAO          2
  MILES:              1 ITERACOES, SOLUCAO:C
  RESULTADOS NA ITERACAO          2
    ATIVIDADE               NIVEL          LUCRO
   1    PRODUCAO          .2443          .4001E-06

       BEM                PRECO          OFERTA          DEMANDA
   1    TRABALHO          1.003          .6089E-01       .6088E-01
   2    CAPITAL           .1003          .2067E-06       .0000
   3    ENERGIA           .1338E-01      -.1448E-01      -.1448E-01
   4    PRODUTO           1.000          .2443           .2443
  ******************************************
  *******  PONTO DE EQUILIBRIO  ********
  ******************************************
 NIVEIS E PRECOS DA ITERACAO  2 EM EQUILIBRIO
                                 COM PRECISAO  .100000E-04
                             TEMPO   0 minutos e 53 segundos
```

Observe que a oferta de energia de alto-custo é de .01448 bilhões de barris por ano. O preço real de energia decresceu para US$ 13.38 o barril.

CONCLUSÕES

Nosso objetivo neste trabalho foi estender o modelo walrasiano clássico de forma a possibilitar a modelagem numérica de economias reais distorcidas.

Para isso foram feitas algumas contribuições importantes ao equilíbrio geral aplicado, tanto no tratamento numérico dispensado, como na teoria econômica subjacente. Cabe destacar a inclusão de variáveis canalizadas no algoritmo baseado na seqüência de problemas de complementaridade linear, a formação de preços através de margem de lucro (*mark-up*), regras de fechamento em modelos de economias distorcidas, etc.

Novas implementações foram feitas no Pegasus, sem comprometer a abordagem sistêmica inerente à Pesquisa Operacional que caracterizou seu desenvolvimento inicial.

O resultado final foi a generalização de uma técnica para construir, calibrar e resolver modelos computáveis de equilíbrio geral com características não-walrasianas.

Houve uma preocupação didática na descrição dos modelos apresentados, de modo que fosse possível ao leitor intuir certos aspectos econômicos dos resultados. Por exemplo, uma diminuição na oferta de um insumo se faz acompanhar do aumento de seu preço, o desemprego pode ser o resultado de uma rigidez na taxa salarial, etc.

Esse é um assunto relativamente recente e, por isso, seu desenvolvimento sempre foi muito estimulante.

Entretanto, estamos conscientes de que muito ainda existe para se fazer. Trabalhos futuros deverão assumir duas formas distintas, porém interdependentes: implementações novas no Pegasus e sua utilização em aplicações.

Entre as contribuições que pretendemos ainda fazer ao Pegasus, podemos destacar:

- Inclusão de novos tipos de restrições adicionais.
- Modelos de desequilíbrio econômico.
- Competição imperfeita em modelos de equilíbrio geral.

No que diz respeito as aplicações que pretendemos fazer, podemos mencionar:

o Desenvolvimento de uma metodologia para avaliar investimentos na produção de petróleo no país.

o Estudar os impactos no crescimento econômico do Brasil decorrentes da introdução de medidas de controle ambiental.

BIBLIOGRAFIA

[1] AHN, B. H., "Iterative Methods for Linear Complementarity Problems with Upperbounds on Primary Variables", **Mathematical Programming** 26 (1983) 295-315.

[2] ARROW, K., J. e M. D. INTRILIGATOR, **Handbook of Mathematical Economics - volume II** (Elsevier Science Publishers B. V.,1982)

[3] BORDONI, O. F. J. G., Pegasus: o Problema de Equilíbrio Geral Aplicado resolvido por um Sistema Unificado de Suporte computacional, tese de mestrado, Depto. Matemática Aplicada, UNICAMP, 1989.

[4] CHIANG, A., C., **Matemática para Economistas** (Editora da Universidade de São Paulo, 1982).

[5] DEBREU, G., **Theory of Value** (Seventh Printing) (Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University, 1976).

[6] HALL, R. L. and C. J. Hitch, "Price Theory and Business Behavior", Oxford Economic Papers 2 (1939) 12-45.

[7] KEHOE, T. J. and J. Serra-Puche, "A Computational General Equilibrium Model with Endogenous Unemployment: An Analysis of the 1980 Fiscal Reform in Mexico", Journal of Public Economics 22 (1983) 1-26.

[8] MANNE, A. S. e T. F. Rutherford, "A Long Term Model of Oil Markets, Economic Growth and Balance of Payment Constraints", mimeo. (Department of Operations Research, Universidade de Stanford, Stanford, Calif., abril de 1988).

[9] MATHIESEN, L., "Computation of Economic Equilibria by a Sequence of Linear Complementarity Problems", **Mathematical Programming Study** 23 (1985) 1-25.

[10] MURTY, K. G., **Linear and Combinatorial Programming** (Wiley Nova York, N. Y., 1976).

[11] MURTY, K. G., **Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming** (Helderlmann Verlag, Berlim, 1988).

[12] RUTHERFORD, T. F., "A Modeling System for Applied General Equilibrium Analysis", mimeo. (Cowles Foundation Discussion Paper No. 836, Universidade de Yale, New Haven, Conn., maio de 1987).

[13] SCARF, H. E. e J. B. Shoven, **Applied General Equilibrio Analysis** (Second Edition) (Cambridge University Press, 1984).

[14] VARIAN, H. R., **Microeconomic Analysis** (Second Edition) (Norton, Nova York, 1984).

[15] ZULLO Jr., J., Cálculo de Equilíbrios Econômicos por Otimização, tese de mestrado, Depto. Matemática Aplicada, UNICAMP, 1990.

APÊNDICE A

PROBLEMA DE COMPLEMENTARIDADE LINEAR

Seja $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $q \in \mathbb{R}^n$. Desejamos encontrar a solução, z^*, para o sistema:

$$\begin{aligned} M.z + q &\geq 0 \\ z &\geq 0 \\ z^T.(M.z + q) &= 0 \end{aligned} \qquad \text{A.1}$$

ou resumidamente podemos escrever $M.z + q \geq 0 \;:\; z \geq 0$ onde ":" significa *complementar com.*

Colocando as variáveis $w_1, w_2, \ldots, w_n$, como variáveis de folga teremos:

$$\begin{aligned} I.w - M.z &= q \\ z &\geq 0 \\ w &\geq 0 \\ z^T.w &= 0 \end{aligned} \qquad \text{A.2}$$

a solução desse sistema consiste em encontrar $w_1, w_2, \ldots, w_n$; $z_1, z_2, \ldots, z_n$ satisfazendo o problema A.2.

A condição $z^T.w = 0$ é conhecida como *restrição de complementaridade*, pois, como $z_j, w_j \geq 0$, para qualquer solução do sistema (A.2), $z_j.w_j = 0$, para $j = 1, \ldots, n$. O par de variáveis (z_j, w_j) é chamado *par complementar* e cada variável é o *complemento* da outra. Assim, o problema acima é conhecido como um *problema de complementaridade*. Note que ele não apresenta uma função objetivo.

Analisaremos agora o algoritmo do pivô complementar desenvolvido originalmente por Lemke. A descrição a seguir é baseada em Murty [10].

O algoritmo tem certa semelhança com o método simplex de programação linear, trabalhando com um tablô obtido a partir de (A.2).

O tablô inicial será formado pela matriz identidade (associada a w) e a matriz -M (associada a z), num total de 2n colunas. O vetor q é associado às linhas do tablô.

w	z	
I	-M	q

Se o vetor q for não-negativo, teremos a solução trivial $(w;z) = (q;0)$ e terminamos o algoritmo.

Caso exista pelo menos um $q_i < 0$ para $1 \leq i \leq n$, teremos na matriz I uma base complementar não-factível. Para corrigir esse problema introduzimos uma variável artificial z_0 no sistema (A.2) e a associamos a um vetor coluna $-e_n$ (e_n é um vetor de n componentes, todas de valor igual a 1)

w	z	z_0	
I	-M	$-e_n$	q

Em cada iteração do algoritmo trabalhamos com uma *base*, uma submatriz quadrada não-singular de ordem n formada pelas colunas do tabló. As variáveis associadas às colunas da base são chamadas *variáveis básicas*. As n variáveis básicas (selecionadas do conjunto de 2n+1 variáveis $(w_1,\ldots,w_n,z_1,\ldots,z_n,z_0)$) constituem um *vetor básico*. O vetor básico que tem exatamente uma variável de cada par complementar (z_j,w_j) é chamado *vetor complementar básico*, associado a uma *base complementar*. Se o vetor satisfizer essa condição para n-1 variáveis apenas (e conseqüentemente devemos ter um par complementar em que as duas variáveis que o compõe são não-básicas, e além disso, z_0 deve ser básica), é chamado *vetor quase-complementar básico*, associado a uma *base quase-complementar*.

O passo fundamental de cada iteração é o pivoteamento da base. Para isso, são escolhidas uma variável básica, que sairá da base, e uma variável não-básica que entrará na base. Isso determina também o elemento pivô, com o qual é feita a atualização do tabló. Para solução do sistema correspondente a essa nova base, consideramos zero as variáveis não-básicas e resolvemos o sistema. Se os valores das variáveis básicas da solução obtida são não-negativos, a base é chamada *factível*. O algoritmo trabalha somente com bases factíveis complementares ou quase-complementares.

Entraremos com z_0 na base para substituir uma variável que deverá sair, obtendo, assim, uma base quase-complementar factível. Para isso, identificamos a linha r que apresenta $q_r < 0$ e tal que $|q_r| \geq |q_i|$, $\forall i=1,\ldots,n$ e usamos como pivô o r-ésimo elemento do vetor coluna associado a z_0. Após o pivoteamento, teremos uma base associada ao vetor básico quase-complementar $(w_1,\ldots,w_{r-1},z_0,w_{r+1},\ldots,w_n)$. Como o pivô é -1 e o vetor q inicial apresentava algumas componentes negativas, o vetor q atualizado (solução) será não-negativo e temos uma base quase-complementar factível.

Na segunda iteração, como também nas seguintes, existe uma maneira única de continuar com o algoritmo, através da *regra do pivô complementar*, que consiste em escolher o complemento da variável que saiu na iteração anterior para ser a próxima variável a entrar na base. Isso irá garantir também a complementaridade da nova base.

A variável que deve sair será determinada através do *teste da razão mínima*. Seja a_{is} um elemento da coluna s do tablô que deverá entrar na base e q_i um elemento do vetor q atualizado, $i = 1,...,n$. Determinamos a linha r tal que q_r/a_{rs} = mínimo $\{q_i/a_{is} : 1 \le i \le n\}$ e a r-ésima variável deverá sair da base. Isso garante que a nova base será viável. O pivô será o elemento a_{rs}.

Existem exatamente duas maneiras possíveis para o término do algoritmo. Uma possibilidade é obtermos uma base complementar factível quando a variável z_0 é escolhida pelo teste da razão mínima para sair da base. A solução do tablô para essa base final corresponde à solução do problema de complementaridade. Outra possibilidade acontece quando a coluna do pivô se torna não-positiva e nesse caso o algoritmo termina em *raia*. Quando isso acontece, o algoritmo é incapaz de encontrar uma solução. É possível que o problema tenha solução, mas se tiver, o algoritmo não consegue encontrá-la. Entretanto, se a matriz M satisfizer algumas condições, pode-se provar que o término em raia só ocorre quando o problema não tem solução. O teorema abaixo nos dá essas condições.

Dizemos que uma matriz M é *copositiva mais* se $y^T.M.y \ge 0$ para todo $y \ge 0$ e ainda quando $y \ge 0$ satisfaz $y^T.M.y = 0$, temos $y^T.(M + M^T) = 0$.

Teorema Se M é uma matriz *copositiva mais* e o sistema (A.2) possui uma solução factível, então o problema de complementaridade linear tem uma solução e o algoritmo de pivô complementar termina com uma base complementar factível. Respectivamente, quando M é uma matriz copositiva mais, se o algoritmo de pivô complementar termina em raia, o sistema (A.2) é infactível.

A prova desse teorema pode ser encontrada em Murty [10].

Maiores detalhes sobre a teoria e aplicações do problema de complementaridade linear podem ser encontrados em Murty[11].

APÊNDICE B

PROBLEMA DE COMPLEMENTARIDADE NÃO-LINEAR

Dadas as funções $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$, não-lineares, tais que $f_i(z) \le 0$. Seja $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, um vetor tal que $F(z)=[f_1(z),\ldots,f_n(z)]^T$. Devemos encontrar $z \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\begin{aligned} F(z) &\ge 0 \\ z &\ge 0 \\ z^T\!.F(z) &= 0 \end{aligned} \qquad \text{B.1}$$

As condições (B.1) podem ser escritas resumidamente como

$$F(z) \ge 0 \quad : \quad z \ge 0$$

conforme notação apresentada no Apêndice A.

Esse problema é chamado *problema de complementaridade não-linear*. Podemos resolvê-lo através de uma seqüência de *problemas de complementaridade linear*. Para tanto vamos linearizar o problema usando aproximações de primeira ordem, ou seja, $L(F(z)) = F(z^k) + (\nabla_z F(z^k))(z-z^k)$, onde z^k representa a solução obtida na iteração anterior. Desta forma teremos em cada iteração um jacobiano verdadeiro, o que nos dá a chamada aproximação "newtoniana". Observe que $\nabla_z F(z^k)$ é a matriz de ordem n dada por

$$\nabla_z F(z^k) = \begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial f_1(z)}{\partial z_1}\right|_{z^k} & \cdots & \left.\dfrac{\partial f_1(z)}{\partial z_n}\right|_{z^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left.\dfrac{\partial f_n(z)}{\partial z_1}\right|_{z^k} & \cdots & \left.\dfrac{\partial f_n(z)}{\partial z_n}\right|_{z^k} \end{bmatrix}$$

Substituindo essa linearização em (B.1) teremos

$$\begin{aligned} [\nabla_z F(z^k)].z + [F(z^k) - (\nabla_z F(z^k)).z^k] &\ge 0 \\ z &\ge 0 \\ z^T\!.\{[\nabla_z F(z^k)].z + [F(z^k) - (\nabla_z F(z^k)).z^k]\} &= 0 \end{aligned} \qquad \text{B.2}$$

Denotando $M = [\nabla_z F(z^k)]$ e $q = [F(z^k) - (\nabla_z F(z^k)).z^k]$, (B.2) pode ser reescrita como

$$M.z + q \geq 0$$
$$z \geq 0$$
$$z^T.(M.z + q) = 0$$

que é um problema de complementaridade linear. Esse problema pode ser resolvido através da técnica descrita no Apêndice A.