



Universidade Estadual de Campinas

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

DEPARTAMENTO DE MICROONDA E ÓPTICA

UNICAMP - FEEC - DMO, CAMPINAS - SP, C.P. 6101, CEP. 13083-970

Simulação por Elementos Finitos da Propagação de Feixes Ópticos em Estruturas Fotônicas

Tese de Doutorado

Autor: José Patrocínio da Silva

Orientador: Prof. Dr. Hugo Enrique Hernández Figueroa

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Campinas
Abril, 2003

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Si 38s Silva, José Patrocínio da
Simulação por elementos finitos da propagação
de feixes ópticos em estruturas fotônicas / José Patrocínio
da Silva. --Campinas, SP: [s.n], 2003

Orientador: Hugo Enrique Hernández Figueroa.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação.

1. Ótica Integrada 2. Método dos elementos finitos. 3.
Guias de ondas dielétricos. 4. Anisotropía 5. Galerkin,
Método de. I. Hernndez Figueroa, Hugo Enrique. II.
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.



Universidade Estadual de Campinas

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

DEPARTAMENTO DE MICROONDAS E ÓPTICA

UNICAMP - FEEC - DMO, CAMPINAS - SP, C.P. 6101, CEP. 13083-970

Simulação por Elementos Finitos da Propagação de Feixes Ópticos em Estruturas Fotônicas

Tese de Doutorado

Autor: José Patrocínio da Silva

Orientador: Prof. Dr. Hugo Enrique Hernández Figueroa

Banca Examinadora

DR. HUGO ENRIQUE HERNÁNDEZ FIGUEROA

FECC/UNICAMP - PRESIDENTE

A handwritten signature in blue ink, corresponding to the name of the president of the examining board.

DR. ADAILDO GOMES D'ASSUNÇÃO

UFRN/NATAL

A handwritten signature in black ink, corresponding to the name of the second member of the examining board.

DR. ANTÔNIO ROMERO SAPIENZA

UERJ/RIO DE JANEIRO

A handwritten signature in black ink, corresponding to the name of the third member of the examining board.

DRA. SANDRA MARIA DOTTO STUMP

MACKENZIE/SÃO PAULO

A handwritten signature in black ink, corresponding to the name of the fourth member of the examining board.

DR. EVANDRO CONFORTI

FEEC/UNICAMP

A handwritten signature in black ink, corresponding to the name of the fifth member of the examining board.

DR. RUI FRAGASSI SOUZA

FEEC/UNICAMP

A handwritten signature in black ink, corresponding to the name of the sixth member of the examining board.

Campinas

Abril, 2003

Resumo

Uma nova e eficiente formulação vetorial baseada no método dos elementos finitos, para simular a propagação de feixes ópticos em guias de onda dielétricos, é apresentada.

Essa formulação é expressa em termos das componentes transversais do campo magnético, incluindo camadas perfeitamente casadas (PML-*Perfectly Matched Layers*) e aproximação não-paraxial do tipo Padé. A aplicação de PMLs diminui consideravelmente o esforço computacional, uma vez que as dimensões da estrutura podem ser drasticamente reduzidas sem que reflexões nas paredes do contorno sejam observadas.

Os modos espúrios não estão presentes, devido à inclusão implícita da condição de divergente nulo do campo magnético.

O método aqui empregado, leva em conta a natureza vetorial dos campos eletromagnéticos, o que possibilita o seu emprego para modelar a dependência da polarização e o acoplamento mútuo entre as componentes do campo devido ao material e à estrutura.

A formulação foi desenvolvida para incluir dielétricos anisotrópicos uniaxiais, biaxiais e com elementos do tensor permissividade fora da diagonal, considerando o perfil de índice de refração variando arbitrariamente na seção transversal do guia de onda. Os materiais anisotrópicos uniaxiais tem dois, dos três elementos da diagonal do tensor permissividade elétrica, iguais, os biaxiais tem os três elementos da diagonal do tensor diferentes e para o caso elementos fora da diagonal, considera-se apenas anisotropia transversal.

Para validar a eficiência da formulação, são apresentados vários exemplos de propagação em guias de onda isotrópicos e anisotrópicos, tais como: análise do guia magnetoóptico, fibra óptica com alta birrefringência, fibra óptica tipo D e estruturas com eixos ópticos deslocados.

Os resultados obtidos apresentam uma boa concordância com os obtidos através de outros métodos, e com dados experimentais disponíveis na literatura.

Abstract

A new and efficient vectorial formulation based on the Finite Element Method, to simulate the optical beam propagation method in anisotropic dielectric waveguides, is thoroughly presented.

This formulation is expressed in terms of the magnetic field's transverse components and includes perfectly matched layers (PML) and the wide angle Padé Approach. The application of PMLs reduce considerably the computational effort, because the structures dimensions can be drastically reduced without that reflections on the boundary walls being observed. Spurious modes are suppressed due to the implicit inclusion of the divergence of the magnetic field equal to zero.

The method used here takes into account the vectorial nature of the electromagnetic fields and can be used to model the polarization and mutual coupling between field's components. The formulation was developed to include uniaxially dielectrics, biaxially dielectrics and dielectrics with transverse anisotropy, considering arbitrary refractive index profiles over the waveguide cross section. The permittivity of such materials is a tensor. If the three elements of diagonal are different, the material is biaxially anisotropic. On the other hand, if two of the three elements have the same value, the material is uniaxially anisotropic.

To validate the formulation, various examples are presented. The results agree with those available from other methods and from experimental published data.

Agradecimentos

Primeiro agradeço a Deus pela sua infinita bondade comigo.

Agradeço, também, ao Professor Doutor Hugo Enrique Hernández Figueroa, pela orientação, confiança, paciência, e apoio fornecido durante o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço à Antônio Manoel Ferreira Frasson por sua excelente colaboração no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço aos colegas de república e, em particular, a João Tadeu Strugo Socas pelo excelente convívio.

Agradeço aos colegas do DMO, em particular, a Vitaly Rodríguez Esquerre pela troca de idéias e ajuda durante estes estudos.

Agradeço à Iguatemi Eduardo da Fonseca e Raulison Resende pela amizade e compreensão.

Finalmente, gostaria de agradecer à CAPES (*Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior*), pelo apoio financeiro.

Dedico este trabalho primeiramente aos meus Pais, Manoel Joaquim da Silva e Inácia Pereira de Araújo (in memorian). As principais pessoas da minha vida, apesar de falecidos continuam sendo fonte de apoio e confiança, mostrando assim, a incondicionalidade do amor.

Aos meus irmãos e irmãs, em particular, a Maria Teófila da Silva, esposo (in memorian) e filha, pelo exemplo de dedicação, força, luta e fidelidade.

A Maria Francicleide Noberto (Cleide), pelo seu apoio e perseverança.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Considerações iniciais	1
1.2	Estruturas dos guias ópticos usadas neste trabalho	3
1.3	Objetivos e organização do trabalho	6
1.4	Sumário da tese	6
2	Formulação pelo Método Vetorial da Propagação de Feixe	9
2.1	Introdução	9
2.2	Equação de onda vetorial	12
2.3	Equação de onda vetorial para simulação da propagação de feixes ópticos	18
2.3.1	Aplicação do Método dos Elementos Finitos	18
2.3.2	Aplicação do Método de Galerkin	19
2.3.3	Limitação do domínio computacional	21
2.3.4	Integrais de linha	22
2.3.5	Discretização	24
2.3.6	Análise Modal	29
3	Análise pelo Método da Propagação de Feixe em Meios Com Dielétricos Isotrópicos	31
3.1	Introdução	31
3.2	Conversor de polarização passivo	31
3.3	Análise em guias de onda acoplados	35
3.4	Análise da fibra óptica tipo D isotrópica	38
3.5	Análise do guia de onda costela em forma de junção Y	40
3.6	Conclusões	43
4	Análise pelo Método da Propagação de Feixe para Meios Anisotrópicos e uso da Distância Imaginária na Solução de Modos Complexos	44
4.1	Introdução	44
4.2	Análise do guia de onda óptico anisotrópico rodeado por PML, difundido em LiNbO_3	45
4.3	Análise do guia de onda costela-magnetoóptico	49

4.4	Análise do guia de onda anisotrópico retangular imerso em um meio dielétrico com desalinhamento nos eixos ópticos	52
4.5	Análise da propagação do feixe óptico em uma fibra de alta birrefringência com eixos desalinhados	55
4.6	Simulação da propagação de feixes ópticos através da distância imaginária	58
4.7	Conclusões	62
5	Conclusões e Trabalhos Futuros	63
5.1	Conclusões	63
5.2	Trabalhos futuros	64
	Referências	65
	Publicações associadas à tese	70
A	Obtenção da equação (2.27)	71
B	Obtenção do terceiro e quarto termos da equação (2.35)	76
C	Cálculo de Integrais Elementares	79
D	Fomulação pelo Método da Propagação de Feixe considerando dielétricos com anisotropia completa	83

Lista de Figuras

1-1	Guia de onda óptico anisotrópico com deslocamento angular α entre os eixos transversais.	4
1-2	Acoplamento direcional entre duas fibras ópticas idênticos imersas em uma casca dielétrica.	4
1-3	Isolador óptico do tipo magnetoóptico.	4
1-4	Guia costela do tipo junção Y.	5
1-5	Fibra birrefringente.	5
1-6	Guia de onda conversor de polarização passivo.	5
2-1	Seção do guia de onda anisotrópico imerso em um meio dielétrico.	10
2-2	Exemplo de uma malha utilizada em elementos finitos para análise de um guia de onda com seção quadrada	11
2-3	Funções de interpolações lineares para o elemento triangular: (a) Ψ_1^e , (b) Ψ_2^e e (c) Ψ_3^e . As áreas hachuradas, representam as superfícies planares das funções.	12
2-4	Dois elementos vizinhos de meios diferentes. As setas indicam o sentido de integração das integrais de linha	21
2-5	Seção transversal de uma guia dielétrico anisotrópico imerso em um dielétrico rodeado por PMLs.	22
2-6	Representação de elementos triangulares: (a) linear e (b) quadrático.	25
3-1	Guia de onda conversor de polarização passivo.	32
3-2	Potência normalizada com perdas totais de 1,1579 dB e 99% de acoplamento.	33
3-3	Valor absoluto das componentes h_x (coluna esquerda) e h_y (coluna direita) para: (a) $z = 0 \mu\text{m}$, (b) $z = 75 \mu\text{m}$ e (c) $z = 150 \mu\text{m}$.	34
3-4	Acoplador direcional entre duas fibras ópticas idênticas.	35
3-5	Curvas de contornos para o valor absoluto da componente h_x para: (a) $z = 0 \mu\text{m}$, (b) $z = 9 \mu\text{m}$, (c) $z = 18,2 \mu\text{m}$, (d) $z = 29 \mu\text{m}$, (e) $z = 35 \mu\text{m}$ e (f) $z = 39 \mu\text{m}$	36
3-6	Seção transversal da fibra tipo D	38
3-7	Curvas de contorno de campo da componente h_y da fibra tipo D em $z = 0$ (coluna esquerda) e $z = 2 \text{ mm}$ (coluna direita), para: (a) $D=0,0 \mu\text{m}$, (b) $D=0,5 \mu\text{m}$ e (c) $D=1,0 \mu\text{m}$.	39
3-8	Guia de onda costela em forma de junção Y.	41

3-9	Componente principal do modo fundamental com polarização Y.	41
3-10	Variação da componente principal do modo fundamental. Análise não-paraxial (coluna esquerda) e análise paraxial (coluna direita), para: (a) $z = 10 \mu\text{m}$, (b) $z = 30 \mu\text{m}$ e (c) $z = 200 \mu\text{m}$	42
4-1	Guia de onda óptico anisotrópico rodeado por PMLs.	46
4-2	Módulo da componente h_x (coluna direita) e módulo da componente h_y (coluna esquerda) para: (a) $z = 0 \mu\text{m}$, (b) $z = 20 \mu\text{m}$, (c) $z = 40 \mu\text{m}$, (d) $z = 200 \mu\text{m}$ e (e) $z = 500 \mu\text{m}$	47
4-3	Variação do índice de refração de referência ao longo da direção de propagação: linha sólida FE-VBPM e linha tracejada análise modal.	48
4-4	Guia de onda costela-magnetoóptico.	49
4-5	Evolução da potência normalizada das componentes transversais do campo ao longo da direção de propagação z	50
4-6	Módulo de h_y (coluna esquerda) e h_x (coluna direita), para: (a) $z = 0 \mu\text{m}$, (b) $z = 1000 \mu\text{m}$, (c) $z = 2000 \mu\text{m}$, (d) $z = 3000 \mu\text{m}$, (e) $z = 4000 \mu\text{m}$, (f) $z = 6000 \mu\text{m}$ e (g) $z = 7000 \mu\text{m}$	51
4-7	Guia de onda óptico anisotrópico exibindo um deslocamento angular α dos eixos ópticos em relação ao sistema de coordenadas.	52
4-8	Variação das amplitudes normalizadas de h_x e h_y ao longo da direção z	53
4-9	Módulo de h_x (coluna esquerda) e módulo de h_y (coluna direita), para: (a) $z = 0,0 \mu\text{m}$, (b) $z = 17,5 \mu\text{m}$ e (c) $z = 35 \mu\text{m}$	54
4-10	(a) Representação da força externa \vec{F} aplicada na fibra de alta birrefringência e (b) Rotação provocada pela aplicação da força externa nos eixos principais.	56
4-11	Simulação referente à localização dos eixos de birrefringência de uma fibra óptica. A linha sólida representa a curva obtida pela simulação e a curva com x mostra os dados colhidos da literatura [30] para $k = 0.17$, $\theta \approx 40^\circ$ e $L_B \approx 1 \text{ mm}$	57
4-12	Evolução das amplitudes das componentes transversais do campo \vec{H} para uma força externa aplicada, com $k \approx 0,17$	57
4-13	Perfil de índice de refração e seção transversal de um guia de onda vazante.	60
4-14	Distribuição de campo magnético, componente y , para o modo H_{11}^y	60
4-15	Distribuição de campo magnético, componente y , para o modo H_{12}^y	61
4-16	Distribuição de campo magnético, componente y , para o modo H_{13}^y	61
A-1	Sentido de efetivação do produto vetorial entre vetores unitários	71
C-1	Mudança do sistema de coordenadas globais x e y para o sistema de coordenadas locais ξ e η	79

Lista de Tabelas

2.1	Descrição dos parâmetros relativos às PMLs: α_x , α_y e $\alpha_z = 1$	15
3.1	Comparação entre os índices da Fibra D, obtidos neste trabalho, e mostrados [48]. . .	40
4.1	Comparação entre os índices complexos, para o guia de onda vazante, obtidos neste trabalho e os mostrados em [53].	62

Lista de Símbolos

h_x, h_y	Componentes transversais do campo magnético \vec{h} nos nós dos elementos que formam a malha discretizada.
$W(\Omega)$	Espaço da função peso.
$H^1(\Omega), H^2(\Omega)$	Espaço de Hilbert.
$H_\xi^1(\Omega), H_\xi^2(\Omega)$	Subespaço do espaço de Hilbert.
k	Razão entre B_{ext} e B_{int} .
ie	Representa elementos triangulares lineares ou quadráticos.
i	Constante complexa de valor $\sqrt{-1}$.
i, j	Índices de somatório.
\vec{J}	Vetor densidade de corrente.
L_1, L_2	Comprimentos do guia de onda conversor de polarização passivo.
L	Comprimento do guia em forma de junção Y.
L_B	Comprimento de batimento entre dois modos de polarização.
L_c	Comprimento de acoplamento.
Np	Número de nós em cada elemento.
$n_{ef,j}$	Índice de refração efetivo do j-ésimo autovalor.
n_{ref}	Índice de refração de referência.
\vec{n}	Vetor unitário normal à aresta do elemento e .
n_x, n_y	Componentes do vetor unitário nas direções x e y , respectivamente.
t_1, t_2	Alturas das camadas superior e inferior do guia de onda tipo costela.
t, z	Subscritos que indicam componentes transversal e axial do campo magnético
x	Centro dos braços dos guias em forma de junção Y.
x, y, z	Representam as coordenadas do sistema cartesiano.
$V(\Omega)$	Espaço das funções ϕ .
\vec{w}_T	Função peso vetorial.
W	Largura do guia de onda costela.

δ	Usado para indicar variação ou tolerância
$\overline{\varepsilon}$	Tensor permissividade elétrica.
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yx}, \varepsilon_{xx}$	Elementos do tensor permissividade.
$\overline{\varepsilon}_t$	Tensor permissividade transversal.
$\varepsilon_{xx}^{(0)}, \varepsilon_{yy}^{(0)}, \varepsilon_{zz}^{(0)}$	Índices de refração sem o efeito das tensões induzidas pela força $\overline{\mathbf{F}}$.
ϕ	Função a ser determinada.
$\tilde{\phi}$	Solução aproximada da equação diferencial.
γ	Autovalor relacionado com a constante de fase do modo propagante.
$\{\phi_i\}$	Conjunto de funções de base associadas a uma certa malha.
Ψ_i	Funções de base.
λ	Comprimento de onda.
μ	Permeabilidade do material.
μ_0	Permeabilidade no espaço livre.
π	Relação entre a circunferência e o diâmetro de um círculo.
θ_{DF}	Valor que define o tipo de esquema de diferenças finitas.
θ	Ângulo de aplicação da força e o eixo lento da fibra óptica de alta birrefringência.
ρ	Densidade de carga.
σ	Largura do feixe gaussiano.
ξ, η	Coordenadas locais.
ω	Frequência angular.
Ω	Domínio ou janela computacional.
Γ	Fronteira que limita o domínio Ω .
$\partial\Omega$	Interface entre elementos de diferentes materiais e as paredes que limitam Ω .
Δ	Indica variações ou diferenças.
Δz	Passo dado ao longo da direção de propagação z .
α	Deslocamento angular dos eixos ópticos em relação ao sistema cartesiano
α_c	Ângulo entre o cristalino, eixo c , e o eixo x no plano xy .
β_z	Constante de fase do modo propagante.
β_{ref}	Índice de refração de referência.
β_s, β_f	Constantes efetivas de propagação para os modos de polarização lento e rápido.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações iniciais

Embora as ferramentas teóricas necessárias ao uso dos métodos numéricos fossem conhecidas há muitos anos, o seu efetivo uso ocorreu a partir da década de 60, quando apareceram os primeiros computadores científicos. Desde então, com o desenvolvimento dos mesmos, as técnicas numéricas, em uso, se tornaram cada vez mais sofisticadas.

Nas últimas décadas, um considerável esforço tem sido desenvolvido para simular, de maneira eficiente e precisa, a propagação de ondas eletromagnéticas ao longo de guias de onda ópticos. Uma das técnicas mais poderosas é o método da propagação de feixe (BPM-*Beam Propagation Method*). Entre os métodos numéricos usados para analisar a seção transversal de guias de onda discretizados, ele é um dos mais estáveis e apresenta um desempenho superior quando usado em conjunto com o método dos elementos finitos (FE-BPM, *Finite Element Beam Propagation Method*). Atualmente existe um grande número de versões do BPM baseadas em técnicas numéricas, tais como Transformada Rápida de Fourier (FFT, *Fast Fourier Transform*) [1], Diferenças Finitas (FD-*Finite Difference*) [2],[3] e Elementos Finitos (FE-*Finite Element*) [4], [5].

Recentemente, o método BPM foi explorado por Obayya e outros [6], Figueroa e outros [7] e Pinheiro e outros [8]. Este trabalho apresenta uma nova e eficiente formulação baseada no método dos elementos finitos, para a propagação de feixes ópticos (BPM) em guias de onda anisotrópicos; paredes perfeitamente casadas (PML-*Perfectly Matched Layers*) e a aproximação não-paraxial do tipo Padé são introduzidas.

O método dos elementos finitos foi, pela primeira vez, descrito por Courant [9], em 1942, ao preparar um artigo para a American Mathematical Society. Nesta publicação, ele adicionou um apêndice sobre o uso de métodos variacionais na teoria dos potenciais. Seguindo os princípios já descritos, ele escolheu um conjunto de funções de aproximação lineares em um conjunto de triângulos, que denominou-se de elementos. Naquela oportunidade, ele construiu dois exemplos bidimensionais, marcando, assim, o início do uso dos elementos finitos. Em 1969, começa o uso dos Elementos Finitos em microondas, com uma publicação de P. P. Silvester na revista *Alta Frequenza* [10].

Com a redução do custo dos computadores, os métodos numéricos tornaram-se mais sofisticados e já conseguem simular problemas eletromagnéticos e dispositivos cada vez mais complexos. O método dos Elementos Finitos, inicialmente aplicado com grande sucesso em problemas de guiamento em estruturas fechadas, apresentava dificuldade para ser aplicado em problemas de radiação e espalhamento. Como a condição de radiação não está implícita na formulação do Método do Elementos Finitos, para simular problemas com radiação necessitava-se de paredes absorventes para simular o espaço livre, como uma câmara anecóica, para, assim, não ser necessário discretizar todo o espaço. Neste contexto, vários tipos de paredes absorventes foram propostas, dentre elas as mais usadas são:

- ABC's, " *Absorbing Boundary Conditions*", adaptadas para o uso em formulações vetoriais por You e outros [11].

- ABC's para fronteiras esféricas, primeiramente estudadas por Bayliss, Gunzburger e Turkel [12].

- Camadas absorventes perfeitamente casadas, apresentadas por Berenger [13].

O uso Métodos dos Elementos Finitos, em conjunto com o BPM e as camadas perfeitamente casadas FE-VBPM (*Finite Element Vectorial Beam Propagation Method*), supera os demais métodos anteriormente citados com relação ao uso de malhas discretizadas. Usando o FE-VBPM pode-se selecionar, de forma arbitrária, a ordem e o número de elementos de acordo com os recursos computacionais disponíveis e a precisão desejada. Outras vantagens consistem na facilidade de modelar geometrias curvas, utilizando elementos triangulares lineares e quadráticos, no uso de malhas não-uniformes e arbitrárias, que fornecem o grau de exigência na discretização para cada uma das regiões que formam o domínio computacional [14]. As referidas malhas podem, ainda, serem adaptativas ao longo da direção de propagação, aumentando, ainda mais, a eficiência computacional, sem introduzir qualquer tipo de erro ou degradação da precisão numérica [15]. Isso é particularmente interessante na análise de guias de onda variantes com a direção de propagação e em meios não-lineares.

O uso do FE-BPM, concentra-se, basicamente, na análise da propagação de feixes ópticos em guias dielétricos isotrópicos [16]-[18]. A maior parte dos trabalhos da literatura, tratam os campos como sendo desacoplados e descritos pela equação de onda escalar[14]. Para formulações escalares, considera-se a condição de guiamento fraco, dada como $\nabla\epsilon_T/\epsilon \ll 1$ (ϵ_T é a permissividade transversal do guia de onda), tornando as componentes de campos desacopladas e os modos puramente TE ou TM. Dessa forma, as formulações escalares se restringem, praticamente, aos estudos de guias de onda homogêneos ou não-homogêneos isotrópicos. Recentemente, surgiram formulações FE-BPM aplicadas em guias de onda com anisotropia arbitrária, porém limitadas aos guias planares [19].

Existem estruturas que só podem ser analisadas através de formulações que consideram as propriedades vetoriais das ondas eletromagnéticas. Isso ocorre devido ao confinamento do feixe óptico nas direções transversais, ou seja, tais dispositivos sustentam distribuições de campos híbridos que só podem ser rigorosamente analisadas através de formulações vetoriais, e é exatamente devido a este fato, que as formulações vetoriais têm sido intensamente exploradas e estudadas.

A partir dos esforços objetivando formulações vetoriais, surgiram as aproximações semi-vetoriais,

que, embora descrevam os efeitos das polarizações, ainda desprezam o acoplamento da menor componente transversal do campo magnético ou elétrico. Desta forma, na formulação semi-vetorial tem-se apenas uma componente transversal do campo, de acordo com a polarização considerada para suas componentes [20]- [21]. Um dos primeiros trabalhos sobre a propagação vetorial de feixes em guias ópticos, baseado na técnica dos elementos finitos (FE-VBPM), foi publicado por Sergey V. Polstyanko e outros [22]. Neste trabalho, os autores utilizaram um método híbrido, que consiste na expansão da componente axial do campo elétrico, usando elemento nodal, e nas expansões das componentes transversais do campo elétrico, empregando elementos vetoriais conhecidos como elementos de aresta [23]. Nesta formulação, foram usados guias planares e não-lineares.

Recentemente, Zoboli e outros, desenvolveram um propagador vetorial para meios isotrópicos que usa elementos nodais e considerando as três componentes do campo magnético \vec{H} [24]. Mais recentemente, Pinheiro e outros, desenvolveram um propagador vetorial anisotrópico usando aproximação paraxial [14]. Atualmente, várias aproximações numéricas são empregadas com o objetivo de propiciar análises precisas da propagação dos feixes ópticos em guias de onda. Desta forma, este trabalho apresenta uma nova formulação, baseada no método dos elementos finitos, para a propagação vetorial em meios anisotrópicos, com aumento do ângulo espectral (ondas planas) de validade (não-paraxialidade), através da aproximação de Padé [25] e do uso de PMLs (*Perfectly Matched Layers*), como paredes absorventes, para limitar o domínio computacional de modo a não introduzir reflexões [26].

1.2 Estruturas dos guias ópticos usadas neste trabalho

Para validar a estabilidade da formulação aqui apresentada, FE-VBPM (Método Vetorial da Propagação de Feixes Ópticos baseado no Método dos Elementos Finitos, com PMLs), selecionamos o seguinte conjunto de estruturas, na faixa de frequências ópticas:

a) Guia de onda dielétrico isotrópico ou anisotrópico; no caso anisotrópico, com deslocamento angular entre os eixos transversais; em forma de canal ou enterrado; em meios dielétricos isotrópicos, rodeado por PMLs Fig.1-1. O deslocamento angular, α , é responsável pela anisotropia presente no material, pois neste caso, os elementos do tensor permissividade elétrica, variam de acordo com a variação de α . Neste trabalho, será considerado o caso biaxial com elementos transversais, do tensor permissividade elétrica, não nulos. O caso uniaxial, não será analisado neste trabalho, mais sua análise é obtida de forma similar e tem igual importância no tratamento de guias que exploram a natureza anisotópica dos materiais.

b) Acoplador direcional formado por dois guias de onda isotrópicos idênticos, Fig.1-2;

c) Guia de onda anisotrópico do tipo magnetoóptico, Fig.1-3;

d) Guia de onda isotrópico, variante ao longo da direção de propagação z , em forma de junção Y, Fig.1-4;

e) Fibra altamente birrefringente, Fig.1-5;

f) Polarizador, Fig.1-6.

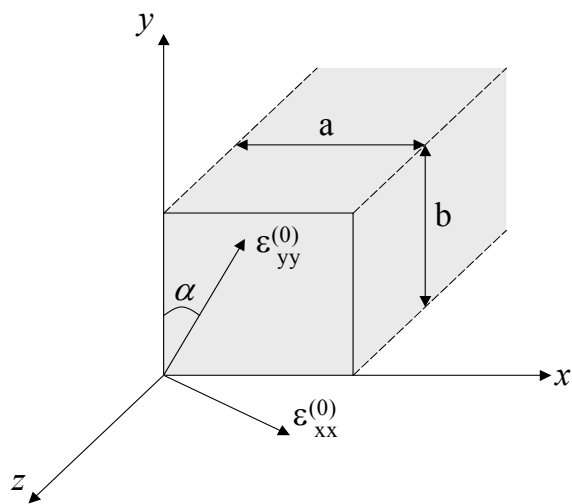


Fig. 1-1: Guia de onda óptico anisotrópico com deslocamento angular α entre os eixos transversais.

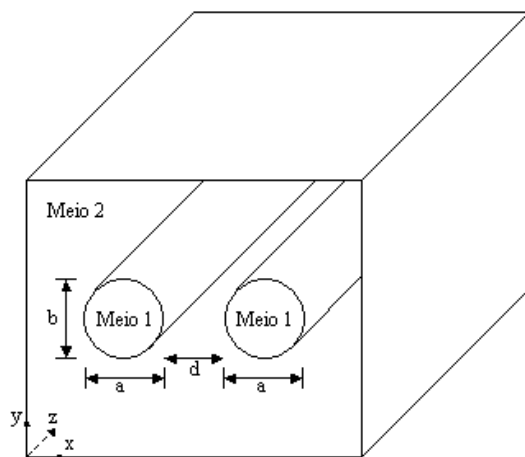


Fig. 1-2: Acoplamento direcional entre duas fibras ópticas idênticos imersas em uma casca dielétrica.

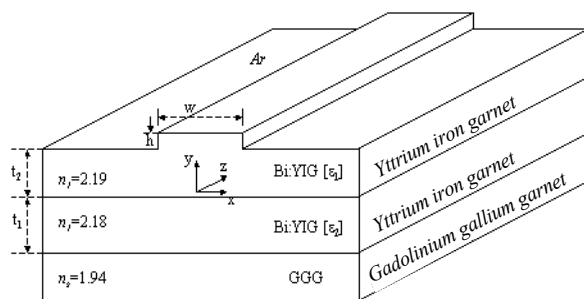


Fig. 1-3: Isolador óptico do tipo magnetoóptico.

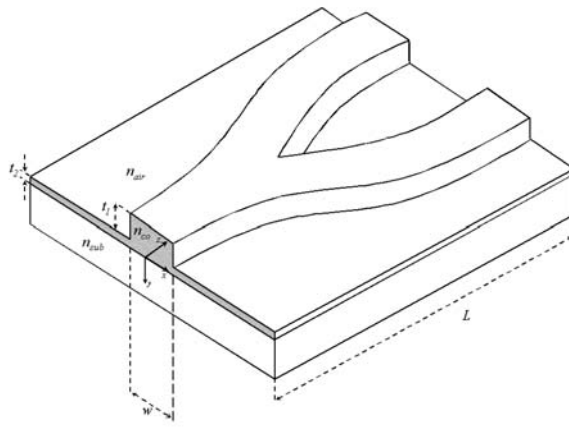


Fig. 1-4: Guia costela do tipo junção Y.

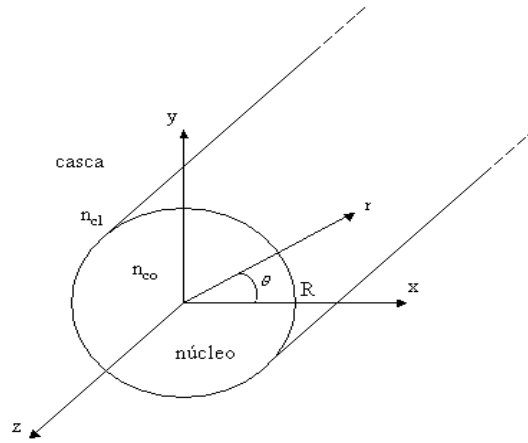


Fig. 1-5: Fibra birrefringente.

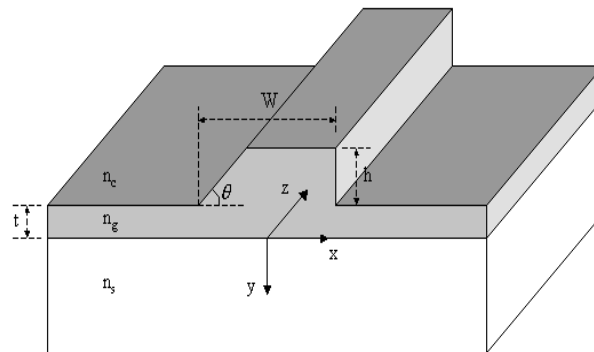


Fig. 1-6: Guia de onda conversor de polarização passivo.

1.3 Objetivos e organização do trabalho

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de uma nova formulação vetorial, robusta e eficiente, para analisar a propagação de feixes ópticos em guias de onda dielétricos isotrópicos e anisotrópicos. A grande contribuição deste trabalho é o uso de uma nova formulação baseada na equação de onda vetorial escrita, em termos das componentes transversais do campo magnético \vec{H} com inserção implícita da relação do divergente nulo, $\nabla \cdot \vec{H} = \mathbf{0}$, que, também, possibilita a eliminação dos modos espúrios. Nesta formulação, as aproximações para os termos da derivada segunda na direção de propagação z , são feitas usando-se a aproximação não-paraxial, com uso da fórmula de Padé [25]. Camadas perfeitamente casadas, do tipo PMLs, são usadas para evitar reflexões e limitar o domínio computacional. Esta formulação diminui consideravelmente o esforço computacional, uma vez que, ao reduzir a equação de onda para duas componentes, o sistema matricial resultante da aplicação dos métodos dos elementos finitos fica reduzido de, aproximadamente 45 %. Além disso, o uso das PMLs contribui, ainda mais, para a redução do esforço computacional, por possibilitar uma redução considerável do domínio computacional.

A validade desta técnica ficou evidenciada através da concordância dos resultados obtidos neste trabalho com aqueles resultantes do uso de outros esquema BPM, baseados nas técnicas numéricas dos elementos finitos, utilizando as três componentes do campo \vec{H} [27], formulações que usam DF-VBPM e FFT-VBPM [28] e formulações BPM que empregam a redução iterativa de Lanczos [29]. Os resultados obtidos neste trabalho, apresentam ótima concordância com os resultados mostrados na literatura [27], [28].

1.4 Sumário da tese

No Capítulo 2, apresenta-se o problema, que em linhas gerais, consiste na análise da propagação de um feixe óptico em guias de onda constituídos por materiais isotrópicos ou anisotrópicos, considerando as características vetoriais das ondas eletromagnéticas e o acoplamento mútuo entre as componentes de campo magnético. Em seguida, é apresentada a formulação do problema no domínio da frequência, a partir das equações de Maxwell, escritas na forma diferencial. Destas, com a inclusão implícita da relação do divergente nulo ($\nabla \cdot \vec{H} = 0$), obtém-se a chamada equação de Helmholtz no domínio da frequência, ou, simplesmente, equação de onda vetorial escrita em termos das componentes transversais do campo magnético \vec{H} . Nesse Capítulo é mostrada, também, uma visão detalhada do uso das PML's nas fronteiras do domínio computacional, bem como, a aplicação da aproximação não-paraxial através da fórmula de Padé. Para obtenção da equação de onda vetorial, o campo magnético \vec{H} é expresso por: $\vec{H}(x, y, z) = \vec{h}(x, y, z)e^{-jk_0\beta_z z}$, onde β_z é a constante de propagação de referência, k_0 é o número de onda no espaço livre, $\vec{h}(x, y, z)$ é a componente lenta (condição de envoltória) da onda propagante e $e^{-jk_0\beta_z z}$ representa a componente rápida da onda. Em seguida, aplica-se o método de Galerkin no plano transversal, xy , à direção de propagação da onda eletromagnética, z .

Neste Capítulo, toda análise é feita considerando materiais com anisotropia transversal. A formulação considerando a componente longitudinal do campo magnético \vec{H} , é apresentada com detalhes no Apêndice D. Como resultado da aplicação do método dos elementos finitos, em conjunto com o método de Galerkin, chega-se a um conjunto de equações diferenciais ordinárias acopladas e de primeira ordem, do tipo: $[A] \frac{\partial}{\partial z} \{\vec{h}_T\}(z) = [B] \{\vec{h}_T\}(z)$, onde $[A]$ e $[B]$ são matrizes esparsas, não-simétricas, não-hermiteanas de, ordem $2n_p \times 2n_p$, onde n_p é o número de nós da malha. $\{\vec{h}_T\}(z)$ representa os valores das componentes transversais do campo magnético \vec{h} nos nós da malha. Em seguida, o esquema das diferenças finitas de Crank-Nicholson é aplicado ao longo da direção de propagação z , e chega-se a um sistema de equações lineares do tipo $([A] - 0,5\Delta z[B]) \{\vec{h}_T\}_i = ([A] + 0,5\Delta z[B])_{i+1}$, onde Δz representa o passo de propagação na direção z . Ao se obter a componente transversal \vec{h}_T , calcula-se a componente axial h_z , através da relação do divergente nulo, $\nabla \cdot \vec{H} = 0$.

No Capítulo 3, é feita a verificação da validade do método proposto, na simulação de guias de onda constituídos de materiais isotrópicos, utilizando-se diversos exemplos de geometrias complexas. São mostradas simulações da propagação do feixe em guias de onda imersos, fibra óptica tipo D com perfil de índice de refração em degrau, acoplador direcional, guia costela do tipo junção Y e guia costela do tipo polarizador com acoplamento dos modos ao longo da direção de propagação. Essas simulações evidenciam a natureza vetorial da formulação, através da rotação da polarização e pelo uso de guias de onda onde não se pode considerar a condição de guiamento fraco, ou seja, onde existe uma grande variação do índice de refração ao longo da seção transversal do guia. A simulação da junção Y mostra o funcionamento perfeito das camadas PMLs e do uso da aproximação não-paraxial, introduzidas, com sucesso, na formulação aqui apresentada.

No Capítulo 4, é feita a análise de estruturas com anisotropia diagonal, como a fibra óptica altamente birrefringente sob a ação de uma força externa aplicada, o que ocasiona o surgimento de elementos não nulos fora da diagonal principal do tensor permissividade elétrica, provocando uma rotação dos eixos principais da fibra. Neste caso, a fibra é precionada lateralmente por uma força constante \vec{F} , aplicada segundo um ângulo, θ , com o eixo de polarização lento, provocando assim, uma rotação dos eixos principais de birrefringência de um ângulo α . Os resultados desta simulação foram comparados com os dados experimentais apresentados por [30], através de um método que é uma variação da técnica que usa a modulação elasto-óptica para localizar os eixos principais de birrefringência em um ponto qualquer do circuito, sem clivar a fibra [31]. Neste Capítulo, é apresentada também, a simulação do guia costela magnetoóptico [32]; esta simulação mostra a eficiência do método em estruturas com termos imaginários fora da diagonal principal do tensor permissividade. E, finalmente, é mostrado neste Capítulo, o uso da formulação aqui apresentada, na análise da propagação de modos complexos através da distância imaginária [33], [34].

No Capítulo 5, apresentam-se as conclusões sobre o trabalho desenvolvido e as perspectivas para trabalhos futuros, nesta linha de pesquisa. No, final da tese, foram incluídos apêndices, onde são feitas algumas demonstrações relativas ao Capítulo 2 e é apresentado o desenvolvimento da for-

mulação FE-VBPM, considerando a inclusão da componente longitudinal e anisotropia completa no tensor permissividade elétrica. O objetivo destes apêndices é tornar o trabalho, aqui apresentado, mais completo e de fácil compreensão, especialmente para aqueles que desejam familiarizar-se com o desenvolvimento teórico do método aqui utilizado e para aqueles que direta ou indiretamente já trabalham neste tema.

Boa parte dos resultados apresentados neste trabalho foram expostos em congressos e publicados em anais e revistas [26] e [35]- [40].

Capítulo 2

Formulação pelo Método Vetorial da Propagação de Feixe

2.1 Introdução

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método numérico utilizado na resolução de equações diferenciais parciais em domínios finitos. Através de uma discretização de domínios originais contínuos de problemas físicos, obtêm-se sistemas de equações lineares, que, em geral, são esparsos e que podem ser resolvidos utilizando técnicas eficientes. A esparsidade das matrizes geradas é uma das principais vantagens do MEF, porque o sistema a ser resolvido é esparso e, portanto, de fácil resolução. Uma outra vantagem é sua versatilidade para a análise de estruturas com geometrias complexas. Em outras palavras, o MEF pode ser utilizado em domínios com características não-homogêneas de formatos quaisquer. Assim, por exemplo, em regiões onde existe muita variação e/ou alta intensidade do campo eletromagnético, usam-se malhas mais refinadas do que nas outras regiões onde a variação do campo e/ou a intensidade são menores; esta situação é, em geral, difícil ou às vezes impossível de ser tratada eficientemente com outros métodos, como, por exemplo, o Método das Diferenças Finitas (MDF).

Neste Capítulo, será apresentada a formulação, por elementos finitos, da equação de onda de Helmholtz no domínio da frequência, considerando sua aplicação em conjunto com o método da propagação de feixe (BPM). Inicialmente, apresenta-se o modelo matemático usado para um guia de onda de seção transversal arbitrária, constante ou suavemente modificada ao longo de seu eixo. Aqui, considera-se o guia formado por dielétrico anisotrópico e com perfil de índice de refração variando arbitrariamente na seção transversal. Considera-se, também, que o guia está imerso em um meio dielétrico e que as perdas podem estar presentes. O procedimento consiste na discretização do domínio em análise, usando-se o MEF, obtido a partir do Método Residual de Galerkin. Este método é usado devido à sua simplicidade, apresentando resultados equivalentes aos MEFs obtidos a partir de Princípios Variacionais [41]. Para aproximação da derivada segunda da componente transversal do campo magnético \vec{H} , em relação à direção de propagação z , usou-se a fórmula de Padé de ordem (1,1).

Este tipo de aproximação é conhecida como aproximação não-paraxial ou de ângulo largo.

Para limitar o domínio computacional, adotamos uma técnica bastante utilizada, chamada de Camadas Perfeitamente Casadas (PMLs - *Perfectly Matched Layers*) [13], nas regiões adjacentes às paredes que limitam o domínio. As PMLs conseguem absorver completamente as ondas incidentes nas fronteiras, sem permitir reflexões de volta para o domínio computacional; daí o nome de camadas perfeitamente casadas.

A estrutura em análise é posicionada em um sistema de coordenadas retangulares, de tal forma que o eixo do guia de onda tenha a mesma direção do eixo z , Fig. 2-1. A estrutura considerada é bidimensional, e portanto, a equação de onda vetorial que descreve a propagação do feixe óptico é expressa em termos das componentes transversais do campo magnético, por meio da inclusão implícita da condição do divergente do campo magnético igual a zero, que, também, garante a eliminação dos modos espúrios [14]. A análise é feita para o campo \vec{H} porque este tem componentes contínuas nas interfaces dielétricas, o que não ocorre com as componentes descritas em termos do campo elétrico \vec{E} .

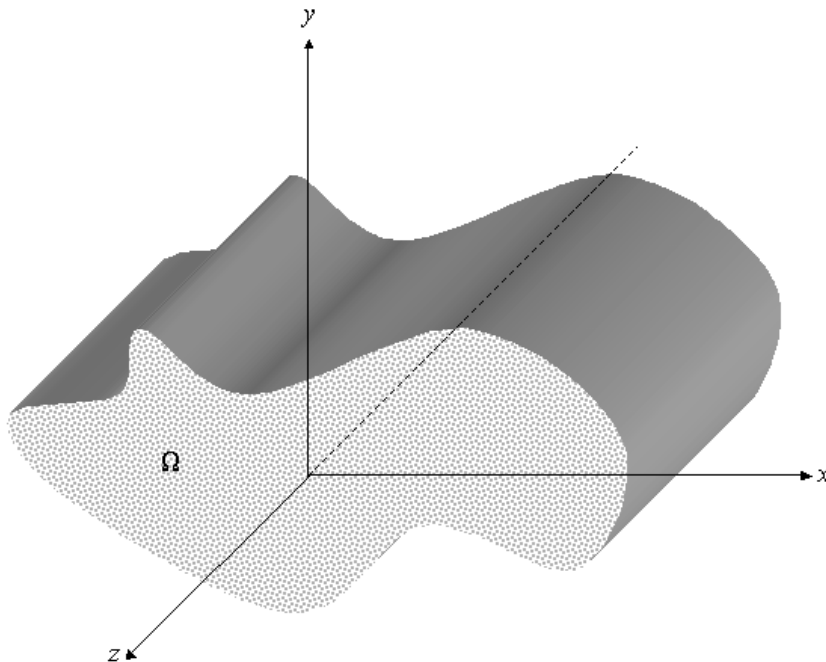


Fig. 2-1: Seção do guia de onda anisotrópico imerso em um meio dielétrico.

Em linhas gerais, para se obter a solução numérica da equação de onda, primeiramente considera-se o domínio Ω , onde está inserido o guia de onda a ser analisado, dividindo-o em subdomínios triangulares, também conhecidos por elementos finitos Fig. 2-2. A forma triangular é a mais utilizada porque é de fácil adaptação às formas mais complexas. O passo seguinte é aplicar o método de Galerkin [41], considerando o plano xy na equação de onda vetorial, escrita em termos das componentes transversais do campo magnético \vec{H}_T . Nesta etapa, o campo magnético transversal \vec{H}_T é expandido

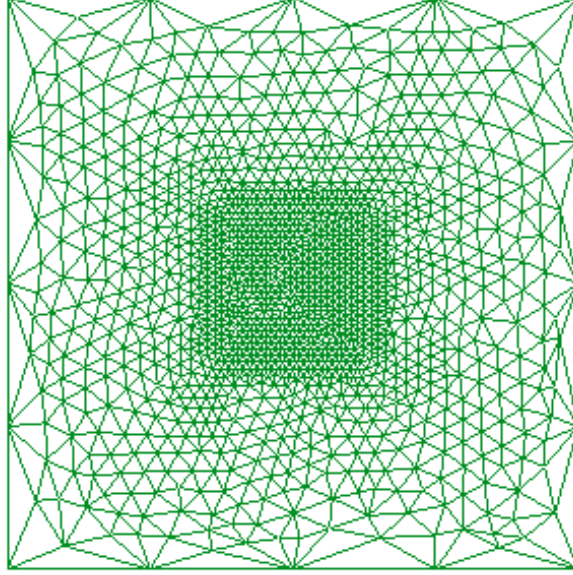


Fig. 2-2: Exemplo de uma malha utilizada em elementos finitos para análise de um guia de onda com seção quadrada

em $\vec{H}_T = \sum_{i=1}^{ie} (h_{xi}\hat{x} + h_{yi}\hat{y}) \Psi_i(x, y)$, onde $\Psi_i(x, y)$ denota funções de base de primeira ou segunda ordem Fig.2-3, usadas no método dos elementos finitos para expandir as componentes do campo \vec{H}_T . h_{xi} e h_{yi} são os valores das componentes transversais do campo \vec{H} nos nós e ie representa a ordem do elemento, que pode ser linear ou de primeira ordem, $ie = 3$, ou quadrático ou de segunda ordem, $ie = 6$, para elementos triangulares. Pela aplicação do Método de Galerkin, obtém-se um conjunto de equações diferenciais ordinárias e acopladas, do tipo: $[A] \frac{\partial \{\vec{h}_T\}(z)}{\partial z} = [B] \{\vec{h}_T\}(z)$, no qual $[A]$ e $[B]$ são matrizes esparsas, não-simétricas e não-hermiteanas, que contêm coeficientes que são funções da geometria e dos parâmetros eletromagnéticos da estrutura em análise, onde o vetor $\{\vec{h}_T\}(z)$ representa o campo magnético transversal para cada nó da malha.

Para resolver o sistema de equações diferenciais descrito acima, usa-se o esquema das diferenças finitas de Crank-Nicholson [41], ao longo da direção de propagação z . Com este procedimento, reduz-se o problema inicial, descrito pela equação de onda vetorial, para sistemas algébricos de equações lineares da forma $([A] + \theta\Delta z [B]) \{\vec{h}_T(z + \Delta z)\}_i = ([A] - (1 - \theta)\Delta z [B]) \{\vec{h}_T\}$, onde Δz é o passo de propagação ao longo da direção z e $\theta(0 \leq \theta \leq 1)$ é introduzido para controle de estabilidade do método. Para $\theta = 0,5$ tem-se o esquema de Crank-Nicholson. Finalmente, utilizado-se programas otimizados, obtém-se a solução do sistema linear, obtendo-se as distribuições espaciais das componentes transversais h_x e h_y do campo magnético \vec{h}_T , para sucessivos planos com z constante. Desta forma, torna-se possível, a visualização da propagação do feixe óptico na estrutura ou dispositivo analisado.

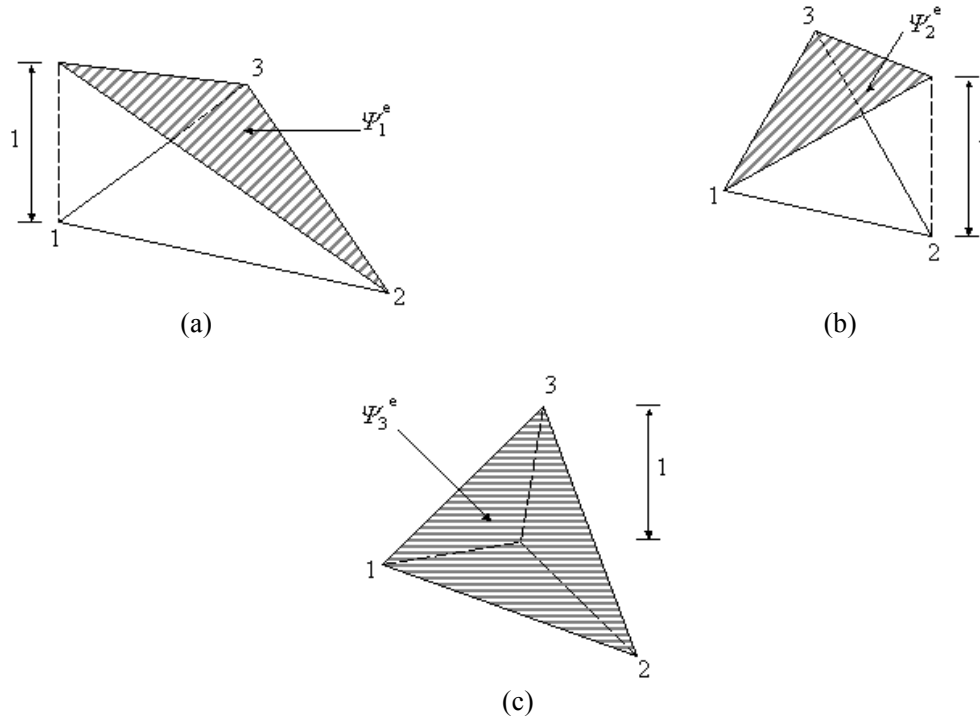


Fig. 2-3: Funções de interpolações lineares para o elemento triangular: (a) Ψ_1^e , (b) Ψ_2^e e (c) Ψ_3^e . As áreas hachuradas, representam as superfícies planares das funções.

2.2 Equação de onda vetorial

Para se obter a equação de onda de Helmholtz, faremos uso das seguintes equações de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.4)$$

Os campos \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} e \vec{B} são funções da posição e do tempo. Desta forma, pode-se supor

os campos com dependência harmônica no tempo, expresso por $\exp(i\omega t)$. Assim, as equações de (2.1)-(2.4) podem ser reescritas, da seguinte forma:

$$\nabla \times \vec{E} = -i\omega\mu\vec{H} \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \vec{H} = i\omega\varepsilon\vec{E} + \vec{J} \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.8)$$

onde os campos \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} e \vec{B} passam a ser funções somente da posição e representam, na forma fasorial, ondas monocromáticas. Os campos \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} e \vec{B} , estão relacionados através das relações constitutivas $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ e $\vec{B} = \mu\vec{H}$.

Nesta formulação, estamos considerando materiais dielétricos e sem fontes, o que nos possibilita fazer a permeabilidade igual à do espaço livre ($\mu = \mu_0$) e as densidade de carga e de corrente nulas, ou seja, $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$, respectivamente. Desta forma, as equações de Maxwell podem, ainda, ser escritas como segue:

$$\nabla \times \vec{E} = -i\omega\mu_0\vec{H} \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \vec{H} = i\omega\varepsilon\vec{E} \quad (2.10)$$

$$\nabla \cdot \varepsilon\vec{E} = 0 \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \mu_0\vec{H} = 0 \quad (2.12)$$

Nas equações (2.9)-(2.12), \vec{E} e \vec{H} representam os vetores campo elétrico e magnético, respectivamente. Nesta etapa da formulação iremos considerar meios dielétricos com anisotropia transversal e define-se os vetores unitários \hat{u}_x , \hat{u}_y e \hat{u}_z , associados às direções x , y e z , respectivamente. Desta forma, um tensor permissividade pode ser definido como segue:

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \bar{\bar{\epsilon}}_T + \epsilon_{zz} \hat{u}_z \hat{u}_z \quad (2.13)$$

onde $\bar{\bar{\epsilon}}_T$ representa um tensor transversal arbitrário 2×2 , dado por:

$$\bar{\bar{\epsilon}}_T = \epsilon_{xx} \hat{u}_x \hat{u}_x + \epsilon_{xy} \hat{u}_x \hat{u}_y + \epsilon_{yx} \hat{u}_y \hat{u}_x + \epsilon_{yy} \hat{u}_y \hat{u}_y \quad (2.14)$$

Os elementos do tensor transversal em, (2.14), podem ser generalizados como funções complexas arbitrárias, variando ao longo da seção transversal do guia, ou plano xy [14]. Assim, pode-se considerar meios com perdas, meios não-homogêneos com índices de refração do tipo gaussiano, erro complementar, exponencial, funções quadráticas, meios não-recíprocos, etc. Pode-se considerar, ainda, guias magnetoópticos, uma vez que o tensor permissividade apresenta termos fora da diagonal. Partindo das equações de Maxwell, escritas como (2.9)-(2.12), a equação de onda para o campo magnético \vec{H} pode ser obtida. Desta forma, a equação a seguir, também é conhecida como equação de duplo rotacional ou equação de Helmholtz:

$$\nabla \times \left(\bar{\bar{k}} \nabla \times \vec{H} \right) - k_0^2 \vec{H} = 0 \quad (2.15)$$

onde k_0 é o número de onda no espaço livre, dado por $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$, sendo ω a frequência angular, $\bar{\bar{k}} = \frac{1}{\bar{\bar{\epsilon}}}$, com $\bar{\bar{\epsilon}}$ representando o tensor permissividade relativa. O tensor $\bar{\bar{k}}$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\bar{\bar{k}} = \bar{\bar{k}}_T + k_{zz} \hat{u}_z \hat{u}_z \quad (2.16)$$

$$\bar{\bar{k}}_T = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} = \bar{\bar{\epsilon}}_T^{-1} \quad (2.17)$$

$$k_{zz} = \epsilon_{zz}^{-1} \quad (2.18)$$

Em adição o operador ∇ é definido como:

$$\nabla = \hat{u}_x \alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{u}_y \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{u}_z \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} = \nabla_T + \hat{u}_z \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.19)$$

onde α_x , α_y e α_z , representam parâmetros relativos às PMLs, ou ao meio com perdas virtuais. Desde que a propagação ocorra ao longo da direção z , o parâmetro α_z é igual   unidade e os outros parâmetros da PML têm que ser determinados de tal forma, que a impedância da onda possa ser contínua através das interfaces formadas entre o meio interno do domínio computacional e a PML. Isto leva a um perfeito casamento sobre as interfaces e as radiações indesejáveis são evitadas. Ou seja, simula-se uma propagação no espaço livre em domínio computacional reduzido, sem ocorrer qualquer reflexão nas paredes da janela computacional considerada. Segundo [13] e [43], os demais parâmetros da PML são especificados a partir de um parâmetro S , dado por:

$$S = 1 - i \frac{3c}{2\omega_0 n d} \left(\frac{\rho}{d} \right)^2 \ln \left(\frac{1}{R} \right), \quad (2.20)$$

onde ω_0 é a freq ncia angular, d   a espessura da PML, n   o  ndice de refração do meio adjacente, ρ   a distância da parede interna da interface da PML, R   o coeficiente de reflexão e c   a velocidade da luz no espaço livre. A Tabela 2.1 descreve os parâmetros α_x e α_y .

α_x	α_y	localização
S	1	Normal � direção x
1	S	Normal � direção y
S	S	Nas quinas

Tabela 2.1: Descrição dos parâmetros relativos às PMLs: α_x , α_y e $\alpha_z = 1$.

Para as regiões fora da PML, ou seja, as regiões internas ao domínio computacional, mas que não pertencem às regiões consideradas PMLs, os parâmetros $\alpha_{x,y}$ são iguais à unidade.

Sabe-se que a variação rápida do campo magnético pode ser removida escrevendo uma solução para a equação (2.15) como em (2.21):

$$\vec{H}(z, y, z) = \vec{h}(x, y, z) \exp(-jk_0 n_0 z), \quad (2.21)$$

onde n_0   o  ndice de refração de referência e $\vec{h}(x, y, z)$ é o campo magnético da envoltória, ou porção de variação lenta, para a qual:

$$\vec{h}_T(x, y, z) = h_x \hat{u}_x + h_y \hat{u}_y \quad (2.22)$$

e

$$\vec{h}_z = h_z \hat{u}_z. \quad (2.23)$$

As equações (2.22)-(2.23) representam as componentes transversal e longitudinal do campo magnético, respectivamente. Usando, em adição, a condição de divergente nulo para o campo magnético, $\nabla \cdot \vec{H} = 0$, têm-se que:

$$h_z = \frac{\nabla_T \cdot \vec{h}_T + \frac{\partial h_z}{\partial z}}{\gamma}, \quad (2.24)$$

onde $\gamma = jk_0 n_0$.

Substituindo-se as equações (2.19) e (2.22), na equação de onda dada por (2.15), chega-se a:

$$\nabla_T \times \bar{k}_T \nabla_T \times \vec{h}_z + \nabla_T \times \bar{k}_T \left(\hat{u}_z \times \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z} \right) - k_0^2 \vec{h}_z = 0 \quad (2.25)$$

e

$$\nabla_T \times k_{zz} \nabla_T \times \vec{h}_T + \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}_z \times \bar{k}_T \nabla_T \times \vec{h}_z \hat{u}_z + \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}_z \times \alpha_z \bar{k}_T \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}_z \times \vec{h}_T - k_0^2 \vec{h}_T = 0 \quad (2.26)$$

A equação (2.25) representa a componente longitudinal do campo magnético, pois só tem termos orientados segundo a direção axial e, a equação (2.26), representa a componente transversal do campo magnético, pois só tem termos orientados transversalmente. Seguindo com a formulação, consideraremos apenas a equação que representa a componente transversal do campo magnético. Considerando a equação (2.21) como uma solução para equação de onda (2.15), fazendo $\gamma = jk_0 n_0$, tomando a condição de divergente nulo, que leva à equação (2.24) e fazendo algumas manipulações algébricas, chega-se à seguinte equação vetorial de onda em termos da componente transversal do campo magnético:

$$\begin{aligned} \bar{k}_a \frac{\partial^2 \vec{h}_T}{\partial z^2} - 2\gamma \bar{k}_a \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z} - \bar{k}_b \nabla_T \left(\nabla_T \cdot \vec{h}_T \right) - \nabla_T \times k_{zz} \nabla_T \times \vec{h}_T + \\ (\bar{k}_c + \gamma^2 \bar{k}_a) \vec{h}_T + \frac{\partial \bar{k}_a}{\partial z} \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z} + \gamma^{-1} \frac{\partial \bar{k}_a}{\partial z} \nabla_T \frac{\partial \vec{h}_z}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Os tensores transversais, usados em (2.27), são definidos a seguir:

$$\overset{=}{k}_a = \begin{bmatrix} k_{yy} & -k_{yx} \\ -k_{xy} & k_{xx} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\overset{=}{k}_b = \gamma^{-1} \frac{\partial \overset{=}{k}_a}{\partial z} - \overset{=}{k}_a \quad (2.29)$$

$$\overset{=}{k}_c = k_0^2 - \gamma \frac{\partial \overset{=}{k}_a}{\partial z} \quad (2.30)$$

A equação (2.27) descreve a propagação de um feixe óptico em um guia de onda dielétrico anisotrópico. Por ser vetorial, esta equação descreve a dependência dos modos com relação à polarização e, também, leva em conta o acoplamento existente entre as componentes do campo \vec{H} . A partir da equação (2.27), pode-se derivar a equação de onda para uma análise escalar da propagação do feixe óptico. Neste caso, pode-se manter a anisotropia diagonal, considerar um meio isotrópico, impor a condição de guiamento fraco e admitir que os campos E_x e E_y são bem aproximados pelo modo TE ($E_y = E_z = H_x = 0$) ou pelo modo TM ($E_x = H_y = E_z = 0$), respectivamente [13]. Em adição, o meio material varia muito pouco ao longo da coordenada de propagação z , em relação à variação transversal; com isso, pode-se assumir que:

$$\left\| \frac{\partial \overset{=}{k}_a}{\partial z} \right\| \ll \left| \frac{\partial \vec{h}_z}{\partial z} \right| \ll \left| \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z} \right| \quad (2.31)$$

Considerando a equação (2.31), fica claro que os últimos dois termos de (2.27) são muito pequenos em relação ao primeiro, e podem, perfeitamente, serem desprezados sem causar qualquer efeito para o cálculo do campo h_z , portanto,

$$\left| \frac{\partial \overset{=}{k}_a}{\partial z} \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z} + \gamma^{-1} \frac{\partial \overset{=}{k}_a}{\partial z} \nabla_T \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z} \right| \ll \overset{=}{k}_a \frac{\partial^2 \vec{h}_T}{\partial z^2} \quad (2.32)$$

Aplicando (2.32) em (2.27), chega-se, finalmente, a seguinte equação de onda vetorial, usada para simular a propagação de feixes ópticos:

$$\overset{=}{k}_a \frac{\partial^2 \vec{h}_T}{\partial z^2} - 2\gamma \overset{=}{k}_a \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z} - \overset{=}{k}_b \nabla_T \left(\nabla_T \cdot \vec{h}_T \right) - \nabla_T \times k_{zz} \nabla_T \times \vec{h}_T + (\overset{=}{k}_c + \gamma^2 \overset{=}{k}_a) \vec{h}_T = 0 \quad (2.33)$$

2.3 Equação de onda vetorial para simulação da propagação de feixes ópticos

2.3.1 Aplicação do Método dos Elementos Finitos

Para se obter a forma paraxial desta análise, despreza-se o primeiro termo de (2.33). Para isso, considera-se que o guia está orientado ao longo do eixo longitudinal, ou muito próximo do mesmo, o que leva à simplificação da equação de onda de Helmholtz. Neste caso, a aproximação pode causar efeitos nocivos à análise da propagação, principalmente se a estrutura em análise sofrer variações na região de guiamento, ao longo da direção de propagação. Para amenizar este efeito foi introduzida a aproximação não-paraxial, através do uso da fórmula de Padé [25].

A aplicação do tratamento não-paraxial e a introdução de camadas perfeitamente casadas à esta formulação, em conjunto com a maneira de usar e interpretar as manipulações algébricas, é a contribuição deste trabalho em relação às demais formulações já existentes na literatura. Na aplicação do Método dos Elementos Finitos, duas formulações podem ser empregadas: a formulação variacional e o método de Galerkin. As duas convergem para a mesma solução. A formulação variacional, permite uma visão mais ampla do problema físico, e a formulação através do método de Galerkin é mais simples e de fácil aplicação. Neste trabalho, apresentaremos uma descrição breve do método variacional, pois o método usado para desenvolver a formulação, aqui apresentada, foi o método de Galerkin. Para discretizar a equação (2.33), no plano xy , é necessário obter uma forma integral equivalente. Isso pode ser feito através da análise funcional, tal que (2.33) seja correspondente a equação de Euler.

Um problema típico, de valores de contorno, pode ser descrito por uma equação diferencial $\mathcal{L}\phi = f$, aplicada no domínio Ω , juntamente com as condições de fronteira, que limita o domínio Ω . Neste caso, \mathcal{L} é um operador linear e auto-adjunto da equação de onda, f é uma função excitação e ϕ é a função a ser determinada. Para um meio não-recíproco e sem perdas, o operador \mathcal{L} é simétrico para condições de contorno apropriadas. Nestes termos, a expressão do funcional é real e pode ser diretamente associada com a energia do sistema. Para meios não-recíprocos e com perdas, como é caso em análise, (2.33), o operador \mathcal{L} é não-simétrico e não-adjunto. Com isso, nota-se que apesar do funcional ter, em algumas situações, uma interpretação física mais direta e constitua um tratamento matemático mais sofisticado, sua manipulação pode se transformar numa tarefa árdua e muito complicada [30]. Por outro lado, o método de Galerkin é mais geral e permite, de forma bastante simples e direta, obter a forma integral. Além disso, como já citado, a aplicação de ambos os métodos, tanto o de Galerkin quanto a forma variacional, corresponde à mesma formulação.

O princípio do método de Galerkin pode ser facilmente explicado. Parte-se de um problema de contorno $\mathcal{L}\phi = f$, sendo $\phi \in V(\Omega)$, onde $V(\Omega)$ define um espaço de funções e, pode-se definir um resíduo r , que pode ser dado por $r = \mathcal{L}\tilde{\phi} - f$, quando $\tilde{\phi}$ é uma aproximação da solução ϕ . Se forem tomadas funções peso ou funções testes, do tipo ω , $\forall \omega \in W$, sendo W um espaço de funções, o uso do método dos pesos residuais, ou método de Petrov-Galerkin, resume-se a encontrar $\phi = \tilde{\phi} \in V(\Omega)$

de tal forma que $\langle r, \omega \rangle = \langle \mathcal{L}(\phi), \omega \rangle - \langle f, \omega \rangle = 0$, ou:

$$\langle r, \omega \rangle = \int_{\Omega} \omega r d\Omega = 0 \quad \forall \omega \in W(\Omega) \quad (2.34)$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa um produto interno, ω é a função peso, $\langle r, \omega \rangle$ é a integral do peso residual e $W(\Omega)$ é o espaço das funções peso. A condição apresentada em (2.34), pode ser interpretada como uma obtenção da função $\phi \in V(\Omega)$, tal que o resíduo r seja ortogonal ao espaço $W(\Omega)$. Quando $V(\Omega) \neq W(\Omega)$ tem-se o método de Galerkin generalizado, ou o, já citado, método de Petrov-Galerkin. Quando $V(\Omega) = W(\Omega)$, tem-se o método de Galerkin simplificado ou, simplesmente, Galerkin.

2.3.2 Aplicação do Método de Galerkin

Para aplicar o método de Galerkin, primeiramente observa-se os procedimentos adotados anteriormente, para o método dos elementos finitos, ou seja, divide-se a região delimitada pelo domínio Ω em uma grande quantidade de elementos triangulares. O tamanho dos elementos podem ser diferentes, o que possibilita aplicar mais ou menos elementos nas regiões de interesse, o normal é usar uma maior densidade de elementos onde ocorrem as maiores variações do campo. Nesta análise, cada elemento só pode conter um tipo de meio. Portanto, a fronteira entre meios será, também, obrigatoriamente a fronteira entre elementos. Assume-se, aqui, que o domínio computacional é limitado por paredes perfeitamente casadas (PMLs), o que reduz drasticamente a janela computacional, sem causar reflexões indesejáveis, quando comparada a janelas computacionais limitadas por paredes elétricas ou magnéticas perfeitas, que devem ser colocadas bem distantes da região de guiamento da onda, para não causar reflexões. Isto leva a grandes janelas computacionais e, a um excessivo esforço computacional na análise de guias aparentemente simples.

Com relação as malhas, exploramos uma das vantagens da aplicação do método dos elementos finitos, que consiste no uso de malhas amplamente não-uniformes, provendo o grau exigido de discretização, que varia de acordo com cada região da estrutura, ou seja, permite refinamentos mais ou menos densos da malha, de acordo com o interesse. Neste trabalho, usamos malhas invariantes na direção de propagação e ajustadas durante a análise modal, que sempre precedeu a análise da propagação do feixe. De acordo com método de Galerkin, o problema em questão, estabelecido pela equação de onda vetorial apresentada em (2.33) pode ser transformado em um problema integral, ou seja, a equação (2.33), pode ser transformada numa equação integral, para z fixo, fazendo o produto interno da mesma com a função peso vetorial ω_T . Esta função peso, deve ser definida de acordo com as funções utilizadas para expandir o campo \vec{h}_T . Deste modo, a aplicação do método de Galerkin, na (2.15), é direta e o problema passa a ser: achar $\vec{h}_T \in \vec{H}_{\xi}^2(\Omega)$, de tal forma que a aplicação desse procedimento, em (2.33), leva a:

$$\int_{\Omega} (\bar{k}_a \frac{\partial^2 \vec{h}_T}{\partial z^2}) \cdot \vec{\omega}_T d\Omega - \int_{\Omega} (2\gamma \bar{k}_a \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z}) \cdot \vec{\omega}_T d\Omega - \int_{\Omega} (\bar{k}_b \nabla_T (\nabla_T \cdot \vec{h}_T)) \cdot \vec{\omega}_T d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla_T \times k_{zz} \nabla_T \times \vec{h}_T) \cdot \vec{\omega}_T d\Omega + \int_{\Omega} ((\bar{k}_c + \gamma \bar{k}_a) \vec{h}_T) \cdot \vec{\omega}_T d\Omega = 0 \quad (2.35)$$

$\forall \vec{\omega}_T \in \vec{H}_{\xi}^2(\Omega)$, onde $\vec{H}_{\xi}^2(\Omega)$ representa um subespaço do espaço de Hilbert $\vec{H}_{\xi}^2(\Omega)$, cujas funções elementos e suas primeiras e segundas derivadas pertencem ao espaço de funções de quadrado integrável no sentido de Lebesgue [14]. Para continuar com o desenvolvimento da formulação, $\vec{H}_{\xi}^2(\Omega)$ será definida a partir das condições de contorno impostas ao domínio Ω , no qual a seção transversal do guia de onda está contida.

Para resolver as integrais do terceiro e quarto termos da equação (2.35), fazemos uso de algumas identidades vetoriais, conforme mostra o Anexo B, e efetuamos a integração por partes obtendo, respectivamente:

$$\int_{\Omega} (\bar{k}_b \nabla_T (\nabla_T \cdot \vec{h}_T)) \cdot \vec{\omega}_T d\Omega = \nabla_T \cdot \vec{h}_T (\bar{k}_b \vec{\omega}_T) \cdot \vec{n} dl - \int_{\Omega} (\nabla_T \cdot \vec{h}_T) \nabla_T (\bar{k}_b \vec{\omega}_T) d\Omega \quad (2.36)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla_T \times k_{zz} \nabla_T \times \vec{h}_T) \cdot \vec{\omega}_T d\Omega = \int_{\partial\Omega} (k_{zz} \nabla_T \times \vec{h}_T) \cdot (\vec{\omega}_T \times \vec{n}) dl + \int_{\Omega} (k_{zz} \nabla_T \times \vec{h}_T) \cdot (\nabla_T \times \vec{\omega}_T) d\Omega \quad (2.37)$$

Substituindo as equações (2.36) e (2.37) na equação (2.35), passaremos, então, a ter um problema definido por, achar $\vec{h}_T \in \vec{H}_{\xi}^1(\Omega)$, de tal forma que:

$$\int_{\Omega} (\bar{k}_a \frac{\partial^2 \vec{h}_T}{\partial z^2}) \cdot \vec{\omega}_T d\Omega - \int_{\Omega} (2\gamma \bar{k}_a \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z}) \cdot \vec{\omega}_T d\Omega - \int_{\partial\Omega} (\nabla_T \cdot \vec{h}_T) (\bar{k}_b \vec{\omega}_T) \cdot \vec{n} dl + \int_{\Omega} (\nabla_T \cdot \vec{h}_T) \nabla_T (\bar{k}_b \vec{\omega}_T) d\Omega - \int_{\partial\Omega} (k_{zz} \nabla_T \times \vec{h}_T) \cdot (\vec{\omega}_T \times \vec{n}) dl - \int_{\Omega} (k_{zz} \nabla_T \times \vec{h}_T) \cdot (\nabla_T \times \vec{\omega}_T) d\Omega + \int_{\Omega} ((\bar{k}_c + \gamma \bar{k}_a) \vec{h}_T) \cdot \vec{\omega}_T = 0 \quad (2.38)$$

$\forall \vec{\omega}_T \in \vec{H}_{\xi}^1(\Omega)$; aqui \vec{n} é um vetor unitário normal à aresta e aponta para fora do elemento, como mostra a Fig. 2-4, $\partial\Omega$ representa todos os contornos sobre o domínio da seção transversal que inclui as interfaces entre elementos Ω , isto é, $\partial\Omega$ inclui todas as interfaces ($\partial\Omega_{\text{interface}}$) e contornos externos ($\partial\Omega_{\text{ext}}$). Em outras palavras, $\partial\Omega$ é o contorno que inclui as interfaces entre elementos de diferentes materiais e as paredes artificiais que limitam o domínio computacional. Aqui, ($\partial\Omega_{\text{interface}}$) é assumido de forma retangular e separa a região com PMLs da região interna do guia, $\partial\Omega_{\text{ext}}$ pode ser uma parede elétrica, ou uma parede magnética. $\vec{H}_{\xi}^1(\Omega)$ é um subespaço do espaço de Hilbert $H^1(\Omega)$, cujas funções elementares e suas primeiras derivadas pertencem ao espaço de funções de quadrado integrável no sentido de Lebesgue. Observa-se, então, que $\vec{H}_{\xi}^2(\Omega) \in \vec{H}_{\xi}^1(\Omega)$ e $\vec{H}^2(\Omega) \in \vec{H}^1(\Omega)$. Com isso, conclui-se que a integração por partes, introduzida na formulação de Galerkin, faz com que a

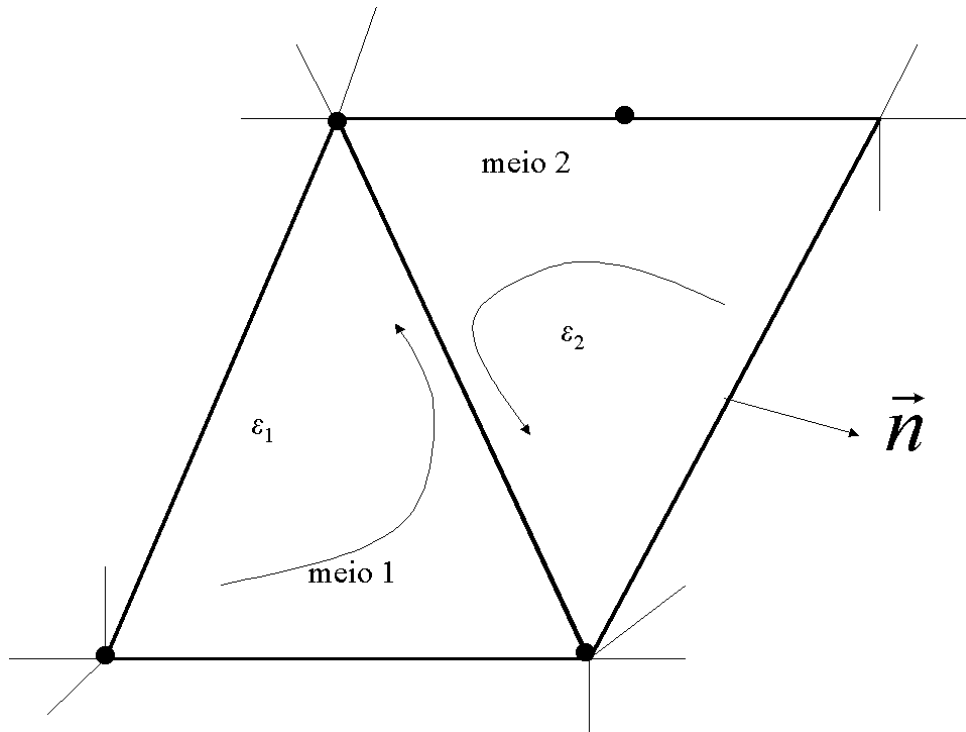


Fig. 2-4: Dois elementos vizinhos de meios diferentes. As setas indicam o sentido de integração das integrais de linha

solução desejada seja procurada no espaço $\overline{H}^1(\Omega)$, que é equivalente ao espaço de funções contínuas. Conclui-se que a partição do domínio Ω , por meio de subdomínios, nos permite definir um conjunto finito de funções de base, que define o número de incógnitas que está diretamente associado ao número de nós dos elementos que cobre o domínio Ω , aqui representado pela malha. Portanto, quanto mais densa a malha, maior será o número de funções de base e o número de elementos. Se fizermos $\{\psi_i\}$, $i = 1, \dots, n$, um conjunto de funções de base associado a uma determinada malha, um espaço de dimensão finita, do tipo $V_n(\Omega) \in \overline{H}^1(\Omega)$, será gerado. Portanto, o processo de aproximação consiste em aplicar (2.38) para o subespaço $V_n(\Omega)$, o que corresponde a uma discretização de (2.38), gerando uma solução. Em outras palavras, o processo de aproximação é obtido através de subespaços de dimensões finitas. A escolha dos subespaços $V_n(\Omega)$ e de suas funções de base $\{\psi_i\}$, definem os esforços computacionais, o que nos leva a admitir que tais escolhas podem ser feitas de forma a otimizar os recursos computacionais disponíveis.

2.3.3 Limitação do domínio computacional

Nesta seção, apresenta-se a formulação da equação de onda vetorial para domínios 2-D, assim como, também, a sua discretização utilizando elementos finitos. Por estarmos tratando de guias de onda e estruturas que em geral são abertos, as equações deveriam ser resolvidas em todo o plano R^2 , de forma que todo o campo radiado (extendendo-se a grandes distâncias) pudesse ser tratado

adequadamente. Dada a impossibilidade prática deste tratamento, consideramos um domínio Ω , finito em R^2 , limitado ou truncado por uma fronteira Γ , no qual adotamos paredes perfeitamente casadas (PMLs, *Perfectly Matched Layers*) como condições de contorno que simulam o espaço livre. Considere uma estrutura óptica bidimensional generalizada, de geometria arbitrária, como um guia dielétrico anisotrópico imerso em um meio dielétrico, onde a janela computacional (domínio retangular 2-D) está no plano xy , e não existe variação na direção z , ($\partial/\partial z = 0$). Neste caso, os parâmetros das PMLs obedecem as condições apresentadas na equação (2.20) e na Tabela 2.1. Para simplificar a formulação e a implementação computacional, definem-se eixos de coordenadas retangulares locais sobre as linhas do contorno. Também, para um correto tratamento dos guias, aqui tratados, usamos PMLs juntamente com condições de campo nulo ($\phi = 0$) nas regiões de Γ , onde os campos vão até o infinito. Isto para ambas as polarizações TE e TM.

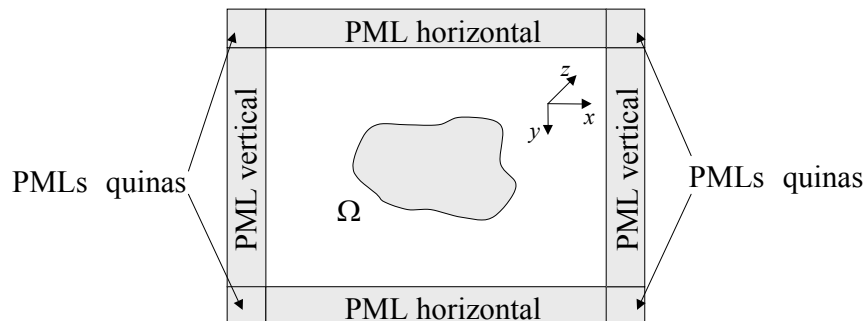


Fig. 2-5: Seção transversal de uma guia dielétrico anisotrópico imerso em um dielétrico rodeado por PMLs.

2.3.4 Integrais de linha

Com relação as integrais de linha, a análise foi feita de maneira minuciosa e precisa. Toda essa preocupação deve-se ao fato de que necessita-se de um refinamento local apropriado. Neste contexto, os cálculos das integrais de linha, do terceiro e quinto termos da equação (2.38), foram feitos numericamente obedecendo à condição de que $\nabla \cdot \vec{h}_T$ deve ser contínuo em todo o domínio. O quinto termo da (2.38) representa uma integral de linha e, de acordo com essa formulação, é nula durante todo o domínio e em qualquer situação. Portanto, a nossa preocupação restringe-se a resolver o terceiro termo de (2.38), que representa uma integral de linha não-nula em algumas situações, mas que é nula quando aplicada sobre paredes magnéticas perfeitas (PMC), ou sobre paredes elétricas perfeitas (PEC), para materiais diagonalmente anisotrópico. Para entender o efeito das integrais de linha, passaremos, então, a analisar a integral de linha representada pelo terceiro termo de (2.38). Assim, passaremos ao cálculo do termo, reescrito em (2.39):

$$\int_{\partial\Omega} (\nabla_T \cdot \vec{h}_T) (\bar{k}_b \vec{\omega}_T) \cdot \vec{n} dl \quad (2.39)$$

Da relação do divergente $\nabla \cdot \vec{H} = 0$, obtém-se:

$$\nabla_T \cdot \vec{h}_T \cong \gamma h_z \quad (2.40)$$

onde $\gamma = ik_0\beta_z$, no qual k_0 representa o número de onda no espaço livre e β_z é o índice efetivo do modo propagante.

Substituindo (2.39) em (2.38), chega-se a:

$$ik_0\beta_z \int_{\partial\Omega} h_z (\bar{k}_b \vec{\omega}_T) \cdot \vec{n} dl \quad (2.41)$$

A equação (2.41) mostra, claramente, o que ocorre com a integral de linha (2.39) quando aplicada sobre uma PEC ou PMC, ou em uma das arestas pertencente a elementos contidos no domínio Ω . Em uma Parede Elétrica Perfeita, a integral de linha (2.39), conforme mostra (2.41), se anula quando ε é diagonalmente anisotrópico ($k_{xy} = k_{yx} = 0$), pois $h_z (\bar{k}_b \vec{\omega}_T) \cdot \vec{n}$ anula-se. Quanto aplicada sobre uma Parede Magnética Perfeita, a integral de linha (2.39), conforme indica (2.41), anula-se pois a componente do campo magnético h_z , tangente à PMC, é nula. Para os elementos do interior do domínio Ω , $\vec{\omega}_T = \omega_x \hat{u}_x + \omega_y \hat{u}_y$, e h_z são contínuos nas interfaces que separam elementos de meios diferentes, o que não ocorre com a integral de linha, devido ε ser descontínuo para estes elementos. Isso pode ser demonstrado aplicando-se a integral de linha nos elementos vizinhos, mostrados na Fig.2-4. Procedendo desta forma, obtêm-se as seguintes expressões:

$$\epsilon_1 = ik_0\beta_z \int_a^b h_z [(k_{bxx1}\omega_x + k_{bxy1}\omega_y) \vec{n}_x + (k_{byx1}\omega_x + k_{byy1}\omega_y) \vec{n}_y] dl, \quad (2.42)$$

para o meio 1, e:

$$\epsilon_2 = -ik_0\beta_z \int_a^b h_z [(k_{bxx2}\omega_x + k_{bxy2}\omega_y) \vec{n}_x + (k_{byx2}\omega_x + k_{byy2}\omega_y) \vec{n}_y] dl, \quad (2.43)$$

para o meio 2,

Para obtenção de (2.42) e (2.43), considerou-se $\vec{\omega}_T = \omega_x \hat{u}_x + \omega_y \hat{u}_y$ e $\vec{n} = n_x \hat{u}_x + n_y \hat{u}_y$. Considerou-se, também, que k_{b1} e k_{b2} são valores de k_b para os meios 1 e 2, respectivamente. Somando as equações (2.42) e (2.43), chega-se à seguinte equação:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 + \epsilon_2 = ik_0\beta_z \{ \int_a^b h_z [(k_{bxx1}\omega_x + k_{bxy1}\omega_y) \vec{n}_x + (k_{byx1}\omega_x + k_{byy1}\omega_y) \vec{n}_y] d\ell - \\ \int_a^b h_z [(k_{bxx2}\omega_x + k_{bxy2}\omega_y) \vec{n}_x + (k_{byx2}\omega_x + k_{byy2}\omega_y) \vec{n}_y] d\ell \} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Verificando a equação (2.44), nota-se, claramente, que $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$ se $k_{b1} = k_{b2}$. Isso significa que a integral de linha (2.39) anula-se quando aplicada em elementos pertencentes ao mesmo meio, pois as contribuições se cancelam, uma vez que a integral de linha é feita em sentidos opostos, para os dois elementos adjacentes. Verifica-se, também, que para $\epsilon_1 + \epsilon_2 \neq 0$, o que ocorre quando $k_{b1} \neq k_{b2}$, a integral de linha, em questão, não se anula quando aplicada em elementos que pertencem a meios diferentes.

Quando consideramos o domínio limitado por paredes elétricas, ou magnéticas, perfeitas, podemos facilmente concluir que a integral de linha, representada pelo quinto termo da equação (2.38) é nula, para qualquer situação. Manipulando-se a equação de Maxwell dada por $\nabla \times \vec{H} = i\omega\epsilon\vec{E}$, conclui-se que $i\omega e_z \hat{u}_z = k_{zz} \nabla_T \times \vec{h}_T$. Assim chega-se a [14]:

$$\int_{\partial\Omega} (k_{zz} \nabla_T \times \vec{h}_T) \cdot (\vec{\omega}_T \times \vec{n}) d\ell = i\omega \int_{\partial\Omega} e_z \hat{u}_z \cdot (\vec{\omega}_T \times \vec{n}) d\ell \quad (2.45)$$

onde e_z é a componente do campo elétrico na direção \hat{u}_z , que é contínua nas interfaces dos elementos. Nos elementos internos do domínio Ω , as contribuições da integral de linha se cancelam. Quando feita sobre paredes elétricas ou magnéticas, a integral de linha também anula-se, pois e_z anula-se sobre uma PEC e o produto vetorial $\omega_T \times \vec{n}$, é nulo quando aplicado sobre uma PMC.

2.3.5 Discretização

Prosseguindo com o modelo convencional do método dos elementos finitos, o domínio a ser discretizado, está mostrado na Fig. 2-5. As componentes do campo magnético transversal $h_x(x, y, z)$ e $h_y(x, y, z)$ são expandidas sobre cada elemento, em termos das funções de base de segunda ordem, do tipo $\{\Psi_j\}$, $j = 1, \dots, N_p$, sendo N_p o número de nós em cada elemento e , já que a malha é dividida em Nel elementos. Desta forma, a componente do campo transversal $\vec{h}_T(x, y, z)$ pode ser expressa como:

$$\vec{h}_T(x, y, z) = \sum_{i=1}^{N_{px}} h_{xj}(z) \Psi_j(x, y) \hat{u}_x + \sum_{N_{py}=1}^{N_p} h_{yj}(z) \Psi_j(x, y) \hat{u}_y, \quad (2.46)$$

onde os coeficientes h_{xj} e h_{yj} são campos desconhecidos em cada nó. Para elementos lineares, $N_p = 3$ e, para elementos quadráticos, $N_p = 6$, como mostra a Fig. 2-6.

Substituindo (2.46) em (2.38), teremos um problema matricial de seguinte forma:

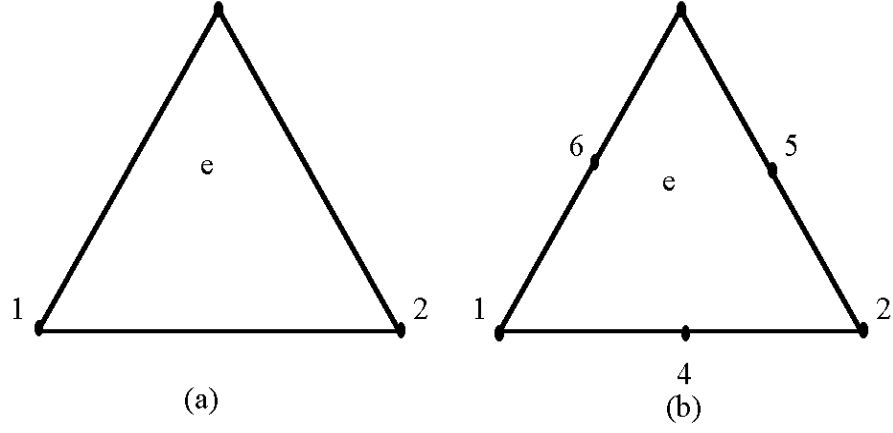


Fig. 2-6: Representação de elementos triangulares: (a) linear e (b) quadrático.

$$[M] \frac{\partial^2 \{\vec{h}_T\}}{\partial z^2} - 2\gamma [M] \frac{\partial \{\vec{h}_T\}}{\partial z} + ([K] + \gamma^2 [M]) \{\vec{h}_T\} = \{0\} \quad (2.47)$$

onde $\{\vec{h}_T\}$ representa um vetor coluna contendo valores desconhecidos de h_{xj} e h_{yj} , $\{0\}$ é um vetor coluna nulo, $[M]$ e $[K]$ são chamadas de matrizes globais, definidas por:

$$[M]_{ij} = \int_{\Omega} \bar{k}_a \vec{\psi}_j \cdot \vec{\psi}_i d\Omega \quad (2.48)$$

$$[K]_{ij} = - \int_{\Omega} (k_{zz} \nabla_T \times \vec{\psi}_j) \cdot (\nabla_T \times \vec{\psi}_i) d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla_T \cdot \vec{\psi}_j) \nabla_T \cdot (\bar{k}_b^{\tau} \vec{\psi}_i) d\Omega - \int_{\partial\Omega} (\nabla_T \cdot \vec{\psi}_j) \nabla_T (\bar{k}_b^{\tau} \vec{\psi}_i) \cdot \vec{n} dl + \int_{\Omega} \bar{k}_c \vec{\psi}_j \vec{\psi}_i d\Omega \quad (2.49)$$

onde:

$$\vec{\psi}_j = \psi_j \hat{u} \text{ e } \vec{\psi}_i = \psi_i \hat{u} \quad (2.50)$$

$$\hat{u} = \hat{u}_x \text{ para } j = 1, \dots, Npx \quad (2.51)$$

$$\hat{u} = \hat{u}_y \text{ para } j = Npx + 1, \dots, Np \quad (2.52)$$

Em (2.48) e (2.49), $\partial\Omega$ representa todos os contornos sobre a seção transversal do domínio Ω , \vec{n} é o vetor normal unitário. Normalmente, $\partial\Omega$ inclui todas as interfaces ($\partial\Omega_{\text{interface}}$) e o contorno externo ($\partial\Omega_{\text{ext}}$). As matrizes $[M]$ e $[K]$ podem ser expressas como somas de elementos de matrizes, com relação às coordenadas x e y , sobre todos os elementos e , como segue:

$$[M] = \sum^e \begin{bmatrix} [M_{xx}^e] & [M_{xy}^e] \\ [M_{yx}^e] & [M_{yy}^e] \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

$$[K] = \sum^e \begin{bmatrix} [K_{xx}^e] & [K_{xy}^e] \\ [K_{yx}^e] & [K_{yy}^e] \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Onde, os elementos das matrizes, mostradas em (2.53) e (2.54), podem ser obtidos aplicando-se as expressões globais (2.48) e (2.49), sobre cada elemento e . Desta forma, obtém-se:

$$[M_{xx}^e] = k_{yy}^e [S_1^e] \quad (2.55)$$

$$[M_{xy}^e] = -k_{yx}^e [S_1^e] \quad (2.56)$$

$$[M_{yx}^e] = -k_{xy}^e [S_1^e] \quad (2.57)$$

$$[M_{yy}^e] = k_{xx}^e [S_1^e] \quad (2.58)$$

$$[K_{xx}^e] = -\alpha_y^2 k_{zz}^e [S_3^e] - \alpha_x^2 k_{bxx}^e [S_2^e] - \alpha_x \alpha_y k_{bxy}^e [S_4^e] - \alpha_x (k_{bxx}^e n_x^e + k_{bxy}^e n_y^e) [L_1^e] + k_{cxx}^e [S_1^e] \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} [K_{xy}^e] = & -\alpha_x \alpha_y k_{zz}^e [S_4^e] - \alpha_y \alpha_x k_{bxx}^e [S_4^e]^T - \alpha_y^2 k_{bxy}^e [S_3^e] - \\ & \alpha_y (k_{bxx}^e n_x^e + k_{bxy}^e n_y^e) [L_2^e] + k_{cxy}^e [S_1^e] \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$[K_{yx}^e] = -\alpha_y \alpha_x k_{zz}^e [S_4^e]^\tau - \alpha_x^2 k_{byx}^e [S_2^e] - \alpha_x \alpha_y k_{byy}^e [S_4^e] - \alpha_x (k_{byx}^e n_x^e + k_{byy}^e n_y^e) [L_1^e] + k_{cyy}^e [S_1^e] \quad (2.61)$$

$$[K_{yy}^e] = -\alpha_x^2 k_{zz}^e [S_2^e] - \alpha_y \alpha_x k_{byx}^e [S_4^e]^\tau - \alpha_y^2 k_{byy}^e [S_3^e] - \alpha_x (k_{byx}^e n_x^e + k_{byy}^e n_y^e) [L_2^e] + k_{cyy}^e [S_1^e] \quad (2.62)$$

Onde, k_{zz}^e , k_{rs}^e e k_{lrs}^e são, respectivamente, os valores das componentes k_{zz} , k_{rs} e k_{lrs} sobre cada elemento e , onde os sub-índices (r,s) representam o par coordenado (x,y) e o sub-índice l representa b ou c , ambos previamente definidos em (2.16), (2.29) e (2.30). As matrizes elementares auxiliares $[S_{1,2,3,4}^e]$ e $[L_{1,2}^e]$, são dadas por:

$$[S_1^e] = \int_{\Omega^e} \{\psi^e\} \{\psi^e\}^\tau d\Omega \quad (2.63)$$

$$[S_2^e] = \int_{\Omega^e} \frac{\partial \{\psi^e\}}{\partial x} \frac{\partial \{\psi^e\}^\tau}{\partial x} d\Omega \quad (2.64)$$

$$[S_3^e] = \int_{\Omega^e} \frac{\partial \{\psi^e\}}{\partial y} \frac{\partial \{\psi^e\}^\tau}{\partial y} d\Omega \quad (2.65)$$

$$[S_4^e] = \int_{\Omega^e} \frac{\partial \{\psi^e\}}{\partial y} \frac{\partial \{\psi^e\}^\tau}{\partial x} d\Omega \quad (2.66)$$

$$[L_1^e] = \oint_{\partial\Omega^e} \{\psi^e\} \frac{\partial \{\psi^e\}^\tau}{\partial x} dl \quad (2.67)$$

$$[L_2^e] = \oint_{\partial\Omega^e} \{\psi^e\} \frac{\partial \{\psi^e\}^\tau}{\partial y} dl \quad (2.68)$$

onde $\{\psi^e\}$ representa um vetor coluna contendo funções de forma, Ω^e e $\partial\Omega^e$ denotam, respectivamente, a área dos elementos e 's e os contornos, n_x^e e n_y^e , são respectivamente, as componentes do vetor normal unitário com relação às coordenadas x e y , para $\partial\Omega^e$. Proceguindo com a formulação, o próximo passo é resolver a equação (2.47). Para isso seguimos o procedimento adotado por [26] e o aplicamos com a

aproximação não-paraxial do tipo Padé de ordem (1,1) [25], em (2.47), produzindo a seguinte equação matricial:

$$\left[\widetilde{M}\right] \frac{d\{\vec{h}_T\}}{dz} + [K]\{\vec{h}_T\} = \{0\} \quad (2.69)$$

com

$$\left[\widetilde{M}\right] = [M] - \frac{1}{4\gamma^2} ([K] + \gamma^2 [M]) \quad (2.70)$$

De (2.69), pode-se obter, facilmente, a formulação paraxial, fazendo $\left[\widetilde{M}\right] = [M]$. As matrizes $\left[\widetilde{M}\right]$ e $[K]$ são esparsas, não-simétricas, não-hermiteanas, de ordem $2n_p \times 2n_p$, sendo n_p o número de incógnitas associadas aos nós da malha discretizada. Finalmente, o próximo passo é obter a solução da equação (2.69). Para isso, aplicou-se o método das diferenças finitas, transformando o problema em um sistema de equações algébricas do tipo:

$$\left(\left[\widetilde{M}(z)\right] + \theta\Delta z [K(z)]\right) \left\{\vec{h}_T(z + \Delta z)\right\} = \left(\left[\widetilde{M}(z)\right] - (1 - \theta)\Delta z [K(z)]\right) \left\{\vec{h}_T(z)\right\} \quad (2.71)$$

onde Δz é o passo de propagação ao longo da direção z e $\theta(0 \leq \theta \leq 1)$ é introduzido para controle de estabilidade do método, ou seja, decide qual o esquema de diferenças finitas a ser usado. A escolha de θ pode variar entre 0 e 1. Estudos realizados sobre estabilidade confirmam que este método é incondicionalmente estável, para $0 \leq \theta \leq 1$. Para $\theta = 0,5$, em (2.71), fornece o algoritmo de Crank-Nicholson, que é bastante empregado devido à sua tendência a ser estável e não causar problemas de inconsistência de energia durante a propagação. Salienta-se, entretanto, que as matrizes que compõem a equação (2.69), $\left[\widetilde{M}\right]$ e $[K]$, são esparsas, sendo a maior parte de seus elementos nulos. Com isso, pode-se utilizar métodos otimizados e disponíveis em bibliotecas numéricas, como o programa Me28 da Harwell [14], que trabalha com sistemas lineares, não-simétricos, esparsos e não-hermiteanos. Para melhorar a precisão do método aqui usado, o índice de refração de referência é recalculado a cada passo de propagação, seguindo a prescrição dada em [44], como segue:

$$n_0^2 = \text{Re} \left[\frac{\left\{\vec{h}_T(z)\right\}^\dagger [K(z)] \left\{\vec{h}_T(z)\right\}}{k_0^2 \left\{\vec{h}_T(z)\right\}^\dagger [M(z)] \left\{\vec{h}_T(z)\right\}} \right] \quad (2.72)$$

sendo que, \dagger denota o complexo conjugado e transposto. A expressão (2.72) pode ser interpretada como uma medida da composição do modo espectral de $\left\{\vec{h}_T(z)\right\}$. Se fizermos $\left\{\vec{h}_{T\ell}(z)\right\}$ e $n_\ell(z)$

corresponderem aos índices de modo local e do modo efetivo, respectivamente, estaremos satisfazendo o problema de análise modal; desta forma:

$$[K(z)] \left\{ \vec{h}_{T\ell}(z) \right\} = k_0^2 n_\ell^2(z) [M(z)] \left\{ \vec{h}_{T\ell}(z) \right\} \quad (2.73)$$

Normalizando os modos locais, teremos:

$$\left\{ \vec{h}_{T\ell}(z) \right\}^\dagger [M(z)] \left\{ \vec{h}_T(z) \right\} = \delta_{\ell m} \quad (2.74)$$

Expandindo $\left\{ \vec{h}_T(z) \right\}$ em termos dos modos locais, tem-se:

$$\left\{ \vec{h}_T(z) \right\} = \sum_{\ell=1}^{N_p} \xi_\ell(z) \left\{ \vec{h}_{T\ell}(z) \right\} \quad (2.75)$$

e, então, (2.73) pode ser escrita como:

$$n_0^2 = \text{Re} \left[\sum_{\ell=1}^{N_p} \xi_\ell(z) n_\ell^2(z) \right] \quad (2.76)$$

onde os coeficientes positivos $\xi_\ell(z)$ são definidos como $\xi_\ell(z) = \frac{|\xi_\ell(z)|^2}{\sum_{m=1}^{N_p} |\xi_m(z)|^2}$, e podem ser chamados de “modos espectrais de pesos”. De (2.76), torna-se clara a interpretação dada para (2.72). De fato, (2.76) representa uma média dos modos espectrais de peso dos modos dos índices efetivos, tomados da composição modal de $\left\{ \vec{h}_T(z) \right\}$. Dessa forma, (2.76) pode ser vista como uma representação do valor esperado para o índice efetivo. Os resultados numéricos apresentados neste trabalho, foram obtidos mediante um programa computacional, desenvolvido pelo autor desta tese de doutorado, elaborado em FORTRAN, com o auxílio do MATLAB 6. Todo o processamento de dados foi feito em computador PC, XEON 2 GHz, com 2 GB de memória RAM.

2.3.6 Análise Modal

A análise modal desempenha papel importante na compreensão do comportamento dinâmico de uma estrutura. Tal compreensão acaba por propiciar a obtenção de autovalores reais ou complexos, que definem o comportamento modal dos guias de onda. Neste contexto, todas as simulações apresentadas neste trabalho foram precedidas de uma análise modal, feita através de um programa computacional, desenvolvido pelo o grupo de pesquisa [7], ao qual o autor desta tese de doutorado está vinculado. Com

o conhecimento da formulação teórica, e do funcionamento do programa computacional, que gera os modos, foi possível fazer a análise modal de cada uma das estruturas apresentadas nesta tese e fazer as comparações desejadas, com a finalidade de mostrar a eficiências da formulação aqui apresentada. O programa computacional de análise modal, usado durante a realização deste trabalho, foi elaborado em FORTRAN e permite ao usuário trabalhar com dados experimentais ou valores colhidos na literatura.

Capítulo 3

Análise pelo Método da Propagação de Feixe em Meios Com Dielétricos Isotrópicos

3.1 Introdução

Para mostrar a aplicabilidade das técnicas propostas, faremos, neste Capítulo, a análise de estruturas constituídas por dielétricos isotrópicos. Os resultados, aqui obtidos, apresentam uma boa concordância com os resultados provenientes do uso de técnicas de análise já conhecidas e consagradas, tais como o método BPM escalar [45] e o método VBPM que emprega as três componentes do campo \vec{h} [46]. Varias outras comparações foram feitas com os métodos apresentados e publicados em congressos e revistas especializadas na área. Para todas as simulações e análises da propagação apresentadas neste Capítulo, foram feitas, também, a análise modal e os resultados foram comparados e apresentaram ótimas concordâncias. Para validar a nossa técnica numérica, nós primeiramente iremos considerar um conversor de polarização passivo, em seguida faremos a análise em guias de onda acoplados, depois analisaremos a fibra óptica tipo D isotrópica e, finalmente, analisaremos o guia de onda costela em forma de junção Y.

3.2 Conversor de polarização passivo

O projeto de conversores de polarização passivo ou, simplesmente, rotatores, tem sido estudado por diversos pesquisadores, com o intuito de, cada vez mais, encurtar a distância de acoplamento entre os modos que se propagam na estrutura. Vale ressaltar que o método apresentado é muito conveniente para situações em que temos uma diferença considerável entre as permissividades relativas transversais do guia de onda ($\bar{\epsilon}_T$) e do meio em que o mesmo está imerso, uma vez que a condição de guiamento fraco não precisa ser levada em consideração. Para analisarmos o conversor de polarização passivo,

selecionamos a estrutura mostrada na Fig. 3-1, que será usada para a propagação do feixe óptico em um guia constituído por três regiões L_1 , L_c e L_2 , respectivamente, de forma que a propagação ocorra na direção z . Os parâmetros da estrutura foram obtidos e otimizados através de algoritmos genéticos e pela análise modal desenvolvida em [47].

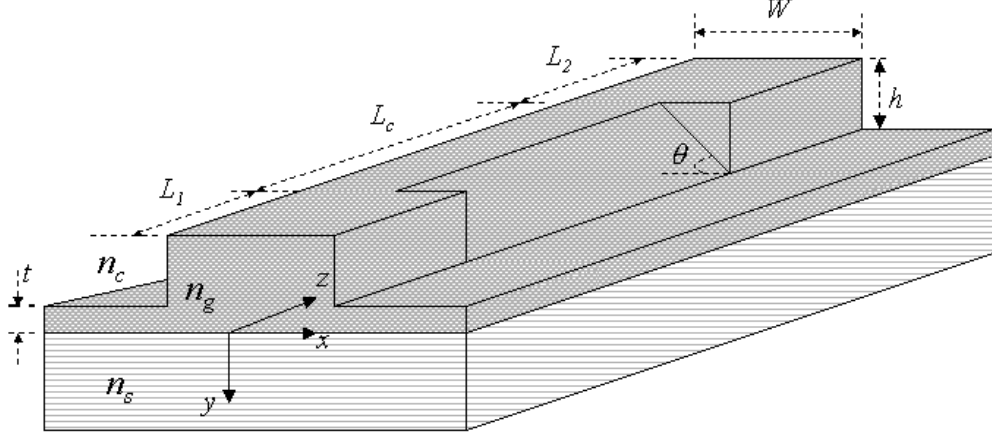


Fig. 3-1: Guia de onda conversor de polarização passivo.

Na região de comprimento L_c da estrutura mostrada na Fig. 3-1, devido a um corte introduzido com inclinação θ , os dois primeiros modos da estrutura são híbridos; desta forma, a amplitude máxima de cada componente, praticamente coincidem na mesma posição. Os máximos normalizados dos, dois modos considerados, são tratados aqui como $\vec{H}_0 = h_0\hat{u}_x + \hat{u}_y$ e $\vec{H}_1 = -\hat{u}_x + h_1\hat{u}_y$, com constantes de propagação β_0 e β_1 , respectivamente, sendo $\beta_0 > \beta_1$, $0 \leq h_0$ e $h_1 \leq 1$. Quando os modos híbridos estão próximos da unidade, temos as componentes h_0 e h_1 . Estes modos devem possuir campos dominantes de amplitudes parecidas, para que o acoplamento seja o mais eficiente possível. Por outro lado, eles devem ser altamente híbridos, para que seja possível a transferência de potência de uma polarização para outra. Considerando o campo magnético total \vec{H} como uma combinação linear dos dois modos, a amplitude máxima pode ser escrita como:

$$\vec{H} = H_x\hat{u}_x + H_y\hat{u}_y = \frac{h_0 \exp(-i\beta_0 z)}{1+h_0h_1} (1 - \exp(-i\Delta\beta z)\hat{u}_x) + \frac{\exp(-i\beta_0 z)}{1+h_0h_1} (1 + h_0h_1 \exp(-i\Delta\beta z)\hat{u}_y) \quad (3.1)$$

onde $\Delta\beta = \beta_0 - \beta_1$. A expressão (3.1) foi obtida de tal forma que, na entrada ($z = 0$), \vec{H} coincide com a polarização TE pura, para a qual tem-se $\min |H_x| = 0$ e $\max |H_y| = 1$. Quando o comprimento $\Delta\beta z = \pi$ radianos, tem-se $\max |H_x| = \frac{2h_0}{1+h_0h_1}$ e $\min |H_y| = \frac{1-h_0h_1}{1+h_0h_1}$. Portanto, nesta situação o acoplamento é definido para ocorrer na distância L_π dada por:

$$L_\pi = \frac{\pi}{\lambda \Delta \beta}, \quad (3.2)$$

onde λ é o comprimento de onda. Portanto, fica claro que, quando os modos altamente híbridos assumem a polarização TM , temos a situação ideal em que $\max |H_x| = 1$ e $\min |H_y| = 0$. A potência normalizada P_c , na região de comprimento $z = L_c$ Fig.3-1, acoplada para a componente x na distância de acoplamento, é dada por:

$$P_c = |H_x|^2 = \left(\frac{2h_0}{1 + h_0 h_1} \right)^2 \quad (3.3)$$

Os parâmetros da estrutura mostrada na Fig. 3-1, usados nesta análise, foram: $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$; $t = 0,1 \mu\text{m}$; $h = 0,8 \mu\text{m}$; $W = 1,4 \mu\text{m}$; $n_c = 1,0$; $n_g = 3,44$, $n_s = 3,235$ e $\theta = 46^\circ$. Com estes parâmetros, obteve-se um acoplamento de, aproximadamente, 99 % para um comprimento de propagação, na região do corte, de $L_c \cong 90 \mu\text{m}$. A Fig 3-2 mostra a potência normalizada ao longo do guia.

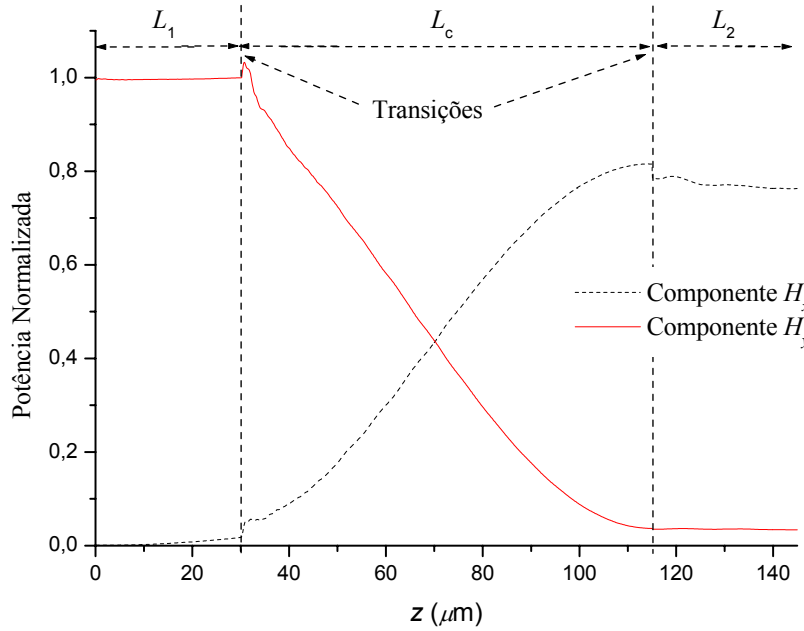


Fig. 3-2: Potência normalizada com perdas totais de 1,1579 dB e 99% de acoplamento.

Na propagação, utilizou-se o passo de propagação $\Delta z = 0,1 \mu\text{m}$. Para discretizar o domínio usamos uma malha com 5.300 elementos lineares, para uma janela computacional de $6 \mu\text{m} \times 6 \mu\text{m}$, sendo o campo lançado em $z = 0$, como uma combinação linear dos dois modos (3.1). Estes campos foram provenientes da análise modal. Pode-se observar, claramente, que ao longo do comprimento L_c ,

Fig. 3-2, os modos se acoplam quase que completamente. A Fig. 3-3 mostra as curvas de nível para o valor absoluto das componentes de campo \vec{h} transversal.

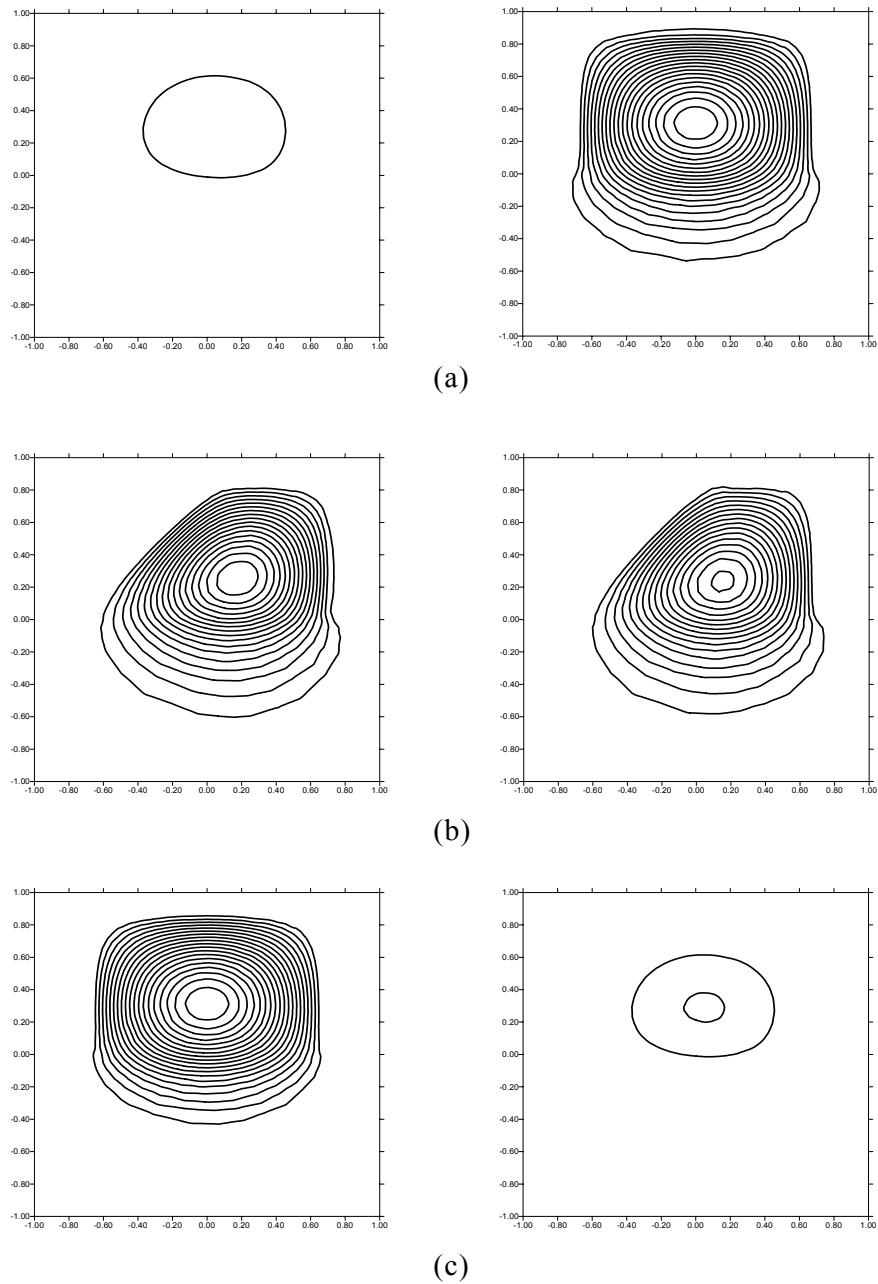


Fig. 3-3: Valor absoluto das componentes h_x (coluna esquerda) e h_y (coluna direita) para: (a) $z = 0 \mu\text{m}$, (b) $z = 75 \mu\text{m}$ e (c) $z = 150 \mu\text{m}$.

Pode-se observar a concordância das componentes do campo transversal \vec{h}_T , para a estrutura analisada. Esta análise tem uma ótima concordância com a análise modal feita em [47].

3.3 Análise em guias de onda acoplados

Prosseguindo com as aplicações desta formulação, passaremos a analisar a propagação em uma estrutura formada por duas fibras, com seção circular de raio $r=0,5 \mu\text{m}$, espaçadas de uma distância \mathbf{d} , constante ao longo da propagação e suficientemente pequena para se obter um forte acoplamento entre as fibras, como mostrado na Fig. 3-4. As fibras têm índices de refração no núcleo n_2 , e estão imersas em uma casca com índice de refração n_1 .

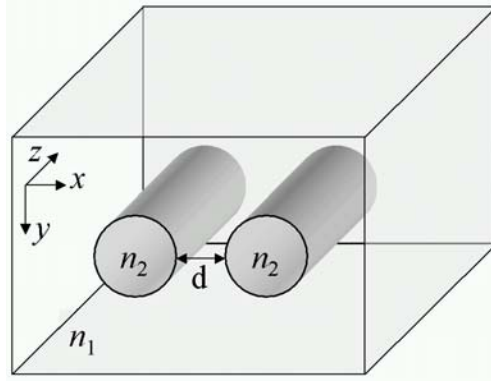
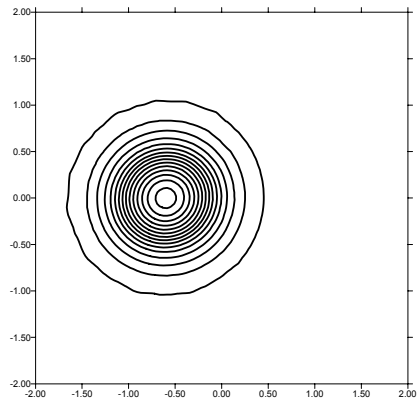


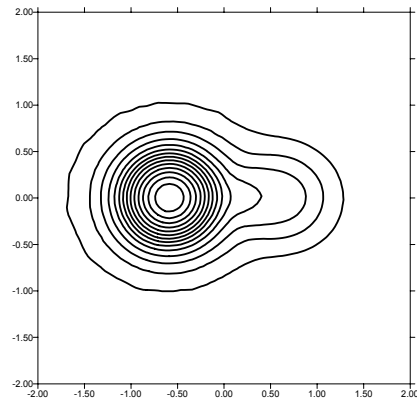
Fig. 3-4: Acoplador direcional entre duas fibras ópticas idênticas.

Para esta análise, utilizou-se um índice de refração do núcleo das fibras $n_2 = 1,6$ e o índice de refração da casca $n_1 = 1,5$ e $\mathbf{d}=0,2 \mu\text{m}$. Para discretizar a malha, utilizou-se 2.000 elementos quadráticos, cobrindo uma janela computacional de $4 \mu\text{m} \times 4 \mu\text{m}$. Este tipo de simulação mostra a versatilidade do método aqui usado, para a análise de estruturas usadas na transferência de sinais de um guia para outro adjacente. Esta estrutura é bastante usada em aplicações de óptica integrada, tais como; chaveamentos, divisão de potência, modulação, seleção de frequência ou polarização, etc. A primeira fibra (esquerda) foi excitada com um feixe correspondente ao modo E_{11}^x , que possui índice efetivo $n_{ef}(\beta_z/k_0) = 1,5447$, calculado isoladamente para uma das fibras, usando-se a análise modal. O comprimento de onda, usado para esta simulação, foi centrado em $\lambda = 0,8 \mu\text{m}$, o passo de propagação foi considerado como $\Delta z = 0,1 \mu\text{m}$ e a constante de fase de referência igual a $n_{ef} = \frac{(\beta_0 + \beta_1)}{2k_0}$, onde β_0 e β_1 correspondem às constantes de propagação dos supermodos simétrico e antisimétrico de mais baixa ordem, respectivamente, calculadas através da análise modal.

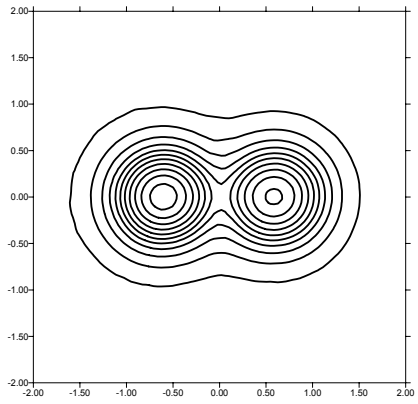
A Fig. 3-5 mostra a evolução da componente h_x , do campo magnético transversal, na direção de propagação. Observa-se, claramente, que a luz lançada em uma das fibras (fibra esquerda na Fig. 3-4), em $z = 0$, é transferida para a outra fibra (fibra da direita na Fig. 3-4) e, depois, ao longo da propagação até $z = 39 \mu\text{m}$, ocorre o acoplamento completo. Essa distância é conhecida como distância de acoplamento. O valor para a distância de acoplamento, obtido nesta simulação, está bem próximo ao valor obtido através da análise modal, usando a relação $z = \frac{\pi}{(\beta_0 - \beta_1)}$. Com a continuação



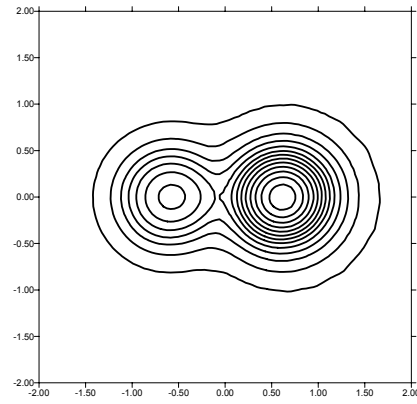
(a)



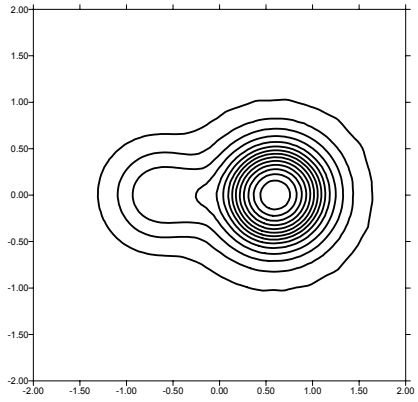
(b)



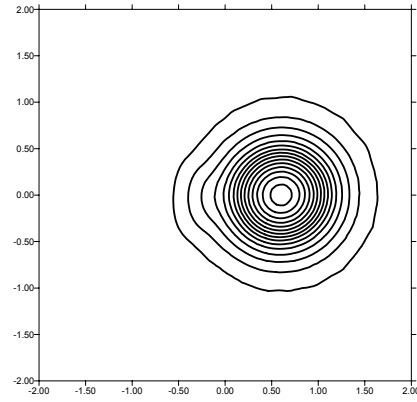
(c)



(d)



(e)



(f)

Fig. 3-5: Curvas de contornos para o valor absoluto da componente h_x para: (a) $z = 0 \mu\text{m}$, (b) $z = 9 \mu\text{m}$, (c) $z = 18,2 \mu\text{m}$, (d) $z = 29 \mu\text{m}$, (e) $z = 35 \mu\text{m}$ e (f) $z = 39 \mu\text{m}$

da propagação, o feixe volta novamente para a fibra original, e esta transferência de potência ocorrerá periodicamente ao longo do comprimento do acoplador.

3.4 Análise da fibra óptica tipo D isotrópica

Esta seção apresenta os resultados obtidos para a fibra óptica tipo D [48]. Considerou-se, nesta simulação, que a fibra foi excitada por um pulso gaussiano, polarizado segundo a componente h_y , com $h_y = A \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$, em que $\sigma = 2 \mu\text{m}$ é a largura do feixe e A é a sua amplitude. Fez-se o comprimento de onda $\lambda = 0,6328 \mu\text{m}$ e o passo de propagação $\Delta z = 0,1 \mu\text{m}$ na direção de propagação. De maneira análoga, a mesma análise pode ser feita com o feixe inicial polarizado segundo h_x . Nesta simulação, considerou-se uma janela computacional de $8 \mu\text{m}$ (direção x) e $8 \mu\text{m}$ (direção y), discretizada por 3.431 elementos lineares, com o raio do núcleo igual a $2 \mu\text{m}$, o índice de refração do núcleo $n_g = 1,46$ e o índice de refração da casca $n_s = 1,456$, Fig.3-6.

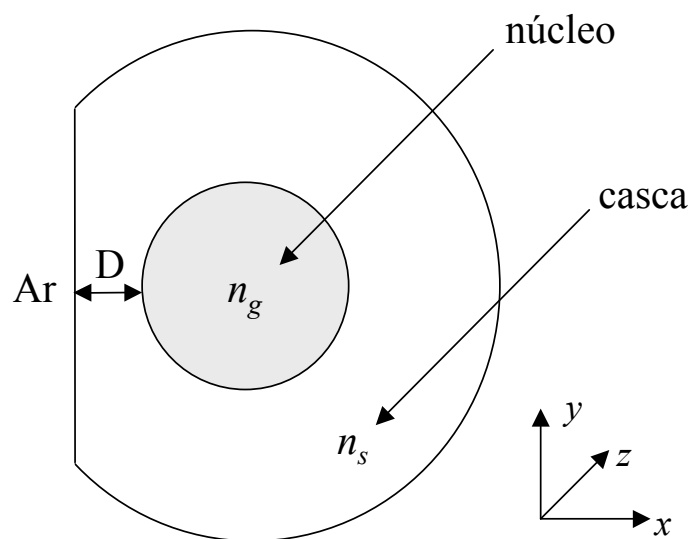
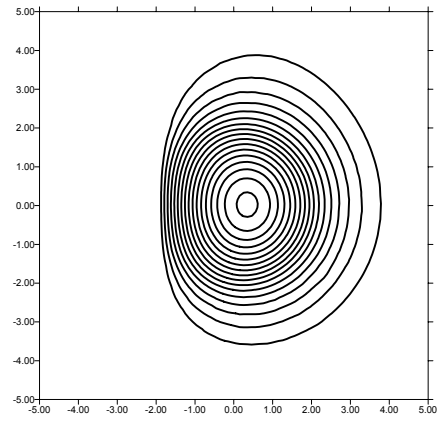
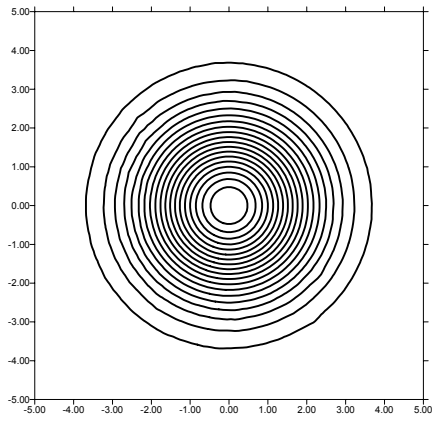


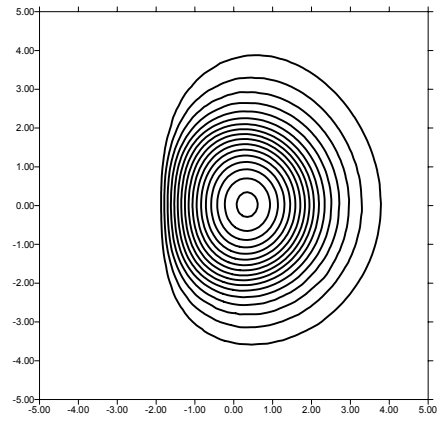
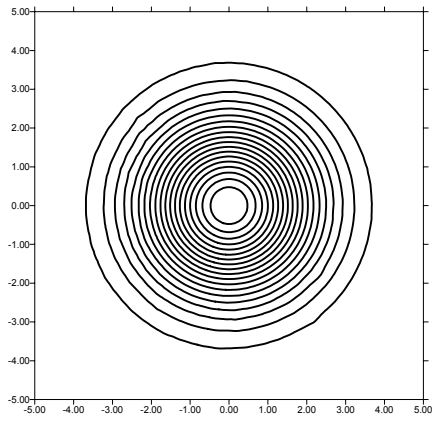
Fig. 3-6: Seção transversal da fibra tipo D

A Fig. 3-7. mostra o contorno da componente h_y , ao longo da direção de propagação, para três situações: $D=0,0 \mu\text{m}$, $D=0,5 \mu\text{m}$ e $D=1,0 \mu\text{m}$, respectivamente. Estes resultados foram obtidos usando-se a aproximação não-paraxial do tipo Padé (1,1).

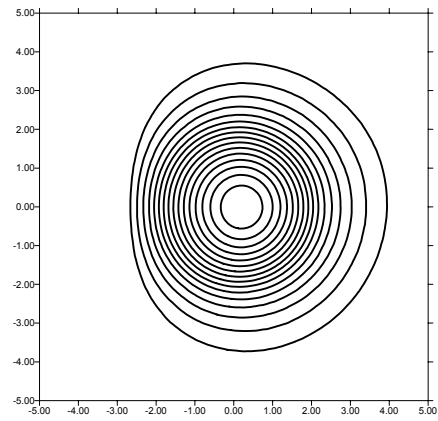
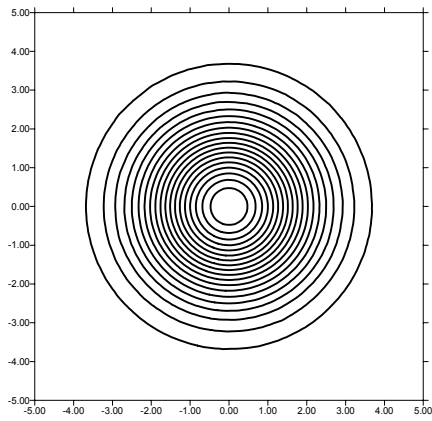
A Tabela 3-8, apresenta uma comparação entre os resultados obtidos neste trabalho e os apresentados na Referência [48]. Os resultados apresentados aqui, foram obtidos para as polarizações TE (h_y) e TM (h_x), tendo como parâmetro, a espessura D (controle do campo óptico do núcleo da fibra com ar). Os resultados apresentados, mostram uma boa concordância com os valores da literatura [48].



(a)



(b)



(c)

Fig. 3-7: Curvas de contorno de campo da componente h_y da fibra tipo D em $z = 0$ (coluna esquerda) e $z = 2 \text{ mm}$ (coluna direita), para: (a) $D=0,0 \mu\text{m}$, (b) $D=0,5 \mu\text{m}$ e (c) $D=1,0 \mu\text{m}$.

Fibra	Fibra tipo D					
Espessura	$D = 0,0 \mu\text{m}$		$D = 0,5 \mu\text{m}$		$D = 1,0 \mu\text{m}$	
$h_x(\text{TM})$ e $h_y(\text{TE})$	h_x	h_y	h_x	h_y	h_x	h_y
Neste trabalho	1,457495	1,457424	1,457647	1,457635	1,457745	1,457743
Literatura [48]	1,457476	1,457440	1,457665	1,457645	1,457756	1,457745
Erro	0,001304	0,001097	0,001234	0,000684	0,000754	0,000132

Tabela 3.1: Comparação entre os índices da Fibra D, obtidos neste trabalho, e mostrados [48].

3.5 Análise do guia de onda costela em forma de junção Y

Com o objetivo de mostrar o potencial da ferramenta numérica, aqui proposta, consideraremos, agora, uma estrutura variante ao longo da direção de propagação. A seguir, mostra-se a análise de um guia de onda costela em forma de junção Y [19], [46], mostrado na Fig. 3-8. Neste exemplo, pode-se observar a capacidade da nova formulação e o desempenho das PMLs, já que a ação das paredes absorventes, neste caso, é muito importante para evitar reflexões indesejadas. A bifurcação do centro do guia de onda Fig. 3-8, segue as curvas definidas por:

$$x = \begin{cases} \pm (1 - \cos(\frac{\pi z}{L})) & , \quad z \leq L \\ \pm 2 \mu\text{m} & , \quad z > L \end{cases} \quad (3.4)$$

para $L = 40 \mu\text{m}$. Os parâmetros do guia costela são: $W = 2 \mu\text{m}$, $t_1 = 1,1 \mu\text{m}$, $t_2 = 0,2 \mu\text{m}$, o índice de refração da região de guiamento é $n_{co} = 3,44$, o índice de refração do substrato é $n_{sub} = 3,34$ e o índice de refração do meio acima do guia é $n_{ar} = 1,0$. A junção foi excitada pelo modo fundamental com polarização y , obtido através da análise modal [7], operando com $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$, Fig 3-9. Os parâmetros da PML foram dados na Tabela 2.1, com espessura $d = 1,0 \mu\text{m}$. Nesta simulação, considerou-se uma janela computacional de $12 \mu\text{m}$ (direção x) \times $12 \mu\text{m}$ (direção y), coberta por 4.514 elementos lineares.

A Fig. 3-10 mostra uma comparação entre os resultados obtidos através da análise não-paraxial, ou fórmula de Padé, e a análise paraxial, para a componente principal do campo \vec{h} , com polarização y ao longo da junção. Pode-se observar a divisão do campo a partir da bifurcação presente no guia. Observa-se, também, que o campo conforma-se mais rapidamente, ao longo de z , para a análise não-paraxial. Nesta simulação, usou-se um passo de propagação $\Delta z = 0,1 \mu\text{m}$, ao longo da direção de propagação. Os resultados mostrados na Fig. 3-10, na coluna esquerda, apresentam uma boa concordância com outro esquema de BPM vetorial apresentado na literatura [46].

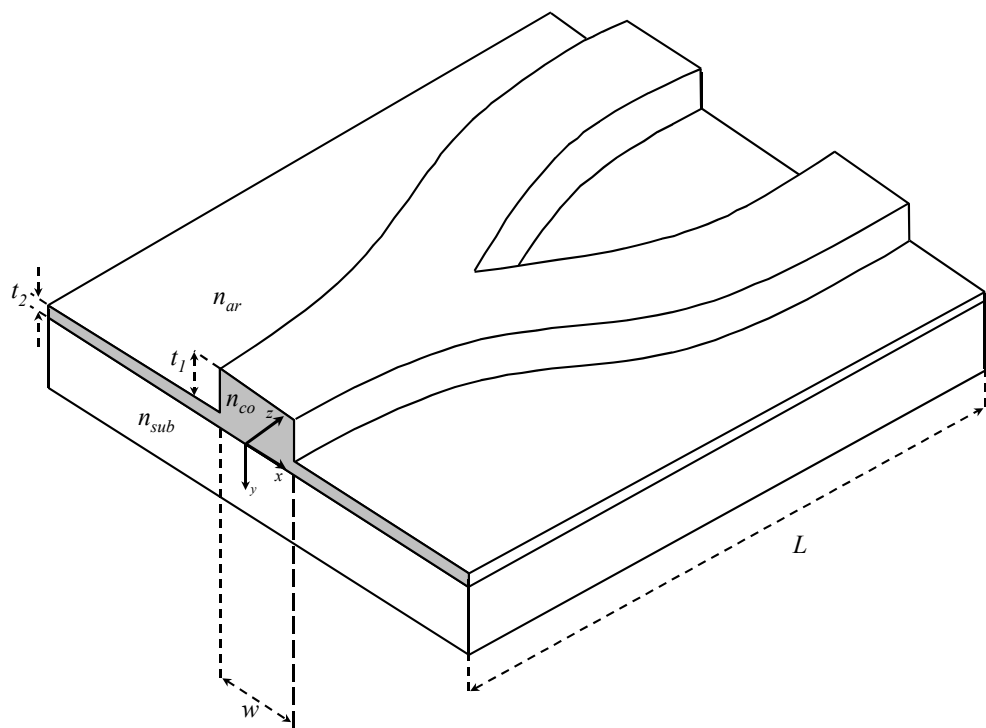


Fig. 3-8: Guia de onda costela em forma de junção Y.

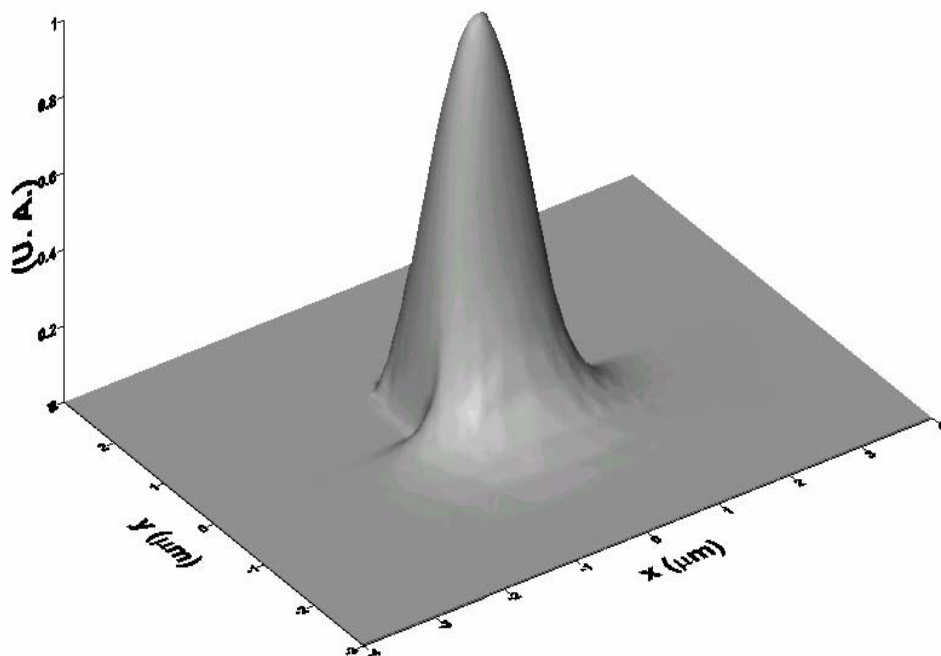


Fig. 3-9: Componente principal do modo fundamental com polarização Y.

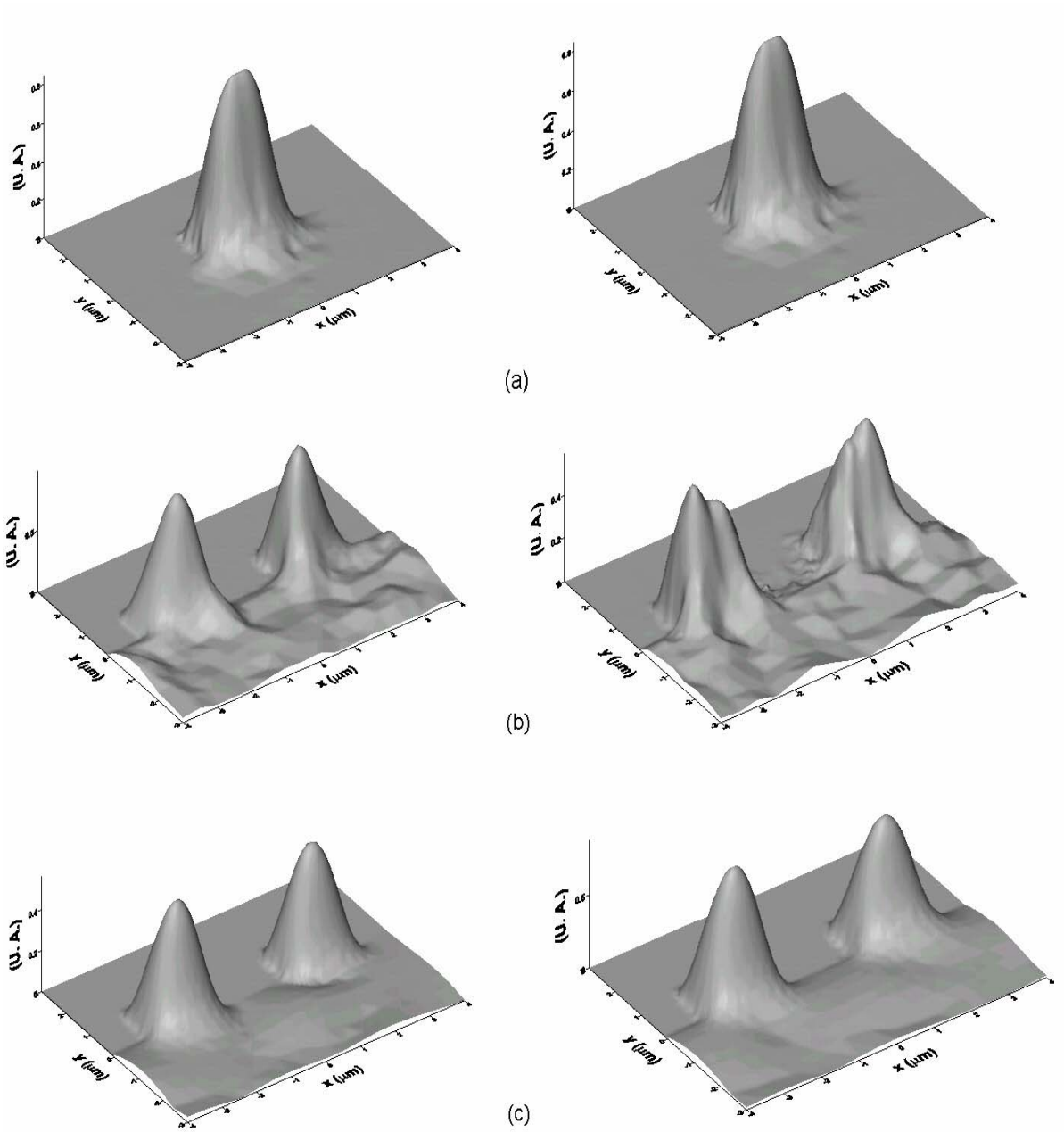


Fig. 3-10: Variação da componente principal do modo fundamental. Análise não-paraxial (coluna esquerda) e análise paraxial (coluna direita), para: (a) $z = 10 \mu\text{m}$, (b) $z = 30 \mu\text{m}$ e (c) $z = 200 \mu\text{m}$.

3.6 Conclusões

Com o objetivo de validar e demonstrar a eficiência da técnica, proposta, foram analisadas várias estruturas constituídas por guias dielétricos isotrópicos. Consideramos, primeiramente, um guia de onda com seção transversal, inicialmente do tipo costela, que sofre um corte, ao longo da direção de propagação, até se tornar um conversor de polarização passivo e, depois, voltando a configuração inicial. Em seguida, considera-se um acoplador direcional com acoplamento entre fibras de índices de refração degrau e a fibra óptica tipo D. Finalmente, mostrou-se o potencial da nova técnica operando em guias variantes com a direção de propagação z , através da análise da propagação do feixe óptico em um guia costela em forma de junção Y.

Os resultados apresentaram uma boa concordância com os resultados provenientes da literatura, que usam métodos já consagrados. Para o guia costela, na forma de junção Y, constatou-se que a formulação não-paraxial apresenta uma conformação mais rápida do pulso, ao longo da direção de propagação, que a formulação paraxial. Constatou-se, também, que o método é estável e que, realmente, os campos eletromagnéticos têm natureza vetorial, uma vez que a polarização e o acoplamento existentes entre as componentes do campo são levados em consideração.

Constatou-se, ainda, o perfeito funcionamento das condições de contorno do tipo PML, uma vez que, sem o uso desta ferramenta, a simulação de guias variantes na direção de propagação, como por exemplo, à análise do guia costela, na forma de junção Y, poderia ser muito complicada e levar a um esforço computacional excessivo.

Capítulo 4

Análise pelo Método da Propagação de Feixe para Meios Anisotrópicos e uso da Distância Imaginária na Solução de Modos Complexos

4.1 Introdução

Neste Capítulo, será mostrada a aplicabilidade do método FE-VBPM em guias de ondas com materiais dielétricos anisotrópicos. Os resultados, aqui apresentados, foram comparados com os provenientes da literatura, literatura esta que emprega métodos já consagrados como, por exemplo, [49]. Foram feitas, também, comparações com estruturas que usam a análise modal como ferramenta numérica e com resultados experimentais encontrados na literatura [30]. Para validar a técnica, foram analisadas as seguintes estruturas: um guia de onda óptico anisotrópico, rodeado por PML, difundido em LiNbO_3 , um guia de onda costela-magnetoóptico, um guia de onda anisotrópico retangular imerso em um meio dielétrico e com desalinhamento dos eixos ópticos e, finalmente, uma fibra óptica de alta birrefringência pressionada por uma força \vec{F} , externa e constante, ao longo de um trecho no seu eixo z , que é a direção de propagação.

Por meio das simulações efetuadas, verificou-se que o método FE-VBPM considera as propriedades vetoriais dos campos eletromagnéticos, tais como os efeitos da geometria e do material nas polarizações e o acoplamento entre as componentes do campo, principalmente devido à anisotropia. Verificou-se, também, o efeito magnetoóptico causado pela presença de elementos puramente imaginários fora da diagonal principal do tensor permissividade elétrica e, finalmente, verificou-se a aplicabilidade do FE-VBPM na análise da aplicação da distância imaginária para a solução de modos complexos em guias de ondas ópticos. Para melhor visualizar os efeitos provocados pela anisotropia, além das distribuições de campo \vec{h} , levantou-se, também, o estado de polarização do feixe ao longo do eixo z e a evolução

do fluxo de energia de cada uma das componentes transversais do campo \vec{h} .

4.2 Análise do guia de onda óptico anisotrópico rodeado por PML, difundido em LiNbO₃

Primeiramente, considerou-se um guia de onda óptico anisotrópico rodeado por PMLs, como mostra a Fig. 4-1, onde o substrato é LiNbO₃ (LN) e a região de guiamento é o LiNbO₃ com troca iônica (PE-LN) [49]. A espessura e a largura do guia de onda são, respectivamente, $t = 2 \mu\text{m}$ e $w = 2 \mu\text{m}$. O substrato tem índice ordinário $n_o = 2,250$ e extraordinário $n_e = 2,172$. A diferença entre os índices de refração da região de guiamento e do substrato é $\Delta n_e = 0.02$, para o índice extraordinário. As componentes do tensor permissividade relativa, que é simétrica para a região com LN, são dadas por [49]:

$$\varepsilon_{xx} = n_o^2 \cos^2 \alpha_c + n_e^2 \sin^2 \alpha_c \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_{yy} = n_e^2 \cos^2 \alpha_c + n_o^2 \sin^2 \alpha_c \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_{zz} = n_o^2 \quad (4.3)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = (n_e^2 - n_o^2) \cos \alpha_c \sin \alpha_c, \quad (4.4)$$

onde α_c é o ângulo entre o eixo cristalino c e o eixo x , do plano xy Fig. 4-1. A simetria no tensor permissividade relativa se dá devido à igualdade entre seus elementos fora diagonal transversal.

O campo inicial foi excitado com um feixe gaussiano, polarizado na direção x , dado segundo a função $h_x = A \exp(-(x^2 + y^2)/2\sigma)$. O comprimento de onda considerado foi $\lambda = 0,84 \mu\text{m}$, a largura do feixe $\sigma = 0,6 \mu\text{m}$ e o controle de estabilidade do método $\theta = 0,55$. A janela computacional considerada foi de $8 \mu\text{m}$ (na direção x) e de $6 \mu\text{m}$ (na direção y), rodeada por PMLs de espessura $d = 2 \mu\text{m}$. A Fig. 4-2 mostra a variação das componentes h_x e h_y do campo magnético na direção de propagação z , para $\alpha_c = 45^\circ$, com um passo de propagação $\Delta z = 0,1 \mu\text{m}$. Nota-se que o feixe inicial tende ao modo fundamental do guia. Conforme se propaga ao longo do guia, como era de se esperar, não ocorrem reflexões na fronteira, o que mostra a eficiência das PMLs. A partir de, aproximadamente, $z = 500 \mu\text{m}$, o modo fundamental fica completamente definido. Observa-se a variação da componente

h_y , desde o valor nulo até se igualar ao valor de h_x , o que é consistente com a característica híbrida do modo fundamental. Estes resultados apresentam uma boa concordância com os resultados mostrados em [49].

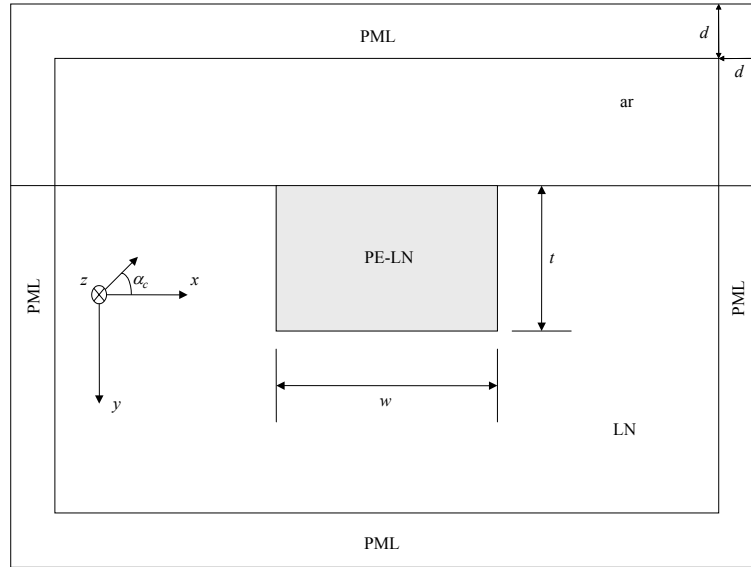


Fig. 4-1: Guia de onda óptica anisotrópico rodeado por PMLs.

Com relação ao valor do índice de refração de referência, adotou-se $\beta_{ref} = (\beta_z/k_0)$, sendo β_z/k_0 a constante de fase normalizada, referente ao modo E_{11}^x , obtida através da análise modal. Como mostra a Fig. 4-2 (a), o campo inicial estipulado para \vec{h} , conforme descrito acima, vai gradativamente evoluindo para uma configuração bem definida e estável. A partir de uma propagação de $500 \mu\text{m}$, ao longo do eixo z , a distribuição de campo passa a apresentar uma ótima concordância com a distribuição do campo \vec{h} referente ao modo E_{11}^x , obtido através da análise modal, como mostra a Fig. 4-2 (e). A Fig. 4-3 mostra a convergência do índice de refração de referência ao longo da direção de propagação, com relação ao valor obtido através da análise modal.

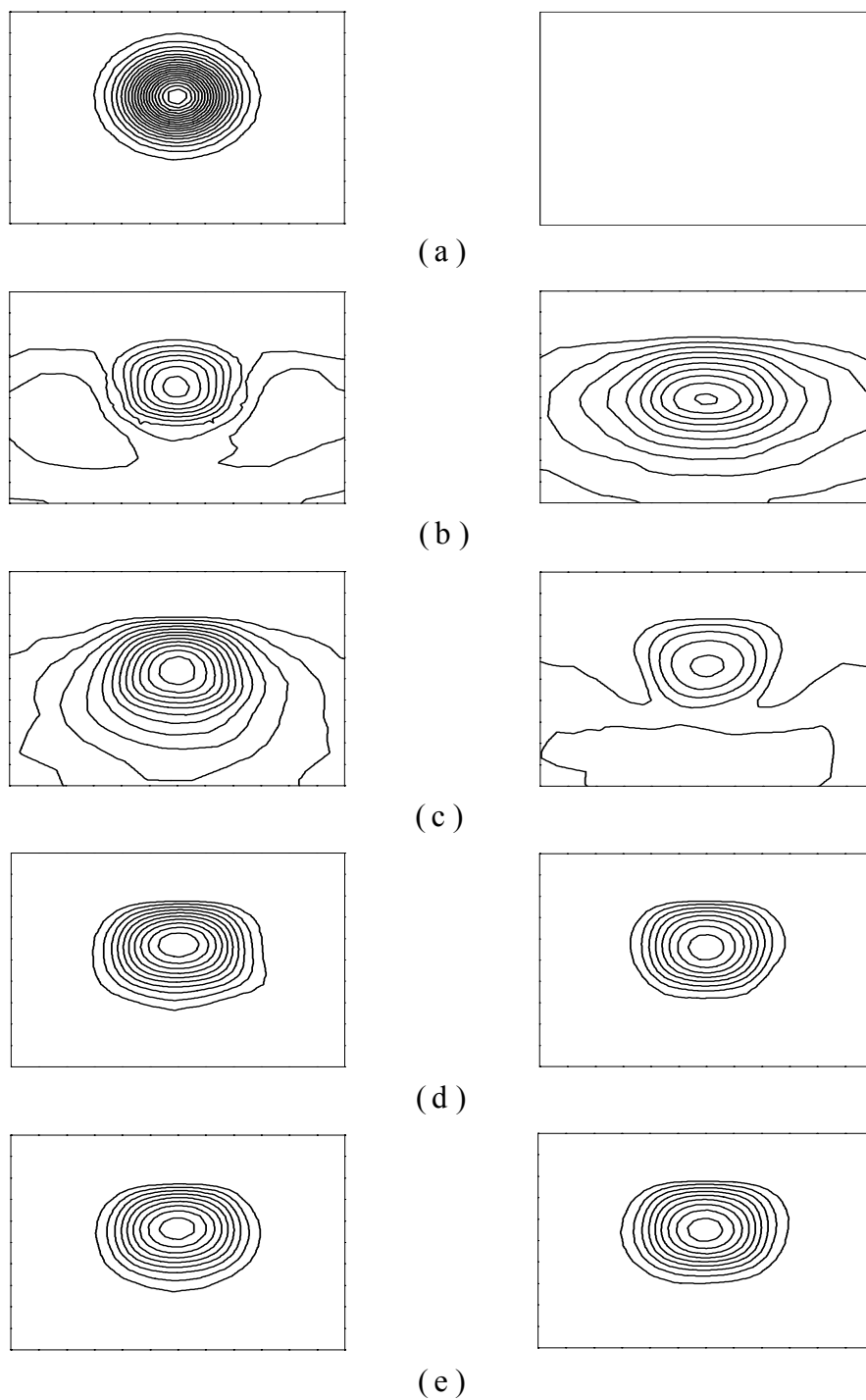


Fig. 4-2: Módulo da componente h_x (coluna direita) e módulo da componente h_y (coluna esquerda) para: (a) $z = 0 \mu\text{m}$, (b) $z = 20 \mu\text{m}$, (c) $z = 40 \mu\text{m}$, (d) $z = 200 \mu\text{m}$ e (e) $z = 500 \mu\text{m}$.

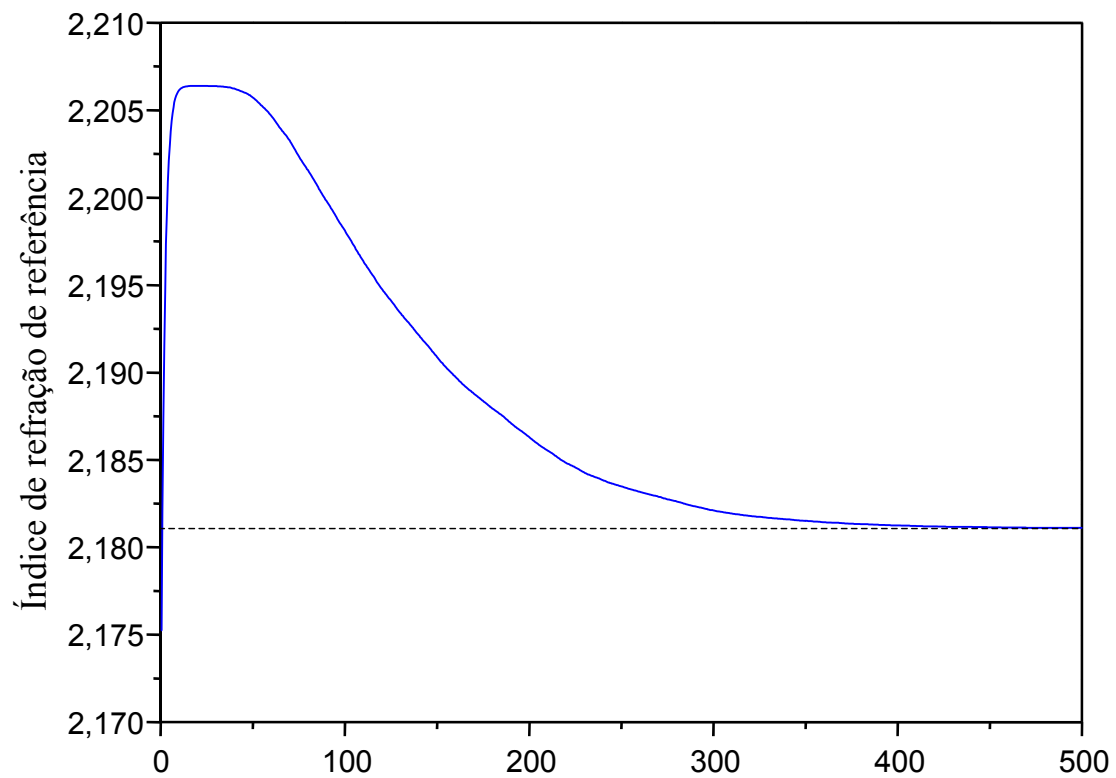


Fig. 4-3: Variação do índice de refração de referência ao longo da direção de propagação: linha sólida FE-VBPM e linha tracejada análise modal.

4.3 Análise do guia de onda costela-magnetoóptico

A Fig. 4-4 mostra um guia costela-magnetoóptico. A seção transversal, 2D, está no plano xy e o campo magnético é aplicado segundo a direção de propagação z . O tensor permissividade relativa, do material Bi:YIG, é dado por:

$$[\varepsilon_r] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & j\delta & 0 \\ -j\delta & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

onde ε_{xx} , ε_{yy} e ε_{zz} são termos nas direções x , y e z , respectivamente, e δ representa o efeito magnetoóptico de primeira ordem [49]. Os parâmetros da estrutura são: $t_1 = 3,1 \mu\text{m}$, $t_2 = 3,4 \mu\text{m}$, $h = 0,5 \mu\text{m}$, $w = 8,0 \mu\text{m}$, $n_1 = 2,19$, $n_2 = 2,18$, $n_s = 1,94$ e $\theta_f = 133^\circ/\text{cm}$. θ_f representa a taxa de rotação de Faraday dada, em termos do índice de refração efetivo $n_{ef} = \beta/k_0$, por [49]:

$$\theta_f = \frac{k_0\delta}{2n_{ef}} \quad (4.6)$$

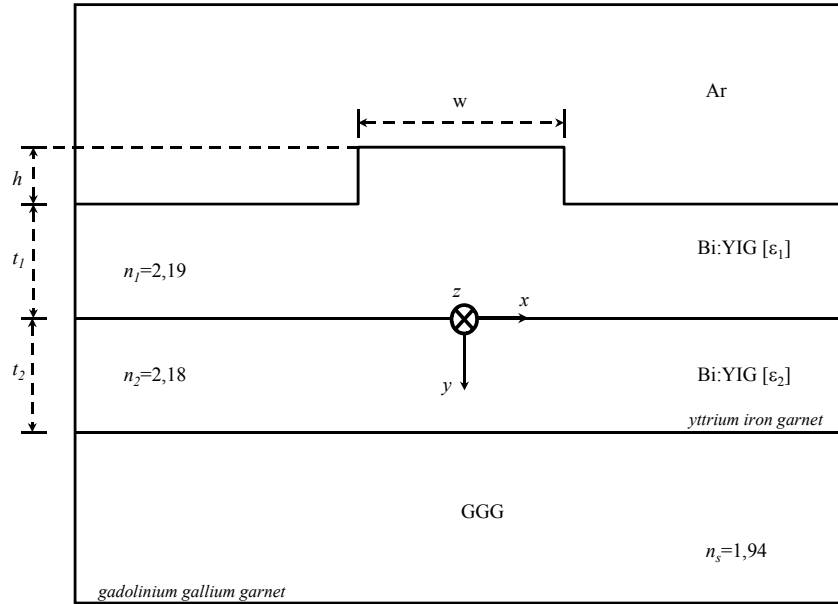


Fig. 4-4: Guia de onda costela-magnetoóptico.

A estrutura foi excitada pelo modo fundamental, polarizado na direção y , obtido através da análise modal. A janela computacional usada nesta simulação foi de $30 \mu\text{m}$ (direção x) \times $30 \mu\text{m}$ (direção y), coberta por 5.533 elementos lineares e com comprimento de onda centrado em $\lambda = 1,485, \mu\text{m}$ com $\delta = 0$.

A Fig. 4-5, mostra a potência normalizada associada às componentes h_x e h_y do campo \vec{h}_T , ao longo da direção de propagação z , com um passo de propagação $\Delta z = 0,1 \mu\text{m}$ e um controle de estabilidade do método $\theta = 0,55$. Nota-se uma completa conversão do modo da componente h_y no modo da componente h_x em $z \approx 6700 \mu\text{m}$, induzida pela presença dos elementos fora da diagonal no tensor permissividade elétrica magnetoóptica, definida em (4.5). Os resultados obtidos mostram uma boa concordância com os resultados da literatura [32].

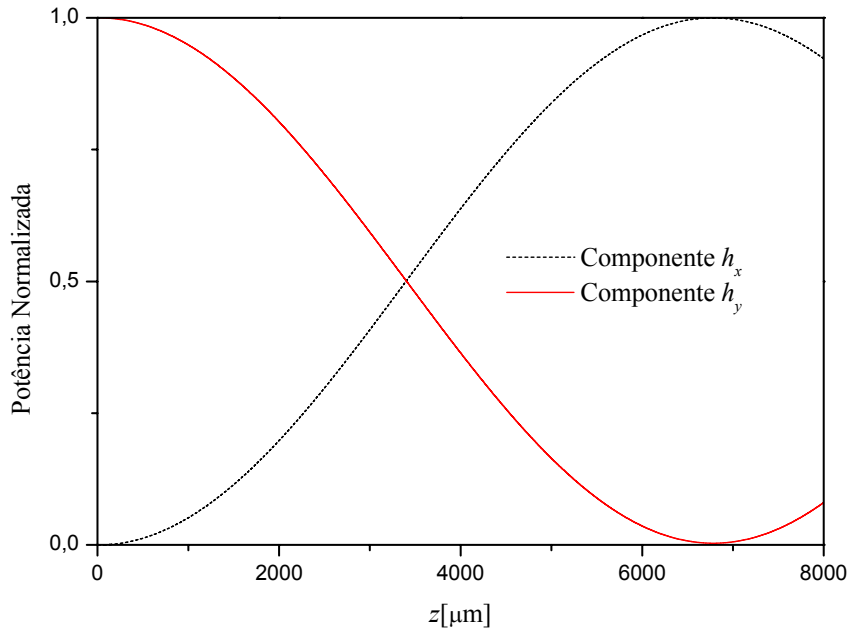


Fig. 4-5: Evolução da potência normalizada das componentes transversais do campo ao longo da direção de propagação z .

A Fig. 4-6 mostra o padrão de campo de $z = 0 \mu\text{m}$ até $z = 7000 \mu\text{m}$. Nota-se, claramente, a conversão das componentes de campo transversal h_x em h_y , ao longo da direção de propagação.

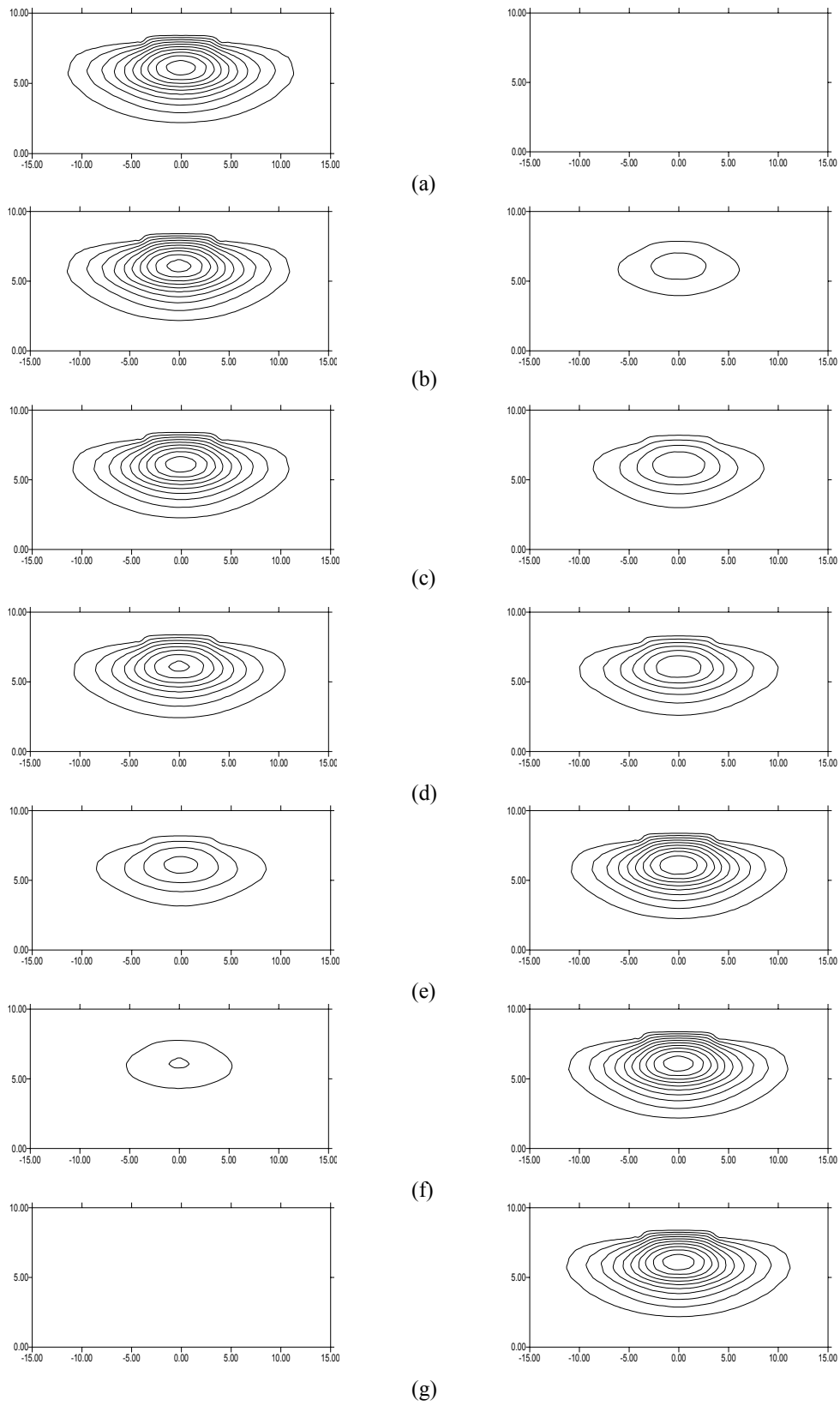


Fig. 4-6: Módulo de h_y (coluna esquerda) e h_x (coluna direita), para: (a) $z = 0 \mu\text{m}$, (b) $z = 1000 \mu\text{m}$, (c) $z = 2000 \mu\text{m}$, (d) $z = 3000 \mu\text{m}$, (e) $z = 4000 \mu\text{m}$, (f) $z = 6000 \mu\text{m}$ e (g) $z = 7000 \mu\text{m}$.

4.4 Análise do guia de onda anisotrópico retangular imerso em um meio dielétrico com desalinhamento nos eixos ópticos

O tensor permissividade elétrica pode possuir termos fora da diagonal principal, que, nesta formulação são os elementos do tensor dados por ε_{xy} e ε_{yx} . Deste modo, pode-se analisar a propagação de feixes ópticos em guias dielétricos anisotrópicos, considerando-se o desalinhamento dos eixos ópticos com relação aos eixos do sistema de coordenadas, como mostra a Fig. 4-7.

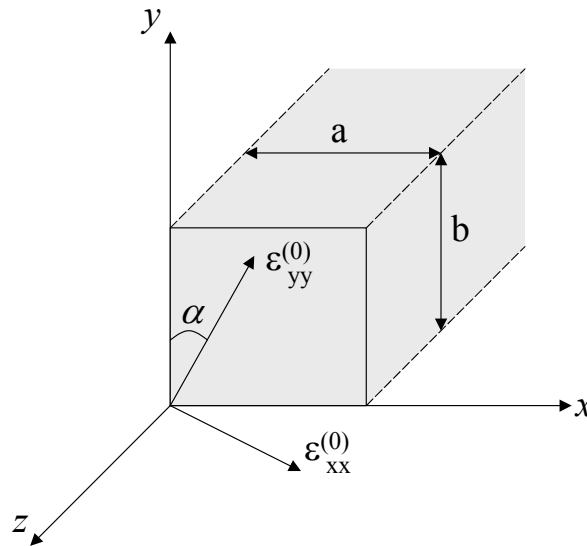


Fig. 4-7: Guia de onda óptico anisotrópico exibindo um deslocamento angular α dos eixos ópticos em relação ao sistema de coordenadas.

Nesta simulação, considerou-se um guia dielétrico anisotrópico com dimensões transversais a e b , sendo $a = b = 1 \mu\text{m}$. O guia de onda canal está imerso em um meio dielétrico isotrópico de índice de refração $\sqrt{2,05}$, rodeado por PMLs de espessura $d = 1,0 \mu\text{m}$. Os índices de refração ordinário e extraordinário do guia foram escolhidos iguais a $\sqrt{2,31}$ e $\sqrt{2,19}$, respectivamente. Na Fig. 4-7, $\varepsilon_{xx}^{(0)}$ e $\varepsilon_{yy}^{(0)}$ são os elementos da diagonal do tensor $\bar{\varepsilon}$, quando os eixos ópticos estão alinhados com as coordenadas x e y do sistema cartesiano. Nesta simulação, usou-se uma janela computacional de $8 \mu\text{m}$ (direção x) \times $8 \mu\text{m}$ (direção y), coberta por 3.824 elementos lineares. Este mesmo exemplo foi simulado na Referência [14], onde os autores usaram uma janela computacional de $34 \mu\text{m}$ (direção x) \times $34 \mu\text{m}$ (direção y), coberta por 4.784 elementos lineares. Desta forma, pode-se notar a considerável ação das PMLs na redução da janela computacional, já que, neste nosso trabalho, a formulação foi implementada usando-se PMLs como condições de contorno, para limitar o domínio computacional e para não ocorrer reflexões nas paredes do contorno, enquanto que, na formulação apresentada em [14], as PMLs não foram implementadas. Isto levou a uma simulação do mesmo problema com uma janela computacional muito grande, causando um enorme esforço computacional e um tempo de simulação exageradamente grande. Aqui, considerou-se o comprimento de onda $\lambda = 0,86 \mu\text{m}$, $\alpha = 45^\circ$ e os

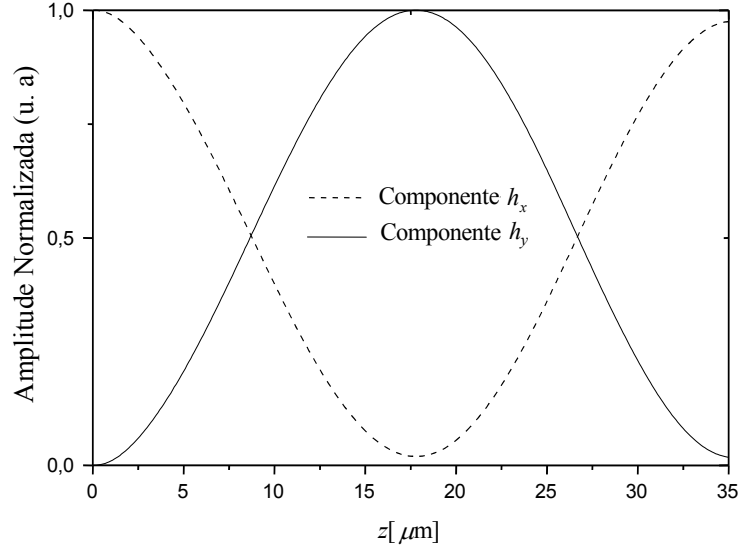


Fig. 4-8: Variação das amplitudes normalizadas de h_x e h_y ao longo da direção z .

termos do tensor permissividade iguais a [14]:

$$\varepsilon_{xx} = n_o^2 \cos^2 \alpha + n_e^2 \sin^2 \alpha \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_{yy} = n_e^2 \cos^2 \alpha + n_o^2 \sin^2 \alpha \quad (4.8)$$

$$\varepsilon_{zz} = n_o^2 \quad (4.9)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = (n_e^2 - n_o^2) \cos \alpha \sin \alpha, \quad (4.10)$$

para os quais α é o ângulo de rotação dos eixos principais do tensor, com relação aos eixos x e y do sistema de coordenadas do guia, em torno do eixo comum z , como mostra a Fig. 4-7. Como distribuição inicial de campo \vec{h} , foram usados os valores da distribuição de campo do modo de polarização E_{11}^x , com $\alpha = 0^\circ$ e constante de fase efetiva β/k_0 . Estes valores foram calculados a partir da análise modal. A Fig. 4-8 mostra a variação das componentes normalizadas ao longo da direção de propagação, ou seja, eixo z . Nota-se que as componentes transversais oscilam entre os modos de polarização HE_{11}^x e HE_{11}^y e que este comportamento é cíclico.

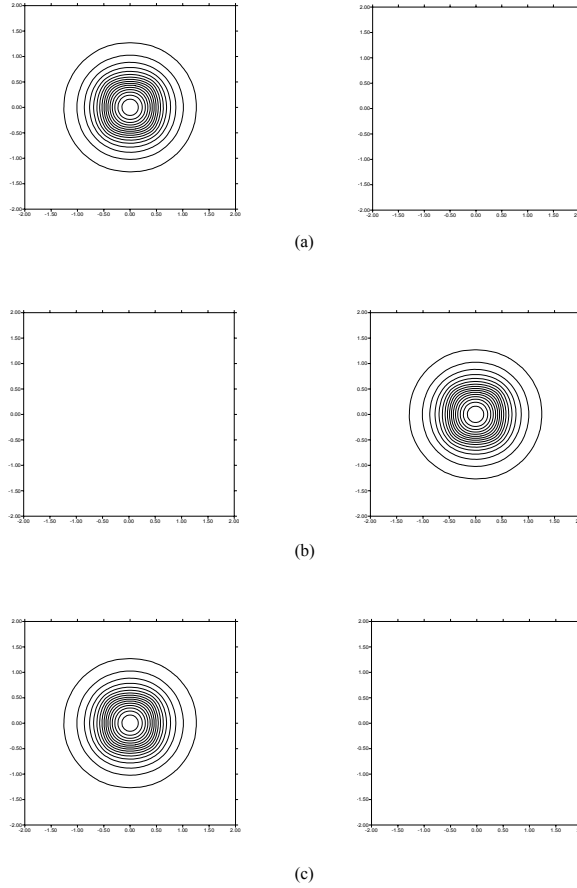


Fig. 4-9: Módulo de h_x (coluna esquerda) e módulo de h_y (coluna direita), para: (a) $z = 0,0 \mu\text{m}$, (b) $z = 17,5 \mu\text{m}$ e (c) $z = 35 \mu\text{m}$.

O casamento entre os modos ocorre para $z = 17,5 \mu\text{m}$, mostrando uma perfeita concordância com os resultados mostrados em [14].

Pode-se ver, das Figs. 4-8 e 4-9, que os campos assumem a configuração inicial novamente para $z = 35 \mu\text{m}$, o que está de acordo com o valor obtido através da relação $L_B = \frac{\lambda}{|\beta_{ef1} - \beta_{ef2}|}$, na qual L_B é o comprimento de batimento e β_{ef1} e β_{ef2} são as constantes de propagação efetivas dos modos E_{11}^x e E_{11}^y , respectivamente. Através da análise modal, foram obtidos $\beta_{ef1} = 1,47393494$ e $\beta_{ef2} = 1,44930071$. Desta forma, o valor do comprimento de batimento, calculado através da análise modal, foi de $L_B = 34,9107670 \mu\text{m}$ e apresenta uma boa concordância com o valor de L_B determinado pela propagação. Salientamos que as constantes β_{ef1} e β_{ef2} , foram normalizadas, portanto são adimensionais. Um comportamento análogo ao descrito acima, foi verificado quando consideramos, como feixe inicial, o modo de polarização E_{11}^y com $\alpha = 0^0$.

4.5 Análise da propagação do feixe óptico em uma fibra de alta birrefringência com eixos desalinhados

Nesta simulação, nós consideramos o experimento mostrado em [30] e em [51], onde uma fibra óptica de alta birrefringência foi analisada através de um instrumento interferométrico, com o objetivo de localizar os eixos principais de birrefringência, sem clivar a fibra. A análise teórica, apresentada em [52], mostra a propagação do feixe óptico em uma fibra birrefringente através da análise FE-VBPM sem paredes absorventes e usando a aproximação paraxial. Ambos os trabalhos, acima mencionados, mostram a ação de uma força externa aplicada em um fibra óptica, numa direção arbitrária. A ação desta força provoca uma mudança na orientação dos eixos birrefringentes. Neste trabalho, analisaremos a fibra usando a nova formulação, com a inclusão de paredes absorventes do tipo PMLs e a aproximação não-paraxial. Sob a ação de uma força externa, a nova orientação dos eixos birrefringentes sofre uma rotação de um ângulo α_r , em relação à orientação não-perturbada, com α_r dado por:

$$\alpha_r = 0,5 \arctan \left(\frac{k \sin(2\theta)}{1 - k \cos(2\theta)} \right), \quad (4.11)$$

sendo a magnitude da birrefringência resultante dada por:

$$B_T = \sqrt{B_{\text{int}}^2 + B_{\text{ext}}^2 - 2B_{\text{int}}B_{\text{ext}} \cos(2\theta)}, \quad (4.12)$$

onde $k = B_{\text{ext}}/B_{\text{int}}$, B_{ext} é a birrefringência induzida pela força externa aplicada, $B_{\text{int}} = \beta_s - \beta_f = 2\pi/L_B$, na qual β_s e β_f são as constantes de propagação para os modos de polarização lento e rápido, respectivamente, e L_B é o comprimento de batimento dos modos mencionados. A Fig. 4-10 mostra a atuação da força externa aplicada e a rotação do eixo principal.

A fibra mostrada na Fig. 4-10 tem raio do núcleo igual a 1,1 μm , com termos do tensor permissividade relativa dados por $\varepsilon_{xx}^{(0)} = 2,16$, $\varepsilon_{yy}^{(0)} = \varepsilon_{zz}^{(0)} = 2,162099384$, para o núcleo, e $\varepsilon_c = 2,1257$, para a casca. O comprimento de onda foi centrado em $\lambda = 0,829 \mu\text{m}$, passo de propagação $\Delta z = 0,1 \mu\text{m}$, na direção z , e a força aplicada proporcional a $k = 0,17$ [30]. Nesta simulação, considerou-se uma janela computacional de 12 μm (direção x) x 12 μm (direção y), coberta por 3.814 elementos lineares. A fibra foi pressionada em um trecho de 2 mm e admitiu-se a birrefringência induzida na casca desprezível, quando comparada com aquela induzida no núcleo. A força foi aplicada com um ângulo $\theta = 40^\circ$, com os elementos do tensor permissividade relativa dados em função do ângulo α_r , por (4.7)-(4.10), fazendo $\alpha_c = \alpha_r$, $n_o = \sqrt{\varepsilon_{xx}^{(0)}}$ e $n_e = \sqrt{\varepsilon_{yy}^{(0)}}$. Para esta simulação, $\varepsilon_{xx}^{(0)}$, $\varepsilon_{yy}^{(0)}$ e $\varepsilon_{zz}^{(0)}$ são os índices de refração sem o efeito das tensões induzidas pela força \vec{F} nas direções x , y e z , respectivamente. A fibra foi excitada pelo modo de polarização fundamental HE_{11}^y e, para cada valor de θ , a intensidade da

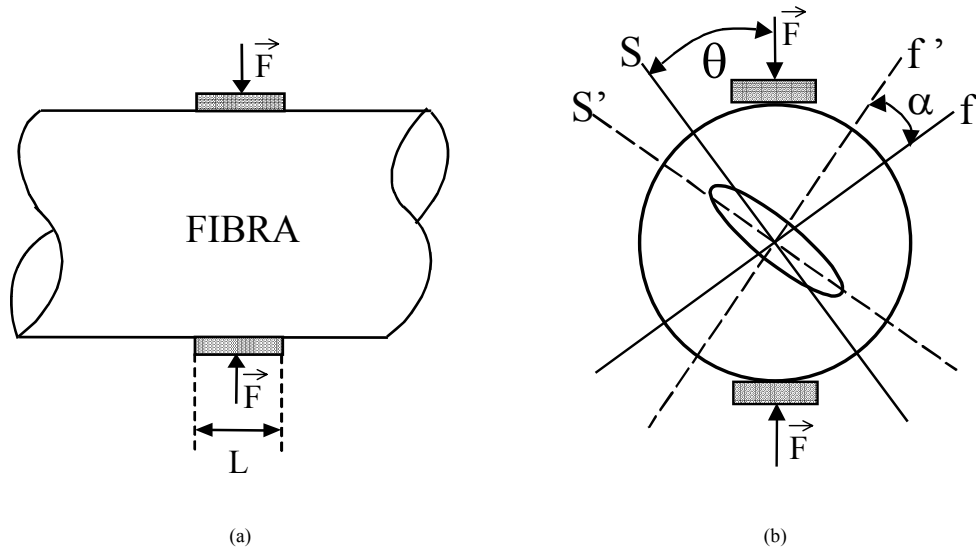


Fig. 4-10: (a) Representação da força externa \vec{F} aplicada na fibra de alta birrefringência e (b) Rotação provocada pela aplicação da força externa nos eixos principais.

componente h_x , referente ao modo de polarização HE_{11}^y , foi calculada depois que o feixe propagou-se pelo trecho de 2 mm, onde a fibra está pressionada pela força \vec{F} .

A Fig. 4-11, mostra a amplitude normalizada, em função do ângulo azimutal da força aplicada, e compara esses resultados, obtidos numericamente, com os experimentais, mostrados em [30].

Nossa simulação está em perfeita concordância com o resultado experimental [30]; este resultado também está de acordo com os resultados obtidos em [52]. Melhores resultados poderiam ser obtidos através de cálculos mais precisos para k ou por meio de análises rigorosas, levando em consideração as variações sofridas pelo perfil do índice de refração devido às tensões induzidas pela força externa \vec{F} . A Fig. 4-12 mostra a evolução das amplitudes normalizadas das componentes transversais do campo \vec{h} , ao longo da direção de propagação z , para uma força externa aplicada com $\theta = 40^\circ$.

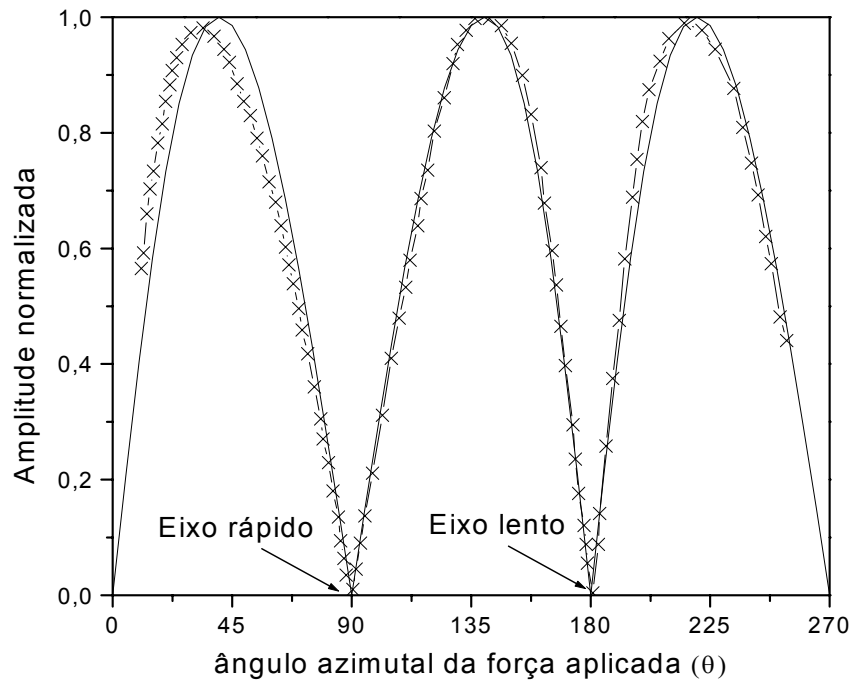


Fig. 4-11: Simulação referente à localização dos eixos de birrefringência de uma fibra óptica. A linha sólida representa a curva obtida pela simulação e a curva com x mostra os dados colhidos da literatura [30] para $k = 0.17$, $\theta \approx 40^\circ$ e $L_B \approx 1$ mm.

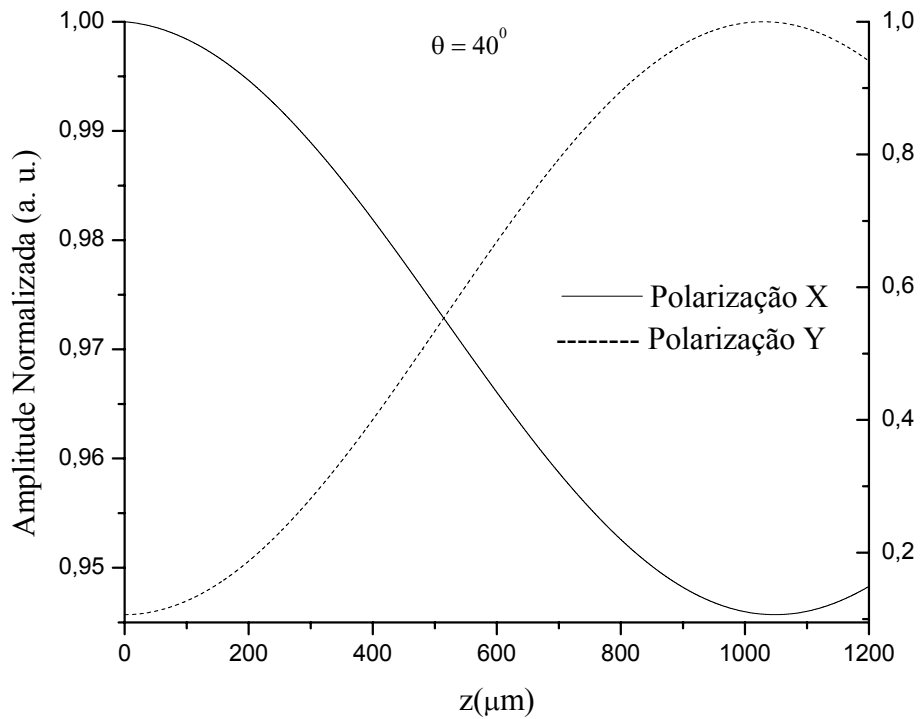


Fig. 4-12: Evolução das amplitudes das componentes transversais do campo \vec{H} para uma força externa aplicada, com $k \approx 0,17$.

4.6 Simulação da propagação de feixes ópticos através da distância imaginária

Nesta Seção, apresenta-se o uso da nova formulação para a obtenção de modos complexos através da “distância imaginária”. O método BPM pode ser usado para o cálculo de autovalores reais, como já foi exemplificado nesta Tese, no exemplo da simulação da fibra tipo D, no Capítulo 3 e na simulação do exemplo da Seção 4.2, deste Capítulo. O esquema empregado, até agora, não permite o cálculo de modos com autovalores complexos, devido à atenuação que ocorrerá ao longo da propagação. Tais modos surgem quando os meios apresentam perdas (ε complexo), ou em meios sem perdas, quando considera-se um perfil de índice de refração como o mostrado na Fig. 4-13. Neste caso, nota-se que existe uma depressão entre a camada de GaAs (região de guiamento) e o substrato, a qual é característica para este tipo de guia e provoca a presença de modos guiados com autovalores complexos, chamados de modos de fuga. Na realidade, essa característica provocará a propagação de modos com autovalores complexos, quer o material tenha perdas ou não. Para esta situação, faz-se necessária uma modificação no BPM, tal que permita compensar a atenuação.

Com este propósito, foi desenvolvido o esquema chamado de propagação através da “distância imaginária”, que permite tratar os guias de onda com e sem perdas de forma simples e sem que as modificações na formulação levem a esforços computacionais excessivos. Entretanto, para adaptar este esquema à formulação aqui apresentada, assumimos que existem m modos no guia de onda. Desta forma, podemos considerar que o índice de refração efetivo do k -ésimo auto-valor é $n_{ef,k}$, que o campo correspondente é $\{f_k\}$ e que a equação para o auto-valor pode ser escrita como:

$$[K]\{f_k\} = k_0^2 n_{ef,k}^2 [M(z)]\{f_k\} \quad (4.13)$$

Após, vários passos de propagação propagados, de (2.71) tira-se que a distribuição de campo do k -ésimo autovalor pode ser obtida por [33]:

$$\{f_k\}_{i+1} = \frac{[\widetilde{M}(z)] + \theta \Delta z k_0^2 (n_{ef,k}^2 - n_0^2)}{[\widetilde{M}(z)] - (1 - \theta) \Delta z k_0^2 (n_{ef,k}^2 - n_0^2)} \{f_k\}_i \quad (4.14)$$

Quando m auto-valores, incluindo os modos de radiação, existem em um guia de onda, o campo $\{\vec{h}_T\}_i$, para o i -ésimo passo de propagação, pode ser expresso por:

$$\{\vec{h}_T\}_i = \sum_{k=1}^m A_{k,i} \{f_i\} \quad (4.15)$$

onde $A_{k,i}$, representa a amplitude complexa do k -ésimo autovalor para o i -ésimo passo de propagação.

A propagação de modos com autovalores complexos, com $\Delta z \in \Re$, provocará uma atenuação do modo propagante ao longo da direção de propagação, o que impossibilitaria a obtenção dos modos de fuga. Para resolver este problema, é necessário considerar que $\Delta z \notin \Re$ e, de acordo com a análise feita em [54], o passo de propagação pode ser dado por:

$$\Delta z = j \frac{4n_0}{(n_{ef,k}^2 - n_0^2)k_0} \quad (4.16)$$

Para um dado número de passos de propagação, i , suficientemente grande, $\{\vec{h}_T\}$ converge para o k -ésimo auto-valor $\{f_k\}$ [33]. O índice efetivo deste auto-valor, $n_{ef,k}$, pode ser expresso através de:

$$n_{ef,ki}^2 = \frac{\left\{ \vec{h}_T(z) \right\}_i^\dagger [K(z)]_i \left\{ \vec{h}_T(z) \right\}_i}{k_0^2 \left\{ \vec{h}_T(z) \right\}_i^\dagger [M(z)]_i \left\{ \vec{h}_T(z) \right\}_i} \quad (4.17)$$

para o i -ésimo passo de propagação, sendo \dagger o complexo conjugado e transposto.

Para o caso, aqui apresentado, o índice efetivo do modo desejado é desconhecido no início da propagação. Desta forma, nós usamos inicialmente o maior índice de refração da região de guiamento, do guia de onda, para determinar o passo de propagação Δz . Após alguns poucos cálculos iterativos, usando este Δz , calculamos a diferença entre o índice efetivo atual e o calculado no passo anterior; quando essa diferença ficava da ordem de 10^{-3} , usou-se $n_{ef,k}$ para calcular Δz .

O valor do índice de refração de referência, n_0 , pode ser escolhido de forma arbitrária. Nesta simulação, usou-se o menor valor dos índices de refração presentes na estrutura; com essa escolha, garante-se a propagação em uma distância imaginária positiva [33]. Nesta simulação, considerou-se um guia 2D vazante, como mostra a Fig. 4-13.

Os índices de refração considerados foram 3,452 para 20% AlGaAs, 3,555 para 5% AlGaAs e 3,590 para o GaAs, operando em um comprimento de onda $\lambda = 1,064 \mu\text{m}$, com PMLs de espessura $1 \mu\text{m}$ e coeficiente de reflexão da ordem de 10^{-5} . Nesta simulação usou-se uma janela computacional de $15 \mu\text{m}$ (direção x) \times $15 \mu\text{m}$ (direção y), cobertos por 8.431 elementos lineares. Para acelerar a convergência, substituiu-se, na análise modal, o índice de refração do substrato por 5% AlGaAs. Desta forma, o campo propagado foi aquele proveniente da análise modal, propagando-se na estrutura com os índices mostrados na Fig.4-13. A Fig 4-14 mostra a distribuição de campo da componente h_y do modo H_{11}^y ; a Fig 4-15 mostra a distribuição de campo da componente h_y , para o modo H_{12}^y , e a Fig. 4-16 mostra a distribuição de campo da componente h_y , para o modo H_{13}^y .

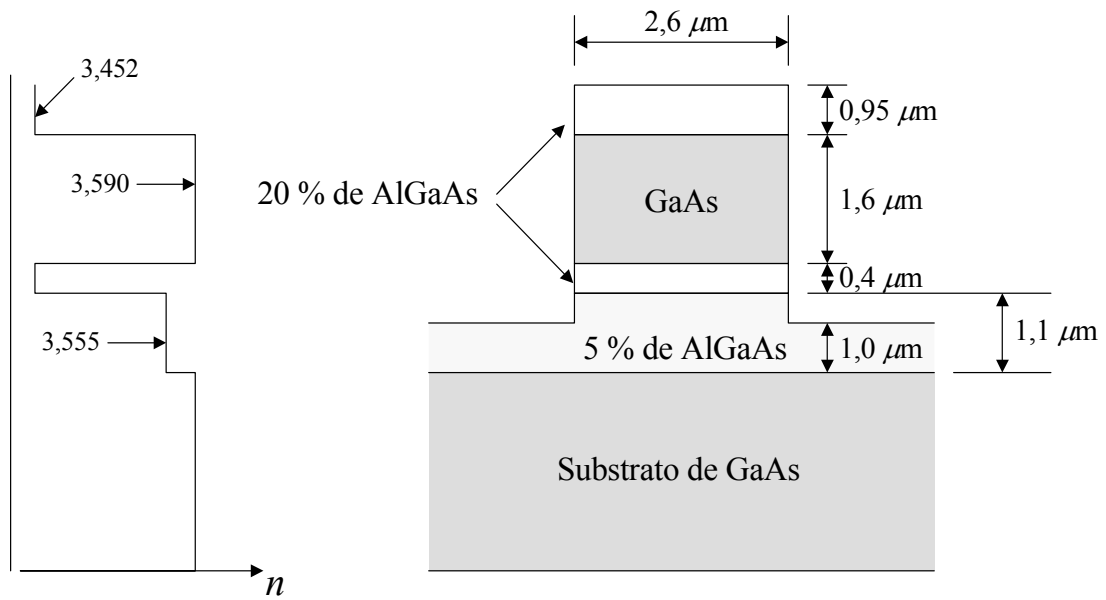


Fig. 4-13: Perfil de índice de refração e seção transversal de um guia de onda vazante.

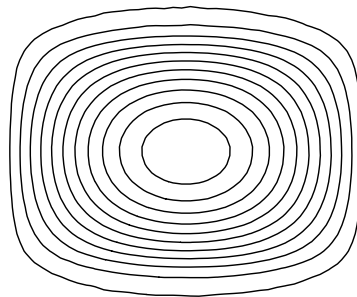


Fig. 4-14: Distribuição de campo magnético, componente y , para o modo H_{11}^y .

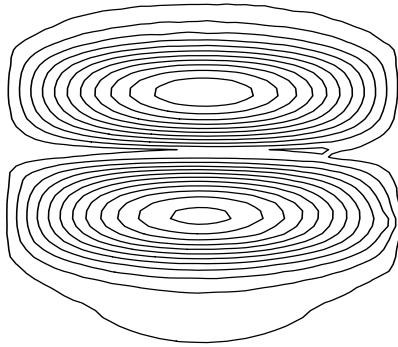


Fig. 4-15: Distribuição de campo magnético, componente y , para o modo H_{12}^y .

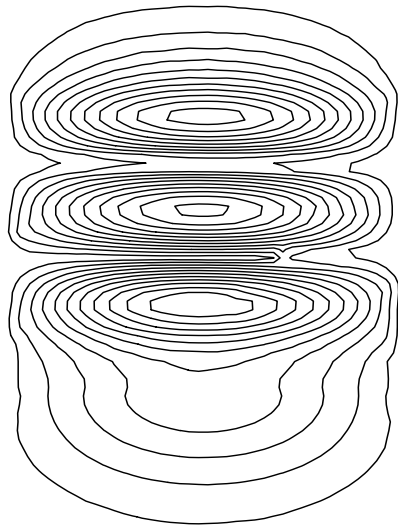


Fig. 4-16: Distribuição de campo magnético, componente y , para o modo H_{13}^y .

A Tabela 4.1 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos usando-se o método aqui proposto e os resultados apresentados na referência [53] e [55]. Observa-se que os valores da parte imaginária, obtidos neste trabalho, diferenciam de aproximadamente 5 % com relação aos valores apresentados nas Referências [53] e [55]. Isso ocorre devido à parte imaginária do modo complexo ser muito sensível, principalmente ao ajuste da malha. Os valores obtidos neste trabalho foram, também, comparados com a análise modal, feita previamente. Nesta comparação, a aproximação foi da ordem de 99,95 %, inclusive para a parte imaginária do modo complexo.

Modo	FE-DI-VBPM	[53]	Edge Element [55]
H_{11}^y	$(3, 574312 - i1, 593 \times 10^{-7})$	$(3, 573733 - i1, 692 \times 10^{-7})$	$(3, 573795 - i1, 712 \times 10^{-7})$
H_{12}^y	$(3, 543312 - i5, 393 \times 10^{-5})$	$(3, 543067 - i5, 739 \times 10^{-5})$	$(3, 543225 - i5, 569 \times 10^{-5})$
H_{13}^y	$(3, 500212 - i9, 301 \times 10^{-4})$	$(3, 493831 - i9, 179 \times 10^{-4})$	$(3, 494256 - i8, 831 \times 10^{-4})$

Tabela 4.1: Comparação entre os índices complexos, para o guia de onda vazante, obtidos neste trabalho e os mostrados em [53].

4.7 Conclusões

A nova formulação foi usada para analisar guias de ondas dielétricos anisotrópicos. Mais uma vez, fica evidenciado o ótimo desempenho desta formulação, pois, com as simulações aqui apresentadas, pode-se constatar, de fato, a natureza vetorial das ondas eletromagnéticas.

A natureza vetorial das ondas eletromagnéticas, ocorre por existir uma considerável dependência de suas aplicações, com relação à geometria da estrutura e à polarização dos campos. Verica-se, também, esta dependência com relação ao material e o acoplamento das componentes de campo \vec{h} , devido, principalmente, à anisotropia presente no tensor permissividade relativa. Os resultados das simulações apresentadas neste capítulo apresentam uma boa concordância com os dados experimentais e numéricos presentes na literatura. Usou-se, também, a aplicação da ferramenta numérica, aqui proposta, para analisar a obtenção de modos complexos em um guia de onda vazante 2D, através da propagação com distância imaginária.

Capítulo 5

Conclusões e Trabalhos Futuros

5.1 Conclusões

Uma nova formulação, para análise da propagação de feixes ópticos, foi apresentada com detalhes neste trabalho. Aqui, um substancial e importante avanço foi dado em relação ao trabalho apresentado por Helder e outros [14]. Nesta nossa formulação, foi feita a análise de guias não-recíprocos, como, por exemplo, a análise do guia de onda costela-magnetoóptico; camadas perfeitamente casadas (PMLs) foram incorporadas, definindo assim, um absorvedor não físico; adotou-se um esquema de propagação não-paraxial, com a introdução da aproximação de Padé e foram analisadas estruturas com geometrias de várias formas, além de acrescentar uma nova apresentação do equacionamento matemático que leva em conta menos aproximações, tornando a solução dos exemplos, aqui mostrados, mais precisa, e com esforço computacional consideravelmente menor, em relação ao do trabalho apresentado em [14].

O presente trabalho baseia-se, completamente, na nova formulação, a qual permite a introdução da hipótese de ângulo largo de maneira direta e sem maiores manipulações algébricas. Também permite a introdução, de forma direta, de camadas perfeitamente casadas, o que reduz drasticamente o esforço computacional, por permitir simulações com janelas computacionais pequenas e sem causar reflexões nas suas paredes adjacentes. O método VBPM, aqui apresentado, baseia-se na técnica dos elementos finitos, utiliza o esquema de diferenças finitas de Cranck-Nicholson para implementar a propagação do feixe, utiliza a recorência de Padé como esquema de não-paraxialidade e foi desenvolvido a partir da equação de onda vetorial, escrita em termos das componentes transversais do campo magnético \vec{h} , por meio da inclusão implícita da condição de divergente nulo, que, também, garante a eliminação das soluções espúrias. O esforço computacional foi reduzido, também, devido à eliminação da componente longitudinal h_z , uma vez que as dimensões das matrizes do sistema matricial resultante ficam reduzidas.

A consistência da formulação foi verificada através das simulações apresentadas. Neste trabalho, foram analisados guias de onda dielétricos constituídos por materiais isotrópicos e anisotrópicos, como, também, foi feita a análise da propagação de feixes ópticos através da distância imaginária. As análises apresentadas neste trabalho, conduziram a uma boa concordância com resultados publicados na literatura especializada e, dentre as diversas estruturas aqui estudadas, pode-se destacar a análise do guia

costela-magnetoóptico. Neste caso, além de se analisar a evolução do campo \vec{h} ; traçou-se a evolução do estado de polarização. Pode-se destacar, também, a análise da fibra óptica de alta birrefringência, a análise da fibra D e a análise da propagação de feixes ópticos através da distância imaginária, o que permite a obtenção de modos complexos.

Os tempos de simulações, necessários para obter os resultados mostrados neste trabalho, variam com o número de elementos presentes nas malhas de cada estrutura. Isto é, quanto maior o número de elementos, maior o tempo de simulação. As simulações feitas nesta Tese levaram, em média, 10 minutos para serem efetuadas.

5.2 Trabalhos futuros

Para futuros trabalhos sugere-se a implementação do propagador vetorial, considerando meios dielétricos com anisotropia completa, aqui, a componente longitudinal deve ser considerada. Para esta nova implementação, a formulação foi obtida como parte dos estudos deste trabalho e apresentada no Anexo D. Esquemas de propagação estão sendo estudados.

Este trabalho ainda possibilita o estudo de ondas em estruturas com fortes descontinuidades do índice de refração ao longo da direção de propagação (BPM bidirecional)

Pode-se adaptar a formulação para a análise de estruturas com perfis não-lineares, pode-se incorporar novas malhas adaptativas e pode-se desenvolver uma análise mais abrangente da influência das tensões induzidas por forças externas sobre a propagação dos campos eletromagnéticos.

Referências

- [1] D. Yevick e B. Hermansson, “New formulations of the matrix beam propagation method: Application to rib waveguide”, *IEEE J. Quantum Electron.*, vol 25, pp. 221-229, Fevereiro 1989.
- [2] D. Yevick e B. Hermansson, “Split-step finite difference analysis of rib waveguides”, *Electron. Letters*, vol 25, pp. 461-462, 1989.
- [3] D. Yevick e M Glasner, “Foward wide-angle light propagation in semiconductor rib waveguides”, *Opt. Letters*, vol 15, pp. 174-176, Fevereiro 1990.
- [4] Y. Arai, A. Maruta e M. Matsuahara, “Transparent boundary for the finite element beam-propagation method”, *Opt. Letters*, vol. 18, pp. 765-766, 1993.
- [5] F. Ma, C. L. Xu e W. P. Huang, “Wide-angle full vectorial beam propagation method”, *Inst. Elec. Eng. Proc.-Optoelectron.*, vol. 143, pp. 139-143, Abril 1996.
- [6] S. S. A. Obayya, B. M. A. Rahman e H. A. El-Mikati, “New-vectorial numerically efficient propagation algorithm based on the finite element method”, *IEEE Journal of Lightwave Technology*, Vol. 18, No. 3, pp. 409-415, Março 2000.
- [7] H. E. Hernández-Figueroa, F. A. Fernández, Y. Lu e J. B. Davies, “Vectorial finite element modeling of 2D leaky waveguides”, *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 33, No. 4, pp. 1710-1713, Maio 1995.
- [8] H. F. Pinheiro e H. E. Hernández-Figueroa, “Novel finite-element formulation for vectorial Beam Propagation Analysis in anisotropic medium”, *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol. 12, No. 2, pp. 155-157, Fevereiro 2000.
- [9] R. L. Courant, “Variational methods for the solution of problems equilibrium and vibration”, *Bulletin of American Mathematical Society*, vol 5, pp. 1-23, 1943.
- [10] P. P. Silvester, “Finite Element solution of homogeneous waveguide problems”, *Alta Frequenza*, vol. 38, pp 313-317, 1969.
- [11] L. Nicolas, A. Nicolas e J. L. You Bi, “H. (curl) elements on hexahedral and vector a.b.c.’s for unbounded microwave problems”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 31, pp. 1538-1541, Maio 1995.

- [12] M. Gunzburger, A. Bayliss e E. Turkel, “Boundary conditions of the numerical solution of elliptic equation in exterior regions”, *SIAM, Society and Applied Mathematics, J. Appl. Math.*, vol. 42, pp. 430-451, Abril 1982.
- [13] J. P. Berenger, “A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves”, *J. Comput. Phys.*, vol. 114, No. 10, pp. 185-200, Outubro 1994.
- [14] H. F. Pinheiro, “Método vetorial da propagação de feixes ópticos baseado em elementos finitos”, *Tese de Doutorado, UNICAMP, Brasil*, Fevereiro 2000.
- [15] Y. Tsuji e M. Koshiba, “Simple and efficient adaptative mesh generation for approximation scalar guided-mode and beam-propagation solutions”, *IEICE Trans. Electron.*, vol. E81-C, pp. 1814-1820, Dezembro 1998.
- [16] T. B. Koch., J. B. Davies e D. Wickramasinghe, “Finite element/finite difference propagation algorithm for integrated optical devices”, *Electron. Lett.*, vol. 25, pp. 514-516, Abril 1989.
- [17] K. Hayata, A. Misawa e M. Koshiba, “Split-step finite-element method applied to nonlinear integrated optics”, *J. Opt. Soc Amer. B*, vol. 7, pp. 1772-1784, Setembro 1990.
- [18] M. Koshiba e Y. Tsuji, “A wide-angle finite-element beam propagation method”, *IEEE Photon. Technol.*, vol. 8, pp. 1208-1210, Setembro 1996.
- [19] Y. Tsuji, M. Koshiba e T. Shiraishi, “Finite element beam propagation method for three-dimensional optical structures”, *IEEE J. Lightwave Technol.*, vol. 15, pp. 1728-1734, Fevereiro 1997.
- [20] N. Takimoto, M. Koshiba e Y. Tsuji, “Finite element beam propagation method for anisotropic optical waveguide”, *Trans. IEICE*, vol. J80-C-I, pp. 213-219, Maio 1997.
- [21] P. L. Liu e B. J. Li., “Semivectorial beam-propagation method for analysis of polarized modes of rib waveguide”, *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 28, pp. 778-782, Abril 1992.
- [22] P. C. Lee e E. Voges, “Three-dimensional semi-vectorial wide-angle beam propagation method”, *Journal of Lightwave Technology*, vol. 12, pp. 215-225, Fevereiro 1994.
- [23] S. V. Polstyanko, R. Dyczij-Edlinger e Jin-Fa Lee, “Full vectorial analysis of a nonlinear slab waveguide based on the nonlinear hybrid vector finite-element method”, *Optics Letters*, vol. 21, pp. 98-100, 1996.
- [24] S. V. Polstyanko e Jin-Fa lee, “ $H_1(\text{curl})$ Tangential Vector Finite Element Method for Modeling Anisotropic Optical Fibers”, *J. Lightwave Technol.*, vol. 13, pp. 2290-2295, Novembro 1995.
- [25] G. R. Hadley, “Wide-angle beam propagation using Padé approximation method”, *Optics Letters*, vol. 17, No. 10, pp. 1426-1428, Outubro 1992

- [26] J. P. da Silva, H. Hernández-Figueroa e A. M. Frasson, “Improved vectorial-Element BPM Analysis for transverse anisotropic media”, *IEEE Journal of Lightwave Technology*, Fevereiro 2003.
- [27] E. Montanari, S. Selleri, L. Vincent e M. Zoboli, “Finite-element full-vectorial propagation analysis for three-dimensional z-variant optical waveguide”, *IEEE/OSA J. Lightwave Tech.*, vol. 16, pp. 703-714, Abril 1998.
- [28] Em. E. Kriezis e A. G. Papagiannakis, “A joint finite-difference and FFT full vectorial beam propagation scheme”, *J. Lightwave Tech.*, vol. 13, Abril 1995.
- [29] R. P. Ratowsky, J. A. Fleck Jr. e M. D. Feit, “Helmholtz beam propagation in rib waveguides and couplers by iterative Lanczos reduction”, *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 9, pp. 256-273, Fevereiro 1992.
- [30] A. P. L. Barbero, “Sistema para caracterização de circuitos ópticos a fibras altamente birrefringentes”, *Tese de Mestrado, ITA, São José dos Campos, SP, Brasil, 1995.*
- [31] Y. Namihira, M. Kudo e Y. Mushiake, “Effect of Mechanical Stress on the Transmission Characteristics of Optical Fibers”, *J. IEEE Japan, J160-C*, 391, 1977.
- [32] S. Selleri, L. Vincetti and M. Zoboli, “Full-vector finite-element beam propagation method for anisotropic device analysis”, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 36, No. 12, pp. 1392-1401, Dezembro 2000.
- [33] Y. Tsuji e M. Koshiba, “Guided-mode and Leaky-mode analysis by imaginary distance beam propagation method based on finite element scheme”, *Journal of Lightwave Technology*, vol. 18, pp. 618-623, Abril 2000.
- [34] S. S. A. Obayya, B. M. A. Rahman, K. T. V. Grattan e H. A. El-Mikati, “Full Vectorial Finite-element-based imaginary distance beam propagation solution of complex modes in optical waveguides”, *Journal of Lightwave Technology*, vol. 20, pp 1054-1060, Junho 2002.
- [35] J. P. da Silva, H. E. Hernández-Figueroa e A. M. F. Frasson, “Simulation of Transverse Anisotropic Waveguides by an Efficient H-Field Finite-Element BPM”, *Proceedings do PIERS 2002 - Progress in Electromagnetics Research Symposium, Cambridge, Massachusetts, USA*, p. 190, Julho 1-5, 2002.
- [36] J. P. da Silva, H. E. Hernández-Figueroa e A. M. Frasson, “Improved Finite-Element Formulation for Vector Beam Propagation in Transverse Anisotropic Media”, *Proceedings do OSA / Integrated Photonics Research Symposium, IPR'2002, Vancouver, Canadá, pp. IThH3-1 - IThH3-3*, Julho 17-19, 2002.

- [37] J. P. da Silva e H. E. Hernández-Figueroa, “New Vectorial Finite-Element BPM for Optical Anisotropic Waveguides”, *Proceedings do ITS’2002, International Telecommunications Symposium*, Setembro 8-12, 2002, Natal, RN, Brasil, publicado em CD-ROM.
- [38] J. P. da Silva e H. E. Hernández-Figueroa, “Vector FE-BPM Applied to the Analysis of Polarization-Holding Optical Fiber”, *Proceedings do NUSOD-02, Numerical Simulation of Semiconductor Optoelectronics Devices*, Setembro 25-27, 2002, Zurich, Suíça.
- [39] José P. da Silva e H. E. Hernández-Figueroa, “Um Novo Método de Análise de Propagação Vetorial Aplicado na Análise de Fibras Ópticas de Alta Birrefringência”, *Congresso Brasileiro de Magnetismo*, Gramado, RS, publicado em CD-ROM, novembro 2002.
- [40] J. P. da Silva e H. E. Hernández-Figueroa, “Um Novo Método de Propagação Vetorial para Guias Ópticos Anisotrópicos”, *Proceedings do SBMO’2002, Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica*, Recife, PE, Brasil, pp. 260-264, Agosto 12-16, 2002.
- [41] J. Jin, *The Finite Element in Electromagnetics*, John Wiley, 1993.
- [42] Y. Tsuji e M. Koshiba, “A finite element beam propagation method for strongly guiding and longitudinally varying optical waveguides”, *J. Lightwave Technol.* vol. 14, pp. 217-221, Fevereiro 1996.
- [43] M. Koshiba, Y. Tsuji e M. Hikari, “Finite-element beam-propagation method with perfectly matched layers boundary conditions”, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 35, No. 3, pp. 1482-1485, Maio 1999.
- [44] Y. Tsuji e M. Koshiba, “Adaptive mesh generation for full-vectorial guided-mode and beam-propagation solutions”, *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, Vol. 6, No. 1, pp. 163-169, Janeiro/Fevereiro 2000.
- [45] E. Montanari, S. Selleri, L. Vincetti e M. Zoboli, “Finite -element formulation for full-vectorial propagation in three-dimensional optical waveguides”, *IEEE Photon. Technol. Lett.*, Vol. 9, pp. 1244-1246, Setembro 1997.
- [46] E. Montanari, S. Selleri, L. Vincetti e M. Zoboli, “Finite element full-vectorial propagation analysis for three-dimensional z-varying optical waveguide”, *IEEE/OSA J. Lightwave Tech.*, vol. 16, No. 4, pp. 703-114, Abril 1998.
- [47] D. Correia, “Algoritmos genéticos e elementos finitos na síntese de dispositivos fotônicos”, *Tese de Mestrado, UNICAMP, Brasil*, Fevereiro 2002.
- [48] V. E. do Nascimento, “Método FD-BPM semivetorial de ângulo largo para análise de estruturas tridimensionais utilizando a técnica ADI”, *Tese de Mestrado, USP-São Carlos, Brasil*, Junho 2002.

- [49] K. Saitoh e M. Koshiba, “Approximate scalar finite-element beam-propagation method with perfectly matched layers for anisotropic optical waveguides”, *IEEE Journal of Lightwave Technology*, Vol. 19, No 5, pp. 786-792, Maio. 2001.
- [50] A. Frasson, A. P. Barbero, H. F. Pinheiro e H. E. Hernandez-Figueroa, “Efficient finite-element analysis of magneto optic waveguide”, *Proceedings of the 1999 SBMO/IEEE, MTT-S, AP-S and LEOS International Microwave and Optoelectronics Conference, IMOC'99*. Rio de Janeiro, Brazil, pp. 589-592, 9-12 Agosto 1999.
- [51] S. L. A. Carrara, B. Y. Kim e H. J. Shaw, “Elasto-optic alignment of birefringent axes in polarization-holding optical fiber”, *Optics Letters*, vol. 11, no. 7, pp. 470-472, Julho 1986.
- [52] H. F. Pinheiro, A. P. L. Barbero e H. E. Hernández-Figueroa, “Full-Vectorial FE-BPM approach for the analysis of anisotropic medium with off-diagonal permittivity terms”, *Mic. Opt. Tech. Letters*, V. 25, No. 1, pp. 12-14, Abril 2000.
- [53] S. S. A. Obayya, B. M. A. Rahman, K. T. V. Grattan e H. A. El-Mikati, “ Full vectorial finite-element-based imaginary distance beam propagation solution of complex modes in optical waveguides”, *Journal of Lightwave Technology*, Vol. 20, No. 6, pp. 1054-1060, Junho 2002.
- [54] F. Wijnands, H. J. W. M. Hoekstra, G. J. M. Krijnem e R. M. de Ridder, “Numerical solution method of nonlinear guided modes with a finite difference complex axis beam propagation method ”, *Journal of Quantum Electronics*, Vol. 31, No. 5, pp. 782-790, Maio 1975.
- [55] S Selleri, L. Vincetti, A. Cucinotta e D. M. Zoboli, “ Complex FEM modal solver of optical waveguides with PML boundary conditions”, *Opt. Quantum Electron.*, Vol. 33, pp. 339-371, 2001.

Publicações associadas à tese

1. J. P. da Silva, H. Hernández-Figueroa e A. M. Frasson, “Improved vectorial-Element BPM Analysis for transverse anisotropic media”, *IEEE Journal of Lightwave Technology*, Fevereiro 2003.
2. J. P. da Silva, H. E. Hernández-Figueroa, A. M. F. Frasson, “Simulation of Transverse Anisotropic Waveguides by an Efficient H-Field Finite-Element BPM”, *Proceedings do PIERS 2002 - Progress in Electromagnetics Research Symposium, Cambridge, Massachusetts, USA*, p. 190, Julho 1-5, 2002.
3. J. P. da Silva, H. E. Hernández-Figueroa, e A. M. Frasson, “Improved Finite-Element Formulation for Vector Beam Propagation in Transverse Anisotropic Media”, *Proceedings do OSA / Integrated Photonics Research Symposium, IPR’2002, Vancouver, Canadá, pp. IThH3-1 - IThH3-3*, Julho 17-19, 2002.
4. J. P. da Silva e H. E. Hernández-Figueroa, “New Vectorial Finite-Element BPM for Optical Anisotropic Waveguides”, *Proceedings do ITS’2002, International Telecommunications Symposium*, Setembro 8-12, 2002, Natal, RN, Brasil, publicado em CD-ROM.
5. J. P. da Silva e H. E. Hernández-Figueroa, “Vector FE-BPM Applied to the Analysis of Polarization -Holding Optical Fiber”, *Proceedings do NUSOD-02, Numerical Simulation of Semiconductor Optoelectronics Devices*, Setembro 25-27, 2002, Zurich, Suíça.
6. José P. da Silva e H. E. Hernández-Figueroa, “Um Novo Método de Análise de Propagação Vetorial Aplicado na Análise de Fibras Ópticas de Alta Birrefringência”, *Congresso Brasileiro de Magnetismo*, Gramado, RS, publicado em CD-ROM, novembro 2002.
7. J. P. da Silva e H. E. Hernández-Figueroa, “Um Novo Método de Propagação Vetorial para Guias Ópticos Anisotrópicos”, *Proceedings do SBMO’2002, Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica*, Recife - PE, Brasil, pp. 260-264, Agosto 12-16, 2002.
8. D. Correa, J. P. da Silva e H. E. Hernández-Figueroa, “Genetic Algorithm and Finite Element Design of Short Single-Setion Passive Polarization” *IEEE- Photonics Technology letters*, a ser publicado em julho de 2003.

Apêndice A

Obtenção da equação (2.27)

Para explicar a dedução de (2.27), expandiremos (2.26), analisando-a termo a termo, como segue.

O primeiro passo consiste no desenvolvimento do terceiro termo de (2.26), que pode ser escrito da seguinte forma:

$$\alpha_z \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}_z \times \alpha_z \overset{=}{k_T} \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}_z \times \vec{h}_T = \hat{u}_z \times \alpha_z^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[\overset{=}{k_T} \left(\hat{u}_z \times \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z} \right) \right] \quad (\text{A.1})$$

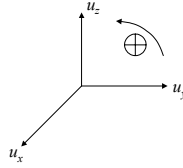


Fig. A-1: Sentido de efetivação do produto vetorial entre vetores unitários

Fazendo $\vec{F}_T = \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z}$, obtém-se as seguintes relações, (observe a Fig A-1):

$$\hat{u}_z \times \vec{F}_T = \hat{u}_z \times (F_x \hat{u}_x + F_y \hat{u}_y) = F_x \hat{u}_y - F_y \hat{u}_x \quad (\text{A.2})$$

$$\overset{=}{k_T} (\hat{u}_z \times \vec{F}_T) = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F_y \\ F_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{xx}F_y + k_{xy}F_x \\ -k_{yx}F_y + k_{yy}F_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xy} & -k_{xx} \\ k_{yy} & -k_{yx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Finalmente, substituindo (A.2) e (A.3) em (A.1), obtém-se:

$$\begin{aligned} \hat{u}_z \times \alpha_z^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{k}_T (\hat{u}_z \times \vec{F}_T) \right] &= \hat{u}_z \times \alpha_z^2 \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} -k_{xx}F_y + k_{xy}F_x \\ -k_{yx}F_y + k_{yy}F_x \end{pmatrix} = \\ \alpha_z^2 \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} k_{yx}F_y - k_{yy}F_x \\ -k_{xx}F_y + k_{xy}F_x \end{bmatrix} &= \alpha_z^2 \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} -k_{yy} & k_{yx} \\ k_{xy} & -k_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Da equação (A.4), pode-se concluir que:

$$\begin{bmatrix} -k_{yy} & k_{yx} \\ k_{xy} & -k_{xx} \end{bmatrix} = -\bar{k}_a \quad (\text{A.5})$$

Desta forma, (A.1) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\hat{u}_z \times \alpha_z^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{k}_T \left(\hat{u}_z \times \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z} \right) \right] = -\alpha_z^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{k}_a \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z} \right) \quad (\text{A.6})$$

Como, neste trabalho, a propagação ocorre sempre na direção z , o parâmetro α_z , da PML, é sempre fixado igual à unidade. Desta forma, temos que:

$$\hat{u}_z \times \alpha_z^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{k}_T \left(\hat{u}_z \times \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z} \right) \right] = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{k}_a \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z} \right) \quad (\text{A.7})$$

Aplicando os conceitos de derivação em (A.7) e considerando que \bar{k}_a pode variar segundo a direção de propagação z , tem-se:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{k}_a \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{k}_a}{\partial z} \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z} - \bar{k}_a \frac{\partial^2 \vec{h}_T}{\partial z^2} \quad (\text{A.8})$$

O próximo passo consiste no desenvolvimento matemático do segundo termo de (2.26), que pode ser escrito da seguinte forma:

$$\alpha_z \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}_z \times \bar{k}_T \nabla_T \times \vec{h}_T \hat{u}_z = \hat{u}_z \times \alpha_z \frac{\partial \bar{k}_T}{\partial z} (\nabla_T \times h_z \hat{u}_z) + \hat{u}_z \times \alpha_z \bar{k}_T \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_T \times h_z) \hat{u}_z \quad (\text{A.9})$$

Desenvolvendo o primeiro termo do segundo membro de (A.9), temos

$$\nabla_T \times h_z \hat{u}_z = (\alpha_x \frac{\partial}{\partial x} \hat{u}_x + \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} \hat{u}_y) \times h_z \hat{u}_z = -\alpha_x \frac{\partial h_z}{\partial x} \hat{u}_y + \alpha_y \frac{\partial h_z}{\partial y} \hat{u}_x \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{k}_T}{\partial z} (\nabla_T \times h_z \hat{u}_z) &= \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_y \frac{\partial h_z}{\partial y} \\ -\alpha_x \frac{\partial h_z}{\partial x} \end{bmatrix} = \\ & \frac{\partial}{\partial z} (\alpha_y k_{xx} \frac{\partial h_z}{\partial y} - \alpha_x k_{xy} \frac{\partial h_z}{\partial x}) \hat{u}_x + \frac{\partial}{\partial z} (\alpha_y k_{yx} \frac{\partial h_z}{\partial y} - \alpha_x k_{yy} \frac{\partial h_z}{\partial x}) \hat{u}_y \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_z \times \alpha_z \frac{\partial \bar{k}_T}{\partial z} (\nabla_T \times h_z \hat{u}_z) &= \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} (\alpha_y k_{xx} \frac{\partial h_z}{\partial y} - \alpha_x k_{xy} \frac{\partial h_z}{\partial x}) \hat{u}_y - \\ & \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} (\alpha_y k_{yx} \frac{\partial h_z}{\partial y} - \alpha_x k_{yy} \frac{\partial h_z}{\partial x}) \hat{u}_x \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

a equação (A.12) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\hat{u}_z \times \alpha_z \frac{\partial \bar{k}_T}{\partial z} (\nabla_T \times h_z \hat{u}_z) = \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} k_{yy} & -k_{yx} \\ -k_{xy} & k_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_x \frac{\partial h_z}{\partial x} \\ \alpha_y \frac{\partial h_z}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Fazendo $\bar{k}_a = \begin{bmatrix} k_{yy} & -k_{yx} \\ -k_{xy} & k_{xx} \end{bmatrix}$ e considerando $\alpha_z = 1$, pode-se escrever:

$$\hat{u}_z \times \alpha_z \frac{\partial \bar{k}_T}{\partial z} (\nabla_T \times h_z \hat{u}_z) = \frac{\partial \bar{k}_a}{\partial z} (\nabla_T \vec{h}_z) \quad (\text{A.14})$$

Desenvolveremos, agora, o segundo termo do segundo membro de (A.9).

Procedendo de maneira análoga ao desenvolvimento do primeiro termo de (A.9), chega-se à seguinte expressão para o segundo termo de (A.9):

$$\hat{u}_z \times \alpha_z \bar{k}_T \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_T \times h_z) \hat{u}_z = \bar{k}_a \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_T \vec{h}_z) \quad (\text{A.15})$$

Logo:

$$\alpha_z \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}_z \times \bar{k}_T \nabla_T \times \vec{h}_T \hat{u}_z = \frac{\partial \bar{k}_a}{\partial z} (\nabla_T \vec{h}_z) + \bar{k}_a \nabla_z (\nabla_T \vec{h}_z) \quad (\text{A.16})$$

Sabe-se, através da condição de divergente nulo ($\nabla \cdot \vec{h} = 0$), que:

$$(\nabla_T + \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}_z) \cdot (\vec{h}_T + h_z \hat{u}_z) = 0 \quad (\text{A.17})$$

Fazendo $\alpha_z = 1$ em (A.17), tem-se:

$$\nabla_T \cdot \vec{h}_T = -\frac{\partial}{\partial z} h_z \quad (\text{A.18})$$

Multiplicando-se ambos os membros da equação (A.18) por ∇_T e fazendo $\nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}$, tem-se:

$$\nabla_T(\nabla_T \cdot \vec{h}_T) = -\nabla_T(\nabla_z h_z) = -\nabla_z(\nabla_T h_z) \quad (\text{A.19})$$

Substituindo (A.19) em (A.16), pode-se escrever:

$$\alpha_z \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}_z \times \bar{k}_T \nabla_T \times \vec{h}_T \hat{u}_z = \frac{\partial \bar{k}_a}{\partial z} (\nabla_T \vec{h}_z) - \bar{k}_a \nabla_T(\nabla_T \cdot \vec{h}_T) \quad (\text{A.20})$$

De (A.8), (A.20) e (2.26), chega-se a:

$$\nabla_T \times k_{zz} \nabla_T \times \vec{h}_T + \frac{\partial \bar{k}_a}{\partial z} (\nabla_T \vec{h}_z) - \bar{k}_a \nabla_T(\nabla_T \cdot \vec{h}_T) - \frac{\partial \bar{k}_a}{\partial z} \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z} - \bar{k}_a \frac{\partial^2 \vec{h}_T}{\partial z^2} - k_0^2 \vec{h}_T = 0 \quad (\text{A.21})$$

A equação (A.18), pode ser escrita da seguinte forma:

$$\nabla_T \cdot \vec{h}_T = -\frac{\partial h_z}{\partial z} \quad (\text{A.22})$$

A solução da equação (A.21) pode ser tomada como $\vec{H}(x, y, z) = h(x, y, z) \exp(-\gamma z)$, na qual $h(x, y, z)$ é a componente lenta e $\exp(-\gamma z)$ é a componente rápida da onda propagante, respectivamente. Aplicando essa solução nas equações (??) e (A.22), tem-se, respectivamente:

$$\nabla_T \times k_{zz} \nabla_T \times \vec{h}_T + \frac{\partial \bar{k}_a}{\partial z} (\nabla_T \vec{h}_z) - \bar{k}_a \nabla_T(\nabla_T \cdot \vec{h}_T) - \frac{\partial \bar{k}_a}{\partial z} (\frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z} - \gamma \vec{h}_T) - \bar{k}_a \left(\frac{\partial^2 \vec{h}_T}{\partial z^2} - 2\gamma \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z} + \gamma^2 \vec{h}_T \right) - k_0^2 \vec{h}_T = 0 \quad (\text{A.23})$$

$$h_z = \frac{1}{\gamma} \left(\nabla_T \cdot \vec{h}_T - \frac{\partial h_z}{\partial z} \right) \quad (\text{A.24})$$

Levando (A.24) em (A.23), chega-se a:

$$\begin{aligned} \nabla_T \times k_{zz} \nabla_T \times \vec{h}_T - \left(\frac{\partial \bar{k}_a}{\partial z} - 2\gamma \bar{k}_a \right) \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z} + \left(\gamma^{-1} \frac{\partial \bar{k}_a}{\partial z} - \bar{k}_a \right) \nabla_T (\nabla_T \cdot \vec{h}_T) - \\ \bar{k}_a \frac{\partial^2 \vec{h}_T}{\partial z^2} - \frac{\partial \bar{k}_a}{\partial z} \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z} - \gamma^{-1} \left(\frac{\partial \bar{k}_a}{\partial z} \nabla_T \frac{\partial h_z}{\partial z} \right) - (k_0^2 - \gamma \frac{\partial \bar{k}_a}{\partial z} + \gamma^2 \bar{k}_a) \vec{h}_T = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Finalmente, substituindo (2.29) e (2.30) em (A.25), chega-se à equação (2.27), apresentada no Capítulo 2 e reescrita como (A.26)

$$\begin{aligned} \bar{k}_a \frac{\partial^2 \vec{h}_T}{\partial z^2} - 2\gamma \bar{k}_a \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z} - \bar{k}_b \nabla_T (\nabla_T \cdot \vec{h}_T) - \nabla_T \times k_{zz} \nabla_T \times \vec{h}_T + \\ (\bar{k}_c + \gamma^2 \bar{k}_a) \vec{h}_T + \frac{\partial \bar{k}_a}{\partial z} \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z} + \gamma^{-1} \frac{\partial \bar{k}_a}{\partial z} \nabla_T \frac{\partial h_z}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Apêndice B

Obtenção do terceiro e quarto termos da equação (2.35)

Para a obtenção do terceiro e quarto termos de (2.35), procede-se desenvolvendo tais termos através de integração por partes. Para isso, primeiramente segue, abaixo, o procedimento para a obtenção da expressão (2.36), que representa o terceiro termo de (2.35). O termo citado está escrito como $\int_{\Omega} (\bar{k}_b \nabla_T(\nabla_T \cdot \vec{h}_T)) \cdot \vec{\omega}_T d\Omega$; fazendo:

$$\nabla_T(\nabla_T \cdot \vec{h}_T) = \vec{a}_T, \quad (\text{B.1})$$

tem-se que:

$$\begin{aligned} \bar{k}_b \vec{a}_T &= \begin{bmatrix} k_{bxx} & k_{bxy} \\ k_{byx} & k_{byy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \\ & (k_{bxx}a_x + k_{bxy}a_y)\hat{a}_x + (k_{byx}a_x + k_{byy}a_y)\hat{a}_y \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} \bar{k}_b \vec{a}_T \cdot \vec{\omega}_T &= [(k_{bxx}a_x + k_{bxy}a_y)\hat{a}_x + (k_{byx}a_x + k_{byy}a_y)\hat{a}_y] \cdot (\omega_x\hat{a}_x + \omega_y\hat{a}_y) = \\ & k_{bxx}a_x\omega_x + k_{bxy}a_y\omega_x + k_{byx}a_x\omega_y + k_{byy}a_y\omega_y \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

A equação (B.3) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\bar{k}_b \vec{a}_T \cdot \vec{\omega}_T = \begin{bmatrix} a_x k_{bxx} & a_x k_{by} \\ a_y k_{bxy} & a_y k_{byy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$\bar{k}_b \vec{a}_T \cdot \vec{\omega}_T = \vec{a}_T \cdot \begin{bmatrix} k_{bxx} & k_{by} \\ k_{bxy} & k_{byy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Logo,

$$\bar{k}_b \vec{a}_T \cdot \vec{\omega}_T = \vec{a}_T \cdot \bar{k}_b^T \vec{\omega}_T \quad (\text{B.6})$$

Da análise descrita acima, conclui-se que:

$$\bar{k}_b \nabla_T (\nabla_T \cdot \vec{h}_T) \cdot \vec{\omega}_T = \nabla_T (\nabla_T \cdot \vec{h}_T) \cdot (\bar{k}_b^T \vec{\omega}_T) \quad (\text{B.7})$$

Sendo \vec{A} e \vec{B} dois vetores quaisquer, sabe-se que:

$$\nabla \cdot (\vec{A} \vec{B}) = \nabla \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \nabla \cdot \vec{B} \quad (\text{B.8})$$

Fazendo $\vec{A} = \nabla_T \cdot \vec{h}_T$ e $\vec{B} = \bar{k}_b^T \vec{\omega}_T$, chega-se a:

$$\nabla_T \cdot [(\nabla_T \cdot \vec{h}_T) (\bar{k}_b^T \vec{\omega}_T)] = \nabla_T (\nabla_T \cdot \vec{h}_T) \cdot (\bar{k}_b^T \vec{\omega}_T) + (\nabla_T \cdot \vec{h}_T) \nabla_T \cdot (\bar{k}_b^T \vec{\omega}_T) \quad (\text{B.9})$$

Portanto, pode-se escrever:

$$\bar{k}_b \nabla_T (\nabla_T \cdot \vec{h}_T) \cdot \vec{\omega}_T = \nabla_T \cdot [(\nabla_T \cdot \vec{h}_T) (\bar{k}_b^T \vec{\omega}_T)] - (\nabla_T \cdot \vec{h}_T) \nabla_T \cdot (\bar{k}_b^T \vec{\omega}_T) \quad (\text{B.10})$$

Aplicando a integral em ambos os membros de (B.10), em todo o domínio Ω , pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} [\bar{k}_b \nabla_T (\nabla_T \cdot \vec{h}_T) \cdot \vec{\omega}_T] d\Omega = \int_{\Omega} [\nabla_T \cdot (\nabla_T \cdot \vec{h}_T) (\bar{k}_b^T \vec{\omega}_T)] d\Omega - \int_{\Omega} [(\nabla_T \cdot \vec{h}_T) \nabla_T \cdot (\bar{k}_b^T \vec{\omega}_T)] d\Omega \quad (\text{B.11})$$

Aplicando o teorema de Green no primeiro termo do segundo membro da equação (B.11), finalmente podemos escrever:

$$\int_{\Omega} [\bar{k}_b \nabla_T (\nabla_T \cdot \vec{h}_T) \cdot \vec{\omega}_T] d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\nabla_T \cdot \vec{h}_T) (\bar{k}_b \vec{\omega}_T) \cdot \vec{n} d\ell - \int_{\Omega} [(\nabla_T \cdot \vec{h}_T) \nabla_T \cdot (\bar{k}_b \vec{\omega}_T)] d\Omega \quad (\text{B.12})$$

Para obtenção de (2.37), que representa o quarto termo de (2.35), empregou-se o primeiro teorema de Green, dado por:

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \vec{a}) \cdot (\nabla \times \vec{b}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{a} \cdot (\nabla \times \nabla \times \vec{b}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot (\vec{a} \times \nabla \times \vec{b}) d\ell \quad (\text{B.13})$$

sendo \vec{a} e \vec{b} dois vetores quaisquer. Fazendo: $\nabla \times \vec{b} = k_{zz} \nabla_T \times \vec{h}_T$ e $\vec{a} = \vec{\omega}_T$, obtém-se a seguinte equação como resultado:

$$\int_{\Omega} (\nabla_T \times \vec{\omega}_T) (k_{zz} \nabla_T \times \vec{h}_T) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{\omega}_T \cdot [\nabla_T \times (k_{zz} \nabla_T \times \vec{h}_T)] d\Omega = \int_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot [\vec{\omega}_T \times (k_{zz} \nabla_T \times \vec{h}_T)] d\ell \quad (\text{B.14})$$

Usando a identidade vetorial, $(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$ e fazendo, neste caso, $\vec{a} = k_{zz} \nabla_T \times \vec{h}_T$, $\vec{b} = \vec{n}$ e $\vec{c} = \vec{\omega}_T$, chega-se a:

$$(\vec{n} \times \vec{\omega}_T) \cdot (k_{zz} \nabla_T \times \vec{h}_T) = \vec{n} \cdot (\vec{\omega}_T \times k_{zz} \nabla_T \times \vec{h}_T) \quad (\text{B.15})$$

Substituindo (B.15) no segundo membro da equação, chega-se ao quarto termo de (2.35), representado por (2.37):

$$\int_{\Omega} (\nabla_T \times k_{zz} \nabla_T \times \vec{h}_T) \cdot \vec{\omega}_T d\Omega = \int_{\Omega} k_{zz} (\nabla_T \times \vec{h}_T) \cdot (\nabla_T \times \vec{\omega}_T) d\Omega + \int_{\partial\Omega} k_{zz} (\nabla_T \times \vec{h}_T) \cdot (\vec{n} \times \vec{\omega}_T) d\ell \quad (\text{B.16})$$

Apêndice C

Cálculo de Integrais Elementares

As integrais apresentadas em (2.63)-(2.68) são chamadas de integrais elementares e podem ser determinadas sem a necessidade de se recorrer à integração numérica, uma vez que considera-se que ε_T^e constante em cada elemento. O procedimento de cálculo, normalmente usado, para determinar as integrais elementares, é mostrado neste apêndice.

Para proceder o cálculo das integrais (2.63)-(2.68), necessita-se fazer uma transformação de coordenadas. Desta forma, faremos a transformação do sistema de coordenadas globais (x,y) , para o sistema de coordenadas locais (ξ,η) , como mostra a Fig. C-1.

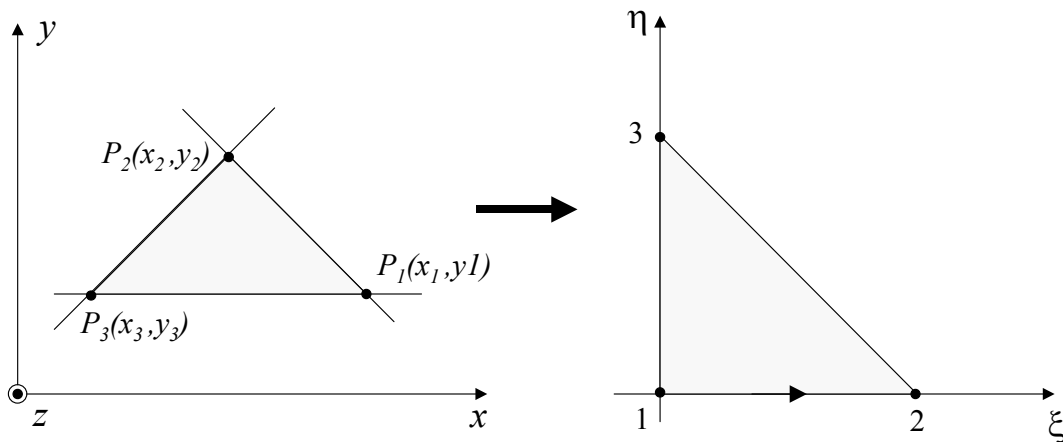


Fig. C-1: Mudança do sistema de coordenadas globais x e y para o sistema de coordenadas locais ξ e η .

Aqui, considera-se o conjunto de coordenadas locais ξ e η e seu correspondente conjunto de coordenadas globais x e y , como a seguir:

$$x = x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{ie} x_i \Psi_i(\xi, \eta) \quad (C.1)$$

$$y = y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{ie} y_i \Psi_i(\xi, \eta) \quad (\text{C.2})$$

Na transformação para elementos lineares ($ie = 3$), tem-se:

$$\Psi_1 = 1 - \xi - \eta \quad (\text{C.3})$$

$$\Psi_2 = \xi \quad (\text{C.4})$$

$$\Psi_3 = \eta \quad (\text{C.5})$$

Para elementos quadráticos ($ie = 6$), tem-se:

$$\Psi_1 = (1 - 2\xi - 2\eta)(1 - \xi - \eta) \quad (\text{C.6})$$

$$\Psi_2 = (2\xi - 1)\xi \quad (\text{C.7})$$

$$\Psi_3 = (2\eta - 1)\eta \quad (\text{C.8})$$

$$\Psi_4 = 4(1 - \xi - \eta)\xi \quad (\text{C.9})$$

$$\Psi_5 = 4\xi\eta \quad (\text{C.10})$$

$$\Psi_6 = 4\eta(1 - \xi - \eta) \quad (\text{C.11})$$

Fazendo $|J| = 2Ae$, sendo Ae a área do elemento e J a matriz Jacobiana, dada por $\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$, e aplicando o cálculo diferencial paraxial em (C.1) e (C.1), tem-se :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = |J| \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{C.12})$$

Assim, as derivadas mostradas em (C.12) podem ser escritas em termos das coordenadas globais, ou seja:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{C.13})$$

Onde, $|J|^{-1}$ é a inversa da matriz Jacobiana.

Das relações apresentadas, obtém-se a seguinte transformação para a integração:

$$\int f(x, y) dx dy = \int f(\xi, \eta) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta, \quad (\text{C.14})$$

para a qual $|J(\xi, \eta)|$ é o determinante da matriz Jacobiana.

Aplicando-se (C.12) nas equações (2.63)-(2.68), estas podem ser reescritas da seguinte forma:

$$S_{1ij}^e = |J^e| f_{1ij}^e \quad (\text{C.15})$$

$$[S_2^e] = \frac{1}{|J^e|} [(y_3^e - y_1^e) f_2^e - (y_3^e - y_1^e)(y_2^e - y_1^e)(f_4^e + f_4^{te}) + (y_2^e - y_1^e) f_3^e] \quad (\text{C.16})$$

$$[S_3^e] = \frac{1}{|J^e|} [(x_3^e - x_1^e) f_2^e - (x_3^e - x_1^e)(x_2^e - x_1^e)(f_4^e + f_4^{te}) + (x_2^e - x_1^e) f_3^e] \quad (\text{C.17})$$

$$[S_4^e] = \frac{1}{|J^e|} [(x_3^e - x_1^e)(y_3^e - y_1^e)f_2^{te} - (x_3^e - x_1^e)(y_2^e - y_1^e)f_4^e - (x_2^e - x_1^e)(y_3^e - y_1^e)f_4^{te} + (x_2^e - x_1^e)(y_2^e - y_1^e)f_3^{te}] \quad (C.18)$$

$$[L_1^e] = \frac{h_a}{|J^e|} [(y_3^e - y_1^e)\ell_p^e - (y_2^e - y_1^e)\ell_q^e] \quad (C.19)$$

$$[L_2^e] = -\frac{h_a}{|J^e|} [(x_3^e - x_1^e)\ell_p^e - (x_2^e - x_1^e)\ell_q^e], \quad (C.20)$$

onde: $f_1^e = \int_{\Omega^e} \psi^e \psi^{te} d\xi d\eta$, $f_2^e = \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi^e}{\partial \xi} \frac{\partial \psi^{te}}{\partial \xi} d\xi d\eta$, $f_3^e = \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi^e}{\partial \eta} \frac{\partial \psi^{te}}{\partial \eta} d\xi d\eta$ e $f_4^e = \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi^e}{\partial \eta} \frac{\partial \psi^{te}}{\partial \xi} d\xi d\eta$, onde as integrais f_2^{te} , f_3^{te} e f_4^{te} são as transpostas das integrais f_2^e , f_3^e e f_4^e , respectivamente.

Com relação às integrais de linha, representadas por $[L_1^e]$ e $[L_2^e]$, considera-se que:

- a) para $p = 1$ e $q = 2$, $h_a = \sqrt{(x_2^e - x_1^e)^2 + (y_2^e - y_1^e)^2}$, $\ell_1^e = \int_0^1 \left[\psi^e \frac{\partial \psi^{te}}{\partial \xi} \right]_{\eta=0} d\xi$ e $\ell_2^e = \int_0^1 \left[\psi^e \frac{\partial \psi^{te}}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} d\xi$, quando a integração é efetuada sobre a aresta $\overline{p_1 p_2}$;
- b) para $p = 3$ e $q = 4$, $h_a = \sqrt{(x_3^e - x_1^e)^2 + (y_3^e - y_1^e)^2}$, $\ell_3^e = \int_0^1 \left[\psi^e \frac{\partial \psi^{te}}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} d\eta$ e $\ell_4^e = \int_0^1 \left[\psi^e \frac{\partial \psi^{te}}{\partial \eta} \right]_{\xi=0} d\eta$, quando a integração é efetuada sobre a aresta $\overline{p_3 p_1}$;
- a) para $p = 5$ e $q = 6$, $h_a = \sqrt{(x_3^e - x_2^e)^2 + (y_3^e - y_2^e)^2}$, $\ell_5^e = \int_0^1 \left[\psi^e \frac{\partial \psi^{te}}{\partial \xi} \right]_{\eta=1-\xi} d\xi$ e $\ell_6^e = \int_0^1 \left[\psi^e \frac{\partial \psi^{te}}{\partial \eta} \right]_{\eta=1-\xi} d\eta$, quando a integração é efetuada sobre a aresta $\overline{p_2 p_3}$.

Apêndice D

Fomulação pelo Método da Propagação de Feixe considerando dielétricos com anisotropia completa

Nesta tese, apresentamos a formulação, pelo método da propagação de feixe, considerando o dielétrico com anisotropia transversal. Neste Anexo, apresentamos a formulação desenvolvida para incluir dielétricos com anisotropia completa. Neste caso, faz-se necessário o uso das três componentes do campo magnético \vec{h} . Desta forma, a equação que representa a componente longitudinal da equação de onda, deve ser considerada. Inicialmente consideraremos a equação de onda de Helmholtz, dada por:

$$\nabla \times (\varepsilon^{-1} \nabla \times \vec{H}) - k_0^2 \vec{H} \quad (\text{D.1})$$

onde $\nabla = \alpha_x \frac{\partial}{\partial x} \hat{u} + \alpha_y \frac{\partial}{\partial x} \hat{y} + \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$ e $\bar{\varepsilon} = \bar{k}$, com $\bar{k} = k_T + k_{zz} \hat{u}_z + \vec{k}_{yx} \hat{u}_z + \vec{k}_{xy} \hat{u}_z$. Os termos \vec{k}_{yx} e \vec{k}_{xy} , são dados por:

$$\vec{k}_{yx} = k_{xz} \hat{u}_x + k_{yz} \hat{u}_y \quad (\text{D.2})$$

$$\vec{k}_{xy} = k_{zx} \hat{u}_x + k_{zy} \hat{u}_y \quad (\text{D.3})$$

Substituindo-se a equação do operador ∇ e as equações (D.2) e (D.3) na equação (D.1) e fazendo algumas manipulações algébricas, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \nabla_T \times k_{zz} \nabla_T \times \vec{H}_T + \vec{u}_z \times \frac{\partial}{\partial z} (\bar{k}_T \nabla_T \times \vec{H}_z) + \hat{u}_z \times \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}_T (\hat{u}_z \times \frac{\partial \vec{H}_T}{\partial z}) + \\
& \nabla_T \times [\vec{k}_{xy} \cdot (\nabla_T \times \vec{H}_z)] \hat{u}_z + \nabla_T \times \vec{k}_{xy} \cdot (\hat{u}_z \times \frac{\partial \vec{H}_z}{\partial z}) \hat{u}_z + \\
& \hat{u}_z \times \frac{\partial}{\partial z} [\vec{k}_{yx} \hat{u}_z \cdot (\nabla_T \times \vec{H}_T)] - k_0^2 \vec{H}_T = 0
\end{aligned} \tag{D.4}$$

e

$$\begin{aligned}
& \nabla_T \times \bar{k}_T \nabla_T \times \vec{H}_z + \nabla_T \times \bar{k}_T (\hat{u}_z \times \frac{\partial \vec{H}_T}{\partial z}) + \\
& \nabla_T \times \vec{k}_{yx} [\hat{u}_z \cdot (\nabla_T \times \vec{H}_T)] - k_0^2 \vec{H}_z = 0
\end{aligned} \tag{D.5}$$

Aqui, (D.4) e (D.5) representam, respectivamente, a componente transversal e longitudinal da equação vetorial de onda escrita para meios dielétricos com anisotropia completa.

Aplicando a condição do divergente nulo, que leva a (2.24) e considerando $\vec{H} = \vec{h}(x, y, z)e^{-\gamma z}$, como uma solução para equação (D.1), onde $\vec{h}(x, y, z)$ representa a envoltória do campo magnético, as equações (D.4) e (D.5) podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
& \bar{k}_a \frac{\partial^2 \vec{h}_T}{\partial z^2} - 2\gamma \bar{k}_a \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z} - \bar{k}_b \nabla_T (\nabla_T \cdot \vec{h}_T) - \nabla_T \times k_{zz} \nabla_T \times \vec{h}_T + \\
& (\bar{k}_c + \gamma^2 \bar{k}_a) \vec{h}_T + \frac{\partial \bar{k}_a}{\partial z} \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z} + \gamma^{-1} \frac{\partial \bar{k}_a}{\partial z} \nabla_T \frac{\partial \vec{h}_z}{\partial z} - k_0^2 \vec{h}_T = \\
& \nabla_T \times \vec{k}_{xy} \cdot (\hat{u}_z \times \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z}) \hat{u}_z + \nabla_T \times [\vec{k}_{xy} \cdot (\nabla_T \times \vec{h}_z) \hat{u}_z] - \\
& \gamma [\nabla_T \times \vec{k}_{xy} \cdot (\hat{u}_z \times \vec{h}_T) \hat{u}_z] + \hat{u}_z \times \frac{\partial \vec{k}_{yx}}{\partial z} [\hat{u}_z \cdot (\nabla_T \times \vec{h}_T)] + \\
& \hat{u}_z \times \vec{k}_{yx} [\hat{u}_z \cdot (\nabla_T \times \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z})] - \hat{u}_z \times \gamma \vec{k}_{yx} [\hat{u}_z \cdot (\nabla_T \times \vec{h}_T)]
\end{aligned} \tag{D.6}$$

e

$$\begin{aligned}
& \nabla_T \times k_T \nabla_T \times \vec{h}_z + \nabla_T \times k_T (\hat{u}_z \times \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z}) - \gamma [\nabla_T \times \bar{k}_T (\hat{u}_z \times \vec{h}_T)] + \\
& \nabla_T \times \vec{k}_{yx} [\hat{u}_z \cdot (\nabla_T \times \vec{h}_T)] - k_0^2 \vec{h}_z = 0
\end{aligned} \tag{D.7}$$

onde \bar{k}_T , \bar{k}_a , \bar{k}_b e \bar{k}_c são dados por (2.17), (2.28), (2.29) e (2.30), respectivamente.

Procedendo de maneira análoga ao Capítulo 2, com relação FE-VBPM, as equações (D.6) e (D.7), na forma discretizada, podem ser escritas como:

$$[M] \frac{\partial^2 \left\{ \vec{h}_T \right\}}{\partial z^2} - 2\gamma [M] \frac{\partial \left\{ \vec{h}_T \right\}}{\partial z} + ([K] + \gamma^2 [M]) \left\{ \vec{h}_T \right\} = [b] \tag{D.8}$$

e

$$[D] \frac{\partial \{\vec{h}_T\}}{\partial z} + [E] \{\vec{h}_T\} + [F] \{\vec{h}_z\} = 0 \quad (\text{D.9})$$

Os elementos das matrizes $[M]$ e $[K]$ em (D.8), são dados por (2.55)-(2.62) e a matriz $[b]$ é dada reduz-se à $[Q1] \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z} + [Q2] \vec{h}_T + [Q3] \vec{h}_z$, para a qual os elementos das matrizes $[Q1]$, $[Q2]$ e $[Q3]$ são dados por:

$$[Q1_{xx}^e] = -\alpha_x k_{zy}^e [S_5^e] + \alpha_y k_{yz}^e [S_6^e] \quad (\text{D.10})$$

$$[Q1_{xy}^e] = \alpha_x k_{zy}^e [S_5^e] - \alpha_y k_{xz}^e [S_6^e] \quad (\text{D.11})$$

$$[Q1_{yx}^e] = \alpha_y k_{zx}^e [S_5^e] + \alpha_x k_{yz}^e [S_6^e] \quad (\text{D.12})$$

$$[Q1_{yy}^e] = \alpha_y k_{zx}^e [S_5^e] + \alpha_x k_{xz}^e [S_6^e] \quad (\text{D.13})$$

$$[Q2_{xx}^e] = \gamma \alpha_y k_{zx}^e [S_5^e] - \alpha_y \left(\gamma k_{yz}^e - \frac{\partial k_{xz}}{\partial z} \right) [S_6^e] \quad (\text{D.14})$$

$$[Q2_{xy}^e] = -\gamma \alpha_x k_{zx}^e [S_5^e] + \alpha_y \left(\gamma k_{xz}^e - \frac{\partial k_{xz}}{\partial z} \right) [S_6^e] \quad (\text{D.15})$$

$$[Q2_{yx}^e] = -\gamma \alpha_y k_{zy}^e [S_5^e] + \alpha_x \left(\gamma k_{yz}^e - \frac{\partial k_{yz}}{\partial z} \right) [S_6^e] \quad (\text{D.16})$$

$$[Q2_{yy}^e] = -\gamma \alpha_x k_{zy}^e [S_5^e] - \alpha_x \left(\gamma k_{xz}^e - \frac{\partial k_{yz}}{\partial z} \right) [S_6^e]$$

$$[Q3_{zx}^e] = \alpha_x \alpha_y k_{zy}^e [S_4^e] - \alpha_y^2 k_{zx}^e [S_3^e] \quad (D.17)$$

$$[Q3_{zy}^e] = \alpha_y \alpha_x k_{zx}^e [S_4^e] - \alpha_x^2 k_{zy}^e [S_2^e] \quad (D.18)$$

Onde $\gamma = jk_0 n_0$ e os elementos das matrizes $[D]$, $[E]$ e $[F]$ da equação (D.9), que representa a componente longitudinal da equação (D.1), são dados por:

$$[D_{xz}^e] = \alpha_y k_{xy}^e [S_5^e] - \alpha_x k_{yy}^e [S_5^e]^\tau \quad (D.19)$$

$$[D_{yz}^e] = -\alpha_y k_{xx}^e [S_5^e] + \alpha_x k_{yz}^e [S_5^e]^\tau \quad (D.20)$$

$$[E_{xz}^e] = -\gamma \alpha_y k_{xy}^e [S_5^e] + \gamma \alpha_x k_{yy}^e [S_5^e]^\tau - \alpha_y^2 k_{xz}^e [S_3^e] + \alpha_y \alpha_x k_{yz}^e [S_4^e] \quad (D.21)$$

$$[E_{yz}^e] = \gamma \alpha_y k_{xx}^e [S_5^e] - \gamma \alpha_x k_{yx}^e [S_5^e]^\tau + \alpha_x \alpha_y k_{xz}^e [S_3^e] - \alpha_x^2 k_{yz}^e [S_2^e] \quad (D.22)$$

$$[F_{zz}^e] = \alpha_y^2 k_{xx}^e [S_3^e] - \alpha_x \alpha_y k_{xy}^e [S_4^e]^\tau - \alpha_y \alpha_x k_{yx}^e [S_4^e] + \alpha_x^2 k_{yy}^e [S_2^e] + k_0^2 [S_1^e] \quad (D.23)$$

onde $[S_5^e] = \int_{\Omega^e} \frac{\partial\{\psi^e\}}{\partial z} \frac{\partial\{\psi^e\}}{\partial x} d\Omega$ e $[S_6^e] = \int_{\Omega^e} \frac{\partial\{\psi^e\}}{\partial z} \frac{\partial\{\psi^e\}}{\partial y} d\Omega$.

Os elementos das matrizes $[D]$, $[E]$ e $[F]$ podem ser usados para atualizar o campo longitudinal \vec{h}_Z e a equação (D.9) pode ser considerada como uma perturbação ao sistema, caracterizado pela equação (D.8). Esquemas de implementação para a formulação apresentada neste Anexo, estão sendo estudados.