

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

# Problema de contato com atrito utilizando o Método do Lagrangiano Aumentado

Autor: Alberto Luiz Serpa  
Orientador: Fernando Iguti

41/96

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR ALBERTO LUIZ  
SERPA E APROVADA PELA  
COMISSÃO JULGADORA EM 22/12/96.

Franzulli  
p/ ORIENTADOR

UNIDADE	BC		
CHAMADA:	TI/UNICAMP		
	Se67p		
	Fr.		
OMBO BC/	29431		
ROC.	281/97		
C	<input type="checkbox"/>	D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	735,11,00		
DATA	10/01/97		
CPD KM-00033683-4			

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Se67p

Serpa, Alberto Luiz

Problema de contato com atrito utilizando o método do lagrangiano aumentado / Alberto Luiz Serpa.--Campinas, SP: [s.n.], 1996.

Orientador: Fernando Iguti.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Elasticidade. 2. Método dos elementos finitos. 3. Programação (Matemática). 4. Lagrange, Funções de. I. Iguti, Fernando. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

## Problema de contato com atrito utilizando o Método do Lagrangiano Aumentado

Autor: **Alberto Luiz Serpa**

Orientador: **Fernando Iguti**

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de **DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Campinas, 1996

SP - Brasil

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

TESE DE DOUTORADO

Problema de contato com atrito utilizando  
o Método do Lagrangiano Aumentado

Autor: Alberto Luiz Serpa


Orientador: Fernando Iguti


Aprovada por




Prof. Dr. Fernando Iguti, Presidente  
FEM-UNICAMP

  
Prof. Dr. Akebo Yamakami  
FEE-UNICAMP

  
Prof. Dr. Marcos Nereu Arenales  
ICMSC-USP

  
Prof. Dr. Paulo de Barros Correia  
FEM-UNICAMP

  
Prof. Dr. Sérgio Persival Baroncini Proença  
EESC-USP

Campinas, 22 de novembro de 1996

# Agradecimentos

Agradeço ao Professor Fernando Iguti pelo seu interesse, sua atenção e seu suporte durante todas as fases deste trabalho de doutoramento.

Agradeço aos Professores Renato Pavanello e Janito Vaqueiro Ferreira pela atenção, disponibilidade para discussões e suas sugestões.

Agradeço especialmente à Rita e ao Fábio por terem sempre colaborado pacientemente durante a execução deste trabalho.

Agradeço ao Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP e à UNICAMP por ter cedido o suporte necessário para o andamento do trabalho.

Agradeço também à Equipamentos Clark Ltda (atualmente Eaton Truck Components Ltda) pelo incentivo, concessão de tempo e apoio financeiro para a realização do trabalho.

# Resumo

Serpa A. L., “*Problema de contato com atrito utilizando o Método do Lagrangiano Aumentado*”, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Unicamp, 1996, 145p., Tese (Doutorado).

Estuda-se neste trabalho o problema de contato com atrito entre corpos elásticos na elasticidade infinitesimal. Trata-se de um problema não linear devido à presença de restrições unilaterais (interpenetração dos corpos) e devido à presença de atrito. A solução deste problema é obtida utilizando-se os conceitos da otimização, formulando-se um problema de minimização com restrições. Para a solução das equações da elasticidade é empregado o Método dos Elementos Finitos. Este problema de minimização apresenta como função objetivo a energia potencial total dos corpos, restrições de desigualdade para representar as condições de não interpenetração dos corpos, e restrições de igualdade para abordar o atrito (lei de Coulomb). Devido à existência de duas condições de atrito (adesão e deslizamento), as restrições de igualdade ora são presentes ora não o são, dependendo do tipo de condição de atrito. Como a decisão pelo tipo de condição de atrito depende dos esforços normais e tangenciais de contato associados às restrições do problema, tem-se uma nova abordagem chamada aqui de *problema de minimização com restrições condicionalmente dependentes*. Para a solução deste problema utiliza-se o Método do Lagrangiano Aumentado de minimização restrita. Este, quando aplicado ao problema de contato, possui multiplicadores de Lagrange que apresentam o significado físico dos esforços de contato, permitindo a verificação das condições de atrito a cada iteração. Estes conceitos permitem formular alguns esquemas computacionais que conduzem a resultados numéricos satisfatórios.

**Palavras-chaves:** Elasticidade, Elementos Finitos, Problema de Contato, Programação Matemática, Lagrangiano Aumentado, Subestruturação.

# Abstract

**Serpa A. L.**, “*Contact problem with friction using the Augmented Lagrangian Method*”, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Unicamp, 1996, 145p., Thesis (Doctor).

This work presents the study of contact problems between elastic bodies with friction under the assumptions of the infinitesimal elasticity. This is a non-linear problem due to the presence of unilateral constraints (interpenetration of bodies) and friction. The solution of this problem is found using optimization concepts, establishing a constrained minimization problem. To solve the equations of elasticity the Finite Element Method is used. The established minimization problem has the total potential energy of the bodies as its objective function, the non-interpenetration conditions are represented by inequality constraints, and equality constraints are used to deal with the friction (Coulomb Law). Due to the presence of two friction conditions (stick and slip), equality constraints are present or not according to the specific condition. Since the decision about friction condition depends on normal and tangential contact stresses, which are related to the constraints of the problem, there is a new approach which is called here a *conditional dependent constrained minimization problem*. To solve this problem, the Augmented Lagrangian Method for constrained minimization is employed. This method, when applied to the contact problem, presents Lagrange Multipliers which have the physical meaning of contact forces. This fact allows to check the friction condition at each iteration. These concepts make possible to devise some computational schemes which lead to good numerical results.

**Key words:** Elasticity, Finite Elements, Contact Problem, Mathematical Programming, Augmented Lagrangian, Substructures.

# Notação e Símbolos

## Notação genérica

grandezas com sub-índice  $A$ : relativos ao corpo  $A$

grandezas com sub-índice  $B$ : relativos ao corpo  $B$

grandezas com sub-índice  $AB$ : relativos aos corpos  $A$  e  $B$

grandezas com barra (exemplo  $\bar{\mathbf{u}}$ ): referentes ao sistema auxiliar de coordenadas

grandezas com sobre-índice asterisco (exemplo  $\mathbf{u}^*$ ): referentes à solução ótima

grandezas maiúsculas em negrito (exemplo  $\mathbf{K}$ ): denotam matrizes

grandezas minúsculas em negrito (exemplo  $\mathbf{u}$ ): denotam vetores

sobre-índice  $t$  (exemplo  $\mathbf{A}^t$ ): denota transposição de matriz - vetor

sobre-índice  $-1$  (exemplo  $\mathbf{K}^{-1}$ ): denota inversão de matriz

sub-índice 1 ou 2 (exemplo  $x_1$ ): indicam as coordenadas 1 ou 2 respectivamente

$[a]_+ = \text{máximo}[0, a]$

$[a]_- = \text{mínimo}[0, a]$

$|\cdot|$ : denota valor absoluto

$\|\cdot\|$ : denota norma euclidiana

## Símbolos latinos

$a$ : parâmetro que define o posicionamento relativo dos nós  $i$ ,  $j$  e  $k$

$\mathbf{A}$ : matriz dos coeficientes das restrições  $h_j(\mathbf{u})$

$\mathbf{B}$ : matriz dos coeficientes das restrições  $c_i(\mathbf{u})$

$C_A, C_B$ : regiões de contato em potencial dos corpos  $A$  e  $B$  respectivamente

$c_i(\mathbf{u})$ : restrição de igualdade (adesão dos corpos)

$cond$ : número de condição da matriz do sistema na solução

$cte$ : valor(es) constante(s)



- $\mathbf{c}(\mathbf{u})$ : vetor das restrições de igualdade (conjunto dos  $c_i(\mathbf{u})$ )
- $\mathbf{D}$ : matriz diagonal resultante da fatoração de  $\mathbf{K}$
- $dp$ : denota interpenetração devido aos campos de deslocamentos incompatíveis
- $\mathbf{f}$ : vetor de carregamento (esforços externos)
- $\mathbf{f}_a, \mathbf{f}_b$ : partições do vetor  $\mathbf{f}$  para condensação estática
- $f_A(\cdot), f_B(\cdot)$ : funções que definem  $C_A$  e  $C_B$  respectivamente
- $f_c$ : somatório dos esforços de contato
- $\mathbf{F}_c$ : termos de rigidez e de esforços de contato no sistema não linear de equações
- $\mathbf{f}_d$ : esforços desbalanceados
- $\mathbf{f}_T$ : vetor auxiliar utilizado no algoritmo  $D$
- $h_j(\mathbf{u})$ : restrição de desigualdade (não interpenetração dos corpos)
- $\mathbf{h}(\mathbf{u})$ : vetor das restrições (conjunto dos  $h_j(\mathbf{u})$ )
- $\mathbf{H}$ : matriz hessiana
- $\mathbf{I}$ : matriz identidade
- $i, j, k$ : nós típicos para formulação das restrições
- $k$  nos algoritmos: indica a iteração do Lagrangiano Aumentado
- $\mathbf{K}$ : matriz de rigidez
- $\mathbf{K}_{aa}, \mathbf{K}_{ab}, \mathbf{K}_{ba}, \mathbf{K}_{bb}$ : partições da matriz  $\mathbf{K}$  para condensação estática
- $k_m$ : rigidez fictícia para contornar problemas de condicionamento numérico
- $l$ : número de restrições de igualdade
- $l_0$ : comprimento da região de contato em potencial
- $l_{ait}$ : número de iterações do Lagrangiano Aumentado
- $L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\lambda})$ : função Lagrangiana associada ao problema ( $P$ )
- $m$ : número de restrições de desigualdade
- $ndof$ : número de incógnitas do problema (número de graus de liberdade)
- $\mathbf{n}$ : vetor dos esforços normais de contato
- $\mathbf{n}_j$ : esforço normal associado à restrição  $h_j(\mathbf{u})$
- $nfreq$ : indica a frequência de atualização da matriz de rigidez no algoritmo  $E$
- $\mathbf{P}$ : matriz referente à partição de  $\mathbf{U}$  para condensação estática
- ( $P$ ): problema de minimização genérico
- ( $P_1$ ): problema de minimização - contato sem atrito

- $(P_2)$ : problema de minimização - contato com atrito
- $p(\mathbf{u})$ : função penalizada
- $p(x_1)$ : pressão de contato em função da posição
- $\mathbf{Q}$ : matriz que corrige a direção de busca em métodos de minimização irrestrita
- $q_h$ : carregamento distribuído horizontal
- $q_v$ : carregamento distribuído vertical
- $\mathbf{r}$ : vetor do conjunto dos penalizadores  $r_i$  e  $r_j$
- $r_i$ : penalizador associado à  $c_i(\mathbf{u})$
- $r_j$ : penalizador associado à  $h_j(\mathbf{u})$
- $\mathbf{r}_0$ : vetor com os valores iniciais dos penalizadores (componentes  $r_0$ )
- $\mathbf{R}_i$ : matriz diagonal composta pelos valores  $r_i$
- $\mathbf{R}_j$ : matriz diagonal composta pelos valores  $r_j$
- $t$ : taxa de crescimento do penalizador
- $\mathbf{t}$ : vetor dos esforços tangenciais de contato
- $t_i$ : esforço tangencial associado à restrição  $c_i(\mathbf{u})$
- $\mathbf{T}$ : matriz de transformação entre sistema local e global de coordenadas
- $\mathbf{u}$ : vetor dos deslocamentos
- $\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b$ : partições do vetor  $\mathbf{u}$  para condensação estática
- $\mathbf{u}^a, \mathbf{u}^b$ : deslocamentos do ponto  $a$  e do ponto  $b$  respectivamente
- $\mathbf{u}_n$ : vetor dos deslocamentos na direção normal
- $\mathbf{u}_t$ : vetor dos deslocamentos na direção tangencial
- $\dot{\mathbf{u}}_t$ : vetor das velocidades tangenciais relativas
- $\mathbf{U}$ : matriz triangular superior resultante da fatoração de  $\mathbf{K}$
- $\mathbf{x}$ : vetor auxiliar usado no processo de condensação estática
- $(x_1, x_2)$ : sistema global de coordenadas
- $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ : sistema local de coordenadas
- $z_j$ : variável de folga associada à restrição  $h_j(\mathbf{u})$

## Símbolos gregos

- $\alpha$ : vetor dos termos independentes das restrições  $h_j(\mathbf{u})$  do tipo linear
- $\beta$ : vetor dos termos independentes das restrições  $c_i(\mathbf{u})$  do tipo linear

$$\beta' = \frac{\text{módulo de elasticidade}}{1 - \text{Poisson}^2}$$

$\delta\lambda$ : parâmetro que controla a máxima variação dos multiplicadores  $\lambda_j$

$\delta\nu$ : parâmetro que controla a máxima variação dos multiplicadores  $\nu_i$

$\Delta t$ : tempo de processamento em segundos

$\epsilon$ : vetor dos parâmetros para critério de parada (componentes  $\epsilon$ )

$\eta$ : parâmetro que determina a posição relativa do nó  $i$  com o segmento  $jk$

$\Phi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{r})$ : função Lagrangiana Aumentada associada ao problema ( $P$ )

$\lambda_j$ : multiplicador de Lagrange associado à  $h_j(\mathbf{u})$

$\boldsymbol{\lambda}$ : vetor dos multiplicadores de Lagrange (conjunto dos  $\lambda_j$ )

$\nu_i$ : multiplicador de Lagrange associado à  $c_i(\mathbf{u})$

$\boldsymbol{\nu}$ : vetor dos multiplicadores de Lagrange (conjunto dos  $\nu_i$ )

$\mu$ : coeficiente de atrito (estático e dinâmico com o mesmo valor)

$\mu_d$ : coeficiente de atrito dinâmico

$\mu_e$ : coeficiente de atrito estático

$\nabla$ : denota gradiente

$\Pi$ : energia potencial total

$\rho$ : passo de busca unidimensional

$\sigma_n$ : tensão normal de contato

$\sigma_t$ : tensão tangencial de contato

$\sigma_0$ : tensão nominal de contato

$\theta$ : ângulo de rotação entre os sistemas local e global de coordenadas

$\zeta$ : valor real escalar

$\xi$ : parâmetro que determina a posição relativa do nó  $i$  com o segmento  $jk$

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>19</b>
1.1	Considerações iniciais . . . . .	19
1.2	Principais trabalhos relacionados . . . . .	21
1.3	Objetivos e organização deste trabalho . . . . .	26
<b>2</b>	<b>O problema de contato com atrito entre corpos elásticos sob o ponto de vista da otimização</b>	<b>30</b>
2.1	Considerações sobre a Energia Potencial Total e equilíbrio . . . . .	30
2.2	Contato sem atrito . . . . .	31
2.3	Considerações sobre o fenômeno de atrito - Lei de Coulomb . . . . .	33
2.4	O problema de contato com atrito . . . . .	36
<b>3</b>	<b>O Método do Lagrangiano Aumentado de otimização restrita e o problema de contato</b>	<b>38</b>
3.1	Introdução ao Lagrangiano Aumentado . . . . .	38
3.2	Condições de Kuhn-Tucker associadas a um problema padrão . . . . .	39
3.3	A função Lagrangiana . . . . .	39
3.4	A função penalizada (base do método de penalidades) . . . . .	40
3.5	O Lagrangiano Aumentado . . . . .	41
3.6	Algoritmo genérico do Método do Lagrangiano Aumentado . . . . .	45
3.7	O caso específico do problema de contato . . . . .	46
3.8	Caso particular de restrições lineares . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Formulação dos termos associados às restrições (lineares)</b>	<b>51</b>
4.1	Definições genéricas . . . . .	51

4.2	Termos associados ao problema discretizado - sistema local . . . . .	54
4.3	Termos associados ao problema discretizado - sistema global . . . . .	60
4.4	Limitação devido à discretização - campos de deslocamentos incompatíveis	63
<b>5</b>	<b>Esquemas numéricos para a solução do problema de contato</b>	<b>68</b>
5.1	Algoritmo genérico . . . . .	68
5.2	Algoritmo <i>A</i> . . . . .	72
5.3	Algoritmo <i>B</i> - Condensação estática . . . . .	73
5.4	Algoritmo <i>C</i> . . . . .	76
5.5	Algoritmo <i>D</i> . . . . .	77
5.6	Algoritmo <i>E</i> - Combinação dos algoritmos <i>A</i> , <i>B</i> e <i>C</i> . . . . .	78
5.7	Atualização dos parâmetros de penalidade e multiplicadores de Lagrange	79
5.8	Considerações sobre critérios de convergência dos algoritmos . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Exemplos e resultados numéricos obtidos</b>	<b>85</b>
6.1	Introdução . . . . .	85
6.2	Exemplo 1: semicilindro em contato com plano rígido . . . . .	86
6.3	Exemplo 2: bloco retangular em contato com plano rígido . . . . .	95
6.4	Exemplo 3: encaixe de dois corpos elásticos . . . . .	110
6.5	Exemplo 4: blocos elásticos em contato . . . . .	117
6.6	Comentários sobre os algoritmos . . . . .	123
<b>7</b>	<b>Comentários e conclusões</b>	<b>125</b>
<b>8</b>	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>130</b>

# Lista de Figuras

2.1	Representação das condições de atrito para $\mu = \mu_e = \mu_d$ . . . . .	35
4.1	Notação para o estabelecimento das restrições - sistemas global e auxiliar de coordenadas. . . . .	52
4.2	Notação para o estabelecimento das restrições - sistema auxiliar de coordenadas. . . . .	52
4.3	Notação para formulação de restrições de igualdade. . . . .	54
4.4	Restrição de desigualdade típica para o problema discretizado. . . . .	54
4.5	Restrição de desigualdade típica para o problema discretizado - sistema auxiliar de coordenadas. . . . .	55
4.6	Significado físico do gradiente das restrições de desigualdade. . . . .	57
4.7	Notação para formulação da restrição de igualdade típica para o problema discretizado. . . . .	58
4.8	Significado físico do gradiente da restrição de igualdade típica. . . . .	59
4.9	Relação entre os sistemas auxiliar e global de coordenadas. . . . .	61
4.10	Incompatibilidade entre campos de deslocamentos no contato. . . . .	63
4.11	Situação de contato nó - a - nó. . . . .	64
4.12	Situação de contato nó - a - nó, caso particular de nó - segmento. . . . .	65
6.1	Semicilindro em contato com superfície rígida plana. . . . .	87
6.2	Malha de elementos finitos menos refinada - semicilindro. . . . .	88
6.3	Malha de elementos finitos mais refinada - semicilindro. . . . .	88
6.4	Aproximação das tensões de contato em função dos esforços nodais de contato. . . . .	89

6.5	Resultados obtidos e solução analítica - malha menos refinada - semicilindro, algoritmo <i>B</i> . . . . .	90
6.6	Resultados obtidos e solução analítica - malha mais refinada - semicilindro, algoritmo <i>B</i> . . . . .	90
6.7	Contorno deformado para $q_v = 30.0$ - malha mais refinada - semicilindro. . . . .	91
6.8	Contorno deformado para $q_v = 12.5$ - malha mais refinada - semicilindro. . . . .	91
6.9	Bloco retangular em contato com superfície rígida plana. . . . .	95
6.10	Malha menos refinada - bloco retangular. . . . .	96
6.11	Malha mais refinada - bloco retangular. . . . .	96
6.12	Deslocamento tangencial no contato - bloco retangular - caso 1 - malha menos refinada. . . . .	98
6.13	Força normal no contato - bloco retangular - caso 1 - malha mais refinada. . . . .	99
6.14	Força tangencial no contato - bloco retangular - caso 1 - malha menos refinada. . . . .	99
6.15	Deslocamento tangencial no contato - bloco retangular - caso 2 - malha menos refinada. . . . .	101
6.16	Força normal no contato - bloco retangular - caso 2 - malha menos refinada. . . . .	101
6.17	Força tangencial no contato - bloco retangular - caso 2 - malha menos refinada. . . . .	102
6.18	Deslocamento tangencial no contato - bloco retangular - caso 1 - malha mais refinada. . . . .	102
6.19	Força normal no contato - bloco retangular - caso 1 - malha mais refinada. . . . .	104
6.20	Força tangencial no contato - bloco retangular - caso 1 - malha mais refinada. . . . .	104
6.21	Deslocamento tangencial no contato - bloco retangular - caso 2 - malha mais refinada. . . . .	107
6.22	Força normal no contato - bloco retangular - caso 2 - malha mais refinada. . . . .	107
6.23	Força tangencial no contato - bloco retangular - caso 2 - malha mais refinada. . . . .	108

6.24	Contorno deformado - bloco retangular - malha mais refinada - caso 1, deslocamentos ampliados 250 vezes. . . . .	108
6.25	Contorno deformado - bloco retangular - malha mais refinada - caso 2, deslocamentos ampliados 250 vezes. . . . .	109
6.26	Encaixe de corpos elásticos. . . . .	110
6.27	Malha de elementos finitos - encaixe de corpos elásticos. . . . .	111
6.28	Deslocamento normal (corpo A). . . . .	113
6.29	Deslocamento tangencial (corpo A). . . . .	114
6.30	Deslocamento normal (corpo B). . . . .	114
6.31	Deslocamento tangencial (corpo B). . . . .	115
6.32	Contorno deformado - encaixe de corpos elásticos, deslocamentos ampliados 35 vezes. . . . .	116
6.33	Blocos elásticos em contato. . . . .	117
6.34	Malha de elementos finitos - blocos elásticos em contato. . . . .	118
6.35	Contorno deformado - blocos elásticos em contato, $\mu_1 = 0.002$ , deslocamentos ampliados 10000 vezes. . . . .	119
6.36	Contorno deformado - blocos elásticos em contato, $\mu_2 = 0.2$ , deslocamentos ampliados 10000 vezes. . . . .	120
6.37	Contorno deformado - blocos elásticos em contato, $\mu_3 = 0.4$ , deslocamentos ampliados 10000 vezes. . . . .	121
6.38	Tensão normal em função da posição relativa - blocos elásticos. . . . .	122
6.39	Região de contato deformada - blocos elásticos em contato, $\mu_1 = 0.002$ , deslocamentos ampliados 20000 vezes. . . . .	123
6.40	Região de contato deformada - blocos elásticos em contato, $\mu_1 = 0.2$ , deslocamentos ampliados 20000 vezes. . . . .	123
6.41	Região de contato deformada - blocos elásticos em contato, $\mu_1 = 0.4$ , deslocamentos ampliados 20000 vezes. . . . .	123



# Lista de Tabelas

6.1	Efeito do parâmetro de penalidade, semicilindro $q_v = 30.0$ - malha menos refinada, $\epsilon = 10^{-8}$ , $\delta\lambda = \delta\nu = 1.0$ , * indica divergência. . . . .	92
6.2	Efeito de $k_m$ no equilíbrio, malha menos refinada, algoritmo $B$ , $r_0 = 1.0$ , $t = 1.0$ , $\delta\lambda = 1.0$ , $\epsilon = 10^{-8}$ . . . . .	93
6.3	Comparação do comportamento dos algoritmos $A$ , $B$ , $C$ e $D$ ( $k_m = 0.1$ ). . . . .	94
6.4	Algoritmo $E$ - semicilindro, malha menos refinada, $q_v = 30.0$ , $r_0 = 1.0$ , $t = 1.0$ , $\delta\lambda = 1.0$ , $\epsilon = 10^{-5}$ . . . . .	94
6.5	Resultados - malha menos refinada - bloco retangular - caso 1 ( $r_0 = 1.0$ , $t = 1.0$ , $\delta\lambda = \delta\nu = 1.0$ , algoritmo $B$ ). . . . .	98
6.6	Resultados - malha menos refinada - bloco retangular - caso 2 ( $r_0 = 1.0$ , $t = 1.0$ , $\delta\lambda = \delta\nu = 1.0$ , algoritmo $B$ ). . . . .	100
6.7	Resultados - malha refinada - bloco retangular - caso 1, ( $r_0 = 10.0$ , $t = 1.0$ , $\delta\lambda = \delta\nu = 1.0$ , algoritmo $B$ ). . . . .	103
6.8	Resultados - malha refinada - bloco retangular - caso 2 ( $r_0 = 10.0$ , $t = 1.0$ , $\delta\lambda = \delta\nu = 1.0$ , algoritmo $B$ ). . . . .	105
6.9	Alguns resultados dos algoritmos $A$ , $B$ , $C$ e $D$ , bloco retangular - caso 1 - malha menos refinada, $\epsilon = 10^{-8}$ , $\delta\lambda = \delta\nu = 100.0$ . . . . .	106
6.10	Efeito do parâmetro de penalidade, bloco retangular - caso 1 - malha menos refinada, $\epsilon = 10^{-8}$ , $\delta\lambda = \delta\nu = 1.0$ , * indica divergência. . . . .	106
6.11	Algoritmo $E$ , bloco retangular - caso 1 - malha menos refinada, $\epsilon = 10^{-8}$ , $r_0 = 1.0$ , $t = 1.0$ , $\delta\lambda = \delta\nu = 1.0$ , * indica divergência. . . . .	109
6.12	Resultados - encaixe de corpos elásticos - deslocamentos ( $r_0 = 1.0$ , $t = 1.0$ , $\delta\lambda = \delta\nu = 0.1$ , algoritmo $B$ ). . . . .	112

6.13 Resultados - encaixe de corpos elásticos - tensões ( $r_0 = 1.0$ , $t = 1.0$ , $\delta\lambda = \delta\nu = 0.1$ , algoritmo $B$ ). . . . .	113
6.14 Efeito do parâmetro de penalidade, encaixe corpos elásticos, $\epsilon = 10^{-8}$ , $\delta\lambda = \delta\nu = 1.0$ . . . . .	115
6.15 Algoritmo $E$ , encaixe corpos elásticos, $r_0 = 100$ , $t = 1.0$ , $\delta\lambda = \delta\nu = 1.0$ , $\epsilon = 10^{-8}$ . . . . .	116
6.16 Resultados - blocos elásticos - $\mu_1 = 0.002$ ( $r_0 = 1000$ , $t = 1.0$ , $\delta\lambda = \delta\nu = 10.0$ , algoritmo $B$ ). . . . .	119
6.17 Resultados - blocos elásticos - $\mu_2 = 0.2$ ( $r_0 = 1000$ , $t = 1.0$ , $\delta\lambda = \delta\nu = 10.0$ , algoritmo $B$ ). . . . .	120
6.18 Resultados - blocos elásticos - $\mu_3 = 0.4$ ( $r_0 = 1000.0$ , $t = 1.0$ , $\delta\lambda = \delta\nu = 10.0$ , algoritmo $B$ ). . . . .	121

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Considerações iniciais

O contato entre corpos elásticos (sólidos deformáveis) é um fenômeno usual em sistemas mecânicos. É através do contato entre os corpos que grande parte dos esforços são transmitidos nestes sistemas. Muitas vezes o interesse está na distribuição de tensões em regiões distantes da região de contato, podendo-se aplicar o princípio de Saint-Venant (distante da região em que as forças são aplicadas, o estado de tensões pode ser avaliado sem que se conheça com exatidão a distribuição destas forças na região de aplicação). Existem, contudo, situações em que é necessário conhecer o que ocorre na região específica de contato.

O problema de contato apresenta algumas dificuldades do ponto de vista de formulação do modelo e dificuldades para a obtenção da solução associada a este. Não se conhece “a priori” a real superfície de contato nem os deslocamentos e tensões nela presentes, o que impede a definição das condições de contorno do problema na sua forma usual. Uma condição de contorno que se aplica à região de contato (desconhecida “a priori”) corresponde à não interpenetração dos sólidos e pode ser formulada na forma de desigualdades. Além disso, quando o atrito entre as superfícies de contato deve ser considerado, o problema torna-se mais complexo. Soluções analíticas exatas ou mesmo aproximadas são encontradas apenas para situações muito particulares. Os casos mais gerais devem ser resolvidos através de modelos e algoritmos adequados à obtenção de

soluções numéricas. Os métodos computacionais empregados para a obtenção da solução são baseados nos conceitos usuais de discretização dos corpos segundo o Método dos Elementos Finitos (MEF), e mais recentemente segundo o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

Vários enfoques do problema de contato têm sido estudados, tais como problemas de contato na elasticidade linear (infinitesimal), problemas de contato em grandes deslocamentos - deformações, contato em problemas no regime elasto-plástico, problemas dinâmicos envolvendo contato (contato - impacto), e outros.

A solução do problema de contato tem seguido os seguintes enfoques principais:

- Adaptação de formulações numéricas usuais de maneira a simular as condições de não interpenetração (e eventualmente atrito) entre as superfícies. A solução é de natureza incremental - iterativa. Em geral os códigos computacionais existentes são adaptados a este tipo de problema. Novos conceitos de formulação, segundo este enfoque, não são introduzidos.
- Estudo do problema de contato partindo do equacionamento básico dos princípios da mecânica (trabalhos virtuais por exemplo), e chegando-se às formulações variacionais do problema de contato, no caso inequações variacionais. Este tipo de formulação relaciona-se com princípios de mínimo, de forma que a solução para as inequações variacionais pode ser conseguida através da solução de um problema de minimização com restrições associado.
- Aplicação direta de princípios de mínimo (mínima energia potencial total), resolvendo-se o problema de minimização decorrente. Este caso está contido no anterior, contudo existem abordagens que partem diretamente da aplicação dos princípios de mínimo sem a sua correlação explícita com as formulações variacionais. O problema de minimização formulado é resolvido com a utilização de conceitos de programação matemática (otimização). Este é o enfoque deste trabalho.

## 1.2 Principais trabalhos relacionados

Os primeiros modelos aceitáveis para alguns problemas de contato na elasticidade surgiram com Hertz em 1882. Suas formulações, embora para casos de geometrias específicas, constituem ainda hoje uma boa solução para uma série de problemas práticos conhecidos como problemas de contato hertzianos, [3].

Signorini formulou o problema de contato de um sólido elástico com uma fundação rígida em 1933, [3].

Um estudo de existência e unicidade do problema de Signorini com atrito de Coulomb sob certos valores de coeficiente de atrito é apresentado por Cocu [21].

Curnier [23] apresenta aspectos da teoria de atrito inspirada em uma analogia com a teoria de plasticidade.

Soluções do problema de contato de forma iterativa - incremental, usando conceitos usuais do MEF através da adaptação de programas típicos de elementos finitos são encontrados nos trabalhos de Chan e Tuba [16], Francavilla e Zienkiewicz [35], Sachdeva e Ramakrishnan [118], Fredrikson [36], Gaertner [39], Okamoto e Nakazawa [99], Mahmoud, Salamon e Marks [88], Mahmoud, Salamon e Pawlak [89], Eterovic e Bathe [30], Ostachowicz [102], Bathe e Chaudhary [5], Frey, Sampaio e Saldanha da Gama [38], Galeão, Guerreiro, Loula e Barbosa [41], Chaudhary e Bathe [19], Doudomis e Mitsopoulou [25], Lee [82], Mazurkiewicz e Ostachowicz [92], Salamon [119], Rahman, Rowlands, Cook e Wilkinson [114], Pascoe e Mottershead [109, 110], Torstenfelt [135, 136].

Duvaut e Lions [27] apresentam vários problemas da mecânica e da física sob o ponto de vista de inequações variacionais. Glowinski, Lions e Trémolières [46] apresentam vários esquemas de aproximação e algoritmos para a solução de inequações variacionais.

Kalker e Van Randen [68] e Kalker [67] apresentam o estudo do princípio variacional que governa o problema de contato com atrito, formulando inequações variacionais através da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais e princípio dos trabalhos virtuais

complementares.

Nos trabalhos de Klarbring [73, 74], e Klarbring e Björkman [72], apresenta-se também uma formulação variacional para o problema de contato com atrito utilizando conceitos de subdiferenciais e gradientes generalizados (conceitos de otimização convexa e não convexa). É também discutida a analogia do problema de contato com o comportamento elasto-plástico. O tratamento numérico do problema decorrente das inequações variacionais é resolvido através de uma abordagem como problema de complementaridade linear.

Panagiotopoulos [103, 104, 105, 106] em seus trabalhos estuda problemas unilaterais na mecânica estrutural, principalmente os problemas de contato com atrito, formulando-os como inequações variacionais e mostrando a relação destas inequações variacionais com o princípio da mínima energia potencial (e mínima energia potencial complementar). Através do princípio da mínima energia potencial, é formulado um problema de programação linear. Conceitos de análise convexa e de subdiferenciais são utilizados. Em geral, a formulação de Panagiotopoulos utiliza valores da rigidez normal e rigidez tangencial pré-estabelecidos. Alguns outros trabalhos segundo este enfoque são os de Panagiotopoulos e Lazaridis [107], Panagiotopoulos e Talaslidis [108] (conceitos de otimização e teoremas de programação quadrática) e Talaslidis e Panagiotopoulos [132] (abordagem de problemas dinâmicos unilaterais). Princípios variacionais e princípios de mínimo são estudados também em Bufler [13], Horrigmoe e Bergan [57].

Através dos conceitos desenvolvidos com as formulações de inequações variacionais e da relação entre estas e os princípios de mínimo, e também através da interpretação física do equilíbrio como sendo o mínimo da energia potencial total, vários trabalhos utilizando conceitos de minimização são encontrados.

Holmberg [56], Lee [83], Björkman [10] utilizam conceitos de complementaridade linear na solução do problema.

A utilização de conceitos de programação quadrática é presente nos trabalhos de Björkman, Klarbring, Larsson, Rönnqvist e Sjödin [11] (grandes deformações), Johnson e Quigley [64] (grandes deformações), Zhong e Sun [150] (analogia com plasticidade),

Cannarozzi [15], Chand, Haug e Rim [17], Chen e Tsai [20], Joo e Kwak [65] (grandes deformações em regime elasto-plástico), Mahmoud, Al-Saffar e El-Hadi [87], Lee e Kwak [84] (regime elasto-plástico), Zhu e Yongjie [152] (analogia com plasticidade, complementaridade linear) e Zhu [151] (contato no regime elasto-plástico).

O método dos gradientes conjugados é empregado na solução do problema de contato nos trabalhos de May [91] e de Nour-Omid e Wriggers [93].

Alguns trabalhos baseados em conceitos do método Simplex são os de Fisher e Melosh [34] e Haug, Chand e Pan [50].

O estudo do problema de contato com atrito através da minimização de um funcional utilizando o método das penalidades é apresentado por Elqueta [28]. Kikuchi e Song [70] apresentam as relações entre esquemas de penalidades e formulações do tipo mista para uma classe de inequações variacionais. Em [26] o método das penalidades é utilizado em um problema visco-plástico.

O Método do Lagrangiano Aumentado é utilizado conjuntamente com um processo incremental por Simo e Laursen [123, 80], onde as tensões tangenciais são estimadas para o incremento posterior baseando-se em parâmetros do incremento em questão para o caso do contato de um corpo elástico com um corpo rígido. Laursen e Oancea [79] apresentam uma continuidade dos trabalhos anteriores em termos de critérios de convergência baseados nos multiplicadores de Lagrange. Rothert, Idelberger, Jacobi e Nieman [117] resolvem também o problema de contato quase-estático através do Método do Lagrangiano Aumentado com auxílio de um processo incremental. Heegaard e Curnier [51] estudam o problema de contato sem atrito através do Lagrangiano Aumentado para grandes movimentos de deslizamento.

Um outro trabalho baseado em programação matemática é o de Hung e Saxcé [60] para problemas sem atrito, onde é utilizado um algoritmo de programação quadrática (linearizado).

Barbosa [3] apresenta um estudo bastante detalhado das formulações variacionais (inequações variacionais) associadas ao problema de contato e a relação destas com os princípios de mínimo. É apresentado o estudo dos problemas de indentação rígida,

Signorini e contato entre corpos elásticos. O caso do contato entre corpos elásticos é resolvido através de uma sequência de sub-problemas. O primeiro tipo de sub-problema é um problema de Signorini (contato sem atrito), sujeito a um carregamento tangencial prescrito. O segundo tipo de sub-problema é um problema conhecido como problema de Duvaut e Lions, com as tensões normais obtidas através do primeiro sub-problema, obtendo-se assim novas tensões tangenciais. A sequência é repetida até a convergência do processo. Este processo não possui garantia de convergência e é bastante influenciado pelo ponto de partida (distribuição inicial das tensões tangenciais). Soluções numéricas baseadas nos algoritmos de Lemke, Uzawa e GSRP são apresentadas.

Fancello [32] estuda também formulações variacionais (inequações variacionais) associadas ao problema de contato. É criado um elemento de contato unidimensional com características constitutivas não lineares cuja solução é encontrada com auxílio de uma formulação incremental. As equações constitutivas são formuladas de forma a obter-se equações de domínio irrestrito. É necessário definir de forma explícita os valores para a rigidez normal e rigidez tangencial, e a escolha destes valores influencia diretamente o condicionamento do sistema associado. A solução é encontrada empregando-se o método de minimização irrestrita Quase-Newton.

Um outro enfoque presente no estudo do problema de contato é a utilização de formulações mistas de elementos finitos, onde os deslocamentos e tensões são tratados como campos de variáveis independentes. Trabalhos segundo este enfoque são os de Saleeb, Chen e Chang [120], Chang, Saleeb e Shyu [18], Heyliger e Reddy [54, 55], Shyu, Chang e Saleeb [122], Simo, Wriggers e Taylor [124], Tseng e Olson [137], e mais recentemente Heege e Alart [52] (utilizam conjuntamente a formulação do Lagrangiano Aumentado para problemas com grandes curvaturas).

Nos trabalhos de Oden e Pires [96, 97, 98, 112] são formuladas leis não clássicas de atrito procurando contornar as dificuldades de formulação matemática e abordagem numérica da lei clássica de Coulomb, e também procurando adequar certas limitações físicas desta. As leis de atrito não clássicas propostas são não locais e não lineares. Nestes trabalhos são apresentados a formulação variacional (em termos de inequações) do problema de contato de acordo as leis não clássicas, o estudo de existência e unicidade



da solução do problema, e algoritmos e esquemas numéricos utilizados para a solução do problema.

Oden e Martins [95] apresentam um trabalho extenso onde o fenômeno de atrito dinâmico é discutido (revisão da literatura, estudo de princípios variacionais associados, algoritmos e métodos computacionais para a solução do problema). Discutem-se também os tipos de problema de contato (quase-estático, dinâmico com superfícies de contato estáveis e dinâmico com a presença de desgaste e erosão das superfícies de contato).

Oden e Kikuchi [94] apresentam formulações variacionais para problemas de valor de contorno com restrições na elasticidade. O método das penalidades e esquemas de integração reduzida são empregados no caso da elasticidade incompressível.

Uma outra linha de estudo para a solução do problema de contato é a criação de elementos finitos especiais (elementos de contato) com características que permitem identificar as condições de interpenetração dos corpos e eventualmente as condições de atrito. As equações decorrentes deste enfoque podem ser resolvidas pelos conceitos usuais de sistemas não lineares (incremental - iterativo) e também segundo os conceitos de programação matemática. Exemplos de trabalhos segundo este enfoque são os de Parish [111], Beer [7], Kulak [75] (elementos adaptativos), Stader e Weiss [127], Zolti [153], Ju, Stone e Rowlands [66].

Böhm [12] apresenta uma comparação dos principais algoritmos de contato (aspectos matemáticos e práticos). Algumas comparações de resultados são feitas. Os principais conceitos da mecânica do contato com atrito são discutidos juntamente com as formulações numéricas iterativas e do ponto de vista de inequações variacionais (princípios de mínimo).

O problema de contato em casos dinâmicos (contato - impacto) tem sido também estudado. Alguns trabalhos relacionados a problemas dinâmicos de contato são os de Osmont [100, 101], Belytscho e Neal [8], Hallquist, Goudreau e Benson [49], Hughes, Taylor, Sackman, Curnier e Kanoknulchai [59], Madsen [86], Wriggers, Vu Van e Stein [142], Barbosa e Ghaboussi [4], Malone e Johnson [90] (caso de cascas).

Os vários tipos de abordagem do problema de contato presentes nas soluções por elementos finitos são também presentes em formulações que utilizam o Método dos Elementos de Contorno. Alguns trabalhos utilizando o MEC são os de Gakwaya, Lambert e Cardou [40], Kwak e Lee [76], Garrido, Foces e Paris [42], Simunovic e Saigal [125].

Um trabalho específico para o caso de contato de engrenagens é apresentado por Vijayakar e Houser [139] onde a malha de elementos finitos (no dente da engrenagem) trabalha conjuntamente com uma rede superficial mais refinada do que a malha. As condições de contato são definidas tendo como base a rede. Isto evita a necessidade de se ter malhas extremamente refinadas principalmente no caso de dentes de engrenagens onde a região de contato é pequena e sofre variação devido às várias posições no uso.

Stein, Bischoff, Brand e Plank [129, 130] e Lee e Oden [81] utilizam esquemas adaptativos de malhas para o caso específico do problema de contato.

Wriggers e Miehe [141] apresentam um modelo de elementos finitos para o problema de contato em grandes deformações e com o efeito termomecânico do contato, onde o fluxo de calor e a dissipação por atrito são modelados. Zavarise, Wriggers e Schrefler [147] empregam o Método do Lagrangiano Aumentado neste tipo de problema.

Outros trabalhos relacionados ao problema de contato são citados nas referências bibliográficas deste trabalho.

### **1.3 Objetivos e organização deste trabalho**

Presente em vários tipos de situações de interesse com os mais diversos níveis de complexidade conforme mencionado anteriormente, o problema de contato, mesmo na elasticidade infinitesimal (materiais elásticos lineares, regime de pequenos deslocamentos), deixa de ser um problema linear. O atrito traz complicações adicionais ao problema. Contudo, o interesse prático neste tipo de problema é ainda grande pelo fato de que a maioria dos componentes mecânicos trabalham nesta condição (regime infinitesimal).

Este problema não está ainda totalmente estabelecido. Os aplicativos comerciais de análise, em geral, possuem esquemas em que é necessário definir as componentes normal e tangencial da rigidez de contato (esquemas incrementais - iterativos). Estes valores são escolhidos de forma arbitrária (baseados em algum tipo de estimativa), e influenciam de forma direta a solução numérica encontrada. Como exemplo cita-se o aplicativo Ansys [2].

Este trabalho tem como objetivo principal abordar o problema de contato na elasticidade infinitesimal como um problema de minimização “generalizado”, onde o fenômeno de atrito (lei clássica de Coulomb) é tratado como uma restrição adicional, que participa ou não do problema de minimização em função do tipo de atrito (adesão ou deslizamento) encontrado no ponto em questão. As condições de não interpenetração dos corpos são formuladas como restrições de desigualdades. O atrito é formulado como uma restrição de igualdade para o caso de adesão. No caso de deslizamento, estas restrições de igualdade deixam de existir e os esforços de atrito dinâmico são considerados. Trata-se, portanto, de um problema que pode ser chamado de “*problema de minimização com restrições condicionalmente dependentes*”.

Este problema de minimização decorrente é resolvido utilizando o Método do Lagrangiano Aumentado, que possui caráter geral do ponto de vista de otimização, resolvendo o problema restrito através da solução de sucessivos problemas de minimização irrestrita. O Método do Lagrangiano Aumentado possui a vantagem de que a solução encontrada satisfaz as condições de otimalidade do problema de otimização, independentemente dos valores dos parâmetros de penalidade. Os multiplicadores de Lagrange obtidos com o Método do Lagrangiano Aumentado possuem significado físico quando aplicado ao problema de contato (esforços de contato), possibilitando os testes para a determinação das condições de atrito, caracterizando um aspecto básico da formulação proposta. Além disso, o Método do Lagrangiano Aumentado possibilita a extensão a situações não lineares de interesse sem o comprometimento de sua formulação.

O enfoque proposto aqui permite calcular situações em que os coeficientes de atrito são distintos, o que é presente geralmente apenas nas formulações do tipo incremental - iterativa.

O problema de elasticidade envolvido é abordado através dos conceitos usuais de discretização com o MEF, de forma que se parte, neste trabalho, diretamente para as equações de equilíbrio do sistema discretizado.

Observa-se que a região de contato é, em geral, pequena e localizada, sugerindo a utilização dos conceitos de condensação estática - subestruturação para a redução do tamanho do problema de otimização associado em termos do número de variáveis de otimização.

A utilização dos conceitos comentados anteriormente permite formular o problema de contato entre corpos elásticos sob um novo ponto de vista numérico - computacional, onde as condições de atrito (adesão ou deslizamento) são verificadas a cada iteração, mesmo com as restrições não satisfeitas, utilizando a informação proveniente dos multiplicadores de Lagrange (significado físico dos esforços de contato) associados ao problema de minimização formulado. Devido à verificação das condições de atrito, o problema apresenta restrições condicionalmente dependentes causando alterações no conjunto das restrições. A minimização da função Lagrangiana Aumentada é conduzida neste trabalho através da condição de gradiente nulo desta função, obtendo-se um sistema de equações a cada iteração. Este sistema mantém sua característica de simetria devido à formulação adotada para as restrições, possibilitando a utilização dos conceitos usuais empregados na solução de sistemas com matrizes simétricas.

Este trabalho encontra-se organizado da seguinte forma:

- Capítulo 1: introduz-se o problema, são relacionados os principais trabalhos disponíveis na literatura, e comenta-se o objetivo deste trabalho.
- Capítulo 2: o problema de contato é visto como um “*problema de minimização com restrições condicionalmente dependentes*”. Considerações sobre a energia potencial total, atrito de Coulomb, condições de atrito, etc são comentados.
- Capítulo 3: apresenta-se os principais conceitos do Método do Lagrangiano Aumentado, um algoritmo genérico e sua relação com o problema de contato.
- Capítulo 4: os termos decorrentes das restrições do problema são formulados explicitamente.

- Capítulo 5: são apresentados detalhes de formulação do problema de contato quando resolvido pelo Lagrangiano Aumentado. Algoritmos, simplificações, uso de condensação estática são comentados.
- Capítulo 6: são relatados os principais resultados numéricos obtidos com as formulações estudadas através de exemplos típicos.
- Capítulo 7: conclusões e comentários são apresentados.
- Referências Bibliográficas, onde os principais trabalhos relacionados ao problema de contato e ao Método do Lagrangiano Aumentado são listados.

## Capítulo 2

# O problema de contato com atrito entre corpos elásticos sob o ponto de vista da otimização

### 2.1 Considerações sobre a Energia Potencial Total e equilíbrio

A condição de equilíbrio de um corpo elástico pode ser representada pela minimização da energia potencial total,  $\Pi$ , deste corpo (princípio da mínima energia potencial total) [24, 148].

A energia potencial total de um sistema discretizado em elementos finitos é definida para um problema de equilíbrio estático como

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f}^t \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamentos do problema,  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez do sistema e  $\mathbf{f}$  é o vetor de carregamento (esforços nodais equivalentes, incluindo esforços concentrados, de superfície e de corpo).

A condição de mínimo da energia potencial total com relação aos deslocamentos é dada por

$$\frac{\partial \Pi(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad (2.2)$$

que corresponde a

$$\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (2.3)$$

Observa-se que a condição de mínimo da energia potencial total conduz ao sistema de equações usual que representa a condição de equilíbrio do problema discretizado em elementos finitos.

A energia potencial total (2.1) é uma forma quadrática. O processo de minimização desta função é, portanto, diretamente influenciado pelo condicionamento da matriz  $\mathbf{K}$ . No caso de  $\mathbf{K}$  ser positivo-definida, a energia potencial total é uma função convexa. Para um problema de equilíbrio onde os movimentos de corpo rígido são impedidos, a matriz  $\mathbf{K}$  é positivo-definida e a função  $\Pi(\mathbf{u})$  é estritamente convexa. Sua minimização apresenta, portanto, solução única, [6, 85].

## 2.2 Contato sem atrito

O problema de contato sem atrito é um problema não linear pelo fato de não se conhecer as tensões e a região correspondente ao contato.

Do ponto de vista da otimização, o problema de contato pode ser formulado como um problema de minimização com restrições. A formulação utilizada neste trabalho assume que a função a ser otimizada (função objetivo) corresponde à energia potencial total dos corpos,  $\Pi$ , e as restrições correspondem às condições cinemáticas de não interpenetração dos corpos. Escreve-se assim o problema de minimização ( $P_1$ ),

$$(P_1) \begin{cases} \min & \Pi(\mathbf{u}) \\ \text{s.a.} & h_j(\mathbf{u}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (2.4)$$

onde  $\mathbf{u}$  representa a variável de otimização (vetor de deslocamentos do problema discretizado), e  $h_j(\mathbf{u})$  representam as restrições do problema (ou seja, as condições de não interpenetração dos corpos). O conjunto das restrições de desigualdade pode também ser denotado pelo vetor  $\mathbf{h}(\mathbf{u}) = [h_1(\mathbf{u}) \ h_2(\mathbf{u}) \ \dots \ h_m(\mathbf{u})]^t$ .

No caso de dois corpos elásticos  $A$  e  $B$ , as energias potenciais totais associadas (sistemas discretizados) são definidas como

$$\begin{aligned} \Pi_A(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \mathbf{u}_A^t \mathbf{K}_A \mathbf{u}_A - \mathbf{f}_A^t \mathbf{u}_A, \\ \Pi_B(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \mathbf{u}_B^t \mathbf{K}_B \mathbf{u}_B - \mathbf{f}_B^t \mathbf{u}_B. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Nota-se que o equilíbrio irrestrito dos corpos  $A$  e  $B$  é determinado pela minimização (irrestrita) das funções  $\Pi_A(\mathbf{u})$  e  $\Pi_B(\mathbf{u})$  conduzindo às respectivas equações de equilíbrio  $\mathbf{K}_A \mathbf{u}_A - \mathbf{f}_A = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{K}_B \mathbf{u}_B - \mathbf{f}_B = \mathbf{0}$ .

Pode-se escrever a energia potencial total dos corpos  $A$  e  $B$  em uma única equação, representando vantagens do ponto de vista de notação e de implementação computacional como

$$\Pi_{AB}(\mathbf{u}) = \Pi_A(\mathbf{u}) + \Pi_B(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_A \\ \mathbf{u}_B \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} \mathbf{K}_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_A \\ \mathbf{u}_B \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_A \\ \mathbf{f}_B \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_A \\ \mathbf{u}_B \end{Bmatrix}, \quad (2.6)$$

ou de forma generalizada,

$$\Pi_{AB}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{AB}^t \mathbf{K}_{AB} \mathbf{u}_{AB} - \mathbf{f}_{AB}^t \mathbf{u}_{AB}. \quad (2.7)$$

A equação (2.7) representa de forma genérica a energia potencial total de um sistema de rigidez  $\mathbf{K}_{AB}$  e com esforços aplicados  $\mathbf{f}_{AB}$  (corpos  $A$  e  $B$ ). De acordo com este enfoque, os conceitos básicos do método dos elementos finitos podem ser utilizados para a determinação da matriz  $\mathbf{K}_{AB}$  e do vetor  $\mathbf{f}_{AB}$ . A título de simplificação de notação, os sub-índices  $AB$  serão omitidos a seguir.

As restrições de não interpenetração dos corpos,  $h_j(\mathbf{u})$ , podem ser formuladas de várias maneiras. Estas restrições têm a dimensão dos deslocamentos e representam a distância entre os corpos no contato, figura 4.1, na forma:

- $h_j(\mathbf{u}) \leq 0$  não ocorre interpenetração entre os corpos  $A$  e  $B$ ,
- $h_j(\mathbf{u}) > 0$  ocorre interpenetração entre os corpos  $A$  e  $B$ .

O problema ( $P_1$ ) representa, portanto, o equilíbrio dos corpos  $A$  e  $B$  sujeito à restrição de que não pode ocorrer interpenetração destes, caracterizando a situação de contato sem atrito.



## 2.3 Considerações sobre o fenômeno de atrito - Lei de Coulomb

O fenômeno de atrito é de natureza complexa e afetado por uma série de fatores tais como aspereza das superfícies em contato, presença ou não de lubrificantes e camadas de óxidos ou impurezas, desgaste - deformação plástica - ruptura dos materiais da interface, efeitos térmicos, coesão molecular e outros. Devido a esta complexidade inexistente um modelo contínuo satisfatório para representar o atrito, [3].

Um dos modelos mais utilizados para a abordagem do problema de atrito é a lei de Coulomb. A lei clássica de Coulomb não considera vários fatores listados anteriormente, contudo possui interesse do ponto de vista prático. Os principais aspectos da lei de Coulomb são comentados a seguir, [27].

Sejam  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{t}$  (ortogonais) os esforços de contato normais e tangenciais (de atrito) respectivamente. No caso, associa-se cada par  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$  a um respectivo ponto de contato.

A intensidade da força de atrito,  $\|\mathbf{t}\|$ , no início e durante o deslizamento é proporcional à intensidade da força normal de contato,  $\|\mathbf{n}\|$ . Assim,

$$\|\mathbf{t}\| = \mu \|\mathbf{n}\|, \quad (2.8)$$

onde  $\mu$  é o coeficiente de atrito. Usualmente dois valores para  $\mu$  são assumidos: um corresponde ao início - iminência do deslizamento ( $\mu_e$ , coeficiente de atrito estático) e outro que se aplica durante o deslizamento ( $\mu_d$ , coeficiente de atrito dinâmico). O coeficiente de atrito estático é maior que o coeficiente de atrito dinâmico,  $\mu_e > \mu_d$ . Portanto, o esforço de atrito na iminência do deslizamento é maior que o esforço de atrito durante o deslizamento. Estes valores independem da área aparente de contato, e o esforço de atrito dinâmico independe da velocidade relativa entre as superfícies, [3].

Quando o movimento tangencial ocorre, a força de atrito age na mesma direção deste movimento porém em sentido contrário, como representado pela equação (2.9),

$$\mathbf{t} = -\mu_d \|\mathbf{n}\| \frac{\dot{\mathbf{u}}_t}{\|\dot{\mathbf{u}}_t\|}, \quad (2.9)$$

onde  $\dot{\mathbf{u}}_t$  é a velocidade tangencial relativa entre os corpos, e  $\dot{\mathbf{u}}_t/\|\dot{\mathbf{u}}_t\|$  representa um vetor unitário no sentido da velocidade relativa entre os corpos.

Na maioria dos estudos, o atrito é introduzido nos problemas de elasto-estática através de uma extensão da lei clássica de Coulomb aos sólidos deformáveis, considerando a velocidade relativa ponto a ponto, e substituindo-a pelo deslocamento relativo ( $\mathbf{u}_t$ ), [27].

Seja um caso particular em que  $\mu = \mu_e = \mu_d$  (para fins didáticos neste momento). Pode-se escrever a lei clássica de Coulomb em termos das tensões normais,  $\boldsymbol{\sigma}_n$  (componente  $\sigma_n$  no ponto específico), e das tensões tangenciais,  $\boldsymbol{\sigma}_t$  (componentes  $\sigma_t$  no ponto específico), para um dado ponto da região de contato na forma

$$|\sigma_t(\mathbf{u})| \leq \mu |\sigma_n(\mathbf{u})| \Rightarrow u_t = 0, \quad (2.10)$$

$$|\sigma_t(\mathbf{u})| > \mu |\sigma_n(\mathbf{u})| \Rightarrow \exists \zeta \geq 0 / u_t = -\zeta \sigma_t, \quad (2.11)$$

onde  $\zeta$  é um valor real.

Analogamente, em termos dos esforços normais e tangenciais ( $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{t}$  respectivamente) tem-se

$$\|\mathbf{t}\| \leq \mu \|\mathbf{n}\| \Rightarrow \mathbf{u}_t = \mathbf{0}, \quad (2.12)$$

$$\|\mathbf{t}\| > \mu \|\mathbf{n}\| \Rightarrow \exists \zeta \geq 0 / \mathbf{u}_t = -\zeta \mathbf{t}. \quad (2.13)$$

A condição  $\mathbf{u}_t = \mathbf{0}$  representa a ocorrência de adesão (não deslizamento) na respectiva região de contato.

Graficamente pode-se representar as condições de atrito como na figura 2.1.

Este caso particular simplifica as condições de atrito e é empregado na maioria dos trabalhos que utilizam a lei de Coulomb de atrito.

Para o caso em que  $\mu_e > \mu_d$  escrevem-se as condições de atrito:

$$\text{Se } \|\mathbf{t}\| \leq \mu_e \|\mathbf{n}\| \Rightarrow \mathbf{u}_t = \mathbf{0}, \quad (2.14)$$

$$\text{Se } \|\mathbf{t}\| > \mu_e \|\mathbf{n}\| \Rightarrow \mathbf{u}_t \neq \mathbf{0} \text{ e redefine - se } \mathbf{t} = -\mu_d \|\mathbf{n}\| \frac{\dot{\mathbf{u}}_t}{\|\dot{\mathbf{u}}_t\|}. \quad (2.15)$$

Observa-se na equação (2.15) que quando o esforço tangencial supera a capacidade de adesão devido ao atrito ( $\|\mathbf{t}\| > \mu_e \|\mathbf{n}\|$ ) ocorre movimento relativo ( $\mathbf{u}_t \neq \mathbf{0}$ ), e o

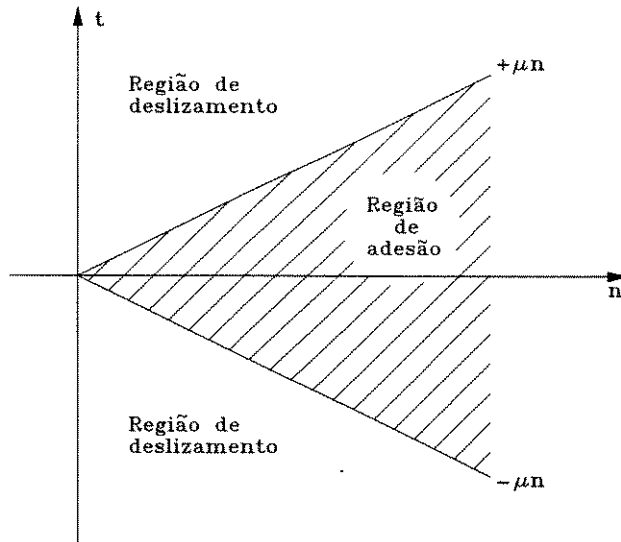


Figura 2.1: Representação das condições de atrito para  $\mu = \mu_e = \mu_d$ .

esforço de atrito tangencial corresponde, então, ao esforço de atrito dinâmico ( $\mathbf{t} = -\mu_d \|\mathbf{n}\| \frac{\dot{\mathbf{u}}_t}{\|\dot{\mathbf{u}}_t\|}$ ).

A adoção da lei clássica de Coulomb para problemas de contato entre sólidos deformáveis é questionável. Do ponto de vista físico reconhece-se que a lei clássica de Coulomb é aplicável a corpos rígidos conforme as próprias investigações de Coulomb. As equações da elasticidade só foram desenvolvidas muito depois da lei de Coulomb de atrito, [3].

Dois aspectos do fenômeno real de atrito, no caso de corpos metálicos, sugerem a adoção de leis alternativas. O primeiro deles é o caráter não local do mecanismo pelo qual as tensões normais são distribuídas (junções formadas por asperezas deformadas e não concentradas em pontos isolados da superfície de contato). Uma lei não local estabelece que o movimento de um ponto de contato entre dois corpos deformáveis ocorrerá quando a tensão de cisalhamento neste ponto atingir um valor crítico proporcional a uma média ponderada da tensão normal numa vizinhança do ponto. O segundo aspecto é a evidência experimental de pequenos deslocamentos tangenciais dos pontos na superfície de contato devido a deformações elásticas das junções. Este fenômeno não é

levado em conta na lei clássica de Coulomb, que procura modelar apenas o deslizamento relativo que advém com a ruptura destas junções, [3, 96, 97, 98].

A lei de Coulomb, embora conceitualmente simples, acarreta dificuldades consideráveis na solução do problema de contato entre corpos elásticos. Apesar de suas limitações, a lei de Coulomb permite obter resultados de interesse prático nas soluções de problemas de elasticidade. Isto pode ser constatado através dos vários trabalhos que a utilizam (grande parte dos trabalhos citados na bibliografia deste trabalho).

## 2.4 O problema de contato com atrito

O problema de contato com atrito é também formulado neste trabalho como um problema de otimização com restrições. As condições de interpenetração dos corpos são representadas da mesma forma que as apresentadas na seção 2.2. O atrito é tratado através de restrições de igualdade que estão presentes ou não em função da condição de atrito (deslizamento ou adesão).

A utilização de restrições de igualdade, representando a condição de movimento relativo nulo entre os corpos na região do contato (situação de adesão entre os corpos), permite resolver o problema de contato com atrito segundo a hipótese de que ocorre a adesão. Associado às restrições existem esforços (reações) que possibilitam o cálculo dos esforços normais e tangenciais (associados a esta hipótese de adesão na região de contato). Portanto, é possível verificar a real condição de atrito, confirmando ou não a hipótese. Caso a hipótese de adesão seja confirmada, procede-se com o cálculo. Caso a hipótese de adesão seja falsa, o cálculo é feito desconsiderando-se as restrições de igualdade associadas (permitindo o movimento relativo, deslizamento na região de contato) e impondo-se os esforços de atrito dinâmico associados.

Nota-se que o procedimento descrito envolve a verificação da condição de atrito (ocorrência ou não de adesão). Os fenômenos de adesão ou de deslizamento podem ocorrer simultaneamente em partes distintas da região de contato de um certo problema.

Do ponto de vista de formulação matemática pode-se escrever o problema de

contato com atrito como o seguinte problema de otimização:

$$(P_2) \begin{cases} \min & \Pi(\mathbf{u}) \\ \text{s.a.} & h_j(\mathbf{u}) \leq 0 & j = 1, \dots, m \\ & \text{se } \|\mathbf{t}_i\| \leq \mu_e \|\mathbf{n}_j\| \Rightarrow c_i(\mathbf{u}) = 0 & i = j = 1, \dots, l = m \\ & \text{se } \|\mathbf{t}_i\| > \mu_e \|\mathbf{n}_j\| \Rightarrow \mathbf{t}_i = -\mu_d \|\mathbf{n}_j\| \frac{\mathbf{u}_t}{\|\mathbf{u}_t\|} & i = j = 1, \dots, l = m. \end{cases} \quad (2.16)$$

As restrições  $h_j(\mathbf{u}) \leq 0$  representam as condições de não interpenetração dos corpos conforme já comentado em 2.2.

As restrições  $c_i(\mathbf{u}) = 0$  representam as condições de adesão (não movimento relativo entre os corpos na região de contato, não deslizamento). O conjunto das restrições de igualdade pode também ser denotado pelo vetor  $\mathbf{c}(\mathbf{u}) = [c_1(\mathbf{u}) \ c_2(\mathbf{u}) \ \dots \ c_l(\mathbf{u})]^t$ .

No caso específico do problema de contato tem-se uma correspondência entre os esforços normais e tangenciais de forma que os sub-índices  $i = j$ . Também tem-se um mesmo número de restrições de igualdade e de desigualdade de modo que  $l = m$ . A distinção entre  $i$  e  $j$  e  $l$  e  $m$  é mantida por conveniência e generalidade.

Observa-se que o problema de otimização ( $P_2$ ) apresenta restrições de igualdade que dependem de uma condição a ser satisfeita em termos dos esforços normais e tangenciais ( $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{t}$ ). Estes esforços dependem dos deslocamentos,  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{u})$  e  $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{u})$ , e podem ser determinados pelas reações associadas às restrições do problema. Portanto, pode-se chamar o problema ( $P_2$ ) de um *problema de minimização com restrições condicionalmente dependentes*.

A situação de deslizamento ocorre quando a capacidade de adesão devido ao atrito é superada, caracterizando a ocorrência de movimento relativo (atrito dinâmico) na região de contato. As restrições de igualdade devem ser desativadas (“desligadas”), permitindo o movimento relativo entre as superfícies de contato. A ocorrência do deslizamento implica na existência de esforços de atrito dinâmico, que são determinados em função dos esforços normais e do coeficiente de atrito dinâmico, equação (2.15).

Os esforços de atrito dinâmico são tangenciais na região de contato e são orientados em sentido contrário ao movimento relativo. Os esforços normais devem ser conhecidos para que sejam calculados os esforços tangenciais, e podem ser determinados em função das reações associadas às restrições  $\mathbf{h}(\mathbf{u})$ .

## Capítulo 3

# O Método do Lagrangiano Aumentado de otimização restrita e o problema de contato

### 3.1 Introdução ao Lagrangiano Aumentado

O Método do Lagrangiano Aumentado (L.A.) resolve o problema restrito através da resolução de sucessivos problemas irrestritos, caracterizando-se pela facilidade de programação computacional. É um método que combina conceitos dos métodos de penalidades com métodos duais (lagrangianos - duais), eliminando algumas desvantagens associadas a estes métodos, [85].

Nos itens seguintes são apresentados conceitos relacionados às condições de otimalidade, método das penalidades, métodos duais, Método do Lagrangiano Aumentado propriamente dito, e sua utilização na solução do problema de contato entre corpos elásticos.

Alguns trabalhos relacionados com o Método do Lagrangiano Aumentado são apresentados nas referências [9, 62, 63, 113, 116, 145].

### 3.2 Condições de Kuhn-Tucker associadas a um problema padrão

Seja o problema (P) de interesse,

$$(P) \begin{cases} \min & \Pi(\mathbf{u}) \\ \text{s.a.} & c_i(\mathbf{u}) = 0 \quad i = 1, \dots, l \\ & h_j(\mathbf{u}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde as funções  $\Pi(\mathbf{u})$ ,  $h_j(\mathbf{u})$  e  $c_j(\mathbf{u})$  são de classe  $C^1$ .

As condições de Kuhn-Tucker (K.T.) associadas a este problema são:

$$\begin{aligned} \nabla \Pi(\mathbf{u}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla h_j(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^l \nu_i \nabla c_i(\mathbf{u}) &= \mathbf{0}, \\ \lambda_j h_j(\mathbf{u}) &= 0 \quad j = 1, \dots, m, \\ \lambda_j &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

As condições dadas em (3.2) são condições necessárias para o ponto factível  $\mathbf{u}$  ser a solução ótima do problema (P).

Um estudo detalhado das condições de K.T. é apresentado em [6].

Nas condições (3.2)  $\nu_i$  e  $\lambda_j$  são os multiplicadores de Lagrange e existe um conjunto  $\mathbf{u}^*$ ,  $\nu_i^*$  e  $\lambda_j^*$  que satisfaz (3.2) representando a solução ótima de (P).

### 3.3 A função Lagrangiana

A função Lagrangiana associada ao problema (P) é

$$L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\lambda}) = \Pi(\mathbf{u}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j h_j(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^l \nu_i c_i(\mathbf{u}), \quad (3.3)$$

ou usando a notação vetorial,

$$L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\lambda}) = \Pi(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{h}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\nu}^t \mathbf{c}(\mathbf{u}), \quad (3.4)$$

onde  $\boldsymbol{\nu}$  e  $\boldsymbol{\lambda}$  são os vetores dos multiplicadores de Lagrange (componentes  $\nu_i$  e  $\lambda_j$  respectivamente), e  $\mathbf{h}(\mathbf{u})$  e  $\mathbf{c}(\mathbf{u})$  são os vetores das restrições.

A condição necessária (equivalente a K.T.) para  $\mathbf{u}$  ser um ótimo local de  $(P)$  em termos da função Lagrangiana é que sejam satisfeitas as condições:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \leq \mathbf{0} \quad e \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{h}(\mathbf{u}) = 0 \quad e \quad \boldsymbol{\lambda} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

No caso em que o valor de  $\mathbf{u}$  tal que  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$  seja o mesmo valor que minimiza a função Lagrangiana, a condição (3.5) passa a ser uma condição suficiente para  $\mathbf{u}$  ser a solução ótima de  $(P)$ .

Observa-se das condições (3.5) a necessidade de se conhecer os multiplicadores de Lagrange associados ao ponto  $\mathbf{u}$ .

### 3.4 A função penalizada (base do método de penalidades)

A forma clássica dos métodos de penalidades é adicionar um termo de penalização à função objetivo  $\Pi(\mathbf{u})$  quando o ponto  $\mathbf{u}$  for inactivável, e obter a solução ótima desta função penalizada por algum método de otimização irrestrita.

Seja a função  $p(\mathbf{u})$  (função penalizada) associada ao problema  $(P)$ ,

$$p(\mathbf{u}) = \Pi(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m r_j [h_j(\mathbf{u})]_+^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l r_i (c_i(\mathbf{u}))^2, \quad (3.6)$$

onde  $[a]_+ = \text{máximo}[0, a]$ ;  $r_j$  e  $r_i$  são os parâmetros de penalidade (valores positivos), denotados de forma genérica por  $\mathbf{r}$ .

A observação da equação (3.6) mostra que a função  $\Pi(\mathbf{u})$  é penalizada toda vez que  $\mathbf{u}$  for inactivável. O tipo quadrático de penalização mostrado é o mais usual.

Os parâmetros de penalidade são associados a cada restrição. Observa-se que  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  tende para  $\mathbf{u}^*$  à medida que os valores de  $\mathbf{r}$  tendem para infinito. Salienta-se que aquelas restrições não violadas não são penalizadas.

A escolha adequada dos valores dos parâmetros de penalidade, bem como a lei de crescimento destes, é adotada para cada problema particular e, em geral, estes valores só podem ser definidos por meio de testes com o próprio algoritmo.



Um dos problemas mais sérios dos métodos de penalidades é que, à medida que os valores de  $\mathbf{r}$  crescem, o problema torna-se numericamente mal condicionado, dificultando a resolução do problema irrestrito associado. Contudo, valores “grandes” de  $\mathbf{r}$  tendem a tornar a função  $p(\mathbf{u})$  mais convexa, representando uma vantagem.

Demonstra-se, contudo, que a solução da otimização irrestrita de  $p(\mathbf{u})$  pode não representar a solução ótima de  $(P)$ , e em geral isto ocorre.

O gradiente da função  $p(\mathbf{u})$  é

$$\nabla p(\mathbf{u}) = \nabla \Pi(\mathbf{u}) + \sum_{j=1}^m r_j [h_j(\mathbf{u})]_+ \nabla h_j(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^l r_i c_i(\mathbf{u}) \nabla c_i(\mathbf{u}). \quad (3.7)$$

Nota-se que para  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$ ,  $[h_j(\mathbf{u}^*)]_+ = 0$  e  $c_i(\mathbf{u}^*) = 0$ , implicando em

$$\nabla p(\mathbf{u}^*) = \nabla \Pi(\mathbf{u}^*) + \mathbf{0} + \mathbf{0}. \quad (3.8)$$

Observa-se em (3.8) que para  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$ ,  $\nabla p(\mathbf{u}^*)$  não é necessariamente nulo, de onde conclui-se que o resultado obtido na otimização irrestrita de  $p(\mathbf{u})$  não é necessariamente a solução ótima do problema  $(P)$ .

Os métodos de penalidades são estudados em detalhes em [6].

### 3.5 O Lagrangiano Aumentado

A função Lagrangiana Aumentada pode ser vista como uma combinação da função penalizada e da função Lagrangiana, eliminando a necessidade dos parâmetros de penalidade atingirem valores muito elevados. Controla-se assim o problema do mau condicionamento numérico associado aos métodos usuais de penalidades, pois o Método do Lagrangiano Aumentado possui a propriedade de que a solução ótima do problema  $(P)$  é também a solução do problema irrestrito associado (penalização exata).

Seja a função  $\Phi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{r})$  a função Lagrangiana Aumentada como definida a seguir:

$$\Phi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{r}) = \Pi(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^l \nu_i c_i(\mathbf{u}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j h_j(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l r_i (c_i(\mathbf{u}))^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m r_j [h_j(\mathbf{u})]_+^2. \quad (3.9)$$

O gradiente da função Lagrangiana Aumentada,  $\nabla\Phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{r})$ , com relação a  $\mathbf{u}$  é, portanto,

$$\begin{aligned} \nabla\Phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{r}) = & \nabla\Pi(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^l \nu_i \nabla c_i(\mathbf{u}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla h_j(\mathbf{u}) + \\ & + \sum_{i=1}^l r_i (c_i(\mathbf{u})) \nabla c_i(\mathbf{u}) + \sum_{j=1}^m r_j [h_j(\mathbf{u})]_+ \nabla h_j(\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Seja  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$  a solução do problema  $(P)$ . Logo,  $c_i(\mathbf{u}^*) = 0$ ,  $[h_j(\mathbf{u}^*)]_+ = 0$  e  $\nabla\Pi(\mathbf{u}^*) + \sum_{i=1}^l \nu_i \nabla c_i(\mathbf{u}^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla h_j(\mathbf{u}^*) = \mathbf{0}$ , pois deve-se satisfazer as condições de K.T.. Assim, nota-se que para  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$  tem-se que

$$\nabla\Phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (3.11)$$

ou seja, a solução do problema restrito  $(P)$  é também a solução da otimização irrestrita da função Lagrangiana Aumentada. Logo,  $\mathbf{u}^*$  pode ser obtido de forma exata por meio da otimização irrestrita de  $\Phi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{r})$ .

É possível fazer um tratamento das restrições de desigualdade transformando-as em restrições de igualdade com o auxílio de variáveis de folga e obter algumas vantagens disso como mostrado a seguir.

As restrições de desigualdade podem ser transformadas em igualdades do tipo

$$h_j(\mathbf{u}) + z_j = 0, \quad \text{com } z_j \geq 0. \quad (3.12)$$

Reescrevendo a expressão da função Lagrangiana Aumentada usando (3.12) tem-se

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{r}) = & \Pi(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^l \nu_i c_i(\mathbf{u}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j (h_j(\mathbf{u}) + z_j) + \\ & + \sum_{i=1}^l \frac{r_i}{2} (c_i(\mathbf{u}))^2 + \sum_{j=1}^m \frac{r_j}{2} (h_j(\mathbf{u}) + z_j)^2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Como o interesse é encontrar o ótimo da função Lagrangiana Aumentada, uma otimização direta com relação às variáveis  $z_j$  pode ser feita de forma analítica. Logo,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z_j} = 0 \Rightarrow \lambda_j + r_j (h_j(\mathbf{u}) + z_j) = 0. \quad (3.14)$$

Isolando  $z_j$  em (3.14) tem-se,

$$z_j = -h_j(\mathbf{u}) - \frac{\lambda_j}{r_j}. \quad (3.15)$$

Como  $z_j$  representam as variáveis de folga, seu valor ou é zero ou é positivo (respeitando a equação (3.12)). Conseqüentemente pode-se escrever

$$z_j = \max[0; -h_j(\mathbf{u}) - \frac{\lambda_j}{r_j}]. \quad (3.16)$$

Usando os resultados de (3.16), pode-se escrever os termos em  $z_j$  de (3.13). Assim,

$$\lambda_j[h_j(\mathbf{u}) + z_j] = \begin{cases} \lambda_j h_j(\mathbf{u}) & \text{se } -h_j(\mathbf{u}) - \frac{\lambda_j}{r_j} \leq 0 & (z_j = 0) \\ -\frac{\lambda_j^2}{r_j} & \text{se } -h_j(\mathbf{u}) - \frac{\lambda_j}{r_j} > 0 & (z_j = -h_j(\mathbf{u}) - \frac{\lambda_j}{r_j}); \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\frac{r_j}{2}[h_j(\mathbf{u}) + z_j]^2 = \begin{cases} \frac{1}{2}r_j(h_j(\mathbf{u}))^2 & \text{se } -h_j(\mathbf{u}) - \frac{\lambda_j}{r_j} \leq 0 & (z_j = 0) \\ \frac{\lambda_j^2}{2r_j} & \text{se } -h_j(\mathbf{u}) - \frac{\lambda_j}{r_j} > 0 & (z_j = -h_j(\mathbf{u}) - \frac{\lambda_j}{r_j}). \end{cases} \quad (3.18)$$

Usando os resultados de (3.17) e (3.18), reescreve-se (3.13) na forma:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{r}) &= \Pi(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^l \nu_i c_i(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^l \frac{r_i}{2} (c_i(\mathbf{u}))^2 + \\ &+ \begin{cases} \sum_{j=1}^m \lambda_j h_j(\mathbf{u}) + \sum_{j=1}^m \frac{r_j}{2} (h_j(\mathbf{u}))^2 & \text{se } -h_j(\mathbf{u}) - \frac{\lambda_j}{r_j} \leq 0 \\ -\sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j^2}{2r_j} & \text{se } -h_j(\mathbf{u}) - \frac{\lambda_j}{r_j} > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Seja a notação em que  $[a]_-$  representa o mínimo valor entre 0 e  $a$ ,

$$[a]_- = \min[0, a], \quad (3.20)$$

é possível reescrever (3.19) na forma:

$$\Phi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{r}) = \Pi(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^l \nu_i c_i(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^l \frac{r_i}{2} (c_i(\mathbf{u}))^2 + \sum_{j=1}^m \frac{r_j}{2} [-h_j(\mathbf{u}) - \frac{\lambda_j}{r_j}]_-^2 - \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j^2}{2r_j}. \quad (3.21)$$

A equação (3.21) representa a função Lagrangiana Aumentada numa forma melhor preparada para ser utilizada computacionalmente.

O resultado obtido em (3.11) assume que as condições de K.T. são satisfeitas. Para que isso seja válido é necessário conhecer os multiplicadores de Lagrange associados ao

ponto ótimo, contudo tanto o ponto ótimo como os multiplicadores são desconhecidos. É neste sentido que os conceitos de dualidade tornam-se importantes, pois uma maneira de encontrar, ou pelo menos estimar, os multiplicadores de Lagrange faz-se necessária.

O Método do Lagrangiano Aumentado utiliza, a cada iteração, uma estimativa para os multiplicadores de Lagrange. Existem algumas fórmulas já conhecidas para estimar estes multiplicadores e tais fórmulas têm a propriedade de que à medida que  $\mathbf{u}$  aproxima-se de  $\mathbf{u}^*$ ,  $\boldsymbol{\nu}$  e  $\boldsymbol{\lambda}$  aproximam-se de  $\boldsymbol{\nu}^*$  e  $\boldsymbol{\lambda}^*$ . A fórmula usada neste trabalho é bastante simples e pode ser vista como uma decorrência direta das condições de K.T..

Usando a condição de gradiente nulo (ótimo irrestrito) da função Lagrangiana Aumentada, equação (3.21), tem-se

$$\nabla \Pi(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^l (\nu_i + r_i c_i(\mathbf{u})) \nabla c_i(\mathbf{u}) + \sum_{j=1}^m -r_j \left[ -h_j(\mathbf{u}) - \frac{\lambda_j}{r_j} \right]_- \nabla h_j(\mathbf{u}) = \mathbf{0}. \quad (3.22)$$

Observando a equação (3.22), pode-se dizer que para satisfazer as condições de K.T. os novos multiplicadores seriam:

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_i &= \nu_i + r_i c_i(\mathbf{u}), \\ \bar{\lambda}_j &= -r_j \left[ -h_j(\mathbf{u}) - \frac{\lambda_j}{r_j} \right]_-. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Verifica-se que  $-[a]_- = [-a]_+$ . Portanto pode-se escrever

$$\bar{\lambda}_j = [\lambda_j + r_j h_j(\mathbf{u})]_+. \quad (3.24)$$

As equações (3.23) e (3.24) sugerem uma sequência para atualização dos multiplicadores de Lagrange a cada iteração, e à medida que  $\boldsymbol{\nu}$  e  $\boldsymbol{\lambda}$  se aproximam de  $\boldsymbol{\nu}^*$  e  $\boldsymbol{\lambda}^*$ ,  $\mathbf{u}$  se aproxima de  $\mathbf{u}^*$ .

A sequência natural para atualização dos multiplicadores é do tipo:

$$\begin{aligned} \nu_i^{k+1} &= \nu_i^k + r_i c_i(\mathbf{u}^k), \\ \lambda_j^{k+1} &= [\lambda_j^k + r_j h_j(\mathbf{u}^k)]_+. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Verifica-se que as sequências de (3.25) podem ser interpretadas como uma sequência de maximização do problema dual associado segundo o método do gradiente,

onde os multiplicadores de Lagrange representam as variáveis de otimização, as restrições representam o gradiente e os penalizadores podem ser relacionados ao passo, [85].

Observa-se deste modo que o Método do Lagrangiano Aumentado combina os conceitos dos métodos de penalidades (pois a função objetivo é penalizada pela violação das restrições) e métodos duais pela estimativa dos multiplicadores de Lagrange a cada iteração, buscando resolver o problema dual associado.

### 3.6 Algoritmo genérico do Método do Lagrangiano Aumentado

Baseando-se nos conceitos apresentados anteriormente, é possível formular um algoritmo padrão para o Método do Lagrangiano Aumentado como descrito a seguir.

1. Definir os seguintes valores iniciais:

- ponto de partida:  $\mathbf{u}^0$ ;
- multiplicadores de Lagrange de partida:  $\boldsymbol{\nu}^0, \boldsymbol{\lambda}^0$ ;
- parâmetros de penalidade:  $r_i^0, r_j^0$ .

2.  $k = 0$  (contador do número de iterações do L.A.).

3. Enquanto o critério de parada (por exemplo, o ponto ser factível e não mais apresentar variação) não estiver satisfeito, repita os itens 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 sequencialmente:

3.1) Montar a função Lagrangiana Aumentada:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{r}) = & \Pi(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^l \nu_i^k c_i(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^l \frac{r_i^k}{2} (c_i(\mathbf{u}))^2 + \\ & + \sum_{j=1}^m \frac{r_j^k}{2} \left[ -h_j(\mathbf{u}) - \frac{\lambda_j^k}{r_j^k} \right]^2 - \sum_{j=1}^m \frac{(\lambda_j^k)^2}{2r_j^k}. \end{aligned}$$

3.2) Minimizar  $\Phi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{r})$  com relação a  $\mathbf{u}$  usando algum método de otimização irrestrita obtendo o ponto  $\mathbf{u}^{k+1}$ .

3.3) Atualizar os multiplicadores de Lagrange e parâmetros de penalidade segundo algum esquema. Por exemplo:

- se  $c_i(\mathbf{u}^k) \neq 0$  então :  
 atualize o penalizador obtendo  $r_i^{k+1}$ ,  
 $\nu_i^{k+1} = \nu_i^k + r_i^k c_i(\mathbf{u}^k)$ .
- se  $\lambda_j^k + r_j^k h_j(\mathbf{u}^k) > 0$  então:  
 atualize o penalizador obtendo  $r_j^{k+1}$ ,  
 $\lambda_j^{k+1} = \lambda_j^k + r_j^k h_j(\mathbf{u}^k)$ .  
 caso contrário,  
 $\lambda_j^{k+1} = 0$ .

3.4)  $k = k + 1$ .

4.  $\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^*$  é solução ótima.

5. Fim.

Nota-se que o Método do Lagrangiano Aumentado possui caráter bastante geral, sendo aplicado a problemas onde a função objetivo e as restrições podem ser funções não lineares, como por exemplo outros problemas não lineares (não linearidade geométrica, não linearidade de material, etc), [148].

O esquema usado para a atualização dos parâmetros de penalidade e multiplicadores de Lagrange tem influência significativa no comportamento do método sob o aspecto de convergência.

### 3.7 O caso específico do problema de contato

O problema geral de contato (com atrito) pode ser enquadrado como um problema de otimização com restrições de desigualdade e de igualdade conforme exposto no Capítulo 2. O algoritmo da seção 3.6 pode ser então utilizado na solução deste problema. Observa-se, contudo, que o problema de contato pode ser abordado de forma mais conveniente no que se refere ao aproveitamento de vários conceitos usuais do Método dos Elementos Finitos, principalmente associados a aspectos de programação computacional conforme é descrito a seguir.

A minimização da função Lagrangiana Aumentada (passo 4 do algoritmo genérico - seção 3.6) pode ser conseguida através da solução da condição (3.21) de gradiente nulo, caracterizando a solução de um sistema de equações.

Sabendo-se que o gradiente da energia potencial total é

$$\nabla\Pi(\mathbf{u}) = \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}, \quad (3.26)$$

pode-se escrever a condição (3.22) como

$$\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f} + \sum_{i=1}^l (\nu_i + r_i c_i(\mathbf{u})) \nabla c_i(\mathbf{u}) + \sum_{j=1}^m -r_j [-h_j(\mathbf{u}) - \frac{\lambda_j}{r_j}]_- \nabla h_j(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad (3.27)$$

ou ainda,

$$\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f} + \sum_{i=1}^l (\nu_i + r_i c_i(\mathbf{u})) \nabla c_i(\mathbf{u}) + \sum_{j=1}^m [\lambda_j + r_j h_j(\mathbf{u})]_+ \nabla h_j(\mathbf{u}) = \mathbf{0}. \quad (3.28)$$

Nota-se que (3.28) representa um sistema de equações, e os termos associados às restrições representam os esforços de contato e também termos de rigidez como será evidenciado na seção 3.8. Portanto, a minimização irrestrita da função Lagrangiana Aumentada pode ser substituída pela solução do sistema de equações (3.28).

Observando a equação (3.28), juntamente com a sequência natural de atualização dos multiplicadores de Lagrange (3.25), nota-se que estes multiplicadores possuem o significado físico dos esforços de contato. Os gradientes das restrições ( $\nabla h_j(\mathbf{u})$  e  $\nabla c_i(\mathbf{u})$ ) na equação (3.28) atuam como ponderadores, distribuindo os esforços de contato entre os corpos (ação e reação). Uma outra maneira de visualizar que os multiplicadores de Lagrange têm o significado físico dos esforços de contato é notar que na solução, quando as restrições estão satisfeitas, ou seja,  $\mathbf{h}(\mathbf{u}^*) \leq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{c}(\mathbf{u}^*) = \mathbf{0}$  na equação (3.10), tem-se

$$\mathbf{K}\mathbf{u}^* - \mathbf{f} + \sum_{i=1}^l \nu_i \nabla c_i(\mathbf{u}^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla h_j(\mathbf{u}^*) = \mathbf{0}, \quad (3.29)$$

onde fica evidente que os multiplicadores de Lagrange representam os esforços de contato associados às restrições  $\mathbf{h}(\mathbf{u}) \leq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{c}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ .

De acordo com a formulação das restrições adotada neste trabalho para o problema discretizado em elementos finitos, existe uma restrição de igualdade associada a cada restrição de desigualdade, de forma que  $l = m$  na equação (3.28). Os índices  $i$  e  $j$  são mantidos devido à distinção entre  $r_i$  e  $r_j$ .

### 3.8 Caso particular de restrições lineares

A situação de restrições lineares conduz a resultados particulares interessantes como é descrito a seguir.

As restrições

$$\begin{aligned} h_j(\mathbf{u}) &\leq 0 \quad j = 1, \dots, m, \\ c_i(\mathbf{u}) &= 0 \quad i = 1, \dots, l, \end{aligned} \quad (3.30)$$

quando forem funções lineares, podem ser escritas na forma matricial como

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha} &\leq \mathbf{0}, \\ \mathbf{B}\mathbf{u} + \boldsymbol{\beta} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde  $\mathbf{A}$  é uma matriz  $m \times ndof$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$  é um vetor  $m \times 1$ ,  $\mathbf{B}$  é uma matriz  $l \times ndof$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  é um vetor  $l \times 1$ , e  $ndof$  representa o número de incógnitas do problema (dimensão do vetor  $\mathbf{u}$ , número de graus de liberdade).

Os vários termos da função Lagrangiana Aumentada (3.21) podem ser escritos na forma matricial usando as equações (3.31):

$$\sum_{i=1}^l \frac{r_i}{2} (c_i(\mathbf{u}))^2 = \frac{1}{2} \left( \mathbf{u}^t \mathbf{B}^t \mathbf{R}_i \mathbf{B} \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\beta}^t \mathbf{R}_i \mathbf{B} \mathbf{u} + \boldsymbol{\beta}^t \mathbf{R}_i \boldsymbol{\beta} \right), \quad (3.32)$$

$$\sum_{i=1}^l \nu_i c_i(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\nu}^t (\mathbf{B}\mathbf{u} + \boldsymbol{\beta}), \quad (3.33)$$

$$\sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j^2}{2r_j} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{R}_j^{-1} \boldsymbol{\lambda}. \quad (3.34)$$

O termo  $\sum_{j=1}^m \frac{r_j}{2} \left[ -h_j(\mathbf{u}) - \frac{\lambda_j}{r_j} \right]^2$  deve ser analisado em função do valor de  $[ ]_-$ .

Seja o caso em que  $\left[ -h_j(\mathbf{u}) - \frac{\lambda_j}{r_j} \right]^2 = \left( -h_j(\mathbf{u}) - \frac{\lambda_j}{r_j} \right)^2$ . Neste caso

$$\left( -h_j(\mathbf{u}) - \frac{\lambda_j}{r_j} \right)^2 = h_j^2(\mathbf{u}) + 2h_j(\mathbf{u}) \frac{\lambda_j}{r_j} + \frac{\lambda_j^2}{r_j^2}, \quad (3.35)$$

$$r_j \left( -h_j(\mathbf{u}) - \frac{\lambda_j}{r_j} \right)^2 = r_j h_j^2(\mathbf{u}) + 2h_j(\mathbf{u}) \lambda_j + \frac{\lambda_j^2}{r_j}, \quad (3.36)$$



$$\sum_{j=1}^m r_j h_j^2(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^t \mathbf{A}^t \mathbf{R}_j \mathbf{A} \mathbf{u} + 2\alpha^t \mathbf{R}_j \mathbf{A} \mathbf{u} + \alpha^t \mathbf{R}_j \alpha, \quad (3.37)$$

$$\sum_{j=1}^m 2h_j(\mathbf{u})\lambda_j = 2\lambda^t(\mathbf{A}\mathbf{u} + \alpha), \quad (3.38)$$

$$\sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j^2}{r_j} = \lambda^t \mathbf{R}_j^{-1} \lambda, \quad (3.39)$$

onde  $\mathbf{R}_j$  é uma matriz diagonal cujos valores desta são  $r_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , e  $\mathbf{R}_i$  é uma matriz diagonal cujos valores da diagonal são  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ .

Assim, pode-se escrever

$$\sum_{j=1}^m \frac{r_j}{2} \left[ -h_j(\mathbf{u}) - \frac{\lambda_j}{r_j} \right]^2 = \frac{1}{2} [\mathbf{u}^t \mathbf{A}^t \mathbf{R}_j \mathbf{A} \mathbf{u} + 2\alpha^t \mathbf{R}_j \mathbf{A} \mathbf{u} + \alpha^t \mathbf{R}_j \alpha + 2\lambda^t(\mathbf{A}\mathbf{u} + \alpha) + \lambda^t \mathbf{R}_j^{-1} \lambda]_-. \quad (3.40)$$

A função Lagrangiana Aumentada (3.21) para o caso de restrições lineares (3.31) torna-se na forma matricial

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{u}, \lambda, \nu, \mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f}^t \mathbf{u} + \frac{1}{2} [\mathbf{u}^t \mathbf{A}^t \mathbf{R}_j \mathbf{A} \mathbf{u} + 2\alpha^t \mathbf{R}_j \mathbf{A} \mathbf{u} + \\ &+ \alpha^t(\mathbf{A}\mathbf{u} + \alpha) + \lambda^t \mathbf{R}_j^{-1} \lambda]_- + \frac{1}{2} \lambda^t \mathbf{R}_j^{-1} \lambda + \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{u}^t \mathbf{B}^t \mathbf{R}_i \mathbf{B} \mathbf{u} + 2\beta^t \mathbf{R}_i \mathbf{B} \mathbf{u} + \beta^t \mathbf{R}_i \beta) + \nu^t (\mathbf{B} \mathbf{u} + \beta). \end{aligned} \quad (3.41)$$

O gradiente e a matriz hessiana ( $\mathbf{H}$ ) da função Lagrangiana Aumentada com relação a  $\mathbf{u}$  são, respectivamente,

$$\nabla \Phi_{\mathbf{u}} = \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f} + [\mathbf{A}^t \mathbf{R}_j \mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{A}^t \mathbf{R}_j \alpha + \mathbf{A}^t \lambda]_* + \mathbf{B}^t \mathbf{R}_i \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{B}^t \mathbf{R}_i \beta + \mathbf{B}^t \nu, \quad (3.42)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{K} + [\mathbf{A}^t \mathbf{R}_j \mathbf{A}]_* + \mathbf{B}^t \mathbf{R}_i \mathbf{B}, \quad (3.43)$$

onde  $[\ ]_*$  denota que o termo aparece ou não em função do termo  $[\ ]_-$  na função Lagrangiana Aumentada.

A condição de gradiente nulo da função Lagrangiana Aumentada é

$$\begin{aligned} \nabla \Phi_{\mathbf{u}} &= \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f} + [\mathbf{A}^t \mathbf{R}_j \mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{A}^t \mathbf{R}_j \alpha + \mathbf{A}^t \lambda]_* + \mathbf{B}^t \mathbf{R}_i \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{B}^t \mathbf{R}_i \beta + \mathbf{B}^t \nu = \\ &= (\mathbf{K} + [\mathbf{A}^t \mathbf{R}_j \mathbf{A}]_* + \mathbf{B}^t \mathbf{R}_i \mathbf{B}) \mathbf{u} - \mathbf{f} + [\mathbf{A}^t \mathbf{R}_j \alpha + \mathbf{A}^t \lambda]_* + \\ &+ \mathbf{B}^t \mathbf{R}_i \beta + \mathbf{B}^t \nu = 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

O fato do problema estudado aqui estar no regime de pequenos deslocamentos permite a linearização das restrições sem o comprometimento da formulação.

No caso de restrições lineares, a minimização irrestrita da função Lagrangiana Aumentada pode ser substituída pela solução do sistema de equações decorrente da condição de gradiente nulo desta função, dada por (3.44).

Este sistema de equações apresenta não linearidades tanto nos termos de rigidez como nos termos de carregamento. Isto representa uma diferença com relação aos casos de não linearidade geométrica ou de material. Nestes casos, a não linearidade aparece apenas nos termos de rigidez, permitindo a aplicação dos métodos de Newton-Raphson e Newton-Raphson Modificado na sua forma usual, [148].

## Capítulo 4

# Formulação dos termos associados às restrições (lineares)

### 4.1 Definições genéricas

As restrições do problema de contato podem ser formuladas de várias maneiras. Contudo, prefere-se que estas sejam formuladas como funções lineares para que as particularidades da seção 3.8 possam ser empregadas facilitando a solução do problema.

Visando facilitar a formulação das restrições, são utilizados os sistemas global  $(x_1, x_2)$  e auxiliar  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  de coordenadas como mostrado na figura 4.1.

O sistema auxiliar de coordenadas apresenta-se orientado segundo as direções tangencial e normal associadas ao ponto de contato considerado.

As restrições e os demais termos da equação (3.44) serão estudados inicialmente no sistema auxiliar, e posteriormente correlacionados com o sistema global de coordenadas.

Para o entendimento da formulação das restrições, pode-se estudar uma única restrição típica de desigualdade e uma de igualdade denotadas genericamente nesta seção por  $h_j(\mathbf{u})$  e  $c_i(\mathbf{u})$ , respectivamente.

Seja a figura 4.2 onde apenas o sistema auxiliar de coordenadas é considerado. De acordo com esta figura tem-se:

- $A$  e  $B$  denotam os corpos com contato em potencial,

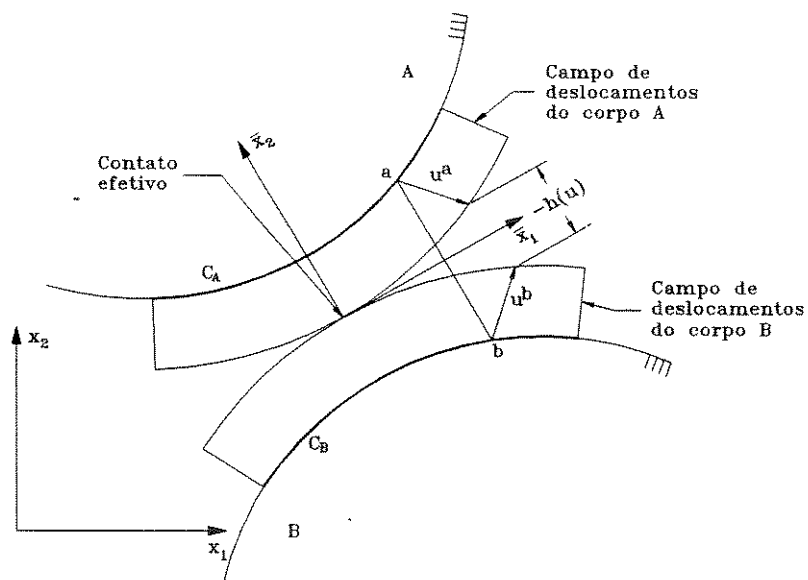


Figura 4.1: Notação para o estabelecimento das restrições - sistemas global e auxiliar de coordenadas.

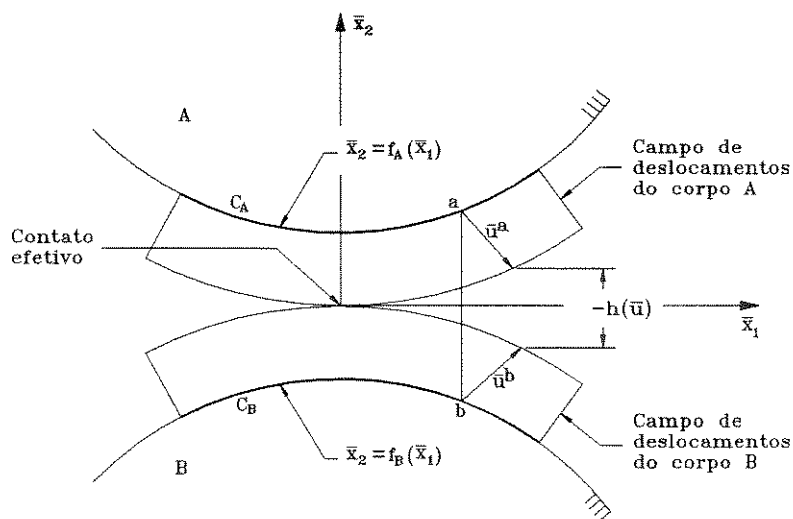


Figura 4.2: Notação para o estabelecimento das restrições - sistema auxiliar de coordenadas.

- $C_A$  e  $C_B$  denotam as regiões de contato potencial dos corpos  $A$  e  $B$ ,
- $f_A(\bar{x}_1)$  e  $f_B(\bar{x}_1)$  são funções que definem os contornos  $C_A$  e  $C_B$  respectivamente,
- $\bar{u}^a$  e  $\bar{u}^b$  são os vetores de deslocamentos dos pontos  $a$  e  $b$  pertencentes aos contornos

$C_A$  e  $C_B$  respectivamente. Em termos de componentes  $\bar{\mathbf{u}}^a = (\bar{u}_1^a, \bar{u}_2^a)$  e  $\bar{\mathbf{u}}^b = (\bar{u}_1^b, \bar{u}_2^b)$ , e

- $-h_j(\bar{\mathbf{u}})$  é a distância na direção  $\bar{x}_2$  entre os pontos  $a$  e  $b$  após a deformação.

Seja o caso em que os pontos  $a$  e  $b$  possuam a mesma coordenada  $\bar{x}_1$  (conforme figura 4.2). Escreve-se a distância na direção  $\bar{x}_2$  entre os pontos  $a$  e  $b$  na condição deformada como

$$-h_j(\bar{\mathbf{u}}) = f_A(\bar{x}_1) - f_B(\bar{x}_1) + \bar{u}_2^a - \bar{u}_2^b. \quad (4.1)$$

De acordo com a definição (4.1) verifica-se que:

- se  $-h_j(\bar{\mathbf{u}}) > 0$  não ocorre contato,
- se  $-h_j(\bar{\mathbf{u}}) = 0$  ocorre contato (sem penetração),
- se  $-h_j(\bar{\mathbf{u}}) < 0$  ocorre interpenetração entre os corpos.

Pode-se reescrever (4.1) como

$$h_j(\bar{\mathbf{u}}) = \bar{u}_2^b - \bar{u}_2^a + f_B(\bar{x}_1) - f_A(\bar{x}_1). \quad (4.2)$$

Observa-se que, de acordo com (4.2), para  $h_j(\bar{\mathbf{u}}) \leq 0$  não ocorre interpenetração dos corpos, e para  $h_j(\bar{\mathbf{u}}) > 0$  ocorre a interpenetração destes.

Seja a situação específica em que os pontos  $a$  e  $b$  já estejam em contato conforme ilustrado na figura 4.3.

Tendo-se uma situação de contato como geometria de referência é possível escrever a condição de inexistência de movimento relativo entre os pontos  $a$  e  $b$  na forma

$$c(\bar{\mathbf{u}}) = \bar{\mathbf{u}}^b - \bar{\mathbf{u}}^a = \mathbf{0}. \quad (4.3)$$

Nota-se que esta equação indica que o ponto  $a$  do corpo  $A$  acompanha o ponto  $b$  do corpo  $B$ .

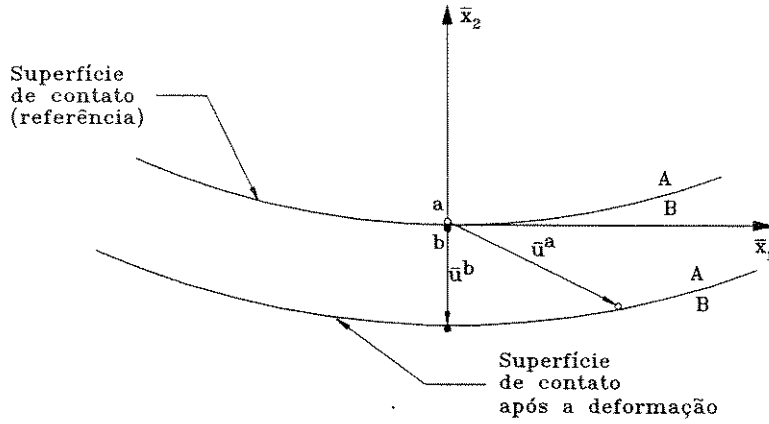


Figura 4.3: Notação para formulação de restrições de igualdade.

## 4.2 Termos associados ao problema discretizado - sistema local

Para o problema discretizado em elementos finitos isoparamétricos de quatro nós, o lado do elemento é um segmento de reta, e o campo de deslocamentos ao longo deste é também linear. A figura 4.4 é equivalente à figura 4.1 para o problema discretizado.

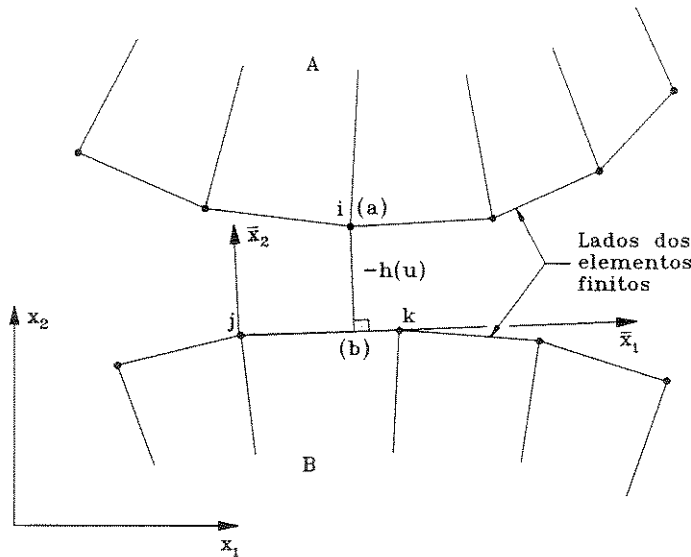


Figura 4.4: Restrição de desigualdade típica para o problema discretizado.

Nesta figura,  $i$ ,  $j$  e  $k$  são os nós típicos para a definição de uma restrição típica. O sistema auxiliar de coordenadas é definido baseando-se no segmento  $jk$ . As condições de não interpenetração podem ser escritas com o auxílio da figura 4.5.

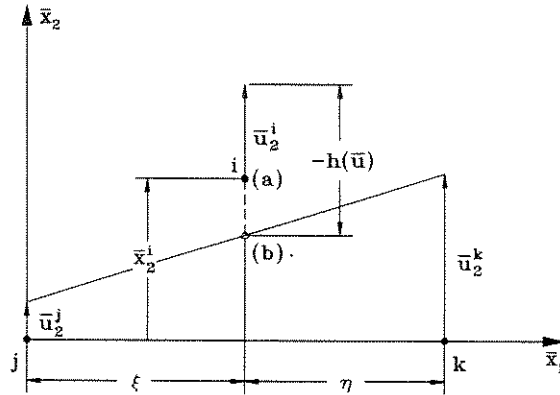


Figura 4.5: Restrição de desigualdade típica para o problema discretizado - sistema auxiliar de coordenadas.

Sabendo-se que o campo de deslocamentos ao longo do lado  $jk$  do elemento finito é linear, pode-se escrever

$$\bar{u}_2^b = \frac{\xi}{\xi + \eta} (\bar{u}_2^k - \bar{u}_2^j) + \bar{u}_2^j, \quad (4.4)$$

onde  $\xi + \eta$  é o comprimento do segmento  $jk$ , e  $\xi$  é a projeção do ponto  $i$  sobre o segmento  $jk$  (direção  $\bar{x}_1$ ).

Seja por conveniência de notação

$$a = \frac{\xi}{\xi + \eta}. \quad (4.5)$$

Rescreve-se (4.2) para o problema discretizado na forma

$$h_j(\bar{\mathbf{u}}) = \bar{u}_2^b - \bar{u}_2^a - \bar{x}_2^a, \quad (4.6)$$

já que neste caso  $f_A(\bar{x}_1) = \bar{x}_2^a$  e  $f_B(\bar{x}_1) = \bar{x}_2^b = 0$ .

Substituindo (4.4) em (4.6), e levando em conta que  $\bar{u}_2^a = \bar{u}_2^i$  e  $\bar{x}_2^a = \bar{x}_2^i$ , tem-se

$$h_j(\bar{\mathbf{u}}) = a(\bar{u}_2^k - \bar{u}_2^j) + \bar{u}_2^j - \bar{u}_2^i - \bar{x}_2^i, \quad (4.7)$$

$$h_j(\bar{\mathbf{u}}) = -\bar{u}_2^i + (1-a)\bar{u}_2^j + a\bar{u}_2^k - \bar{x}_2^i, \quad (4.8)$$

ou ainda vetorialmente,

$$h_j(\bar{\mathbf{u}}) = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1-a \\ a \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \bar{u}_2^i \\ \bar{u}_2^j \\ \bar{u}_2^k \end{Bmatrix} - \bar{x}_2^i. \quad (4.9)$$

Observa-se que  $h_j(\bar{\mathbf{u}})$  é uma função linear nos deslocamentos  $\bar{u}_2^i$ ,  $\bar{u}_2^j$  e  $\bar{u}_2^k$ . Pode-se formular  $h_j(\bar{\mathbf{u}})$  tomando o ponto  $i$  no corpo  $B$  e o segmento  $jk$  no corpo  $A$ .

O gradiente das restrições  $h_j(\bar{\mathbf{u}})$  no sistema auxiliar de coordenadas e relacionado às variáveis  $\bar{u}_2^i$ ,  $\bar{u}_2^j$  e  $\bar{u}_2^k$  é

$$\nabla h_j(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1-a \\ a \end{Bmatrix}. \quad (4.10)$$

Observa-se que a soma dos componentes de  $\nabla h_j(\bar{\mathbf{u}})$  é nula,

$$-1 + (1-a) + a = 0. \quad (4.11)$$

O significado do gradiente da restrição é o de distribuir os esforços de contato entre os corpos (ação e reação) determinando o equilíbrio do respectivo segmento como ilustrado na figura 4.6.

O sentido correto dos esforços é determinado pelo termo que multiplica  $\nabla h_j(\bar{\mathbf{u}})$  na equação do equilíbrio.

Estando a restrição típica de desigualdade formulada, é possível escrever os demais termos que compõem a equação (5.7) associados a esta desigualdade.

Sejam os nós típicos  $i$ ,  $j$  e  $k$  com as respectivas variáveis  $\bar{u}_1^i$ ,  $\bar{u}_2^i$ ,  $\bar{u}_1^j$ ,  $\bar{u}_2^j$ ,  $\bar{u}_1^k$  e  $\bar{u}_2^k$ . De acordo com a notação da seção 3.8, e associado a estas variáveis, escreve-se

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1-a & 0 & a \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = -\bar{x}_2^i. \quad (4.13)$$



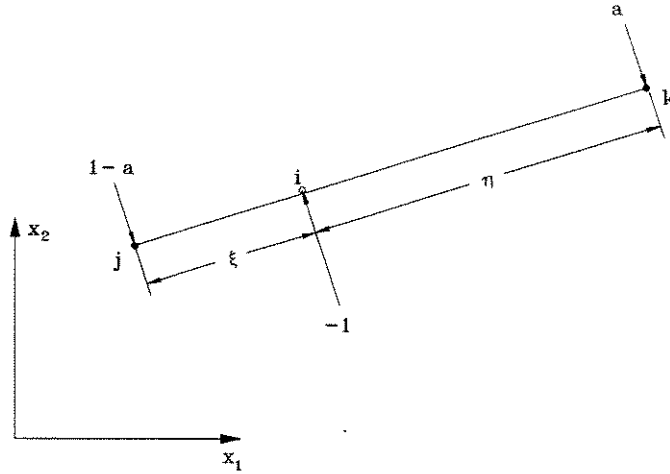


Figura 4.6: Significado físico do gradiente das restrições de desigualdade.

Logo,

$$\bar{\mathbf{A}}^t \mathbf{R}_j \bar{\mathbf{A}} = r_j \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & (1-a)^2 & 0 & a(1-a) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & a(1-a) & 0 & a^2 \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

$$\bar{\mathbf{A}}^t \mathbf{R}_j \bar{\boldsymbol{\alpha}} = r_j (-\bar{x}_2^i) \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1-a \\ 0 \\ a \end{Bmatrix}, \quad (4.15)$$

$$\bar{\mathbf{A}}^t \boldsymbol{\lambda} = \lambda_j \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1-a \\ 0 \\ a \end{Bmatrix}. \quad (4.16)$$

Observa-se, no caso de uma restrição, a situação particular de que  $\bar{\mathbf{A}}$  é uma matriz  $1 \times 6$ ,  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  é um vetor de um único elemento,  $\mathbf{R}_j$  é uma matriz diagonal  $1 \times 1$  e  $\boldsymbol{\lambda}$  é um vetor de um único elemento.

Seja a figura 4.7 equivalente à figura 4.3 para o caso discretizado.

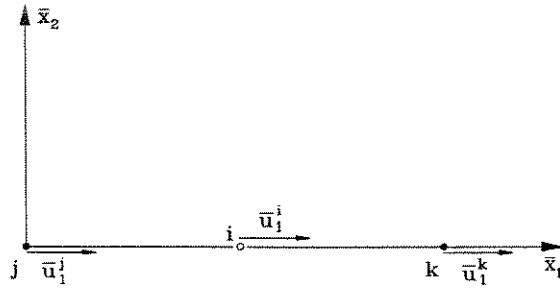


Figura 4.7: Notação para formulação da restrição de igualdade típica para o problema discretizado.

De forma análoga ao caso das desigualdades, a equação (4.3) pode ser escrita em termos de suas componentes. Considerando que o campo de deslocamentos ao longo do lado do segmento  $jk$  é linear, tem-se

$$c_i(\bar{\mathbf{u}}) = -\bar{u}_1^i + (1 - a)\bar{u}_1^j + a\bar{u}_1^k, \quad (4.17)$$

ou vetorialmente,

$$c_i(\bar{\mathbf{u}}) = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 - a \\ a \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^i \\ \bar{u}_1^j \\ \bar{u}_1^k \end{Bmatrix}. \quad (4.18)$$

O valor de  $a$  pode ser calculado com base no estado de referência de início de contato. Isto representa uma linearização do problema (formulação Lagrangiana).

Considerando que a condição de não interpenetração definida pela restrição  $h_j(\bar{\mathbf{u}}) \leq 0$  garante que os nós em contato estejam sobre um segmento associado, assume-se que o nó  $i$  já está sobre o segmento  $jk$ . A equação (4.17) é, portanto, suficiente para medir a ocorrência do deslizamento.

O gradiente das restrições  $c_i(\bar{\mathbf{u}})$  associado às variáveis  $\bar{u}_1^i$ ,  $\bar{u}_1^j$  e  $\bar{u}_1^k$  é

$$\nabla c_i(\bar{\mathbf{u}}) = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 - a \\ a \end{Bmatrix}. \quad (4.19)$$

Analogamente ao caso de  $\nabla h_j(\bar{\mathbf{u}})$ , este gradiente possui o significado físico de distribuir os esforços de contato entre os corpos, figura 4.8.

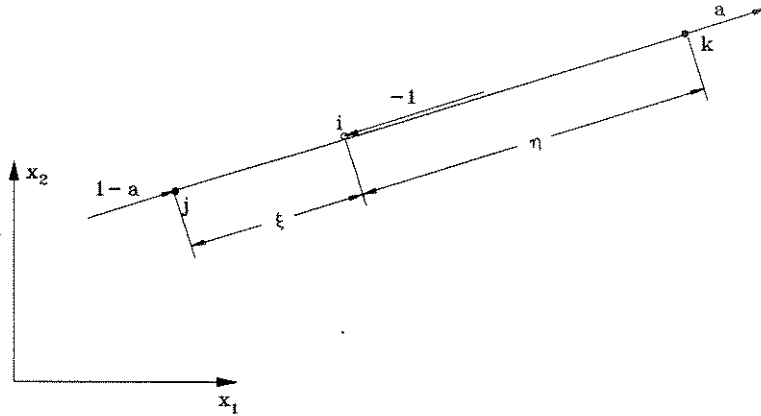


Figura 4.8: Significado físico do gradiente da restrição de igualdade típica.

Pode-se, portanto, escrever os termos da equação (5.7) associados a uma típica restrição de igualdade.

De acordo com a seção 3.8, e associado às variáveis  $\bar{u}_1^i, \bar{u}_2^i, \bar{u}_1^j, \bar{u}_2^j, \bar{u}_1^k$  e  $\bar{u}_2^k$  dos nós  $i, j$  e  $k$ , tem-se

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1-a & 0 & a & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

$$\bar{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}. \quad (4.21)$$

Logo,

$$\bar{\mathbf{B}}^t \mathbf{R}_i \bar{\mathbf{B}} = r_i \begin{bmatrix} 1 & 0 & a-1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a-1 & 0 & (1-a)^2 & 0 & a(a-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & a(1-a) & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

$$\bar{\mathbf{B}}^t \mathbf{R}_i \bar{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}, \quad (4.23)$$

$$\bar{B}^t \boldsymbol{\nu} = \nu_i \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 - a \\ 0 \\ a \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.24)$$

Verifica-se no problema de contato a necessidade de se conhecer o sentido do movimento relativo entre os corpos. Este sentido pode ser determinado diretamente através do sinal das restrições  $c_i(\bar{\mathbf{u}})$ . Seja, por exemplo:

- $\bar{u}_1^j = \bar{u}_1^k = 0$  e  $\bar{u}_1^i = 1 \Rightarrow c_i(\bar{\mathbf{u}}) = -1$  (deslocamento no sentido positivo),
- $\bar{u}_1^j = \bar{u}_1^k = 0$  e  $\bar{u}_1^i = -1 \Rightarrow c_i(\bar{\mathbf{u}}) = 1$  (deslocamento no sentido negativo).

Portanto, substitui-se o termo  $\frac{\mathbf{u}_t}{\|\mathbf{u}_t\|}$  em (2.16) pelo sinal correspondente de  $c_i(\bar{\mathbf{u}})$ .

Observa-se que  $h_j(\bar{\mathbf{u}})$ , equação (4.8), é definida em termos dos deslocamentos  $\bar{u}_2$  (direção  $\bar{x}_2$ ), e que  $c_i(\bar{\mathbf{u}})$ , equação (4.17), é definida em termos dos deslocamentos  $\bar{u}_1$  (direção  $\bar{x}_1$ ).

### 4.3 Termos associados ao problema discretizado - sistema global

Para o estabelecimento das restrições do problema de contato com atrito utilizou-se o sistema auxiliar de coordenadas  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ . Este sistema relaciona-se com o sistema global de coordenadas  $(x_1, x_2)$  através da transformação de coordenadas

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} x_1^j \\ x_2^j \end{Bmatrix}, \quad (4.25)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 - x_1^j \\ x_2 - x_2^j \end{Bmatrix}, \quad (4.26)$$

onde  $(x_1^j, x_2^j)$  representa a origem do sistema auxiliar de coordenadas escrita no sistema global de coordenadas, e  $\theta$  representa o ângulo de rotação do sistema auxiliar com relação ao sistema global de coordenadas, figura 4.9.

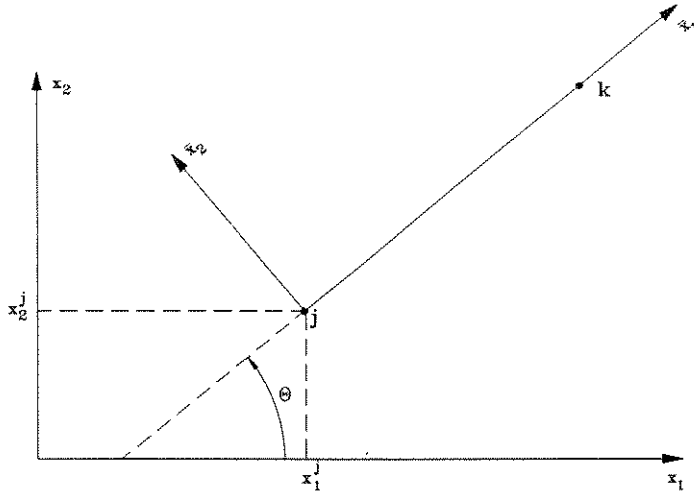


Figura 4.9: Relação entre os sistemas auxiliar e global de coordenadas.

Através desta transformação de coordenadas é possível relacionar as grandezas do sistema auxiliar (ou local da restrição) com o sistema global de coordenadas.

Seja a matriz

$$T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Logo escreve-se

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_1^i \\ \bar{u}_2^i \\ \bar{u}_1^j \\ \bar{u}_2^j \\ \bar{u}_1^k \\ \bar{u}_2^k \end{Bmatrix} = T \begin{Bmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ u_1^j \\ u_2^j \\ u_1^k \\ u_2^k \end{Bmatrix}. \quad (4.28)$$

Através desta relação é possível escrever os vários termos de interesse associados às restrições no sistema global de coordenadas.

Assim, para uma desigualdade típica, tem-se:

$$h_j(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ (1-a) \\ 0 \\ a \end{Bmatrix}^t \mathbf{T} \begin{Bmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ u_1^j \\ u_2^j \\ u_1^k \\ u_2^k \end{Bmatrix} - (x_1^i - x_1^j) \text{sen}\theta + (x_2^i - x_2^j) \text{cos}\theta, \quad (4.29)$$

$$\nabla h_j(\mathbf{u}) = \mathbf{T}^t \nabla h_j(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{T}^t \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1-a \\ 0 \\ a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{sen}\theta \\ -\text{cos}\theta \\ -(1-a)\text{sen}\theta \\ (1-a)\text{cos}\theta \\ -a\text{sen}\theta \\ a\text{cos}\theta \end{Bmatrix}, \quad (4.30)$$

$$\mathbf{A}^t \mathbf{R}_j \mathbf{A} = \mathbf{T}^t (\bar{\mathbf{A}}^t \mathbf{R}_j \bar{\mathbf{A}}) \mathbf{T}, \quad (4.31)$$

$$\mathbf{A}^t \mathbf{R}_j \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{T}^t (\bar{\mathbf{A}}^t \mathbf{R}_j \bar{\boldsymbol{\alpha}}) \mathbf{T}, \quad (4.32)$$

$$\mathbf{A}^t \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{T}^t (\bar{\mathbf{A}}^t \boldsymbol{\lambda}). \quad (4.33)$$

Equivalentemente, tem-se para uma restrição de igualdade:

$$c_i(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ (1-a) \\ 0 \\ a \\ 0 \end{Bmatrix}^t \mathbf{T} \begin{Bmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ u_1^j \\ u_2^j \\ u_1^k \\ u_2^k \end{Bmatrix}, \quad (4.34)$$

$$\nabla c_i(\mathbf{u}) = \mathbf{T}^t \nabla c_i(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{T}^t \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1-a \\ 0 \\ a \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\text{cos}\theta \\ -\text{sen}\theta \\ (1-a)\text{cos}\theta \\ (1-a)\text{sen}\theta \\ a\text{cos}\theta \\ a\text{sen}\theta \end{Bmatrix}, \quad (4.35)$$

$$\mathbf{B}^t \mathbf{R}_i \mathbf{B} = \mathbf{T}^t (\bar{\mathbf{B}}^t \mathbf{R}_i \bar{\mathbf{B}}) \mathbf{T}, \quad (4.36)$$

$$\mathbf{B}^t \boldsymbol{\nu} = \mathbf{T}^t (\bar{\mathbf{B}}^t \boldsymbol{\nu}). \quad (4.37)$$

Verifica-se que uma restrição típica comporta-se de forma semelhante a um elemento finito, possuindo termos de rigidez e de esforços que podem ser formulados num sistema local, e posteriormente transportados para o sistema global de coordenadas.

Observa-se que a simetria da matriz de rigidez do sistema é mantida já que a matriz correspondente a cada restrição é simétrica.

Em função do número de nós de contato em potencial dos corpos  $A$  e  $B$ , tem-se um conjunto de restrições de desigualdade e de igualdade todas formuladas de forma similar ao apresentado anteriormente.

#### 4.4 Limitação devido à discretização - campos de deslocamentos incompatíveis

Devido ao fato da solução do problema contínuo ser obtida de forma aproximada através do processo usual de discretização em elementos finitos, as limitações associadas a este processo afetam a solução do problema de contato.

O esquema de contato nó - segmento, conforme descrito, apresenta uma limitação no que se refere ao campo de deslocamentos na região de contato, conforme ilustrado na figura 4.10.

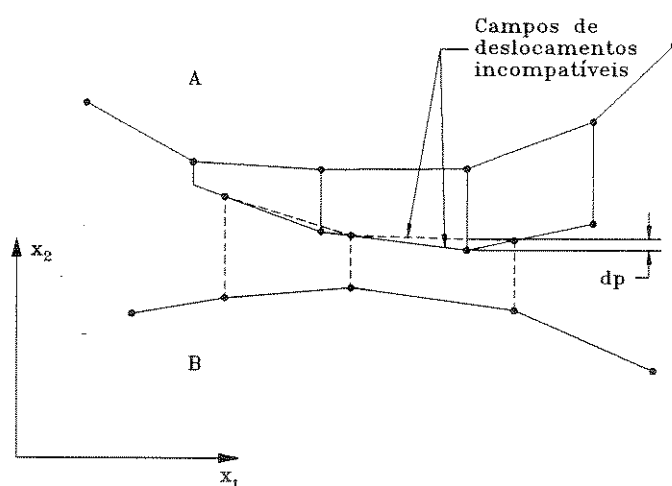


Figura 4.10: Incompatibilidade entre campos de deslocamentos no contato.

Observando-se a figura 4.10 nota-se que os campos de deslocamentos são compatíveis pontualmente (apenas um ponto por segmento, onde a distância  $dp = 0$ ). Esta

figura mostra que, embora as restrições de não interpenetração estejam satisfeitas puntualmente (nó - segmento), pode-se ter uma interpenetração  $dp$  entre os corpos devido aos campos de deslocamentos destes não serem totalmente compatíveis. Verifica-se que a existência de penetração, mesmo quando as restrições  $\mathbf{h}(\mathbf{u}) \leq \mathbf{0}$  estão satisfeitas, é uma limitação associada ao processo de discretização. Quanto mais refinada a malha de elementos finitos, menores serão os valores de  $dp$ , obtendo-se soluções mais precisas.

Uma forma alternativa para contornar o problema de incompatibilidade dos campos de deslocamentos no contato é a situação de contato nó - a - nó, conforme mostrado na figura 4.11.

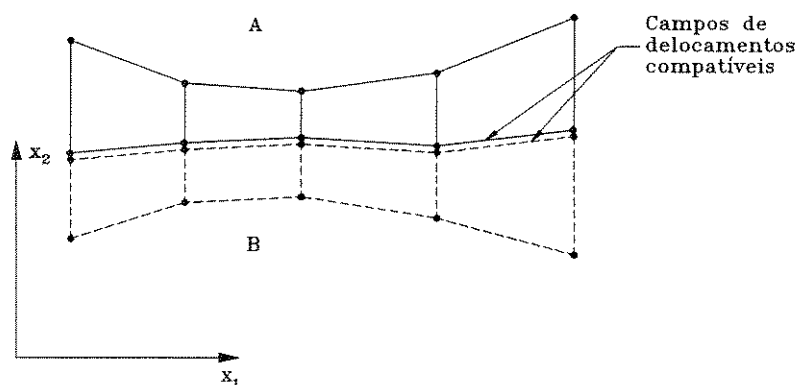


Figura 4.11: Situação de contato nó - a - nó.

Neste caso observa-se, que devido ao posicionamento dos nós, a distância de penetração  $dp$  tende a ser sempre nula. Esta situação de contato nó - a - nó possui a dificuldade de que é necessário conhecer os nós associados dos corpos  $A$  e  $B$ . Em geral não se conhece quais nós entrarão em contato, e devido à deformação, os nós associados podem não ter um posicionamento adequado após a deformação. No caso da hipótese de pequenos deslocamentos, o posicionamento dos nós pode não ser relevante.

De forma análoga ao comentado para as restrições de não interpenetração, tem-se uma situação equivalente para as restrições de igualdade em termos de campos de deslocamentos não compatíveis.



Cabe observar que a formulação das restrições em termos dos nós  $i$ ,  $j$  e  $k$  das equações (4.8) e (4.17) pode representar também o caso de contato nó - a - nó quando  $\xi = 0$ , conforme mostrado na figura 4.12.

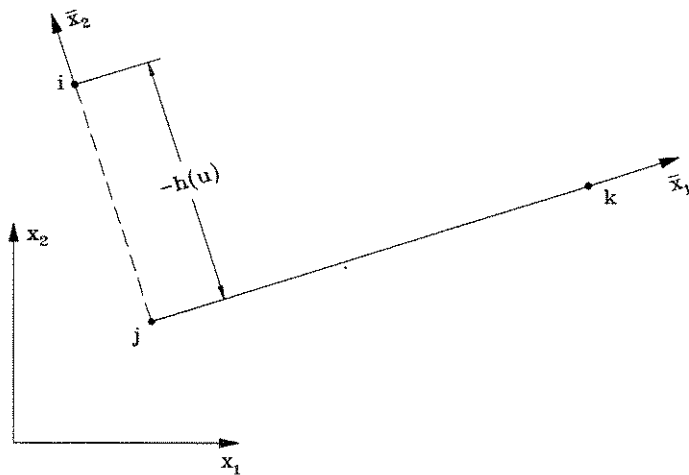


Figura 4.12: Situação de contato nó - a - nó, caso particular de nó - segmento.

Da mesma forma que o esquema de contato nó - a - nó procura minimizar o efeito de campos de deslocamentos não compatíveis, pode-se analisar o emprego de métodos adaptativos de malhas que venham a reduzir esta incompatibilidade.

O refinamento de malha do tipo  $h$ , que cria novos elementos finitos na região de interesse, neste caso na região de contato, pode ser empregado através da criação de elementos com os nós convenientemente posicionados, buscando manter a condição de contato nó - a - nó, e gerando-se novas restrições de contato. Uma sequência para um refinamento de malha segundo o método  $h$ , pode ser do tipo:

1. Definir uma malha inicial.
2. Resolver o problema de contato utilizando esta malha.
3. Executar o refinamento, criando novos elementos que possuam nós convenientemente posicionados, de forma a restaurar uma situação nó - a - nó. Novas restrições de contato são criadas para os novos nós.

4. Recalcular o problema de contato com a nova malha (malha refinada).

Este processo pode ser repetido até que se consiga um nível de compatibilidade dos campos de deslocamentos considerado adequado.

Este esquema considera que a malha, antes de cada refinamento, forneça uma boa indicação do posicionamento dos nós após a deformação, permitindo o refinamento.

Os novos elementos finitos gerados devem ter a sua forma controlada para que não se apresentem excessivamente distorcidos. Pode-se estabelecer um critério que crie esses novos elementos somente a partir de uma certa diferença de posicionamento dos nós, garantindo assim uma forma adequada destes.

O refinamento do tipo  $p$ , que consiste em elevar o grau do polinômio de interpolação do elemento finito, pode ser utilizado de forma semelhante ao comentado para o refinamento  $h$ . O procedimento, neste caso, consiste em substituir o passo 3 da sequência do refinamento  $h$  por:

3. Executar o refinamento, criando novos pontos de interpolação convenientemente posicionados, elevando o grau do polinômio interpolador do lado do elemento de interesse, e permitindo a criação de novas restrições de contato associadas a estes novos pontos.

As novas restrições geradas, juntamente com o maior grau do polinômio interpolador no lado dos elementos na região de interesse, região de contato, devem conduzir a uma situação que represente uma melhor compatibilidade dos campos de deslocamentos. Os polinômios dos elementos dos corpos em contato podem ter graus distintos.

A combinação dos esquemas  $h$  e  $p$  pode ser também empregada (refinamento  $hp$ ).

No caso de pequenos deslocamentos deve-se analisar o nível de incompatibilidade dos campos de deslocamentos para decidir por algum tipo de refinamento.

A utilização de elementos finitos de maior ordem (por exemplo elementos isoparamétricos quadráticos de oito nós) pode contribuir para uma melhor compatibilidade dos campos de deslocamentos, já que os nós intermediários podem ser usados para se

definir novas restrições de contato. Além disso, o uso deste tipo de elemento pode contribuir para uma melhor representação da geometria inicial, principalmente em regiões curvas. Este caso pode gerar restrições não lineares devido à geometria ser representada por funções não lineares, e devido ao próprio campo de deslocamentos ser não linear.

As restrições do problema podem ser também formuladas independentemente das funções de interpolação dos elementos finitos. Por exemplo, pode-se definir funções passando pelos nós da malha na região de contato, considerando os deslocamentos destes nós. As restrições de não interpenetração e de não deslizamento seriam formuladas tomando como base estas funções. Este tipo de formulação não permite uma associação das restrições a um típico elemento finito, podendo-se ter situações de matriz hessiana não simétrica, inviabilizando a aplicação da maioria dos conceitos usuais do MEF.

## Capítulo 5

# Esquemas numéricos para a solução do problema de contato

### 5.1 Algoritmo genérico

Apresenta-se o algoritmo genérico proposto para a solução do problema de contato com atrito.

Para a verificação das condições de atrito é necessário o conhecimento dos esforços normais e tangenciais de contato. Estes são determinados através do significado físico dos multiplicadores de Lagrange associados ao problema de minimização envolvido conforme comentado em 3.7.

Considerando os aspectos apresentados nos Capítulos anteriores formula-se o algoritmo básico para a solução do problema de contato com atrito conforme descrito a seguir.

1. Definir os coeficientes de atrito estático ( $\mu_e$ ) e dinâmico ( $\mu_d$ ).
2. Definir o ponto de partida (deslocamentos iniciais). Por exemplo  $\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}$ .
3. Definir os multiplicadores de Lagrange ( $\boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{\nu}^0$ ) e os parâmetros de penalidades ( $r_i^0, r_j^0$ ) iniciais.
4. Inicializar  $k = 0$  (contador do número de iterações do Lagrangiano Aumentado).

5. Enquanto o critério de parada do Lagrangiano Aumentado (por exemplo o ponto ser factível e não mais apresentar variação) não estiver satisfeito, repita os itens 5.1 a 5.6 sequencialmente:

5.1) Definir os esforços de contato associados aos multiplicadores de Lagrange:

- $\mathbf{n} = \boldsymbol{\lambda}^k$  (esforços normais),
- $\mathbf{t} = \boldsymbol{\nu}^k$  (esforços tangenciais).

5.2) Montar o sistema não linear de equações associado à condição de gradiente nulo da função L.A., equivalente à equação (3.28):

$$\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f} + \mathbf{F}_c(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad (5.1)$$

verificando as seguintes condições de atrito para cada par de restrições (desigualdade e igualdade):

- se  $\lambda_j^k + r_j^k h_j(\mathbf{u}) \leq 0$  então  $[\lambda_j^k + r_j^k h_j(\mathbf{u})]_+ = 0$  (não existem termos de contato). Logo  $\mathbf{F}_{c,j} = \mathbf{0}$ .

- se  $\lambda_j^k + r_j^k h_j(\mathbf{u}) > 0$  então  $[\lambda_j^k + r_j^k h_j(\mathbf{u})]_+ = \lambda_j^k + r_j^k h_j(\mathbf{u})$ , e  $\|\mathbf{t}_i\| \leq \mu_e \|\mathbf{n}_j\|$ ,  $i = j$ , (existem termos associados à  $h_j(\mathbf{u})$  - contato, e ocorre adesão), então:

$$\mathbf{F}_{c,j} = (\lambda_j^k + r_j^k h_j(\mathbf{u})) \nabla h_j(\mathbf{u}) + (\nu_i^k + r_i^k c_i(\mathbf{u})) \nabla c_i(\mathbf{u}), \quad (5.2)$$

- se  $\lambda_j^k + r_j^k h_j(\mathbf{u}) > 0$  então  $[\lambda_j^k + r_j^k h_j(\mathbf{u})]_+ = \lambda_j^k + r_j^k h_j(\mathbf{u})$ , e  $\|\mathbf{t}_i\| > \mu_e \|\mathbf{n}_j\|$ ,  $i = j$ , (existem termos associados à  $h_j(\mathbf{u})$  - contato, e ocorre deslizamento), então:

$$\mathbf{t}_i = -\mu_d \|\mathbf{n}_j\| \frac{\mathbf{u}_t}{\|\mathbf{u}_t\|} \quad (i = j), \quad (5.3)$$

$$\mathbf{F}_{c,j} = (\lambda_j^k + r_j^k h_j(\mathbf{u})) \nabla h_j(\mathbf{u}) + \mathbf{t}_i. \quad (5.4)$$

- Determinar  $\mathbf{F}_c(\mathbf{u})$  através da contribuição de cada par de restrições,

$$\mathbf{F}_c(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^m \mathbf{F}_{c,j}. \quad (5.5)$$

5.4) Resolver o sistema não linear de equações (5.1) obtendo  $\mathbf{u}^{k+1}$ .

5.5) Atualizar os multiplicadores de Lagrange e os parâmetros de penalidade conforme o passo 3.3 do algoritmo da seção 3.6.

5.6) Incrementar o contador de iterações,  $k = k + 1$ .

6.  $\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^*$  é solução ótima.

7. Fim.

A equação (5.3) mostra a inclusão dos esforços de atrito dinâmico na direção contrária ao movimento relativo entre os corpos. A determinação da direção do movimento relativo pode ser encontrada em função do sinal das restrições  $\mathbf{c}(\mathbf{u})$  como discutido no Capítulo 4.

A resolução do sistema não linear de equações (minimização irrestrita da função Lagrangiana Aumentada) pode ser conseguida utilizando-se os métodos usuais de otimização tais como o método de Newton, Quase-Newton, Gauss-Newton e outros, [144, 85]. A solução nestes métodos é encontrada através de uma sequência do tipo

$$\mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i - \rho \mathbf{Q}(\mathbf{u}^i) \nabla \Phi(\mathbf{u}^i), \quad (5.6)$$

onde  $\rho$  representa o passo de um processo de busca unidimensional;  $\mathbf{Q}$  representa uma matriz que corrige a direção de busca. Por exemplo  $\mathbf{Q} = \mathbf{H}^{-1}$  (inversa da matriz hessiana) no método de Newton,  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$  (matriz identidade) no método do gradiente. A matriz  $\mathbf{Q}$  pode, também, ser estimada tomando-se como base o vetor das variáveis de otimização e o vetor gradiente de duas iterações sucessivas no método Quase-Newton (fórmulas BFGS - DFP). Um trabalho específico do Lagrangiano Aumentado em conjunto com o método Quase-Newton é apresentado em [78].

O sistema não linear de equações (5.1) ou (3.27) pode apresentar dois tipos distintos de não linearidade:

- as restrições  $\mathbf{h}(\mathbf{u})$  e  $\mathbf{c}(\mathbf{u})$  podem ser não lineares,
- a existência do termo [ ]-, estando presente ou não em função do valor de  $\mathbf{u}$ .

No caso deste trabalho, a matriz hessiana (matriz de rigidez) é calculada, de forma que a sequência básica do método de Newton é empregada.

Alguns esquemas computacionais utilizam aproximações desta matriz, como por exemplo, o método de Newton-Raphson Modificado [149], onde a matriz de rigidez não

é atualizada nas iterações do processo de solução, ou é atualizada apenas em momentos específicos.

A situação específica de restrições lineares, juntamente com a condição de gradiente nulo da função Lagrangiana Aumentada, equação (3.44), representa um sistema linear de equações se o conjunto de restrições ativas se mantiver fixo. Neste caso, a solução deste sistema linear de equações é equivalente ao método de Newton com o passo de busca unidimensional unitário ( $\rho = 1$ ), partindo-se do ponto  $\mathbf{u}^i$  diretamente para o ponto  $\mathbf{u}^{i+1}$ .

Este sistema linear pode ser resolvido através dos métodos usuais empregados em elementos finitos, como por exemplo o método da eliminação de Crout, que é uma variação conveniente do método da eliminação de Gauss, onde uma coluna é completamente fatorada a cada vez. Esta característica é particularmente conveniente em análises não lineares onde a parte não linear representa uma pequena parte da matriz total, [58].

Quando o conjunto de restrições ativas apresentar variação entre os pontos  $\mathbf{u}^i$  e  $\mathbf{u}^{i+1}$  (obtido pelo sistema linear de equações), então os termos  $[\mathbf{A}^t \mathbf{R}_j \mathbf{A}]_*$ ,  $\mathbf{B}^t \mathbf{R}_i \mathbf{B}$ ,  $[\mathbf{A}^t \mathbf{R}_j \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{A}^t \boldsymbol{\lambda}]_*$ ,  $\mathbf{B}^t \mathbf{R}_i \boldsymbol{\beta}$  e  $\mathbf{B}^t \boldsymbol{\nu}$  associados as restrições calculadas em  $\mathbf{u}^i$  e em  $\mathbf{u}^{i+1}$  são distintos. Neste caso, tem-se uma situação de sistema não linear de equações, e o emprego de um processo de busca unidimensional pode contribuir para o aumento do campo de convergência do algoritmo.

A solução do sistema de equações (3.44) pode ser conduzida da seguinte maneira:

1. Seja  $\mathbf{u}^i$  o ponto de partida.
2. Montar o sistema de equações (3.44) com os termos  $[\mathbf{A}^t \mathbf{R}_j \mathbf{A}]_*$ ,  $\mathbf{B}^t \mathbf{R}_i \mathbf{B}$ ,  $[\mathbf{A}^t \mathbf{R}_j \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{A}^t \boldsymbol{\lambda}]_*$ ,  $\mathbf{B}^t \mathbf{R}_i \boldsymbol{\beta}$  e  $\mathbf{B}^t \boldsymbol{\nu}$  associados ao ponto  $\mathbf{u}^i$  (restrições ativas em  $\mathbf{u}^i$ ).
3. Resolver o sistema de equações, considerando-o como linear, e obtendo-se  $\mathbf{u}^{i+1}$ .
4. Se o conjunto de restrições ativas em  $\mathbf{u}^{i+1}$  é o mesmo que em  $\mathbf{u}^i$ , então  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{i+1}$  é solução do sistema de equações, neste caso linear entre  $\mathbf{u}^i$  e  $\mathbf{u}^{i+1}$ .

Se o conjunto de restrições ativas em  $\mathbf{u}^{i+1}$  é diferente do conjunto de restrições em

$\mathbf{u}^i$ , então execute um processo de busca unidimensional, obtendo  $\rho$  e, consequentemente,  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{i+1}$ , conforme a equação (5.6).

Este esquema é particularmente interessante, pois no caso específico do problema de contato, o conjuntô de restrições é pequeno, e tende a apresentar seu estado (ativo - não ativo) estabilizado rapidamente.

Utilizou-se neste trabalho o método da secante de busca unidimensional [144]. Este método utiliza na sua formulação apenas o valor do gradiente da função objetivo. O intervalo de confiança, a cada iteração, é testado quanto à presença do ponto de derivada direcional nula, tornando este processo de busca unidimensional mais robusto.

Como o problema específico estudado está no regime de pequenos deslocamentos, a utilização de restrições lineares é válida. Assim, os esquemas das seções seguintes, para a obtenção da solução do sistema de equações, assumem restrições lineares (seção 3.8). Além disso, estes esquemas seguem os conceitos desta seção, alterando-se apenas particularidades na solução do sistema não linear (5.1).

## 5.2 Algoritmo A

O algoritmo A consiste simplesmente em aplicar o algoritmo genérico da seção 5.1.

A condição de gradiente nulo da função Lagrangiana Aumentada, equação (3.44), pode ser reescrita na forma

$$(\mathbf{K} + [\mathbf{A}^t \mathbf{R}_j \mathbf{A}]_* + \mathbf{B}^t \mathbf{R}_i \mathbf{B}) \mathbf{u} = \mathbf{f} - [\mathbf{A}^t \mathbf{R}_j \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{A}^t \boldsymbol{\lambda}]_* - \mathbf{B}^t \mathbf{R}_i \boldsymbol{\beta} - \mathbf{B}^t \boldsymbol{\nu}. \quad (5.7)$$

A equação (5.7) representa o sistema de equações associado ao algoritmo A.

Os termos  $[\mathbf{A}^t \mathbf{R}_j \mathbf{A}]_*$  e  $\mathbf{B}^t \mathbf{R}_i \mathbf{B}$  (rigidez de contato) acoplam os graus de liberdade na região de contato e variam com os parâmetros de penalidade. No caso da matriz  $\mathbf{K}$  estar armazenada em vetor e na forma “skyline”, estes termos redefinem uma nova estrutura “skyline” na porção da matriz que envolve os graus de liberdade do contato.



Contudo, estes termos tornam o sistema positivo-definido mesmo quando a matriz  $K$  é semi-positivo definida.

Nota-se que os parâmetros de penalidade (matrizes  $R_i$  e  $R_j$ ) têm influência direta no condicionamento da matriz do sistema (5.7).

### 5.3 Algoritmo $B$ - Condensação estática

As restrições associadas ao problema de contato envolvem apenas os graus de liberdade de contato potencial. Este caráter localizado sugere a utilização de condensação estática, [47], buscando trabalhar apenas com os graus de liberdade da região de contato como variáveis de otimização.

O algoritmo  $B$  consiste na aplicação de condensação estática ao algoritmo  $A$ .

Seja o sistema linear de equações genérico

$$Ku = f. \quad (5.8)$$

Pode-se particionar este sistema na forma

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_a \\ f_b \end{Bmatrix}. \quad (5.9)$$

Escreve-se a partir de (5.9)

$$K_{aa}u_a + K_{ab}u_b = f_a, \quad (5.10)$$

$$K_{ba}u_a + K_{bb}u_b = f_b. \quad (5.11)$$

De (5.10) escreve-se

$$u_a = K_{aa}^{-1}(f_a - K_{ab}u_b). \quad (5.12)$$

Substituindo (5.12) em (5.11) tem-se

$$(K_{bb} - K_{ba}K_{aa}^{-1}K_{ab})u_b = f_b - K_{ba}K_{aa}^{-1}f_a. \quad (5.13)$$

A solução, através de condensação estática, consiste em obter  $\mathbf{u}_b$  através de (5.13), e posteriormente  $\mathbf{u}_a$  através de (5.12).

Procura-se evitar a necessidade da inversão de  $\mathbf{K}_{aa}$ . Isto pode ser conseguido utilizando-se conceitos do método da eliminação de Crout, [58], que é bastante usual em elementos finitos.

Seja

$$\mathbf{K} = \mathbf{U}^t \mathbf{D} \mathbf{U}, \quad (5.14)$$

onde  $\mathbf{U}$  é uma matriz triangular superior com diagonal unitária, e  $\mathbf{D}$  é uma matriz diagonal.

Utilizando o conceito de partição escreve-se

$$\mathbf{K} = \mathbf{U}^t \mathbf{D} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_a^t & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}^t & \mathbf{U}_b^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_a & \mathbf{P} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Efetuando a devida multiplicação matricial obtém-se:

$$\mathbf{K}_{aa} = \mathbf{U}_a^t \mathbf{D}_a \mathbf{U}_a, \quad (5.16)$$

$$\mathbf{K}_{ab} = \mathbf{U}_a^t \mathbf{D}_a \mathbf{P} = \mathbf{K}_{ba}^t, \quad (5.17)$$

$$\mathbf{K}_{bb} = \mathbf{P}^t \mathbf{D}_a \mathbf{P} + \mathbf{U}_b^t \mathbf{D}_b \mathbf{U}_b. \quad (5.18)$$

De (5.17) tem-se que

$$\mathbf{P} = \mathbf{D}_a^{-1} (\mathbf{U}_a^t)^{-1} \mathbf{K}_{ab}. \quad (5.19)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^t \mathbf{D}_a \mathbf{P} &= (\mathbf{D}_a^{-1} (\mathbf{U}_a^t)^{-1} \mathbf{K}_{ab})^t \mathbf{D}_a (\mathbf{D}_a^{-1} (\mathbf{U}_a^t)^{-1} \mathbf{K}_{ab}) = \\ &= (\mathbf{K}_{ab}^t \mathbf{U}_a^{-1} \mathbf{D}_a^{-1}) \mathbf{D}_a (\mathbf{D}_a^{-1} (\mathbf{U}_a^t)^{-1} \mathbf{K}_{ab}) = \\ &= \mathbf{K}_{ba} (\mathbf{U}_a^t \mathbf{D}_a \mathbf{U}_a)^{-1} \mathbf{K}_{ab}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Usando (5.16) em (5.20) tem-se

$$\mathbf{P}^t \mathbf{D}_a \mathbf{P} = \mathbf{K}_{ba} \mathbf{K}_{aa}^{-1} \mathbf{K}_{ab}. \quad (5.21)$$

Portanto (5.18) torna-se

$$\mathbf{U}_b^t \mathbf{D}_b \mathbf{U}_b = \mathbf{K}_{bb} - \mathbf{K}_{ba} \mathbf{K}_{aa}^{-1} \mathbf{K}_{ab}. \quad (5.22)$$

Utilizando (5.16) e (5.17) escreve-se

$$\mathbf{K}_{ba} \mathbf{K}_{aa}^{-1} = (\mathbf{U}_a^t \mathbf{D}_a \mathbf{P})^t (\mathbf{U}_a^t \mathbf{D}_a \mathbf{U}_a)^{-1} = \mathbf{P}^t \mathbf{D}_a \mathbf{U}_a \mathbf{U}_a^{-1} \mathbf{D}_a^{-1} (\mathbf{U}_a^t)^{-1} = \mathbf{P}^t (\mathbf{U}_a^t)^{-1}. \quad (5.23)$$

Utilizando (5.22) e (5.23) reescreve-se (5.13) na forma

$$(\mathbf{U}_b^t \mathbf{D}_b \mathbf{U}_b) \mathbf{u}_b = \mathbf{f}_b - \mathbf{P}^t (\mathbf{U}_a^t)^{-1} \mathbf{f}_a. \quad (5.24)$$

Utilizando (5.16) e (5.17) reescreve-se (5.10) como

$$(\mathbf{U}_a^t \mathbf{D}_a \mathbf{U}_a) \mathbf{u}_a = \mathbf{f}_a - \mathbf{U}_a^t \mathbf{D}_a \mathbf{P} \mathbf{u}_b. \quad (5.25)$$

Através da equação (5.24) obtém-se  $\mathbf{u}_b$  e, através de (5.25), obtém-se  $\mathbf{u}_a$ .

Os termos  $[\mathbf{A}^t \mathbf{R}_j \mathbf{A}]_*$  e  $\mathbf{B}^t \mathbf{R}_i \mathbf{B}$  afetam apenas a porção  $\mathbf{K}_{bb}$  do sistema. Assim, as iterações do Lagrangiano Aumentado podem ser realizadas tomando-se apenas a porção  $bb$  do sistema.

As etapas do algoritmo de contato com condensação estática são portanto:

- fatorar  $\mathbf{K}$  obtendo  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{D}$ ,
- determinar as partições  $\mathbf{U}_a$ ,  $\mathbf{U}_b$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{D}_a$  e  $\mathbf{D}_b$ ,
- resolver o sistema  $\mathbf{U}_a^t \mathbf{x} = \mathbf{f}_a$  obtendo  $\mathbf{x}$  (evita-se a inversão de  $\mathbf{U}_a$  na equação (5.24)),
- executar as iterações do Lagrangiano Aumentado:
  - atualizar  $\mathbf{K}_{bb}$  com os termos  $[\mathbf{A}^t \mathbf{R}_j \mathbf{A}]_*$  e  $\mathbf{B}^t \mathbf{R}_i \mathbf{B}$ ,
  - fatorar  $\mathbf{K}_{bb}$ ,
  - resolver o sistema  $(\mathbf{U}_b^t \mathbf{D}_b \mathbf{U}_b) \mathbf{u}_b = \mathbf{f}_b - \mathbf{P}^t \mathbf{x}$ , obtendo  $\mathbf{u}_b$ .
- resolver o sistema  $(\mathbf{U}_a^t \mathbf{D}_a \mathbf{U}_a) \mathbf{u}_a = \mathbf{f}_a - \mathbf{U}_a^t \mathbf{D}_a \mathbf{P} \mathbf{u}_b$ , obtendo  $\mathbf{u}_a$ .

A formulação de condensação estática conforme apresentada utiliza as rotinas computacionais usuais do método da eliminação de Crout, [58].

Observa-se que é possível trabalhar com os algoritmos de contato apenas com as variáveis  $\mathbf{u}_b$ , e após a obtenção de  $\mathbf{u}_b^*$  (através da solução do Lagrangiano Aumentado), obter-se a solução para os graus de liberdade  $\mathbf{u}_a$  não associados ao contato. A condensação estática reduz o tamanho do problema de otimização para a dimensão de  $\mathbf{u}_b$  (graus de liberdade de contato), representando uma significativa redução no tamanho deste problema. Através deste procedimento de condensação estática (subestruturação), apenas a partição localizada da não linearidade passa pelas iterações do Lagrangiano Aumentado. A parte linear é resolvida uma única vez após a convergência do método do Lagrangiano Aumentado. Em geral, o número de graus de liberdade da região de contato em potencial é bem menor que o número de graus de liberdade do problema completo, o que indica que o procedimento de subestruturação pode ser muito atrativo na solução do problema de contato.

## 5.4 Algoritmo *C*

Conforme mencionado na seção 5.2, os termos  $[A^t R_j A]_*$  e  $B^t R_i B$  acoplam os graus de liberdade do contato, sacrificando a estrutura “skyline” original da matriz  $\mathbf{K}$ , e podem introduzir um mau condicionamento adicional em função dos valores de  $\mathbf{R}_j$  e  $\mathbf{R}_i$ .

Uma situação particular da seção 5.2 pode ser considerada negligenciando-se os termos  $[A^t R_j A]_*$  e  $B^t R_i B$ . Neste caso o sistema de equações torna-se

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} - [A^t \mathbf{R}_j \boldsymbol{\alpha} + A^t \boldsymbol{\lambda}]_* - B^t \mathbf{R}_i \boldsymbol{\beta} - B^t \boldsymbol{\nu}. \quad (5.26)$$

As principais vantagens deste enfoque são: não se modificar a estrutura “skyline” da matriz  $\mathbf{K}$  e não se introduzir os termos que podem afetar o seu número de condição. Trata-se de uma simplificação que apresenta vantagens sob o aspecto computacional. O sistema (5.26) possui seu condicionamento numérico fixo e não requer nenhum tipo de manipulação adicional de dados da matriz do sistema. É um enfoque semelhante ao do

método de Newton - Raphson Modificado, [149].

Contudo, nos casos em que a matriz  $\mathbf{K}$  é semi-positivo definida inicialmente, é necessário utilizar algum artifício numérico para torná-la estritamente positivo definida. Por exemplo, pode-se adicionar um valor positivo, considerado “pequeno”, à sua diagonal principal sem que haja o comprometimento do problema físico.

A decomposição da matriz  $\mathbf{K}$  pelo método da eliminação de Crout, [58], pode ser efetuada uma única vez, e a solução do sistema pode ser obtida através dos procedimentos usuais (“forward reduction” e “back substitution”) a partir das matrizes  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{D}$  resultantes da fatoração de  $\mathbf{K}$ . O fato de se fatorar a matriz  $\mathbf{K}$  uma única vez representa um ganho computacional significativo em relação ao esquema da seção 5.2.

Pode-se também utilizar os conceitos de subestruturação juntamente com a simplificação apresentada.

Este esquema difere do esquema iterativo da seção 5.5 pelo fato de que lá os termos associados à rigidez não são desconsiderados, sendo somados ao membro direito da equação (5.27).

## 5.5 Algoritmo $D$

O sistema não linear (5.1) pode ser escrito na forma

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}_T(\mathbf{u}). \quad (5.27)$$

De forma explícita tem-se que

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} - [\mathbf{A}^t \mathbf{R}_j \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{A}^t \boldsymbol{\lambda}]_* - \mathbf{B}^t \mathbf{R}_i \boldsymbol{\beta} - \mathbf{B}^t \boldsymbol{\nu} - ([\mathbf{A}^t \mathbf{R}_j \mathbf{A}]_* + \mathbf{B}^t \mathbf{R}_i \mathbf{B})\mathbf{u}. \quad (5.28)$$

O seguinte esquema iterativo por substituição pode ser utilizado procurando resolver o sistema (5.27):

1. seja  $\mathbf{u}^i$  um ponto inicial de partida,
2. calcule  $\mathbf{f}_T = \mathbf{f}_T(\mathbf{u}^i)$ ,

3. resolva o sistema linear  $K\mathbf{u} = \mathbf{f}_T$ , obtendo  $\mathbf{u}^{i+1}$ ,
4. critério de parada: se  $\max|\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i+1}| < \epsilon$  vá para 6,
5.  $\mathbf{u}^i = \mathbf{u}^{i+1}$ , retorne para 2,
6.  $\mathbf{u}^{i+1}$  é solução, termine.

Este esquema é fortemente influenciado, no que se refere à convergência, pelo ponto de partida e pela variação dos penalizadores.

No caso do algoritmo de contato, este esquema foi implementado computacionalmente apresentando problemas de convergência mesmo em exemplos de pequeno porte (poucas variáveis de otimização e poucas restrições). Nota-se que os termos de rigidez associados ao contato são considerados no membro direito de (5.27).

Este esquema é semelhante, no que se refere à manipulação da matriz  $K$ , ao algoritmo  $C$ , apresentando a mesma limitação nos casos de sistemas semi-positivos definidos.

## 5.6 Algoritmo $E$ - Combinação dos algoritmos $A$ , $B$ e $C$

Este esquema sugere uma alternativa mista entre o algoritmo  $A$ , que sempre considera a rigidez de contato, e o algoritmo  $C$ , que desconsidera a rigidez de contato, utilizando-se de condensação estática (algoritmo  $B$ ).

A rigidez de contato, termos  $[A^t R_j A]_*$  e  $B^t R_i B$ , é considerada com uma certa frequência de atualização definida pelo parâmetro  $nfreq$ . A equação (5.29) representa o esquema considerado,

$$(K + \{[A^t R_j A]_* + B^t R_i B\}_{nfreq})\mathbf{u} = \mathbf{R} - [A^t R_j \alpha + A^t \lambda]_* - B^t R_i \beta - B^t \nu, \quad (5.29)$$

onde  $\{ \}_{nfreq}$  indica que este termo é atualizado com uma frequência de  $nfreq$  em  $nfreq$  iterações.

No caso de  $nfreq = 1$  o termo é sempre atualizado e tem-se uma situação equivalente ao algoritmo  $B$  (quando se utiliza de condensação estática), ou equivalente ao

algoritmo  $A$  (quando não se utiliza de condensação estática). Apenas o caso com condensação estática é aqui considerado. No caso de  $nfreq$  grande o suficiente (maior que o número de iterações para a convergência) tem-se uma situação equivalente ao algoritmo  $C$  (não considera a rigidez de contato).

Este esquema pode apresentar características interessantes em termos de propriedades de convergência e em termos de tempos de processamento em função da frequência de atualização da matriz de rigidez do sistema.

## 5.7 Atualização dos parâmetros de penalidade e multiplicadores de Lagrange

O algoritmo geral do Método do Lagrangiano Aumentado, e conseqüentemente o algoritmo para a solução do problema de contato, requer a utilização de algum esquema para a atualização dos parâmetros de penalidade e dos multiplicadores de Lagrange.

A seqüência de atualização dos multiplicadores de Lagrange conforme (3.25) é interessante pois satisfaz as condições de otimalidade (Kuhn-Tucker).

Com relação aos parâmetros de penalidade, os esquemas são geralmente empíricos já que a solução encontrada pelo Lagrangiano Aumentado não depende destes valores. Contudo, estes valores influenciam em muito o comportamento do algoritmo em termos de propriedades de convergência (casos em que o algoritmo não converge, tempo de processamento, número de iterações para a obtenção da solução), pois afetam o condicionamento da matriz do sistema correspondente.

Como exemplo de esquemas de atualização dos parâmetros de penalidade tem-se:

- $r = cte$  (parâmetros fixos),
- $r^{k+1} = r^k t, t \geq 1,$
- $r^{k+1} = r^k t + r_0, t \geq 1,$

onde  $k$  representa a iteração do Lagrangiano Aumentado, e  $t$  é um parâmetro que determina a velocidade de crescimento destes parâmetros.

Nota-se que o terceiro esquema citado inclui os anteriores para valores particulares de  $r_0$  e  $t$ .

Adota-se neste trabalho a terceira opção para atualização dos parâmetros de penalidade. A escolha dos valores  $r_0$  e  $t$ , que definem a lei formação dos penalizadores, é feita através de experiências (testes), observando-se a resposta dos algoritmos quanto às características de convergência.

No caso específico do problema de contato alguns aspectos de interesse são:

- Os parâmetros de penalidade não devem crescer a uma taxa que cause a instabilidade dos algoritmos (e conseqüentemente a divergência destes). Seja, por exemplo, uma situação em que o parâmetro esteja “baixo”, permitindo uma certa violação de restrições (no caso do problema de contato uma interpenetração dos corpos) na iteração  $k$ . Na iteração seguinte ( $k + 1$ ), suponha que o penalizador atinja um valor já considerado “alto” (devido a uma lei de atualização inadequada), gerando esforços de contato “elevados” que venham a causar a separação dos corpos. As restrições ficam, portanto, não violadas, e em função dos atuais valores dos multiplicadores de Lagrange, o termo  $[ ]_-$  ou  $[ ]_*$  na equação do equilíbrio pode ficar ausente para a iteração seguinte ( $k + 2$ ). Este termo, estando ausente, implica na inexistência dos esforços de contato, permitindo a ocorrência de uma interpenetração que pode ser considerada “grande”. Novamente, com os penalizadores “elevados” e interpenetração “elevada”, pode-se ter esforços de contato “elevados” que podem vir a causar novamente a separação dos corpos. Nota-se que este ciclo pode repetir-se indefinidamente, caracterizando um comportamento oscilatório do algoritmo.
- A escolha de parâmetros de penalidade constantes, com valor considerado adequado, facilita a convergência do algoritmo, tornando-o mais robusto. Contudo, o número de iterações - tempo de processamento pode crescer consideravelmente.
- O crescimento moderado dos parâmetros de penalidade parece ser uma forma adequada em termos de convergência. Um caso particular em que  $r_0 = cte$  e  $t = 1$  conduz a um crescimento linear dos parâmetros de penalidade, representando uma



forma mais controlada quanto ao crescimento destes.

Salienta-se, contudo, que a escolha destes parâmetros de penalidade depende de cada problema específico a ser resolvido, e uma forma prática para determiná-los é através de experiências caso a caso.

Visando aumentar o campo de convergência dos algoritmos estudados, alguns esquemas para o controle do crescimento dos parâmetros de penalidade podem ser utilizados.

Procurando evitar a criação de esforços de contato super-estimados quando se tem restrições violadas pode-se adotar o seguinte esquema:

- se  $r_j^k h_j(\mathbf{u}^k) > \delta\lambda$  então  $\lambda_j^{k+1} = \lambda_j^k + \delta\lambda$  e não se atualiza  $r_j$ ,  
se  $r_j^k h_j(\mathbf{u}^k) \leq \delta\lambda$  então  $\lambda_j^{k+1} = \lambda_j^k + r_j^k h_j(\mathbf{u}^k)$  e se atualiza  $r_j$ ,
- se  $r_i^k c_i(\mathbf{u}^k) > \delta\nu$  então  $\nu_i^{k+1} = \nu_i^k + \delta\nu$  e não se atualiza  $r_i$ ,  
se  $r_i^k c_i(\mathbf{u}^k) \leq \delta\nu$  então  $\nu_i^{k+1} = \nu_i^k + r_i^k c_i(\mathbf{u}^k)$  e se atualiza  $r_i$ .

Neste esquema  $\delta\lambda$  e  $\delta\nu$  são parâmetros que controlam o passo de atualização dos multiplicadores  $\lambda$  e  $\nu$ .

Observa-se que este esquema evita variações grandes dos multiplicadores de Lagrange. Ao se aproximar da solução os multiplicadores tendem naturalmente a variar pouco.

A escolha de  $\delta\lambda$  e  $\delta\nu$  deve ser tal que evite as oscilações dos algoritmos. Estes valores podem ser escolhidos como uma fração do valor esperado para os multiplicadores exatos. Contudo, os multiplicadores exatos não são conhecidos “a priori”. Pode-se utilizar o fato de que os multiplicadores devem estar em equilíbrio com os esforços externos, e assim obter uma estimativa adequada para os valores de  $\delta\lambda$  e  $\delta\nu$ .

Os parâmetros de penalidade afetam diretamente o condicionamento da matriz do sistema de equações em estudo devido à presença dos termos  $[A^t R_j A]_*$  e  $B^t R_i B$ .

O número de condição do sistema de equações a ser resolvido é um indicador da

facilidade de se encontrar a solução deste sistema em termos de convergência.

Pode-se, portanto, monitorar o número de condição deste sistema, e ao se atingir um certo limite superior, não mais se atualizar os parâmetros de penalidade (mantendo-os fixos).

Uma estimativa do número de condição de uma matriz pode ser obtida usando-se o estimador melhorado citado em [44]. Este estimador utiliza as matrizes  $U$  e  $D$  resultantes da fatoração da matriz do sistema, o que é conveniente nos algoritmos aqui formulados.

No caso de um sistema semi-positivo definido o número de condição é infinito, pois tem-se o menor autovalor da matriz nulo. Assim, para o caso do problema de contato, pode-se ter a situação em que o número de condição é inicialmente elevado (sistema semi-positivo definido ou próximo), decresce com o efeito dos termos  $[A^t R_j A]^*$  e  $B^t R_i B$ , e volta a crescer devido ao crescimento dos penalizadores  $R_j$  e  $R_i$  presentes nestes termos.

## 5.8 Considerações sobre critérios de convergência dos algoritmos

Os critérios de convergência (critérios de parada) mais usuais empregados em problemas de otimização, [6, 85], e também os utilizados nas soluções de problemas não lineares resolvidos através do MEF são brevemente apresentados a seguir.

**Ponto factível e que não mais apresente variação:**

- $h(\mathbf{u}^{k+1}) < \epsilon_1$  ,
- $-\epsilon_1 < c(\mathbf{u}^{k+1}) < \epsilon_1$  ,
- $\max |\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k| < \epsilon_1$  (cada um dos componentes).

No caso do problema de contato pode-se utilizar um mesmo valor para o parâmetro de parada, neste caso  $\epsilon_1$  ( $\epsilon_1$ ), já que as restrições e os deslocamentos possuem a mesma

dimensão.

Em termos relativos pode-se utilizar:

- $\frac{h(\mathbf{u}^{k+1})}{\|\mathbf{u}^k\|} < \epsilon_2,$
- $-\epsilon_2 < \frac{c(\mathbf{u}^{k+1})}{\|\mathbf{u}^k\|} < \epsilon_2,$
- $\frac{\max|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k|}{\|\mathbf{u}^k\|} < \epsilon_2$  ou  $\frac{\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|}{\|\mathbf{u}^k\|} < \epsilon_3.$

**Ponto factível e gradiente nulo da função Lagrangiana Aumentada:**

- $h(\mathbf{u}^{k+1}) < \epsilon_1,$
- $-\epsilon_1 < c(\mathbf{u}^{k+1}) < \epsilon_1,$
- $\max|\nabla\Phi_u(\mathbf{u}^{k+1})| < \epsilon_2$  (cada componente), ou  $\|\nabla\Phi_u(\mathbf{u}^{k+1})\| < \epsilon_3.$

**Ponto factível e comparação do gradiente da função Lagrangiana Aumentada com os esforços externos:**

- $h(\mathbf{u}^{k+1}) < \epsilon_1,$
- $-\epsilon_1 < c(\mathbf{u}^{k+1}) < \epsilon_1,$
- $\|\nabla\Phi_u(\mathbf{u}^{k+1})\| < \epsilon_2\|\mathbf{f}\|$  (com  $\epsilon_2 = 0.01$  ou  $\epsilon_2 = 0.001$  por exemplo).

Este critério é mencionado em [149].

**Ponto factível e forças desbalanceadas nodais:**

- $h(\mathbf{u}^{k+1}) < \epsilon_1,$
- $-\epsilon_1 < c(\mathbf{u}^{k+1}) < \epsilon_1,$
- $\max|\mathbf{f}_d| < \epsilon_2$  (cada componente),

onde as forças desbalanceadas nodais  $\mathbf{f}_d$  são calculadas através da contribuição de cada um dos elementos finitos da malha e através dos esforços externos, utilizando-se a melhor estimativa de  $\mathbf{u}^*$  como apresentado em [61].

As forças desbalanceadas fornecem uma indicação de quanto cada nó da malha está equilibrado. Assim, um critério relativo aos esforços externos pode ser mais adequado do ponto de vista físico, como por exemplo  $\max|\mathbf{f}_d| < \epsilon_3\|\mathbf{f}\|$  (cada componente) ou através do indicador  $\frac{\max|\mathbf{f}_d|}{\|\mathbf{f}\|}$ .

**Ponto factível e multiplicadores de Lagrange que não mais apresentem variação:**

- $h(\mathbf{u}^{k+1}) < \epsilon_1$ ,
- $-\epsilon_1 < c(\mathbf{u}^{k+1}) < \epsilon_1$ ,
- $\max|\boldsymbol{\lambda}^{k+1} - \boldsymbol{\lambda}^k| < \epsilon_2$  e  $\max|\boldsymbol{\nu}^{k+1} - \boldsymbol{\nu}^k| < \epsilon_2$  (cada componente),  
ou em termos relativos,
- $\frac{\max|\boldsymbol{\lambda}^{k+1} - \boldsymbol{\lambda}^k|}{\|\boldsymbol{\lambda}^k\|} < \epsilon_3$  e  $\frac{\max|\boldsymbol{\nu}^{k+1} - \boldsymbol{\nu}^k|}{\|\boldsymbol{\nu}^k\|} < \epsilon_3$  ou
- $\frac{\|\boldsymbol{\lambda}^{k+1} - \boldsymbol{\lambda}^k\|}{\|\boldsymbol{\lambda}^k\|} < \epsilon_4$  e  $\frac{\|\boldsymbol{\nu}^{k+1} - \boldsymbol{\nu}^k\|}{\|\boldsymbol{\nu}^k\|} < \epsilon_4$ .

Um exemplo da utilização deste tipo de critério é encontrado em [79].

## Capítulo 6

# Exemplos e resultados numéricos obtidos

### 6.1 Introdução

Apresenta-se neste capítulo alguns exemplos que procuram mostrar o comportamento numérico dos algoritmos estudados.

Os programas foram desenvolvidos em linguagem Fortran (compiladores Microsoft Fortran versão 5.1 e Microsoft Fortran PowerStation versão 1.0) e executados em um microcomputador HP Vectra 486/33VL. Os cálculos foram efetuados em dupla precisão.

A comparação dos algoritmos é feita em termos do número de iterações do método do Lagrangiano Aumentado, *lait*, e do tempo de processamento em segundos,  $\Delta t$ , para a obtenção da solução. Para que esta comparação tenha significado, o critério de convergência deve ser o mesmo para os algoritmos implantados. O critério utilizado nestes exemplos é aquele em que o ponto deve ser factível e não mais apresentar variação (primeiro critério comentado na seção 5.8).

Para uma verificação em termos de esforços desbalanceados são apresentados o máximo desbalanceamento nodal absoluto,  $\max|\mathbf{f}_d|$ , a norma dos esforços desbalanceados,  $\|\mathbf{f}_d\|$ , e também a norma dos esforços externos,  $\|\mathbf{f}\|$ , permitindo assim uma comparação em termos relativos.

É ainda apresentada uma estimativa do número de condição da matriz do sistema,

*cond*, na solução do problema segundo o estimador melhorado de Gill e Murray [44].

Conforme descrito no Capítulo 5, os algoritmos estudados para a situação de restrições lineares são:

- *A*: matriz do sistema atualizada conforme (5.7) e sem condensação estática;
- *B*: matriz do sistema atualizada conforme (5.7) e com condensação estática;
- *C*: matriz do sistema não atualizada conforme (5.26) e sem condensação estática;
- *D*: termos de rigidez de contato no membro direito conforme (5.28); e
- *E*: matriz do sistema atualizada a uma certa frequência conforme (5.29).

A implementação do MEF utilizada neste trabalho segue os conceitos apresentados em [58]. As malhas de elementos finitos utilizadas nos exemplos são compostas por elementos finitos isoparamétricos de quatro nós, sendo utilizados  $2 \times 2$  pontos de Gauss para a integração numérica nos elementos. Os elementos finitos triangulares representam um caso de degeneração de um elemento quadrangular que apresenta dois nós coincidentes.

## 6.2 Exemplo 1: semicilindro em contato com plano rígido

Este exemplo é de grande interesse pois possui solução analítica conhecida, possibilitando uma avaliação comparativa dos resultados obtidos através da formulação desenvolvida neste trabalho.

Seja um semicilindro longo com raio de 8.0, material homogêneo e isotrópico com módulo de elasticidade 1000.0 e coeficiente de Poisson 0.3, em contato sem atrito com uma superfície plana rígida, sujeito a um carregamento distribuído,  $q_v$ , conforme ilustrado na figura 6.1. Considerou-se o caso de estado plano de deformações.

Observa-se que o problema é simétrico, de tal forma que a malha de elementos finitos pode ser feita em apenas metade do semicilindro. Duas malhas foram utilizadas para a solução deste problema conforme mostrado nas figuras 6.2 e 6.3.

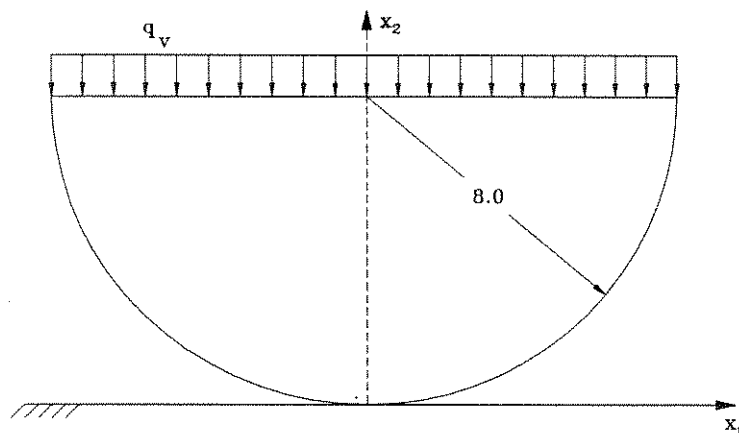


Figura 6.1: Semicilindro em contato com superfície rígida plana.

A malha menos refinada da figura 6.2 possui 65 elementos finitos, 71 nós, representando um problema de 133 graus de liberdade (variáveis de otimização). Definem-se 14 nós como os nós de contato em potencial, gerando-se 14 restrições de desigualdade.

A malha mais refinada da figura 6.3 possui 131 elementos finitos, 146 nós, representando um problema de 278 graus de liberdade (variáveis de otimização). Definem-se 19 nós como os nós de contato em potencial, gerando-se 19 restrições de desigualdade.

Para a comparação dos resultados obtidos com a solução analítica dois conceitos para o cálculo das tensões de contato foram utilizados:

- Tensões nodais calculadas da forma usual de elementos finitos (deslocamentos - deformações - tensões). No caso de nós que sejam comuns a mais de um elemento finito, a tensão é calculada como a média nodal dos elementos adjacentes.
- Tensões calculadas através dos esforços de contato (obtidos através dos multiplicadores de Lagrange), por exemplo com distribuição constante ao longo do lado dos elementos (região de influência do nó considerado) como ilustrado na figura 6.4.

Observa-se na figura 6.4, que as tensões são consideradas constantes ao longo

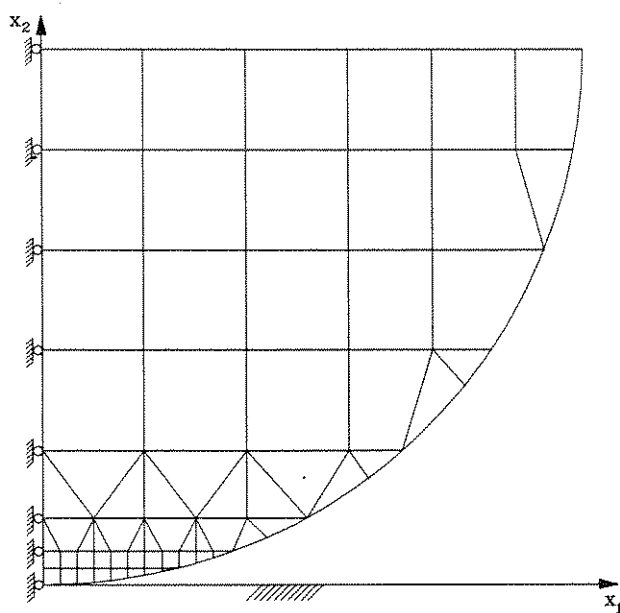


Figura 6.2: Malha de elementos finitos menos refinada - semicilindro.

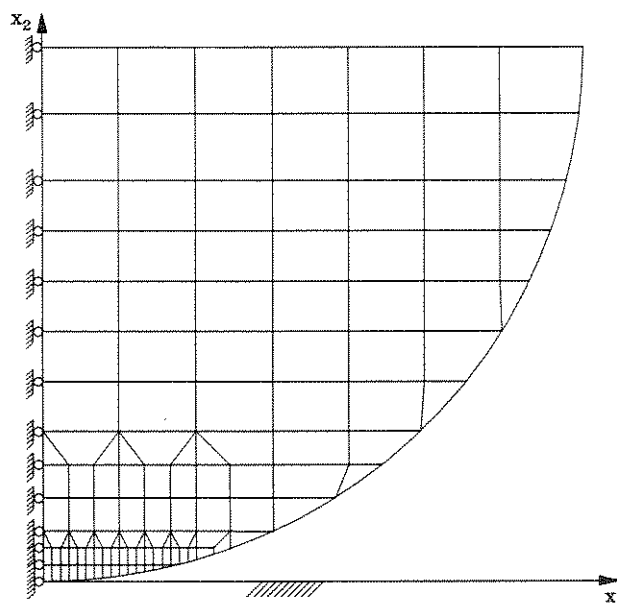


Figura 6.3: Malha de elementos finitos mais refinada - semicilindro.



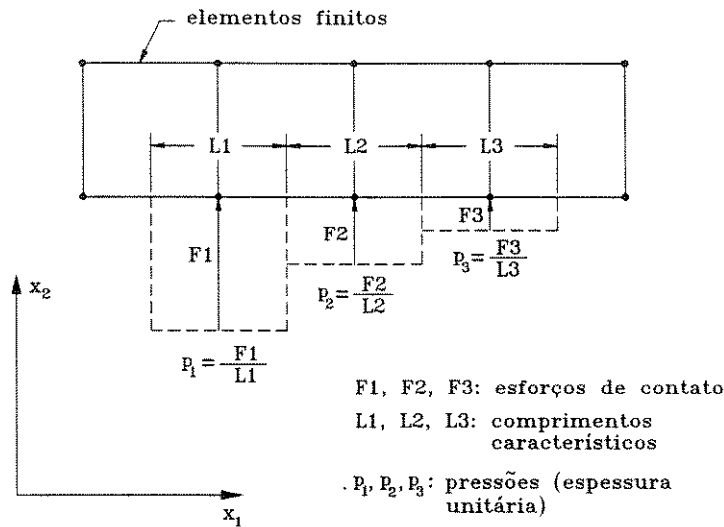


Figura 6.4: Aproximação das tensões de contato em função dos esforços nodais de contato.

dos comprimentos característicos, representando uma aproximação que se torna mais precisa para malhas mais refinadas.

Na figura 6.5 são mostrados os resultados obtidos segundo as duas formulações de cálculo mencionadas anteriormente para a malha menos refinada. Na figura 6.6 são apresentados os resultados obtidos para a malha mais refinada. Dois casos de carregamento,  $q_v = 30.0$  e  $q_v = 12.5$ , foram estudados e comparados com a solução analítica, [133], na sua representação gráfica usual. Foi empregado ao algoritmo  $B$  nestes casos.

Nestas figuras,  $x_1$  é a posição de contato,  $p(x_1)$  é a pressão de contato, e  $\beta' = \frac{1000.0}{2(1-0.3^2)}$  (calculado em função do módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson).

É possível verificar uma boa concordância entre os resultados obtidos e a solução analítica. Nota-se que os resultados são dependentes do grau de refinamento da malha de elementos finitos utilizado.

As figuras 6.7 e 6.8 mostram os contornos deformados para os dois casos de carregamentos calculados.

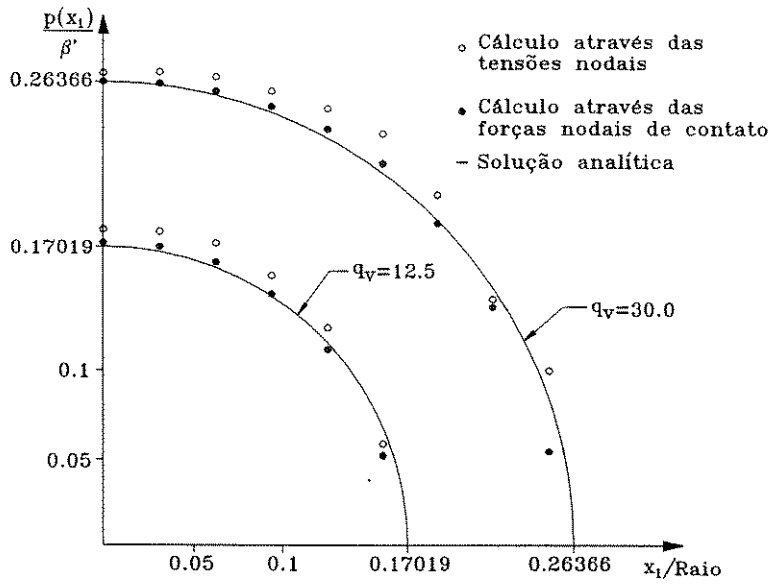


Figura 6.5: Resultados obtidos e solução analítica - malha menos refinada - semicilindro, algoritmo *B*.

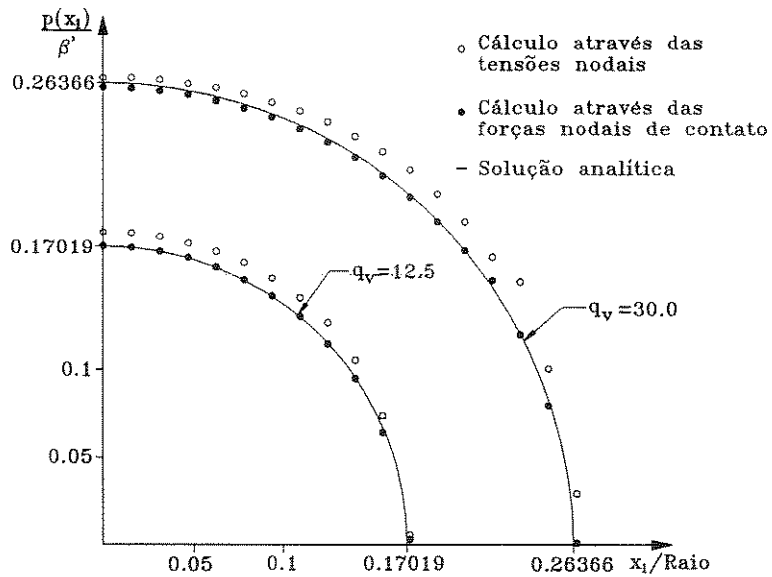


Figura 6.6: Resultados obtidos e solução analítica - malha mais refinada - semicilindro, algoritmo *B*.

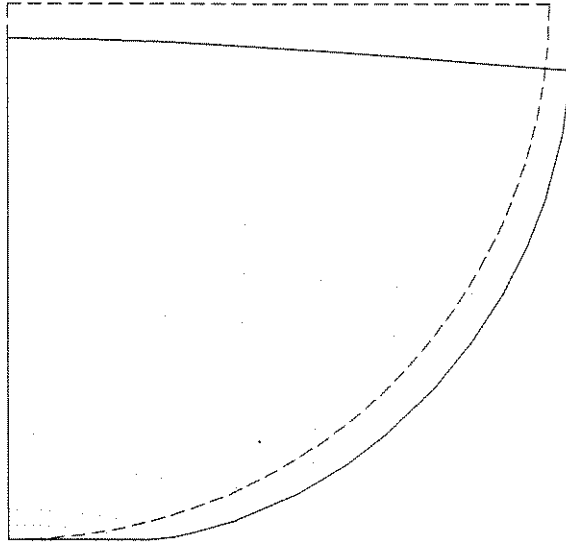


Figura 6.7: Contorno deformado para  $q_v = 30.0$  - malha mais refinada - semicilindro.

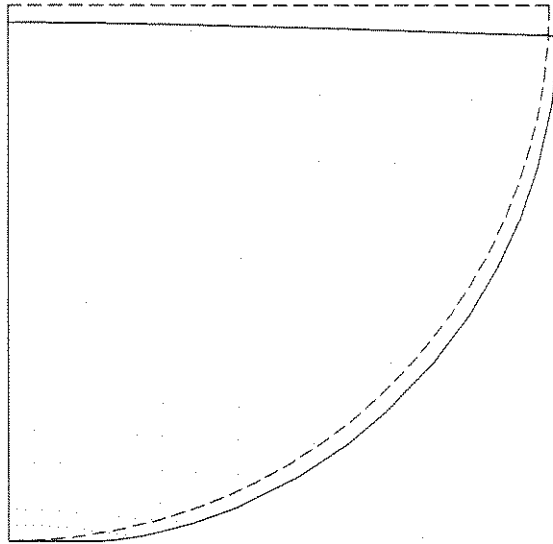


Figura 6.8: Contorno deformado para  $q_v = 12.5$  - malha mais refinada - semicilindro.

Na tabela 6.1 é apresentado o efeito do aumento do parâmetro de penalidade para o caso de  $q_v = 30.0$  (malha menos refinada), utilizando o algoritmo  $B$ . Para fins de comparação, a norma das forças externas é  $\|\mathbf{f}\| = 95.016$ .

$r_0$	$t$	$cond$	$l_{ait}$	$\Delta t$	$max \mathbf{f}_d $	$\ \mathbf{f}_d\ $
0.01	1.0	23.13	14352	924	$2.80 \times 10^{-6}$	$3.18 \times 10^{-6}$
0.1	1.0	21.52	2059	134	$3.92 \times 10^{-6}$	$4.46 \times 10^{-6}$
1.0	1.0	20.04	310	21	$5.04 \times 10^{-6}$	$5.79 \times 10^{-6}$
10.0	1.0	18.04	72	6	$5.26 \times 10^{-6}$	$6.47 \times 10^{-6}$
100.0	1.0	*	*	*	*	*

Tabela 6.1: Efeito do parâmetro de penalidade, semicilindro  $q_v = 30.0$  - malha menos refinada,  $\epsilon = 10^{-8}$ ,  $\delta\lambda = \delta\nu = 1.0$ , \* indica divergência.

Este problema não apresenta restrições quanto ao movimento de corpo rígido na direção  $x_2$  (sistema com matriz de rigidez semi-positivo-definida inicialmente) a menos das restrições de contato quando ativas. Uma alternativa numérica que facilita a obtenção da solução deste tipo de problema é adicionar um valor  $k_m$ , considerado pequeno, aos elementos da diagonal principal da matriz de rigidez do sistema, tornando-a estritamente positivo-definida. Este artifício pode ser interpretado fisicamente como molas de baixa rigidez ligando cada um dos nós da malha a pontos fixos, e impedindo o movimento de corpo rígido. Quanto menor o valor de  $k_m$ , mais se aproxima da situação real. Este valor deve ser determinado de forma a não comprometer significativamente os resultados obtidos. Uma forma de se verificar a influência deste valor é através de uma comparação entre os esforços externos aplicados e os esforços de contato gerados. A diferença entre estes valores é atribuída às “molas” de rigidez  $k_m$ , e deve ser suficientemente pequena, fornecendo uma medida da influência do valor  $k_m$  na solução do problema de contato. O efeito de  $k_m$  pode ser verificado também através das forças desbalanceadas.

Seja, por exemplo, o caso específico em que  $q_v = 30.0$ . O esforço total externo aplicado é  $q_v \times raio = 30.0 \times 8.0 = 240$  (para a metade do semicilindro).

Na tabela 6.2 são mostrados os valores dos desequilíbrios encontrados para alguns valores de  $k_m$  no caso da malha menos refinada. Nesta tabela,  $f_c$  representa o somatório dos esforços de contato. O valor do desequilíbrio relativo fornece uma informação percentual interessante para fins de análise do efeito de  $k_m$  na solução do problema.

$k_m$	$f_c$	$240 - f_c$	$\frac{240 - f_c}{240} \times 100$	$cond$	$la\grave{it}$	$\Delta t$	$max f_d $
0.00	240.0000	0.0000	0.000	20.04	310	21.2	$5.04 \times 10^{-6}$
0.01	239.7403	0.2597	0.108	20.03	310	21.2	$9.80 \times 10^{-3}$
0.10	237.4176	2.5821	1.076	19.81	323	22.0	$9.72 \times 10^{-2}$
1.00	215.5598	24.4402	10.183	18.66	348	23.6	$9.02 \times 10^{-1}$

Tabela 6.2: Efeito de  $k_m$  no equilíbrio, malha menos refinada, algoritmo  $B$ ,  $r_0 = 1.0$ ,  $t = 1.0$ ,  $\delta\lambda = 1.0$ ,  $\epsilon = 10^{-8}$ .

O valor de  $k_m$  tem influência no comportamento em termos de convergência dos algoritmos. Isto é esperado já que  $k_m$  altera diretamente o condicionamento numérico da matriz  $\mathbf{K}$  do sistema, e os parâmetros de penalidade podem não estar adequados ao valor de  $k_m$ . Para valores de  $k_m$  “baixos”, o sistema torna-se mais elástico e os parâmetros de penalidade não adequados (“elevados” por exemplo) podem causar a divergência (instabilidade) do algoritmo. Por outro lado, para valores de  $k_m$  “elevados”, a escolha de parâmetros de penalidade “baixos” pode conduzir a tempos de processamento e número de iterações maiores.

Salienta-se que, quando existem restrições violadas - ativas, os termos  $[\mathbf{A}^t \mathbf{R}_j \mathbf{A}]_*$  e  $\mathbf{B}^t \mathbf{R}_i \mathbf{B}$  (no caso de problema com atrito) são presentes, tornando o sistema positivo-definido. A adoção de  $k_m$  garante a obtenção de uma solução, mesmo para o caso de todas as restrições estarem não violadas, e especificamente no caso dos algoritmos  $C$  e  $D$ .

Uma comparação em termos de algumas características de convergência dos algoritmos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  é apresentada na tabela 6.3, onde se varia o parâmetro de critério de parada  $\epsilon$  e os parâmetros de penalidade  $r_0$  e  $t$ . O símbolo \* indica os casos em que o algoritmo divergiu. Os esquemas de controle dos multiplicadores e penalizadores (seção 5.7) e também o processo de busca unidimensional não foram empregados nos casos da tabela 6.3 para permitir uma comparação da natureza destes algoritmos no que se refere à convergência.

Alguns dados sobre o comportamento do algoritmo  $E$  são mostrados na tabela 6.4.

$r_0$	$t$	Alg.	$\epsilon = 10^{-6}$			$\epsilon = 10^{-5}$			$\epsilon = 10^{-4}$		
			<i>cond</i>	<i>lait</i>	$\Delta t$	<i>cond</i>	<i>lait</i>	$\Delta t$	<i>cond</i>	<i>lait</i>	$\Delta t$
0.1	1.0	A	22.43	1625	185	26.65	901	103	36.09	473	54
		B	22.43	1625	105	26.65	901	58	36.09	473	31
		C	*	*	*	*	*	*	*	*	*
		D	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.2	1.0	A	21.03	1134	129	24.03	642	73	31.89	318	37
		B	21.03	1134	73	24.03	642	42	31.89	318	21
		C	*	*	*	*	*	*	*	*	*
		D	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.2	0.0	A	674.55	35702	4063	674.55	25281	2878	674.55	16022	1824
		B	674.55	35702	2294	674.55	25281	1625	674.55	16022	1031
		C	841.91	35692	638	841.91	25274	452	841.91	16018	287
		D	841.91	35694	553	841.91	25276	392	841.91	16020	249
0.5	0.0	A	521.14	14284	1625	521.14	10115	1151	521.14	6411	730
		B	521.14	14284	918	521.14	10115	650	521.14	6411	412
		C	841.91	14274	255	841.91	10108	181	841.91	6407	115
		D	841.91	14274	221	841.91	10110	157	841.91	6408	100

Tabela 6.3: Comparação do comportamento dos algoritmos A, B, C e D ( $k_m = 0.1$ ).

<i>nfreq</i>	<i>cond</i>	<i>lait</i>	$\Delta t$	$\max f_d $
1	23.00	156	11.3	$1.94 \times 10^{-3}$
2	24.10	155	6.3	$5.67 \times 10^{-4}$
5	60.24	7733	147.2	$4.60 \times 10^{-3}$
10	143.96	17424	234.5	$6.10 \times 10^{-2}$
20	203.71	23646	252.8	$1.40 \times 10^{-1}$
50	355.93	39684	365.4	6.01

Tabela 6.4: Algoritmo E - semicilindro, malha menos refinada,  $q_v = 30.0$ ,  $r_0 = 1.0$ ,  $t = 1.0$ ,  $\delta\lambda = 1.0$ ,  $\epsilon = 10^{-5}$ .

### 6.3 Exemplo 2: bloco retangular em contato com plano rígido

Este exemplo é resolvido nos trabalhos de Barbosa [3] e Fancello [32]. É um exemplo interessante pois possui os três tipos de regiões de contato (adesão, deslizamento e separação) em função dos valores dos coeficientes de atrito.

Seja um bloco retangular com dimensões 40.0 e 80.0, material homogêneo e isotrópico, com módulo de elasticidade de 13000.0 e coeficiente de Poisson de 0.2, em contato com atrito com uma superfície plana rígida, sujeito aos carregamentos distribuídos horizontal e vertical,  $q_h$  e  $q_v$  respectivamente, conforme ilustrado na figura 6.9. Considerou-se o caso de estado plano de deformações. A espessura do bloco é unitária.

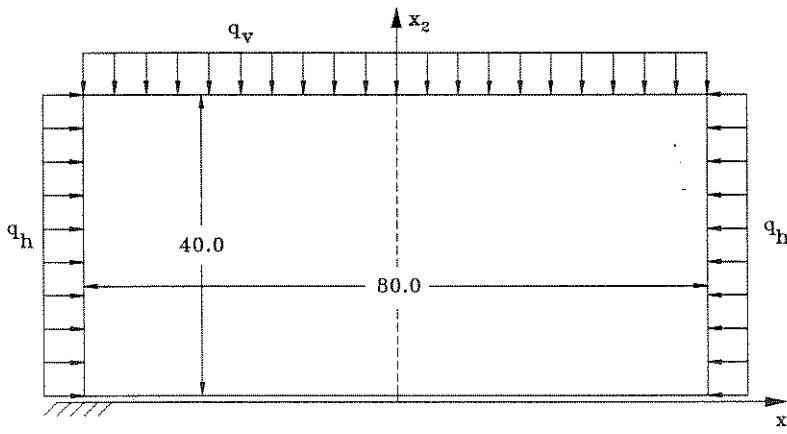


Figura 6.9: Bloco retangular em contato com superfície rígida plana.

Observa-se que o problema é simétrico, de tal forma que a malha de elementos finitos pode ser feita em apenas metade do bloco. Duas malhas foram utilizadas para a solução deste problema conforme mostrado nas figuras 6.10 e 6.11.

A malha menos refinada da figura 6.10 possui 72 elementos finitos, 86 nós, representando um problema de 164 graus de liberdade (variáveis de otimização). Definem-se 17 nós de contato em potencial, gerando-se 17 restrições de desigualdade e também 17 restrições de igualdade condicionalmente dependentes.

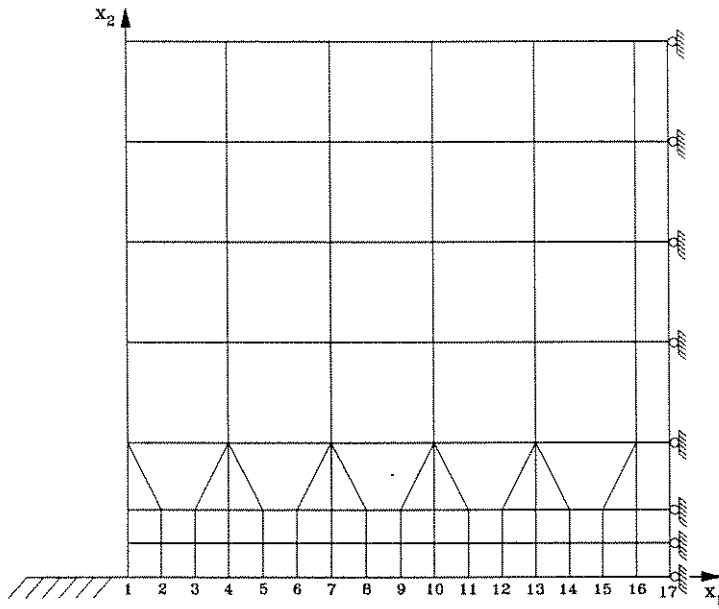


Figura 6.10: Malha menos refinada - bloco retangular.

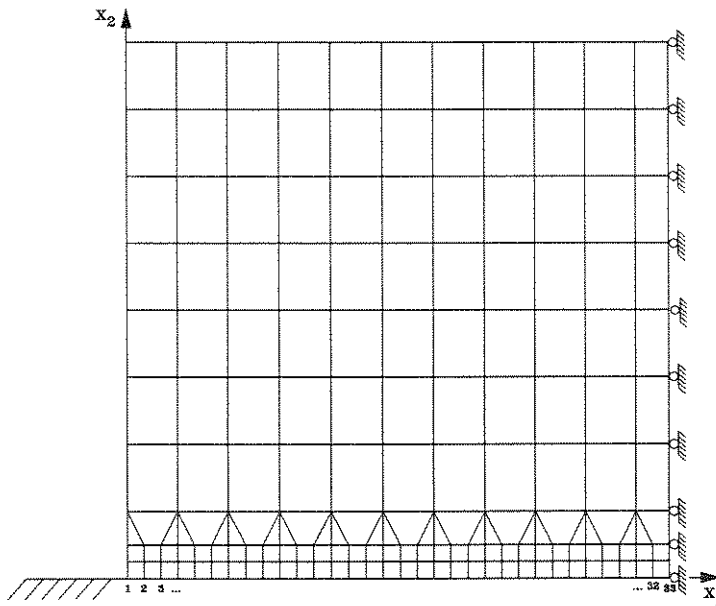


Figura 6.11: Malha mais refinada - bloco retangular.



A malha mais refinada da figura 6:11 possui 173 elementos finitos, 195 nós, representando um problema de 379 graus de liberdade (variáveis de otimização). Definem-se 33 nós de contato em potencial, gerando-se 33 restrições de desigualdade e também 33 restrições de igualdade condicionalmente dependentes.

Os resultados obtidos correspondem a um critério de parada de  $\epsilon = 10^{-8}$  utilizando o algoritmo *B*.

Dois casos em termos de carregamento e coeficientes de atrito foram estudados:

- caso 1:  $q_h = 15$ ,  $q_v = 5$ ,  $\mu = \mu_e = \mu_d = 1.0$ ,
- caso 2:  $q_h = 10$ ,  $q_v = 15$ ,  $\mu = \mu_e = \mu_d = 0.2$ .

Nas tabelas a seguir são apresentados os resultados encontrados aqui e os resultados obtidos em [3, 32]. Os nós de contato em potencial estão numerados sequencialmente da esquerda para a direita, e denota-se:

- $u_n$ : deslocamento normal,
- $u_t$ : deslocamento tangencial,
- $\|\mathbf{n}\|$ : intensidade do esforço normal,
- $\|\mathbf{t}\|$ : intensidade do esforço tangencial.

Na tabela 6.5 são apresentados os resultados para o caso 1 relativos à malha menos refinada. A observação desta tabela permite verificar as regiões de adesão (nós 13 a 17) e de deslizamento (nós 3 a 12), bem como regiões de separação entre os corpos (nós 1 e 2). O número de condição estimado na solução é  $cond = 15.52$ . Em termos de esforços desbalanceados tem-se  $max|\mathbf{f}_d| = 8.80 \times 10^{-3}$ ,  $\|\mathbf{f}_d\| = 8.84 \times 10^{-3}$ , e para fins de comparação  $\|\mathbf{f}\| = 247.96$  (norma dos esforços externos). Nesta tabela, os valores de  $u_n$  associados à [32] não aparecem por não terem sido apresentados na própria referência.

As figuras 6.12, 6.13 e 6.14 apresentam graficamente os resultados obtidos para este caso, comparados com os resultados das referências.

Nó	De acordo com [3]				De acordo com [32]			Obtido			
	$u_n$	$u_t$	$\ n\ $	$\ t\ $	$u_t$	$\ n\ $	$\ t\ $	$u_n$	$u_t$	$\ n\ $	$\ t\ $
1	0.0006	0.0286	0.	0.	.028585	0.	0.	.000587	.028718	0.000	0.000
2	0.0001	0.0258	0.	0.	.025845	0.	0.	.000058	.025947	0.000	0.000
3	0.	0.0229	3.44	3.44	.022844	3.517	3.517	.000000	.022915	3.437	3.437
4	0.	0.0198	6.08	6.06	.019812	6.107	6.107	.000000	.019857	6.061	6.061
5	0.	0.0169	7.92	7.92	.016865	8.011	8.011	.000000	.016893	7.936	7.936
6	0.	0.0140	9.36	9.36	.014029	9.341	9.341	.000000	.014061	9.399	9.399
7	0.	0.0113	10.60	10.60	.011364	10.698	10.698	.000000	.011375	10.624	10.624
8	0.	0.0088	11.72	11.72	.008822	11.661	11.661	.000000	.008848	11.743	11.743
9	0.	0.0065	12.78	12.78	.006505	12.878	12.878	.000000	.006502	12.823	12.823
10	0.	0.0043	13.86	13.86	.004338	13.803	13.803	.000000	.004364	13.881	13.881
11	0.	0.0025	15.04	15.04	.002504	15.132	15.132	.000000	.002471	15.084	15.084
12	0.	0.0009	16.56	16.56	.000899	16.436	16.436	.000000	.000913	16.841	16.841
13	0.	0.	19.60	17.14	.000048	19.460	19.052	.000000	.000000	19.199	16.679
14	0.	0.	20.76	8.96	.000022	20.645	8.902	.000000	.000000	20.680	8.838
15	0.	0.	20.88	5.38	.000014	20.692	5.530	.000000	.000000	20.891	5.457
16	0.	0.	20.94	2.56	.000006	20.833	2.656	.000000	.000000	20.931	2.564
17	0.	0.	10.46	0.	.000000	10.686	0.	.000000	.000000	10.480	0.000

Tabela 6.5: Resultados - malha menos refinada - bloco retangular - caso 1 ( $r_0 = 1.0$ ,  $t = 1.0$ ,  $\delta\lambda = \delta\nu = 1.0$ , algoritmo *B*).

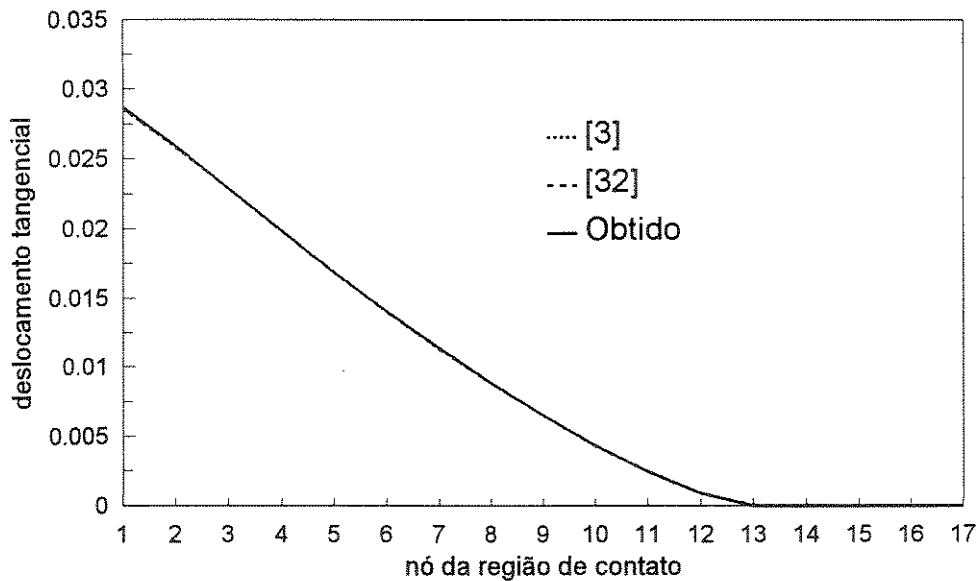


Figura 6.12: Deslocamento tangencial no contato - bloco retangular - caso 1 - malha menos refinada.

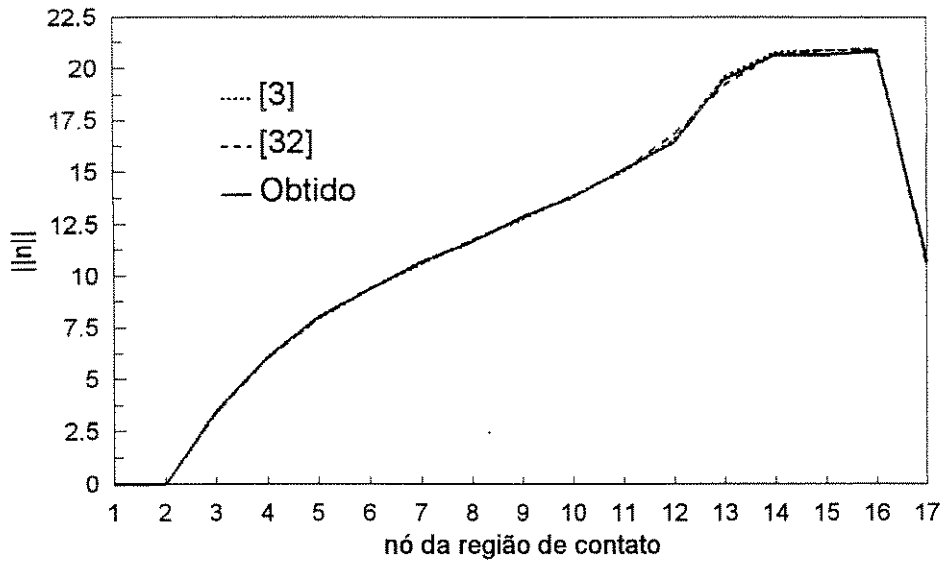


Figura 6.13: Força normal no contato - bloco retangular - caso 1 - malha mais refinada.

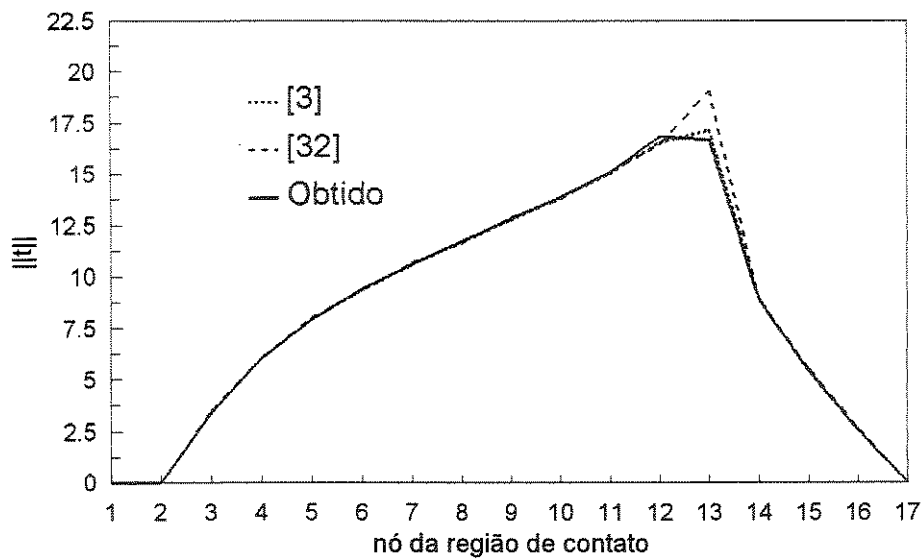


Figura 6.14: Força tangencial no contato - bloco retangular - caso 1 - malha menos refinada.

Na tabela 6.6 são apresentados os resultados para o caso 2 relativos à malha menos refinada. A observação desta tabela permite verificar as regiões de adesão (nós 11 a 17) e de deslizamento (nós 1 a 10). O número de condição estimado na solução é  $cond = 14.38$ . Em termos de esforços desbalanceados tem-se  $max|f_d| = 3.57 \times 10^{-5}$ ,  $\|f_d\| = 4.23 \times 10^{-5}$ , e para fins de comparação  $\|f\| = 290.07$  (norma dos esforços externos).

Nó	De acordo com [3]			De acordo com [32]			Obtido		
	$u_t$	$\ n\ $	$\ t\ $	$u_t$	$\ n\ $	$\ t\ $	$u_t$	$\ n\ $	$\ t\ $
1	.00776	7.28	1.46	.0078391	6.619	1.324	.007879	9.190	1.838
2	.00633	27.76	5.56	.0063982	27.760	5.552	.006432	27.401	5.480
3	.00515	32.06	6.42	.0052075	32.097	6.419	.005229	31.902	6.380
4	.00409	34.28	6.86	.0041449	34.295	6.859	.004157	34.210	6.842
5	.00314	35.72	7.14	.0031970	35.728	7.146	.003192	35.725	7.145
6	.00228	36.80	7.36	.0023251	36.794	7.359	.002327	36.819	7.364
7	.00153	37.68	7.54	.0015773	37.668	7.534	.001560	37.690	7.538
8	.00088	38.48	7.70	.0009073	38.443	7.689	.000901	38.477	7.695
9	.00036	39.26	7.86	.0004073	39.247	7.849	.000372	39.289	7.858
10	.00003	40.34	8.06	.0000434	40.303	8.061	.000020	40.266	8.053
11	0.0	41.04	5.32	.0000146	40.942	5.834	.000000	40.979	5.348
12	0.0	41.22	3.98	.0000096	41.191	3.848	.000000	41.223	4.014
13	0.0	41.36	3.00	.0000077	41.311	3.074	.000000	41.373	3.007
14	0.0	41.48	2.16	.0000051	41.447	2.033	.000000	41.498	2.148
15	0.0	41.54	1.40	.0000040	41.481	1.586	.000000	41.565	1.425
16	0.0	41.60	0.68	.0000021	41.478	0.821	.000000	41.589	0.687
17	0.0	20.80	0.00	.0000000	21.319	0.000	.000000	20.804	0.000

Tabela 6.6: Resultados - malha menos refinada - bloco retangular - caso 2 ( $r_0 = 1.0$ ,  $t = 1.0$ ,  $\delta\lambda = \delta\nu = 1.0$ , algoritmo *B*).

As figuras 6.15, 6.16 e 6.17 apresentam uma comparação dos resultados obtidos com os resultados das referências.

Na tabela 6.7 são apresentados os resultados para o caso 1 relativos à malha mais refinada. A observação desta tabela permite verificar as regiões de adesão (nós 25 a 33) e de deslizamento (nós 4 a 24), bem como a região de separação dos corpos (nós 1 a 3). O número de condição estimado na solução é  $cond = 20.69$ . Em termos de esforços desbalanceados tem-se  $max|f_d| = 3.74 \times 10^{-2}$ ,  $\|f_d\| = 4.30 \times 10^{-2}$ , e para fins de comparação  $\|f\| = 207.57$  (norma dos esforços externos).

As figuras 6.18, 6.19 e 6.20 apresentam uma comparação dos resultados obtidos com os resultados das referências de forma gráfica.

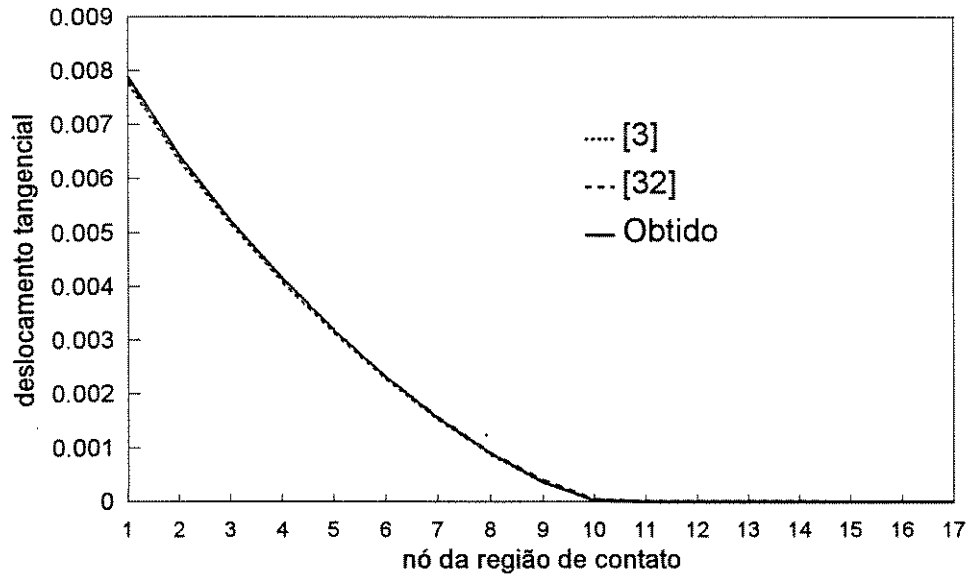


Figura 6.15: Deslocamento tangencial no contato - bloco retangular - caso 2 - malha menos refinada.

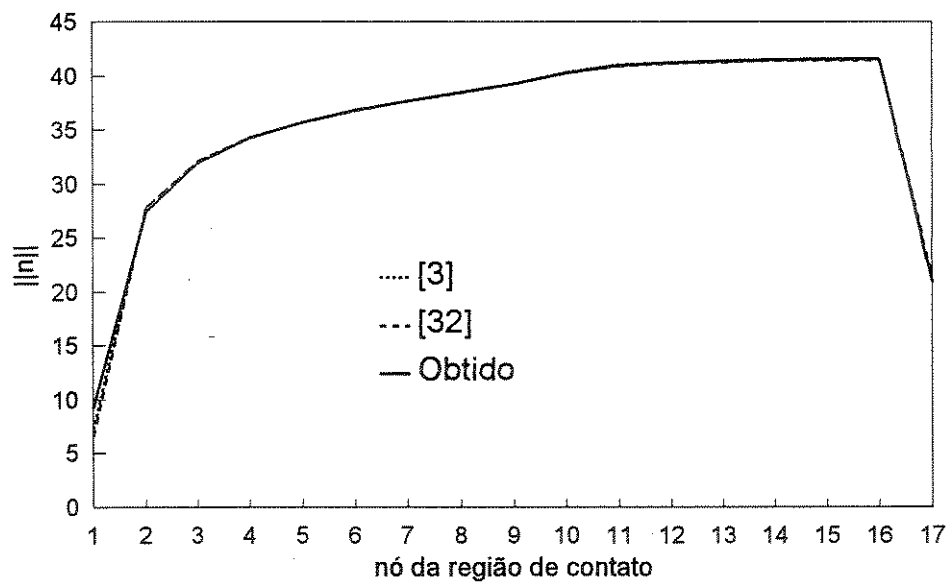


Figura 6.16: Força normal no contato - bloco retangular - caso 2 - malha menos refinada.

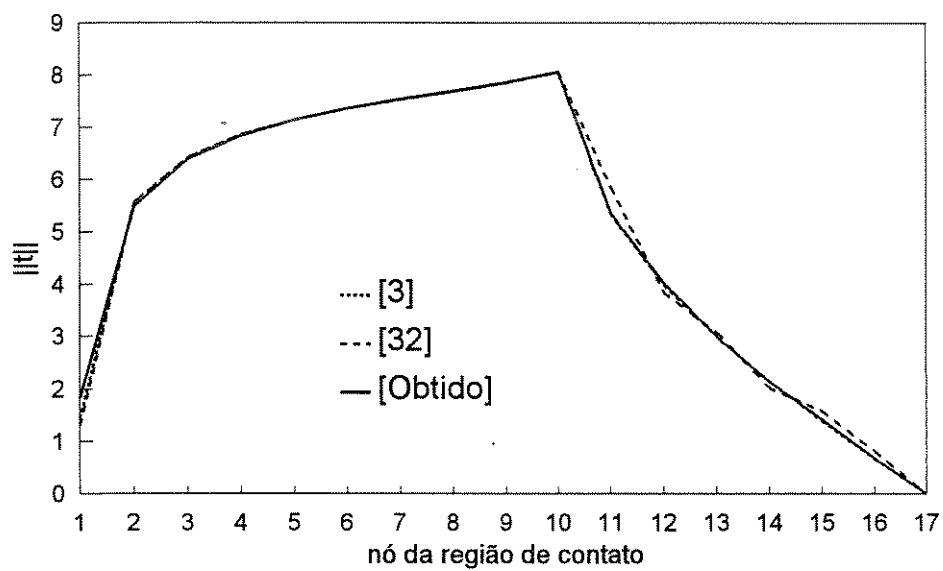


Figura 6.17: Força tangencial no contato - bloco retangular - caso 2 - malha menos refinada.

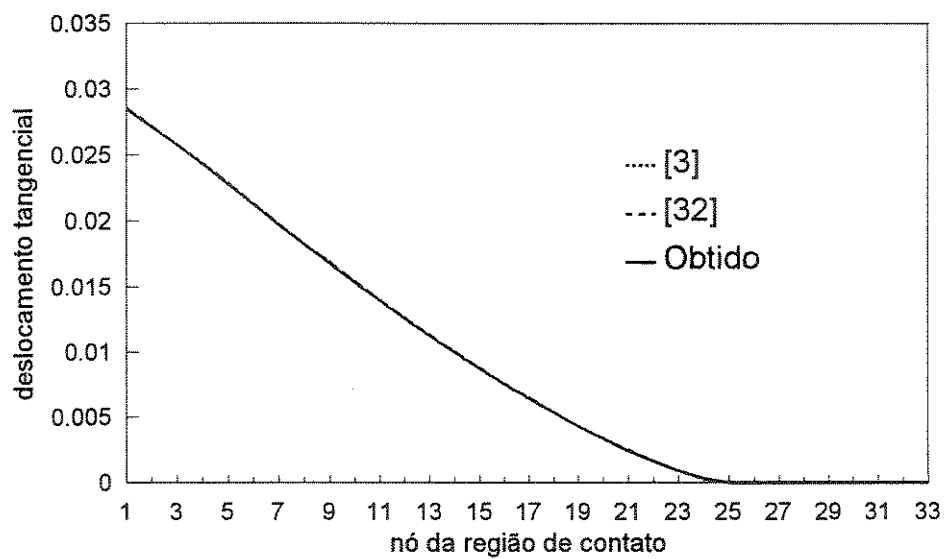


Figura 6.18: Deslocamento tangencial no contato - bloco retangular - caso 1 - malha mais refinada.

Nó	Segundo [3]				Segundo [32]			Obtido			
	$u_n$	$u_t$	$\ n\ $	$\ t\ $	$u_t$	$\ n\ $	$\ t\ $	$u_n$	$u_t$	$\ n\ $	$\ t\ $
1	0.0006	0.0286	0.	0.	.028585	0.	0.	.000624	.028512	0.000	0.000
2	0.0003	0.0272	0.	0.	.027217	0.	0.	.000336	.027134	0.000	0.000
3	0.0001	0.0258	0.	0.	.025845	0.	0.	.000098	.025754	0.000	0.000
4	0.	0.0244	0.66	0.66	.024379	.5483	0.548	.000000	.024300	0.667	0.667
5	0.	0.0229	1.72	1.72	.022844	1.759	1.759	.000000	.022770	1.743	1.743
6	0.	0.0213	2.46	2.46	.021330	2.572	2.572	.000000	.021234	2.475	2.475
7	0.	0.0198	3.04	3.03	.019812	3.053	3.053	.000000	.019716	3.059	3.059
8	0.	0.0183	3.53	3.53	.018307	3.557	3.557	.000000	.018224	3.559	3.559
9	0.	0.0169	3.96	3.96	.016865	4.006	4.006	.000000	.016763	3.985	3.985
10	0.	0.0154	4.34	4.34	.015436	4.306	4.306	.000000	.015335	4.364	4.364
11	0.	0.0140	4.68	4.68	.014029	4.671	4.671	.000000	.013941	4.713	4.713
12	0.	0.0127	5.00	5.00	.012656	5.087	5.087	.000000	.012584	5.031	5.031
13	0.	0.0113	5.30	5.30	.011364	5.349	5.349	.000000	.011266	5.330	5.330
14	0.	0.0101	5.59	5.59	.010077	5.502	5.502	.000000	.009989	5.616	5.616
15	0.	0.0088	5.86	5.86	.008822	5.830	5.830	.000000	.008754	5.891	5.891
16	0.	0.0076	6.13	6.13	.007613	6.250	6.250	.000000	.007566	6.156	6.156
17	0.	0.0065	6.39	6.39	.006505	6.439	6.439	.000000	.006425	6.419	6.419
18	0.	0.0054	6.66	6.66	.005398	6.529	6.529	.000000	.005337	6.683	6.683
19	0.	0.0043	6.93	6.93	.004338	6.902	6.902	.000000	.004307	6.948	6.948
20	0.	0.0034	7.21	7.21	.003347	7.426	7.426	.000000	.003337	7.231	7.231
21	0.	0.0025	7.52	7.52	.002504	7.566	7.566	.000000	.002438	7.549	7.549
22	0.	0.0016	7.86	7.86	.001656	7.619	7.617	.000000	.001623	7.885	7.885
23	0.	0.0009	8.28	8.28	.000899	8.218	8.218	.000000	.000906	8.286	8.286
24	0.	0.0003	8.93	8.93	.000293	9.294	9.294	.000000	.000323	8.919	8.919
25	0.	0.	9.80	8.57	.000048	9.730	9.526	.000000	.000000	9.760	8.603
26	0.	0.	10.31	5.75	.000025	10.010	4.992	.000000	.000000	10.255	5.756
27	0.	0.	10.38	4.48	.000022	10.323	4.451	.000000	.000000	10.330	4.509
28	0.	0.	10.41	3.52	.000019	10.450	3.835	.000000	.000000	10.364	3.531
29	0.	0.	10.44	2.69	.000014	10.346	2.765	.000000	.000000	10.390	2.703
30	0.	0.	10.46	1.96	.000009	10.417	1.691	.000000	.000000	10.403	1.977
31	0.	0.	10.47	1.28	.000006	10.417	1.328	.000000	.000000	10.419	1.271
32	0.	0.	10.47	0.64	.000004	10.410	0.828	.000000	.000000	10.425	0.639
33	0.	0.	5.23	0.	.000000	5.343	0.	.000000	.000000	5.209	0.000

Tabela 6.7: Resultados - malha refinada - bloco retangular - caso 1, ( $r_0 = 10.0$ ,  $t = 1.0$ ,  $\delta\lambda = \delta\nu = 1.0$ , algoritmo  $B$ ).

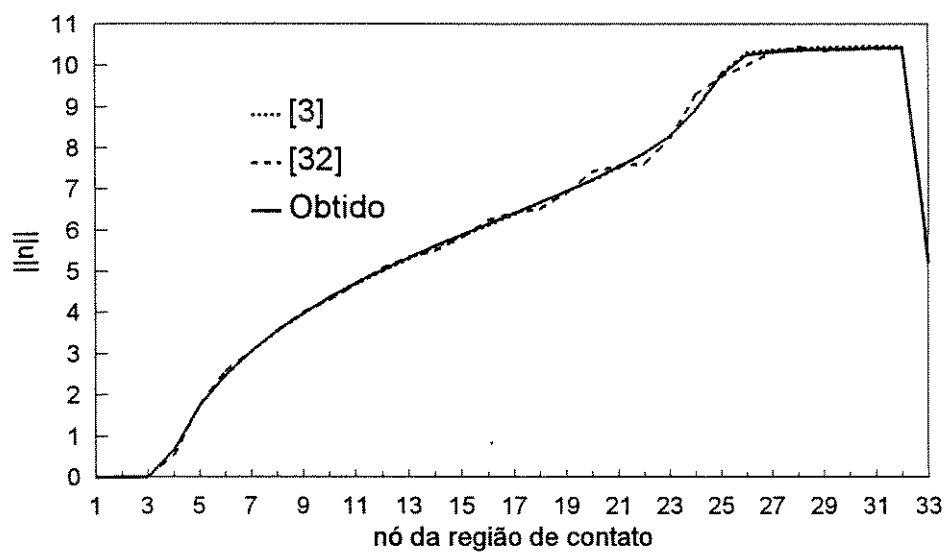


Figura 6.19: Força normal no contato - bloco retangular - caso 1 - malha mais refinada.

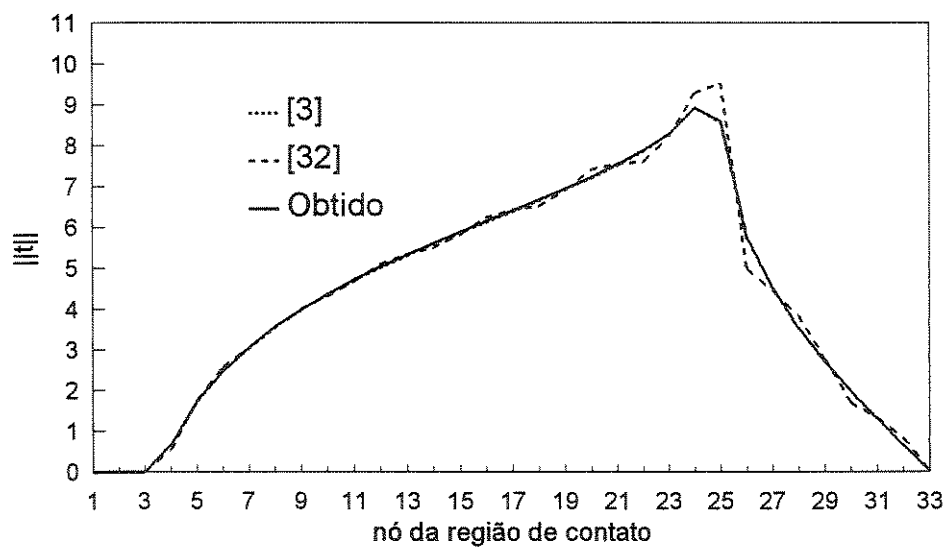


Figura 6.20: Força tangencial no contato - bloco retangular - caso 1 - malha mais refinada.



Nó	Obtido em [3]			Obtido em [32]			Obtido		
	$u_t$	$\ n\ $	$\ t\ $	$u_t$	$\ n\ $	$\ t\ $	$u_t$	$\ n\ $	$\ t\ $
1	.00776	3.64	0.73	.0078391	3.310	0.662	.007770	3.646	0.729
2	.00699	11.50	2.30	.0070740	11.927	2.385	.007001	11.492	2.298
3	.00633	13.88	2.78	.0063982	13.880	2.776	.006332	13.844	2.769
4	.00572	15.17	3.03	.0057696	15.176	3.035	.005717	15.163	3.033
5	.00515	16.03	3.21	.0052075	16.048	3.210	.005142	16.054	3.211
6	.00461	16.65	3.33	.0046613	16.678	3.336	.004597	16.685	3.337
7	.00409	17.14	3.43	.0041449	17.148	3.430	.004085	17.170	3.434
8	.00360	17.53	3.51	.0036516	17.566	3.513	.003596	17.566	3.513
9	.00314	17.86	3.57	.0031970	17.864	3.573	.003131	17.893	3.579
10	.00270	18.15	3.63	.0027460	18.110	3.622	.002691	18.176	3.635
11	.00228	18.40	3.68	.0023251	18.397	3.679	.002275	18.431	3.686
12	.00189	18.63	3.73	.0019310	18.680	3.736	.001884	18.659	3.732
13	.00153	18.84	3.77	.0015773	18.834	3.767	.001519	18.870	3.774
14	.00119	19.04	3.81	.0012235	18.967	3.793	.001181	19.071	3.814
15	.00088	19.24	3.85	.0009073	19.221	3.844	.000873	19.265	3.853
16	.00060	19.43	3.89	.0006289	19.511	3.902	.000597	19.455	3.891
17	.00036	19.63	3.93	.0004073	19.624	3.925	.000358	19.654	3.931
18	.00016	19.86	3.97	.0001859	19.757	3.951	.000162	19.884	3.977
19	.00003	20.17	4.03	.0000434	20.151	4.030	.000027	20.181	4.036
20	0.0	20.42	3.23	.0000168	20.458	3.358	.000000	20.425	3.249
21	0.0	20.52	2.66	.0000146	20.471	2.917	.000000	20.525	2.681
22	0.0	20.57	2.30	.0000111	20.539	2.214	.000000	20.571	2.315
23	0.0	20.61	1.99	.0000096	20.596	1.924	.000000	20.606	2.015
24	0.0	20.65	1.73	.0000088	20.654	1.755	.000000	20.634	1.756
25	0.0	20.68	1.50	.0000077	20.655	1.544	.000000	20.661	1.518
26	0.0	20.71	1.28	.0000055	20.703	1.111	.000000	20.684	1.300
27	0.0	20.74	1.08	.0000051	20.723	1.017	.000000	20.702	1.098
28	0.0	20.76	0.88	.0000049	20.750	0.997	.000000	20.717	0.902
29	0.0	20.77	0.70	.0000040	20.741	0.793	.000000	20.728	0.714
30	0.0	20.79	0.52	.0000025	20.766	0.505	.000000	20.734	0.534
31	0.0	20.80	0.34	.0000021	20.739	0.411	.000000	20.741	0.347
32	0.0	20.80	0.17	.0000014	20.654	0.279	.000000	20.744	0.177
33	0.0	10.40	0.00	.0000000	10.659	0.000	.000000	10.372	0.000

Tabela 6.8: Resultados - malha refinada - bloco retangular - caso 2 ( $r_0 = 10.0$ ,  $t = 1.0$ ,  $\delta\lambda = \delta\nu = 1.0$ , algoritmo  $B$ ).

Na tabela 6.8 são apresentados os resultados para o caso 2 relativos à malha mais refinada. A observação desta tabela permite verificar as regiões de adesão (nós 20 a 33) e de deslizamento (nós 1 a 19). O número de condição estimado na solução é  $cond = 17.03$ . Em termos de esforços desbalanceados tem-se  $max|f_d| = 7.62 \times 10^{-5}$ ,  $\|f_d\| = 9.11 \times 10^{-5}$ , e para fins de comparação  $\|f\| = 222.25$  (norma dos esforços externos).

As figuras 6.21, 6.22 e 6.23 apresentam uma comparação dos resultados obtidos com os resultados das referências de forma gráfica.

As figuras 6.24 e 6.25 mostram os contornos deformados para os casos 1 e 2 para a malha mais refinada.

Na tabela 6.9 é são apresentados alguns resultados dos algoritmos *A*, *B*, *C* e *D* para o caso 1 (malha menos refinada) sem a utilização de busca unidimensional.

$r_0$	$t$	Alg.	$cond$	$l_{ait}$	$\Delta t$	$max f_d $	$\ f_d\ $
1.0	0.0	<i>A</i>	411.42	21383	4521	$4.22 \times 10^{-2}$	$1.66 \times 10^{-1}$
1.0	0.0	<i>B</i>	411.52	21383	2074	$4.22 \times 10^{-2}$	$1.66 \times 10^{-1}$
1.0	0.0	<i>C</i>	513.69	21381	596	$4.22 \times 10^{-2}$	$1.66 \times 10^{-1}$
1.0	0.0	<i>D</i>	513.69	21384	512	$4.22 \times 10^{-2}$	$1.66 \times 10^{-1}$

Tabela 6.9: Alguns resultados dos algoritmos *A*, *B*, *C* e *D*, bloco retangular - caso 1 - malha menos refinada,  $\epsilon = 10^{-8}$ ,  $\delta\lambda = \delta\nu = 100.0$ .

Na tabela 6.10 é apresentado o efeito do aumento do parâmetro de penalidade para o caso 1 (malha menos refinada), utilizando o algoritmo *B*.

$r_0$	$t$	$cond$	$l_{ait}$	$\Delta t$	$max f_d $	$\ f_d\ $
0.01	1.0	16.44	35638	3624	$1.32 \times 10^{-4}$	$1.33 \times 10^{-4}$
0.1	1.0	15.46	5175	530	$1.12 \times 10^{-3}$	$1.13 \times 10^{-3}$
1.0	1.0	15.52	823	86	$8.80 \times 10^{-3}$	$8.84 \times 10^{-3}$
10.0	1.0	21.63	228	28	$5.68 \times 10^{-2}$	$5.71 \times 10^{-2}$
100.0	1.0	14.70	67	15	$3.26 \times 10^{-1}$	$3.27 \times 10^{-1}$
1000.0	1.0	*	*	*	*	*

Tabela 6.10: Efeito do parâmetro de penalidade, bloco retangular - caso 1 - malha menos refinada,  $\epsilon = 10^{-8}$ ,  $\delta\lambda = \delta\nu = 1.0$ , \* indica divergência.

Na tabela 6.11 é apresentado o comportamento do algoritmo *E* para o caso 1 (malha menos refinada).

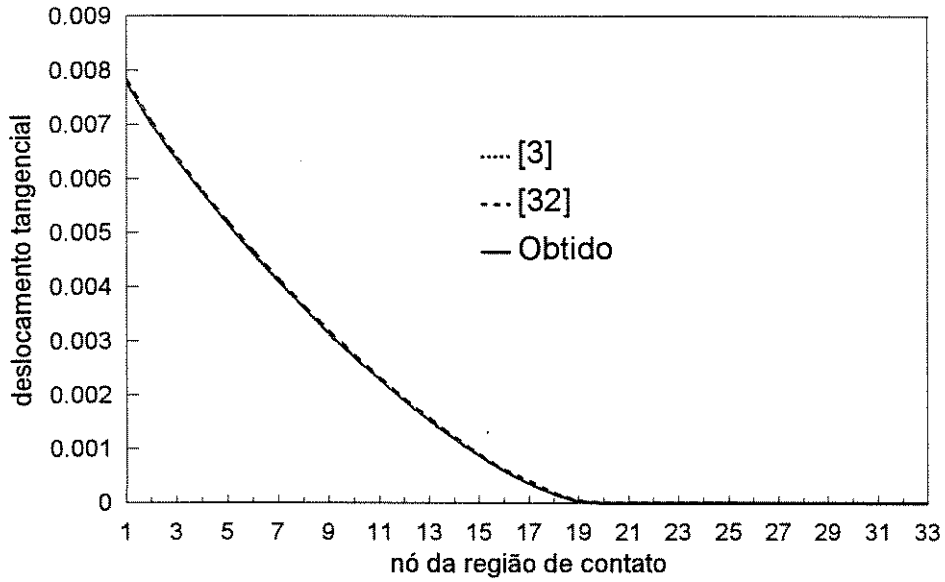


Figura 6.21: Deslocamento tangencial no contato - bloco retangular - caso 2 - malha mais refinada.

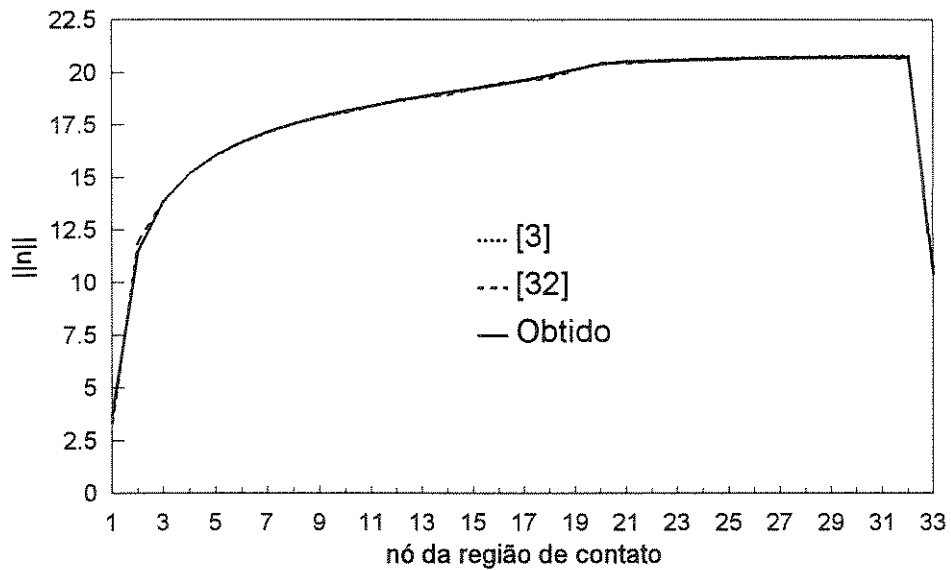


Figura 6.22: Força normal no contato - bloco retangular - caso 2 - malha mais refinada.

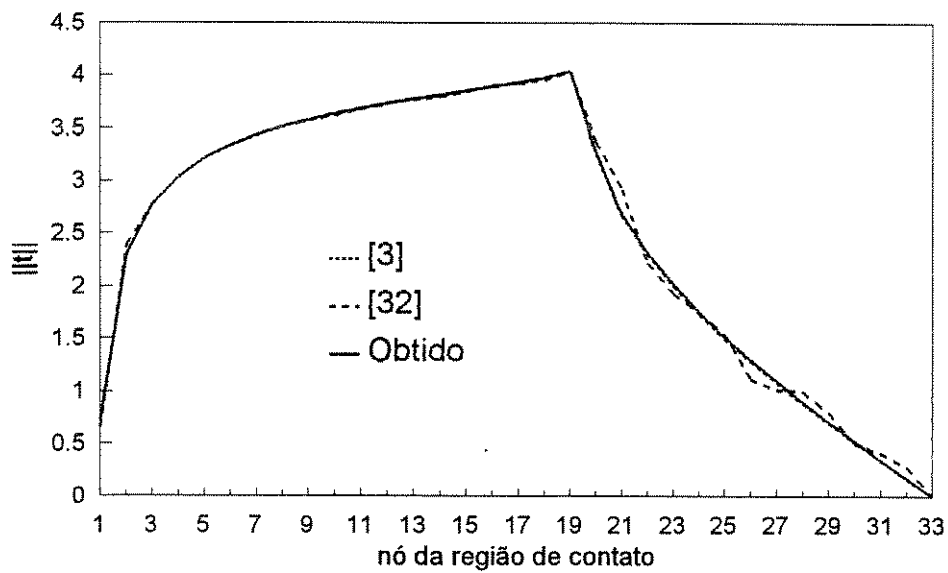


Figura 6.23: Força tangencial no contato - bloco retangular - caso 2 - malha mais refinada.

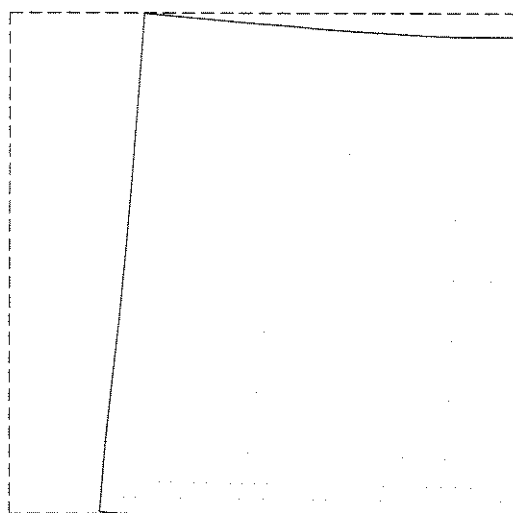


Figura 6.24: Contorno deformado - bloco retangular - malha mais refinada - caso 1, deslocamentos ampliados 250 vezes.

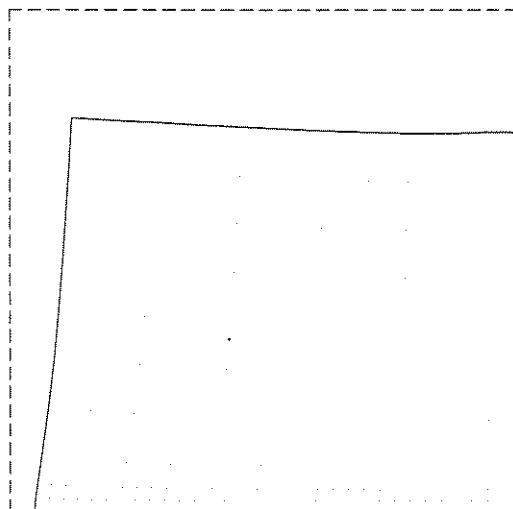


Figura 6.25: Contorno deformado - bloco retangular - malha mais refinada - caso 2, deslocamentos ampliados 250 vezes.

$nfreq$	$cond$	$lait$	$\Delta t$	$max f_d $
1	15.51	823	85	$8.80 \times 10^{-3}$
5	24.51	1468	43	$8.83 \times 10^{-3}$
10	24.50	1475	30	$8.82 \times 10^{-3}$
20	13.89	1195	20	$9.99 \times 10^{-3}$
100	16.33	731	14	$3.24 \times 10^{-2}$
200	17.00	731	20	$6.01 \times 10^{-2}$
500	17.75	818	39	$1.37 \times 10^{-1}$
1000	12.55	1190	78	$2.50 \times 10^{-1}$
2000	22.15	2112	170	$5.21 \times 10^{-2}$
5000	*	*	*	*

Tabela 6.11: Algoritmo  $E$ , bloco retangular - caso 1 - malha menos refinada,  $\epsilon = 10^{-8}$ ,  $r_0 = 1.0$ ,  $t = 1.0$ ,  $\delta\lambda = \delta\nu = 1.0$ , \* indica divergência.

### 6.4 Exemplo 3: encaixe de dois corpos elásticos

Este exemplo considera o problema de contato com atrito entre dois corpos elásticos e foi extraído, para fins de comparação, do trabalho de Fancello, [32].

Sejam os corpos *A* e *B* em contato formando um encaixe como mostrado na figura 6.26. As dimensões destes corpos são apresentadas nesta figura em milímetros. A espessura dos corpos é de 6.4 mm.

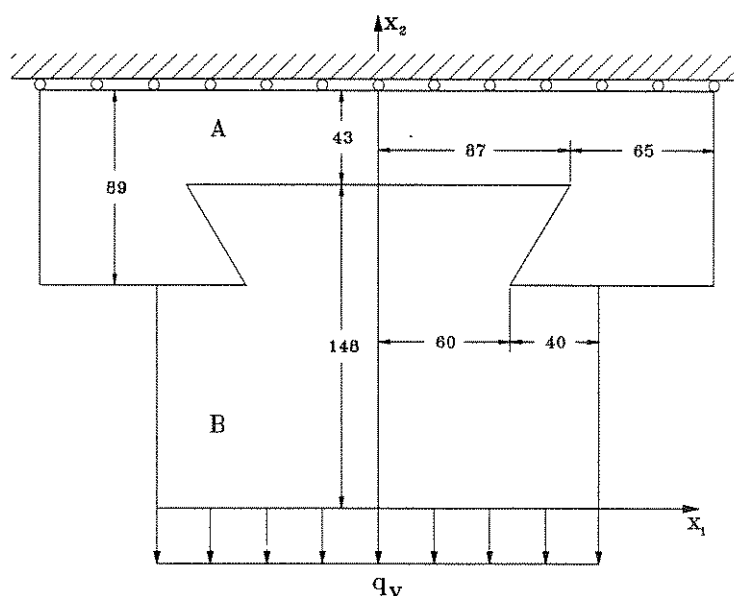


Figura 6.26: Encaixe de corpos elásticos.

Os corpos possuem módulo de elasticidade de  $240\text{N/mm}^2$  e coeficiente de Poisson de 0.38. Considerou-se o caso de estado plano de tensões.

A figura 6.26 mostra também que o corpo *A* é vinculado no seu contorno superior, e um carregamento vertical  $q_v = 0.0265625\text{N/mm}^2$  (correspondente a um total de  $17\text{N}$ ) é aplicado no contorno inferior do corpo *B*. O coeficiente de atrito entre os corpos é  $\mu = 0.2$  (estático e dinâmico).

Nota-se que o problema é simétrico, de tal forma que a malha de elementos finitos pode ser feita em apenas metade dos corpos como mostrado na figura 6.27.

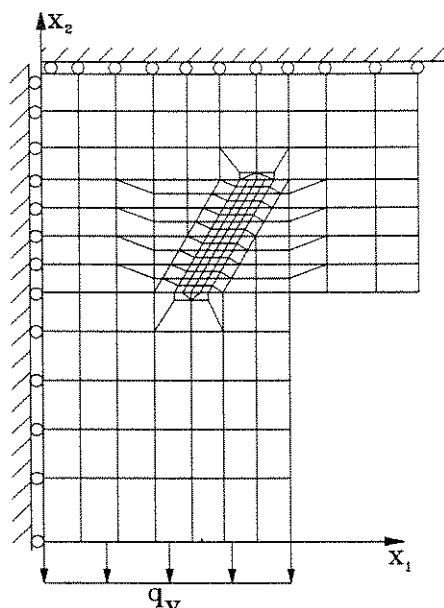


Figura 6.27: Malha de elementos finitos - encaixe de corpos elásticos.

Esta malha possui 229 elementos finitos, 266 nós, representando um problema de 507 graus de liberdade (variáveis de otimização). São definidos 17 nós de contato em potencial, gerando-se 17 restrições de desigualdade e também 17 restrições de igualdade associadas.

Os resultados encontrados correspondem a um critério de parada de  $\epsilon = 10^{-8}$ .

Na tabela 6.12 são apresentados os resultados obtidos neste trabalho e os resultados obtidos em [32] para comparação. Os nós de contato em potencial são numerados sequencialmente na linha de contato da malha no sentido de baixo para cima. Nesta tabela denota-se:

- $u_{n,A}$ : deslocamento normal do corpo  $A$ ,
- $u_{t,A}$ : deslocamento tangencial do corpo  $A$ ,
- $u_{n,B}$ : deslocamento normal do corpo  $B$ ,
- $u_{t,B}$ : deslocamento tangencial do corpo  $B$ .

As tensões correspondentes são apresentadas na tabela 6.13, onde denota-se:

Nó	Segundo [32]				Obtido			
	$u_{n,A}$	$u_{t,A}$	$u_{n,B}$	$u_{t,B}$	$u_{n,A}$	$u_{t,A}$	$u_{n,B}$	$u_{t,B}$
1	-1.1584	-0.2622	-0.1592	-0.0290	-0.16215	-0.26787	-0.16369	-0.03028
2	-1.1523	-0.2559	-0.1530	-0.0290	-0.15641	-0.26161	-0.15730	-0.03028
3	-1.1470	-0.2517	-0.1470	-0.0290	-0.15098	-0.25698	-0.15098	-0.03023
4	-1.1414	-0.2479	-0.1413	-0.0290	-0.14506	-0.25327	-0.14506	-0.03011
5	-1.1356	-0.2445	-0.1355	-0.0289	-0.13917	-0.24979	-0.13917	-0.02991
6	-1.1296	-0.2413	-0.1296	-0.0286	-0.13296	-0.24640	-0.13296	-0.02959
7	-1.1236	-0.2383	-0.1235	-0.0282	-0.12678	-0.24361	-0.12678	-0.02913
8	-1.1174	-0.2354	-0.1173	-0.0277	-0.12048	-0.24061	-0.12048	-0.02859
9	-1.1109	-0.2327	-0.1109	-0.0270	-0.11397	-0.23724	-0.11397	-0.02793
10	-1.1042	-0.2301	-0.1041	-0.0262	-0.10677	-0.23515	-0.10677	-0.02713
11	-0.0973	-0.2276	-0.0971	-0.0252	-0.09958	-0.23261	-0.09958	-0.02610
12	-0.0899	-0.2252	-0.0898	-0.0241	-0.09200	-0.23000	-0.09200	-0.02492
13	-0.0821	-0.2228	-0.0820	-0.0227	-0.08385	-0.22754	-0.08385	-0.02349
14	-0.0734	-0.2206	-0.0734	-0.0210	-0.07495	-0.22516	-0.07495	-0.02169
15	-0.0639	-0.2183	-0.0639	-0.0187	-0.06500	-0.22293	-0.06500	-0.01919
16	-0.0525	-0.2159	-0.0525	-0.0154	-0.05355	-0.22076	-0.05355	-0.01511
17	-0.0364	-0.2139	-0.0363	-0.0082	-0.03817	-0.21971	-0.03817	-0.00867

Tabela 6.12: Resultados - encaixe de corpos elásticos - deslocamentos ( $r_0 = 1.0$ ,  $t = 1.0$ ,  $\delta\lambda = \delta\nu = 0.1$ , algoritmo  $B$ ).

- $\sigma_n$ : tensão normal,
- $\sigma_t$ : tensão tangencial.

Observa-se, neste caso, a inexistência de contato nos nós 1 e 2, e a ocorrência de deslizamento em todo o restante da região de contato (nós 3 a 17). O número de condição estimado na solução é  $cond = 128.41$ . Em termos de esforços desbalanceados tem-se  $\max|\mathbf{f}_d| = 1.59 \times 10^{-2}$ ,  $\|\mathbf{f}_d\| = 3.08 \times 10^{-2}$ , e para fins de comparação  $\|\mathbf{f}\| = 6.20$  (norma dos esforços externos).

As figuras 6.28, 6.29, 6.30 e 6.31 apresentam uma comparação dos resultados obtidos com os resultados das referências [32] e [115] forma gráfica.

A figura 6.32 mostra o contorno deformado para o problema do encaixe entre corpos elásticos.

Na tabela 6.14 é apresentado o efeito do aumento do parâmetro de penalidade utilizando o algoritmo  $B$ .

Na tabela 6.15 é apresentado o comportamento do algoritmo  $E$  para alguns valores



Nó	De acordo com [32]		Obtido	
	$\sigma_n$	$\sigma_t$	$\sigma_n$	$\sigma_t$
1	.00000	.00000	.00000	.00000
2	.00000	.00000	.00000	.00000
3	.00489	.00097	.00555	.00111
4	.03641	.00728	.03545	.00709
5	.05951	.01190	.06464	.01293
6	.07463	.01492	.07243	.01449
7	.08745	.01749	.08662	.01732
8	.09591	.01918	.09947	.01989
9	.10327	.02065	.11524	.02305
10	.10466	.02093	.09926	.01985
11	.10826	.02165	.10742	.02148
12	.10715	.02143	.10805	.02161
13	.10518	.02103	.10320	.02064
14	.09297	.01859	.09436	.01887
15	.08034	.01606	.08070	.01614
16	.04818	.00963	.04645	.00929
17	.13048	.02609	.05625	.01125

Tabela 6.13: Resultados - encaixe de corpos elásticos - tensões ( $r_0 = 1.0$ ,  $t = 1.0$ ,  $\delta\lambda = \delta\nu = 0.1$ , algoritmo B).

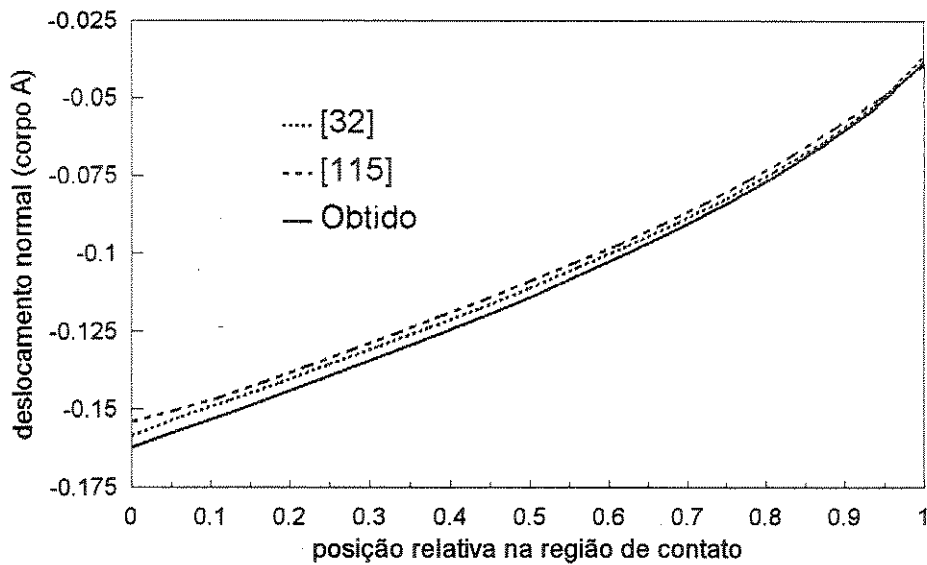


Figura 6.28: Deslocamento normal (corpo A).

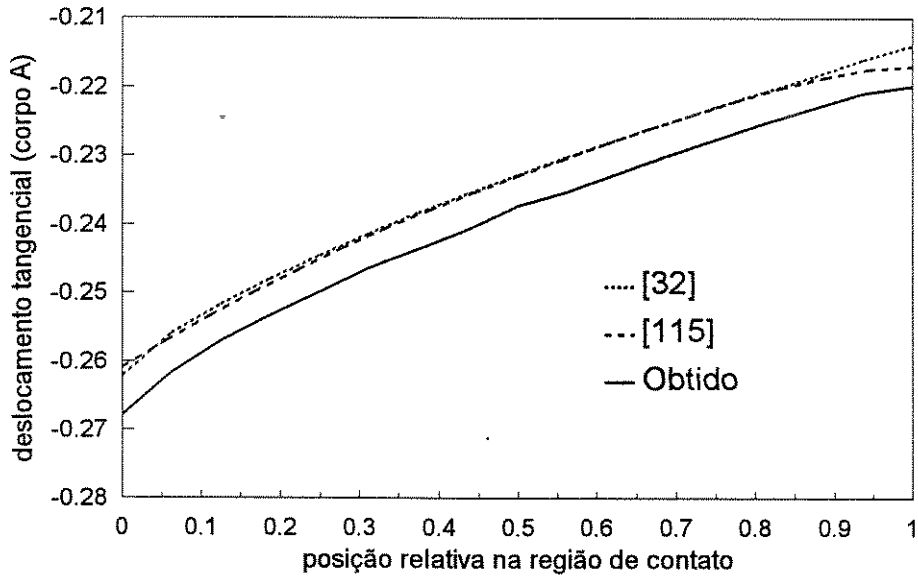


Figura 6.29: Deslocamento tangencial (corpo A).

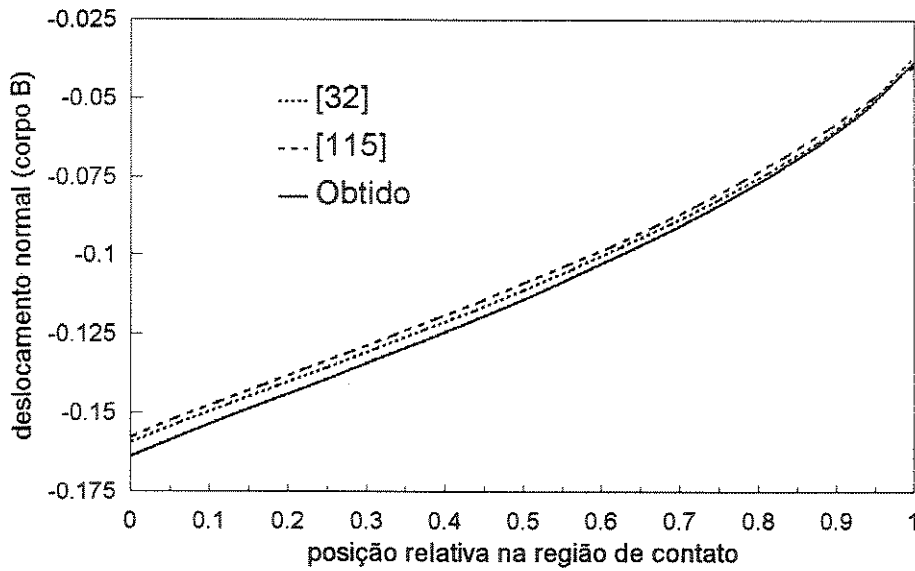


Figura 6.30: Deslocamento normal (corpo B).

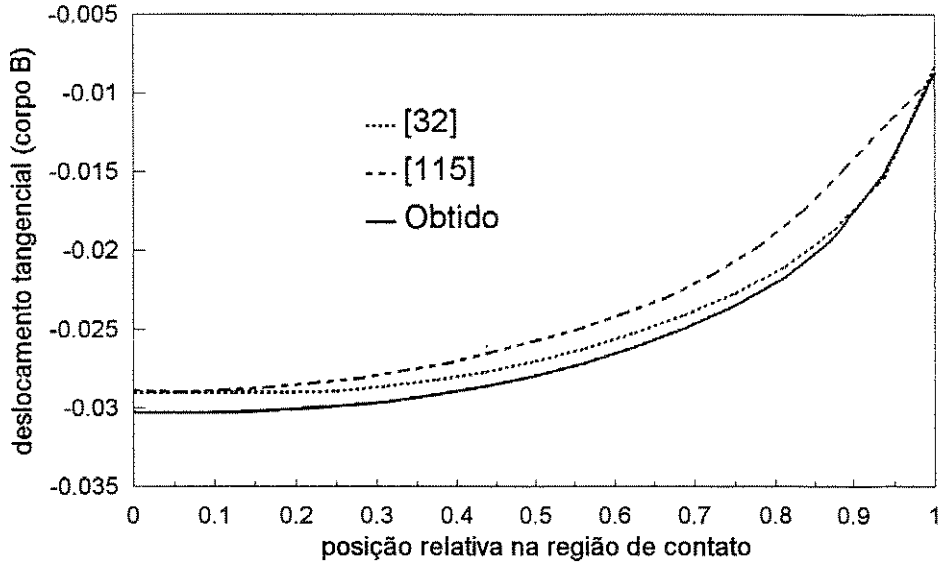


Figura 6.31: Deslocamento tangencial (corpo B).

$r_0$	$t$	$cond$	$l_{ait}$	$\Delta t$	$max f_d $
0.1	1.0	243.64	707	1541	$1.74 \times 10^{-2}$
1.0	1.0	128.41	258	585	$1.60 \times 10^{-2}$
10.0	1.0	94.38	109	268	$2.44 \times 10^{-2}$
100.0	1.0	83.87	31	99	$9.18 \times 10^{-2}$
1000.0	1.0	177.35	15	55	$1.29 \times 10^{-1}$
10000.0	1.0	1249.42	16	54	$1.49 \times 10^{-1}$
100000.0	1.0	10998.13	14	50	$1.41 \times 10^{-1}$

Tabela 6.14: Efeito do parâmetro de penalidade, encaixe corpos elásticos,  $\epsilon = 10^{-8}$ ,  $\delta\lambda = \delta\nu = 1.0$ .

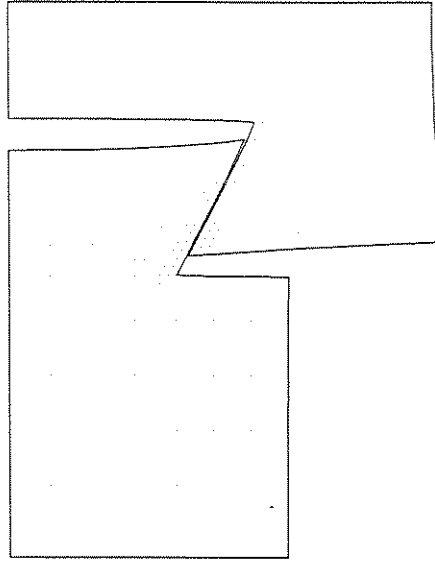


Figura 6.32: Contorno deformado - encaixe de corpos elásticos, deslocamentos ampliados 35 vezes.

de  $nfreq$ .

$nfreq$	$cond$	$lait$	$\Delta t$	$max f_d $
1	83.87	31	99	$9.18 \times 10^{-2}$
2	83.97	31	59	$9.18 \times 10^{-2}$
5	86.76	29	31	$9.18 \times 10^{-2}$
10	84.97	38	37	$9.78 \times 10^{-2}$
50	94.94	111	32	$1.46 \times 10^{-1}$
100	135.45	119	37	$1.48 \times 10^{-1}$
200	257.01	222	65	$1.52 \times 10^{-1}$
500	1214.86	2015	548	$1.57 \times 10^{-1}$
1000	2447.09	4017	984	$1.61 \times 10^{-1}$

Tabela 6.15: Algoritmo  $E$ , encaixe corpos elásticos,  $r_0 = 100$ ,  $t = 1.0$ ,  $\delta\lambda = \delta\nu = 1.0$ ,  $\epsilon = 10^{-8}$ .

## 6.5 Exemplo 4: blocos elásticos em contato

Este exemplo considera também o caso de contato com atrito entre corpos elásticos, e aparece nos trabalhos [83, 150, 122, 18, 118].

Sejam dois blocos retangulares,  $A$  e  $B$ , um sobre o outro como mostrado na figura 6.33. As dimensões destes blocos são apresentadas nesta figura e dadas em milímetros. A espessura dos blocos é de 10 mm.

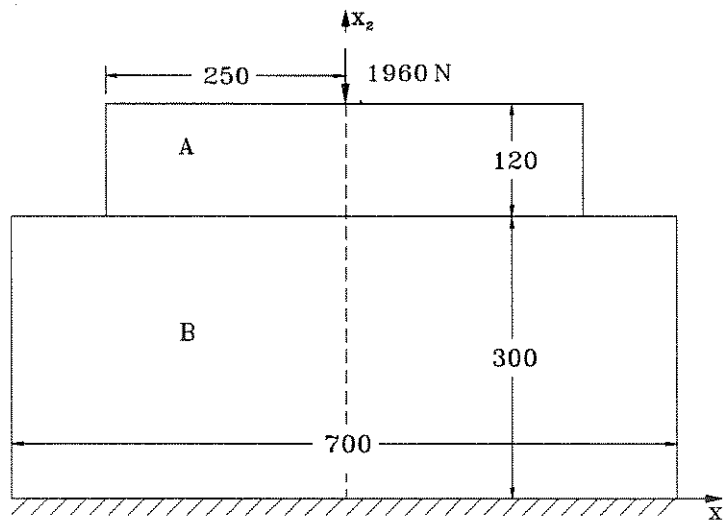


Figura 6.33: Blocos elásticos em contato.

Estes corpos possuem módulo de elasticidade de  $93100 \text{ N/mm}^2$  e coeficiente de Poisson de 0.25. Considerou-se o caso de estado plano de tensões.

A figura 6.33 mostra também que o corpo  $B$  é vinculado no seu contorno inferior, e que um esforço concentrado de  $1960 \text{ N}$  é aplicado no centro da região superior do corpo  $A$ .

Nota-se que o problema é simétrico de forma que a malha de elementos finitos pode ser feita em apenas metade dos corpos como mostrado na figura 6.34.

Esta malha possui 114 elementos finitos, 149 nós, representando um problema

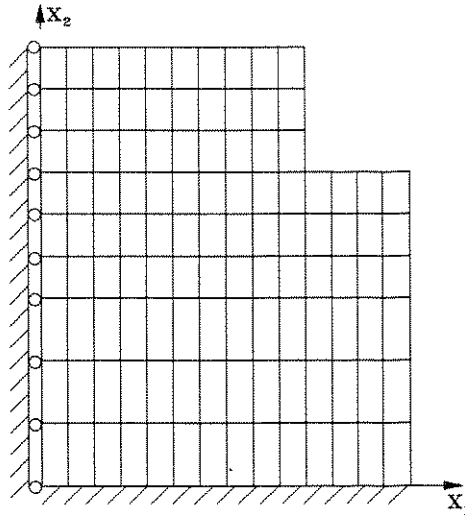


Figura 6.34: Malha de elementos finitos - blocos elásticos em contato.

de 272 graus de liberdade (variáveis de otimização). São definidos 11 nós de contato em potencial, gerando-se 11 restrições de desigualdade e 11 restrições de igualdade associadas.

Os resultados obtidos correspondem a um critério de parada de  $\epsilon = 10^{-8}$ .

Três casos em termos de coeficientes de atrito foram estudados,  $\mu_1 = 0.002$ ,  $\mu_2 = 0.2$  e  $\mu_3 = 0.4$ , onde não é feita distinção entre os valores de coeficientes de atrito estático e dinâmico.

Os resultados em termos de deslocamentos e esforços são apresentados nas tabelas 6.16, 6.17 e 6.18, onde a mesma notação das tabelas 6.12 e 6.5 é empregada. Nestas tabelas os nós de contato em potencial são numerados sequencialmente da esquerda para a direita.

Da tabela 6.16 ( $\mu_1 = 0.002$ ) verifica-se que não há contato na região correspondente aos nós 8 a 11, ocorre deslizamento na região correspondente aos nós 2 a 7, e a região associada ao nó 1 representa adesão pela própria condição de simetria. O número de condição estimado na solução é  $cond = 90.20$ . Em termos de esforços desbalanceados tem-se  $\max |f_d| = 3.97$ ,  $\|f_d\| = 7.58$ , e para fins de comparação  $\|f\| = 980.00$  (norma

Nó	$u_{n,A} \times 10^{-4}$	$u_{t,A} \times 10^{-4}$	$u_{n,B} \times 10^{-4}$	$u_{t,B} \times 10^{-4}$	$\ \mathbf{n}\ $	$\ \mathbf{t}\ $
1	-24.2105	0.0000	-24.2106	0.0000	139.46385	0.00000
2	-23.4391	3.8267	-23.4391	-1.3351	261.04524	0.52209
3	-21.3677	6.9232	-21.3677	-2.4851	219.01525	0.43803
4	-18.4360	9.1385	-18.4359	-3.3223	165.87438	0.33175
5	-15.1064	10.2821	-15.1069	-3.8008	111.00954	0.22202
6	-11.8409	10.7557	-11.8408	-3.9469	67.45424	0.13491
7	-8.7926	10.9275	-8.7926	-3.8195	25.56776	0.05114
8	-5.6628	11.0084	-6.3023	-3.5050	0.00000	0.00000
9	-2.2326	11.0483	-4.5266	-3.1342	0.00000	0.00000
10	1.2352	11.0504	-3.1181	-2.7976	0.00000	0.00000
11	4.6590	11.0327	-1.9609	-2.5284	0.00000	0.00000

Tabela 6.16: Resultados - blocos elásticos -  $\mu_1 = 0.002$  ( $r_0 = 1000$ ,  $t = 1.0$ ,  $\delta\lambda = \delta\nu = 10.0$ , algoritmo  $B$ ).

dos esforços externos).

O contorno deformado associado a este caso é mostrado na figura 6.35.

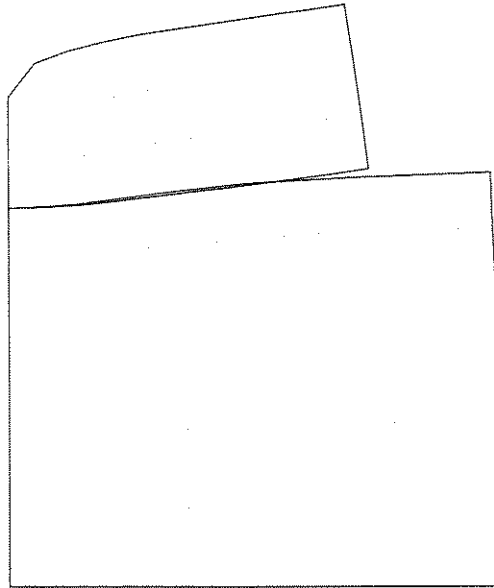


Figura 6.35: Contorno deformado - blocos elásticos em contato,  $\mu_1 = 0.002$ , deslocamentos ampliados 10000 vezes.

Da tabela 6.17 ( $\mu_2 = 0.2$ ) verifica-se que não há contato na região correspondente aos nós 9 a 11, ocorre adesão na região correspondente ao nó 1, e deslizamento na região correspondente aos nós 2 a 8. O número de condição estimado na solução é  $cond =$

Nó	$u_{n,A} \times 10^{-4}$	$u_{t,A} \times 10^{-4}$	$u_{n,B} \times 10^{-4}$	$u_{t,B} \times 10^{-4}$	$\ \mathbf{n}\ $	$\ \mathbf{t}\ $
1	-22.7368	0.0000	-22.7370	0.0000	134.92145	0.00000
2	-22.1318	2.3306	-22.1317	-0.0001	252.45708	50.49142
3	-20.4365	4.6693	-20.4365	-0.5488	211.87292	42.37458
4	-17.9220	6.5724	-17.9219	-1.2294	160.00903	32.00181
5	-14.9906	7.6509	-14.9914	-1.8037	109.24707	21.84941
6	-12.0895	8.1616	-12.0899	-2.1707	70.42399	14.08480
7	-9.3726	8.3927	-9.3726	-2.3308	39.98399	7.99680
8	-6.8626	8.5456	-6.8626	-2.3010	4.98458	0.99692
9	-4.0524	8.6282	-5.0308	-2.1004	0.00000	0.00000
10	-1.1581	8.6530	-3.6116	-1.8568	0.00000	0.00000
11	1.7062	8.6462	-2.4562	-1.6390	0.00000	0.00000

Tabela 6.17: Resultados - blocos elásticos -  $\mu_2 = 0.2$  ( $r_0 = 1000$ ,  $t = 1.0$ ,  $\delta\lambda = \delta\nu = 10.0$ , algoritmo  $B$ ).

78.81. Em termos de esforços desbalanceados tem-se  $\max|\mathbf{f}_d| = 2.50$ ,  $\|\mathbf{f}_d\| = 4.39$ , e para fins de comparação  $\|\mathbf{f}\| = 980.00$  (norma dos esforços externos).

O contorno deformado associado a este caso é mostrado na figura 6.36.

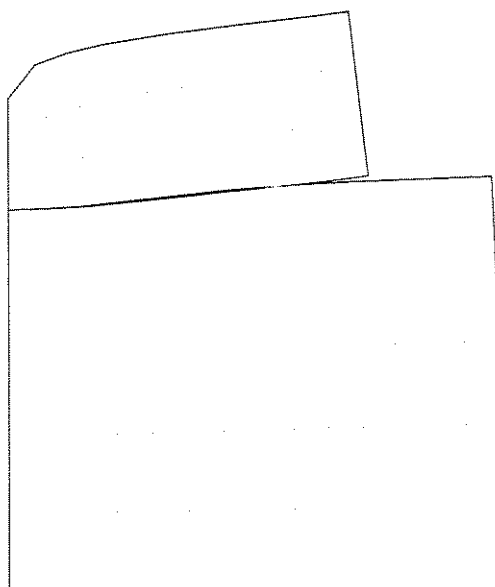


Figura 6.36: Contorno deformado - blocos elásticos em contato,  $\mu_2 = 0.2$ , deslocamentos ampliados 10000 vezes.

Da tabela 6.18 ( $\mu_3 = 0.4$ ) verifica-se que não há contato na região correspondente aos nós 9 a 11, ocorre adesão na região correspondente aos nós 1 e 2, e ocorre desli-



Nó	$u_{n,A} \times 10^{-4}$	$u_{t,A} \times 10^{-4}$	$u_{n,B} \times 10^{-4}$	$u_{t,B} \times 10^{-4}$	$\ r\ $	$\ t\ $
1	-21.3282	0.0000	-21.3285	0.0000	130.55918	0.00000
2	-20.8466	1.0948	-20.8466	1.0948	244.13515	82.23657
3	-19.4593	2.6181	-19.4593	1.2212	204.74545	81.89818
4	-17.3188	4.1568	-17.3187	0.7683	155.74515	62.29806
5	-14.7541	5.1150	-14.7549	0.1763	106.42820	42.57128
6	-12.1959	5.6036	-12.1958	-0.3188	70.70443	28.28177
7	-9.8022	5.8341	-9.8023	-0.6626	45.34539	18.13816
8	-7.6034	5.9775	-7.6034	-0.8620	24.19702	9.67881
9	-5.5412	6.1186	-5.6080	-0.9165	0.00000	0.00000
10	-3.2281	6.1752	-4.1661	-0.8002	0.00000	0.00000
11	-0.9323	6.1805	-3.0053	-0.6473	0.00000	0.00000

Tabela 6.18: Resultados - blocos elásticos -  $\mu_3 = 0.4$  ( $r_0 = 1000.0$ ,  $t = 1.0$ ,  $\delta\lambda = \delta\nu = 10.0$ , algoritmo  $B$ ).

zamento na região correspondente aos nós 3 a 8. O número de condição estimado na solução é  $cond = 83.83$ . Em termos de esforços desbalanceados tem-se  $max|f_d| = 1.24$ ,  $\|f_d\| = 1.93$ , e para fins de comparação  $\|f\| = 980.00$  (norma dos esforços externos).

O contorno deformado associado a este caso é mostrado na figura 6.37.

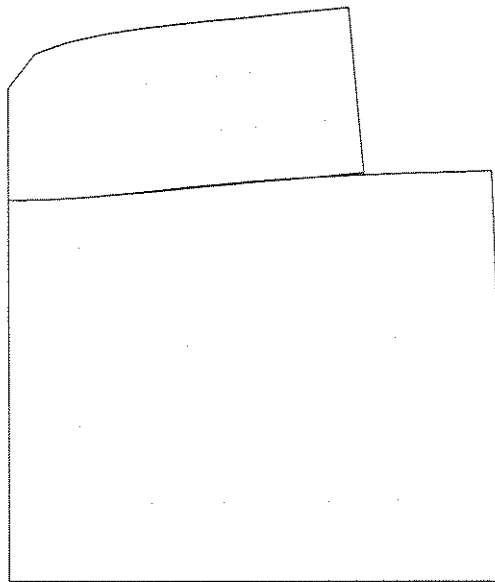


Figura 6.37: Contorno deformado - blocos elásticos em contato,  $\mu_3 = 0.4$ , deslocamentos ampliados 10000 vezes.

Visando uma comparação dos resultados obtidos, o gráfico de [118] foi reprodu-

zido. Este gráfico, mostrado na figura 6.38, apresenta os valores da tensão normal de contato normalizada pela tensão normal nominal de contato,  $\frac{\sigma_n}{\sigma_0}$ , em função da posição relativa de contato,  $x_1/l_0$ , onde  $l_0$  é o comprimento total da região de potencial contato (neste caso  $l_0$  é a largura total do corpo A). São apresentados os resultados correspondentes aos três valores de coeficientes de atrito considerados.

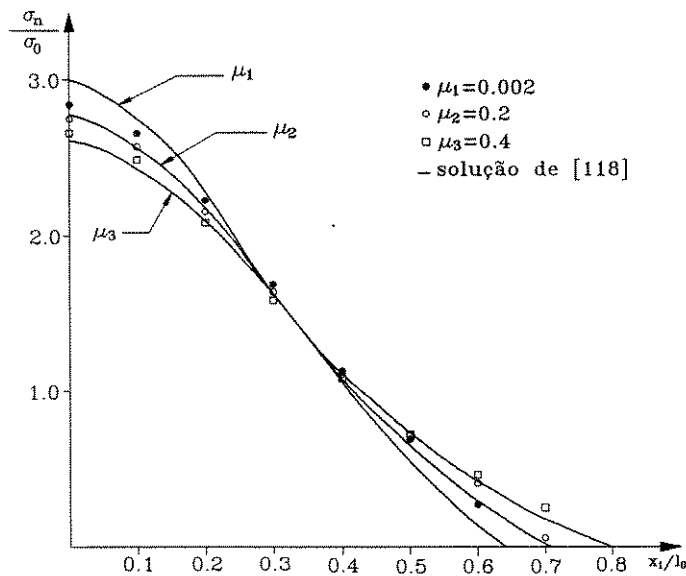


Figura 6.38: Tensão normal em função da posição relativa - blocos elásticos.

Neste mesmo gráfico (figura 6.38) são apresentados os pontos correspondentes obtidos neste trabalho. Observa-se uma boa correlação da solução encontrada aqui com a solução de [118].

É possível verificar que os resultados obtidos neste trabalho são muito similares aos relatados em [83].

As figuras 6.39, 6.40 e 6.41 mostram a região de contato ampliada 20000 vezes, permitindo visualizar-se a incompatibilidade nos campos de deslocamentos e também a interpenetração dos corpos devido ao critério de convergência adotado. Nota-se a incompatibilidade, mesmo nestes casos, onde se tem a situação de nó - a - nó antes da deformação.

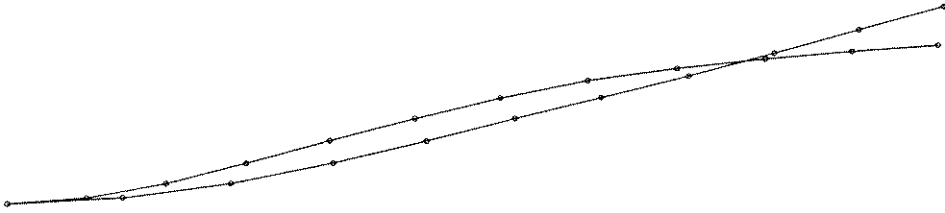


Figura 6.39: Região de contato deformada - blocos elásticos em contato,  $\mu_1 = 0.002$ , deslocamentos ampliados 20000 vezes.

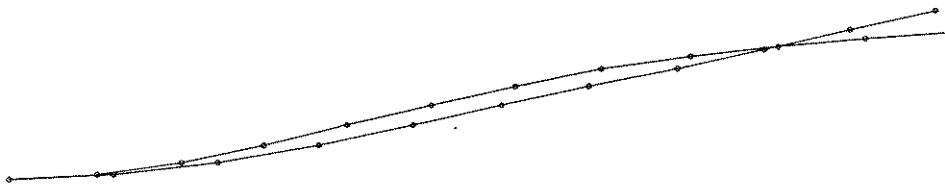


Figura 6.40: Região de contato deformada - blocos elásticos em contato,  $\mu_1 = 0.2$ , deslocamentos ampliados 20000 vezes.

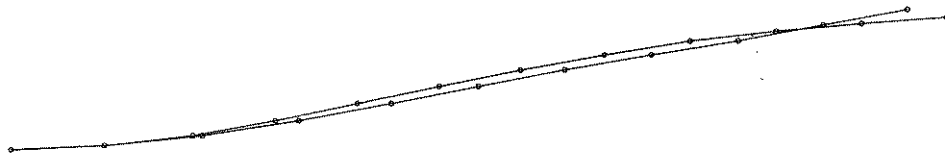


Figura 6.41: Região de contato deformada - blocos elásticos em contato,  $\mu_1 = 0.4$ , deslocamentos ampliados 20000 vezes.

## 6.6 Comentários sobre os algoritmos

Os principais aspectos observados nos exemplos estudados são:

- A solução numérica encontrada é satisfatória com relação aos resultados disponíveis para comparação nos exemplos.
- O número de iterações dos algoritmos  $A$  e  $B$  são sempre iguais, já que estes diferem apenas pelo fato do processo de subestruturação. A sequência iterativa nestes algoritmos é a mesma.

- O processo de subestruturação (algoritmo  $B$ ) mostrou-se bastante eficiente em termos de tempo de processamento quando comparado ao algoritmo  $A$ .
- O algoritmo  $C$  é mais sensível aos parâmetros de penalidade, apresentando problemas de convergência com grande facilidade. Nos casos em que o algoritmo  $C$  convergiu, este apresentou bom comportamento quando comparado aos algoritmos  $A$  e  $B$  (tanto em termos de número total de iterações como em termos de tempo de processamento).
- O algoritmo  $D$  não apresentou melhoria em termos de características de convergência quando comparado aos algoritmos  $A$  e  $B$ . Comparado ao algoritmo  $C$ , o algoritmo  $D$  apresentou comportamento muito semelhante em termos de número de iterações e de tempo de processamento. Nos casos específicos calculados, este comportamento semelhante decorre do fato de que a matriz do sistema é mantida fixa em ambos os casos, já que se tem  $t = 0.0$  para o algoritmo  $D$ . A diferença no número de iterações provém unicamente devido ao parâmetro  $r_0$ , gerando os termos  $[A^t R_j A]_*$  e  $B^t R_i B$ , que neste caso podem ser considerados de pouca influência na matriz do sistema.
- No algoritmo  $E$  existe uma frequência crítica tal que o algoritmo  $E$  passa a divergir ou apresente maior tempo de processamento para encontrar a solução. Observa-se que a escolha adequada de  $nfreq$  conduz a resultados muito interessantes em termos de tempo de processamento.
- O uso do processo de busca unidimensional contribui para o aumento do campo de convergência dos algoritmos, principalmente para situações de parâmetros de penalidade mais elevados. Como exemplos, citam-se a situação do exemplo 1, caso de malha mais refinada,  $q_v = 30.0$ ,  $r_0 = 10.0$ ,  $t = 1.0$  e  $\delta\lambda = 100.0$ , e a situação do exemplo 2, caso 1 com malha menos refinada,  $r_0 = 100.0$ ,  $t = 1.0$  e  $\delta\lambda = 10.0$  onde a convergência ocorre apenas quando se utiliza a busca unidimensional. Contudo, com a escolha conveniente dos parâmetros de penalidade, a busca unidimensional tem pequena influência nos resultados em termos de convergência.

## Capítulo 7

# Comentários e conclusões

Abordou-se neste trabalho o problema de contato com atrito entre corpos elásticos na elasticidade infinitesimal (regime de pequenos deslocamentos). Este problema deixa de ser um problema linear devido à presença de restrições unilaterais (interpenetração dos corpos) e devido ao efeito do atrito. Foi utilizada a lei clássica de Coulomb para o tratamento do atrito.

Para obter a solução deste problema utilizou-se os conceitos de otimização, formulando o problema como um problema de minimização com restrições. Na solução das equações da elasticidade foi empregado o Método dos Elementos Finitos na sua forma usual.

O problema de minimização formulado aqui tem como função objetivo a energia potencial total dos corpos em contato e dois tipos de restrições: desigualdades que representam as condições de não interpenetração dos corpos, e igualdades que são utilizadas para representar o atrito. Devido ao fato de que o atrito possui dois tipos de condições (adesão e deslizamento), e que a determinação desta condição depende dos esforços normais e tangenciais na região de contato, o problema torna-se um problema chamado aqui de *problema de minimização com restrições condicionalmente dependentes* pelo fato de que os esforços tangenciais de atrito dependem dos esforços normais de contato, e estes são relacionados às reações decorrentes das restrições. As restrições de igualdade determinam a adesão dos corpos na região de contato, e estas estão presentes ou não em um dado momento da solução de acordo com as condições de atrito.

O método do Lagrangiano Aumentado de otimização é empregado para a solução deste problema. Este é um método que resolve problemas de otimização não lineares (função objetivo e restrições não lineares), permitindo a extensão deste trabalho a outras situações de interesse, tais como problemas no regime de grandes deslocamentos, plasticidade, etc. O método do Lagrangiano Aumentado resolve o problema de minimização com restrições através da solução de sucessivos problemas de minimização irrestrita, facilitando a abordagem do ponto de vista de implementação computacional. Além disso, a solução encontrada pelo método do Lagrangiano Aumentado satisfaz de forma exata as condições de otimalidade do problema.

No caso específico do problema de contato, o método do Lagrangiano Aumentado possui multiplicadores de Lagrange e parâmetros de penalidade que possuem significado físico de interesse. Os multiplicadores de Lagrange representam os esforços de contato, e os parâmetros de penalidade a rigidez de contato. Logo, através dos multiplicadores de Lagrange consegue-se determinar a condição de atrito associada. Como a condição de atrito depende da relação entre estes multiplicadores (no caso representando os esforços), e a restrição de igualdade (adesão) está presente ou não em função desta condição, tem-se uma dependência entre as restrições (*restrições condicionalmente dependentes*). As condições de atrito são testadas a cada iteração mesmo com as restrições não satisfeitas, caracterizando um procedimento bastante geral.

O problema de contato, no caso de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, permite também a linearização das restrições. No caso específico do algoritmo proposto neste trabalho, devido à dependência das restrições (igualdades ora presentes ora ausentes), tem-se um problema de minimização distinto a cada condição distinta de atrito. O conjunto de restrições do problema varia ao longo do processo de solução.

A minimização da função Lagrangiana Aumentada foi conseguida aqui através da solução da condição de gradiente nulo desta função, chegando-se a um sistema de equações. No caso específico de restrições lineares tem-se um sistema linear de equações a cada iteração do Método do Lagrangiano Aumentado, quando o conjunto de restrições ativas se mantiver fixo ao longo das iterações.

Através da observação da equação de equilíbrio resultante da condição de ótimo

irrestrito da função Lagrangiana Aumentada, verifica-se que as restrições do problema atuam de forma semelhante a um típico elemento finito, contribuindo com uma matriz de rigidez e um vetor de carregamento, que são computados na matriz global do sistema e no vetor global associado. Salienta-se que a simetria da matriz do sistema é mantida devido à simetria das matrizes provenientes das restrições como foram definidas.

Como as condições de atrito são verificadas a cada iteração do Método do Lagrangiano Aumentado, não é utilizada uma formulação incremental. Os valores dos esforços de contato e os deslocamentos obtidos satisfazem as condições de contato (não interpenetração e atrito) e de equilíbrio na solução do problema.

A formulação adotada aqui permite a adoção de coeficientes de atrito estático e dinâmico distintos ( $\mu_e > \mu_d$ ), o que não tem sido presente, em geral, nos trabalhos que partem das formulações de inequações variacionais.

Quanto aos resultados obtidos pelos algoritmos formulados, pode-se dizer que são satisfatórios quando comparados aos resultados das referências. Estes resultados são influenciados pelas características de refinamento das malhas de elementos finitos. Nota-se que os resultados obtidos são satisfatórios mesmo com as malhas pouco refinadas utilizadas.

No que se refere aos algoritmos empregados (tipos *A*, *B*, *C*, *D* e *E*), pode-se dizer que a utilização de condensação estática (*B*) é bastante interessante em termos de tempo de processamento, já que o número nós de contato em potencial é em geral pequeno quando comparado ao número total de nós da malha. O esquema tipo *C* (matriz de rigidez “fixa”) é menos robusto, mas apresentou bons resultados quanto ao tempo de processamento nos casos em que convergiu. O algoritmo *D* (termos de rigidez do lado direito) apresentou características semelhantes ao algoritmo *C*. O algoritmo *E* apresenta características interessantes quanto às propriedades de convergência (tempo de processamento e robustez quanto à convergência), contudo requer a definição adequada da frequência de atualização da matriz de rigidez.

Referente aos parâmetros de penalidade, pode-se dizer que estes representam o aspecto mais sensível da formulação proposta. Embora a solução ótima obtida pelo

Lagrangiano Aumentado não dependa destes parâmetros, estes influenciam em muito o comportamento dos algoritmos em termos de convergência. A definição destes parâmetros foi feita de forma empírica através da adoção de uma lei de formação na qual os penalizadores apresentam crescimento gradativo ao longo das iterações do Método do Lagrangiano Aumentado. Em função da escolha destes parâmetros, os algoritmos possuem propriedades de convergência distintas podendo-se ter casos de divergência. Devido ao fato de se ter uma lei de formação empírica, a definição dos parâmetros que a definem depende de testes e tentativas com os próprios algoritmos para cada problema específico. Pode-se dizer que a utilização de leis de formação de “baixo” crescimento não causam a divergência dos algoritmos, contudo determinam uma menor velocidade para encontrar a solução. Através de testes gradativos, pode-se definir uma lei de formação adequada ao caso particular de interesse.

Os esquemas de controle dos multiplicadores de Lagrange e o monitoramento do número de condição da matriz do sistema são aspectos simples que contribuem para facilitar a convergência e, conseqüentemente, a obtenção da solução do problema.

Vários aspectos podem ser considerados como possíveis linhas de estudo para a continuidade deste trabalho:

- Melhoria no algoritmo do Lagrangiano Aumentado buscando esquemas que o torne mais eficiente e robusto no que se refere à convergência. Considera-se que a determinação de critérios otimizados para a atualização dos multiplicadores de Lagrange, e principalmente para os parâmetros de penalidade, representem o ponto central neste aspecto. Devido à generalidade do algoritmo proposto, ao se definir um critério automatizado de atualização dos parâmetros de penalidade (por exemplo baseado nas grandezas envolvidas na própria sequência iterativa), será possível a utilização desta formulação em problemas mais complexos com uma maior facilidade.
- Emprego de esquemas adaptativos de malhas, procurando garantir uma melhor compatibilidade dos campos de deslocamentos, conforme foi comentado na seção 4.4.



- Extensão a outros tipos de problemas não lineares (grandes deslocamentos, plasticidade, visco-elasticidade, etc).
- Extensão a situações de problemas dinâmicos com contato.
- Extensão para casos tridimensionais.
- Emprego do Método dos Elementos de Contorno (substituindo ou mesmo em conjunto com o MEF).
- Inclusão de efeitos térmicos provenientes do atrito (problemas termomecânicos). Esta é uma linha mais complexa pelo fato de que é necessário correlacionar a perda por atrito com o calor gerado, e então, considerar as deformações devido ao fluxo de calor.

## Referências Bibliográficas

- [1] **Al-Khayyal F., Kyparisis J.**, “Finite Convergence of Algorithms for Nonlinear Programs and Variational Inequalities”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 70, No. 2, 319-332, 1991.
- [2] **Ansys User’s Manual for Revision 5.0**, Vol. I, II, III, IV, Dezembro de 1992.
- [3] **Barbosa H. J. C.**, “*Algoritmos Numéricos para Problemas de Contato em Elasticidade*”, Tese de Doutorado, COPPE - UFRJ, 1986.
- [4] **Barbosa R. E., Ghaboussi J.**, “Discrete Finite Element Method for Multiple Deformable Bodies”, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 7, 145-158, 1990.
- [5] **Bathe K. -J., Chaudhary A.**, “A Solution Method for Planar and Axisymmetric Contact Problems”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, 65-88, 1985.
- [6] **Bazaraa M. S., Shetty C. M.**, “*Nonlinear Programming - Theory and Algorithms*”, John Willey & Sons, 1979.
- [7] **Beer G.**, “An Isoparametric Joint/Interface Element for Finite Element Analysis”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, 585-600, 1985.
- [8] **Belytschko T., Neal M. O.**, “Contact-Impact by Pimball Algorithm with Penalty and Lagrangian Methods”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 31, 547-572, 1991.

- [9] Bertsekas D. P., "Multiplier Method: A Survey", *Automatica*, Vol. 12, 133-145, 1976.
- [10] Björkman G., "The Solution of Large Displacement Frictionless Contact Problems Using a Sequence of Linear Complementarity Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 31, 1553-1566, 1991.
- [11] Björkman G., Klarbring A., Larsson T., Rönqvist, Sjödin B., "Sequential Quadratic Programming for Non-Linear Elastic Contact Problems", *Structural Optimization 93 -The World Congress on Optimal Design of Structural Systems*, Rio de Janeiro, August 2-6, 301-308, 1993.
- [12] Böhm J., "A Comparison of Different Contact Algorithms with Applications", *Computers & Structures*, Vol. 26, No. 1/2, 207-221, 1987.
- [13] Bufler H., "Derivation of the Variational Inequalities and Extremum Principles of the Frictionless Elastic Contact Problem", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 53, 163-182, 1985.
- [14] Campos L. T., Oden J. T., Kikuchi N., "A Numerical Analysis of a Class of Contact Problems with Friction in Elastostatics", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 34, 821-845, 1982.
- [15] Cannarozzi A. A., "On the Resolution of Some Unilaterally Constrained Problems in Structural Engineering", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 24, 339-357, 1980.
- [16] Chan S. K., Tuba I. S., "A Finite Element Method for Contact Problems of Solid Bodies - Part I. Theory and Validation", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 13, 615-625, 1971.
- [17] Chand R., Haug E. J., Rim K., "Analysis of Unbonded Contact Problems by Means of Quadratic Programming", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 20, No. 2, 171-189, 1979.
- [18] Chang T. Y., Saleeb A. F., Shyu S. C., "Finite Element Solutions of Two-Dimensional Contact Problems Based on a Consistent Mixed Formulations", *Computers & Structures*, Vol. 22, No. 4, 455-466, 1987.

- [19] Chaudhary A. B., Bathe K. -J., "A Solution Method for Static and Dynamic Analysis of Three-Dimensional Contact Problems with Friction", *Computers & Structures*, Vol. 24, No. 6, 855-873, 1986.
- [20] Chen W. -H., Tsai P., "Finite Element Analysis of Elastodynamic Sliding Contact Problems with Friction", *Computers & Structures*, Vol. 22, No. 6, 925-938, 1986.
- [21] Cocu M., "Existence of Solutions of Signorini Problems with Friction", *International Journal of Engineering Sciences*, Vol. 22, No. 5, 567-575, 1984.
- [22] Conry T. F., Seireg A., "A Mathematical Programming Method for Design of Elastic Bodies in Contact", *Journal of Applied Mechanics ASME*, Vol. 38, 387-392, 1971.
- [23] Curnier A., "A Theory of Friction", *International Journal of Solids Structures*, Vol. 20, No. 7, 637-647, 1984.
- [24] Desai C. S., "*Elementary Finite Element Method*", Prentice-Hall, 1979.
- [25] Doudomis I. N., Mitsopoulou E. N., "On the Solution of the Unilateral Contact Frictional Problem for General Static Loading Conditions", *Computers & Structures*, Vol. 30, No. 5, 1111-1126, 1988.
- [26] Dawson P. R., Boyce D. E., Eggert G. M., Beaudoin A. J., "A Consistent Penalty Method for Contact Between a Deforming Viscoplastic Workpiece and Rigid Tool", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, 3969-3987, 1995.
- [27] Duvaut G., Lions J. L., "*Les Inéquations en Mécanique et en Physique*", Dunod, Paris, 1972.
- [28] Elqueta M., "On the Application of the Method of Penalty of the Problem of Contact", *Third Pan American Congress of Applied Mechanics - PACAM III - Proceedings*, 403-406, São Paulo - Brasil, January 4-8, 1993.
- [29] Endhal N., "On the Finite Element Solution of the Elastoplastic Axisymmetric Hertz Contact Problem", *Computers & Structures*, Vol. 24, No. 4, 517-523, 1986.

- [30] Eterovic A. L., Bathe K. -J., "On the Treatment of Inequality Constraints Arising from Contact Conditions in Finite Element Analysis", *Computers & Structures*, Vol. 40, No. 2, 203-209, 1991.
- [31] Ezawa Y., Okamoto N., "Development of Contact Stress Analysis Programs Using the Hybrid Method of FEM and BEM", *Computers & Structures*, Vol. 58, No. 1, 13-20, 1996.
- [32] Fancello E. A., "Formulação Variacional do Problema de Contato com Atrito; Resolução via Regularização", Tese de Mestrado, COPPE - UFRJ, 1989.
- [33] Fancello E. A., Feijóo R. A., Ferro G., "Variational Formulation for the Elastic-Plastic Contact Problem with Friction", *XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, São Paulo - SP, 137-140, 1991.
- [34] Fisher U., Melosh R. J., "Solving Discretized Contact Problems Using Linear Programming", *Computers & Structures*, Vol. 25, No. 5, 661-664, 1987.
- [35] Francavilla A., Zienkiewicz O. C., "A Note on Numerical Computations of Elastic Contact Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, 913-924, 1975.
- [36] Fredriksson B., "Finite Element Solution of Surface Nonlinearities in Structural Mechanics with Special Emphasis to Contact and Fracture Mechanics Problems", *Computers & Structures*, Vol. 6, 281-290, 1976.
- [37] Frèmond M., Tien J. M. T. D., "Simulação de Problemas de Contato com Aderência", *XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, São Paulo - SP, 85-88, 1991.
- [38] Frey S. L., Sampaio R., Saldanha da Gama R. M., "Simulação de Problemas de Contato Unilateral a Partir de Problemas Clássicos de Contorno", Publicação No. 030/89, *Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC*, Rio de Janeiro - RJ, 1989.
- [39] Gaertner R., "Investigation of Plane Elastic Contact Allowing for Friction", *Computers & Structures*, Vol. 7, 59-63, 1977.

- [40] **Gakwaya A., Lambert D., Cardou A.**, "A Boundary Element and Mathematical Programming Approach for Frictional Contact Problems", *Computers & Structures*, Vol. 42, No. 3, 341-353, 1992.
- [41] **Galeão A. C. N. R., Guerreiro J. N. C., Loula A. F. D., Barbosa H. J. C.**, "Um Algoritmo para a Resolução de Problemas de Contato entre Corpos Elásticos", *Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC*, Rio de Janeiro - RJ, 1987.
- [42] **Garrido J. A., Foces A., París F.**, "An Incremental Procedure for Three-Dimensional Contact Problems with Friction", *Computers & Structures*, Vol. 50, No. 2, 201-215, 1994.
- [43] **Gill P. E., Murray W.**, "The Computation of Lagrange-Multiplier Estimates for Constrained Minimization", *Mathematical Programming*, Vol. 17, 32-60, 1979.
- [44] **Gill P. E., Murray W., Wright M. H.**, "*Practical Optimization*", Academic Press, 1981.
- [45] **Glad T., Polak E.**, "A Multiplier Method with Automatic Limitation of Penalty Growth", *Mathematical Programming*, Vol. 17, 140-155, 1979.
- [46] **Glowinski R., Lions J. L., Trémolières R.**, "*Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles, Tome 2 - Applications aux Phénomènes Stationnaires et D'évolution*", Dunod, Paris, 1976.
- [47] **Guyan R. J.**, "Reduction of Stiffness and Mass Matrices", *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 2, 380, 1965.
- [48] **Haber R. B., Hariandja H.**, "An Eulerian-Lagrangian Finite Element Approach to Large-Deformation Frictional Contact", *Computers & Structures*, Vol. 20, No. 1-3, 193-201, 1985.
- [49] **Hallquist J. O., Goudreau G. L., Benson D. J.**, "Sliding Interfaces with Contact-Impact in Large-Scale Lagrangian Computations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 51, 107-137, 1985.

- [50] **Haug E., Chand R., Pan K.**, "Multibody Elastic Contact Analysis by Quadratic Programming", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 21, No. 2, 189-198, 1977.
- [51] **Heegaarg J. -H., Curnier A.**, "An Augmented Lagrangian Method for Discrete Large-Slip Contact Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, 569-593, 1993.
- [52] **Heege A., Alart P.**, "A Frictional Contact Element for Strongly Curved Contact Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, 165-184, 1996.
- [53] **Herrmann L. R.**, "Finite Element Analysis of Contact Problems", *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE*, Vol. EM5, 1043-1057, 1978.
- [54] **Heyliger P. R., Reddy J. N.**, "A Mixed Computational Algorithm for Plane Elastic Contact Problems - I. Formulation", *Computers & Structures*, Vol. 26, No. 4, 621-634, 1987.
- [55] **Heyliger P. R., Reddy J. N.**, "A Mixed Computational Algorithm for Plane Elastic Contact Problems - II. Numerical Examples", *Computers & Structures*, Vol. 26, No. 4, 635-653, 1987.
- [56] **Holmberg G.**, "A Solution Scheme for the Three-Dimensional Multi-Body Contact Problems with Friction Using Mathematical Programming", *Computers & Structures*, Vol. 37, No. 4, 503-514, 1990.
- [57] **Horrigmoe G., Bergan P. G.**, "Incremental Variational Principles and Finite Element Models for Nonlinear Problems", *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 7, 201-217, 1976.
- [58] **Hughes T. J. R.**, "*The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*", Prentice-Hall, Inc., 1987
- [59] **Hughes T. J. R., Taylor R. L., Sackman J. L., Curnier A., Kanoknukulchai W.**, "A Finite Element Method for a Class of Contact-Impact Problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 8, 249-276, 1976.

- [60] **Hung N. D., Saxcé G.**, “Frictionless Contact of Elastic Bodies by Finite Element Method and Mathematical Programming Technique”, *Computers & Structures*, Vol. 11, 55-67, 1980.
- [61] **Irons B., Ahmad S.**, “*Techniques of Finite Elements*”, Ellis Horwood & John Willey, 1980.
- [62] **Ito K., Kunisch K.**, “The Augmented Lagrangian Method for Equality and Inequality Constraints in Hilbert Spaces”, *Mathematical Programming*, Vol. 46, 341-360, 1990.
- [63] **Jittorntrum K.**, “Accelerated Convergence for the Powell/Hestenes Multiplier Method”, *Mathematical Programming*, Vol. 18, 197-214, 1980.
- [64] **Johnson A. R., Quigley C. J.**, “Frictionless Geometrically Non-Linear Contact Using Quadratic Programming”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, 127-144, 1989.
- [65] **Joo J. W., Kwak B. M.**, “Analysis and Applications of Elasto-Plastic Contact Problems Considering Large Deformations”, *Computers & Structures*, Vol. 24, No. 6, 953-961, 1986.
- [66] **Ju S. H., Stone J. J., Rowlands R. E.**, “A New Symmetric Contact Element Stiffness Matrix for Frictional Contact Problems”, *Computers & Structures*, Vol. 54, No. 2, 289-301, 1995.
- [67] **Kalker J. J.**, “The Principle of Virtual Work and Its Dual for Contact Problems”, *Ingenieur-Archiv*, Vol. 56, No. 6, 453-467, 1986.
- [68] **Kalker J. J., Van Randen Y.**, “A Minimum Principle for Frictionless Elastic Contact with Application to Non-Hertzian Half-Space Contact Problems”, *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 6, No. 2, 193-206, 1972.
- [69] **Keer L. M., Ahmadi N., Mura T.**, “Tangential Loading of Elastic Bodies in Contact”, *Computers & Structures*, Vol. 19, No. 1-2, 93-101, 1984.



- [70] **Kikuchi N., Song Y. J.**, "Remarks on Relations Between Penalty and Mixed Finite Element Methods for a Class of Variational Inequalities", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, 1557-1579, 1980.
- [71] **Kikuchi N., Song Y. J.**, "Contact Problems Involving Forces and Moments for Incompressible Linearly Elastic Materials", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 18, 357-377, 1980.
- [72] **Klarbring A., Björkman G.**, "A Mathematical Programming Approach to Contact Problems with Friction and Varying Contact Surface", *Computers & Structures*, Vol. 30, No. 5, 1185-1198, 1988.
- [73] **Klarbring A.**, "General Contact Boundary Conditions and the Analysis of Frictional Systems", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 22, No. 12, 1377-1398, 1986.
- [74] **Klarbring A.**, "A Mathematical Programming Approach to Three-Dimensional Contact Problems with Friction", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 58, 175-200, 1986.
- [75] **Kulak R. F.**, "Adaptive Contact Elements for Three-Dimensional Explicit Transient Analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics*, Vol. 72, 125-151, 1989.
- [76] **Kwak B. M., Lee S. S.**, "A Complementary Problem Formulation for Two-Dimensional Frictional Contact Problems", *Computers & Structures*, Vol. 28, No. 4, 469-480, 1988.
- [77] **Lasdon L. S.**, "*Optimization Theory for Large Systems*", The MacMillan Company, 1970.
- [78] **Laursen T. A., Maker B. N.**, "An Augmented Lagrangian Quasi-Newton Solver for Constrained Nonlinear Finite Element Applications", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, 3571-3590, 1995.
- [79] **Laursen T. A., Oancea V. G.**, "Automation and Assessment of Augmented Lagrangian Algorithms for Frictional Contact Problems", *Journal of Applied Mechanics - ASME*, Vol. 61, 956-963, 1994.

- [80] Laursen T. A., Simo J. C., "Algorithmic Symmetrization of Coulomb Frictional Problems Using Augmented Lagrangians", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 108, 133-146, 1993.
- [81] Lee C. Y., Oden J. T., "A Posteriori Error Estimation of h-p Finite Element Approximations of Frictional Contact Problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 113, 11-45, 1994.
- [82] Lee K., "An Efficient Solution Method for Frictional Contact Problems", *Computers & Structures*, Vol. 32, No. 1, 1-11, 1989.
- [83] Lee S. -S., "A Computational Method for Frictional Contact Problem Using Finite Element Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, 217-228, 1994.
- [84] Lee B. C., Kwak B. M., "A Computational Method for Elasto-Plastic Contact Problems", *Computers & Structures*, Vol. 18, No. 5, 757-765, 1984.
- [85] Luenberger D. G., "*Linear and Non Linear Programming*", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1984.
- [86] Madsen N., "Numerically Efficient Procedures for Dynamic Contact Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, 1-14, 1984.
- [87] Mahmoud F. F., Al-Saffar A. K., El-Hadi A. M., "Solution of the Non-Conformal Unbonded Contact Problems by Incremental Convex Programming Method", *Computers & Structures*, Vol. 39, No. 1/2, 1-8, 1991.
- [88] Mahmoud F. F., Salamon N. J., Marks W. R., "A Direct Automated Procedure for Frictionless Contact Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, 245-257, 1982.
- [89] Mahmoud F. F., Salamon N. J., Pawlak T. P., "Simulation of Structural Elements in Receding/Advancing Contact", *Computers & Structures*, Vol. 22, No. 4, 629-635, 1986.
- [90] Malone J. G., Johnson N. L., "A Parallel Finite Element Contact/Impact Algorithm for Non-Linear Explicit Transient Analysis: Part I - The Search Algo-

- rithm and Contact Mechanics”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, 559-590, 1994.
- [91] **May H. -O.**, “The Conjugate Gradient Method for Unilateral Problems”, *Computers & Structures*, Vol. 12, No. 4, 595-598, 1986.
- [92] **Mazurkiewicz M., Ostachowicz W.**, “Theory of Finite Element Method for Elastic Contact Problems of Solid Bodies”, *Computers & Structures*, Vol. 17, No. 7, 51-59, 1983.
- [93] **Nour-Omid B., Wriggers P.**, “A Two-Level Iteration Method for Solution of Contact Problems”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 54, 131-144, 1986.
- [94] **Oden J. T., Kikuchi N.**, “Finite Element Methods for Constrained Problems in Elasticity”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, 701-725, 1982.
- [95] **Oden J. T., Martins J. A. C.**, “Models and Computational Methods for Dynamic Friction Phenomena”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 52, 527-634, 1985.
- [96] **Oden J. T., Pires E. B.**, “Numerical Analysis of Certain Contact Problems in Elasticity with Non-Classical Friction Laws”, *Computers & Structures*, Vol. 16, No. 1-4, 481-485, 1983.
- [97] **Oden J. T., Pires E. B.**, “Nonlocal and Nonlinear Friction Laws and Variational Principles for Contact Problems in Elasticity”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, 67-76, 1983.
- [98] **Oden J. T., Pires E. B.**, “Algorithms and Numerical Results for Finite Element Approximations of Contact Problems with Non-Classical Friction Laws”, *Computers & Structures*, Vol. 19, No. 1-2, 137-147, 1984.
- [99] **Okamoto N., Nakazawa M.**, “Finite Element Incremental Contact Analysis with Various Frictional Conditions”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 14, 337-357, 1979.

- [100] **Osmont D.**, "Tire Modelling and Contact Problems - A Finite Element Code for the Computation of The Dynamic Response of Structures Involving Contact Effects", *Computers & Structures*, Vol. 20, No. 1-3, 555-561, 1985.
- [101] **Osmont D.**, "Computation of the Dynamic Response of Structures with Unilateral Constraints (Contact) - Comparison with Experimental Results", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 34, 847-859, 1982.
- [102] **Ostachowicz W.**, "Mixed Finite Element Method for Contact Problems", *Computers & Structures*, Vol. 18, No. 5, 917-945, 1984.
- [103] **Panagiotopoulos P. D.**, "On the Unilateral Contact Problem of Structures with a Non Quadratic Strain Energy Density", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 13, 253-261, 1977.
- [104] **Panagiotopoulos P. D.**, "A Nonlinear Programming Approach to the Unilateral Contact-, and Friction-Boundary Value Problem in the Theory of Elasticity", *Ingenieur-Archiv*, Vol. 44, No. 6, 421-432, 1975.
- [105] **Panagiotopoulos P. D.**, "Convex Analysis and Unilateral Static Problems", *Ingenieur-Archiv*, Vol. 45, 55-68, 1976.
- [106] **Panagiotopoulos P. D.**, "A Variational Inequality Approach to the Friction Problem of Structures with Convex Strain Energy Density and Application to the Frictional Unilateral Contact Problem", *Journal of Structural Mechanics*, Vol. 6, No. 3, 303-318, 1978.
- [107] **Panagiotopoulos P. D.**, **Lazaridis P. P.**, "Boundary Minimum Principles for the Unilateral Contact Problems", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 23, No. 11, 1465-1484, 1987.
- [108] **Panagiotopoulos P. D.**, **Talasilidis D.**, "A Linear Analysis Approach to the Solution of Certain Classes of Variational Inequality Problems in Structural Analysis", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 16, 991-1005, 1980.
- [109] **Pascoe S. K.**, **Mottershead J. E.**, "Linear Elastic Contact Problems Using Curved Elements and Including Dynamic Friction", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, 1631-1643, 1988.

- [110] **Pascoe S. K., Mottershead J. E.**, "Two New Finite Element Contact Algorithms", *Computers & Structures*, Vol. 32, No. 1, 137-144, 1989.
- [111] **Parish H.**, "A Consistent Tangent Stiffness Matrix for Three-Dimensional Non-Linear Contact Analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, 1803-1812, 1989.
- [112] **Pires E. B., Oden J. T.**, "Analysis of Contact Problems with Friction under Oscillating Loads", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 39, 337-362, 1983.
- [113] **Powell M. J. D.**, "Algorithms for Nonlinear Constraints that Use Lagrangian Functions", *Mathematical Programming*, Vol. 14, 224-248, 1978.
- [114] **Rahman M. U., Rowlands R. E., Cook R. D., Wilkinson T. L.**, "An Iterative Procedure for Finite Element Stress Analysis of Frictional Contact Problems", *Computers & Structures*, Vol. 18, No. 6, 947-954, 1984.
- [115] **Raous M., Chabrand P., Lebon F.**, "Numerical Methods for Frictional Contact Problems and Applications", *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, Special Issue, Supplement No. 1, Vol. 7, 111-128, 1988.
- [116] **Rockafellar R. T.**, "A Dual Approach to Solving Nonlinear Programming Problem by Unconstrained Optimization", *Mathematical Programming*, Vol. 5, 354-373, 1973.
- [117] **Rothert H., Idelberger H., Jacobi W., Niemann L.**, "On Geometrically Nonlinear Contact Problems with Friction", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 51, 139-155, 1985.
- [118] **Sachdeva T. D., Ramakrishnan C. V.**, "A Finite Element Solution for the Two-Dimensional Elastic Contact Problems with Friction", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, 1257-1271, 1981.
- [119] **Salamon N. J.**, "Recending/Advancing Contact of Structural Elements Simplified", *Computers & Structures*, Vol. 33, No. 2, 509-512, 1989.

- [120] Saleeb A. F., Chen K., Chang T. Y. P., "An Effective Two-Dimensional Frictional Contact Model for Arbitrary Curved Geometry", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, 1297-1321, 1994.
- [121] Schäfer H., "A Contribution to the Solution of Contact Problems with the Aid of Bond Elements", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 6, 335-354, 1975.
- [122] Shyu S. C., Chang T. Y., Saleeb A. F., "Friction-Contact Analysis Using a Mixed Finite Element Method", *Computers & Structures*, Vol. 32, No. 1, 223-242, 1989.
- [123] Simo J. C., Laursen T. A., "An Augmented Lagrangian Treatment of Contact Problems Involving Friction", *Computers & Structures*, Vol. 42, No. 1, 97-116, 1992.
- [124] Simo J. C., Wriggers P., Taylor R. L., "A Perturbed Lagrangian Formulation for the Finite Element Solution of Contact Problems", *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 50, 163-180, 1985.
- [125] Simunovic S., Saigal S., "A Linear Programming Formulation for Incremental Contact Analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, 2703-2725, 1995.
- [126] Singh K. P., Paul B., "Numerical Solution of Non-Hertzian Elastic Contact Problems", *Journal of Applied Mechanics ASME*, Vol. 41, 484-490, 1974.
- [127] Stader J. T., Weiss R. O., "Analysis of Contact Through Finite Element Gaps", *Computers & Structures*, Vol. 10, 867-873, 1979.
- [128] Stavroulakis G. E., Panagiotopoulos P. D., Al-Fahed A. M., "On the Rigid Body Displacement and Rotations in Unilateral Contact Problems and Applications", *Computers & Structures*, Vol. 40, No. 3, 599-614, 1991.
- [129] Stein E., Bischoff D., Brand G., Plank L., "Methods of Convergence Acceleration by Uniform and Adaptive Refining and Coarsening of Finite Element Meshes, with Application to Contact Problems", Capítulo 9, *Accuracy Estimates*

*and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, Editado por I. Babuska, O. C. Zienkiewicz, J. Gago and E. R. de Oliveira, John Wiley and Sons Ltd, (1986).

- [130] **Stein E., Bischoff D., Brand G., Plank L.**, "Adaptive Multi-Grid Methods for Finite Element Systems with Bi- and Unilateral Constraints", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 52, 873-884, 1985.
- [131] **Stein E., Wriggers P.**, "Calculation of Impact-Contact Problems of Thin Shells Taking into Account Geometrical Nonlinearities within the Contact Region", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 34, 861-880, 1982.
- [132] **Talasilidis D., Panagiotopoulos P. D.**, "A Linear Finite Element Approach to the Solution of the Variational Inequalities Arising in Contact Problem of Structural Dynamics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, 1505-1520, 1982.
- [133] **Timoshenko S., Goodier J. N.**, "*Teoria da elasticidade*", 3a. edição, Guanabara Dois, 1980.
- [134] **Tonti E.**, "Variational Formulation for Every Nonlinear Problem", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 22, No. 11/12, 1343-1371, 1984.
- [135] **Torstenfelt B.**, "Contact Problems with Friction in General Purpose Finite Element Computer Programs", *Computers & Structures*, Vol. 16, No. 1-4, 487-493, 1983.
- [136] **Torstenfelt B. R.**, "An Automatic Incrementation Technique for Contact Problems with Friction", *Computers & Structures*, Vol. 19, No. 393-400, 1984.
- [137] **Tseng J., Olson M. D.**, "The Mixed Finite Element Method to Two-Dimensional Elastic Contact Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, 991-1014, 1981.
- [138] **Vijayakar S.**, "A Combined Surface Integral and Finite Element Solution for Three-Dimensional Contact Problem", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 31, 524-546, 1991.

- [139] **Vijayakar S. M., Houser D. R.**, "Contact Analysis of Gears Using a Combined Finite Element and Surface Integral Method", *Gear Technology*, 26-33, July/August, 1993.
- [140] **Wilson E. A., Parsons B.**, "Finite Element Analysis of Elastic Contact Problems Using Differential Displacements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 2, 387-395, 1970.
- [141] **Wriggers P., Miehe C.**, "Contact Constraints within Coupled Thermomechanical Analysis - A Finite Element Model", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 113, 301-319, 1994.
- [142] **Wriggers P., Vu Van T., Stein E.**, "Finite Element Formulation of Large Deformation Impact-Contact Problems with Friction", *Computers & Structures*, Vol. 37, No. 3, 319-331, 1990.
- [143] **Yagawa G., Hirayama H.**, "A Finite Element Method for Contact Problems Related to Fracture Mechanics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, 2175-2195, 1984.
- [144] **Wolfe M. A.**, "Numerical Methods for Unconstrained Optimization", Van Nostrand Reinhold Company LTD, 1978.
- [145] **Yamashita H.**, "A Globally Convergent Constrained Quasi-Newton Method with an Augmented Lagrangian Type Penalty Function", *Mathematical Programming*, Vol. 23, 75-86, 1982.
- [146] **Zang W. L., Gudmundson P.**, "Frictional Contact Problems of Kinked Cracks Modelled by a Boundary Integral Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 31, 427-446, 1991.
- [147] **Zavarise G., Wriggers P., Schrefler B. A.**, "On Augmented Lagrangian Algorithms for Thermomechanical Contact Problems with Friction", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, 2929-2949, 1995.
- [148] **Zienkiewics O. C.**, "The Finite Element Method", 3rd Ed., McGraw-Hill, 1977.



- [149] **Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.**, “*The Finite Element, Volume 2 - Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-Linearity*”, 4th Ed., McGraw-Hill, 1991.
- [150] **Zhong W. X., Sun S. M.**, “A Parametric Quadratic Programming Approach to Elastic Contact Problems with Friction”, *Computers & Structures*, Vol. 32, No. 1, 37-43, 1989.
- [151] **Zhu C.**, “A Finite Element - Mathematical Programming Method for Elastoplastic Contact Problems with Friction”, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 20, 273-282, 1995.
- [152] **Zhu C., Yongjie J.**, “The Solution of Frictional Contact Problems Using a Finite Element - Mathematical Programming Method”, *Computers & Structures*, Vol. 52, No. 1, 149-155, 1994.
- [153] **Zolti E.**, “A Finite Element Procedure to Time Dependent Contact Analysis”, *Computers & Structures*, Vol. 17, No. 4, 555-561, 1983.