

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO
INDUSTRIAL

Análise e Síntese de Sistemas a Eventos Discretos via Lógica Modal

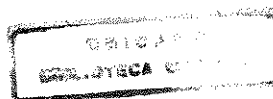
Autor: José Carlos Magossi

Orientador: Prof. Dr. Rafael Santos Mendes

Tese de Doutorado submetida à
Faculdade de Engenharia Elétrica e
de Computação da Universidade
Estadual de Campinas, como parte
dos requisitos exigidos para a
obtenção do Título de Doutor em
Engenharia Elétrica.

Este exemplar corresponde a redação final da tese
defendida por JOSÉ CARLOS MAGOSSI
e aprovada pela Comissão
Julgada em 20 / 08 / 98.
Rafael Santos Mendes
Orientador

20 de agosto de 1998



98-22589

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	T/UNICAMP
	M275a
V.	Er.
TOMBO BC/	35665
PROC.	395/98
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	30/10/98
N.º CPD	

CM-00118076-0

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

M275a Magossi, José Carlos
Análise e síntese de sistemas a eventos discretos via
lógica modal. / José Carlos Magossi.--Campinas, SP:
[s.n.], 1998.

Orientador: Rafael Santos Mendes.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação.

1. Teoria do controle – Síntese. 2. Lógica matemática
não-clássica. 3. Redes de Petri. 4. Algoritmos. I.
Mendes, Rafael Santos. II. Universidade Estadual de
Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação. III. Título.

Agradecimentos

Ao orientador e amigo Rafael Santos Mendes, pelo dinamismo intelectual e profissionalismo que tem passado ao longo desses anos, pela sobriedade de consciência que tem me ajudado a refletir no dia-a-dia, e pela agradável convivência que muito me enriqueceu tanto no aspecto pessoal como profissional.

À CAPES – Coordenadoria de Apoio à Pesquisa e Ensino Superior.

À UNIMEP – Universidade Metodista de Piracicaba.

À CEETEPS-FATEC-AM - Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza
– Americana.

À minha querida esposa Silvia Regina, pelo carinho, dedicação e incentivo nestes longos anos de trabalho.

Às minhas filhas Giulia Isabela e Clara Giuliana, pelo despertar de um novo tempo.

Sumário

LISTA DE FIGURAS	v
LISTA DE TABELAS	vi
RESUMO	vii
ABSTRACT	viii
1 Introdução	1
2 Representação de Sistemas a Eventos Discretos através de Dióides	4
2.1 Introdução	4
2.2 Redes de Petri	4
2.3 Grafo a Eventos	9
2.4 Representação de Grafo a Eventos pelo Dióide \mathcal{M}	12
2.4.1 Definição Formal do Dióide \mathcal{M}	13
2.4.2 Equações Associadas a um Grafo a Eventos	17
2.4.3 Representação Entrada/Saída de Grafos a Eventos.....	19
3 Lógica Modal NK	21
3.1 Introdução	21
3.2 Fórmulas Proposicionais.....	21
3.2.1 Modalidades	23
3.3 Modelos Modais Proposicionais NK	23
3.4 Propriedades Semânticas	26
3.5 Tableaux Analíticos e Notação Unificada	27
3.6 Tableaux Modais Analíticos NK	30
3.7 Tableau Proposicional Modal Prefixado.....	31
3.8 Correção.....	34
3.9 Completude.....	36

3.10 Conseqüência Lógica e Dedutibilidade	41
4 Verificação de Especificações em Sistemas a Eventos Discretos	47
4.1 Introdução	47
4.2 Correspondência entre a Lógica Modal NK e o Dióide \mathcal{M}	47
4.3 Modelagem de SED's via Lógica Modal NK.....	56
4.4 Interpretação Gráfica da Lógica Modal NK no Dióide \mathcal{M}	60
4.5 Algoritmos	64
4.5.1 Algoritmo 1: Verificação de Especificações.....	66
4.5.2 Algoritmo 2: Detecção de Solução Mínima.....	68
4.6 Exemplo Ilustrativo.....	69
4.6.1 Algoritmo 1 - Verificação da Especificação $y \leq \delta u$	71
4.6.2 Algoritmo 2 - Detecção de Solução Mínima	72
5 Síntese de Controladores	74
5.1 Introdução	74
5.2 Resultados Fundamentais	77
5.3 Algoritmo de Síntese	80
5.4 Exemplo Ilustrativo.....	82
6 Conclusões e Perspectivas	89
Referências Bibliográficas	92
Apêndice A	96
Apêndice B	111

Lista de Figuras

2.1: Rede de Petri	5
2.2: Entrada e saída de uma transição	7
2.3: Marcação inicial	8
2.4: Rede de Petri temporizada	10
2.5: Grafo a eventos	11
2.6: Representação de decisão numa rede de Petri.....	12
2.7: Elemento do dióide	13
2.8: Atraso em contagem.....	14
2.9: Atraso em datação	15
2.10: Descrição no dióide \mathcal{M} de um grafo a eventos.....	18
2.11: Grafo a eventos do exemplo 2.16.....	18
4.1: Descrição na lógica NK de um grafo a eventos	57
4.2: Grafo a eventos do exemplo 4.13.....	58
4.3: Representação no plano Z^2 do elemento $\gamma^i \delta^j$	61
4.4: Representação no plano Z^2 do elemento δe	61
4.5: Representação no plano Z^2 dos elementos γe e δe	62
4.6: Grafo a eventos do exemplo 4.14.....	62
4.7: Representação da saída $y=\gamma$ no plano bidimensional	63
4.8: Representação entrada/saída da rede do exemplo 4.14.....	64
4.9: Rede do exemplo referente a verificação de especificações	69
5.1: Planta e controlador.....	74
5.2: Transições observáveis e controláveis	76
5.4: Grafo a eventos para o exemplo de síntese	82
5.5: Grafo a eventos resultante da síntese	88

Lista de Tabelas

3.1: Fórmulas do tipo α	29
3.2: Fórmulas do tipo β	29
3.3: Regras modais de extensão de ramos.....	29
4.1: Correspondência entre a Lógica NK e o Díóide \mathcal{M}	57
5.1: Resultado do algoritmo de síntese.....	81
5.2: Resultado da síntese do exemplo ilustrativo 5.4.....	88
B.1: Exemplo de regra de extensão de ramos.....	121
B.2: Regras que inferem conseqüências diretas nos ramos.....	121
B.3: Regras que bifurcam ramos.....	121
B.4: Regras para α -fórmulas.....	124
B.5: Regras para β -fórmulas.....	125

Resumo

Aborda-se o problema de verificação de especificações e síntese de controladores em uma classe de sistemas dinâmicos a eventos discretos. Propõe-se uma nova lógica modal denominada lógica modal NK, e mostra-se que um conjunto de fórmulas nesta lógica é equivalente a um conjunto de fórmulas escritas no contexto da teoria de dióides. Desse modo, um sistema descritível por um grafo a eventos, que é modelado por um conjunto de equações num dióide apropriado, também é modelado por um conjunto de fórmulas da lógica modal NK. Então utiliza-se as técnicas de tableaux analíticos para desenvolver um algoritmo para decidir se uma especificação é satisfeita ou não. Quanto ao problema de síntese, a solução obtida pelo tableau analítico é utilizada para determinar as NK-fórmulas, e portanto o controlador, que tornará a especificação satisfeita. A principal vantagem deste inter-relacionamento de abordagens é permitir a utilização de técnicas da lógica modal, particularmente os tableaux analíticos, no tratamento de problemas de análise e síntese de controladores para sistemas a eventos discretos.

Abstract

The problem of verification of a specification and controller synthesis in a class of discrete event dynamic systems is addressed. We propose a new propositional modal logic, named NK logic, and we show that a set of formulas of this logic is completely equivalent to a set of equations written in the context of the theory of dioids. Therefore, a system described by an event graph can be modeled by a set of formulas in NK logic. Then we use the technique of the analytic tableaux to develop an algorithm to decide if a specification, also expressed in NK logic, is satisfied. If a specification is not satisfied then there exists a solution for the equations written in dioid context that violates the specification. The method of analytic tableaux gives this solution. Concerning the synthesis problem, the solution obtained by the analytic tableau is used to determine the NK-formulas, and therefore the controller, that makes the specification be verified. The main advantage of this approach is allow us to use the technique of analytic tableaux to investigate problems of analysis and synthesis of controllers for discrete event systems.

Capítulo 1

Introdução

Dentre as possíveis classificações para os sistemas dinâmicos, é usual a distinção entre sistemas contínuos e sistemas discretos. Os sistemas contínuos se caracterizam por ter seu espaço de estados contínuo, e sua dinâmica dirigida pelo tempo. Os modelos matemáticos usuais para este tipo de sistema são equações diferenciais, se o tempo é considerado uma variável contínua, ou equações a diferenças, se o tempo é uma variável discreta. Contrariamente, num sistema discreto o espaço de estados é discreto e sua dinâmica é dirigida pela ocorrência de eventos (donde a denominação “sistemas a eventos discretos”). Não existe para este tipo de sistema um consenso sobre que tipo de modelo utilizar, observando-se que as ferramentas normalmente utilizadas para os sistemas contínuos são pouco eficazes. Contudo, os problemas envolvendo dinâmica discreta tem se tornado cada vez mais relevantes (p.ex. nas áreas de automação da manufatura e redes de comunicação), levando à necessidade de técnicas para sua análise e controle. Muitas linhas de pesquisa tem surgido nessa área, como por exemplo a abordagem proposta por Ramadge e Wonham (1989) (conhecida como controle supervisorio), a técnica de análise de perturbações infinitesimais (Ho e Cao, 1991), as abordagens baseadas em lógica temporal (Ostroff, 1989 e 1991, Silva Jr. e Santos-Mendes, 1992), as redes de Petri (Peterson, 1981, Murata, 1989), a abordagem baseada na álgebra de dióides (Baccelli et al., 1992), e outras. Neste trabalho, propõe-se uma técnica de verificação de especificações para sistemas discretos que de certa maneira relaciona as três últimas abordagens citadas.

As redes de Petri constituem uma ferramenta de análise grandemente difundida atualmente. A abordagem baseada em dióides é fortemente relacionada às redes de Petri. De fato é um resultado clássico desta abordagem que uma classe particular das redes de Petri pode ser representada por um conjunto de equações lineares escritas numa álgebra de dióides. Esta classe particular é constituída de redes

denominadas “grafos a eventos” que se caracterizam pelo fato de que nelas cada *lugar* tem uma e uma única *transição de saída* e uma e uma única *transição de entrada* (Baccelli et al., 1992). Este tipo de rede, embora descreva convenientemente sistemas com aspectos de sincronismo, não é apropriado para sistemas com características de concorrência.

A álgebra de dióides por sua vez constitui uma estrutura algébrica descrita em maiores detalhes em Baccelli et al., 1992. Particularmente, vai-se utilizar uma instância desta estrutura conhecida como dióide \mathcal{M} (Cohen et al., 1989), que permite relacionar informações quantitativas sobre disparos de transições em grafos a eventos através de equações lineares. Entre as principais limitações desta abordagem estão a dificuldade de descrever concorrência, a dificuldade de manipulação dos elementos do dióide \mathcal{M} e a ausência de técnicas de síntese de controladores.

As lógicas temporais são sistemas formais que estendem a capacidade descritiva da lógica clássica através da introdução de operadores cuja semântica pode ser relacionada a aspectos temporais (Prior, 1957 e 1967, Rescher e Urquhart, 1971). A utilização destas lógicas iniciou-se na área de computação particularmente com os trabalhos de Manna e Pnuelli (1979, 1992). Posteriormente, Thistle e Wonham (1986), Ostroff (1989) e Ionescu e Lin (1990) utilizaram estes formalismos visando a modelagem e o controle de sistemas dinâmicos a eventos discretos. As abordagens baseadas em lógica temporal caracterizam-se pela abrangência da classe de sistemas que podem descrever. Apesar disso, o formalismo temporal não permite uma modelagem direta, devido ao pequeno apelo intuitivo da abordagem. Os modelos para sistemas (mesmo de pequeno porte) são em geral constituídos por um grande número de fórmulas cuja leitura não é direta. Estes aspectos, aliados às limitações formais das lógicas envolvidas, trazem limitações às aplicações deste método.

Conceitualmente, as lógicas temporais constituem um caso particular de uma classe mais ampla de sistemas lógicos denominada lógica modal. Em geral, a principal característica de uma lógica modal é a existência de operadores não-funcionais-veritativos¹. O objetivo deste trabalho é a introdução de uma lógica modal capaz de

¹ Um operador lógico # é funcional-veritativo se numa fórmula #X a atribuição de valor-verdade à fórmula X leva a uma atribuição de valor-verdade à fórmula #X. Em geral, os operadores modais não são funcionais-veritativos. Exemplos são os operadores temporais. Originalmente os operadores modais foram utilizados para descrever modalidades de verdade tais como necessidade, possibilidade, contingência e impossibilidade (Hughes e Cresswell, 1968 e 1984).

modelar sistemas descritíveis por equações lineares no dióide \mathcal{M} . Consequentemente esta nova lógica permitirá a modelagem de sistemas descritos por grafos a eventos. Desse modo estar-se-á relacionando as três abordagens previamente descritas. A principal vantagem de tal relacionamento é expandir a capacidade de manipulação dos grafos a eventos, dada pelas propriedades do dióide \mathcal{M} , através dos métodos da lógica modal (Fitting, 1983, Gabbay e Guenther, 1984). Em outras palavras, vai-se estabelecer através de uma nova lógica, denominada lógica modal proposicional NK, uma representação equivalente àquela determinada no dióide \mathcal{M} de modo que procedimentos próprios da lógica modal possam ser utilizados.

A partir de um grafo a eventos e uma especificação que deve ser verificada, escreve-se uma fórmula na lógica modal proposicional NK, a qual expressa a especificação, como também escreve-se um conjunto de fórmulas o qual descreve o sistema dinâmico em questão. A especificação é então satisfeita se e somente se a correspondente fórmula for consequência lógica do conjunto de fórmulas que descreve o sistema. Embora este procedimento geral para verificação tenha sido usado precedentemente no contexto de lógica temporal (Ostroff, 1989), a lógica modal proposicional NK produz uma representação mais simples e concisa.

Para o problema de síntese adota-se a seguinte estratégia. Inicialmente define-se que eventos são observáveis e que eventos são controláveis (ou seja, susceptíveis de ação externa). Em seguida, considerando-se que uma dada especificação não é satisfeita, obtém-se fórmulas da lógica modal NK que impossibilitem as soluções que violam as especificações. Estas fórmulas devem relacionar as transições controláveis e observáveis, e constituem uma descrição do controlador desejado.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. No capítulo 2 expõe-se a *representação de sistemas a eventos discretos através de dióides*. No capítulo 3 a *lógica modal NK* é apresentada. No capítulo 4 a *verificação de especificações em sistemas a eventos discretos* é desenvolvida, seguida no capítulo 5 da abordagem referente à *síntese de controladores*. No capítulo 6 apresenta-se *conclusões e perspectivas*, e logo após seguem-se as *referências bibliográficas* e os *apêndices A e B*, onde são expostos estudos sobre a teoria de *dióides* e a *lógica proposicional clássica via tableaux analíticos*, respectivamente.

Capítulo 2

Representação de Sistemas a Eventos Discretos através de Dióides

2.1 Introdução

Neste capítulo introduz-se um breve estudo sobre redes de Petri. Por constituírem uma ferramenta flexível e de fácil modelagem de sistemas dinâmicos a eventos discretos, a apresentação de alguns resultados sobre redes de Petri e principalmente sobre grafo a eventos¹ torna-se essencial para o desenvolvimento deste trabalho. Também um relato sobre o dióide \mathcal{M}^2 e representações de entrada-saída para sistemas dinâmicos a eventos discretos será discutido ao longo do capítulo.

2.2 Redes de Petri

Os modelos baseados em redes de Petri foram desenvolvidos por C.A. Petri em 1962 e podem ser encontrados na literatura em textos tais como Peterson (1981), Murata (1989) e Cassandras (1993). Desde então muito se tem desenvolvido no que diz respeito a redes de Petri, principalmente pela versatilidade de análise que esta técnica matemática de representação de sistemas possibilita, sendo possível modelar sistemas paralelos, não determinísticos, assíncronos, concorrentes, etc. Neste trabalho

¹ Um caso particular de redes de Petri onde se permite modelar apenas sincronismo.

² O apêndice A contém um estudo sobre a teoria de Dióides.

interessa-se por uma rede de Petri particular, denominada de *Grafo a Eventos*, a qual será útil na modelagem de sistemas a eventos discretos.

Antes de se definir redes de Petri, convém uma exposição menos formal. No contexto deste trabalho as redes de Petri podem ser vistas como constituídas de cinco elementos fundamentais. Um conjunto de lugares, um conjunto de transições, um conjunto de arcos, uma marcação inicial e uma temporização. Os lugares são utilizados para representar o estado do sistema e as condições de ocorrências dos eventos. As transições são associadas aos eventos.

Para que uma transição dispare algumas condições devem ser satisfeitas. As informações relacionadas a essas condições estão contidas nos lugares. Alguns lugares são vistos como entrada da transição e a estes estão associadas as condições exigidas para que a transição ocorra. Outros lugares são vistos como saída de uma transição e a esses estão associados condições que serão afetadas com a ocorrência da transição. Transições, lugares e relações entre eles constituem os componentes básicos de uma rede de Petri.

A figura abaixo mostra uma típica representação gráfica de uma rede de Petri com dois lugares e três transições. Os lugares são denotados por p_1 e p_2 . As transições são denotadas por t_1 , t_2 e t_3 .

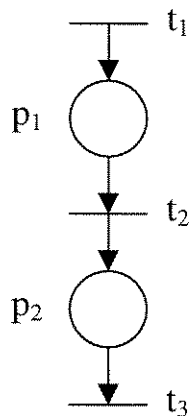


Figura 2.1: Rede de Petri

A transição t_1 é chamada de transição de entrada na rede e também *transição de entrada do lugar p_1* ; a transição de saída da rede é indicada por t_3 , que também é a *transição de saída do lugar p_2* . Os arcos indicam as relações entre lugares e transições. Por exemplo, a realização da ação representada pela transição t_2 está

associada às informações contidas no lugar p_1 . Por outro lado as informações contidas no lugar p_2 serão alteradas assim que ocorrer a ação designada em t_2 . A definição formal de uma rede de Petri é dada a seguir.

Definição 2.1: Uma rede de Petri é uma quadra $\langle P, T, A, w \rangle$ de tal forma que:

- P é um conjunto finito de lugares.
- T é um conjunto finito de transições.
- A é um conjunto de *arcos*, o qual é um subconjunto de $(P \times T) \cup (T \times P)$.
- w é uma *função peso*, $w: A \rightarrow \{1,2,3,\dots\}$.

Comumente representa-se o conjunto de lugares por $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ e o conjunto de transições por $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$. Assim um arco numa rede de Petri é da forma (p_i, t_j) ou (t_j, p_i) , e o peso relacionado a um arco é um inteiro positivo. Nota-se que este peso representa o número de arcos ligando lugares a transições ou vice-versa. É conveniente introduzir uma notação que represente o número de lugares de entrada de uma transição, e este será representado por $I(t_j)$. Já $O(t_j)$ representará o conjunto dos lugares de saída da transição t_j . Mais precisamente tem-se que:

- $I(t_j) = \{ p_i \mid (p_i, t_j) \in A \}$.
- $O(t_j) = \{ p_i \mid (t_j, p_i) \in A \}$.

onde A é o conjunto de arcos da rede de Petri.

Exemplo 2.2: Seja a rede de Petri definida do seguinte modo:

- $P = \{p_1, p_2\}$.
- $T = \{t_1\}$.
- $A = \{(p_1, t_1), (t_1, p_2)\}$.
- $w(p_1, t_1) = 1$ e $w(t_1, p_2) = 2$.

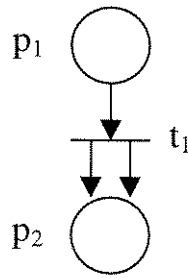


Figura 2.2: Entrada e saída de uma transição

Neste caso $I(t_1) = \{p_1\}$ e $O(t_1) = \{p_2\}$.

Em redes de Petri é sabido que transições representam eventos, os quais ocorrerão sempre que os lugares pertencentes às precondições da transição fornecerem informações suficientes para sua habilitação (ocorrência de um evento). Desse modo interessa a elaboração de um procedimento que permita a indicação de quais transições estão aptas a ocorrerem dentro de uma rede de Petri. Esse mecanismo é desenvolvido pela relação entre lugares e fichas. Uma ficha é um objeto que pode ser colocado num lugar sempre que a condição referente ao lugar for satisfeita. Chama-se de *marcação* a distribuição de fichas a lugares numa rede de Petri. Mais precisamente, tem-se a seguinte definição referente a marcações.

Definição 2.3: Uma *marcação* x em uma rede de Petri é uma função $x:P \rightarrow \{0,1,2,\dots\}$, que associa a cada lugar p_i da rede de Petri, um número inteiro não negativo $x(p_i)$, o qual representa o número de fichas contidas no lugar p_i da rede de Petri.

Desse modo uma marcação determina um vetor $x = [x(p_1), x(p_2), \dots, x(p_n)]$, onde n é o número de lugares numa rede de Petri. Nas representações gráficas de redes de Petri, as fichas são representadas por *pontos*.

Definição 2.4: Uma *rede de Petri marcada* é uma quintupla $\langle P, T, A, w, x_0 \rangle$, onde $\langle P, T, A, w \rangle$ é uma rede de Petri e x_0 é uma marcação inicial.

Seja a rede de Petri marcada abaixo.

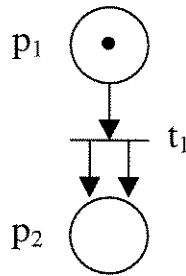


Figura 2.3: Marcação inicial

Nesta tem-se que a marcação inicial é dada por $x_0 = [1,0]$. Neste caso, tem-se que $I(t_1) = \{p_1\}$ e $O(t_1) = \{p_2\}$. Nota-se que $w(t_1, p_2) = 2$ indica a presença de dois arcos ligando t_1 a p_2 . Nas Redes de Petri, o conceito de *estado* está relacionado diretamente com a marcação da rede.

Definição 2.5: Um *estado* em uma rede de Petri marcada é um vetor $x=[x(p_1), \dots, x(p_n)]$, onde n é o número de lugares da rede de Petri.

O termo disparo de transições foi utilizado como representando ocorrência de eventos. Objetiva-se denotar que uma transição está habilitada a disparar sempre que cada lugar de entrada da transição contenha uma ficha. Porém isso não é tão simples quando se tem arcos na rede com pesos. Assim a seguinte definição expõe o conceito de *transição habilitada*, englobando as redes de Petri com pesos.

Definição 2.6: Uma transição $t_j \in T$ numa rede de Petri marcada é dita *habilitada* se e somente se

$$x(p_i) \geq w(p_i, t_j) \text{ para todo } p_i \in I(t_j).$$

Ou seja, exige-se que o número de fichas em p_i seja pelo menos tão grande quanto o peso do arco conectando p_i com t_j . Na rede de Petri do exemplo anterior, a transição t_1 está habilitada. Mas se o peso $w(p_1, t_1) = 2$, então a transição t_1 não estaria habilitada.

Sendo que redes de Petri são utilizadas para representar Sistemas Dinâmicos a Eventos Discretos, torna-se necessário que essas sejam dotadas de um mecanismo que propicie o movimento das fichas através da rede, caracterizando um dinamismo

estimulado por meio das fichas, causando assim mudanças no estado da rede de Petri . Costuma-se dizer que uma transição pode *disparar*, quando esta transição esta habilitada , ou seja , quando ela está apta a ocorrer . Define-se agora uma *função de transição de estado* através da qual o disparo de transições acarreta mudanças na marcação da rede de Petri.

Definição 2.7: A *função de transição de estado* $f : \{0,1,\dots\}^n \times T \rightarrow \{0,1,2,\dots\}^n$ de uma rede de Petri marcada $\langle P, T, A, w, x_0 \rangle$ é definida para a transição t_j se e somente se

$$x(p_i) \geq w(p_i, t_j) \text{ para todo } p_i \in I(t_j) \quad \text{I}$$

Se $f(x, t_j)$ é definido, então seja $x' = f(x, t_j)$, onde

$$x'(p_i) = x(p_i) - w(p_i, t_j) + w(t_j, p_i) \text{ para } i = 1,2,\dots,n. \quad \text{II}$$

A asserção I assegura que a função de transição de estado só é definida para transições habilitadas. Já II assegura que o próximo estado depende da função peso de cada arco de entrada e saída de uma transição. Além disso, de acordo com II, se p_i é um lugar de entrada de uma transição t_j , então ele perde tantas fichas quantas forem o peso do arco que o conecta a transição t_j , e se p_i é um lugar de saída da transição t_j ele ganhará tantas fichas quantas forem o peso do arco que conecta t_j com o lugar p_i .

2.3 Grafo a Eventos

Um grafo a eventos é um caso particular de uma rede de Petri no qual para cada lugar da rede existe uma única transição de chegada no lugar e uma única transição de saída do lugar. Além disso, os arcos que chegam nos lugares da rede e os arcos que saem dos lugares na rede são sempre simples (arcos de peso 1).

Até agora na discussão sobre redes de Petri houve primariamente a preocupação com a ordenação de eventos. Desse modo questões referentes a tempo de duração, período de ocorrência de um evento, não foram discutidas. No entanto, é importante

para a modelagem de sistemas a eventos discretos que se investigue questões temporais em redes de Petri. Assim, é necessário introduzir a noção de tempo em redes de Petri, particularmente em grafos a eventos. O tempo será introduzido na companhia das fichas nos lugares. Desse modo, a associação de tempo nos lugares caracterizará uma duração nos mesmos. Assim, durações associadas a lugares podem ser utilizadas para representar, por exemplo, tempo de transporte ou tempo de comunicação.

O *tempo de espera* em um lugar num grafo a eventos é o tempo que as fichas contidas naquele lugar devem gastar antes de contribuírem para a habilitação das transições de saída daquele lugar.

Seja o grafo a eventos descrito abaixo, com uma barra junto à ficha no lugar p_1 . Essa barra será usada para representar tempo (em unidades inteiras) de espera em grafos a eventos.

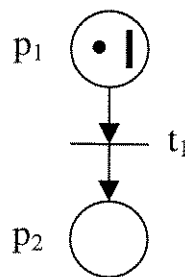


Figura 2.4: Rede de Petri temporizada

Nesta rede a transição t_1 só será habilitada depois que se completar o tempo de espera. Neste caso se refere a uma unidade de tempo. No que se segue, uma definição mais formal de grafo a eventos é fornecida.

Definição 2.8: Um grafo a eventos é uma rede de Petri $\langle P, T, A, w \rangle$ de tal forma que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- Para cada arco da rede a função peso associada é sempre 1.
- Para cada lugar da rede existe um único arco chegando e um único arco saindo.

Definição 2.9: Uma parametrização de um grafo a eventos é uma função $\mathcal{X} : P \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Uma parametrização define um vetor $\mathcal{X} = [\mathcal{X}(p_1), \mathcal{X}(p_2), \dots, \mathcal{X}(p_n)]$ onde n é o número

de lugares do grafo a eventos. A i -ésima entrada do vetor define o número de fichas e barras no lugar p_i . Graficamente fichas e barras são representadas por pares ordenados (m, d) , onde m representa fichas e d representa barras.

Definição 2.10: Um grafo a eventos parametrizado é uma quintupla $\langle P, T, A, w, \mathcal{X}_0 \rangle$, onde $\langle P, T, A, w \rangle$ é um grafo a eventos e \mathcal{X}_0 é uma parametrização inicial.

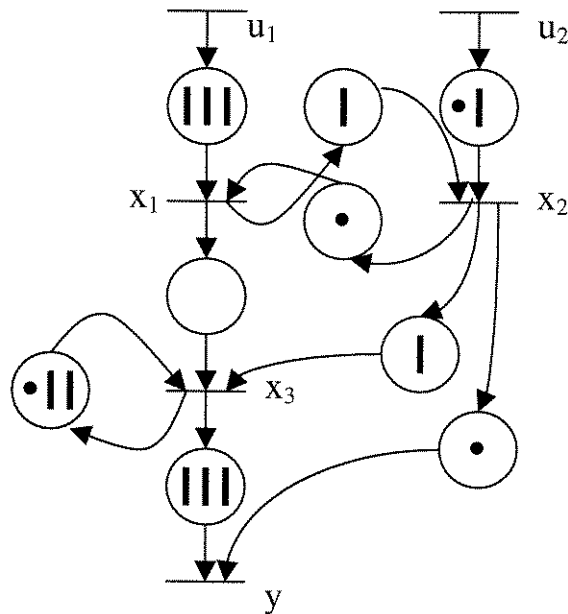


Figura 2.5: Grafo a eventos

A figura acima mostra um exemplo típico de Grafo a Eventos onde entende-se os pontos pretos como fichas e as barras nos lugares como unidades de tempo. O lugar após a transição u_1 ³ tem três unidades de tempo. Isto significa dizer que qualquer ficha que entre neste lugar terá que esperar três unidades de tempo antes de habilitar transição x_1 .

Uma característica importante de grafo a eventos é que não servem para modelar concorrência, ou seja, não modelam o "ou". Por outro lado servem prontamente para modelar o "e", desse modo, problemas de sincronismo são perfeitamente modelados, ver figura acima.

Os exemplos abaixo determinam situações que não são permitidas em grafos a

³ Quando o contexto permitir as letras u, x, y, \dots , também serão utilizadas para representar transições.

eventos.

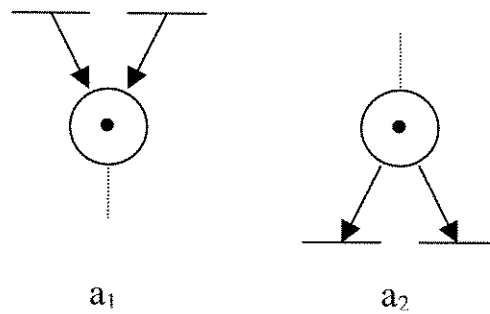


Figura 2.6: Representação de decisão numa rede de Petri

Aqui é encontrado um tipo duplo de problema: Em (a_1), as fichas podem chegar da transição da esquerda, ou da transição da direita. Em (a_2), encontra-se uma situação não determinística, uma vez que deve haver uma decisão sobre que transição deve disparar. Pode-se identificar aqui a ocorrência de competição, ou concorrência.

2.4 Representação de Grafo a Eventos pelo Dióide \mathcal{M}

Em grafos a eventos temporizados, as ocorrências de eventos estão associadas aos disparos das transições. Costuma-se rotular um tipo de evento pelo nome da transição correspondente. Para representar a evolução dinâmica da ocorrência de um evento, utilizar-se-á o plano $n \times t$, de modo que um ponto (i,j) neste plano indica que:

- no instante j ocorreram no máximo i disparos.
- o i -ésimo disparo ocorreu no mínimo no instante j .⁴

De uma maneira geral a trajetória de uma transição pode ser representada por uma curva composta de segmentos horizontais e verticais monotonamente crescente. Todos os pontos abaixo desta curva representam situações impossíveis, e todos os pontos acima, as situações possíveis. A curva propriamente dita determina a mais

⁴ Conforme Cohen et al (1989).

rápida execução possível da transição.

Num grafo a eventos, a relação entre as trajetórias das diversas transições é determinada pela topologia do grafo.

Na teoria proposta por Cohen et al (1989), estas trajetórias são relacionadas por equações algébricas lineares escritas num dióide apropriado.

Os elementos do dióide (ver apêndice A) são justamente as regiões do plano a sudeste da trajetória de uma transição.

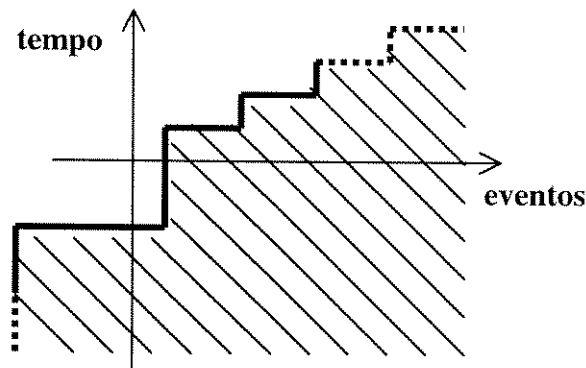


Figura 2.7: Elemento do dióide

As operações de soma e produto de elementos do dióide são definidas de modo a refletir as possíveis relações entre trajetórias diferentes do grafo a eventos. A soma entre elementos do dióide é representada pela união dos conjuntos de pontos, pois esta é a maneira como se compõe a informação em uma transição com mais de um lugar de entrada. O produto é definido como um deslocamento à direita e acima no plano $n \times t$, pois este é o efeito que um lugar produz na informação que nele entra.

No restante desta seção o dióide brevemente descrito acima é formalmente introduzido. Mostra-se também como estabelecer as equações neste dióide que descrevem um dado grafo a eventos.

2.4.1 Definição Formal do Dióide \mathcal{M}

No que segue uma descrição formal do dióide \mathcal{M} é apresentada. A definição deste dióide é feita a partir de séries formais de potências que são inicialmente descritas. Em seguida são expostas definições e propriedades referentes ao dióide \mathcal{M} .

Definição 2.11 (Séries formais de potências): Uma série formal de potências em variáveis p (comutativa) com coeficientes em \mathcal{D} é uma aplicação f de \mathbb{N}^p ou \mathbb{Z}^p em \mathcal{D} , de tal forma que para todo $k = (k_1, k_2, \dots, k_p) \in \mathbb{N}^p$ ou \mathbb{Z}^p , $f(k)$ representa os coeficientes de $z_1^{k_1} \dots z_p^{k_p}$.

Também denota-se equivalentemente uma série de potências por:

$$f = \sum_{k \in \mathbb{N}^p \text{ ou } \mathbb{Z}^p} f(k_1, \dots, k_p) z_1^{k_1} \dots z_p^{k_p}$$

Nota-se que, por exemplo $f(5)$ representa o coeficiente de z^5 , e não o valor numérico para a série quando $z = 5$.

Seja uma coleção de partes de informação $\{(n_i, t_i) \mid i \in I \subseteq \mathbb{N}\}$ sobre um tipo de evento. Essa coleção é um conjunto de pontos pertencentes ao plano inteiro \mathbb{Z}^2 . Representa-se essa trajetória de eventos discretos por uma função característica $\sum_{i \in I} \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$ onde a soma é a soma formal e γ e δ são variáveis formais. Neste caso γ pode ser interpretado como *operador atraso em contagem* e δ como *operador atraso em datação*.

Seja o grafo a eventos descrito abaixo.

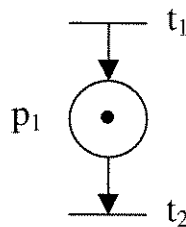


Figura 2.8: Atraso em contagem

Se $t_1 = \sum \gamma^j \delta^i$ então $t_2 = \gamma \sum \gamma^j \delta^i$. O mesmo ocorre para o grafo seguinte.

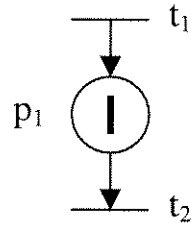


Figura 2.9: Atraso em datação

Se $t_1 = \sum \gamma^j \delta^j$ então $t_2 = \delta \sum \gamma^j \delta^j$.

A adição formal usual de séries de potência corresponde à definição anterior de somas dos cones a sudeste ? Como refletir esse fato para soma de séries de potências. A seguinte regra não usual deve ser adicionada :

$$\gamma^n \delta^t \oplus \gamma^r \delta^t = \gamma^{\min(n,r)} \delta^t \quad \text{I}$$

$$\gamma^n \delta^t \oplus \gamma^n \delta^r = \gamma^n \delta^{\max(t,r)} \quad \text{II}$$

Definição 2.12: Seja \mathcal{L} um conjunto formal de séries de potências em duas variáveis (γ, δ) e com coeficientes booleanos e expoentes em \mathbb{Z} .

Lema 2.13: O conjunto \mathcal{L} com as operações de soma e produto de séries de potências usuais é um dióide.

Nota-se que \mathcal{L} é um dióide, pois a soma é idempotente, o elemento e corresponde à série com coeficientes todos iguais a zero e o elemento ϵ é igual a $\gamma^0 \delta^0$. Graficamente, um elemento de \mathcal{L} é caracterizado por uma coleção de pontos em \mathbb{Z}^2 . Um monômio $\gamma^n \delta^t$ com coeficiente booleano 1 produz o ponto no plano inteiro (n,t) . Coeficientes booleanos nulos não produzem ponto algum. Portanto e corresponde ao conjunto vazio e ϵ corresponde a origem do plano. A adição corresponde a união de elementos, a multiplicação de dois elementos corresponde a soma vetorial da coleção de pontos associados. A ordem é a inclusão e \wedge representa a interseção.

Facilmente percebe-se que o dióide \mathcal{L} não é adequado para os propósitos de se ter somas e produtos de cones de informações resultando cones de informações, pois I e II não fazem parte das regras de cálculo usual em séries formais de potências. Objetiva-se que o monômio $\gamma^n \delta^t$ represente todo o cone a sudeste determinado pelo ponto (n,t) . Mas esse cone é denotado por $\gamma^n \delta^t \gamma^*(\delta^{-1})^*$. É importante observar que $\gamma^*(\delta^{-1})^* = (\gamma \oplus \delta^{-1})^*$. Desse modo obtém-se o esperado considerando-se o dióide \mathcal{L} módulo $(\gamma \oplus \delta^{-1})^*$. Ou seja, o quociente de \mathcal{L} por $(\gamma \oplus \delta^{-1})^*$.

Definição 2.14: O dióide Min-Max $\langle \gamma, \delta \rangle$ designado daqui para frente de \mathcal{M} é o dióide $\mathcal{L} / (\gamma \oplus \delta^{-1})^*$.

Observações:

I) Este dióide é comutativo, completo, e distributivo. Todas estas propriedades podem ser checadas facilmente. As interpretações gráficas de \oplus , \wedge , e \otimes como \cup , \cap e soma vetorial, permanecem válidas, sendo que agora as operações são aplicadas em elementos de \mathcal{M} , que são cones a sudeste.

II) Partindo da definição formal de \mathcal{M} , é fácil checar que todos os cálculos podem ser feitos usando-se praticamente as regras formais de séries de potências, e as regras adicionais expostas em I e II. É interessante pensar nos elementos de \mathcal{M} como classes de equivalência. Desse modo pode-se representá-los de várias formas. Como exemplo $e = \gamma^*(\delta^{-1})^* = \gamma^* = (\delta^{-1})^* = \gamma^* \oplus (\delta^{-1})^* = \gamma^0 = \delta^0 = \gamma^0 \delta^0$ em \mathcal{M} , mas não em \mathcal{L} . Com efeito, em cada classe de equivalência, existe um “minimal” e um “maximal” representativo, “minimal”, e “maximal” dizem respeito a ordem em \mathcal{L} . O “minimal” representativo, é obtido pela codificação somente dos pontos a extremo noroeste da área hachurada, na figura 2.7. O “maximal” é obtido pela codificação de todos os pontos na área hachurada da figura 2.7. Este “maximal” representativo é obtido algebricamente através da multiplicação de qualquer valor representativo por $\gamma^*(\delta^{-1})^*$.

III) Considere-se agora, como calcular $a \wedge b$ em \mathcal{M} . Antes de tudo, uma vez que o dióide é distributivo, é suficiente saber como calcular a expressão quando a e b forem

monômios. Então a operação \wedge é dada por :

$$\gamma^n \delta^t \wedge \gamma^r \delta^s = \gamma^{\max(n,r)} \delta^{\min(t,s)}$$

IV) \mathcal{M} não é um dióide arquimediano. Um contra exemplo disto é dado por:

$$\gamma^n \delta^{-\infty} \otimes \infty = \gamma^{-\infty} \delta^{-\infty} \neq \infty \text{ o qual contradiz o teorema A.16.}$$

2.4.2 Equações associadas a um Grafo a Eventos

Nesta subseção apresenta-se o procedimento de modelagem de um grafo a eventos. Este permite o desenvolvimento de equações lineares associadas ao grafo a eventos descritível no dióide \mathcal{M} . A cada transição do grafo a eventos associa-se um elemento do dióide \mathcal{M} , que representa o conjunto de informações disponíveis sobre as ocorrências de eventos relacionados a essa transição. Esse elemento será chamado pelo nome da transição. Por exemplo, se “ x_1 ” é o nome de uma transição então x_1 representará um elemento de \mathcal{M} , um elemento que é definido como uma série formal de potências em duas variáveis com expoentes inteiros, coeficientes booleanos e representando classes de equivalência. Esse elemento x_1 descreve o comportamento dinâmico da trajetória de disparos associada à transição de nome “ x_1 ”. Objetiva-se mostrar que todo grafo a eventos pode ser modelado por um sistema de equações algébricas no dióide \mathcal{M} .

Definição 2.15: O conjunto θ de equações no dióide \mathcal{M} associados a um grafo a eventos é descrito da seguinte forma:

$$x_i = \sum_{j=1}^n \gamma^{m_{ij}} \delta^{d_{ij}} x_j$$

onde :

- m_{ij} e d_{ij} são respectivamente a marcação inicial e o atraso do lugar cuja transição de entrada é x_j e cuja transição de saída é x_i .⁵

⁵ A variável x está sendo utilizada para representar a trajetória dos disparos da transição de nome “ x ”.

A figura 2.10 ilustra a definição acima.

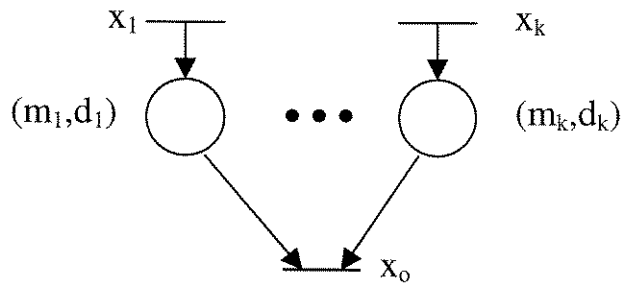


Figura 2.10: Descrição no dióide \mathcal{M} de um grafo a Eventos

As fórmulas associadas ao grafo a eventos da figura 2.10 são dadas por:

$$x_0 = \sum_{j=1}^k \gamma^{m_j} \delta^{d_j} x_j$$

Exemplo 2.16: Seja o grafo a eventos descrito a seguir para um sistema a eventos discretos.

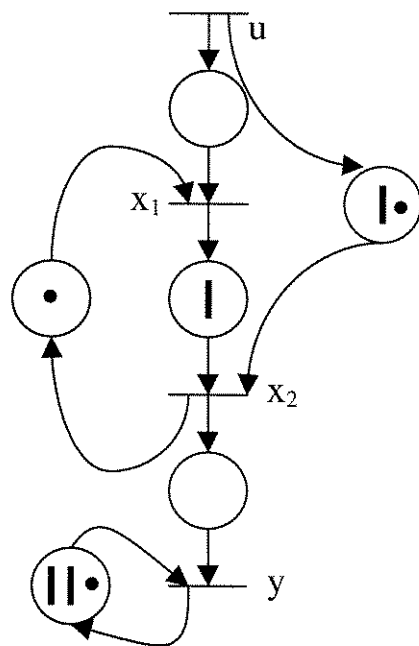


Figura 2.11: Grafo a eventos do exemplo 2.16

As equações associadas a esse grafo a eventos são:

$$\begin{aligned}x_1 &= u \oplus \gamma x_2 \\x_2 &= \gamma \delta u \oplus \delta x_1 \\y &= x_2 \oplus \gamma \delta^2 y\end{aligned}$$

Essas equações são do tipo:

$$\begin{aligned}x &= Ax \oplus Bu \\y &= Cx\end{aligned}$$

onde x , y e u são vetores colunas e A , B , C são matrizes com entradas em \mathcal{M} .

2.4.3 Representação Entrada/Saída de Grafos a Eventos

Resolver equações do tipo $x=Ax\oplus Bu$ e $y=Cx$ significa encontrar a saída y do sistema, sempre que uma entrada u for fornecida. Sabe-se que a equação $x=Ax\oplus Bu$ não tem solução única em geral, mas o que interessa é a menor solução, desde que isto corresponde as datas mais cedo possível para ocorrência de eventos (lembrando que transições são disparadas tão logo elas estejam habilitadas para o disparo). Desse modo, com o auxílio do lema A.24 , tem-se que

$$\begin{aligned}x &= A^*Bu \quad e \\y &= CA^*Bu.\end{aligned}$$

Essas equações especificam completamente o comportamento *entrada / saída* do sistema, haja visto que fornecida a entrada u tem-se a saída y .

Definição 2.17: A *matriz de transferência* do sistema modelado através de grafo a eventos num dióide \mathcal{M} é definida por $H = CA^*B$.

Em geral, H_{ij} corresponde a trajetória de y_i para todas as entradas $u_k = \varepsilon$ exceto para $u_j = e$. Este fato, comum em teoria de sistemas, é denominado *resposta ao impulso* de j para i . A entrada $\varepsilon = \gamma^{+\infty}\delta^{-\infty}$ pode ser interpretada como sendo que um número infinito de fichas está disponível em um lugar imaginário desde o início. Por outro lado, uma entrada $e = \gamma^* = \gamma^0\delta^0 \oplus \gamma^1\delta^0 \oplus \gamma^2\delta^0 \oplus \dots$ é chamada de impulso no tempo zero. Antes do tempo zero a transição de entrada está congelada e um número infinito de fichas ficam então disponíveis.

Para o grafo a eventos exposto na figura 2.5, tem-se que as matrizes e vetores colunas associados ao grafo a eventos são:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \delta & \gamma\delta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \delta^3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \gamma\delta \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma & \delta^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

E a função de transferência é dada por:

$$y = H_1 u_1 + H_2 u_2$$

$$y = \delta^8 (\gamma\delta^2)^* u_1 + \gamma\delta^5 (\gamma\delta^2)^* u_2$$

Capítulo 3

Lógica Modal NK

3.1 Introdução

Neste capítulo expõe-se a lógica a ser utilizada neste trabalho. No apêndice B apresenta-se uma revisão dos conceitos tradicionais de lógica clássica, inclusive correção e completude, analisados através de tableaux analíticos. Neste capítulo faz-se um desenvolvimento da lógica modal NK. Ao final demonstra-se os teoremas da correção e completude da lógica modal NK. Mais detalhes sobre lógica modal podem ser encontrados em Hughes e Cresswell (1968 e 1984) e Fitting (1983).

3.2 Fórmulas Proposicionais

Definição 3.1: A linguagem da lógica modal proposicional NK é definida como segue:

O *alfabeto* consiste de:

- Conectivos: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, G, D$.
- Variáveis proposicionais: p_1, p_2, \dots .¹
- Sinais de pontuação: $(,)$.

¹ Quando não houver dúvidas no contexto utilizar-se-á as letras x, y, z, p, q, r, \dots para representar variáveis proposicionais.

Definição 3.2: Por *expressão* entende-se qualquer seqüência finita construída a partir dos símbolos do alfabeto acima.

Definição 3.3: Como um subconjunto do conjunto das expressões tem-se o conjunto das *fórmulas*, definido recursivamente como segue:

- Fórmula atômica: variáveis proposicionais.
- Se X é fórmula então $(\neg X)$ é fórmula.
- Se X e Y são fórmulas, então $(X \wedge Y)$, $(X \vee Y)$, $(X \rightarrow Y)$, $(X \leftrightarrow Y)$, também são fórmulas.
- Se X é fórmula, então GX , DX , também o são.
- Só é fórmula o que advém das condições acima.

Definição 3.4: O conceito de *subfórmula* é definido com segue:

X é uma subfórmula de Y se

a) $X=Y$, ou

b) $Y=(Y_1 \wedge Y_2)$, ou $(Y_1 \vee Y_2)$, ou $(Y_1 \rightarrow Y_2)$, ou $(Y_1 \leftrightarrow Y_2)$, onde X é uma subfórmula de Y_1 ou de Y_2 , ou

c) $Y = (\neg Y_1)$ ou GY_1 , ou DY_1 , e X é subfórmula de Y_1 .

Obs.: Variável proposicional não tem subfórmula própria.

Definição 3.5: O *grau* de uma fórmula é o número de ocorrências dos símbolos \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow , G e D na fórmula. Assim:

- Variáveis proposicionais são de grau zero.
- Se X é de grau n então $(\neg X)$, GX e DX são de grau $(n + 1)$.
- Se X e Y são de graus n e m , então $(X \wedge Y)$, $(X \vee Y)$, $(X \rightarrow Y)$ e $(X \leftrightarrow Y)$ são de graus $(n+m+1)$.

3.2.1 Modalidades

Entendendo-se cada operador modal (G e D) como símbolos, define-se modalidade como sendo qualquer seqüência finita, possivelmente vazia de operadores G e D. Por exemplo G, GGD, GDDDG, DDGD,

Escreve-se

$$\phi^n X$$

para indicar que a fórmula X está sujeita a n iterações da modalidade ϕ , onde n pode assumir 0,1,2,3,... .

Definição 3.6: Para qualquer modalidade ϕ , tem-se que:

- $\phi^0 X = X$.
- $\phi^n X = \phi\phi^{n-1} X$, para $n > 0$.

Lema 3.7: Para qualquer modalidade ϕ .

- $\phi^n X = \phi\phi^{n-1} X = \phi^{n-1}\phi X$, para $n > 0$.

3.3 Modelos Modais Proposicionais NK

Apresenta-se no que se segue modelos baseados na semântica de mundos possíveis para a lógica modal proposicional NK . A lógica modal proposicional NK pode ser vista como uma lógica modal contendo dois operadores independentes, a saber, o operador G e o operador D, analisados numa semântica de mundos possíveis. Um estudo sobre operadores modais independentes pode ser encontrado em Magossi (1994) e Gabbay et al (1993).

Definição 3.8: Seja W um conjunto não vazio e enumerável. Seus elementos serão

chamados de mundos possíveis e representados pela letra minúscula w .

Adota-se também a notação w, w', w'', \dots para representar mundos possíveis.

Definição 3.9: Para qualquer relação binária \underline{R} entre os elementos de W , define-se:

- $w \underline{R}^0 w'$ se e somente se $w = w'$.
- $w \underline{R}^n w'$ se e somente se existe $w'' \in W$ tal que $w \underline{R} w''$ e $w'' \underline{R}^{n-1} w'$, para $n > 0$.

Definição 3.10: Definem-se R e S como um par de *relações NK-binárias* em W se satisfizerem as seguintes condições :

Sejam $w', w'', w''' \in W$ distintos entre si. Para todo $w \in W$:

- Existe um e um único $w' \neq w$ tal que $w R w'$ e,
- Existe um e um único $w'' \neq w$ tal que $w S w''$ e,
- Existe um e um único $w''' \neq w$ tal que $w'' R w'''$ e $w' S w'''$.
- Não existe w' tal que $w R^n w'$ com $n > 1$ e $w S^n w'$ com $n > 1$.

Definição 3.11: O terno $\langle W, R, S \rangle$ é chamado de uma *estrutura* , onde W é um conjunto de mundos possíveis e R e S são relações binárias entre mundos.

Lema 3.12: Sejam $W = \{ w_{(i,j)} \mid (i,j) \in \mathbb{Z}^2 \}$ um conjunto de mundos e R e S relações binárias entre mundos. Então $\langle W, R, S \rangle$ é uma estrutura.

Demonstração: Como W é enumerável, é não vazio. Além disso existe uma função f de W em N bijetora. Seja h uma função de N em \mathbb{Z}^2 bijetora. A função $h \circ f$ é uma bijeção que fornece a enumeração $w_{(i,j)}$ dos elementos de W . Portanto W é um conjunto enumerável e não vazio, logo $\langle W, R, S \rangle$ é uma estrutura. ♦

Doravante as referências ao elementos do conjunto W serão entendidas como sendo referências aos elementos enumerados $w_{(i,j)}$ de W , para (i,j) pertencente a \mathbb{Z}^2 .

Definição 3.13: Seja W um conjunto enumerado de mundos possíveis .Para (i,j) e (r,s) pertencentes a \mathbb{Z}^2 , sejam \mathcal{R} e \mathcal{S} definidas como segue:

- $w_{(i,j)} \mathcal{R} w_{(r,s)}$ se e somente se $r = i-1$ e $j = s$.
- $w_{(i,j)} \mathcal{S} w_{(r,s)}$ se e somente se $r = i$ e $s = j-1$.

Lema 3.14: As relações \mathcal{R} e \mathcal{S} são um par de relações NK-binárias em \mathcal{W} .

A demonstração é uma simples verificação, ou seja, satisfazem as condições da definição 3.10.

Definição 3.15: Uma *valoração* definida sobre uma estrutura $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{S} \rangle$ onde \mathcal{R} e \mathcal{S} são um par de relações NK-binárias, é uma função $\mathcal{V}: \mathcal{F} \times \mathcal{W} \rightarrow \{t, f\}$ onde \mathcal{F} é o conjunto das fórmulas de NK, satisfazendo as seguintes condições para X, Y fórmulas:

- $\mathcal{V}(p_i, w) = t$ ou $\mathcal{V}(p_i, w) = f$, para todo $i \in \mathcal{N}$.³
- $\mathcal{V}(\neg X, w) = t$ sse $\mathcal{V}(X, w) = f$.
- $\mathcal{V}(X \wedge Y, w) = t$ sse $\mathcal{V}(X, w) = \mathcal{V}(Y, w) = t$.
- $\mathcal{V}(X \vee Y, w) = t$ sse $\mathcal{V}(X, w) = t$ ou $\mathcal{V}(Y, w) = t$.
- $\mathcal{V}(X \rightarrow Y, w) = t$ sse $\mathcal{V}(X, w) = f$ ou $\mathcal{V}(Y, w) = t$.
- $\mathcal{V}(X \leftrightarrow Y, w) = t$ sse $\mathcal{V}(X, w) = \mathcal{V}(Y, w)$.
- $\mathcal{V}(DX, w) = t$ sse $\exists w' \in \mathcal{W}$ tal que $w \mathcal{S} w'$ e $\mathcal{V}(X, w') = t$.
- $\mathcal{V}(GX, w) = t$ sse $\exists w' \in \mathcal{W}$ tal que $w \mathcal{R} w'$ e $\mathcal{V}(X, w') = t$.

Obs.: Se $\mathcal{V}(X, w) = t$ denota-se por $w \models X$ e lê-se “ w força X ”. Escreve-se $w \not\models X$ como uma abreviação para *não* $w \models X$.

Como cada w é visto intuitivamente como um ponto do plano cartesiano, com indicação dada por $w_{(i,j)}$, tem-se que as condições g) e h) acima podem ser rescritas da seguinte maneira:

$$g') w_{(i,j)} \models GX \text{ sse } (\exists w_{(r,s)} \in \mathcal{W})(w_{(i,j)} \mathcal{R} w_{(r,s)} \text{ e } w_{(r,s)} \models X).$$

$$h') w_{(i,j)} \models DX \text{ sse } (\exists w_{(r,s)} \in \mathcal{W})(w_{(i,j)} \mathcal{S} w_{(r,s)} \text{ e } w_{(r,s)} \models X).$$

² O uso do *ou* apenas neste ítem a) é exclusivo.

³ Diz-se que uma fórmula X é verdadeira em w se $\mathcal{V}(X, w) = t$ e que X é falsa em w se $\mathcal{V}(X, w) = f$.

Definição 3.16: Um *modelo proposicional modal* para NK é uma quadra $\langle W, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{V} \rangle$, onde W é um conjunto de mundos possíveis, \mathcal{V} é uma valoração e \mathcal{R} e \mathcal{S} são um par de relações NK -binárias em W de tal forma que as condições da definição 3.15 sejam satisfeitas.

O objetivo intuitivo é que:

- $w \models GX$: X é verdadeiro no mundo w' acessível via relação \mathcal{R} a partir de w .
- $w \models DX$: X é verdadeiro no mundo w' acessível via relação \mathcal{S} a partir de w .

Definição 3.17: Diz-se que uma fórmula X é *verdadeira em um modelo* $\langle W, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{V} \rangle$ se, para cada $w \in W$ em $\langle W, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{V} \rangle$, tiver-se que $w \models X$.

Definição 3.18: Diz-se que uma fórmula X é *C-válida* (válida numa coleção de modelos) se X é válida em cada modelo $\langle W, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{V} \rangle$ em C (em símbolos, $\models_c X$).

Definição 3.19: Diz-se simplesmente que uma fórmula X é *válida* se X é válida em todos os modelos $\langle W, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{V} \rangle$ (em símbolos, $\models X$).

3.4 Propriedades Semânticas

Teorema 3.20: Seja $\langle W, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{V} \rangle$ um modelo proposicional modal NK qualquer e X e Y fórmulas quaisquer da linguagem. Então, para qualquer $w \in W$:

- 1) $w \models G(X \rightarrow Y) \rightarrow (GX \rightarrow GY)$.
- 2) $w \models D(X \rightarrow Y) \rightarrow (DX \rightarrow DY)$.
- 3) $w \models GDX \rightarrow DGX$.
- 4) $w \models DGX \rightarrow GDX$.

Demonstração:

- 1) Assume-se por hipótese que $w \models G(X \rightarrow Y)$ e $w \not\models GX \rightarrow GY$.

Assim:

i) $w \models G(X \rightarrow Y)$ sse

$\exists w' \mid w \not\mathcal{R} w' \text{ e } w' \models X \rightarrow Y$ sse

$w' \not\models X$ ou $w' \models Y$.

Também:

ii) $w \not\models GX \rightarrow GY$ sse

$w \models GX$ e $w \not\models GY$ sse

$(\exists w' \mid w \not\mathcal{R} w' \text{ e } w' \models X)$ e $(\exists w' \mid w \not\mathcal{R} w' \text{ e } w' \not\models Y)$.

Portanto, i) e ii) caracteriza uma contradição.

2) Procedimento análogo ao anterior.

3) Assume-se que $w \models GDX$ e $w \not\models DGX$.

Assim,

i) $w \models GDX$ sse

$\exists w' \mid w \not\mathcal{R} w' \text{ e } w' \models DX$ sse

$\exists w'' \mid w' \mathcal{S} w'' \text{ e } w'' \models X$.

Também,

ii) $w \not\models DGX$ sse

$\exists w_1 \mid w \mathcal{S} w_1 \text{ e } w_1 \not\models GX$ sse

$\exists w_2 \mid w_1 \not\mathcal{R} w_2 \text{ e } w_2 \not\models X$.

Portanto, pela definição 3.10 tem-se que $w'' = w_2$, logo i) e ii) caracteriza uma contradição.

4) A demonstração procede-se como no item anterior. ♦

3.5 Tableaux Analíticos e Notação Unificada

Nesta seção expõe-se conceitos relativos à lógica modal proposicional NK sob o

ponto de vista de tableaux analíticos. Um estudo mais detalhado sobre tableaux analíticos para a lógica proposicional clássica é exposto no apêndice B, e também encontrado em Smullyan (1968) e Fitting (1990).

Definição 3.21(Fórmulas assinaladas⁴): Sejam T e F dois símbolos formais. Por uma fórmula assinalada entende-se por TX ou FX , onde X é uma fórmula.

Definição 3.22: O grau de uma fórmula assinalada TX (ou FX) é o grau de X.

Num modelo $\langle W, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{V} \rangle$ diz-se que:

- $w \models TX$ sse $w \models X$
- $w \models FX$ sse $w \not\models X$

Assim, TX comporta-se como X e FX comporta-se como $\neg X$.

Exemplo 3.23: A partir da definição de modelo exposta anteriormente e da notação assinalada tem-se:

$w \models T(X \wedge Y)$ sse
 $w \models (X \wedge Y)$ sse
 $w \models X$ e $w \models Y$ sse
 $w \models TX$ e $w \models TY$.

Uma exposição análoga à exposta acima pode ser descrita para todas as condições sobre os operadores $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ e \leftrightarrow , anteriormente citadas.

Definição 3.24: Uma α - fórmula é qualquer fórmula de uma das seguintes formas: $T(X \wedge Y)$, $F(X \vee Y)$, $F(X \rightarrow Y)$ e $F\neg X$.

Para cada α -fórmula, dois componentes, α_1 e α_2 são definidos como sendo os componentes conjuntivos da fórmula α . A tabela abaixo especifica esses componentes.

⁴ Notação semelhante à utilizada para o cálculo proposicional clássico.

α	α_1	α_2
$T(X \wedge Y)$	TX	TY
$F(X \vee Y)$	FX	FY
$F(X \rightarrow Y)$	TX	FY
$F\neg X$	TX	TX

Tabela 3.1: Fórmulas do tipo α

Definição 3.25: Uma β - fórmula é qualquer fórmula de uma das seguintes formas:

$T(X \vee Y)$, $F(X \wedge Y)$, $T(X \rightarrow Y)$ e $T\neg X$.

As β -fórmulas e seus componentes disjuntivos β_1 e β_2 são definidos do seguinte modo:

β	β_1	β_2
$F(X \wedge Y)$	FX	FY
$T(X \vee Y)$	TX	TY
$T(X \rightarrow Y)$	FX	TY
$T\neg X$	FX	FX

Tabela 3.2: Fórmulas do tipo β

Estende-se o sistema de notação uniforme para que seja possível aplicar um tratamento semelhante aos operadores modais. Desse modo, diz-se que as fórmulas do tipo GX são as **v-fórmulas** e as fórmulas do tipo DX são as **π -fórmulas**. Respectivamente seus componentes são: v_0 e π_0 .

v-fórmulas		π -fórmulas	
v	v_0	π	π_0
TGX	TX	TDX	TX
FGX	FX	FDX	FX

Tabela 3.3: Regras modais de extensão de ramos

Isto completa o sistema de notação uniforme para a lógica modal NK . É possível definir alternativamente a relação \models para as fórmulas assinaladas na notação uniforme, da seguinte maneira:

Seja $\langle W, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{V} \rangle$ um modelo. Para qualquer $w \in W$ e para qualquer fórmula X ,

- 1) $w \models TX$ sse $w \not\models FX$
- 2) $w \models \alpha$ sse $w \models \alpha_1$ e $w \models \alpha_2$
- 3) $w \models \beta$ sse $w \models \beta_1$ ou $w \models \beta_2$
- 4) $w \models \nu$ sse $(\exists w')(w \mathcal{R} w' \text{ e } w' \models \nu_0)$
- 5) $w \models \pi$ sse $(\exists w')(w \mathcal{S} w' \text{ e } w' \models \pi_0)$

3.6 Tableaux Modais Analíticos NK

As regras α e β apresentadas anteriormente dizem respeito ao caso clássico e se referem a um único mundo possível. Como proceder para vários mundos possíveis ? Se $w \models DX$ então para um certo mundo w' relacionado com w , deve-se ter $w' \models X$. Como refletir esse fato para tableaux. A idéia mais imediata sugere a criação de tableaux alternativos (um tableau para cada mundo alternativo), mas isso pode tornar as provas um tanto confusas, perdidas em uma floresta de árvores. Um outro método consiste em criar nomes para eles ao invés de criar tableaux alternativos, e assim manipular seus nomes, isto nos dá um sistema de prova no qual um simples tableau é suficiente para a prova. Como os mundos percorrem os pontos de Z^2 , seus nomes serão indicados por pares ordenados do tipo (i,j) . As regras de acessibilidade serão criadas baseando-se na manipulação dos *nomes* dos mundos possíveis.

Se, por exemplo, encontrar-se num nó (i,j) de um ramo de um certo tableau a fórmula TDX , então deve-se entender que no mundo possível $w_{(i,j)}$, tem-se que $w_{(i,j)} \models TDX$. Desse modo, existe um mundo alternativo w' onde $w' \models X$. Mas esse mundo acessível w' é indicado por $w_{(i,j-1)}$. Segue-se então imediatamente abaixo da fórmula TDX , a fórmula TX com o *nome* $(i,j-1)$ a frente. Esse esquema é mostrado a seguir:

$$\begin{array}{ll} (k) \text{ TDX} & (i,j) \\ (k+1) \text{ TX} & (i,j-1) \end{array}$$

Isso sugere a seguinte regra para fórmulas que utilizem o operador modal D:

Regra π :

$$\begin{array}{ll} (m) \pi & (i,j) \\ (m+k) \pi_0 & (i,j-1) \end{array}$$

onde m é o número de alguma linha no tableaux e $k \geq 0$. Isto significa que, se uma fórmula π aparece na linha m , então em qualquer linha que seja sucessora de m , pode-se adicionar π_0 .

Segue-se o mesmo raciocínio para as fórmulas que utilizem o operador G:

Regra ν :

$$\begin{array}{ll} (m) \nu & (i,j) \\ (m+k) \nu_0 & (i-1,j) \end{array}$$

onde m é o número de alguma linha no tableaux e $k \geq 0$. Isto significa que, se uma fórmula ν aparece na linha m , então em qualquer linha que seja sucessora de m , pode-se adicionar ν_0 .

3.7 Tableau Proposicional Modal Prefixado

Definição 3.26: Um *prefixo* é um par ordenado (i,j) tal que $i,j \in \mathbf{Z}$.

Definição 3.27: Um prefixo $\sigma = (i,j)$ é dito *usado* num ramo de um tableau para fórmulas prefixadas se e somente se $\sigma = (i,j)$ já ocorreu anteriormente no ramo.

Uma *fórmula prefixada* σX , constitui-se de um prefixo σ ao lado de uma fórmula X . Similarmente uma fórmula prefixada assinalada σZ , significa um prefixo σ acompanhado pela fórmula assinalada Z . Doravante, sistematicamente adota-se

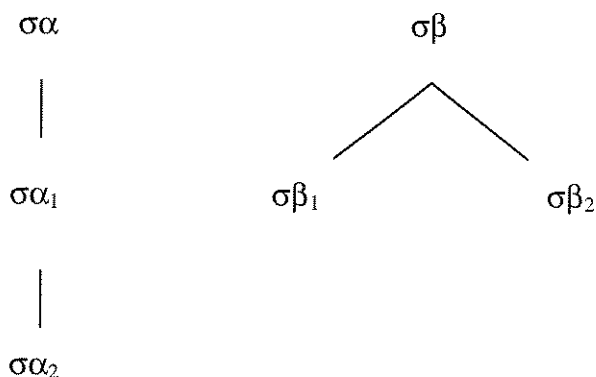
$\sigma, \sigma', \sigma'', \dots$ como prefixos.

Como, intuitivamente, um prefixo σ representa um *nome* para um mundo possível, objetiva-se que σX seja verdadeira em uma interpretação, se X for verdadeira no mundo cujo nome é σ .

As provas tableau começam sempre por " $(1) FX (i,j)$ ", caracterizando o mundo (i,j) onde a fórmula X não é forçada.

Sem perdas de generalidade, doravante nas provas tableau o prefixo será colocado no final da fórmula, sendo que o número inicial que a acompanha (no caso acima o número (1)), servirá apenas como um item didático de referência nas justificações das provas.

Informalmente tem-se, para os casos clássicos, que:



onde σ é um prefixo qualquer.

Definição 3.28: Um *tableau* é dito *prefixado* se ele contém apenas fórmulas prefixadas.

Definição 3.29: Um *ramo* de um tableau prefixado é *fechado* se ele contém σTX e σFX para alguma fórmula X proposicional e para algum prefixo σ .

Definição 3.30: Um *tableau* prefixado é *fechado* se todos os seus ramos são fechados.

Definição 3.31: Uma *prova* tableau é um tableau prefixado fechado começado por σFX para qualquer prefixo σ .

Doravante iniciar-se-á um tableau sempre com o prefixo $\sigma = (i,j)$, para $(i,j) \in \mathbf{Z}^2$.

Definição 3.32: Um prefixo $\sigma' = (r,s)$ é \mathcal{R} -*acessível* a partir de um prefixo $\sigma = (i,j)$ se e somente se $r = i-1$ e $s = j$.

Definição 3.33: Um prefixo $\sigma' = (r,s)$ é \mathcal{S} -*acessível* a partir de um prefixo $\sigma = (i,j)$ se e somente se $r = i$ e $s = j-1$.

Nota-se que como cada prefixo pertence ao conjunto \mathbf{Z}^2 , é imediato que a partir de qualquer $\sigma \in \mathbf{Z}^2$ sempre vai existir um prefixo σ' que seja \mathcal{S} -acessível, ou um prefixo σ' que seja \mathcal{R} -acessível.

As regras tableau são definidas como segue:

Regra ν : $\sigma\nu$
 $\sigma'\nu_0$

onde σ' é um \mathcal{R} -acessível a partir de σ .

Regra π : $\sigma\pi$
 $\sigma'\pi_0$

onde σ' é \mathcal{S} -acessível a partir de σ .

Exemplo 3.34: Seja $\langle W, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{V} \rangle$ um modelo e A uma fórmula proposicional. Então tem-se que a fórmula $DGA \rightarrow GDA$ é válida nesse modelo.

- | | | |
|------------------------------|-----------|---------------------|
| (1) F(DGA \rightarrow GDA) | (i,j) | |
| (2) TDGA | (i,j) | regra α em 1 |
| (3) FGDA | (i,j) | regra α em 1 |
| (4) TGA | (i,j-1) | regra π em 2 |
| (5) TA | (i-1,j-1) | regra ν em 4 |
| (6) FDA | (i-1,j) | regra ν em 3 |
| (7) FA | (i-1,j-1) | regra π em 6 |

X

O tableau fechou, pois há uma contradição nas linhas (5) e (7). Nota-se que nas linhas (1),(2) e (3) foram usadas regras de tableau proposicional clássico. Nas linhas (4) e (7) utilizou-se a regra π . Já nas linhas (5) e (6) a regra ν foi utilizada.

Como os mundos percorrem Z^2 é fácil ver que para qualquer mundo $w_{(i,j)}$ num modelo $\langle W, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{V} \rangle$ sempre existe um mundo $w_{(r,s)}$ e um mundo $w_{(m,n)}$ de tal forma que o prefixo (r,s) esteja relacionado com (i,j) via relação \mathcal{R} e o prefixo (m,n) esteja relacionado com (i,j) através da relação \mathcal{S} .

3.8 Correção

Definição 3.35: Sejam S um conjunto de fórmulas prefixadas e $\langle W, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{V} \rangle$ um modelo para a lógica modal NK . Uma *interpretação* de S num modelo significa uma aplicação I que associa a cada σ pertencente ao conjunto de prefixos de S um mundo possível pertencente a W , de tal forma que:

- Se σ' é \mathcal{R} -acessível a partir de σ então $I(\sigma) \mathcal{R} I(\sigma')$.
- Se σ' é \mathcal{S} -acessível a partir de σ então $I(\sigma) \mathcal{S} I(\sigma')$.

Obs.: Entende-se $I(\sigma)$ como um mundo de W enumerado pelo prefixo σ , também denotado por w_σ .

Definição 3.36: Diz-se que S é *satisfatível* sob uma interpretação I se, para cada $\sigma \in S$, tiver-se que $I(\sigma) \models Z$. Assim, diz-se que S é satisfatível se S é satisfatível sob alguma interpretação.

Definição 3.37: Um *ramo* de um tableau é *satisfatível* se o conjunto de fórmulas prefixadas que ele contém for satisfatível.

Definição 3.38: Um *tableau* é *satisfatível* se pelo menos um ramo for satisfatível.

Lema 3.39: Seja T um tableau prefixado que é satisfatível. Seja T' um tableau que resulta de uma simples regra tableau aplicada a T . Então T' é ainda satisfatível.

Demonstração: Se T é um tableau satisfatível devido a ocorrência de um ramo θ que é satisfatível e se uma simples regra tableau for aplicada a um ramo que não seja θ , então T' ainda é satisfatível. Analisa-se agora os casos onde uma simples regra tableau é aplicada ao ramo θ .

Caso 1: A regra aplicada é a regra α^5 .

Se a partir de θ a regra α é aplicada então tem-se que:

θ contém $S \cup \{ \alpha \}$, onde S é o conjunto de todas as fórmulas de θ diferentes da fórmula α . Assim T' será um dos três subcasos:

- i) $S \cup \{ \alpha, \alpha_1 \}$ ou
- ii) $S \cup \{ \alpha, \alpha_1, \alpha_2 \}$ ou
- iii) $S \cup \{ \alpha, \alpha_2 \}$.

Mas α_1, α_2 são verdadeiros sempre que α o for (pois as fórmulas comportam-se conjuntivamente). Desse modo em quaisquer subcasos T' será satisfatível.

Caso 2: A regra aplicada é a regra β^6 .

Supõe-se que a partir de θ aplica-se a regra β , ou seja, θ contém $S \cup \{ \beta \}$, onde S é o conjunto das fórmulas contidas em θ , mas que diferem de β . Assim tem-se um dos dois subcasos:

- i) $S \cup \{ \beta, \beta_1 \}$ ou
- ii) $S \cup \{ \beta, \beta_2 \}$.

Mas se β é verdadeiro então pelo menos um dos componentes de β será verdadeiro, isto é, ou β_1 será verdadeiro ou β_2 será verdadeiro ou ambos (as fórmulas β comportam-se disjuntivamente). Portanto como $S \cup \{ \beta \}$ é satisfatível então T' terá ao menos um ramo satisfatível, proveniente de $S \cup \{ \beta, \beta_1 \}$ ou proveniente de $S \cup \{ \beta, \beta_2 \}$. Assim em quaisquer subcasos T' será satisfatível.

⁵ Neste caso não é necessário fazer referências aos prefixos, haja visto que estes não se alteram quando manipulados classicamente.

⁶ Em concordância com o caso 1 não faz-se referências aos prefixos nas análises.

Caso 3: A regra aplicada é a regra v .

Supõe-se que a fórmula σv ocorre no ramo θ e a fórmula $\sigma'v_0$ é adicionada ao final do ramo θ . Como θ é satisfatível então existe uma I interpretação tal que se σ' é \mathcal{R} -acessível a partir de σ então $I(\sigma) \mathcal{R} I(\sigma')$. Mas $\sigma v \in \theta$ que é satisfatível, logo $I(\sigma) \models v$. Portanto, de $I(\sigma) \mathcal{R} I(\sigma')$ tem-se $I(\sigma') \models v_0$ e $\theta \cup \{v_0\}$ é satisfatível.

Caso 4: A regra aplicada é a regra π .

Se a fórmula $\sigma\pi$ ocorre no ramo θ então a fórmula $\sigma'\pi_0$ é adicionada ao final do ramo θ . Como θ é satisfatível então existe uma I interpretação de tal forma que se σ' é \mathcal{S} -acessível a partir de σ , então $I(\sigma) \mathcal{S} I(\sigma')$, o que implica que como $\sigma\pi \in \theta$ que é satisfatível então $I(\sigma) \models \pi$. Logo, como $I(\sigma) \mathcal{S} I(\sigma')$ tem-se que $I(\sigma') \models \pi_0$ e $\theta \cup \{\pi_0\}$ é satisfatível.

Conclui-se então, que \mathbf{T}' satisfatível. \blacklozenge

Teorema 3.40 (correção fraca): Se X tem uma prova tableau prefixada, então X é válida em todos os modelos $\langle W, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{V} \rangle$.

Demonstração: Supõe-se que X tem uma prova tableau, mas X não é válida. O tableau começa por (1) $FX(i,j)$, para qualquer par (i,j) . Como por hipótese X não é válida, significa que existe um mundo em um modelo $\langle W, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{V} \rangle$ onde X não é forçada. Seja uma interpretação I por estipular que esse mundo é $I((i,j)) = w$. Desde que X não é forçada em w , segue-se que o conjunto formado por $\{FX\}$ é satisfatível, e o tableau com o nó “(1) $FX(i,j)$ ” é satisfatível. Pelo lema anterior tem-se que cada extensão subsequente de um tableau satisfatível é ainda satisfatível. Mas um tableau satisfatível não pode ser fechado, contradizendo a hipótese de que X tem uma prova tableau. Assim, se X tem uma prova tableau, X é válida em todos os modelos. \blacklozenge

3.9 Completude

Tableaux são procedimentos de provas que dizem, por intermédio de suas regras

o que se pode fazer, e não o que se deve fazer. Tableaux são permissivos e não mandatórios. Assim, uma linha de um tableau é suficiente para se caracterizar que se tem um tableau. Quando saber o momento de se parar? Quantas vezes as regras devem ser aplicadas? A partir disso surge a pergunta: As regras são suficientes para provar todas as fórmulas válidas? É fácil verificar, por exemplo, que se eliminarmos a parte da esquerda da regra da conjunção, a fórmula $(p \wedge q) \rightarrow p$ que é uma tautologia não seria provada, enquanto que a fórmula $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$ seria provada. Para isso é importante que se desenvolva um procedimento que garanta que tudo o que pode ser feito numa prova tableau será feito, ou seja, se uma prova tableau existe, ela será encontrada.

Definição 3.41: Um *ramo* θ de um tableau para fórmulas prefixadas é dito *completo* se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:

- Se $\sigma\alpha \in \theta$ então $\sigma\alpha_1 \in \theta$ e $\sigma\alpha_2 \in \theta$.
- Se $\sigma\beta \in \theta$ então $\sigma\beta_1 \in \theta$ ou $\sigma\beta_2 \in \theta$.
- Se $\sigma\nu \in \theta$ então $\sigma'\nu_0 \in \theta$, para $\sigma \mathcal{R} \sigma'$.
- Se $\sigma\pi \in \theta$ então $\sigma'\pi_0 \in \theta$, para $\sigma \mathcal{S} \sigma'$.

Definição 3.42: Um tableau prefixado é *completado* se e somente se cada ramo é completo ou fechado.

Um tableau completado é aquele no qual tudo o que pode ser feito (no que diz respeito as regras) foi feito.

Definição 3.43: Um conjunto S de fórmulas prefixadas é *saturado* se:

- não se tem σTA e σFA para qualquer fórmula atômica A e prefixo σ .
- Se $\sigma\alpha \in S$ então $\sigma\alpha_1 \in S$ e $\sigma\alpha_2 \in S$.
- Se $\sigma\beta \in S$ então $\sigma\beta_1 \in S$ ou $\sigma\beta_2 \in S$.
- Se $\sigma\nu \in S$ então $\sigma'\nu_0 \in S$ onde σ' é \mathcal{R} -acessível a partir de σ .
- Se $\sigma\pi \in S$ então $\sigma'\pi_0 \in S$ onde σ' é \mathcal{S} -acessível a partir de σ .

Lema 3.44: Se S é um conjunto saturado de fórmulas prefixadas então S é satisfatível em um modelo cujos mundos possíveis são simplesmente os prefixos ocorrendo em

membros de S .

Demonstração:

Define-se uma valoração \mathcal{V} como segue:

Para cada fórmula atômica A e prefixo σ ,

- $\mathcal{V}(\sigma, A) = t$ se $\sigma TA \in S$.
- $\mathcal{V}(\sigma, A) = f$ se $\sigma FA \notin S$.
- $\mathcal{V}(\sigma, A) = t$ se nem σTA nem σFA pertencem a S .

É imediato a partir dessa valoração que cada fórmula assinalada atômica é verdadeira, pois esta valoração foi construída de modo a assegurar isso. Desse modo \mathcal{V} determina uma valoração sobre todas as fórmulas de S de tal forma que $\langle W, \mathcal{R}, S, \mathcal{V} \rangle$ seja um modelo para S . Prossegue-se por indução no grau das fórmulas. Seja agora um elemento $X \in S$ de grau maior que 0.

Hipótese Indutiva: Supõe-se que todos os elementos de S de grau menor que X são verdadeiros sob a valoração \mathcal{V} , deseja-se mostrar que X também é verdadeiro.

Caso 1: X é do tipo $\sigma\alpha$. Assim $\sigma\alpha_1 \in S$ e $\sigma\alpha_2 \in S$ (desde que S é saturado). Mas $\sigma\alpha_1$ e $\sigma\alpha_2$ são de grau menores que α , portanto pela hipótese indutiva $\sigma\alpha_1$ e $\sigma\alpha_2$ são ambos verdadeiros sob \mathcal{V} , o que implica que $\sigma\alpha$ também o é.

Caso 2: X é do tipo $\sigma\beta$. Assim $\sigma\beta_1 \in S$ ou $\sigma\beta_2 \in S$ pelo fato de S ser saturado. Mas se um deles está em S tem grau menor que X , logo pela hipótese indutiva é verdadeiro, implicando que $\sigma\beta$ também é verdadeiro sob \mathcal{V} .

Caso 3: X é do tipo σv . Assim $\sigma'v_0$ está em S para σ' \mathcal{R} -acessível a partir de σ e pela hipótese indutiva $\sigma'v_0$ é verdadeiro sob \mathcal{V} , o que implica que σv também é verdadeiro sob \mathcal{V} .

Caso 4: X é do tipo $\sigma\pi$. Assim $\sigma'\pi_0$ está em S para σ' \mathcal{S} -acessível a partir de σ e pela

hipótese indutiva $\sigma'\pi_0$ é verdadeiro sob \mathcal{V} . Logo, tem-se que $\sigma\pi$ também é verdadeiro sob \mathcal{V} .

Assim, mostrou-se que se $\sigma X \in S$ então $w_\sigma \models X$, para qualquer prefixo σ . ♦

Lema 3.45: Cada ramo aberto e completo de um tableau para fórmulas prefixadas é um conjunto saturado.

Demonstração:

Seja θ um ramo aberto e completo de um tableau para fórmulas prefixados. Como θ é aberto então não existe nenhuma fórmula atômica A tal que σTA e σFA estejam em θ . Isso satisfaz a primeira condição de conjunto saturado. Como θ é completo a segunda e terceira condições são comprovadas de modo direto. Como W percorre Z^2 sabe-se que, para qualquer prefixo σ existe sempre um prefixo σ' tal que σ' seja \mathcal{R} -acessível a partir de σ , então a quarta condição se satisfaz. Analogamente o mesmo se sucede com a quinta condição. Portanto, todo ramo aberto e completo de um tableau para fórmulas prefixadas é saturado. ♦

Teorema 3.46 (Completeness fraca): Se X é válida em todos os modelos $\langle W, \mathcal{R}, S, \mathcal{V} \rangle$ então cada tableau completado começado por σFX deve fechar em um sistema de fórmulas prefixadas.

Demonstração:

Supõe-se, por contraposição, que X não tem uma prova tableau para fórmulas prefixadas. Ou seja, o procedimento sistemático de se construir o tableau produziu um ramo aberto. Pelo lema anterior, cada ramo aberto é um conjunto saturado e como cada conjunto saturado é satisfatível, tem-se que esse ramo aberto é satisfatível. Portanto a origem também é satisfatível, o que implica que X não é válida. Portanto, se X é válida então X tem uma prova tableau. ♦

Nos exemplos seguintes, sejam $\langle W, \mathcal{R}, S, \mathcal{V} \rangle$ um modelo e A e B fórmulas atômicas.

Exemplo 3.47: A fórmula $GA \rightarrow \neg G\neg A$ é uma fórmula válida.

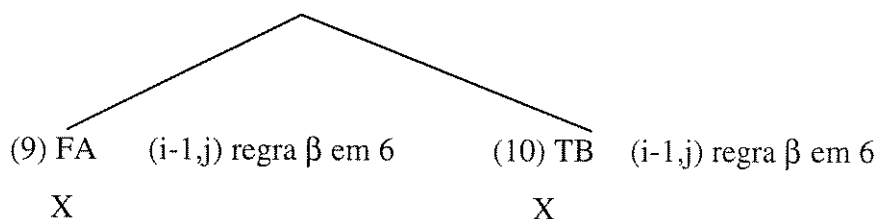
- | | | |
|--------------------------------------|---------|---------------------|
| (1) $F(GA \rightarrow \neg G\neg A)$ | (i,j) | |
| (2) TGA | (i,j) | regra α em 1 |
| (3) $F\neg G\neg A$ | (i,j) | regra α em 1 |
| (4) TA | (i-1,j) | regra \vee em 2 |
| (5) $TG\neg A$ | (i,j) | regra α em 2 |
| (6) $T\neg A$ | (i-1,j) | regra \vee em 5 |
| (7) FA | (i-1,j) | regra α em 6 |
| X | | |

Exemplo 3.48: A fórmula $DA \rightarrow GDA$ não é válida.

- | | | |
|-----------------------------|-----------|---------------------|
| (1) $F(DA \rightarrow GDA)$ | (i,j) | |
| (2) TDA | (i,j) | regra α em 1 |
| (3) $FGDA$ | (i,j) | regra α em 1 |
| (4) TA | (i,j-1) | regra π em 2 |
| (5) FDA | (i-1,j) | regra \vee em 3 |
| (6) FA | (i-1,j-1) | regra π em 5 |

Exemplo 3.49: A fórmula $G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$ é válida.

- | | | |
|---|---------|---------------------|
| (1) $FG(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$ | (i,j) | |
| (2) $TG(A \rightarrow B)$ | (i,j) | regra α em 1 |
| (3) $FGA \rightarrow GB$ | (i,j) | regra α em 1 |
| (4) TGA | (i,j) | regra α em 3 |
| (5) FGB | (i,j) | regra α em 4 |
| (6) $T(A \rightarrow B)$ | (i-1,j) | regra \vee em 2 |
| (7) TA | (i-1,j) | regra \vee em 4 |
| (8) FB | (i-1,j) | regra \vee em 5 |



3.10 Conseqüência Lógica e Dedutibilidade

Classicamente, diz-se que a fórmula X é conseqüência lógica de um conjunto Γ de fórmulas (em símbolos, $\Gamma \models X$) sempre que, qualquer valoração booleana v que torne as fórmulas de Γ verdadeiras torne X também verdadeira. Pode-se entender a lógica clássica como sendo um modelo modal contendo um único mundo possível. Assim, a noção de satisfatibilidade (por exemplo) seria aplicada a apenas um mundo desse modelo. Mas lógicas modais tem em geral muitos mundos acessíveis, e a noção de conseqüência é um pouco mais complicada. Esta pode ser caracterizada por:

- A fórmula X é verdadeira em cada *modelo* em que as fórmulas de Γ são verdadeiras.
- A fórmula X é verdadeira em cada *mundo possível* em que as fórmulas de Γ são verdadeiras.

Neste texto a notação $\Gamma \models X$ será utilizada para representar conseqüência lógica no que se refere a cada modelo, ou seja “válido em cada modelo”.

Por outro lado, a noção de dedutibilidade é uma noção sintática, e será definida em termos de provas tableaux. A notação utilizada será a tradicional (através do símbolo \vdash_{dt}), mas acompanhado de um índice inferior (*dt* significando *dedutibilidade em tableaux*) para diferenciar este de seu uso comum em sistemas axiomáticos.

Definição 3.50: Sejam S um conjunto de fórmulas não assinaladas e X uma fórmula não assinalada. Um *tableau para X usando S como um conjunto de afirmações globais* significa um tableau começado por $\neg X$ e de tal forma que a seguinte condição seja satisfeita:

- A fórmula prefixada σZ pode ser adicionada em qualquer ponto do tableau para qualquer $Z \in S$ e qualquer prefixo σ que tenha sido usado ou não nos ramos do tableau.

Definição 3.51: Sejam S um conjunto de fórmulas e X uma fórmula qualquer. Escreve-se $S \models X$ para indicar que: X é válida em cada modelo no qual todos os membros de S são válidos. Comumente lê-se : X é *conseqüência lógica de S* .

Definição 3.52: Sejam $S = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ um conjunto de fórmulas não assinaladas e X uma fórmula não assinalada. Diz-se que X é **dedutível-tableaux a partir de S** (em símbolos, $S \vdash_{dt} X$) se e somente se existir um tableau fechado completado para X usando S como um conjunto de afirmações globais.

Em outras palavras, diz-se que $S \vdash_{dt} X$ ⁷ se e somente se existe um tableau fechado que começa com FX e de tal forma que em qualquer ponto deste tableau seja possível adicionar todas as fórmulas de S como verdadeiras⁸ para qualquer prefixo σ .

No que se segue expõe-se alguns exemplos ilustrativos sobre dedutibilidade em tableaux.

Exemplo 3.53(Primeira ilustração do conceito de dedutibilidade em tableaux):

Sejam $\langle W, \mathcal{R}, S, \mathcal{V} \rangle$ um modelo proposicional modal, $S = \{DA\}$ um conjunto de fórmulas e $X = GDA$ uma fórmula. Verifica-se que $S \vdash_{dt} X$. A justificativa é feita logo após o tableau.

(1) FGDA	(i,j)
(2) FDA	(i-1,j)
(3) FA	(i-1,j-1)
(4) TDA	(i-1,j)
(5) TA	(i-1,j-1)
X	

Justificativa: A primeira linha do tableau contém a fórmula a ser falsificada. A segunda e terceira linhas são conseqüências diretas das regras ν e π respectivamente.

⁷ A notação $S \not\vdash_{dt} X$ será utilizada para representar que X não é dedutível-tableaux a partir de S .

⁸ Acrescentar fórmulas de S como verdadeiras significa acrescentar TX para qualquer que seja $X \in S$.

A quarta linha representa a fórmula DA que pertence a S que é um conjunto de afirmações globais, portanto pode ser adicionada em qualquer ponto do tableau para qualquer prefixo que já tenha sido usado ou não. O prefixo (i-1,j) já ocorre na linha (2), portanto é usado. Logo adiciona-se a fórmula TDA com o prefixo (i-1,j) na linha (4). Esse procedimento faz com que o tableau feche, caracterizando que $S \vdash_{dt} X$.

Exemplo 3.54(Segunda ilustração do conceito de dedutibilidade em tableaux):

Sejam $\langle W, \mathcal{R}, S, \mathcal{V} \rangle$ um modelo proposicional modal, $S = \{GA\}$ um conjunto de fórmulas e $X = GDA$ uma fórmula. Verifica-se que $S \vdash_{dt} X$.

(1) FGDA	(i,j)
(2) FDA	(i-1,j)
(3) FA	(i-1,j-1)
(4) TGA	(i,j-1)
(5) TA	(i-1,j-1)
X	

Justificativa: A fórmula GA é adicionada na terceira linha com o prefixo (i,j-1) que não é usado. Assim, obtém-se uma contradição nas linhas (3) e (6).

Obs.: Seja $\langle W, \mathcal{R}, S, \mathcal{V} \rangle$ um modelo proposicional modal NK. Sejam $S = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$ um conjunto de fórmulas e X uma fórmula. É importante notar que se $S \vdash_{dt} X$ então não se tem necessariamente que a fórmula $(X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_n) \rightarrow X$ seja válida.

Exemplo 3.55: Seja $S = \{A\}$ um conjunto de fórmulas e $X = GA$. Nota-se que $S \vdash_{dt} X$.

Porém $A \rightarrow GA$ não é uma fórmula válida. De fato, $\{A\} \vdash_{dt} GA$, pois

(1) FGA	(i,j)
(2) FA	(i-1,j)
(3) TA	(i-1,j)
X	

Mas, a fórmula $A \rightarrow GA$ não é válida, como mostra o tableau (aberto) a seguir.

(1) $F(A \rightarrow GA)$	(i,j)
(2) TA	(i,j)
(3) FGA	(i,j)
(4) FA	(i-1,j)

No que se segue mostra-se a prova da completude forte para um modelo proposicional modal $\langle W, \mathcal{R}, S, \mathcal{V} \rangle$.

Para a prova seguinte é necessário que se desenvolva um procedimento sistemático que garanta que cada tableau construído com base no procedimento sistemático seja tal que:

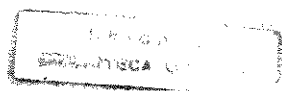
" Se o tableau tornar-se infinito então cada ramo infinito aberto será um conjunto saturado" .

Teorema 3.56(correção e completude fortes): Sejam S um conjunto de fórmulas não assinaladas e X uma fórmula não assinalada. Então $S \vdash_{dt} X$ se e somente se $S \models X$.

Demonstração:

- A parte da esquerda para a direita (correção forte) é obtido de modo análogo ao teorema da correção fraca feito anteriormente. Supõe-se que X é dedutível-tableaux a partir de S , mas $S \not\models X$. Logo, se $S \not\models X$ então existe um modelo no qual as fórmulas de S são verdadeiras e a fórmula X é falsa, ou seja, adicionando-se T a frente de todas as fórmulas de S e unindo-se com a fórmula FX formar-se-á um conjunto satisfatível. Assim, neste modelo, FX é verdadeira, logo o tableau começado por "(1) $FX \quad (i,j)$ " é satisfatível⁹. Mas, sabe-se que em um tableau satisfatível, cada extensão subsequente dele ainda é satisfatível. Portanto, como um tableau satisfatível não pode fechar, contradiz-se a hipótese inicial de que o tableau começado por FX é fechado, onde o conjunto S é um conjunto de afirmações globais.
- A parte da direita para a esquerda (completude forte) é abordada da seguinte

⁹Lembrando que nesse modelo o conjunto S é um conjunto de afirmações globais.



maneira. Supõe-se que não existe um tableau fechado para fórmulas prefixadas usando S como um conjunto de afirmações globais, mostra-se então que $S \neq X$. Para tal introduz-se um *procedimento sistemático* para a construção do tableaux. Supõe-se que os membros de S estejam arranjados da seguinte maneira:

$S: A_1, A_2, A_3, \dots$

- Sejam os prefixos $(i,j) \in \mathbf{Z}^2$ enumerados da seguinte maneira:

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$

Supõe-se então que existe pelo menos um ramo θ aberto para o tableau.

Estágio 0:

Começa-se o tableau por “(1) $FX \quad (i,j)$ ”. Utiliza-se o procedimento esboçado anteriormente na prova da completude fraca até completar o tableau .

Considere agora que o procedimento encontra-se no estágio n .

Estágio n :

Para cada ramo aberto θ do tableau completado construído até este estágio:

Adicione no final de θ para cada prefixo σ_i , tal que $i \leq n$, as fórmulas prefixadas $\sigma_i TA_1, \sigma_i TA_2, \dots, \sigma_i TA_n$. Proceda-se até completar o tableau .

Ao final do procedimento sistemático, feito para $n = 1, 2, 3, \dots$ o tableau estará aberto. Logo, tem-se pelo menos um ramo aberto θ . Esse ramo aberto é um conjunto saturado, pois foi construído de modo a assegurar isso, ou seja em cada estágio n , procedia-se até completar o tableau naquele estágio. Se o procedimento sistemático terminar, então o ramo aberto que é saturado é satisfável (lema 3.44). Por outro lado, se o procedimento não terminar, então pelo lema de König¹⁰, esse tableau é uma árvore que tem finitos sucessores mas infinitos pontos, logo tem um ramo infinito. E esse ramo infinito é aberto e saturado (desde que o procedimento tenha sido seguido corretamente) portanto é satisfável. Mas o conjunto de fórmulas prefixadas em θ deve conter “(1) $FX \quad (i,j)$ ” desde que este é o começo do tableau, e além disso deve conter σTZ para cada $Z \in S$. Assim FX é satisfável, o que implica que X é falsa,

¹⁰ Lema de König: Uma árvore infinita, finitamente gerada deve ter um ramo infinito.

mas como θ é satisfatível, existe um modelo no qual as fórmulas de S são verdadeiras e X é falsa. Portanto, $S \not\models X$. Isso completa a prova. ♦

Capítulo 4

Verificação de Especificações em Sistemas a Eventos Discretos

4.1 Introdução

Objetiva-se analisar questões pertinentes à verificação de especificações em sistemas a eventos discretos. O escopo de tal estudo restringe-se a modelos de sistemas a eventos discretos obtidos por intermédio da ferramenta algébrica descrita no capítulo 2. Para tal, introduz-se preliminarmente a relação entre a lógica modal NK e o dióide \mathcal{M} . Também, um procedimento algorítmico para produzir implementações computacionais é estudado.

4.2 Correspondência entre a Lógica Modal NK e o Dióide \mathcal{M}

Definição 4.1: Uma função injetora que associa cada elemento do conjunto \mathcal{P} das variáveis proposicionais da lógica NK a um e um único elemento do dióide \mathcal{M} é chamada uma *função de ligação*. No que segue uma função da classe definida acima será simplesmente denotada por \mathcal{H} .

Seja $\mathcal{H} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$ uma função de ligação. Seja $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$ a imagem desta função. Considerando que \mathcal{H} , por definição é uma função injetora em \mathcal{M} , tem-se que é

possível definir uma função $\mathcal{I} : \mathcal{M}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{P}$ tal que $\mathcal{I} (\mathcal{F} (p)) = p$, para qualquer variável proposicional p . Em outras palavras, \mathcal{I} é a inversa de \mathcal{F} quando se restringe o conjunto \mathcal{M} ao conjunto $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$.

Definição 4.2: Dada uma função de ligação \mathcal{F} e a correspondente função \mathcal{I} , define-se uma \mathcal{I} -*interpretação* para a lógica NK como sendo uma valoração \mathcal{V} na qual, para todo $a \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ e para todo $i, j \in \mathbf{Z}$:

$$\mathcal{V}(w_{(i,j)}, \mathcal{I}(a)) = t \text{ se e somente se } a \geq \gamma^i \delta^j .$$

(Notação: $w_{(i,j)} \models_{\mathcal{I}} \mathcal{I}(a)$)

Observa-se que uma \mathcal{I} -interpretação atribui valor verdade para todas as variáveis proposicionais em todos os elementos de \mathcal{W} . Em consequência, e considerando as regras de atribuição de valor-verdade da lógica NK, todas as fórmulas da lógica tem seu valor-verdade univocamente determinado.

Definição 4.3: Diz-se que uma fórmula X de NK é \mathcal{I} -válida (em símbolos, $\models_{\mathcal{I}} X$) se e somente se ela for verdadeira em todas as \mathcal{I} -interpretações.

Teorema 4.4: Para $a, b, (a \oplus b) \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}$, a seguinte fórmula de NK é \mathcal{I} -válida:

$$\mathcal{I}(a \oplus b) \leftrightarrow (\mathcal{I}(a) \vee \mathcal{I}(b))$$

Demonstração: Seja $w_{(i,j)} \in \mathcal{W}$ um mundo qualquer de uma \mathcal{I} -interpretação; então:

$$\mathcal{V}(w_{(i,j)}, \mathcal{I}(a \oplus b)) = t$$

sse

$$(a \oplus b) \geq \gamma^i \delta^j \quad (\text{da definição de } \mathcal{I}\text{-interpretação})$$

sse

$$a \geq \gamma^i \delta^j \text{ ou } b \geq \gamma^i \delta^j \quad (\text{propriedade do dióide } \mathcal{M})$$

sse

$$\mathcal{V}(w_{(i,j)}, \mathcal{I}(a)) = t \text{ ou } \mathcal{V}(w_{(i,j)}, \mathcal{I}(b)) = t \text{ (da definição de } \mathcal{I}\text{-interpretação)}$$

sse

$$\mathcal{V}(w_{(i,j)}, (\mathcal{I}(a) \vee \mathcal{I}(b))) = t \quad (\text{da definição da semântica de NK})$$

Provou-se portanto que, em qualquer \mathcal{I} -interpretação, para qualquer $w_{(i,j)}$:

$$\mathcal{V}(w_{(i,j)}, \mathcal{I}(a \oplus b)) = t \text{ se e somente se } \mathcal{V}(w_{(i,j)}, (\mathcal{I}(a) \vee \mathcal{I}(b))) = t$$

Considerando-se a definição da semântica de NK, conclui-se que:

$$\models_{\mathcal{I}} \mathcal{I}(a \oplus b) \leftrightarrow (\mathcal{I}(a) \vee \mathcal{I}(b))$$

◆

Teorema 4.5: Para $a, \gamma^n \delta^d a \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ e $n, d \in \mathbb{Z}_+$, a seguinte fórmula de NK é \mathcal{I} -válida:

$$G^n D^d \mathcal{I}(a) \leftrightarrow \mathcal{I}(\gamma^n \delta^d a)$$

Demonstração: Seja $w_{(i,j)} \in W$ um mundo qualquer de uma \mathcal{I} -interpretação; então:

$$\mathcal{V}(w_{(i,j)}, G^n D^d \mathcal{I}(a)) = t$$

sse

$$\mathcal{V}(w_{(i-n,j-d)}, \mathcal{I}(a)) = t \quad (\text{da definição dos operadores G e D})$$

sse

$$a \geq \gamma^{i-n} \delta^{j-d} \quad (\text{da definição de } \mathcal{I}\text{-interpretação})$$

sse

$$\gamma^n \delta^d a \geq \gamma^i \delta^j \quad (\text{multiplicando-se os dois lados da inequação por } \gamma^n \delta^d)$$

sse

$$\mathcal{V}(w_{(i,j)}, \mathcal{I}(\gamma^n \delta^d a)) = t \quad (\text{da definição de } \mathcal{I}\text{-interpretação})$$

Provou-se portanto que, em qualquer \mathcal{I} -interpretação, para qualquer $w_{(i,j)}$:

$$\mathcal{V}(w_{(i,j)}, G^n D^d \mathcal{I}(a)) = t \text{ se e somente se } \mathcal{V}(w_{(i,j)}, \mathcal{I}(\gamma^n \delta^d a)) = t$$

Considerando-se a definição da semântica de NK, conclui-se que:

$$\models_{\mathcal{I}} G^n D^d \mathcal{I}(a) \leftrightarrow \mathcal{I}(\gamma^n \delta^d a)$$

◆

Um caso particular do teorema acima é aquele em que $a = e$ (elemento unitário

de \mathcal{M}). Tem-se então:

$$\models_{\mathcal{I}} G^n D^d \mathcal{I}(e) \leftrightarrow \mathcal{I}(\gamma^n \delta^d)$$

Seja $c = a \otimes b$ um elemento genérico de \mathcal{M}_{\otimes} . Considere-se agora o problema de se obter $\mathcal{I}(c)$ em função de $\mathcal{I}(a)$ e de $\mathcal{I}(b)$. De um modo geral, os elementos a , b e c podem ser representados por:

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^p \gamma^{n_i} \delta^{t_i} \\ b &= \sum_{j=1}^q \gamma^{m_j} \delta^{d_j} \\ c &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \gamma^{n_i+m_j} \delta^{t_i+d_j} \end{aligned}$$

Utilizando os teoremas anteriores, pode-se escrever:

$$\mathcal{I}(c) \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^p \bigvee_{j=1}^q \mathcal{I}(\gamma^{n_i+m_j} \delta^{t_i+d_j}) \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^p \bigvee_{j=1}^q G^{n_i} D^{t_i} \mathcal{I}(\gamma^{m_j} \delta^{d_j}) \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^p G^{n_i} D^{t_i} \bigvee_{j=1}^q \mathcal{I}(\gamma^{m_j} \delta^{d_j}) \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^p G^{n_i} D^{t_i} \mathcal{I}(b)$$

e, analogamente:

$$\mathcal{I}(c) \leftrightarrow \bigvee_{j=1}^q G^{m_j} D^{d_j} \mathcal{I}(a)$$

Teorema 4.6: Para qualquer $a \in \mathcal{M}_{\otimes}$, as seguintes fórmulas de NK são \mathcal{I} -válidas:

$$G\mathcal{I}(a) \rightarrow \mathcal{I}(a)$$

$$\mathcal{I}(a) \rightarrow D\mathcal{I}(a)$$

Demonstração:

a) $G\mathcal{I}(a) \rightarrow \mathcal{I}(a)$

Seja $w_{(i,j)} \in \mathcal{W}$ um mundo qualquer de uma \mathcal{I} -interpretação; então:

$$\mathcal{V}(w_{(i,j)}, G\mathcal{I}(a)) = t$$

sse

$$\mathcal{V}(w_{(i-1,j)}, \mathcal{I}(a)) = t \quad (\text{da definição do operador } G)$$

sse

$a \geq \gamma^{i-1} \delta^j$. (multiplicando-se a inequação por γ^{-1})

Se $a \geq \gamma^{i-1} \delta^j$ então $a \geq \gamma^i \delta^j$. (propriedade do dióide \mathcal{M} ;
observe-se que a recíproca não é verdadeira)

Logo, $a \geq \gamma^i \delta^j$

sse

$\mathcal{V}(w_{(i,j)}, \mathcal{I}(a)) = t$ (da definição de \mathcal{I} -interpretação)

Provou-se portanto que em qualquer \mathcal{I} -interpretação, para qualquer $w_{(i,j)}$:

Se $\mathcal{V}(w_{(i,j)}, G \mathcal{I}(a)) = t$ então $\mathcal{V}(w_{(i,j)}, \mathcal{I}(a)) = t$

Considerando-se a definição da semântica de NK, conclui-se que:

$$\models_{\mathcal{I}} G \mathcal{I}(a) \rightarrow \mathcal{I}(a)$$

b) $\mathcal{I}(a) \rightarrow D \mathcal{I}(a)$

Seja $w_{(i,j)} \in W$ um mundo qualquer de uma \mathcal{I} -interpretação; então:

$\mathcal{V}(w_{(i,j)}, \mathcal{I}(a)) = t$

sse

$a \geq \gamma^i \delta^j$. (da definição de \mathcal{I} -interpretação)

Se $a \geq \gamma^i \delta^j$ então $a \geq \gamma^i \delta^{j-1}$. (propriedade do dióide \mathcal{M} ;
observe-se que a recíproca não é verdadeira)

$a \geq \gamma^i \delta^{j-1}$

sse

$\mathcal{V}(w_{(i,j-1)}, \mathcal{I}(a)) = t$ (da definição de \mathcal{I} -interpretação)

sse

$\mathcal{V}(w_{(i,j)}, D \mathcal{I}(a)) = t$ (da definição do operador D)

Provou-se portanto que, em qualquer \mathcal{I} -interpretação, para qualquer $w_{(i,j)}$:

Se $\mathcal{V}(w_{(i,j)}, \mathcal{I}(a)) = t$ então $\mathcal{V}(w_{(i,j)}, D \mathcal{I}(a)) = t$

Considerando-se a definição da semântica de NK, conclui-se que:

$$\models_{\mathcal{I}} \mathcal{I}(a) \rightarrow D \mathcal{I}(a)$$

◆

O teorema anterior pode ser enunciado da seguinte forma alternativa: “Se uma valoração \mathcal{A} da lógica NK é uma \mathcal{V} -interpretação, então, para toda variável proposicional p , as fórmulas $Gp \rightarrow p$ e $p \rightarrow Dp$ são verdadeiras em todos os mundos sob a valoração \mathcal{A} ”. O teorema a seguir é a recíproca desta afirmação.

Teorema 4.7: Se \mathcal{A} é uma valoração da lógica NK tal que as fórmulas $Gp \rightarrow p$ e $p \rightarrow Dp$ sejam satisfeitas para todas as variáveis proposicionais em todos os mundos sob a valoração \mathcal{A} , então a valoração \mathcal{A} é uma \mathcal{V} -interpretação.

Demonstração: Seja $w_{(i,j)} \in W$ um mundo qualquer na valoração \mathcal{A} e sejam r e s números inteiros tais que $r \geq i$ e $s \leq j$;

se $\mathcal{A}(w_{(i,j)}, p) = t$ então $\mathcal{A}(w_{(i+1,j)}, Gp) = t$ (da def. da semântica do operador G)

se $\mathcal{A}(w_{(i+1,j)}, Gp) = t$ então $\mathcal{A}(w_{(i+1,j)}, p) = t$ (da hipótese do teorema)

se $\mathcal{A}(w_{(i+1,j)}, p) = t$ então $\mathcal{A}(w_{(i+2,j)}, Gp) = t$ (da def. da semântica do operador G)

...

se $\mathcal{A}(w_{(r,j)}, Gp) = t$ então $\mathcal{A}(w_{(r,j)}, p) = t$ (da hipótese do teorema)

...

se $\mathcal{A}(w_{(r,j)}, p) = t$ então $\mathcal{A}(w_{(r,j)}, Dp) = t$ (da hipótese do teorema)

se $\mathcal{A}(w_{(r,j)}, Dp) = t$ então $\mathcal{A}(w_{(r,j-1)}, p) = t$ (da def. da semântica do operador D)

...

se $\mathcal{A}(w_{(r,s+1)}, Dp) = t$ então $\mathcal{A}(w_{(r,s)}, p) = t$ (da def. da semântica do operador D)

Portanto, se $\mathcal{A}(w_{(i,j)}, p) = t$ então $\mathcal{A}(w_{(r,s)}, p) = t$.

Para mostrar que a valoração \mathcal{A} é uma \mathcal{V} -interpretação vai-se mostrar que se as equações $Gp \rightarrow p$ e $p \rightarrow Dp$ são satisfeitas então para cada variável proposicional p existe um elemento $a \in \mathcal{M}$ que pode ser associado à variável proposicional p através de uma função $p = \mathcal{V}(a)$ de modo que $\mathcal{A}(w_{(i,j)}, p) = t$ se e somente se $a \geq \gamma^i \delta^j$. Isto é feito construindo-se tal elemento. Considere-se o conjunto dos pares ordenados de número inteiros $\mathcal{I} = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid \mathcal{A}(w_{(i,j)}, p) = t\}$. O elemento desejado é definido por:

$$a = \sum_{(i,j) \in \wp} \gamma^i \delta^j$$

Mostra-se a seguir que $\mathcal{A}(w_{(i,j)}, p) = t$ se e somente se $a \geq \gamma^i \delta^j$, o que prova que \mathcal{A} é uma \mathcal{V} -interpretação.

a) Se $\mathcal{A}(w_{(i,j)}, p) = t$ então $a \geq \gamma^i \delta^j$ pela própria construção de a .

b) Se $a \geq \gamma^r \delta^s$ então $\sum_{(i,j) \in \wp} \gamma^i \delta^j \geq \gamma^r \delta^s$; portanto:

$$\exists (i,j) \in \wp / \gamma^i \delta^j \geq \gamma^r \delta^s.$$

Logo,

$$\mathcal{A}(w_{(i,j)}, p) = t \text{ e } r \geq i \text{ e } s \leq j.$$

Portanto, considerando o resultado no início desta demonstração:

$$\mathcal{A}(w_{(r,s)}, p) = t.$$

Conclui-se finalmente que $\mathcal{A}(w_{(i,j)}, p) = t$ se e somente se $a \geq \gamma^i \delta^j$ o que prova que $p = \mathcal{V}(a)$ e que a valoração é uma \mathcal{V} -interpretação. ♦

Lema 4.8: No dióide \mathcal{M} , $a \geq b$ se e somente se $\forall i,j \in \mathbb{Z}$:

não for o caso que $b \geq \gamma^i \delta^j$

ou

$$a \geq \gamma^i \delta^j$$

Demonstração:

a) Se $a \geq b$ então ((não ($b \geq \gamma^i \delta^j$)) ou ($a \geq \gamma^i \delta^j$))

A afirmação acima é equivalente a:

Se $a \geq b$ então ((se ($b \geq \gamma^i \delta^j$)) então ($a \geq \gamma^i \delta^j$))

que é equivalente a:

Se ($a \geq b$) e ($b \geq \gamma^i \delta^j$) então ($a \geq \gamma^i \delta^j$)

que é verdadeira em razão da transitividade do operador “ \geq ”

b) Se ((não ($b \geq \gamma^i \delta^j$)) ou ($a \geq \gamma^i \delta^j$)) então ($a \geq b$)

Por contraposição, vai-se assumir que não é o caso que ($a \geq b$);

Portanto deve existir um ponto (i,j) tal que: $(b \geq \gamma^i \delta^j)$ e não $(a \geq \gamma^i \delta^j)$

Esta última assertiva é exatamente a negação da premissa da afirmação (b) acima, completando a demonstração. ♦

Teorema 4.9: Para quaisquer $a, b \in \mathcal{M}_\gamma$, $a \geq b$ se e somente se a seguinte fórmula de NK for \mathcal{I} -válida:

$$\mathcal{I}(b) \rightarrow \mathcal{I}(a)$$

Demonstração: Seja $w_{(i,j)} \in \mathcal{W}$ um mundo qualquer de uma \mathcal{I} -interpretação; então:

$$\mathcal{V}(w_{(i,j)}, (\mathcal{I}(b) \rightarrow \mathcal{I}(a))) = t$$

sse

$$\mathcal{V}(w_{(i,j)}, \mathcal{I}(b)) = f \text{ ou } \mathcal{V}(w_{(i,j)}, \mathcal{I}(a)) = t \quad (\text{da semântica de NK})$$

sse

$$\text{não é o caso que } b \geq \gamma^i \delta^j \text{ ou } a \geq \gamma^i \delta^j \quad (\text{da definição de } \mathcal{I}\text{-interpretação})$$

sse

$$a \geq b \quad (\text{do lema 4.8})$$

o que completa a demonstração. ♦

Teorema 4.10: Se $x_i, i = 1, \dots, n$, são elementos do dióide \mathcal{M} , então:

O conjunto Θ de equações do tipo:

$$\Theta = \{ x_i = \sum_{j=1}^n \gamma^{m_{ij}} \delta^{d_{ij}} x_j \quad i=1, \dots, n \}$$

é satisfeito se e somente o conjunto Ω de NK-fórmulas :

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} p_i \leftrightarrow \bigvee_{j=1}^n G^{m_{ij}} D^{d_{ij}} p_j \\ Gp_i \rightarrow p_i \\ p_i \rightarrow Dp_i \\ (i = 1, \dots, n) \end{array} \right\}$$

for verdadeiro em todos os mundos de alguma valoração.

Demonstração:

a) (Se o conjunto Θ é satisfeito então as fórmulas de Ω são verdadeiras)

Seja a função \mathcal{F} de ligação e sua correspondente \mathcal{I} -interpretação. Fazendo-se a variável proposicional $p_i = \mathcal{I}(x_i)$ e a variável proposicional $p_j = \mathcal{I}(x_j)$ tem-se, imediatamente a partir dos teoremas 4.4, 4.5 e 4.6, que as fórmulas do conjunto Ω são verdadeiras para a \mathcal{I} -interpretação, e portanto são verdadeiras para todo $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$.

b) (Se as fórmulas do conjunto Ω são verdadeiras para todo $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ então Θ é satisfeito)

Se as fórmulas do conjunto Ω são verdadeiras para todo $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ então a função \mathcal{I} é uma \mathcal{I} -interpretação (teorema 4.7). Portanto, pelos teoremas 4.4 e 4.5 o conjunto Θ de fórmulas é satisfeito. \blacklozenge

De uma maneira geral, seja um sistema a eventos discretos descrito pelo conjunto de fórmulas Θ do dióide \mathcal{M} . Considere-se uma especificação de desempenho, expressa como uma igualdade ou desigualdade, linear no dióide \mathcal{M} . Caso a especificação seja expressa por uma igualdade, os teoremas 4.4 e 4.5 permitem obter uma fórmula (bicondicional) de NK correspondente à especificação. Caso a especificação seja expressa por uma desigualdade, o teorema 4.9, juntamente com os teoremas 4.4 e 4.5, permite a correspondência com uma fórmula (condicional) de NK. Uma especificação será considerada satisfeita se a fórmula que a exprime for satisfeita para *toda* solução do conjunto Θ , ou equivalentemente, para *qualquer* interpretação de NK que satisfaça o conjunto de fórmulas Ω . É possível portanto, associar a uma especificação dada uma fórmula X da lógica NK. Os resultados anteriores permitem inferir que:

Corolário 4.11: Uma especificação de desempenho expressa pela fórmula X de NK é satisfeita se e somente se a fórmula X for consequência lógica do conjunto Ω , ou seja:

$$\Omega \models_{\mathcal{I}} X$$

Demonstração:

a) (Se a especificação é satisfeita, então $\Omega \models_{\gamma} X$)

Neste caso, a fórmula X é satisfeita para qualquer solução do conjunto de fórmulas Θ . Consequentemente, para qualquer valoração na qual as fórmulas de Ω sejam satisfeitas, a fórmula X também será. Portanto $\Omega \models_{\gamma} X$.

b) (Se $\Omega \models_{\gamma} X$ então a especificação é satisfeita)

Neste caso considere-se uma solução genérica do conjunto Θ . Pelo teorema 4.10, tem-se que o conjunto Ω é verdadeiro para todo $(i,j) \in \mathbf{Z}^2$ e portanto a fórmula X também o é. Portanto a especificação é satisfeita. ♦

Como será visto no próximo capítulo, a análise de todas as soluções associadas ao conjunto Θ não é o único caso de interesse. Muitas vezes é importante considerar *apenas* a solução mínima dentre as que satisfazem ao conjunto Θ , ou seja, considera-se como solução para o conjunto Θ apenas sua solução mínima.

4.3 Modelagem de SED's via Lógica Modal NK

Como visto no capítulo 2, para qualquer sistema a eventos discretos descrito através de um grafo a eventos é possível estabelecer para este, um modelo algébrico com equações pertencentes ao dióide \mathcal{M} . No que se segue expõe-se o procedimento pelo qual se modelam tais sistemas. No capítulo 2 mostrou-se que os elementos do dióide \mathcal{M} são subconjuntos do plano \mathbf{Z}^2 enquanto que no capítulo 3 mostrou-se que este mesmo conjunto pode ser associado ao conjunto dos mundos possíveis utilizado na definição da semântica da lógica NK. Também no capítulo 2 mostrou-se que cada transição t_k de um grafo a eventos pode ser associada a um elemento do dióide \mathcal{M} que por sua vez, se as condições da definição 4.2 forem satisfeitas, pode ser associado a uma variável proposicional da lógica NK. No que se segue utilizar-se-á livremente a notação $\mathcal{P}(t_k)$ para designar a variável proposicional associada a uma transição de um grafo a eventos, assumindo-se que t_k é um elemento de \mathcal{M} . Desse modo se tem uma

correspondência (em termos de suas soluções) entre os elementos do dióide \mathcal{M} e os elementos da lógica modal NK. A seguir expõe-se de modo sintético a correspondência entre a lógica modal NK e o dióide \mathcal{M} num sistema a eventos discretos.

Elementos da Lógica	SED / Dióide \mathcal{M}
W	$Z^2 \equiv \mathcal{M}$
$w_{(i,j)} \in W$	$(i,j) \in Z^2$
$\mathcal{V}(t_k)$ (variável proposicional)	t_k (transição)
$\mathcal{V}(w_{(i,j)}, \mathcal{V}(t_k)) = t$	$t_k \geq \gamma^i \delta^j$

Tabela 4.1: Correspondência entre a Lógica NK e o Dióide \mathcal{M}

Definição 4.12: O conjunto Ω das fórmulas da lógica NK associado a um grafo a eventos é descrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 p_i &\leftrightarrow \bigvee_{j=1}^n G^{m_{ij}} D^{d_{ij}} p_j; \quad (i = 1, \dots, n) \\
 Gp_i &\rightarrow p_i; \quad (i = 1, \dots, n) \\
 p_i &\rightarrow Dp_i; \quad (i = 1, \dots, n)
 \end{aligned}$$

onde :

- m_{ij} e d_{ij} são respectivamente a marcação inicial e o atraso do lugar cuja transição de entrada é t_j e cuja transição de saída seja t_i .
- $p_i = \mathcal{V}(t_i)$ e $p_j = \mathcal{V}(t_j)$ para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, n$.

A figura 4.1 mostra um exemplo que ilustra a definição acima.

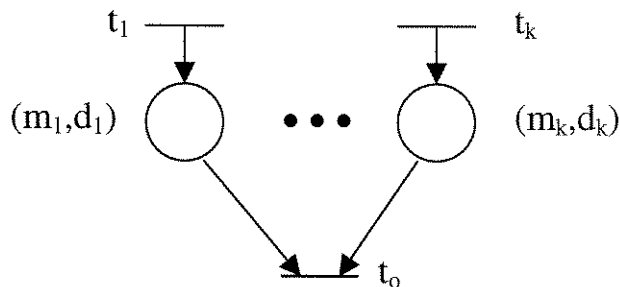


Figura 4.1: Descrição na Lógica NK de um Grafo a Eventos

Fórmulas associadas ao grafo a eventos

$$\varphi(t_0) \leftrightarrow \bigvee_{j=1}^k G^{m_j} D^{d_j} \varphi(t_j)$$

$$G\varphi(t_i) \rightarrow \varphi(t_i)$$

$$\varphi(t_i) \rightarrow D\varphi(t_i)$$

onde $i = 0, 1, 2, \dots, k$

Exemplo 4.13: Seja a rede de Petri (grafo a eventos) descrita a seguir para um sistema a eventos discretos.

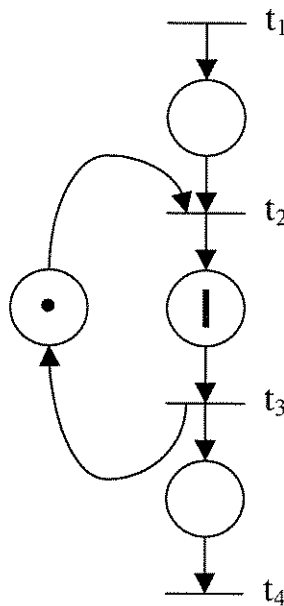


Figura 4.2: Grafo a eventos do exemplo 4.13

Para este sistema, pode-se escrever com base na definição 4.12 as seguintes fórmulas da lógica NK:

$$Dp_2 \leftrightarrow p_3$$

$$p_3 \leftrightarrow p_4$$

$$p_2 \leftrightarrow (p_1 \vee Gp_3)$$

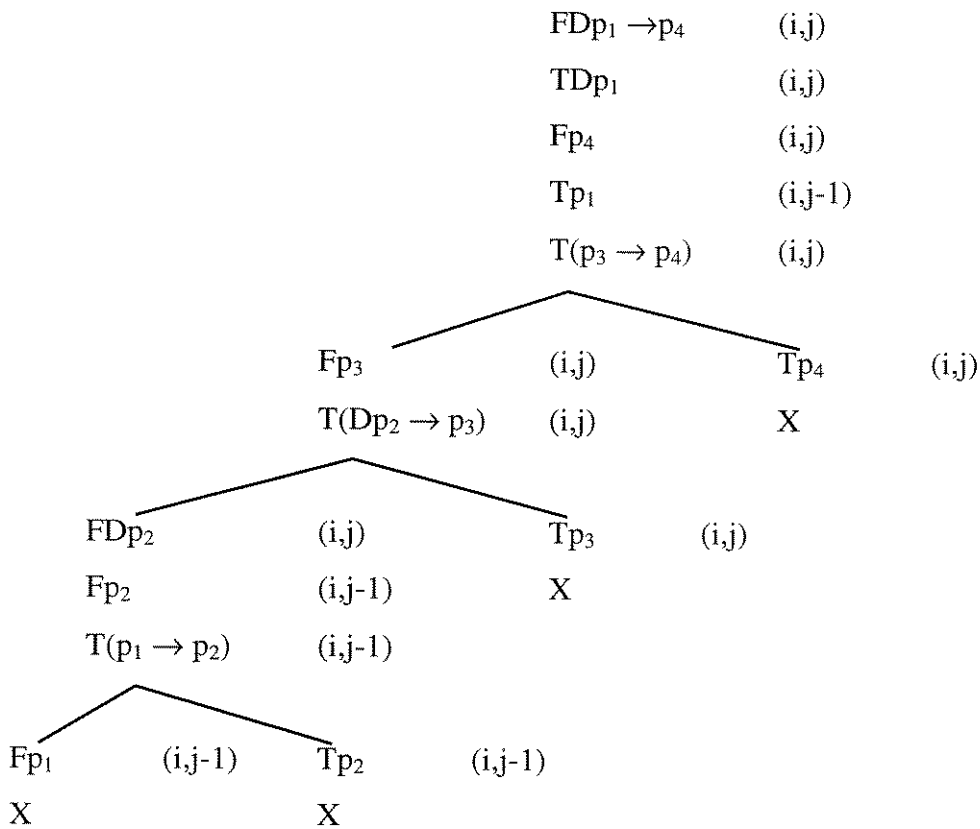
Além dessas, as seguintes fórmulas devem valer para qualquer transição:

$$\begin{aligned} p_i &\rightarrow Dp_i \\ Gp_i &\rightarrow p_i, \\ \text{para } i &= 0,1,\dots,4. \end{aligned}$$

Estas fórmulas descrevem um grafo a eventos num sistema a eventos discretos através da lógica modal NK. A partir dessa correspondência entre lógica e dióides é possível abordar questões tais como verificação de especificações num sistema a eventos discretos. O problema de verificação de especificações consiste em analisar dentro do sistema proposto se uma determinada especificação é satisfeita ou não. Para elucidar este tema, o exemplo 4.13 será utilizado. Supõe-se que se deseja verificar que no grafo a eventos descrito acima, a expressão $\delta t_1 \leq t_4$ é sempre satisfeita. Ou seja, não existe nenhuma situação onde a entrada do sistema deslocada de δ não seja menor que a saída do sistema.

A verificação de que a especificação é satisfeita por intermédio de tableaux analíticos, se resume em mostrar que a fórmula $Dp_1 \rightarrow p_4$ é consequência lógica do conjunto $\Omega = \{p_1 \rightarrow p_2, Gp_3 \rightarrow p_2, Dp_2 \leftrightarrow p_3, p_3 \leftrightarrow p_4, p_2 \rightarrow (p_1 \vee Gp_3)\}$, a qual estabelecerá que não existe modelo no qual as fórmulas do conjunto Ω sejam verdadeiras e a fórmula $Dp_1 \rightarrow p_4$ seja falsa. Isto implica no fato de que a especificação será sempre satisfeita quando as fórmulas que definem o sistema (grafo a eventos) o forem.

Para tal verificação utiliza-se o método tableaux descrito a seguir, cuja construção nesse momento do trabalho é arbitrária, sendo posteriormente sistematizada.



Como todos os ramos produziram contradição, o tableau é dito fechado. Portanto a fórmula $Dp_1 \rightarrow p_4$ é consequência lógica do conjunto Ω . Logo não existe um modelo $\langle W, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{V} \rangle$ onde as fórmulas de Ω sejam verdadeiras e a fórmula $Dp_1 \rightarrow p_4$ seja falsa.

4.4 Interpretação Gráfica da Lógica Modal NK no Dióide \mathcal{M}

Considerando-se o plano cartesiano $n \times t$ (definido na seção 2.4) onde n é associado ao número de disparos de uma transição e t é associado ao instante em que um disparo ocorre. A informação “o i -ésimo disparo ocorreu no mínimo no instante j ” ou equivalentemente “no instante t ocorreram no máximo n disparos” é representada por todo o cone a sudeste do ponto (i,j) . a figura 4.3 ilustra tal situação.

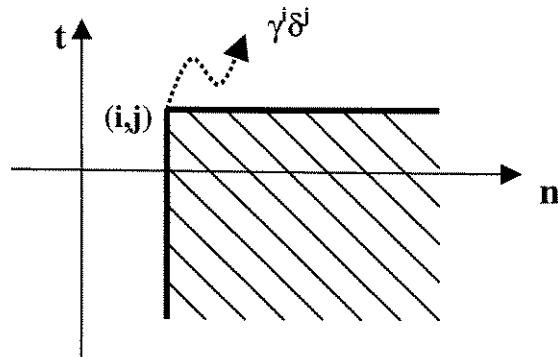


Figura 4.3: Representação no plano Z^2 do elemento $\gamma^i \delta^j$

Lembrando que $e = (0,0)$ é o elemento unitário do dióide \mathcal{M} , o elemento δe pode ser representado pela figura 4.4.

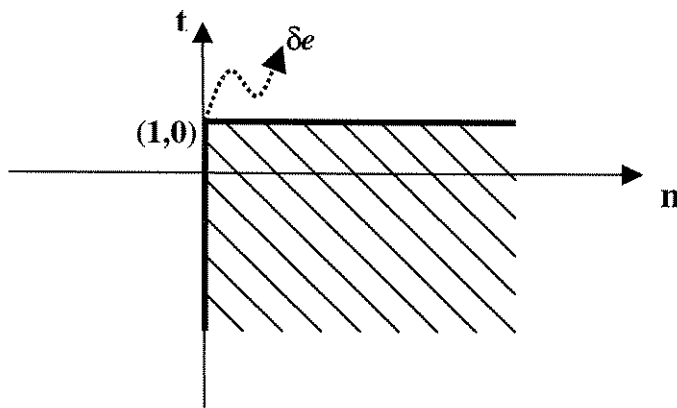


Figura 4.4: Representação no plano Z^2 do elemento δe

De modo análogo é possível em alguns casos analisar as fórmulas válidas e não válidas por intermédio de um gráfico no plano $n \times t$.

Como exemplo de análise, seja A uma variável proposicional da lógica NK e seja a fórmula $DA \rightarrow GA$ que não é válida. De fato, no dióide \mathcal{M} , esta fórmula representa a situação na qual se tem que $\delta \mathcal{H}(A) \leq \gamma \mathcal{H}(A)$, onde \mathcal{H} é uma função de ligação (definição 4.1). Para que esta fosse válida, o cone a sudeste determinado por $\delta \mathcal{H}(A)$ deveria estar contido no cone a sudeste determinado por $\gamma \mathcal{H}(A)$. Contudo isso não ocorre como pode ser verificado graficamente para $\mathcal{H}(A) = e$ na figura 4.5. É importante observar que a situação seria a mesma qualquer que fosse o valor de \mathcal{M}

associado à variável proposicional A pela função $\#$. Assim, verifica-se graficamente que a fórmula $GA \rightarrow DA$ é válida e a fórmula $DA \rightarrow GA$ não é válida.

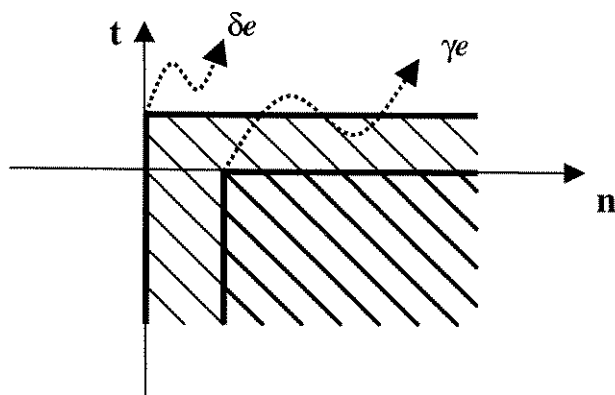


Figura 4.5: Representação no plano Z^2 dos elementos γe e δe

Exemplo 4.14: Seja agora o seguinte grafo a eventos.

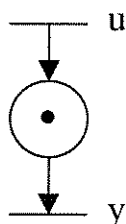


Figura 4.6: Grafo a eventos do exemplo 4.14

A descrição algébrica dessa rede por intermédio do dióide \mathcal{M} é dada por:

$$y = \gamma u.$$

A descrição por intermédio da lógica modal NK é dada por:

$$y \leftrightarrow Gu. \text{ }^1$$

Para qualquer entrada tem-se que a equação $y = Hu$ fornece a saída, para a função de transferência H dada por γ .

A entrada $u = e$ fornece como saída $y = \gamma$. Essa pode ser esquematizada no plano $n \times t$ por:

¹ Para a descrição do grafo a eventos do exemplo 4.14, além dessa fórmula, subentende-se as fórmulas do teorema 4.6. Além disso, u e y representam transições (elementos de \mathcal{M}) e quando não houver dúvidas serão utilizadas também para representar variáveis proposicionais associadas a transições.

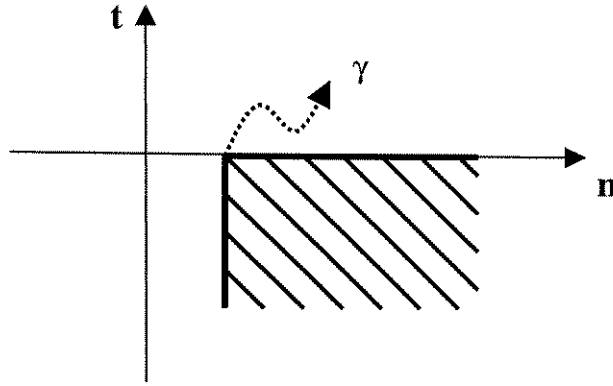
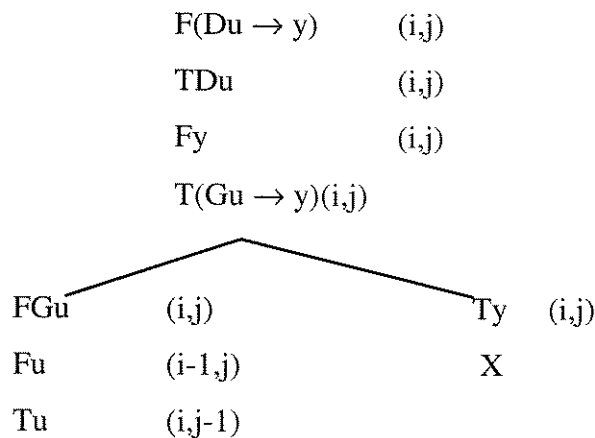


Figura 4.7: Representação da saída $y=\gamma$ no plano bidimensional

Para se verificar se $\delta u \leq y$, deve-se deslocar de δ a entrada u , e verificar se esta estará contida dentro do "cone a sudeste" determinado pela saída y . Torna-se evidente nessa rede que essa afirmação não é verdadeira. Utiliza-se a lógica modal NK para elucidar o procedimento desenvolvido para analisar essas questões. Entende-se $\delta u \leq y$ como a especificação a ser verificada, que na lógica modal NK é traduzida por $Du \rightarrow y$. Analisa-se via tableaux analíticos a possibilidade de falsificação dessa especificação. A impossibilidade de falsificação garante que a especificação é sempre satisfeita. Por outro lado, a falsificação da especificação resultará em caminhos indicando situações onde é possível falsificá-la.. Ou seja, um *modelo* (ou uma solução) onde ela é falsa.



Nota-se que existe um ramo que não é contraditório, logo o tableaux não fechou e a fórmula na origem do tableaux pode ser falsificada, ou seja, existe um modelo no qual ela é falsa. Tome o ponto $(1,1)$ do plano $n \times t$. Neste ponto a fórmula $Du \rightarrow y$ é

falsa. Assim, tem-se que δu não está contido na saída y . Graficamente tem-se que:

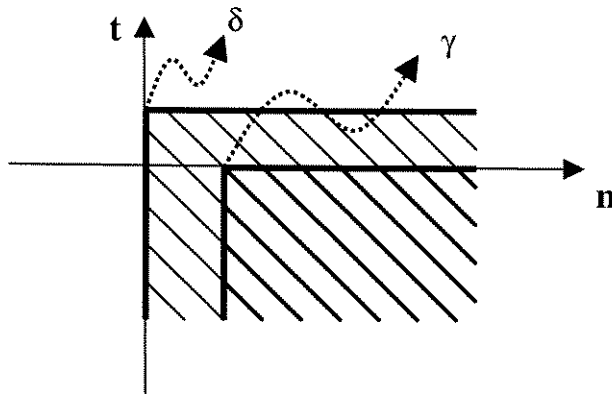


Figura 4.8: Representação entrada/saída da rede do exemplo 4.14

Nota-se que $y = \gamma$ não contém δ .

4.5 Algoritmos

Os exemplos da seção anterior são propositadamente simples para que se perceba a eficiência do método tableaux na verificação e também na descrição de um grafo a eventos. É evidente que para analisar exemplos que envolvam uma quantidade maior de variáveis², a simples verificação visual pode ser inviável. Uma implementação computacional torna-se necessária se se deseja analisar problemas de uma ordem maior de variáveis. No que se segue expõe-se um algoritmo capaz de realizar tal tarefa.

Um algoritmo baseado em tableaux analíticos construído para determinar se um dado grafo a eventos satisfaz uma dada especificação deve ser elaborado segundo as seguintes considerações:

- O primeiro nó do tableau deve conter a fórmula F_X , onde X representa a especificação expressa como uma NK-fórmula.
- Se uma α -fórmula ou uma β -fórmula ocorrer no ramo, então a respectiva regra deve ser imediatamente aplicada.

² Questões relacionadas à complexidade de algoritmos não serão abordadas neste trabalho.

- c) Se uma fórmula TY ocorre no ramo, então todas as fórmulas condicionais do conjunto Ω que tem Y como antecedente³ devem ser introduzidas no tableau.
- d) Se uma fórmula FY ocorrer no ramo, então todas as fórmulas condicionais do conjunto Ω que tem Y como conseqüente⁴ devem ser introduzidas no tableau.
- e) Se o ramo é fechado, então ele deve ser ignorado (até mesmo se ainda existem regras a serem aplicadas).
- f) Se o ramo não está fechado, então cada regra aplicável deve ser aplicada. Isto garante que cada contradição em potencial será explorada. Se não existem regras para serem aplicadas, então o ramo é dito aberto, e pode-se concluir que a especificação não é satisfeita.
- g) É possível que um ramo torne-se infinito devido a sucessivas aplicações das regras ν e π . Se, para uma certa seqüência de mundos, os valores verdades de todas as variáveis proposicionais repetem-se sucessivamente, então a aplicação das mesmas regras ν e π para esses mundos irá criar novos mundos onde os valores verdades das variáveis proposicionais serão os mesmos, ou seja, continuará ocorrendo repetição. Neste caso, torna-se claro que esse procedimento nunca conduzirá a contradições. Outras regras para mundos anteriores nessa seqüência devem ser aplicadas. Se não houver outras regras a serem aplicadas, então o ramo é considerado completo e aberto. Isto significa que pelo menos um modelo falsificando a especificação foi encontrado e ela não é satisfeita.

A justificação para a argumentação acima é antes de tudo intuitiva, mas pode ser facilmente mostrado a partir de resultados e definições estabelecidos no capítulo 3 que o algoritmo acima conduz a resultados exatos.

A estratégia simples de análise completa de um simples ramo (denominado de ramo corrente) será adotada. O problema de otimização da escolha de qual ramo analisar quando o ramo corrente é considerado completo ou quando uma bifurcação é produzida pela aplicação de uma regra β não será considerado neste momento. O seguinte algoritmo incorpora os procedimentos acima:

³ Isto funciona como a regra Modus Ponens da lógica clássica.

⁴ Isto funciona como a regra Modus Tollens da lógica clássica.

4.5.1 Algoritmo 1 : Verificação de Especificações

- 1) Inicialize o tableau com FX, onde X é a especificação expressa como uma NK-fórmula;
- 2) Se existem ramos incompletos no tableau, então selecione um como o ramo corrente; caso contrário pare;
- 3) Enquanto existirem α -fórmulas e β -fórmulas no ramo corrente, repita os passos 4), 5) e 6);
- 4) Selecione uma α -fórmula ou β -fórmula no corrente ramo e aplique a regra correspondente;
- 5) Para cada fórmula TY no ramo corrente, introduza no mesmo ramo todas as fórmulas do conjunto Ω que tenham Y como antecedente;⁵
- 6) Para cada fórmula FY no ramo corrente, introduza no mesmo ramo todas as fórmulas do conjunto Ω que tenham Y como conseqüente;⁶
- 7) Se resultar em contradição, então rotule o ramo de *fechado* e vá para o passo 2;
- 8) Se existem ν -fórmulas ou π -fórmulas no corrente ramo⁷, então selecione uma, aplique a regra apropriada e vá para o passo 3; caso contrário rotule o ramo corrente de *completo* e vá para o passo 2;

Nas análises de um grafo a eventos, freqüentemente não se tem muito interesse pelas soluções genéricas do conjunto θ de equações, mas sim pela solução mínima advinda do conjunto de todas as soluções possíveis. O conjunto de equações θ pode ser reescrito como:

$$x = Ax \oplus Bu$$

$$y = Cx$$

onde:

u é um vetor com transições de entrada como componentes;

⁵ As fórmulas do conjunto Ω não são assinaladas, portanto se $A \in \Omega$ e se A dever ser introduzida no ramo, então deve-se introduzir TA ao invés de simplesmente A.

⁶ Do mesmo modo que na observação anterior, introduz-se TA no ramo, desde que na fórmula A apareça FY como conseqüente.

⁷ Um ramo infinito, tal como descrito no item g) anterior, deve ser detectado neste ponto. Se tal ramo é encontrado, então as correspondentes regras ν e π não são mais aplicáveis.

y é um vetor com transições de saída como componentes;

x é um vetor circundado pelas outras transições do grafo a eventos.

Segundo Cohen et al. (1989), a solução mínima para esta equação é dada por⁸:

$$y = CA^*Bu$$

O corolário 4.11 deste trabalho estabelece que um modelo para o conjunto Ω (na lógica NK) é associado a uma solução genérica do conjunto θ , não necessariamente a solução mínima. Um outro algoritmo então se faz necessário para detectar se a solução obtida pelo algoritmo 1 é uma solução mínima ou não. É óbvio que, se a solução obtida não é a solução mínima, então a solução mínima não falsifica a especificação fornecida. Isto significa que o tableau é *considerado fechado* e que a especificação fornecida é satisfeita.

Como resultado do algoritmo 1, supõe-se que é conhecido um ramo aberto para o qual se deseja verificar se corresponde a uma solução mínima.

Ao ramo dado, está associada uma seqüência de mundos e em cada mundo algumas variáveis proposicionais terão valor-verdade atribuído.

Um algoritmo para detectar se a solução dada por um ramo aberto é mínima ou não será do tipo anterior (tableaux analítico) e deve observar as seguintes condições:

- a) Se alguma variável proposicional não tiver valor-verdade atribuído em algum mundo do algoritmo 1, isto deve ser feito de modo a não fechar o tableau e de preferência atribuindo à variável proposicional o valor f . Desta maneira a solução resultante do primeiro tableau⁹, será a menor (pois preferiu-se o valor verdade f) que não fecha o tableau.
- b) Os valores-verdade das variáveis de entrada devem ser os mesmos nos dois tableaux, pois deseja-se verificar se para uma mesma entrada os valores de outras transições podem ser menores (no sentido do dióide \mathcal{M}).
- c) O segundo tableau deve ser processado de modo a seguir a ordem de abertura de mundos observada no primeiro tableau. Os valores-verdade das outras variáveis

⁸ Ver capítulo 2 deste presente trabalho.

⁹ Referir-se-á com primeiro tableau ao tableau obtido pelo algoritmo 1 sendo acrescentados valores-verdade faltantes. O segundo tableau será proposto pelo algoritmo 2 a seguir.

devem ser atribuídos seguindo as mesmas regras do algoritmo 1.

- d) Ao final, se no segundo algoritmo houver algum valor-verdade não atribuído, isto deve ser feito seguindo-se o mesmo procedimento descrito no item a) acima.
- e) Finalmente deve-se comparar as soluções obtidas pelos dois algoritmos. Se forem diferentes então a solução dada pelo algoritmo 1 não é mínima.

4.5.2 Algoritmo 2 : Detecção de Solução Mínima

Ao se executar o algoritmo 1 é possível que algumas variáveis proposicionais fiquem sem atribuição de valor-verdade em alguns mundos. Para que se proceda uma verificação de minimalidade desta solução é necessário que todas as variáveis proposicionais tenham alguma atribuição em todos os mundos. Para que a solução obtida seja a menor possível, ou seja, a mais a sudeste possível, deve-se preferir a atribuição do valor-verdade *f*. Assim, antes de se iniciar o algoritmo 2 o seguinte procedimento deve ser realizado.

*Completar o ramo dado pelo algoritmo 1 atribuindo valores-verdade às variáveis sem atribuição, preferindo o valor-verdade *f* e de modo a não fechar o tableau.*

Considere-se um ramo aberto e completo resultante da aplicação do algoritmo 1. Seja $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ a seqüência de nós correspondentes aos nós dos mundos pertencentes ao ramo aberto e completo. O algoritmo 2 seguinte é proposto para detecção de solução mínima e segue a mesma seqüência de mundos $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ ocorrida no ramo aberto corrente.

- 1) Se num dado ramo, existem mundos a serem analisados, então selecione o próximo mundo de um dado ramo aberto como o mundo corrente; caso contrário pare (a solução analisada é mínima);
- 2) Verifique se fórmulas escritas em nós precedentes impõe qualquer valor verdade no corrente mundo, e se sim atribua estes valores verdade apropriadamente;
- 3) Para cada transição de entrada, para a qual *X* é a variável proposicional correspondente, crie um novo nó na forma *FX* ou *TX*, dependendo do valor

- verdade atribuído para X no dado ramo do corrente mundo;
- 4) Enquanto existirem α -fórmulas e β -fórmulas no ramo corrente, repita os passos 5), 6) e 7);
 - 5) Selecione uma α -fórmula ou β -fórmula no corrente ramo e aplique a regra correspondente;
 - 6) Para cada fórmula TY no ramo corrente, introduza no mesmo ramo todas as fórmulas do conjunto Ω que tenham Y como antecedente;
 - 7) Para cada fórmula FY no ramo corrente, introduza no mesmo ramo todas as fórmulas do conjunto Ω que tenham Y como consequente;
 - 8) Se a atribuição de valores verdade obtida pelos passos 4 a 8 for diferente daquela atribuição (do algoritmo 1) no ramo dado para o mesmo mundo, então pare (a solução analisada não é mínima); caso contrário vá para o passo 1.
 - 9) Completar o ramo dado atribuindo valores-verdade às variáveis sem atribuição, preferindo o valor verdade f e de modo a não fechar o tableau.

Na prática, este algoritmo usa as mesmas entradas que as da solução analisada e obtém, para estas entradas, a solução mínima a qual ignora a especificação.

4.6 Exemplo Ilustrativo

Considera-se o seguinte exemplo consistindo de um simples grafo a eventos descrito na figura abaixo, para o qual a especificação $y \leq \delta u$ deve ser analisada.

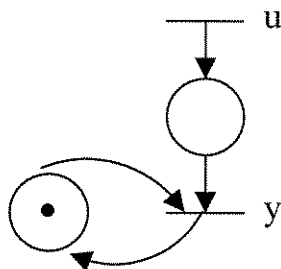


Figura 4.9: Rede do exemplo referente a verificação de especificações

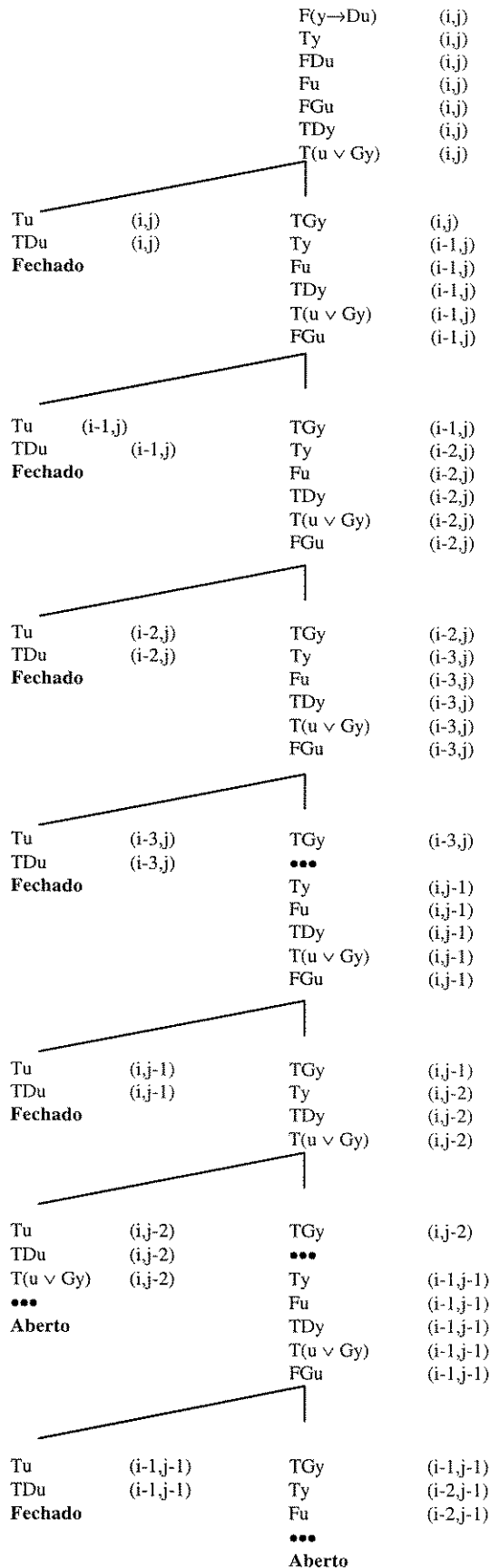
O conjunto de equações que descreve este sistema no dióide \mathcal{M} é dado por $\theta = \{y = u \oplus \gamma y\}$, com solução mínima $y = \gamma^* u$ que por sua vez equivale simplesmente a $y = u$. A especificação dada é satisfeita para a solução mínima. Considere-se a entrada impulsiva $u = e$, para o qual a solução mínima é $y = e$. Para a solução mínima, tem-se que a equação $y \leq \delta u$ é satisfeita, embora existam outras soluções satisfazendo ao conjunto θ para o qual a especificação não é satisfeita. Por exemplo, a solução não mínima $y = \gamma^\infty \delta$ satisfaz a equação do conjunto θ embora não satisfaça a especificação $y \leq \delta u$.

A descrição do grafo a eventos acima através da lógica NK é dada pelo seguinte conjunto de fórmulas:

$$\Omega = \{ (y \leftrightarrow u \vee Gy); (Gu \rightarrow u); (Gy \rightarrow y); (u \rightarrow Du); (y \rightarrow Dy) \}.$$

Já a especificação a ser verificada é expressa na lógica NK como $y \rightarrow Du$. A aplicação do algoritmo 1 para este problema conduzirá a um tableau aberto e completo desde que, como indicado acima, existem outras soluções que satisfazem as equações de θ mas que não satisfazem a especificação. O tableau obtido através do algoritmo 1 é descrito na subseção 4.6.1 e o ramo aberto e completo é explicitado. Já, a aplicação do algoritmo 2, para o ramo aberto remanescente do algoritmo 1, é descrito na subseção 4.6.2, e como esperado, mostra-se que a solução obtida não é a solução mínima. Isto é identificado porque a atribuição de valores verdade no mundo (i,j) para a variável y é diferente da atribuição resultante do algoritmo 1.

4.6.1 Algoritmo 1 – Verificação da Especificação $y \leq \delta u$



Observação:

Nota-se que na seqüência de mundos (i,j) , $(i-1,j)$, ... , $(i-n,j)$ ocorrem repetições de fórmulas e de atribuições de valores verdade. Desse modo, segundo o algoritmo a regra v não é mais aplicável nesta seqüência de mundos, caracterizando que esta seqüência de mundos é aberta e completa¹⁰. Continua-se então, a partir de (i,j) , mas aplicando-se a regra π . O símbolo $\bullet\bullet\bullet$ indica que ocorreu repetições naquele ramo em alguma seqüência de mundos.

4.6.2 Algoritmo 2 – Detecção de Solução Mínima.

Antes da aplicação do algoritmo 2, deve-se primeiramente completar o algoritmo 1 de modo a atribuir valores-verdade às variáveis proposicionais sem um valor atribuído.

O algoritmo 1 produziu dois ramos abertos.

O primeiro ramo aberto a ser analisado contém a seguinte seqüência de mundos: (i,j) , $(i-1,j)$, $(i-2,j)$, $(i-3,j)$, $(i,j-1)$, $(i,j-2)$, e não precisa ser completado pois todos os mundos têm atribuição de valor-verdade para as todas as variáveis proposicionais envolvidas.

O segundo ramo aberto precisa ser completado, pois no mundo $(i,j-2)$ à variável proposicional u não foi atribuído nenhum valor. Pode-se adicionar Fu em $(i,j-2)$, pois esse valor é compatível com aquele ramo. Na seqüência expõe-se o algoritmo 2.

Fu (i,j)
 FGu (i,j)
 Fu $(i-1,j)$
 FGu $(i-1,j)$
 Fu $(i-2,j)$
 FGu $(i-2,j)$
 $\bullet\bullet\bullet$

¹⁰Ver observação g) na seção 4.5.

Acrescentando o valor-verdade falso à variável y no mundo (i,j) tem-se o segundo tableau¹¹:

Fu (i,j)
FGu (i,j)
Fy (i,j)
FGy (i,j)
Fu (i-1,j)
Fy (i-1,j)
FGu (i-1,j)
FGy (i-1,j)
Fu (i-2,j)
Fy (i-2,j)
•••

A atribuição de valores verdade dados no segundo tableau é diferente da atribuição de valores verdade dados no primeiro tableau. Portanto a solução encontrada não é a solução mínima. Assim, a especificação é satisfeita para toda solução mínima do grafo a eventos, embora possa ser falsificada para soluções não mínimas.

¹¹ Referir-se-á ao segundo tableau como sendo o tableau advindo do algoritmo 2 onde foram adicionadas as variáveis proposicionais que faltavam.

Capítulo 5

Síntese de Controladores

5.1 Introdução

A teoria de controle refere-se usualmente a sistemas dinâmicos cujo comportamento é definido por ações externas e cujo desempenho é medido por alguma função de variáveis do sistema. Supõe-se em geral a existência de um sistema a controlar (planta); a definição de variáveis de controle, ou seja, variáveis da planta sobre as quais se pode atuar externamente; a definição de variáveis de saída, que supõe-se serem necessárias e o fato de a planta não atender a certas especificações de desempenho. A existência de problemas de controle refere-se exatamente ao fato de existirem especificações não satisfeitas pela planta.

O problema de síntese de controladores consiste portanto em projetar um dispositivo capaz de determinar os valores de controle de modo que a saída atenda às especificações. Normalmente isto é feito utilizando-se o conceito de realimentação, que impõe que o controlador calcule as entradas a partir do conhecimento das saídas. A figura abaixo ilustra o processo caracterizado por *planta e controlador*.

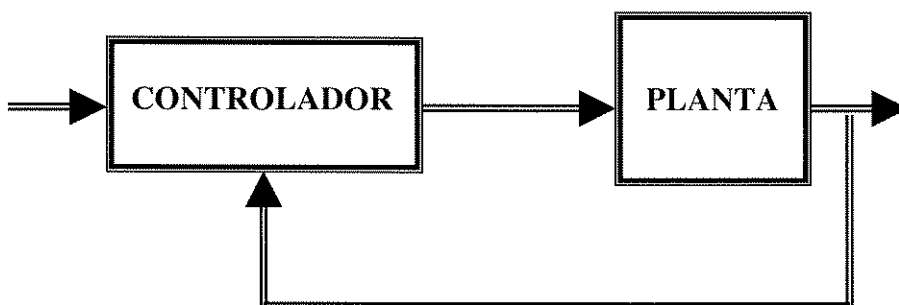


Figura 5.1: Planta e controlador

A proposta deste capítulo apresentar uma técnica de síntese de controladores para sistemas a eventos discretos descritíveis por grafos a eventos. Assume-se que seja possível definir, de modo análogo aos casos tradicionais, quem serão as variáveis de entrada e de saída para os sistemas estudados. Além disso, os controladores serão projetados sempre visando controle em malha fechada.

Para haver a possibilidade de controlar o sistema em malha fechada é necessário definir de que maneira o controlador coleta informações do sistema e age sobre o sistema. Nesse sentido serão definidos dois subconjuntos (não necessariamente disjuntos) do conjunto de transições do grafo a eventos dado. Serão consideradas como *transições controláveis* àquelas sobre as quais o controlador pode agir. A ação do controlador sobre uma transição será sempre no sentido de inibi-lo, dado que ele não age sobre as fichas que circulam no resto do sistema. As *transições observáveis* serão aquelas que fornecem informações ao controlador. Para o projeto de controladores define-se previamente, a partir de um grafo a eventos, quais são as transições observáveis, controláveis e quais são ao mesmo tempo observáveis e controláveis.

As definições de “transição controlável” e de “transição observável” acima não estão relacionadas com os conceitos da teoria de controle tradicional de “controlabilidade” e “observabilidade” cuja definição pode ser encontrada, por exemplo, em Franklin et al.(1994).

A concepção de “ação de controle” como “inibição de transições” utilizada neste trabalho é similar àquela utilizada por Ramadge e Wonham (1987) na qual também se faz referência ao termo “evento controlável”.

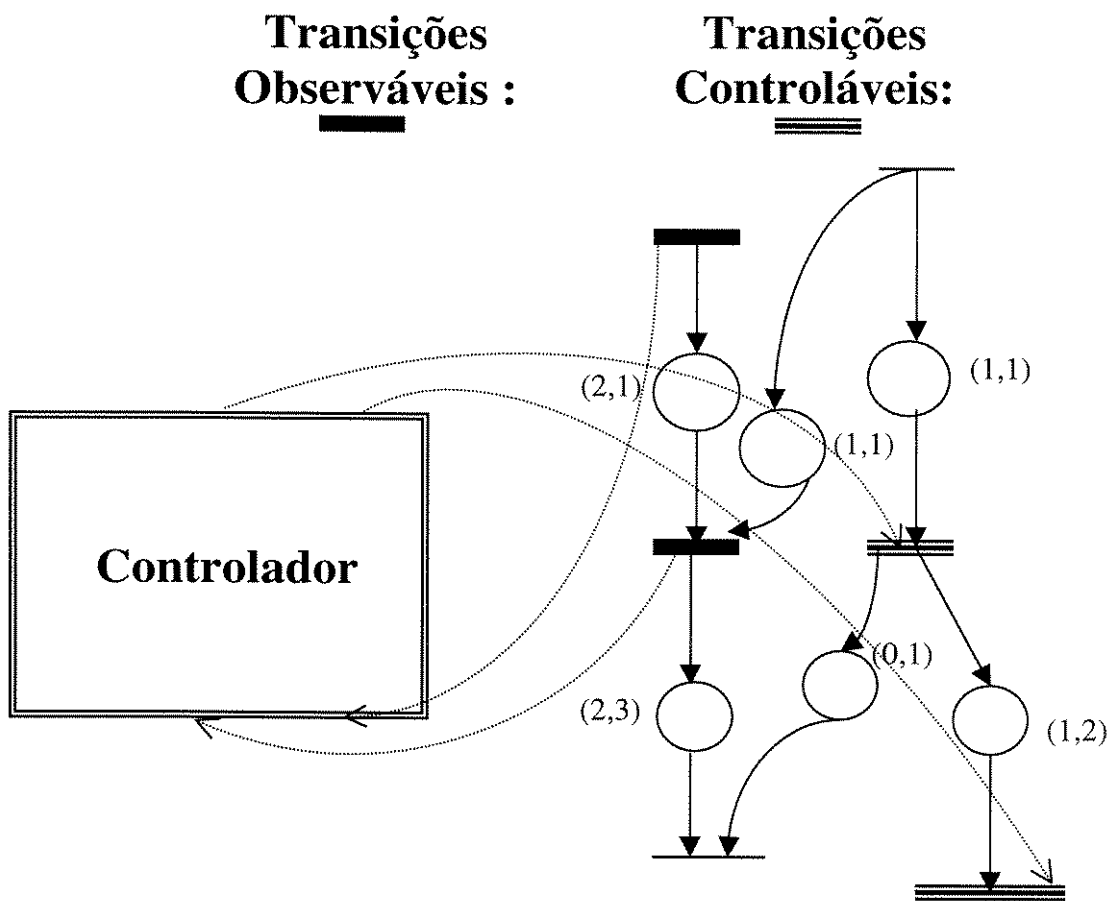


Figura 5.2: Transições Observáveis e Controláveis

Se houver alguma especificação não satisfeita (no contexto definido nos capítulos precedentes¹), então seguramente tem-se um tableau com um certo número de ramos abertos. O desenvolvimento de controladores se dará no seguinte sentido:

- Propor-se-ão fórmulas que introduzidas nos ramos abertos levarão ao seu fechamento.
- As fórmulas da lógica NK devem:

¹ Uma especificação não é satisfeita se ela não for consequência lógica do conjunto de fórmulas da lógica NK que representa o grafo a eventos (ver capítulos 3 e 4).

- 1) envolver de maneira adequada as transições de entrada e de saída;
- 2) determinar que componentes do controlador são necessários para o atendimento das especificações.

Ao longo deste capítulo serão apresentados os resultados fundamentais, seguindo-se do algoritmo de síntese e exemplos.

5.2 Resultados Fundamentais

Considere-se o caso de um grafo a eventos representado por um conjunto Ω de fórmulas da lógica NK e uma especificação X dados, tal que a especificação não seja satisfeita. Supõe-se que são dados, além das informações definidas no capítulo 4,

T_c = Conjunto de transições controláveis.

T_o = Conjunto de transições observáveis.

Supõe-se ainda que a este problema é associado um tableau conforme descrito nos capítulos anteriores, com n ramos abertos.

Teorema 5.1: O tableau associado fornece todas as alternativas possíveis de falsificação da especificação.

Demonstração: O tableau associado é construído segundo o procedimento sistemático estipulado para a prova de completude forte, portanto se o tableau não fechar então todas as possíveis maneiras de falsificar a especificação serão expostas pelo tableau. De fato, se existir uma valoração que torne todas as fórmulas de Ω verdadeiras e X falsa, e essa valoração não é exposta pelo tableau então significa que o tableau não analisou todas as valorações possíveis, o que contradiz os teoremas de correção e completude. ♦

Teorema 5.2: Para cada ramo aberto do tableau associado, se se acrescentar pelo menos uma fórmula de modo a se obter contradição, então o ramo estará fechado.

Demonstração: Um ramo é dito aberto se e somente se não ocorrem contradições, portanto o acréscimo de fórmulas que produzem contradições tornará o ramo fechado. ♦

Teorema 5.3: Uma especificação de desempenho X que não é satisfeita num tableau associado será considerada satisfeita se forem acrescentadas fórmulas que fechem todos os ramos.

Demonstração: Ao se acrescentar fórmulas de modo a tornar os ramos abertos em fechados, acarretará na impossibilidade de falsificar a especificação, portanto, tornando-a satisfeita. ♦

Corolário 5.4: Suponha que para cada ramo aberto k , as seguintes condições sejam satisfeitas:

- Fu_{α_k} aparece no ramo aberto no mundo $w_{(i,j)}$ para algum $(i, j) \in \mathbf{Z}^2$
- Ty_{β_k} aparece no ramo aberto no mundo $w_{(i-m_i, j-n_i)}$ (para $m_i, n_i \geq 0$)

onde y_{β_k} é uma transição observável e u_{α_k} é uma transição controlável.

Então o conjunto de fórmulas $\varphi = \{ G^{m_i} D^{n_i} y_{\beta_k} \rightarrow u_{\alpha_k} \}$ é tal que:

$$\Omega \cup \varphi \models X$$

Em outras palavras, se se acrescentar ao grafo conhecido os elementos (lugares) definidos pelo conjunto φ o sistema resultante satisfará à especificação dada. O conjunto φ será chamado de conjunto de fórmulas do controlador.

Demonstração: As transições observáveis y_{β_k} assumem o valor verdade t e as transições controláveis u_{α_k} o valor verdade f nos ramos abertos do tableau. As fórmulas do conjunto φ quando acrescentadas em qualquer ramo aberto em qualquer mundo terão o sinal T a frente delas. Sem perdas de generalidade seja por exemplo um ramo aberto do tableau, onde numa linha n , no mundo (i,j) acrescenta-se a seguinte fórmula de φ :

$$(n) TG^{m_i} D^{n_i} y_{\beta_k} \rightarrow u_{\alpha_k} (i,j)$$

Ao aplicar-se as regras tableau nessa referida linha ocorrerá uma bifurcação:

- O ramo da esquerda conterá Fy_{β_k} no mundo $(i-m_i, j-n_i)$ acarretando uma contradição.
- O ramo da direita conterá Tu_{α_k} no mundo (i,j) , ocorrendo uma contradição.

Portanto, ao se fazer um tableau adicionando as fórmulas do conjunto φ todos os ramos fecharão. Logo $\Omega \cup \varphi \models X$. ♦

O algoritmo elaborado para verificação de especificações produz um tableau que revela se uma especificação é satisfeita ou não. Se o tableau fechar, então a especificação é satisfeita. Se o tableau ficar aberto então existe um modelo que falsifica a especificação. Porém, esse modelo pode falsificar a especificação sob a ótica de uma solução não mínima, implicando evidentemente que para a solução mínima, essa especificação é satisfeita. Caso se deseje projetar um controlador que satisfaça à especificações para qualquer solução, o resultado do algoritmo 1 deve ser utilizado no projeto, sem as modificações (acréscimos de variáveis proposicionais) propostas para utilização do algoritmo 2. Este é o caso mais simples. Se contudo se desejar um controlador que atenda à especificações apenas no contexto da solução mínima (neste caso supõe-se que o modelo obtido pelo algoritmo 1 é uma solução mínima) então as modificações introduzidas antes de se executar o algoritmo 2 devem ser consideradas no algoritmo de síntese.

5.3 Algoritmo de Síntese

O corolário 5.4 permite concluir que o problema de síntese terá solução se para cada ramo aberto do tableau forem encontradas as condições definidas pelas equações (expostas no corolário). Em muitos casos as condições (expostas no corolário) podem ocorrer para diferentes transições de entrada e de saída e em diferentes mundos possíveis. Se este for o caso, é recomendável que se escolha para a implementação do controlador a alternativa menos restritiva possível, ou seja aquela que apresenta os menores valores possíveis para as variáveis m_i e n_i .

Intuitivamente, quanto mais fichas iniciais e menos atrasos ocorrer num lugar, menos restrições são impostas à evolução dinâmica da rede.

Baseado nesta diretriz, o seguinte algoritmo obtém para cada ramo aberto uma fórmula “mínima” de modo a compor o conjunto φ de fórmulas do controlador.

O algoritmo a seguir é elaborado para ser aplicado a um tableau aberto, que indique que uma determinada especificação de desempenho não é satisfeita.

- 1) Escolha um ramo aberto;
- 2) Escolha um par (α, β) desse ramo, onde α seja uma transição controlável e β seja uma transição observável;
- 3) Realize uma busca nesse ramo aberto de modo a satisfazer as seguintes condições:
 - valor verdade da variável u_α no mundo $w_{(i,j)}$ seja falso e
 - valor verdade da variável y_β no mundo $w_{(i-m,j-n)}$ seja verdadeiro;
 - os valores de m e n devem ser positivos.
- 4) De todos os valores encontrados para (m,n) encontre o mínimo deles através da seguinte regra: *minimizar o máximo de (m,n)* ;
- 5) Se todos os pares (α, β) já foram analisados, vá para o passo seguinte. Caso contrário, vá para o passo 2;

- 6) De todos os valores (m,n) encontrados para todos os pares (α,β) do ramo aberto corrente, minimize-os através da regra: *minimizar o máximo de (m,n)* ;
- 7) Se todos os ramos abertos foram analisados, pare. Caso contrário, vá para o passo 1.

Após sua execução, será obtida, para cada ramo aberto do tableau, enumerados de 1 a n, uma fórmula do tipo $G^{m_i} D^{n_i} y_\beta \rightarrow u_\alpha$.

ramo	1	2	3	...	N
(α,β)	(1,1)	(1,1)	(1,2)		(3,4)
(m,n)	*	*		...	

Tabela 5.1: Resultado do algoritmo de síntese

A função de transferência do controlador escrita no dióide \mathcal{M} (ver capítulo 2) é dada por:

$$u = \mathcal{H}y$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1q} \\ \dots & h_{\alpha\beta} & \dots \\ h_{p1} & \dots & h_{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_q \end{bmatrix}$$

onde:

- o vetor u representam as variáveis controláveis;
- o vetor y representam as variáveis observáveis;
- \mathcal{H} representa a função de transferência;
- $h_{\alpha\beta} = \sum_i \gamma^{m_i} \delta^{n_i}$, onde m_i e n_i são todos os pares que estão na tabela acima, na mesma coluna que o para o mesmo (α, β) .

Uma observação sobre controladores diz respeito às transições de entrada do grafo a eventos. Para que as variáveis de entrada da rede possam ser consideradas como

controláveis, é conveniente definir uma transição auxiliar que cumpre o papel de transição de entrada do sistema controlado. Formalmente, permitir que uma transição de entrada tenha um lugar acima dela equivale a considerá-la como um estado do sistema, alterando o modelo original. Analogamente quando considera-se as transições de saída como *observáveis*.

5.4 Exemplo Ilustrativo

Seja a seguinte rede de Petri representando um sistema dinâmico a eventos discretos. Junto a rede (grafo a eventos) expõe-se as fórmulas da lógica NK utilizadas para descrevê-lo.

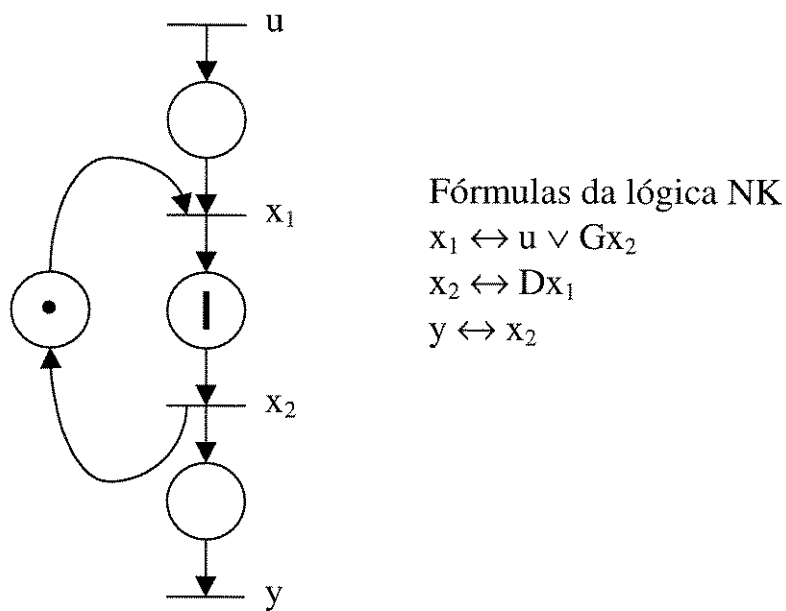


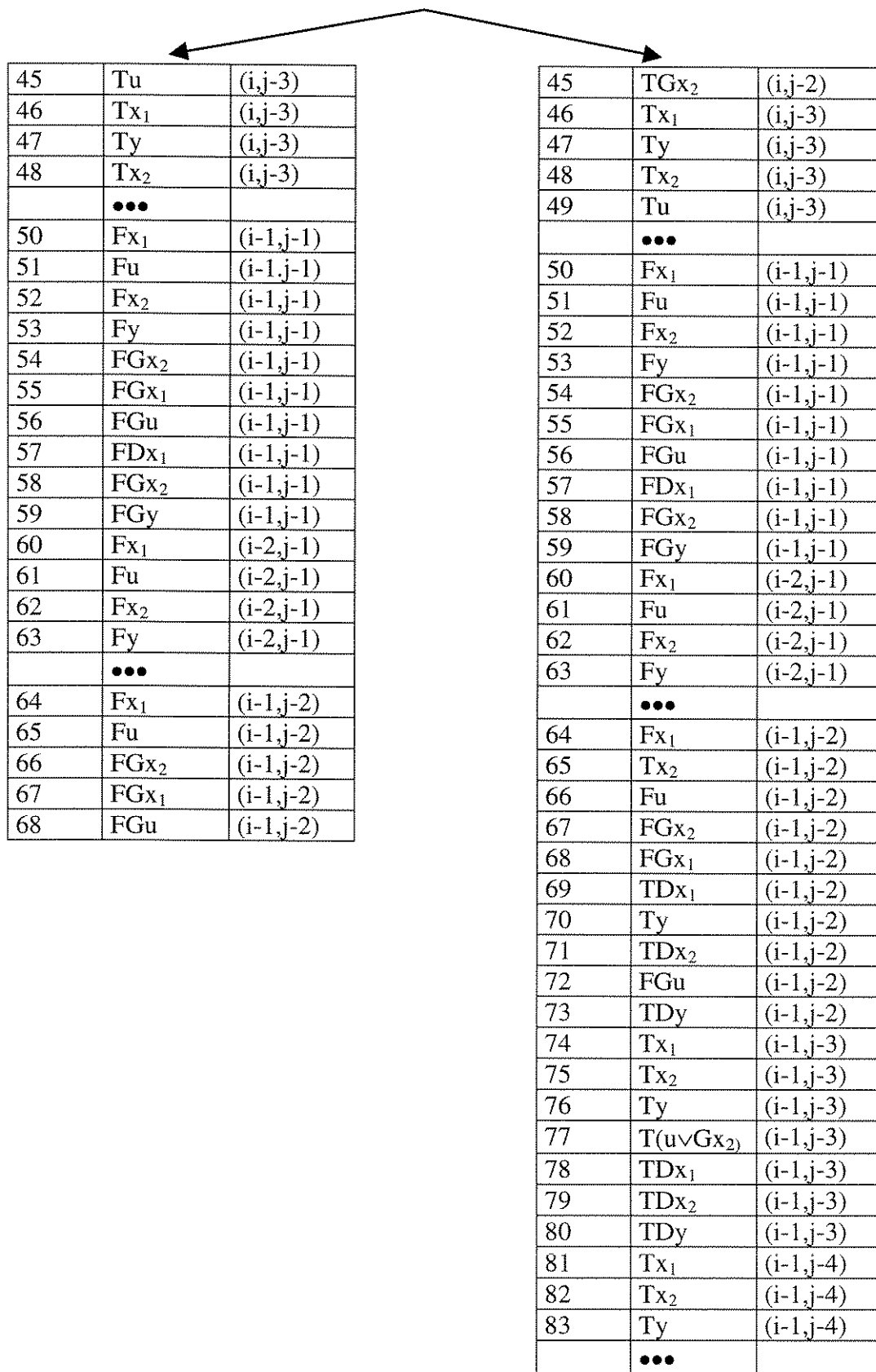
Figura 5.4: Grafo a eventos para o exemplo de síntese

A rede acima tem a seguinte função de transferência: $y = \delta(\gamma\delta)^* u$, relacionando a entrada u com a saída y do sistema. A especificação $\delta^2 u \leq y$ não é satisfeita na rede acima. O tableau mostrado na seqüência foi construído para verificar que a especificação acima

não é satisfeita. Utiliza-se o mesmo tableau para o projeto de controladores. Os ramos abertos do tableau serão utilizados para elaborar quais serão as possibilidades de controle. Assume-se como hipótese que todas as transições são observáveis e controláveis.

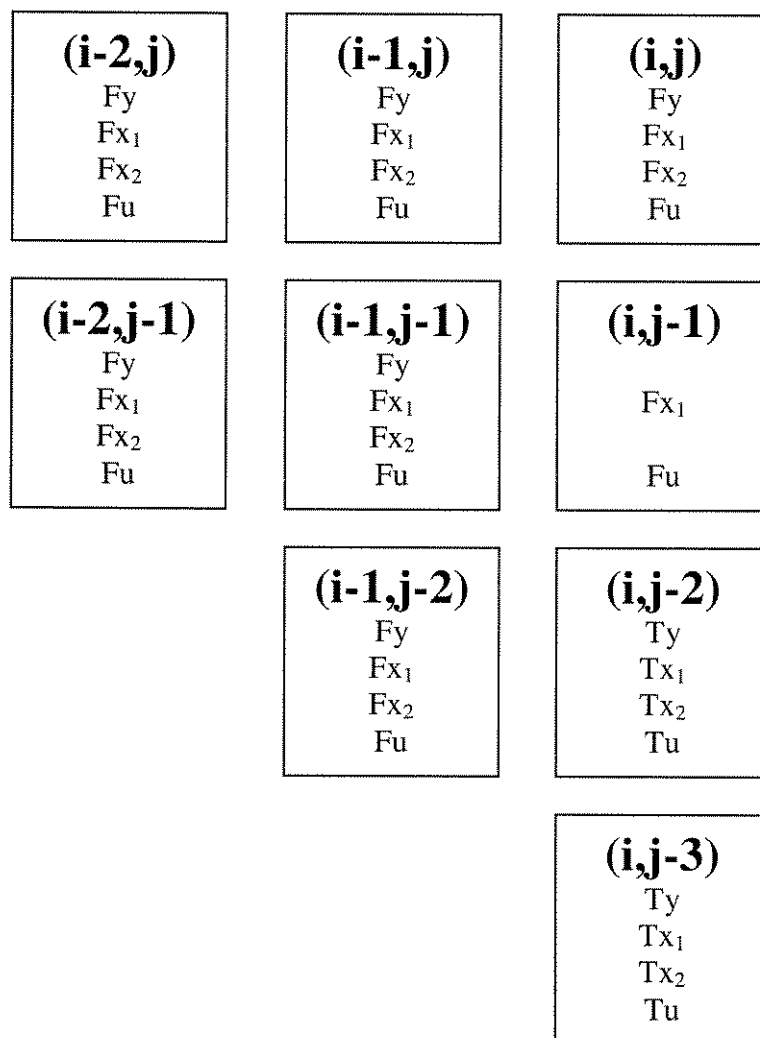
Um único ramo aberto resultou da construção do tableau para analisar a especificação acima. Na seqüência, expõe-se o ramo aberto do tableau.

1	$F(D^2u \rightarrow y)$	(i,j)
2	TD^2u	(i,j)
3	Fy	(i,j)
4	Fx_2	(i,j)
5	FGy	(i,j)
6	FDx_1	(i,j)
7	FGx_2	(i,j)
8	Fx_1	(i,j)
9	Fu	(i,j)
10	FGx_1	(i,j)
11	FGu	(i,j)
12	Fy	$(i-1,j)$
13	Fx_2	$(i-1,j)$
14	Fx_1	$(i-1,j)$
15	Fu	$(i-1,j)$
16	FGy	$(i-1,j)$
17	FDx_1	$(i-1,j)$
18	FGx_2	$(i-1,j)$
19	FGx_1	$(i-1,j)$
20	FGu	$(i-1,j)$
21	Fy	$(i-2,j)$
22	Fx_2	$(i-2,j)$
23	Fx_1	$(i-2,j)$
24	Fu	$(i-2,j)$
25	FGy	$(i-2,j)$
26	FDx_1	$(i-2,j)$
27	FGx_2	$(i-2,j)$
28	FGx_1	$(i-2,j)$
29	FGu	$(i-2,j)$
	•••	
30	TDu	$(i,j-1)$
31	Fx_1	$(i,j-1)$
32	Fu	$(i,j-1)$
33	FGx_2	$(i,j-1)$
34	FGx_1	$(i,j-1)$
35	FGu	$(i,j-1)$
36	Tu	$(i,j-2)$
37	Tx_1	$(i,j-2)$
38	TDu	$(i,j-2)$
39	$T(u \vee Gx_2)$	$(i,j-2)$
40	TDx_1	$(i,j-2)$
41	Tx_2	$(i,j-2)$
42	Ty	$(i,j-2)$
43	TDy	$(i,j-2)$
44	TDx_2	$(i,j-2)$

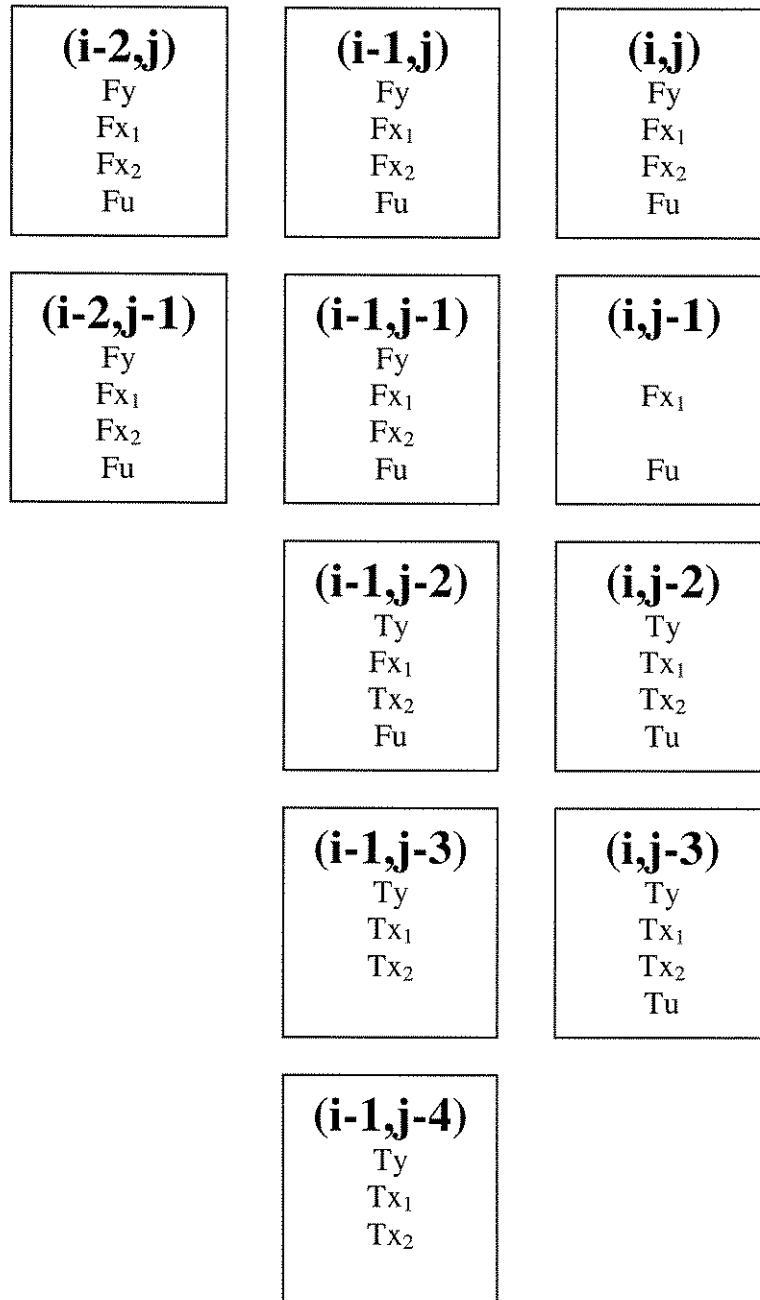


Nos diagramas a seguir ilustram-se as atribuições de valor-verdade para cada um dos ramos abertos e para cada mundo visitado pelo algoritmo.

Ramo 1



Ramo 2

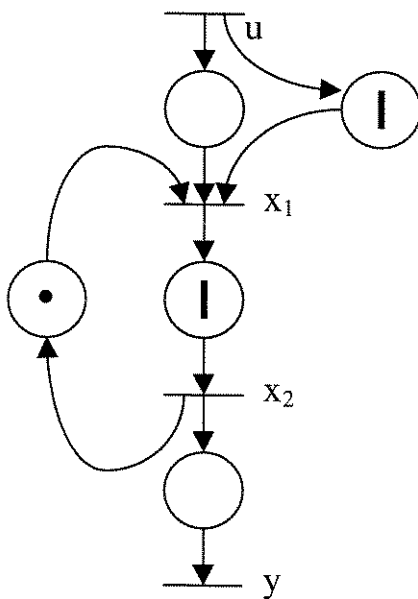


A seguinte tabela é obtida através do algoritmo aplicado aos ramos abertos 1 e 2:

ramo	1	2
(α, β)	(u, x_1)	(u, x_1)
(m, n)	$(0, 1)$	$(0, 1)$

Tabela 5.2: Resultado da síntese do exemplo ilustrativo 5.4

A fórmula mínima que advém dos pares acima é dada por: $Du \rightarrow x_1$. Portanto, $Du \rightarrow x_1$ é a fórmula que determina o controlador menos restritivo, o qual satisfaz a especificação $\delta^2 u \leq y$. A figura abaixo mostra a situação rede-controlador.



Fórmulas da lógica NK

$$x_1 \leftrightarrow u \vee Du \vee Gx_2$$

$$x_2 \leftrightarrow Dx_1$$

$$y \leftrightarrow x_2$$

Figura 5.5: Grafo a eventos resultante da síntese

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

O presente trabalho, voltado a sistemas dinâmicos a eventos discretos propôs uma lógica modal com o objetivo de analisar e verificar especificações e síntese de controladores.

Os resultados que caracterizam a correspondência entre equações lineares no dióide \mathcal{M} e a lógica modal NK revelam-se de grande potencialidade no que diz respeito à análise de verificações de especificações e em síntese de controladores, seja pela utilização da lógica modal NK, que se mostra viável em termos de implementações computacionais, seja pela amplitude de situações que se obtém ao projetar controladores.

A lógica modal NK, numa semântica de mundos possíveis foi construída com o propósito de adaptar-se aos sistemas de equações lineares no dióide \mathcal{M} . O método utilizado para abordar esse sistema lógico foi tableaux analíticos, o qual mostrou-se ser uma ferramenta de fácil manuseio, possibilitando uma visualização clara do sistema (modelado via grafos a eventos) e versatilidade computacional. Apesar de ter sido construída sob a ótica dos dióides, a lógica NK não perde as duas importantes condições dos sistemas lógicos: correção e completude. Em oposição a muitos sistemas lógicos que são direcionados na modelagem de sistemas dinâmicos e que não são em geral corretos e completos, a lógica NK é correta e completa, inclusive no sentido forte. Essa característica mostrou-se fundamental para esse trabalho, pois lança-se mão da correção e completude fortes para estabelecer a verificação de especificações. É tradicional estipular que se uma especificação é consequência lógica de um conjunto de fórmulas que define o sistema dinâmico, então a especificação é satisfeita dentro do sistema. O método tableau tem a função de detectar a satisfatibilidade ou não das especificações. Ainda sob a garantia da correção e completude, quando uma especificação não é satisfatível, então existe um

modelo que a falsifica. O método tableau mostra ainda mais, mostra todos os possíveis modelos que falsificam a especificação. Como as fórmulas presentes no tableau são representantes de transições e lugares de uma rede de Petri, o processo inverso, qual seja, evitar os modelos que falsificam a especificação torna-se um método de projeto de controladores.

Algumas observações devem ser postas. Algumas fórmulas que impedem a falsificação da especificação podem não ser realizáveis na rede que descreve o sistema dinâmico. Pode ocorrer que o sistema fique muito restritivo (nenhuma especificação é satisfeita), ou nada restritivo (qualquer especificação é satisfeita).

Outras questões dizem respeito a soluções não mínimas. O método tableau, assim como as equações lineares no dióide \mathcal{M} , fornecem soluções que podem não ser as mínimas. Por um lado dentre todas as soluções de um conjunto θ de equações lineares descritíveis no dióide \mathcal{M} e associadas a um grafo a eventos, existe uma única solução que é a solução mínima. Por outro lado, dado um conjunto Ω de fórmulas da lógica NK associadas a um grafo a eventos e uma especificação X , pode-se afirmar que um tableau aberto fornece todas as soluções possíveis que falsifiquem a especificação X e mantenham verdadeiras as fórmulas de Ω . Mas também, dentre todas as soluções que falsifiquem X , existe uma que é a menor possível que falsifica X . No entanto essa menor possível que falsifica X pode não corresponder a solução mínima que satisfaz ao conjunto θ . Uma especificação que é falsificada exclusivamente por soluções que não são soluções mínimas, é satisfeita em relação à solução mínima. Desse modo pode-se projetar um controlador utilizando-se fórmulas que ao serem adicionadas ao tableau, não fecham o tableau, mas indicam que a especificação é falsificada apenas por soluções que não são mínimas, sendo portanto, as especificações satisfeitas para soluções mínimas. A vantagem é que aumentam as possibilidades de se projetar controladores, não se limitando apenas à fórmulas de controladores que fechem o tableau.

Neste texto, ocupou-se de investigações sobre sistemas dinâmicos a eventos discretos, onde problemas de verificação e síntese foram abordados. Problemas relacionados a síntese tais como ordem dos controladores, escopo da abrangência do controlador (faixa limite dentro da qual as especificações, transições do sistema devem permanecer), alternativas de controle para sistemas que não tenham um controlador a

princípio, etc, são problemas que devem ser aprofundados e investigados com maiores detalhes. Outra questão, por exemplo é determinar se o corolário 5.4 apresenta condições de existência de controladores. A questão que se coloca é: estas condições são também necessárias? Para trazer mais elementos para essa discussão , deve-se lembrar que os controladores resultantes do método apresentado não contém transições internas. Este fato os aproxima dentro do contexto de sistemas de controle tradicionais aos controladores estáticos, pois as transições fazem o papel análogo ao dos estados nos sistemas a eventos discretos. Portanto pode-se esperar que um método capaz de prever transições internas ao controlador poderá admitir soluções para problemas que não satisfaçam as hipóteses do corolário.

Outra questão relevante diz respeito aos modelos abordados neste trabalho. Os sistemas foram modelados sob a ótica do sincronismo. Sistemas que envolvem concorrência devem ser estudados. Uma tentativa através de lógica modal NK quantificada parece viável. Quantificadores serviriam para impor condições sobre as concorrências, implicando então numa possibilidade de síntese para redes de Petri. Essas perspectivas, problemas, são possíveis de serem estudados e trabalhados como continuação desse trabalho.

Referências Bibliográficas

- Baccelli, F.L., G. Cohen, G. J. Olsder, J. P. Quadrat (1992). *Synchronization and Linearity - An Algebra for Discrete Event Systems*. John Wiley and Sons, New York.
- Cassandras. C. G. (1993). *Discrete Event Systems: Modeling and Performance Analysis*. Aksen Associates Incorporated Publishers, Boston.
- Cohen, G. ,P. Moller, J. P. Quadrat, M. Viot (1989).Algebraic tools for performance evaluation of discrete systems. *Proceedings of IEEE*, Vol. 77, no.1, pp. 39-58, january.
- Dalen, D., Van (1980). *Logic and Structure*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.
- Dubreil, P. e M. L. Dubreil-Jacotin (1964). *Leçons d'Algèbre Moderne*. Dunod, Paris, France.
- Fitting, M. (1990). *First-Order Logic and Automated Theorem Proving*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.
- Fitting, M. (1983). *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logics*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
- Franklin, G. F., J.D. Powell, A. Emami-Naeini (1994). *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, New York.
- Gabbay, D. M., C. J. Hogger, J.A. Robinson, J. Siekmann (1993) *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming. Volume I, IV*. Oxford University Press, Oxford.

- Gabbay, D., F. Guenther (1984). *Handbook of Philosophical Logic, Volume II: Extensions of Classical Logic*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
- Ho, Y. C. e X. R. Cao (1991). *Perturbation Analysis of Discrete Event Dynamic Systems*. Kluwer Academic Publishers.
- Howel, R. R., L. E. Rosier (1989). Problems concerning fairness and temporal logic for conflict-free Petri nets. *Theoretical Computer Science*, Vol.64, pp.305-329.
- Howel, R. R., L. E. Rosier, H. C. Yen (1991). A taxonomy of fairness and temporal logic problem for Petri nets. *Theoretical Computer Science*, Vol. 82, pp.341-372.
- Hughes, G. E., M. J. Cresswell (1968). *An Introduction to Modal Logic*. Methuen and Co. Ltd, London.
- Hughes, G.E. e M.J. Cresswell (1984). *A Companion to Modal Logic*. Methuen and Co. Ltd, London.
- Ionescu, D., J. Y. Lin (1990). A Generalized Temporal Logic Approach for Control Problems of a Class of Nondeterministic Discrete Event Systems. *Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control*, december, Honolulu, Hawaii.
- Magossi, J. C. (1994). Uma Lógica Modal Temporal. *Tese de Mestrado*, IFCH, Unicamp, Campinas.
- Manna, Z. e A. Pnuelli (1979). The Modal Logic of Programs. *Proc. 6th Int. Colloq. Aut. Lang. Prog - Lec. Notes in Comp. Sci.* Vol. 71, pp. 385-409, Springer-Verlag, Berlin.
- Manna, Z., A. Pnueli (1992). *The Temporal Logic Of Reactive and Concurrent Systems: Specification*. Springer-Verlag, New York.

- Mendelson, E. (1987). *Introduction to Mathematical Logic*. Chapman & Hall, New York.
- Murata, T. (1989). Petri Nets: Properties, analysis and applications. *Proceedings of IEEE, Vol. 77*, pp. 541-580.
- Ostroff, J. S. (1989). *Temporal Logic for Real-Time Systems*. John Wiley & Sons Inc. Toronto.
- Ostroff, J. S. (1991). Systematic Development of Controllers for Real-Time Discrete Event Systems. *European Control Conference, July 2-5, Grenoble, France*.
- Peterson, J. L. (1981). *Petri Net Theory and the Modeling of Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Prior, A. N. (1957). *Time and Modality*. Oxford University Press, Oxford.
- Prior, A. N. (1967). *Past, Present and Future*. Oxford University Press, Oxford.
- Ramadge, P. J., W. M. Wonham (1987). Modular Feedback Logic for Discrete Event Systems. *SIAM J. Control and Optimization, Vol 25*, no.5, pp. 1202-1218.
- Ramadge, P. J., W. M. Wonham (1987). On the Supremal Controllable Sublanguage of a Given Language. *SIAM J. Control and Optimization, Vol 25*, no.3, pp. 206-230.
- Ramadge, P. J., W. M. Wonham (1987). Supervisory Control of a Class of Discrete Event Systems. *SIAM J. Control and Optimization, Vol 25*, no.1, pp. 206-230.
- Ramadge, P., W.M. Wonham (1989). The control of discrete event systems. *Proceedings of the IEEE, Vol 77*, no.1, pp. 81-88.
- Rescher, N. e A. Urquhart (1971). *Temporal Logic*. Springer-Verlag, Wien.

Silva Jr., B. I., R. Santos-Mendes (1992). *Lógica Temporal de Tempo Real Aplicada ao Controle de Sistemas a Eventos Discretos Não-Determinísticos. IX Congresso Brasileiro de Automática*. Espírito Santo, Brasil.

Smullyan, R. M. (1968). *First-Order Logic*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.

Thistle, J. G., W. M. Wonham (1986). Control Problems in a Temporal Logic Framework. *Int. J. Control*, Vol. 44, pp. 943-976.

Apêndice A

Dióides

A.1 Introdução

Neste apêndice apresenta-se uma breve descrição sobre a teoria de Dióides, abordando definições, propriedades e teoremas necessários ao desenvolvimento deste trabalho.

A.2 Definições, Propriedades Básicas e Exemplos

A.2.1 Axiomática

Definição A.1: Um *dióide* é uma estrutura algébrica $\langle \mathcal{D}, \oplus, \otimes \rangle$ onde \mathcal{D} é um conjunto, \oplus e \otimes são operadores binários (chamados respectivamente, de *soma* ou *adição* e *produto* ou *multiplicação*) e de tal forma que os seguintes axiomas se verifiquem:

$$\mathbf{D1} \quad \forall a, b, c \in \mathcal{D}, (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) .$$

$$\mathbf{D2} \quad \forall a, b \in \mathcal{D}, a \oplus b = b \oplus a .$$

$$\mathbf{D3} \quad \forall a, b, c \in \mathcal{D}, (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c) .$$

$$\mathbf{D4} \quad \forall a, b, c \in \mathcal{D}, (a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c) .$$

$$\mathbf{D5} \quad \forall a, b, c \in \mathcal{D}, c \otimes (a \oplus b) = (c \otimes a) \oplus (c \otimes b) .$$

$$\mathbf{D6} \quad \exists \varepsilon \in \mathcal{D} \text{ tal que } \forall a \in \mathcal{D}, a \oplus \varepsilon = a .$$

$$\mathbf{D7} \quad \forall a \in \mathcal{D}, a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon .$$

D8 $\exists e \in \mathcal{D}$ tal que $\forall a \in \mathcal{D}$, $a \otimes e = e \otimes a = a$.

D9 $\forall a \in \mathcal{D}$, $a \oplus a = a$.

Comentários: O axiomas D1 e D3 representam, respectivamente, a *associatividade* da adição e multiplicação em \mathcal{D} . D2 representa a propriedade *comutativa* da adição. Nota-se que não se exige nessa definição a comutatividade da multiplicação. A *distributividade à esquerda e à direita da multiplicação com respeito a adição* é dada por D4 e D5. Nota-se que a distributividade à esquerda não se segue da distributividade à direita e vice-versa. A comutatividade da multiplicação não é exigida em princípio. Já D6 expõe a existência de um *elemento zero* (neutro, em relação à adição) no dióide e D7 caracteriza a *absorção do elemento zero*. D8 representa a existência de um *elemento identidade*. O axioma D9 determina a *idempotência* da adição, e impede a adição de ser cancelativa¹. Com efeito, se existisse o simétrico a^* de a , tal que $a \oplus a^* = \varepsilon$ então ter-se-ia que, para todo $a \in \mathcal{D}$,

$$a = a \oplus \varepsilon = a \oplus (a \oplus a^*) = (a \oplus a) \oplus a^* = a \oplus a^* = \varepsilon.$$

e portanto o dióide se reduziria a ε .

Definição A.2: Um dióide é *comutativo* se a multiplicação é comutativa.

Como é de costume em álgebra sempre que o contexto permitir e não houver dúvidas, omitir-se-á o símbolo de multiplicação (\otimes). Também, adota-se a^k , $k \in \mathbb{N}$, para representar $a \otimes a \otimes \dots \otimes a$ (k vezes) e $a^0 = e$.

Definição A.3: Se $ab = \varepsilon$ implicar que $a = \varepsilon$ ou $b = \varepsilon$, então diz-se que o dióide é *inteiro*.

Se $a \neq \varepsilon$, $b \neq \varepsilon$ e $ab = \varepsilon$ então a e b são chamados de *divisores de zero*. Assim, para um dióide ser inteiro tem que valer a hipótese suplementar de que não tenha divisores de zero. Nota-se também que, se a multiplicação for cancelativa então o dióide é inteiro. De fato, se $ab = \varepsilon$ então $ab = a\varepsilon$ o que implica que $b = \varepsilon$ sempre que

¹ Se $a \oplus b = a \oplus c$ implicar que $b = c$ então a adição (\oplus) é dita ser cancelativa.

$a \neq \varepsilon$, pelo cancelamento de a .

No que se segue expõe-se alguns exemplos de dióides comutativos.

Exemplo A.4: Seja $\mathcal{D} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Para qualquer $a, b \in \mathcal{D}$, sejam $a \oplus b = \max\{a, b\}$ e $a \otimes b = a + b$. Desse modo $\langle \mathcal{D}, \oplus, \otimes \rangle$ é um dióide, onde $\varepsilon = -\infty$ e $e = 0$.

Exemplo A.5: Seja $\mathcal{D} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Para qualquer $a, b \in \mathcal{D}$, sejam $a \oplus b = \max\{a, b\}$ e $a \otimes b = \min\{a, b\}$. Desse modo $\langle \mathcal{D}, \oplus, \otimes \rangle$ é um dióide, onde $\varepsilon = -\infty$ e $e = +\infty$.

Exemplo A.6: Seja $\mathcal{D} = \{\varepsilon, e\}$. Para qualquer $a, b \in \mathcal{D}$, sejam $a \oplus b = \max\{a, b\}$ e $a \otimes b = \min\{a, b\}$. Desse modo $\langle \mathcal{D}, \oplus, \otimes \rangle$ além de ser um dióide, é uma álgebra de Boole.

Exemplo A.7: Seja $\mathcal{D} = 2^{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$ denotando todos os subconjuntos do plano \mathbb{R}^2 incluindo o conjunto vazio e o próprio \mathbb{R}^2 . Para qualquer $A, B \in \mathcal{D}$, sejam $A \oplus B = A \cup B$ e a soma vetorial $A \otimes B$ definido como:

$$A \otimes B = A + B = \{c \in \mathbb{R}^2 \mid c = a + b, a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Desse modo $\langle \mathcal{D}, \oplus, \otimes \rangle$ é um dióide, e neste exemplo o elemento ε é dado por \emptyset e o elemento e é dado por $\{(0,0)\}$.

A.3 Propriedades de Reticulados em Dióides

No que se segue, são dadas algumas definições que serão utilizadas no decorrer deste texto. Sejam a, b, c elementos quaisquer de um conjunto \mathcal{D} ,

Uma **relação de ordem** é uma relação binária (em símbolos, \geq) que satisfaz às propriedades de reflexividade, anti-simetria e transitividade.

Uma relação de ordem é de **ordem total** se para quaisquer $a, b \in \mathcal{D}$, tiver-se que (a, b) pertence à relação ou (b, a) pertence à relação. Em outras palavras, quaisquer dois

elementos podem ser comparados. Caso contrário diz-se que a relação é de **ordem parcial**.

Um conjunto é **ordenado** se nele for definida uma relação de ordem.

O **majorante**² de um subconjunto é um elemento não necessariamente pertencente ao subconjunto que é maior que qualquer outro elemento do subconjunto. Se um majorante pertence ao subconjunto então ele é o elemento máximo.

O **minorante**³ de um subconjunto é um elemento não necessariamente pertencente ao subconjunto que é menor que qualquer outro elemento do subconjunto. Se um minorante pertence ao subconjunto então ele é o elemento mínimo.

O **supremo** de um subconjunto é o menor majorante, ou seja, o elemento mínimo do conjunto dos majorantes.

O **ínfimo** de um subconjunto é o maior minorante, ou seja, o elemento máximo do conjunto dos minorantes.

Um **sup-semi-reticulado** é um conjunto ordenado de tal forma que exista um supremo para cada par de elementos.

Um **inf-semi-reticulado** é um conjunto ordenado de tal forma que exista um ínfimo para cada par de elementos.

Um **reticulado** é um conjunto ordenado que é um sup-semi-reticulado e um inf-semi-reticulado, ou seja, possui um supremo e um ínfimo para cada par de elementos.

Um **sup-semi-reticulado completo** é um conjunto ordenado de tal forma que existe um supremo para cada subconjunto finito ou infinito.

Um **inf-semi-reticulado completo** é um conjunto ordenado de tal forma que existe um ínfimo para cada subconjunto finito ou infinito.

Um **reticulado completo** é um conjunto ordenado de tal forma que existe um supremo e um ínfimo para cada subconjunto finito ou infinito.

Sejam $(a \vee b)$ e $(a \wedge b)$ representando o supremo e o ínfimo de a e b num reticulado. Então o reticulado é **distributivo** se

$$\forall a, b, c, \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

²Também chamado de *limitante superior*.

³Também chamado de *limitante inferior*.

A.4 Estrutura de Ordem em Dióides

Teorema A.8: Sejam a, b elementos de um dióide \mathcal{D} . Então a seguinte equivalência é satisfeita: $\forall a, b \in \mathcal{D}$,

$$a = a \oplus b \text{ se e somente se } \exists c \text{ tal que } a = b \oplus c.$$

Demonstração:

Se $a = a \oplus b$ então existe $c = a$ tal que $a = b \oplus c$.

Por outro lado, se $a = b \oplus c$, então adicionando b em ambos os lados da equação tem-se que,

$$(b \oplus a) = b \oplus (b \oplus c) \text{ e pela associatividade,}$$

$$(b \oplus a) = (b \oplus b) \oplus c \text{ e pela idempotência,}$$

$$(b \oplus a) = (b \oplus c) \text{ e por hipótese,}$$

$$(b \oplus a) = a \text{ e pela comutatividade,}$$

$$a \oplus b = a. \spadesuit$$

Teorema A.9 (Relação de Ordem): Num dióide \mathcal{D} a seguinte relação, denotada por \geq , é uma relação de ordem parcial:

$$a \geq b \text{ se e somente se } a = a \oplus b.$$

Demonstração:

i) Propriedade reflexiva.

Do axioma D9 tem-se que $a = a \oplus a$, portanto $a \geq a$.

ii) Propriedade anti-simétrica.

Se $a \geq b$ e $b \geq a$ então $a = b$. Pois de fato, se $a = a \oplus b$ e $b = b \oplus a$ então pela comutatividade da adição tem-se que $a = b$.

iii) Propriedade transitiva.

Se $a \geq b$ e $b \geq c$ então

$$a = a \oplus b \text{ e } b = b \oplus c \text{ então}$$

$$a = a \oplus (b \oplus c) \text{ e pela associatividade}$$

$$a = (a \oplus b) \oplus c \text{ e pela hipótese}$$

$a = a \oplus c$, ou seja

$a \geq c$. ♦

Teorema A.10: A relação \geq de ordem é compatível com a adição, ou seja, se $a \geq b$ então $\forall c \in \mathcal{D}$, $a \oplus c \geq b \oplus c$.

Demonstração:

Se $a \geq b$ então por definição,

$a = a \oplus b$ então somando a ambos os membros c ,

$a \oplus c = (a \oplus b) \oplus c$ então pela idempotência,

$a \oplus c = (a \oplus b) \oplus (c \oplus c)$ então pela associatividade e comutatividade,

$a \oplus c = (a \oplus c) \oplus (b \oplus c)$ então pela definição,

$a \oplus c \geq b \oplus c$. ♦

Teorema A.11: A relação \geq de ordem é compatível com a multiplicação, ou seja, para todo $c \in \mathcal{D}$, se $a \geq b$ então $a \otimes c \geq b \otimes c$ ⁴.

Demonstração:

Se $a \geq b$ então pela definição,

$a = a \oplus b$ então pela multiplicação em ambos os lados por c ,

$a \otimes c = (a \oplus b) \otimes c$ então pelo axioma D4,

$a \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$ então pela definição,

$a \otimes c \geq b \otimes c$. ♦

Teorema A.12: Para quaisquer dois elementos a e b de um dióide \mathcal{D} , sempre existe um supremo, a saber, $a \oplus b$. Além disso, ϵ é o elemento menor do dióide \mathcal{D} .

Demonstração:

i) É imediato que $a \oplus b$ é um majorante, pois $a \oplus b \geq a$ e $a \oplus b \geq b$. Resta mostrar que $a \oplus b$ é o menor dos majorantes, ou seja, para todo elemento $c \in \mathcal{D}$ tal que $c \geq a$ e $c \geq b$

⁴ O mesmo vale para a multiplicação a esquerda, ou seja, para todo $c \in \mathcal{D}$, se $a \geq b$ então $c \otimes a \geq c \otimes b$.

b então $c \geq a \oplus b$. Assim, de $c = c \oplus a$ e $c = c \oplus b$, tem-se que $c = (c \oplus a) \oplus b$ o que implica que $c = c \oplus (a \oplus b)$. Logo $c \geq a \oplus b$, e mostra-se assim que $a \oplus b$ é o menor dos majorantes, portanto $(a \oplus b)$ é o supremo.

ii) Como tem-se que para todo $a \in \mathcal{D}$, $a = a \oplus \varepsilon$, então pela definição de ordem, $a \geq \varepsilon$. Logo ε é o elemento menor de \mathcal{D} . ♦

Lema A.13 (Ordem total): A relação de ordem \geq definida anteriormente é total se e somente se $\forall a, b \in \mathcal{D}$, $a \oplus b = a$ ou $a \oplus b = b$.

Demonstração:

Para quaisquer dois elementos a e b pertencentes a \mathcal{D} que seja parcialmente ordenado, tem-se que ou $a \geq b$, o que segue que $a = a \oplus b$, ou tem-se que $b \geq a$ o que segue que $b = b \oplus a$. ♦

A.5 Dióides Completos e Arquimedianos

Definição A.14: Um *dióide é completo* se e somente se ele é fechado para somas infinitas e o axioma D4 e D5 se estendem para somas infinitas.

É evidente que o elemento maior no dióide existe e é igual a soma de todos os elementos do dióide. Seja ∞ o elemento maior de um dióide que é igual a soma de todos os seus elementos. Para todo $a \in \mathcal{D}$ tem-se que $\infty \geq a$, pois de fato $\infty = \infty \oplus a$. Além disso, como $\infty \in \mathcal{D}$ tem-se que ∞ é o supremo de \mathcal{D} . Assim, o supremo de qualquer subconjunto de \mathcal{D} pode ser entendido como a soma de todos os seus elementos.

Definição A.15: Um dióide é *arquimediano* se

$\forall a \neq \varepsilon, \forall b \in \mathcal{D}, \exists c, d \in \mathcal{D}$ tal que $ac \geq b$ e $da \geq b$.

Teorema A.16: Seja $\langle \mathcal{D}, \oplus, \otimes \rangle$ um dióide completo e arquimediano. Então é verdadeira a seguinte propriedade:

$$\forall a \in \mathcal{D}, a \neq \varepsilon, \infty \otimes a = a \otimes \infty = \infty.$$

Demonstração:

Seja ∞ o representante da soma de todos os elementos do dióide \mathcal{D} . Dado $a \in \mathcal{D}$, e para todo $x \in \mathcal{D}$, existe $n_x \in \mathcal{D}$ tal que $an_x \geq x$ (dióide arquimediano). Assim,

$$a \otimes \infty = a \left(\bigoplus_{x \in \mathcal{D}} x \right) \geq a \left(\bigoplus_{x \in \mathcal{D}} n_x \right) = \left(\bigoplus_{x \in \mathcal{D}} an_x \right) \geq \left(\bigoplus_{x \in \mathcal{D}} x \right) = \infty.$$

Logo, $a \otimes \infty \geq \infty$ o que acarreta que $a \otimes \infty = a \otimes \infty \oplus \infty = \infty$. Portanto $a \otimes \infty = \infty$. ♦

Como um dióide completo é um sup-semi-reticulado completo e como em um dióide completo existe o elemento menor ε , o *ínfimo* de qualquer subconjunto $S = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ do reticulado pode ser construído como sendo $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \dots)$, e o semi-reticulado torna-se um reticulado completo (Dubreil e Dubreil-Jacotin (1964)). Desse modo, as seguintes equivalências se preservam:

$$a \geq b \text{ sse } (a = a \oplus b) \text{ sse } (b = a \wedge b).$$

O operador \wedge é associativo, comutativo, idempotente e tem ∞ como elemento neutro, ou seja, $a = \infty \wedge a$ ⁵, para todo $a \in \mathcal{D}$. Além disso, as seguintes propriedades, leis de absorção, são satisfeitas, para todo $a, b \in \mathcal{D}$:

$$a \wedge (a \oplus b) = a \oplus (a \wedge b) = a.$$

As equivalências acima conduzem a impressão de uma simetria dos operadores \oplus e \wedge num dióide completo. Esta asserção é verdadeira sob o ponto de vista de reticulados, mas não é verdadeira quando se considera o comportamento do outro operador no dióide, a saber, o operador multiplicação \otimes .

⁵ Desde que $\infty \geq a$, para todo $a \in \mathcal{D}$.

Teorema A.17: Uma condição necessária e suficiente para um reticulado ser distributivo é que, para todo $a, b \in \mathcal{D}$:

$\exists c \in \mathcal{D}$ tal que, se $(a \wedge c = b \wedge c)$ e $(a \oplus c = b \oplus c)$ então $a = b$.

A demonstração é clássica e pode ser encontrada em Dubreil e Dubreil-Jacotin (1964).

Definição A.18: Um *dióide* $\langle \mathcal{D}, \oplus, \otimes \rangle$ é *distributivo* se e somente se ele é completo e

$\forall \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}, \forall a \in \mathcal{D},$

$(c_1 \wedge \dots \wedge c_n \wedge c_{n+1} \wedge \dots) \oplus a = (c_1 \oplus a) \wedge \dots \wedge (c_n \oplus a) \wedge (c_{n+1} \oplus a) \wedge \dots$

para todo $c_i \in \mathcal{C}$ e $1 \leq i \leq n$.

e

$(c_1 \oplus \dots \oplus c_n \oplus c_{n+1} \oplus \dots) \wedge a = (c_1 \wedge a) \oplus \dots \oplus (c_n \wedge a) \oplus (c_{n+1} \wedge a) \oplus \dots$

para todo $c_i \in \mathcal{C}$ e $1 \leq i \leq n$.

Nota-se que exige-se que a propriedade distributiva estenda-se para subconjuntos infinitos. Os dois casos de distribuição, do \wedge para o \oplus e do \oplus para o \wedge , são exigidos pois um não implica o outro no caso infinito. A demonstração pode ser encontrada em Dubreil e Dubreil-Jacotin (1964).

A.6 A Equação $X = AX \oplus B$ e a Operação Estrela

Definição A.19: Seja $\langle \mathcal{D}, \oplus, \otimes \rangle$ um dióide. Uma nova operação sobre os elementos de \mathcal{D} , chamada de *operação estrela* é caracterizada como segue:

$\forall a \in \mathcal{D}, a^* = e \oplus a \oplus a^2 \oplus a^3 \oplus \dots$

As seguintes, são propriedades da operação estrela.

- $(a^*)^p = a^*$, $\forall p \in \mathbb{N}$.
- $(a^*)^* = a^*$.
- Seja $a^+ =_{\text{def}} a \otimes a^*$. Assim, $a^* = e \oplus a^+$ e $a^* \geq a^+$.

Teorema A.20: Seja $x = ax \oplus b$ uma equação implícita em x . Então $x = a^*b$ é a menor solução da equação implícita em x e para toda solução x , tem-se que $x = a^*x$.

Demonstração:

a) Mostra-se que a^*b é a menor solução de $ax \oplus b = x$.

i) Se x é uma solução, então $b \leq x$ e $ax \leq x$.⁶ A partir de $b \leq x$ segue-se que $a^p b \leq a^p x$, desde que a relação de ordem é compatível com a multiplicação e p percorre \mathbb{N} .

ii) Por outro lado, de $ax \leq x$ segue-se que:

$$aax \leq ax$$

$$aaax \leq aax$$

...

$$a^p x \leq a^{p-1} x.$$

Ou seja, $a^p x \leq \dots \leq aax \leq ax \leq x$. Logo, $a^p x \leq x$.

Utilizando o resultado de i) tem-se que $a^p b \leq x$. Desse modo, pode-se escrever essa última equação da seguinte forma:

$$a^*b = \bigoplus_{p=0}^{\infty} a^p b \leq x$$

Isso caracteriza que a^*b é a menor solução da equação $x = ax \oplus b$.

Falta verificar que a^*b é solução de $x = ax \oplus b$. De fato, $a^*b = aa^*b \oplus b$ a qual segue que, $a^*b = (aa^* \oplus e)b$ a qual segue que, $a^*b = ((a \oplus a^2 \oplus \dots) \oplus e)b$, a qual segue que, $a^*b = a^*b$. Portanto a^*b é solução de $x = ax \oplus b$.

⁶ Para uma discussão maior sobre equações lineares em dióides completos ver Baccelli et al (1992) e Cohen et al (1989).

b) Mostra-se que para toda solução, tem-se que $x = a^*x$.

Seja a equação $x = ax \oplus b$, substituindo a variável x do segundo membro da equação por $ax \oplus b$, tem-se:

$x = a(ax \oplus b) \oplus b$, e repetindo-se esse processo indefinidamente, tem-se:

$x = a^p x \oplus (e \oplus \dots \oplus a^{p-1})b$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Mas esta equação pode ser escrita da seguinte maneira:

$$x = \bigoplus_{p=0}^{\infty} a^p x \oplus \bigoplus_{p=0}^{\infty} a^{p-1} b \text{ donde segue-se que:}$$

$$x = a^*x \oplus a^*b. \quad \text{I}$$

Mas a partir de a) acima e de $b \leq x$ segue-se que $a^*b \leq a^*x$, e pela definição de relação de ordem, tem-se que:

$$a^*x = a^*x \oplus a^*b. \quad \text{II}$$

Comparando as equações I e II conclui-se que:

$$x = a^*x.$$

Portanto a^*x é solução de $x = ax \oplus b$. \blacklozenge

O teorema acima garante a existência de soluções em dióides completos. Por outro lado, se o sistema homogêneo $x = ax$ tem uma solução $w \neq e$, então afirma-se que para todo $z \in \mathcal{D}$, wz também é solução de $x = ax$. De fato, se w é solução, então $w = aw$. Logo, $wz = awz$, e como $aw = w$ tem-se que $wz = wz$. E mostrou-se que wz também é solução de $x = ax$. E também, se wz é solução de $x = ax$, então $wz \oplus a^*b$ é solução de $x = ax \oplus b$. De fato, $x = ax \oplus b \Rightarrow x = a(wz \oplus a^*b) \oplus b \Rightarrow x = awz \oplus aa^*b \oplus b \Rightarrow x = wz \oplus (aa^* \oplus e)b \Rightarrow x = wz \oplus a^*b$. Mostrou-se então que $wz \oplus a^*b$ é solução de $x = ax \oplus b$ sempre que wz for solução de $x = ax$.

Teorema A.21 Seja \mathcal{D} um dióide distributivo. Se x é uma solução da equação $x = ax \oplus b$ então esta solução pode ser escrita como $x = w \oplus a^*b$, onde w é solução da equação homogênea $x = ax$.

Demonstração: Para qualquer solução dada da equação $x = ax \oplus b$, considera-se o subconjunto $C_x = \{ c \mid x = c \oplus a^*b \}$. Nota-se que se $c \in C_x$ então ac também pertence

a C_x . De fato, se $x \in C_x$ então $x = c \oplus a^*b \Rightarrow ax = ac \oplus aa^*b \Rightarrow ax = ac \oplus a^+b$. Mas como $x = ax \oplus b$ e $ax = ac \oplus a^+b$ segue-se que $x = (ac \oplus a^+b) \oplus b \Rightarrow x = ac \oplus (a^+b \oplus b) \Rightarrow x = ac \oplus a^*b$. Portanto, mostrou-se que $ac \oplus a^*b$ também pertence a C_x , sempre que $c \in C_x$. Também, se $c, d \in C_x$, então $c \oplus d$ também pertence a C_x . De fato, desde que $x = x \oplus x \Rightarrow x = (c \oplus a^*b) \oplus (d \oplus a^*b) \Rightarrow (c \oplus d) \oplus a^*b \in C_x$. Portanto, se $c \in C_x$ então $a^*c \in C_x$.

Seja z o ínfimo do conjunto C_x . Assim, $z = (c_1 \wedge c_2 \wedge \dots \wedge c_n \wedge c_{n+1} \wedge \dots)$. como o dióide em questão é distributivo, então $z \oplus a^*b = (\bigwedge_{c \in C_x} c) \oplus a^*b = \bigwedge_{c \in C_x} (c \oplus a^*b)$.

Portanto, $z \in C_x$ e por conseguinte $az \in C_x$. Mas pela definição de z , como sendo o ínfimo, tem-se que $z \leq az$, e então $a^*z \leq a^*az$ o que segue que $a^*z \leq a^+z$. Mas pela desigualdade expressa na definição A.19 tem-se que $a^+ \leq a^*$ o que segue que $a^+z \leq a^*z$. Logo $a^*z = a^+z$. Seja então $w = a^*z$. Desse modo $w = a^*w$, mostrando que $w = a^*z$ é solução da equação homogênea $x = ax$ e que $(w \oplus a^*b)$ é solução de $x = ax \oplus b$, onde w é da forma a^*z . ♦

Lema A.22 Seja $\langle \mathcal{D}, \oplus, \otimes \rangle$ um dióide comutativo completo. Então tem-se que $\forall a, b \in \mathcal{D}, (a \oplus b)^* = a^* \otimes b^*$.

Uma maneira simples de se provar o lema acima é através da definição da operação estrela e da comutatividade. Mas este lema pode ser obtido como um corolário do seguinte teorema.

Teorema A.23 Sejam $\langle \mathcal{D}, \oplus, \otimes \rangle$ um dióide (não necessariamente comutativo) e a equação $x = ax \oplus xb \oplus c$ a qual é implícita em x . Então a^*cb^* é sua menor solução.

A demonstração pode ser encontrada em Baccelli et al (1992).

Lema A.24 Sejam $\langle \mathcal{D}, \oplus, \otimes \rangle$ um dióide comutativo e d um escalar. Então para a matriz A particionada em quatro blocos, onde $a_{22} = d$, tem-se que:

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ então,}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} a^* \oplus d^* a^* bc(a \oplus bc)^* & d^* (a \oplus bc)^* b \\ d^* c(a \oplus bc)^* & d^* \oplus d^* c(a \oplus bc)^* b \end{bmatrix}$$

A demonstração pode ser encontrada em Baccelli et al (1992).

A.7 Equivalência Módulo z em Dióides Comutativos

Num dióide comutativo é possível definir uma relação de equivalência e assim considerar um conjunto quociente obtido por meio dessa relação.

Definição A.25 Sejam $\langle \mathcal{D}, \oplus, \otimes \rangle$ um dióide comutativo e $a, b, z \in \mathcal{D}$. Diz-se que a é *equivalente a b módulo z* (em símbolos, $(a \equiv b \text{ mod } z)$) se e somente se $az^* = bz^*$.

Teorema A.26 A relação de *equivalência módulo z* é uma *relação de equivalência* em \mathcal{D} .

Demonstração:

Para verificar se é relação de equivalência é necessário verificar se a relação é reflexiva, simétrica e transitiva.

i) Reflexividade.

Para todo elemento $a \in \mathcal{D}$ tem-se que $(a \equiv a \text{ mod } z)$ pois, $az^* = az^*$.

ii) Simetria

Sejam a e b dois elementos quaisquer de \mathcal{D} . Supõe-se que eles estejam relacionados, ou seja, $(a \equiv b \text{ mod } z)$. Logo, tem-se que $az^* = bz^*$ e segue que $bz^* = az^*$. Portanto $(b \equiv a \text{ mod } z)$.

iii) Transitividade

Sejam a, b e c elementos de \mathcal{D} . Supõe-se que $(a \equiv b \text{ mod } z)$ e $(b \equiv c \text{ mod } z)$. Logo, $az^* = bz^*$ e $bz^* = cz^*$, portanto $az^* = cz^*$, Portanto $(a \equiv c \text{ mod } z)$.

Mostrou-se que a relação equivalência módulo z é uma relação de equivalência.



Se a é um elemento qualquer de \mathcal{D} , denota-se por $[a]_z$ como sendo a classe de equivalência módulo z determinada por a , ou seja,

$$[a]_z = \{ x \mid (x \equiv a \pmod{z}) \}.$$

O conjunto quociente de \mathcal{D} pela relação de equivalência módulo z será denotado por \mathcal{D}/z . Dados dois elementos quaisquer de \mathcal{D}/z coloca-se, por definição,

$$[a]_z \oplus [b]_z =_{\text{def}} [a \oplus b]_z \text{ e}$$

$$[a]_z \otimes [b]_z =_{\text{def}} [a \otimes b]_z.$$

Precisa-se verificar, inicialmente, que a soma de $[a]_z$ com $[b]_z$ e o produto de $[a]_z$ com $[b]_z$ estão bem definidos, isto é, que a definição acima não depende dos representantes a e b das classes de equivalência $[a]_z$ e $[b]_z$, ou seja, precisa-se demonstrar que se

$$[a]_z = [a']_z \text{ e } [b]_z = [b']_z \quad \text{I}$$

então,

$$[a \oplus b]_z = [a' \oplus b']_z \text{ e} \quad \text{II}$$

$$[a \otimes b]_z = [a' \otimes b']_z. \quad \text{III}$$

Ora, de I resulta que $a \equiv a'$ e $b \equiv b'$, logo, $az^* = a'z^*$ e $bz^* = b'z^*$. Somando-se as duas equações resulta que, $az^* \oplus bz^* = a'z^* \oplus b'z^*$ e pela distributividade, $(a \oplus b)z^* = (a' \oplus b')z^*$ o que resulta em, $[a \oplus b]_z = [a' \oplus b']_z$.

A partir de I, $az^* = a'z^*$ e $bz^* = b'z^*$. Multiplicando-se a primeira equação por bz^* tem-se que $bz^* az^* = bz^* a'z^*$ e a Segunda equação por $a'z^*$ tem-se que $a'z^* bz^* = a'z^* b'z^*$ o que resulta em $abz^* = a'b'z^*$. Portanto, $[a \otimes b]_z = [a' \otimes b']_z$. Assim, mostrou-se que as operações \oplus e \otimes para as classes de equivalências no conjunto quociente \mathcal{D}/z são bem definidas, ou seja, as operações não dependem dos representantes das classes de equivalência. A verificação de que \mathcal{D}/z é um díóide é imediata e consiste numa

simples análise dos axiomas que determinam um dióide.

Teorema A.27 Seja \mathcal{D}/z o conjunto quociente determinado pela relação de equivalência módulo z . Então $\langle \mathcal{D}/z, \oplus, \otimes \rangle$ é um dióide comutativo. Além disso cada classe de equivalência $[a]_z$ tem um maior elemento igual a az^* .

Demonstração:

Para demonstrar que o dióide \mathcal{D}/z é comutativo deve-se provar que $[a \oplus b]_z = [b \oplus a]_z$ e $[a \otimes b]_z = [b \otimes a]_z$.

i) $(a \oplus b)z^* = (b \oplus a)z^*$ resulta que $(a \oplus b) \equiv (b \oplus a)$ o que resulta em $[a \oplus b]_z = [b \oplus a]_z$.

ii) $(a \otimes b)z^* = (b \otimes a)z^*$ resulta que $(a \otimes b) \equiv (b \otimes a)$ o que resulta em $[a \otimes b]_z = [b \otimes a]_z$.

Desde que $z^* \geq e$, então az^* o qual não depende dos representantes da classe de equivalência $[a]_z$ é maior que todo elemento da classe de equivalência $[a]_z$. ♦

Apêndice B

Lógica Proposicional Clássica via Tableaux Analíticos

B.1 Introdução

Neste apêndice faz-se uma revisão dos conceitos tradicionais da lógica proposicional clássica, observados através de tableaux analíticos. O estudo de lógica clássica é muito vasto na literatura e pode ser encontrado em Mendelson (1987) e Dalen (1980). Para abordagens via tableaux tem-se Fitting (1990) e Smullyan(1968).

B.2 Conceitos Básicos sobre Árvores

O método tableaux fundamenta-se no conceito de *árvores*. Considerações pertinentes a árvores são descritas na seqüência.

Definição B.1: Por uma *árvore não ordenada* \mathfrak{T} entende-se um conjunto S de *pontos* ao qual associam :

- Uma função N que atribui a cada ponto x um inteiro positivo $N(x)$ chamado *nível de x* .
- Uma relação $x R y$ definida em S . A leitura é feita da seguinte maneira: *x é um predecessor de y* ou *y é um sucessor de x* . A relação R deve satisfazer as seguintes condições:

C_1 : Existe um único ponto a_1 de nível 1. Este ponto é chamado a *origem* da árvore.

C_2 : Cada ponto que não seja a origem tem um e um único predecessor.

C_3 : Para quaisquer pontos x e y pertencentes a S , se y é um sucessor de x , então $N(y)=N(x)+ 1$.

Definição B.2: Um ponto é dito um *ponto final* se ele não tem sucessores, um ponto é dito um *ponto simples* se ele tem exatamente um sucessor, e um ponto é dito um *ponto de junção* se ele tem mais de um sucessor.

Definição B.3: Um *caminho* é qualquer seqüência enumerável (finita ou não) de pontos, começando pela origem, de tal forma que cada termo da seqüência (exceto o último, se existir) é o predecessor do próximo.

Definição B.4: Um *caminho maximal* ou um *ramo* é um caminho cujo último termo é um ponto final da árvore ou um caminho que é infinito.

A partir das condições C_1 , C_2 e C_3 tem-se que para qualquer ponto x na árvore existe um único caminho tal que x seja o ponto final desse caminho.

Definição B.5: Uma *árvore ordenada* \mathfrak{S} é uma árvore não ordenada juntamente com uma função θ que associa a cada ponto de junção z uma seqüência $\theta(z)$ a qual não contém repetições, e cujo conjunto de termos consiste de todos os sucessores de z .

Assim, a partir de um ponto z de junção, é possível indicar o primeiro, segundo, terceiro, ..., sucessores de z . Também para um simples ponto x , diz-se do sucessor de x como o único sucessor de x .

Usualmente introduz-se a origem da árvore e seus sucessores como pontos abaixo da origem. Um segmento de linha de x para y caracteriza que y é sucessor de x .

Definição B.6: Uma árvore \mathfrak{S} é *finitamente gerada* se cada ponto tem um número finito de sucessores.

Definição B.7: Uma árvore \mathfrak{S} é *finita* se ela tem um número finito de pontos, caso contrário ela é dita *infinita*.

Definição B.8: Uma árvore \mathfrak{S} é dita *n-ádica* se ela tiver no máximo n sucessores em cada ponto de junção.

Neste trabalho as árvores serão sempre *diádicas*, ou seja, em cada ponto de junção tem-se exatamente dois sucessores, o primeiro sucessor, ou *sucessor da esquerda*, e o segundo sucessor ou *sucessor da direita*.

B.3 A Linguagem da Lógica Clássica Proposicional

Um tratamento semelhante aos utilizados em textos clássicos de lógica é dado na descrição da linguagem. Os textos Smullyan (1968) e Fitting (1990) fornecem um estudo mais detalhado a respeito de tableaux analíticos. Descreve-se a seguir a sintaxe da linguagem, suas características e suas regras de formação.

Definição B.9: A linguagem da lógica proposicional clássica tem um *alfabeto* S consistindo de:

- a) variáveis proposicionais: Letras minúsculas p_0, p_1, p_2, \dots .¹
- b) conectivos: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ e \leftrightarrow .
- c) sinais de pontuação: (e).

Em algumas partes do texto referir-se-á a variáveis proposicionais como proposições atômicas.

¹ Quando não houver dúvidas no contexto, usar-se-á as letras minúsculas x, y, p, q, \dots para representar variáveis proposicionais.

Definição B.10: Uma *expressão* é qualquer seqüência finita $s_1s_2s_3\dots s_n$, onde para cada i , $1 \leq i \leq n$, $s_i \in S$.

Definição B.11: O conjunto \mathcal{F} das *fórmulas* da linguagem é definido como segue:

- a) Toda proposição atômica pertence a \mathcal{F}
- b) Se X e Y pertencem a \mathcal{F} , então $(X \wedge Y)$, $(X \vee Y)$, $(X \rightarrow Y)$ e $(X \leftrightarrow Y)$ também pertencem a \mathcal{F} .
- c) Se $X \in \mathcal{F}$, então $(\neg X) \in \mathcal{F}$.
- d) Só é fórmula o que advém das condições a), b), e c) acima.

Obs.: X e Y não pertencem a \mathcal{F} , não são fórmulas da linguagem, mas são utilizadas para fazer referências às fórmulas. Constituem uma *metalinguagem*, e as letras X, Y, \dots são as metavaráveis. Nesta metalinguagem, as letras maiúsculas X, Y, Z, P, Q, R, \dots acompanhadas ou não de índices serão usadas para representar fórmulas.

Para quaisquer fórmulas X e Y da linguagem proposicional clássica tem-se que:

- (1) $(\neg X)$ é chamado a negação de X . e pode ser lido como “não X ”.
- (2) $(X \wedge Y)$ é chamado a conjunção de X e Y , e pode ser lido como “ X e Y ”. X e Y são ditos conjuntivos.
- (3) $(X \vee Y)$ é chamado a disjunção de X e Y , e pode ser lido como “ X ou Y ”. X e Y são ditos disjuntivos.
- (4) $(X \rightarrow Y)$ é chamado a condicional de X e Y , e pode ser lido como “ X implica Y ”. X é o antecedente da condicional e Y o conseqüente.
- (5) $(X \leftrightarrow Y)$ é chamado a bicondicional de X e Y , e pode ser lido como “a bicondicional entre X e Y ”.

Definição B.12 (Subfórmula): X é uma subfórmula de Y se

- a) $X=Y$, ou
- b) $Y=(Y_1 \wedge Y_2)$, ou $(Y_1 \vee Y_2)$, ou $(Y_1 \rightarrow Y_2)$, ou $(Y_1 \leftrightarrow Y_2)$, e X é uma subfórmula de Y_1 ou de Y_2 , ou
- c) $Y=(\neg Y_1)$ e X é subfórmula de Y_1 .

Obs.: Note que variável proposicional não tem subfórmula distinta dela mesma.

Definição B.13 (Princípio de Indução): Seja P uma propriedade, então $P(X)$ se verifica para toda fórmula $X \in \mathcal{F}$ se

- i) $P(p_i)$ é verdadeira, para todo i ;
- ii) Se $P(X)$ e $P(Y)$ são verdadeiras, então $P(X \wedge Y)$, $P(X \vee Y)$, $P(X \rightarrow Y)$ e $P(X \leftrightarrow Y)$ também são verdadeiras;
- iii) Se $P(X)$ se verifica, então $P(\neg X)$.

B.3.1 Propriedade Sintática

Definição B.14 (Princípio de substituição): É conveniente, em muitas situações da lógica substituir fórmulas por subfórmulas. A notação $X[A/Y]$ representará a fórmula que se obtém a partir da substituição de todas as ocorrências de A em X , por Y . O princípio da substituição pode ser definido como sendo uma função \mathcal{F} em \mathcal{F} tal que:

- a) $X[A/Y] \begin{cases} X, & \text{se } X \text{ é atômica e } X \neq A \\ Y, & \text{se } X = A \end{cases}$
- b) $(X * Z)[A/Y] \quad X[A/Y] * Z[A/Y]$
- c) $(\neg X)[A/Y] \quad \neg X[A/Y]$

onde $*$ $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

B.4 A Semântica da Lógica Proposicional Clássica

Na seção anterior foi descrito o comportamento dos símbolos da linguagem e como manuseá-los segundo seu vocabulário. Nesta seção dá-se uma interpretação conveniente aos seus símbolos, de modo a poder analisar aspectos diretamente relacionados a uma semântica de dois valores. Neste caso, o valor verdadeiro (t) e o valor falso (f).

Uma proposição atômica pode ser verdadeira ou falsa, não podendo ser ao mesmo tempo verdadeira e falsa, tampouco não ser nem verdadeira nem falsa.

Definição B.15: Uma função $v: \mathcal{F} \rightarrow \{t, f\}$ é uma *valoração*² se para quaisquer fórmulas X , $Y \in \mathcal{F}$ tiver-se:

$v(\neg X) =$	t se $v(X) = f$; f caso contrário.
$v(X \wedge Y) =$	t se $v(X) = v(Y) = t$; f caso contrário.
$v(X \vee Y) =$	t se $v(X) = t$ ou $v(Y) = t$; f caso contrário.
$v(X \rightarrow Y) =$	t se $v(X) = f$ ou $v(Y) = t$; f caso contrário.
$v(X \leftrightarrow Y) =$	t se $v(X) = v(Y)$; f caso contrário.

Toda fórmula pode ser encarada como uma função de verdade, pois seu valor verdade depende dos valores-verdade de suas subfórmulas.

²Comumente chamado de valoração booleana.

B.5 Propriedades Semânticas

Um importante subconjunto das fórmulas é aquele no qual todas as fórmulas são verdadeiras em todas as valorações.

Definição B.16: Uma fórmula X é dita ser uma tautologia se $v(X) = t$ para toda valoração v .

Doravante, o símbolo \models será usado para denotar tautologias na lógica proposicional clássica. A leitura de $\models X$ será : "A fórmula X é uma tautologia".

Desse modo uma fórmula é uma tautologia se ela assume o valor lógico t para todas as atribuições de valores verdade dado as suas variáveis proposicionais.

Definição B.17: As fórmulas que assumem apenas o valor lógico f para qualquer valoração v são chamadas de contradição.

Definição B.18: Uma fórmula X é dita **satisfatível** se e somente se existe uma valoração v , tal que $v(X) = t$. Em outras palavras, X é satisfatível se X é verdadeira em pelo menos uma valoração.

Definição B.19: Um *conjunto* de fórmulas S é *satisfatível* se existe v tal que $v(X) = t$ para todo $X \in S$.

Definição B.20: Seja Γ um conjunto de fórmulas. Diz-se que a fórmula X é *conseqüência lógica* do conjunto de fórmulas Γ (em símbolos, $\Gamma \models X$) se e somente se para toda valoração v , se $v(Y) = t$ para todo $Y \in \Gamma$, então $v(X) = t$.

Definição B.21: Se para toda valoração v , $v(X) = v(Y)$ então diz-se que as fórmulas X e Y são *equivalentes* (em símbolos, $X \equiv Y$).

B.6 Tableaux Analíticos

Descreve-se agora um procedimento de prova eficiente para a lógica clássica proposicional, o qual é estendido para a lógica modal NK no capítulo 3.

Uma característica importante que determina a versatilidade do método de prova tableaux relaciona-se às fórmulas envolvidas numa prova. Para se obter uma prova através de tableaux analíticos as únicas fórmulas necessárias para a prova são suas subfórmulas. Isso não acontece em outros métodos de prova tais como métodos axiomáticos.

Definição B.22: Uma **fórmula assinalada** é uma fórmula do tipo FX ou TX onde X é uma fórmula.

Definição B.23: Para qualquer valoração ν , uma fórmula assinalada TX é chamada de verdadeira se $\nu(X) = t$, e falsa se $\nu(X) = f$. E uma fórmula assinalada FX é chamada de verdadeira se $\nu(X) = f$ e de falsa se $\nu(X) = t$.

Desse modo entende-se que o valor verdade de TX é o mesmo que o de X e o de FX como sendo o mesmo que o de $(\neg X)$.

B.6.1 O Método Tableaux

A seguir, inicia-se de modo intuitivo o desenvolvimento de provas por intermédio de tableaux e segue-se na seqüência com uma exposição mais precisa do mesmo.

B.6.1.1 Ilustração do Método Tableau

Os tableaux analíticos são procedimentos de prova elaborados em forma de árvores binárias. As árvores contém sempre um número finito de ramos. Cada ramo por sua vez é

constituído por um conjunto de nós de tal forma que em cada nó ocorra uma fórmula assinalada da lógica. O objetivo de uma prova tableau é verificar se uma dada fórmula X da lógica é tautológica ou não. Para tal inicia-se o tableau falseando uma fórmula X e prossegue-se aplicando regras de extensão de ramos. A impossibilidade de falsear a fórmula X é caracterizada pela ocorrência de contradições em todos os ramos do tableau, denotando assim que X é uma tautologia. Se algum ramo não contiver contradições entre suas fórmulas então significa que existe a possibilidade de falsear a fórmula, portanto X não é tautologia.

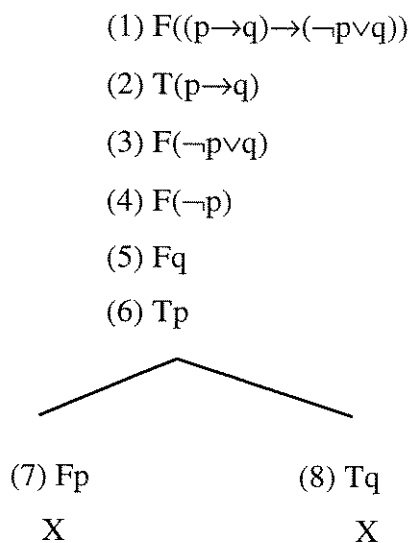
Exemplo B.24: Supõe-se que se deseja provar a seguinte fórmula $(p \rightarrow (p \vee q))$. A seguir está um tableau que prova a fórmula. A explicação é dada a seguir.

- (1) $F(p \rightarrow (p \vee q))$
- (2) Tp
- (3) $F(p \vee q)$
- (4) Fp
- (5) Fq
- X

O tableau é construído como segue. Investiga-se a possibilidade de se obter uma contradição a partir da afirmação de que a fórmula em (1) é falsa. A primeira linha consiste em colocar um "F" a frente da fórmula $(p \rightarrow (p \vee q))$, caracterizando a tentativa de falsificar a fórmula em (1). Como a fórmula em (1) é uma condicional, esta só é falsa quando o antecedente for verdadeiro e o conseqüente for falso. Introduce-se então nas linhas (2) e (3) as fórmulas que são *conseqüência direta* da fórmula em (1), ou seja, adicionando-se Tp e $F(p \vee q)$, respectivamente. Já na linha (3), para que $(p \vee q)$ seja falso deve-se ter que ambos, p e q sejam falsos, ou seja, adiciona-se Fp e Fq como conseqüências diretas da linha (3). Desse modo tem-se uma contradição, pois à p é atribuído o valor t e f ao mesmo tempo, como mostrado nas linhas (2) e (4). Isso caracteriza a impossibilidade da fórmula em (1) ser falsificada, logo é uma tautologia. Diz-se, neste caso, que o único ramo do tableau *está fechado*, e coloca-se uma marca "X" no final do ramo fechado. Como esse tableau só tem um ramo então ele também é dito estar fechado. Caso existisse mais de um ramo no

tableau, este para ser fechado deveria conter contradições em todos os ramos. O exemplo a seguir ilustra tal procedimento.

Exemplo B.25: Objetiva-se provar a fórmula $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q)$.



Note que neste tableau tem-se dois ramos:

- (i) o ramo constituído por (1), (2), (3), (4), (5), (6) e (7);
- (ii) o ramo constituído por (1), (2), (3), (4), (5), (6) e (8).

As linhas (2) e (3) advém da linha (1), as linhas (4) e (5) advém da linha (3), a linha (6) advém da linha (4) e as linhas (7) e (8) advém da linha (2), pois para que $(p \rightarrow q)$ seja verdadeiro em (2), deve-se ter que p deve ser falso, Fp , ou q deve ser verdadeiro, Tq , ocorrendo uma *bifurcação*. E os dois ramos desse tableau fecharam, pois em ambos ocorrem contradições, caracterizadas em (i) por Tp e Fp e em (ii) por Fp e Tq . Logo a fórmula $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q)$ não pode ser falsificada, portanto é uma tautologia. Logo, o tableau está fechado por conter contradições em todos os seus ramos.

Obs.: Os números colocados ao lado das fórmulas são utilizados apenas para se fazer referências as fórmulas, eles não fazem parte da construção dos tableaux.

B.6.2 Regras de Extensão de Ramos

Vai-se agora esquematizar as regras que servem para estender os ramos de um tableau. Apesar das regras serem de carácter sintático, dizerem a respeito da sintaxe do sistema, sua motivação intuitiva é de ordem semântica. Por exemplo, uma regra de extensão para o conectivo \vee é dada por :

$F(X \vee Y)$
FX
FY

Tabela B.1: Exemplo de regra de extensão de ramos

Esse esquema é uma regra que pode ser interpretada semanticamente como: *uma disjunção é falsa se e somente se ambos os componentes dela são falsos.*

Na sequência expõe-se as regras tableaux de extensão de ramos.

$T(X \wedge Y)$	$F(X \vee Y)$	$F(X \rightarrow Y)$	$F\neg X$
TX	FX	TX	TX
TY	FY	FY	TX

Tabela B.2 Regras que inferem conseqüências diretas nos ramos

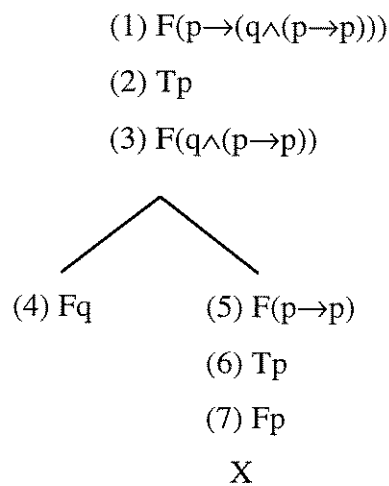
$F(X \wedge Y)$		$T(X \vee Y)$		$T(X \rightarrow Y)$		$T\neg X$	
FX	FY	TX	TY	FX	TY	FX	FX

Tabela B.3 Regras que bifurcam ramos

As fórmulas assinaladas se caracterizam por dois tipos, aquelas que inferem conseqüências diretas em um mesmo ramo, e aquelas que inferem bifurcações.

Pelo visto até agora, qualquer aplicação de regras de extensão de ramos caracteriza um tableau. No exemplo B.26, a seqüência de linhas (1),(2) e (3) são suficientes para determinar um tableau. Mas não permite decidir se ocorreu ou não uma prova da fórmula $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q)$. Um procedimento de "parada" na utilização das regras de extensão de ramos que determine se uma prova ocorreu ou não é obtido quando se completam os ramos. Um ramo de um tableau é dito ser *completo* se nenhuma fórmula ficou sem sofrer a aplicação de alguma regra de extensão de ramos.

Exemplo B.26: Analisa-se o tableau para a fórmula $(p \rightarrow (q \wedge (p \rightarrow p)))$.



Note que este tableau não fechou, apesar de se ter aplicado regras a todas as fórmulas do tableau. Neste caso, todos os ramos do tableau acima são completos. O ramo (1), (2), (3), e (4) está aberto, isto significa que não ocorreu contradição, logo é possível falsificar a fórmula em (1). Para isto basta atribuímos a variável proposicional p o valor t e a variável proposicional q o valor f . Intuitivamente, pode-se dizer que num tableau que não é fechado, existe algum ramo onde não houve contradição, isso significa que aquele ramo é um caminho que se tem para encontrar uma valoração que falsifique a fórmula da origem do tableau. Assim, a tentativa de falsificar a fórmula $(p \rightarrow (q \wedge (p \rightarrow p)))$ foi bem sucedida, ou seja, é possível encontrar uma valoração onde aquela fórmula é falsa.

B.6.3 Conseqüência Lógica

Pode-se também usar o método de tableaux analíticos para se analisar conseqüências lógicas. Supõe-se por exemplo que se deseja verificar se $(p \rightarrow r)$ é conseqüência lógica de $(p \rightarrow q)$ e de $(q \rightarrow r)$. Para isso, pode-se simplesmente verificar, via tableaux, se $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ é uma tautologia, ou construir um tableau começado por

(1) $T(p \rightarrow q)$

(2) $T(q \rightarrow r)$

(3) $F(p \rightarrow r)$

e verificar se o tableau fecha. Fechando, significa que não é possível falsificar a fórmula da linha (3) tendo as duas primeiras como verdadeiras.

Definição B.27: (Conseqüência Lógica em Tableaux) A fórmula Y é **conseqüência lógica** de X_1, X_2, \dots, X_n se e somente o tableau para a fórmula $(X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_n) \rightarrow Y$ fechar.

B.6.4 Notação Unificada

Para evitar repetições nas caracterizações das fórmulas assinaladas, utiliza-se uma notação que traz algo em comum em certas classes de fórmulas. Por exemplo, nas fórmulas da forma $T(X \wedge Y)$, $F(X \vee Y)$, $F(X \rightarrow Y)$, $T\neg X$, $F\neg X$, tem-se em comum a conseqüência direta na extensão de ramos e também um comportamento conjuntivo. Isso sugere que se resuma todos esses casos simplesmente por um único tipo de fórmula, chamado de **fórmulas α** (ou fórmulas do tipo α). Uma fórmula do tipo α terá como componentes α_1 e α_2 . Assim,

α	α_1	α_2
$T(X \wedge Y)$	TX	TY
$F(X \vee Y)$	FX	FY
$F(X \rightarrow Y)$	TX	FY
$F\neg X$	TX	TX

Tabela B.4: Regras para α -fórmulas

Essa notação traz grandes vantagens na definição das regras de extensão de ramos, pois aquelas que tem consequência direta nos ramos são caracterizadas simplesmente pelas fórmulas do tipo α .

Exemplo B.28: Se $\alpha = T(X \wedge Y)$ então $\alpha_1 = TX$ e $\alpha_2 = TY$. A ilustração da aplicação da regra de extensão de ramo a uma fórmula do tipo α é dada a seguir.

- (i) $T(X \wedge Y)$
- (i+k) TX
- (i+k+1) TY (i, k $\in N$)

O mesmo se aplica para os outros casos das fórmulas do tipo α .

As fórmulas do tipo α comportam-se *conjuntivamente* . Assim, sempre que α é verdadeira tem-se que α_1 e α_2 também o são.

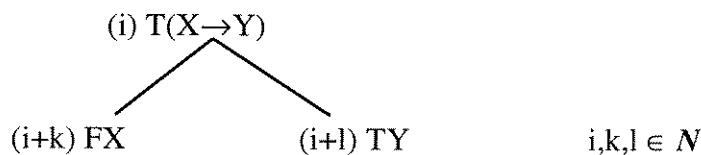
Raciocina-se de modo análogo para as fórmulas que produzem uma bifurcação nos nós de um tableau, ou seja para aquelas fórmulas que se comportam disjuntivamente. Chama-se estas de **fórmulas β** (ou fórmulas do tipo β). Seus componentes são β_1 e β_2 . Assim,

β	β_1	β_2
$F(X \wedge Y)$	FX	FY
$T(X \vee Y)$	TX	TY
$T(X \rightarrow Y)$	FX	TY
$T\neg X$	FX	FX

Tabela B.5: Regras para β -fórmulas

As fórmulas do tipo β comportam-se *disjuntivamente*. Logo, se uma fórmula do tipo β é verdadeira então β_1 é verdadeira ou β_2 é verdadeira.

Seja $\beta = T(X \vee Y)$ com componentes $\beta_1 = TX$ e $\beta_2 = TY$. A ilustração da aplicação da regra de extensão de ramos a uma fórmula do tipo β é dada a seguir.

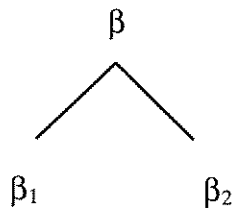


Desse modo, com a notação unificada para fórmulas, define-se de modo muito simples as regras de extensão de ramos. Estas são englobadas em dois casos. Aqueles onde as fórmulas se comportam conjuntivamente (fórmulas do tipo α), e aqueles onde as fórmulas se comportam disjuntivamente (fórmulas do tipo β). Resume-se as regras para a notação unificada em:

Regra α :

$$\begin{array}{c}
 \alpha \\
 | \\
 \alpha_1 \\
 | \\
 \alpha_2
 \end{array}$$

Regra β :



Obs.: É comum referir-se às fórmulas do tipo α e do tipo β como α - fórmulas ou β - fórmulas, respectivamente.

B.4.5 Definição Precisa de Tableaux

Uma definição precisa do que é um tableaux ainda não foi exposta, apesar de se ter trabalhado e descrito provas através de tableaux. A espera se justifica pelo fato de se pretender utilizar a notação unificada para o mesmo. Sem descaracterizar as definições enunciadas até esse ponto do trabalho. No que se segue define-se precisamente os conceitos relativos à tableaux analíticos.

Definição B.29: Um **tableaux analítico** para uma fórmula X é uma árvore ordenada diádica, cujos pontos são ocorrências de fórmulas, e é construído como segue. Começa-se por colocar FX na origem. Seja \mathfrak{S} um tableau construído para X e seja E um ponto final. Então pode-se estender \mathfrak{S} por uma das seguintes operações:

- i) Se alguma α -fórmula ocorre no ramo R_E , então pode-se juntar α_1 ou α_2 como os únicos sucessores de E ;
- ii) Se alguma β -fórmula ocorre no ramo R_E , então pode-se simultaneamente adicionar β_1 como sucessor da esquerda de E , e β_2 como o sucessor da direita de E .

A definição indutiva de tableau para X pode ser exposta da seguinte maneira. Dadas duas árvores ordenadas diádicas \mathfrak{S}_1 e \mathfrak{S}_2 , cujos pontos são ocorrências de fórmulas. Diz-se que \mathfrak{S}_2 é uma extensão direta de \mathfrak{S}_1 , se \mathfrak{S}_2 puder ser obtido a partir de \mathfrak{S}_1 por aplicação de uma das operações i) ou ii) acima. Então \mathfrak{S} é um tableau para a fórmula A se e somente se existir uma seqüência finita $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}$ tal que \mathfrak{S}_1 é uma árvore contendo um único

ponto, qual seja, a origem FX , e tal que para cada $i < n$, \mathfrak{S}_{i+1} é uma extensão direta de \mathfrak{S}_i .

Definição B.30: Um ramo θ de um tableau para fórmulas assinaladas é dito estar **fechado** se:

- ele contém TX e FX para alguma fórmula X ;

Definição B.31: Um tableau \mathfrak{S} é dito estar **fechado** se todos seus ramos estão fechados.

Definição B.32: Uma **prova** de X é um tableau fechado começado por FX .

Definição B.33: Um ramo de um tableau é dito **satisfatível** se e somente se o conjunto de fórmulas que ele contém é satisfatível.

Definição B.34: Um tableau é **satisfatível** se e somente se tem pelo menos um ramo satisfatível.

3.4.6 Correção

Teorema B.35: Supõe-se que \mathfrak{S} é um tableau satisfatível. Seja \mathfrak{S}' um tableau que é obtido a partir de \mathfrak{S} pela aplicação de uma simples regra de extensão de ramos (regra α ou regra β). Então \mathfrak{S}' é satisfatível.

Demonstração: Como \mathfrak{S} é satisfatível, algum ramo de \mathfrak{S} é satisfatível. Assim, ao aplicar uma regra de extensão de ramos em qualquer ramo que não seja aquele que é satisfatível, o tableau \mathfrak{S}' resultante ainda terá aquele ramo satisfatível e portanto será satisfatível.

Supõe-se agora que θ seja um ramo satisfatível do tableau \mathfrak{S} e que uma regra de extensão de ramos é aplicada em θ . Então tem-se que analisar dois casos, qual sejam, o caso em que a regra α é aplicada e o caso em que a regra β é aplicada.

Primeiro caso: Supõe-se que a partir de θ aplica-se a regra α , ou seja, θ contém $S \cup \{ \alpha \}$,

onde S é o conjunto de todas as fórmulas de θ diferentes da fórmula α . Assim tem-se que \mathfrak{S}' será um dos três subcasos:

- i) $S \cup \{ \alpha, \alpha_1 \}$ ou
- ii) $S \cup \{ \alpha, \alpha_1, \alpha_2 \}$ ou
- iii) $S \cup \{ \alpha, \alpha_2 \}$.

Mas α_1, α_2 são verdadeiros sempre que α o for (pois as fórmulas comportam-se conjuntivamente). Desse modo em quaisquer subcasos \mathfrak{S}' será satisfável.

Segundo caso : Supõe-se que a partir de θ aplica-se a regra β , ou seja, θ contém $S \cup \{ \beta \}$, onde S é o conjunto das fórmulas contidas em θ , mas que diferem de β . Assim \mathfrak{S}' será um dos dois subcasos:

- i) $S \cup \{ \beta, \beta_1 \}$ ou
- ii) $S \cup \{ \beta, \beta_2 \}$.

Mas se β é verdadeiro então pelo menos um dos componentes de β será verdadeiro, isto é, ou β_1 será verdadeiro ou β_2 será verdadeiro ou ambos (as fórmulas β comportam-se disjuntivamente). Portanto como $S \cup \{ \beta \}$ é satisfável então \mathfrak{S}' terá ao menos um ramo satisfável, proveniente de $S \cup \{ \beta, \beta_1 \}$ ou proveniente de $S \cup \{ \beta, \beta_2 \}$. Assim em quaisquer subcasos \mathfrak{S}' será satisfável.

Portanto, se \mathfrak{S} é satisfável, \mathfrak{S}' também é satisfável. ♦

Se um tableau \mathfrak{S} é fechado então ele contém todos os ramos fechados, o que significa que em todos os seus ramos deve-se ter TX e FX para uma certa fórmula X . Logo não existe valoração v que deixe TX e FX verdadeiras ao mesmo tempo, o que implica que nenhum ramo nessas condições é satisfável. Portanto um tableau fechado não pode ser satisfável.

Teorema B.36(Correção): Se X tem uma prova tableau então X é uma tautologia.

Demonstração : Supõe-se por hipótese que X tem uma prova tableau e que X não é uma

tautologia, e chega-se a uma contradição.

Se X tem uma prova tableau então nenhum ramo desse tableau é aberto, ou seja todos os ramos fecham. Se X não é tautologia, então existe uma valoração v tal que $v(X) = f$. Um tableau para X começa com FX , e se X não é uma tautologia, existe um caso onde $v(X) = f$ e conseqüentemente FX é verdadeiro. Assim, o conjunto $\{FX\}$ é satisfável. Seja \mathfrak{S} o tableau começando por FX . Pelo teorema anterior qualquer extensão \mathfrak{S}' de \mathfrak{S} será satisfável, ou seja um tableau começando com FX terá um ramo satisfável. Mas isso contradiz a hipótese de que X tem uma prova tableau, ou seja, todos os ramos do tableau começando por FX fecham (não são satisfáveis). Portanto, se X tem uma prova tableau, X é uma tautologia. ♦

Isso mostra a consistência do método tableau, pois nenhuma fórmula e sua negação são ambas provadas.

B.6.7 Completude

Agora, objetiva-se verificar se as regras são suficientes para provar as tautologias. Para pensar em completude é preciso pensar em um procedimento que garanta que se uma prova existe, ela será encontrada.

Definição B.37: Um ramo θ de um tableau é dito ser **completo** se para cada α -fórmula que ocorre em θ , ambos α_1 e α_2 também ocorrem em θ , e para cada β -fórmula que ocorre em θ , β_1 ocorre em θ ou β_2 ocorre em θ .

Definição B.38: Um tableau \mathfrak{S} é **completado** se cada ramo de \mathfrak{S} ou está completo ou está fechado.

Deseja-se mostrar que se um tableau \mathfrak{S} está completado e é aberto então tem pelo menos um ramo satisfável.

Definição B.39: Um conjunto H de fórmulas proposicionais é chamado um **conjunto de Hintikka**, sempre que :

H1- Nenhuma variável proposicional e sua negação estão ambos em H :

H2- Se $\alpha \in H$ então $\alpha_1 \in H$ e $\alpha_2 \in H$:

H3- Se $\beta \in H$ então $\beta_1 \in H$ ou $\beta_2 \in H$:

Lema B.40 (Lema de Hintikka): Cada conjunto H de Hintikka é satisfável.

Demonstração :

Seja H um conjunto de Hintikka. Deseja-se encontrar uma valoração na qual cada elemento de H seja verdadeiro. Para tal atribui-se o seguinte :

1- se $Tp \in H$ então $v(p) = t$;

2- se $Fp \in H$ então $v(p) = f$;

3- se nem Tp , nem Fp pertencem a H então $v(p) = t$.

Mostra-se agora que cada fórmula pertencente a H é verdadeira sob esta interpretação. A prova será feita por indução.

Base Indutiva : As fórmulas de grau 0 (variáveis proposicionais) são verdadeiras por construção.

Hipótese Indutiva : Supõe-se que as fórmulas de grau $k < n$ sejam verdadeiras. Mostra-se que as de grau n também são verdadeiras.

Caso 1 : Supõe-se que X é do tipo α . Se $X \in H$ então α_1 e α_2 também pertencem a H (por H1). Mas α_1 e α_2 são de grau menor que α .

Portanto por hipótese de indução, são ambas verdadeiras. Isto implica que α é verdadeira.

Caso 2 : Supõe-se que X é do tipo β . Se $X \in H$ então β_1 ou β_2 pertencem a H (por H2).

Mas β_1 ou β_2 são grau menor que β . E como pelo menos uma delas pertence a H, por hipótese de indução, pelo menos uma delas é verdadeira. Isto implica que β é verdadeira.

Isso conclui a prova de que o conjunto H de Hintikka é satisfável. ♦

Teorema B.41: Qualquer ramo completo aberto de qualquer tableau é satisfável.

Demonstração: Se um ramo é aberto ele não contém nenhuma fórmula e sua negação (condição H₁). Se o ramo é completo então se α pertence ao ramo pela definição de ramo completo tem-se que α_1 e α_2 pertencem ao ramo (condição H₂) e o mesmo argumento para qualquer fórmula β que pertença ao ramo, ao menos β_1 ou β_2 pertencem ao ramo (condição H₃). Portanto, um conjunto de fórmulas pertencente a um ramo aberto completo satisfaz as condições do conjunto de Hintikka, e pelo lema de Hintikka, é satisfável. ♦

Teorema B.42 (Completeness): Se X é uma tautologia, então X tem uma prova tableau.

Demonstração: Mostra-se por contraposição. Supõe-se \mathfrak{S} um tableau completado começando por FX . Se \mathfrak{S} não tem uma prova tableau, então existe um ramo que é aberto e completo, e pelo teorema anterior é satisfável. Logo a origem FX é satisfável, e portanto X não pode ser tautologia.

Portanto se X é uma tautologia então existe uma prova tableau para X . ♦