

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO  
DEPTO. DE ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL

## TESE DE DOUTORADO

# Identificação e Controle de Sistemas a Eventos Discretos na Álgebra $(\max,+)$

Carlos Andrey Maia

Orientador: Rafael Santos Mendes

Co-orientadores: Jean-Louis Boimond

Laurent Hardouin

Tese apresentada à Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade de Campinas como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica (área de automação).

### **Banca examinadora:**

R. Santos Mendes (FEEC/UNICAMP)  
J. -L. Boimond (LISA/Université d'Angers)  
L. Hardouin (LISA/Université d'Angers)  
J. -J. Loiseau (CNRS/IRCCyN)  
J. E. Ribeiro Cury (UFSC)  
I. L. Marques Ricarte (FEEC/UNICAMP)

Campinas

Julho de 2003



## Agradecimentos

Esta tese foi realizada graças a um projeto de co-tutela entre a Universidade Estadual de Campinas no Brasil e a Universidade de Angers na França.

Agradeço a Rafael Santos Mendes (Brasil) a Laurent Hardouin e a Jean-Louis Boimond (França) pela orientação, pelo apoio e pelo empenho ao longo deste trabalho.

Agradeço a Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da UNICAMP e ao LISA da Universidade de Angers por me acolherem e permitirem a realização deste projeto.

Agradeço ao Departamento de Engenharia Elétrica da UFMG por me dar a oportunidade de realizar este trabalho através da liberação das minhas atividades didáticas.

Agradeço a minha família pelo carinho e pela confiança que sempre depositaram em mim.

Agradeço a todos os colegas, professores e funcionários da UFMG, da UNICAMP e do LISA.

Finalmente, agradeço à UFMG e à CAPES pelo suporte financeiro.

## Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués grâce à un projet de cotutelle entre l'Université d'Angers et l'Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).

J'adresse mes remerciements à M. Jean-Louis Ferrier, Professeur à l'Université d'Angers, pour m'avoir donné l'opportunité de préparer une thèse au sein du Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA).

Je remercie M. Jean-Jacques Loiseau, Directeur de Recherche au CNRS, pour avoir accepté d'être rapporteur de ce mémoire.

Je voudrais exprimer ma gratitude à M. Rafael Santos Mendes, Professeur à l'UNICAMP et à M. Laurent Hardouin, Maître de Conférences à l'Université d'Angers, pour leur encadrement et leurs conseils et pour l'aide qu'ils ont apporté dans le développement de ce travail.

Je remercie M. Jean-Louis Boimond, Professeur à l'Université d'Angers, d'avoir accepté d'encadrer cette thèse.

Finalement, je remercie également les collègues de laboratoire pour l'ambiance tout-à fait sympathique pendant mon séjour au LISA.



À MEMÓRIA DO MEU QUERIDO E SAUDOSO PAI,  
OLINTO MENDES MAIA.



## Resumo

Grafos a Eventos Temporizados (GET) são uma subclasse de redes de Petri apropriada para a descrição de Sistemas a Eventos Discretos sujeitos a fenômenos de sincronização. Embora esses sistemas apresentem comportamento não-linear na álgebra convencional, eles são descritos por equações lineares na álgebra de dióides. Esta tese aborda os problemas de identificação e de controle de tais sistemas. Na abordagem de identificação, propõe-se um método de estimação paramétrica para modelos max-plus lineares mono-entrada e mono-saída. O algoritmo de estimação é desenvolvido a partir da função de transferência entre a entrada e a saída do sistema. Na abordagem de controle, trata-se do controle por modelo de referência num contexto *Just-in-Time*. A estrutura de controle proposta é baseada na pré-compensação e na retroalimentação. Mostra-se que essa abordagem sempre resulta em um comportamento ótimo do sistema em malha fechada e que a existência dos controladores ótimos é independente da escolha do modelo de referência (diferentemente das abordagens em malha fechada propostas em outros trabalhos). Esses resultados são aplicados na resolução do problema de estabilização de GET.

**Palavras Chave:** Sistemas a Eventos Discretos, Grafos a Eventos Temporizados, Dióides, Identificação, Controle, *Just-in-Time*, Álgebra Max-Plus.

## Abstract

Timed Event Graphs (TEG) are a subclass of Petri nets suitable to describe Discrete Event Systems subject to synchronization phenomena. Although these systems have nonlinear time behavior in conventional algebra they are described by linear equations in dioid algebra. This thesis deals with identification and control problems of such systems. The identification approach proposes a parametric estimation method for SISO linear max-plus models. The estimation algorithm is developed from the input-output transfer function of the system. The control approach deals with the model-reference control stated in a Just-in-Time context. The proposed control structure is based on a precompensator and a feedback controllers. It is shown that this approach always leads to an optimal behavior of the closed-loop system and that the existence of optimal controllers is independent of the model reference choice (unlike previous closed-loop approaches found in the literature). These results are used to solve the TEG stabilization problem.

**Keywords:** Discrete Event Dynamic Systems, Timed Event Graphs, Dioids, Identification, Control, Just-in-Time, Max-Plus Algebra.





# Résumé étendu

## Identification et Commande de Systèmes à Événements Discrets dans l'Algèbre $(\max, +)$

La théorie des systèmes est traditionnellement basée sur l'étude des systèmes à temps continu qui obéissent essentiellement aux lois élémentaires de la physique comme les lois de conservation et de mouvement. Les outils mathématiques basés sur les équations différentielles (ou aux différences) ont été utilisés avec succès pour la modélisation de ces systèmes appelés Systèmes Dynamiques à Variable Continue (SDVC). Néanmoins, dans le monde contemporain, de nombreux systèmes, comme les ordinateurs, les réseaux de communication, les systèmes de production, le contrôle de trafic aérien, etc., se caractérisent par des espaces d'états discrets, c'est-à-dire, des systèmes dont l'état ne se modifie qu'en réponse à l'occurrence d'événements particuliers (Cassandras & Ramadge, 1990). Ces événements peuvent être, par exemple, du type "tâche accomplie", "panne d'une machine", "processus en cours", etc... Ces systèmes dynamiques liés à l'occurrence d'événements sont généralement complexes et sont de conception essentiellement humaine. Ils sont appelés Systèmes Dynamiques à Événements Discrets (SED) pour les distinguer des SDVC. De nombreux cadres théoriques existent pour modéliser les SED, comme par exemple, les Processus de Markov, les Réseaux de Petri, les Automates à état fini, l'Algèbre des Dioïdes, et les Processus Semi-Markovien Généralisés. Une introduction à ces techniques est présentée par Cassandras & Lafortune (1999).

L'un des modèles retenus pour décrire formellement les SED sont les Réseaux de Petri (Murata, 1989). Les Réseaux de Petri temporisés sont notamment utiles dans le cadre de l'évaluation de performances des SED. Les graphes d'événement temporisés (GET) sont une sous-classe des Réseaux de Petri dont chaque place n'admet qu'une transition en amont et une transition en aval (Bacelli et al., 1992; Cohen et al., 1989). Une transition unique en aval signifie que tous les conflits concernant l'utilisation des ressources ont été résolus par une politique appropriée. Une transition unique en amont signifie qu'il n'y a pas concurrence à la consommation ou à la fourniture de ressources dans

le réseau de Petri. Les GET correspondent aux systèmes qui peuvent être décrits linéairement dans des structures algébriques de type  $(\max, +)$  ou encore appelées dioïde. Un dioïde est un demi-anneau idempotent (*i.e.*,  $a \oplus a = a$ ) qui permet la description à l'aide de modèle linéaire présentant de fortes analogies avec ceux obtenus dans l'algèbre usuel pour décrire les SDVC. Cette propriété a engendré le développement de structures de commande et d'identification équivalentes à celles antérieurement obtenues pour les SDVC .

Dans ce contexte, la contribution de cette thèse porte sur deux problèmes. Le premier concerne une méthodologie pour l'identification paramétrique de GET représentés dans les dioïdes (Maia et al., 2003c). Le second concerne une nouvelle structure pour la commande en boucle fermée dans un objectif de poursuite de modèle (Maia et al., 2003a,b; Lhommeau et al., 2003).

### ***Identification de GET***

L'identification concerne le développement d'une méthode permettant l'estimation des paramètres de GET mono-entrée et mono-sortie (GET SISO). Il s'agit d'estimer les paramètres temporels des GET à partir des instants de tir des transitions de l'entrée (signal d'entrée) et de l'observation de ceux de la sortie (signal de sortie). En supposant la structure du modèle connue, il est montré qu'il est possible de modéliser les GET SISO à l'aide du système d'équations suivant:

$$\begin{aligned} z(k) &= s \otimes z(k-r) \oplus u(k) \\ y(k) &= p_0 u(k) \oplus \dots \oplus p_{\nu-1} u(k-\nu+1) \oplus \\ &\quad q_0 z(k-\nu) \oplus \dots \oplus q_{r-1} z(k-\nu-r+1) \end{aligned}$$

où  $u(k)$  et  $y(k)$  sont respectivement l'entrée et la sortie du système,  $z(k)$  est une variable interne qui caractérise sa périodicité. L'objectif de la méthodologie d'identification proposée est l'estimation des paramètres temporels  $p_0$  à  $p_{\nu-1}$ ,  $q_0$  à  $q_{r-1}$  et  $s$  en supposant connus les paramètres structurels  $r$  et  $\nu$ . À partir de ces conditions, la méthode d'identification est développée en s'appuyant sur le calcul d'une borne supérieure pour le paramètre  $s$ . Les propriétés du signal d'entrée (la séquence de tirs de l'entrée) joue un rôle important pour assurer l'identification des paramètres et la convergence de l'algorithme d'estimation proposé. Nous terminons le chapitre en donnant une condition suffisante garantissant la convergence de cet algorithme d'estimation.

### ***Commande***

L'approche classique pour la commande des GET (Baccelli et al., 1992) a pour but la maximisation de l'entrée du système (dans le sens où les dates des tirs des transitions d'entrée doivent avoir lieu le plus tard possible) de façon à garantir que la sortie ne soit pas plus grande qu'une consigne donnée (dans le sens où les dates des tirs des transitions de sortie ne doivent pas avoir lieu plus tard que ce qui est spécifié par le signal de consigne). Cette approche est une formalisation

de la politique de gestion de production connue sous le vocable de juste à temps. La théorie de la résiduation (Blyth & Janowitz, 1972), qui a pour but de trouver une solution extrémale à un système d'inéquations défini sur des ensembles ordonnés, joue un rôle central lors du calcul de cette commande.

Dans cette thèse, la commande de GET dans le contexte de poursuite d'un modèle est abordée. L'objectif est de synthétiser des correcteurs permettant au système corrigé de s'approcher au mieux du comportement dynamique spécifié par un modèle de référence. Ces travaux font suite aux travaux de Cottenceau et al. (2001) et Lüders & Santos-Mendes (2002). La structure de commande proposée utilise un précompensateur et un correcteur de type retour de sortie. On montre qu'il y a toujours une solution optimale à ce problème, c'est-à-dire que les restrictions relatives au choix du modèle de référence sont levées. Cette nouvelle structure de commande est utilisée pour résoudre le problème de stabilisation d'un système.

### **Division de la thèse**

Le manuscrit de thèse est organisé de la manière suivante :

1. Le chapitre 2 introduit les outils algébriques nécessaires pour le développement des méthodologies proposées. Les principaux outils présentés sont la théorie des dioïdes et la théorie de la résiduation. Ce chapitre introduit également quelques contributions théoriques sur la résiduation de l'opérateur  $\wedge$ .
2. Le chapitre 3 est une introduction à la modélisation de GET dans l'algèbre des dioïdes. On présente les concepts telles que la représentation d'état et les matrices de transfert.
3. Dans le chapitre 4, la méthodologie d'identification est proposée. La méthode est développée pour les GET mono-entrée mono-sortie et la structure du modèle est supposée connue. Elle repose essentiellement sur la résiduation des opérateurs  $\otimes$  et  $\oplus$ . Le chapitre se termine par l'étude de la convergence de l'algorithme d'identification.
4. Le chapitre 5 présente le problème de commande des GET dans un objectif de poursuite de modèle. Il débute par un survol des résultats de la littérature concernant la stabilité et la commande de GET. Ensuite, la structure de commande proposée et les principaux résultats théoriques obtenus sont présentés. Il est notamment montré qu'il est toujours possible de trouver des lois de commande en boucle fermée équivalentes aux lois de commande obtenues en boucle ouverte (par l'intermédiaire d'un précompensateur). C'est-à-dire, dans un contexte de système manufacturier, qu'il est possible de calculer une commande maximale (une plus

grande entrée) qui respecte les performances spécifiées par le modèle de référence. En outre, il est montré que la structure proposée favorise la stabilité du système en boucle fermée dès que le modèle de référence est choisi de façon approprié. On propose une condition suffisante permettant le choix du modèle de référence qui assure la stabilité.

5. Finalement, on présente dans le chapitre 6 les conclusions du travail et quelques perspectives de recherche pour les travaux à venir.

## Notação

$\overline{\mathbb{Z}}_{max}$  : dióide  $(\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, +)$ , também chamado álgebra  $(\max, +)$ .

$\overline{\mathbb{Z}}_{min}$  : dióide  $(\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}, \min, +)$ , também chamado álgebra  $(\min, +)$ .

$\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$  : dióide das séries formais em  $\gamma$  com expoentes em  $\mathbb{Z}$  e coeficientes em  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ .

$\overline{\mathbb{Z}}_{min}[[\delta]]$  : dióide das séries formais em  $\delta$  com expoentes em  $\mathbb{Z}$  e coeficientes em  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ .

$\mathcal{D}[[\gamma]]$ : dióide  $\gamma^* \overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$ .

$\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  : dióide das séries formais em  $\gamma$  e  $\delta$  com expoentes em  $\mathbb{Z}$  e coeficientes booleanos.

$\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  : quociente do dióide  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  pela congruência  $\mathcal{R}_{(\gamma \oplus \delta^{-1})}$ :

$$s_1(\gamma, \delta) \mathcal{R}_{(\gamma \oplus \delta^{-1})} s_2(\gamma, \delta) \iff (\gamma \oplus \delta^{-1})^* s_1(\gamma, \delta) = (\gamma \oplus \delta^{-1})^* s_2(\gamma, \delta).$$

$\mathcal{M}_{in}^{ax+}[[\gamma, \delta]]$  : dióide dos elementos causais de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ .

$\mathcal{M}_{in}^{axrat}[[\gamma, \delta]]$  : dióide dos elementos racionais de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ .

$\text{Im}f$ : imagem do mapeamento  $f : E \rightarrow F$ ,  $\text{Im}f = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}$ .

$B|f$  : restrição de um mapeamento  $f$  ao contradomínio  $B$  (com  $\text{Im}f \subseteq B$ ).

$f^\sharp$ : mapeamento resíduo do mapeamento  $f$ :  $f^\sharp(y) = \sup(\{x \mid f(x) \preceq y\})$ .

$f^\flat$ : mapeamento resíduo dual do mapeamento  $f$ :  $f^\flat(y) = \inf(\{x \mid f(x) \succeq y\})$ .

$L_a$  : produto à esquerda por  $a$ ,  $L_a(x) = a \otimes x$ .

$R_a$  : produto à direita por  $a$ ,  $R_a(x) = x \otimes a$ .

$M_a$  : ínfimo em relação a  $a$ ,  $M_a(x) = a \wedge x$ .

$T_a$  : adição à  $a$ ,  $T_a(x) = a \oplus x$ .

$\frac{b}{a} = a \backslash b$  : notação utilizada para representar  $L_a^\sharp(b)$ .

$\frac{b}{a} = b \not\! / a$  : notação utilizada para representar  $R_a^\sharp(b)$ .

$b \boxminus a$ : notação utilizada para representar  $M_a^\sharp(b)$ .

$b \ominus a$ : notação utilizada para representar  $L_a^b(b)$ .

$\text{Pr}_+$  : mapeamento resíduo da injeção canônica  $\text{Id}_{|\mathcal{M}_{in}^{ax+}[\gamma, \delta]} : \mathcal{M}_{in}^{ax+}[\gamma, \delta] \rightarrow \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ .

$\sigma_\infty(h)$ : inclinação assintótica de uma série periódica  $h$ .

$\mathcal{C}_h$ : Contador associado à série  $h$ ,  $\mathcal{C}_h(t) = \text{inf}\{k \in \mathbb{Z} | \gamma^k \delta^t \preceq h\}$ .

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>Ferramentas Algébricas</b>	<b>23</b>
2.1	Introdução à Teoria de dióides . . . . .	23
2.1.1	Definições e exemplos . . . . .	23
2.1.2	Propriedades dos dióides: reticulado e relação de ordem . . . . .	26
2.1.3	Equação implícita $x = ax \oplus b$ . . . . .	29
2.1.4	Elementos da Teoria da Residuação: aplicação aos dióides . . . . .	32
2.2	Conclusão . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Grafos a Eventos Temporizados</b>	<b>43</b>
3.1	Introdução às Redes de Petri . . . . .	43
3.1.1	Notação e definições . . . . .	44
3.1.2	Marcação e Espaço de Estados . . . . .	45
3.1.3	Dinâmica das Redes de Petri . . . . .	46
3.2	Grafos a Eventos Temporizados . . . . .	47
3.2.1	Modelagem de GET através de Dióides . . . . .	48
3.2.2	Descrição bidimensional: dióide $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ . . . . .	51
3.2.3	Matriz de Transferência . . . . .	56
3.2.4	Racionalidade, Realizabilidade e Periodicidade . . . . .	59
3.2.5	Propriedades Assintóticas . . . . .	62

---

3.3	Conclusão . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Identificação de Grafos a Eventos Temporizados</b>	<b>65</b>
4.1	Introdução . . . . .	65
4.2	Resultados preliminares . . . . .	66
4.3	Método de Identificação . . . . .	68
4.4	Exemplos Ilustrativos . . . . .	77
4.5	Conclusão . . . . .	84
<b>5</b>	<b>Controle de Grafos a Eventos Temporizados</b>	<b>85</b>
5.1	Introdução . . . . .	85
5.2	Estabilidade de GET . . . . .	86
5.3	Controle por modelo de referência . . . . .	93
5.3.1	Controle por modelo de referência: estrutura proposta . . . . .	98
5.3.2	Estabilização de GET . . . . .	102
5.4	Conclusão . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>107</b>
	<b>Índice</b>	<b>113</b>



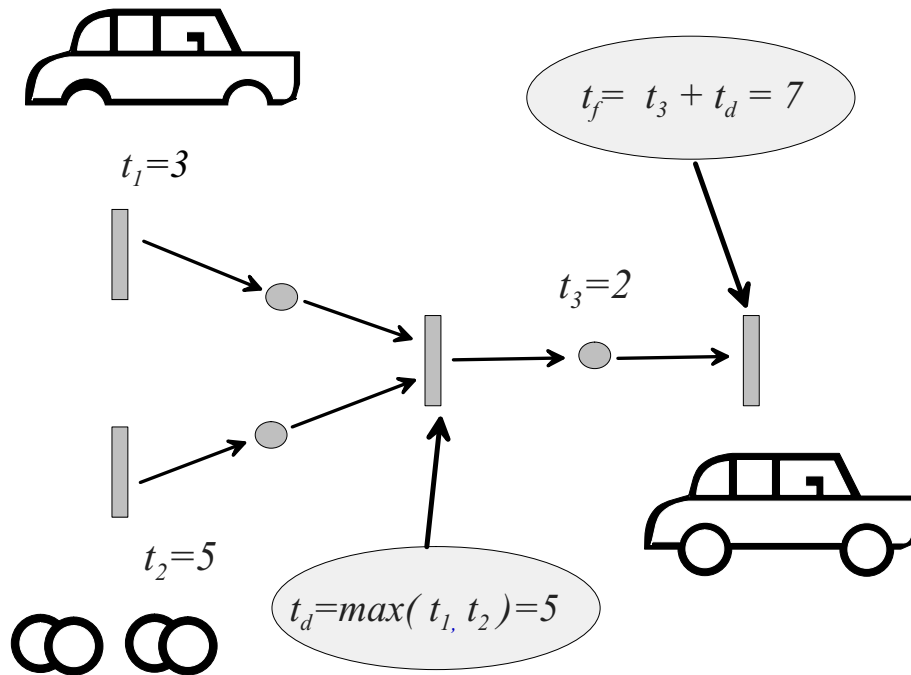
# Capítulo 1

## Introdução

A teoria de controle clássica trata essencialmente do estudo de sistemas contínuos no tempo cuja modelagem é freqüentemente baseada em princípios físicos elementares, tais como leis de movimento e de conservação de energia. As ferramentas matemáticas baseadas em equações diferenciais (e a diferenças) têm sido aplicadas com sucesso na modelagem e controle desses sistemas que são denominados Sistemas Dinâmicos a Variável Contínua (SDVC). Contudo, o mundo tecnológico atual, na forma de computadores, processos de manufatura, redes de comunicação, controle de tráfego aéreo, entre outras formas, tem se caracterizado por sistemas descritos por espaços de estados discretos e cuja dinâmica é dirigida por eventos: sistemas nos quais o estado muda somente em instantes discretos no tempo em resposta à ocorrência de eventos (Cassandras & Ramadge, 1990). Esses eventos podem ser, por exemplo, num contexto de sistemas de manufatura, "entrada de matéria-prima", "processamento de matéria prima", "saída de produto final", etc. Em geral, pode-se dizer que os sistemas dinâmicos dirigidos por eventos são complexos e são governados por regras operacionais de concepção essencialmente humana. Por essas características, eles são denominados Sistemas dinâmicos a Eventos Discretos (SED) como forma de distingui-los dos SDVC.

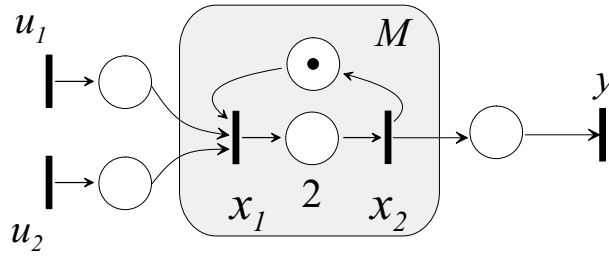
Existem muitas técnicas para modelagem de SED. Entre as quais podem-se citar: Processos de Markov, Redes de Petri, Redes de Filas, Autômatos e Máquinas de Estado finito, Processos Finitamente Recursivos, Álgebra de Dióides e Processos Semi-Markovianos Generalizados (Cassandras & Lafortune, 1999). Uma maneira formal de descrever Sistemas a Eventos Discretos é através de Redes de Petri (Murata, 1989). As Redes de Petri temporizadas são particularmente úteis quando há interesse em avaliar o desempenho do SED. Grafos a Eventos Temporizados (GET) são uma subclasse de Redes de Petri na qual todos os lugares têm uma única transição de entrada e uma única transição de saída (Bacelli et al., 1992). Uma transição de saída única significa que todos

os conflitos potenciais no uso dos recursos foram previamente resolvidos por alguma política. Uma transição de entrada única significa que não há concorrência ao consumo ou ao fornecimento de recursos no GET. A figura 1.1 mostra o início de um processo de montagem de duas peças que pode ser modelado como um GET. Observa-se que se uma peça está disponível no instante  $t_1$  e a outra está disponível no instante  $t_2$  então a montagem se inicia em  $t_d = \max(t_1, t_2)$ . Se o tempo de processamento é  $t_3$  então o instante em que a peça será produzida é  $t_f = t_d + t_3 = \max(t_1, t_2) + t_3$ . Considerando que o processo pode efetuar diversas montagens ao longo do tempo, mas uma por



**Figura 1.1 :** Sistema de montagem simples

vez, representa-se o sistema de maneira geral como o GET mostrado na figura 1.2. Como é usual na literatura, a mesma notação será utilizada para designar uma transição de um GET e a variável a ela associada. Esta variável poderá ser um instante de tempo (como é o caso do presente exemplo), um contador do número de ocorrências de um evento ou uma série formal cuja interpretação será considerada nos capítulos seguintes. Na figura 1.2,  $u_1$  e  $u_2$  são as transições de entrada às quais serão associados os instantes de admissão de matéria-prima no sistema;  $x_i$  são as transições internas (doravante também chamados de estados) e  $y$  é a transição de saída, que representa a conclusão do processo de montagem. Dessa forma, o comportamento dinâmico do sistema é descrito pelas



**Figura 1.2 :** Descrição de um processo de montagem simples através de GET

equações a seguir.

$$\begin{aligned}x_1(k) &= \max(x_2(k-1), u_1(k), u_2(k)) \\x_2(k) &= 2 + x_1(k) \\y(k) &= x_2(k).\end{aligned}$$

sendo que a variável inteira  $k$  numera os disparos das transições. No exemplo,  $x_1(k)$  indica o instante em que a  $k$ -ésima peça tem sua montagem iniciada.

O comportamento dinâmico do sistema desse exemplo pode ser completamente descrito utilizando os operadores "max" e "+". O operador "max" está relacionado com a sincronização do consumo de recursos e o operador "+", com o tempo de processamento das diversas tarefas do processo. De uma maneira geral, o comportamento dinâmico de um GET pode ser descrito utilizando a álgebra (Max,+) na qual o operador "max" é definido como  $\oplus$  e o operador "+" é definido como  $\otimes$ . Dessa forma, o sistema acima é reescrito como:

$$\begin{aligned}x_1(k) &= x_2(k-1) \oplus u_1(k) \oplus u_2(k) \\x_2(k) &= 2 \otimes x_1(k) \\y(k) &= x_2(k).\end{aligned}$$

A álgebra (Max,+) pertence a uma estrutura algébrica mais geral denominada dióide. Essa estrutura é na realidade um semi-anel idempotente (não possui elemento inverso aditivo e  $a \oplus a = a$ , pois  $\max(a, a) = a$ ) (Cohen et al., 1989). O exemplo acima ilustra o fato de que os dióides permitem que a descrição matemática de um GET, não-linear na álgebra convencional, seja linear e similar àquela feita para os SDVC (Baccelli et al., 1992; Cohen et al., 1989).

Nesta tese são estudados dois problemas em GET modelados através da álgebra de dióides. O primeiro problema aborda a identificação paramétrica e o segundo, o controle.

A identificação trata do problema da estimação de parâmetros de GET mono-entrada mono-saída (GET SISO). Nesse problema o objetivo é estimar os parâmetros temporais do GET a partir da observação dos instantes de disparo das transições de entrada e de saída, supondo que alguns parâmetros estruturais são conhecidos. Mostra-se nesta tese que as equações para um GET SISO podem ser escritas de maneira geral como indicado a seguir.

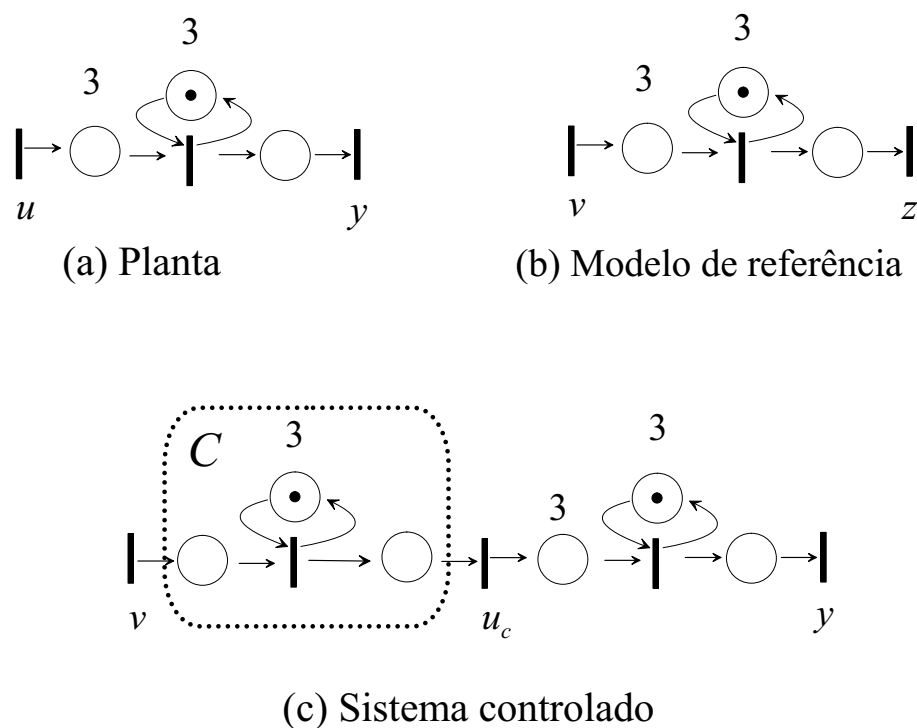
$$\begin{aligned} z(k) &= s \otimes z(k-r) \oplus u(k) \\ y(k) &= p_0 \otimes u(k) \oplus \dots \oplus p_{\nu-1} \otimes u(k-\nu+1) \oplus \\ &\quad q_0 \otimes z(k-\nu) \oplus \dots \oplus q_{r-1} \otimes z(k-\nu-r+1) \end{aligned}$$

sendo que  $u(k)$  e  $y(k)$  são respectivamente a entrada, a saída e  $z(k)$  uma variável interna associada ao circuito crítico do sistema. Assim, o objetivo da metodologia de identificação proposta é a estimação dos parâmetros temporais  $p_0$  a  $p_{\nu-1}$ ,  $q_0$  a  $q_{r-1}$  e  $s$  (associados aos tempos de espera nos lugares) supondo que os parâmetros estruturais  $\nu$  e  $r$  (associados ao transitório e à capacidade de produção do sistema) são conhecidos. A partir dessas condições, o método de identificação proposto é desenvolvido tendo como base o cálculo de um limitante superior para o parâmetro  $s$ . Neste trabalho é feita uma discussão sobre as condições de excitação (condições sobre a variável de entrada) para que o algoritmo de identificação proposto convirja. Nesse sentido, é apresentada uma condição suficiente para a convergência do método.

O problema de controle de GET é classicamente proposto no contexto da política de gestão de recursos *Just-in-Time*. O objetivo do controle é retardar ao máximo a entrada de matéria-prima na planta com a restrição de que os instantes de saída dos produtos finais atendam a uma dada especificação de demanda. Dessa maneira, o controle possibilita a minimização dos estoques de matéria-prima e portanto reduz os custos de produção. Em outras palavras, esta abordagem tem como objetivo a maximização da entrada do sistema (no sentido em que os disparos das transições de entrada devem ocorrer o mais tarde possível) de modo que os tempos da saída não sejam maiores que uma dada referência (*i.e.* para que as datas dos disparos das transições de saída não ocorram depois daquelas especificadas pela referência). A Teoria de Residuação (Blyth & Janowitz, 1972), que trata do problema de se encontrar solução extrema para uma inequação, é uma ferramenta importante, como será visto posteriormente, pois o que se procura é uma maior solução para um sistema de inequações num determinado dióide.

O problema de controle de GET no contexto *Just-in-Time* pode ser abordado através da técnica denominada Modelo de referência. Essa técnica consiste na utilização de um modelo cujo comportamento deverá ser aproximado pelo sistema controlado. Em síntese, a variável de controle deve ser

calculada de modo a ser máxima mas respeitando as restrições definidas pelo modelo de referência. Considere-se como exemplo o problema de controle da planta representada na figura 1.3(a) em que se deseja que a produção do sistema seja a máxima possível. Essa situação é certamente atingida se toda a matéria-prima necessária à produção estiver estocada na planta no instante inicial da produção. Isso corresponde a um número infinito de disparos na transição  $u$  do GET da figura 1.3(a). Considere-se agora uma nova variável  $v$  associada à disponibilidade externa das matérias-primas. O comportamento desejado para o sistema é tal que se a disponibilidade for total, ou seja, se as matérias-primas estão sempre disponíveis para o sistema, então a produção deve se comportar como se o estoque fosse infinito. Porém a admissão das matérias-primas na planta, representada pela transição  $u$ , deve ser a mais tardia possível. Para esta situação, o modelo de referência é aquele proposto na figura 1.3(b), o que significa que se deseja preservar o modelo da planta (maior taxa de produção possível). Uma solução possível é apresentada na figura 1.3(c). Observa-se que o controlador  $C$  age como uma espécie de "comprador" de matérias-primas, pois determina a admissão destas na planta em função de suas disponibilidades externas. Se a variável  $u$  for máxima, ter-se-á necessariamente estoque mínimo. Supondo que  $u = v$ , pode-se observar que os instantes de



**Figura 1.3 :** Ilustração do controle por modelo de referência.

disparo da entrada de controle  $u_c$  para o sistema controlado são maiores do que a entrada  $u$  para o sistema não controlado. De fato, considerando que no modelo de referência a entrada seja dada por  $v = [0\ 0\ 0\ \dots]$  (disponibilidade infinita em  $t = 0$ ), esse comportamento de referência é atingido para a planta se a entrada é feita igual a  $u = [0\ 0\ 0\ \dots]$  (estoque infinito em  $t = 0$ ). No sistema controlado, a entrada  $v = [0\ 0\ 0\ \dots]$  resulta em uma ação de controle igual a  $u_c = [0\ 3\ 6\ \dots]$ . Assim pode-se perceber que o sistema controlado permite a redução de estoque já que não há necessidade de disponibilização imediata de toda matéria-prima em  $t = 0$ . Nesse exemplo, utiliza-se um controlador em malha aberta, mas outras abordagens são possíveis. Neste trabalho, a estrutura de controle proposta é em malha fechada. Como será mostrado no capítulo 5, o projeto em malha fechada favorece a estabilidade do sistema.

Esta tese está dividida da seguinte maneira.

1. No capítulo 2 é feita uma introdução às ferramentas algébricas necessárias para o desenvolvimento das metodologias propostas. As duas ferramentas principais envolvidas são a teoria de dióides e a teoria de residuação. No capítulo, são apresentadas algumas contribuições teóricas obtidas para a residuação do operador ínfimo.
2. O capítulo 3 é uma introdução aos GET. No capítulo é feita uma revisão de Redes de Petri e da modelagem de GET utilizando a álgebra de dióides. São apresentados conceitos como representação via espaço de estado e matriz de transferência para GET.
3. No capítulo 4, apresenta-se a metodologia de identificação proposta. O método é desenvolvido para GET SISO, a partir da obtenção de um modelo apropriado, utilizando a teoria de residuação. Feito isso, são apresentadas condições suficientes para a convergência do algoritmo de identificação proposto.
4. O capítulo 5 trata do problema de controle em GET via modelo de referência. É feita uma revisão dos conceitos e resultados presentes na literatura sobre a estabilidade e controle de GET. A seguir, apresenta-se a estrutura de controle proposta e os principais resultados teóricos obtidos. No fim do capítulo, é apresentada uma aplicação das idéias propostas a um problema de estabilização. São fornecidas condições suficientes para a escolha do modelo de referência de modo que a estrutura de controle proposta garanta a estabilidade do sistema em malha fechada.
5. No capítulo 6 é apresentada a conclusão do trabalho bem como as perspectivas para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Ferramentas Algébricas

### 2.1 Introdução à Teoria de dióides

Dióide é uma estrutura algébrica que apresenta todas as propriedades de um anel exceto a de elemento inverso aditivo. Além disso, a adição é idempotente, ou seja,  $a \oplus a = a$  para todos elementos  $a$  pertencentes ao dióide. Por essas razões, os dióides são caracterizados algebricamente como semi-anéis idempotentes (Baccelli et al., 1992).

#### 2.1.1 Definições e exemplos

**Definição 2.1 (dióide)** *é uma estrutura algébrica representada por um conjunto  $\mathcal{D}$  munido de duas operações  $(\oplus, \otimes)$  (soma e multiplicação) que obedece aos axiomas abaixo.*

**Axioma 2.2 (Associatividade da adição).**

$$\forall a, b, c \in \mathcal{D}, (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c).$$

**Axioma 2.3 (Comutatividade da adição).**

$$\forall a, b \in \mathcal{D}, a \oplus b = b \oplus a.$$

**Axioma 2.4 (Associatividade da multiplicação).**

$$\forall a, b, c \in \mathcal{D}, (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c).$$

**Axioma 2.5 (Distributividade da multiplicação em relação à adição).**

$$\begin{aligned}\forall a, b, c \in \mathcal{D}, \quad a \otimes (b \oplus c) &= (a \otimes b) \oplus (a \otimes c) \\ (b \oplus c) \otimes a &= (b \otimes a) \oplus (c \otimes a).\end{aligned}$$

**Axioma 2.6 (Existência do elemento neutro da adição).**

$$\forall a \in \mathcal{D}, a \oplus \varepsilon = a.$$

**Axioma 2.7 (Absorção pelo elemento neutro da adição).**

$$\forall a \in \mathcal{D}, \varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon.$$

**Axioma 2.8 (Existência do elemento identidade da multiplicação).**

$$\forall a \in \mathcal{D}, a \otimes e = e \otimes a = a.$$

**Axioma 2.9 (Idempotência da adição).**

$$\forall a \in \mathcal{D}, a \oplus a = a.$$

**Definição 2.10 (Dióide comutativo)**  $(\mathcal{D}, \otimes, \oplus)$  é um dióide comutativo se a multiplicação é comutativa. .

**Exemplo 2.11 Álgebra  $(\max, +)$**   $\overline{\mathbb{R}}_{max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$  e  $\overline{\mathbb{Z}}_{max} = (\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \max, +)$  são dióides comutativos nos quais  $\varepsilon = -\infty$  e  $e = 0$ .  $\diamond$

**Exemplo 2.12 Álgebra  $(\min, +)$**   $\overline{\mathbb{R}}_{min} = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$  e  $\overline{\mathbb{Z}}_{min} = (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, \min, +)$  são dióides comutativos para os quais  $\varepsilon = +\infty$  e  $e = 0$ .  $\diamond$

Esses dióides são comutativos. Um exemplo de dióide não-comutativo é dado a seguir.

**Exemplo 2.13 (Dióide matricial)** O conjunto das matrizes de  $(\overline{\mathbb{Z}}_{max})^{n \times n}$  é um dióide no qual a soma e o produto de duas matrizes  $A, B \in (\overline{\mathbb{Z}}_{max})^{n \times n}$  são definidos por:

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} \text{ e } (A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj}.$$



Por exemplo:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$   $\diamond$

**Definição 2.14 (Sub-dióide)** Um sub-conjunto  $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$  é um sub-dióide de  $\mathcal{D}$  se  $\varepsilon, e \in \mathcal{C}$  e se  $\mathcal{C}$  é fechado <sup>1</sup> em relação às operações  $\oplus$  e  $\otimes$ .

**Exemplo 2.15**  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$  é um sub-dióide de  $\overline{\mathbb{R}}_{max}$ .  $\diamond$

**Definição 2.16 (Dióide completo)** Um dióide é dito "completo" se ele é fechado em relação a somas infinitas e se a operação  $\otimes$  se distribui sobre somas infinitas, ou seja, para todo  $c \in \mathcal{D}$  e todo sub-conjunto  $A \subseteq \mathcal{D}$ ,

$$c \otimes \left( \bigoplus_{x \in A} x \right) = \bigoplus_{x \in A} c \otimes x.$$

**Exemplo 2.17** O dióide  $\mathbb{Z}_{max}$  completado pelo elemento  $+\infty$  é um dióide completo, denotado por  $\overline{\mathbb{Z}}_{max} = (\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, +)$ .  $\diamond$

**Definição 2.18 (Homomorfismo)** Um mapeamento  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  definido sobre dióides é um homomorfismo se

$$\forall a, b \in \mathcal{D} \quad f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b) \text{ e } f(\varepsilon) = \varepsilon \quad (2.1)$$

$$f(a \otimes b) = f(a) \otimes f(b) \text{ e } f(e) = e \quad (2.2)$$

Um mapeamento que verifica somente (2.1) é chamado  $\oplus$ -morfismo e um mapeamento que verifica somente (2.2) é chamado  $\otimes$ -morfismo.

**Definição 2.19 (Isomorfismo)** Um mapeamento  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  definido sobre dióides é um isomorfismo se  $f^{-1}$  é definido sobre  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  e  $f$  e  $f^{-1}$  são homomorfismos.

**Definição 2.20 (Relação)** Uma relação  $\mathcal{R}$  sobre um conjunto  $\mathcal{D}$  é um subconjunto de  $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ . Se  $(x, y) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$  satisfaz a relação, nota-se  $x\mathcal{R}y$ . Uma relação é reflexiva se  $\forall x \in \mathcal{D}, x\mathcal{R}x$ ; é simétrica se  $\forall x, y \in \mathcal{D}, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$ ; é anti-simétrica se  $x\mathcal{R}y$  e  $y\mathcal{R}x \implies x = y$ ; é transitiva se  $x\mathcal{R}y$  e  $y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$ .

**Definição 2.21 (Relação de Equivalência)** Uma relação é chamada de relação equivalência se ela é reflexiva, transitiva e simétrica.

<sup>1</sup> $\mathcal{C}$  é fechado em relação às operações  $\oplus$  e  $\otimes$  se  $\forall a, b \in \mathcal{C}, a \oplus b \in \mathcal{C}$  e  $a \otimes b \in \mathcal{C}$ .

**Definição 2.22 (Congruência)** *Uma congruência definida em um dióide  $\mathcal{D}$  é uma relação de equivalência (representada por  $\equiv$ ) compatível com as operações do dióide, isto é,*

$$\forall a, b, c \in \mathcal{D}, a \equiv b \Rightarrow \begin{cases} (a \oplus c) \equiv (b \oplus c) \\ (a \otimes c) \equiv (b \otimes c) \end{cases} .$$

**Teorema 2.23 (Dióide Quociente)** *Seja um dióide  $\mathcal{D}$  e  $\equiv$  uma congruência em  $\mathcal{D}$ . Utilizando a notação  $[a] = \{x \in \mathcal{D} | x \equiv a\}$  para a classe de equivalência de  $a \in \mathcal{D}$ , o subconjunto quociente de  $\mathcal{D}$  dado por essa congruência é um dióide representado por  $\mathcal{D}_{/\equiv}$  para o qual a soma e o produto são definidos por*

$$\begin{aligned} [a] \oplus [b] &\stackrel{def}{=} [a \oplus b] \\ [a] \otimes [b] &\stackrel{def}{=} [a \otimes b] \end{aligned} \tag{2.3}$$

**Demonstração:**

A demonstração consiste na verificação dos axiomas para o dióide  $\mathcal{D}_{/\equiv}$  observando que  $e = [e]$  and  $\varepsilon = [\varepsilon]$ . A verificação dos axiomas 2.2 a 2.4 e 2.6 a 2.9 é direta. Para o axioma 2.5, tem-se que

$$\begin{aligned} [a \otimes (b \oplus c)] &= [a]([ (b \oplus c) ]) = [a]([b] \oplus [c]) \\ &= [a \otimes b \oplus a \otimes c] = [a \otimes b] \oplus [a \otimes c] = [a] \otimes [b] \oplus [a] \otimes [c]. \end{aligned}$$

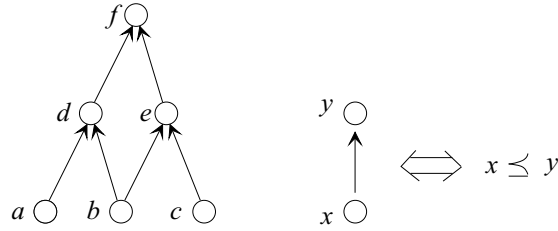
A demonstração da distributividade à direita é feita de maneira análoga. ■

### 2.1.2 Propriedades dos dióides: reticulado e relação de ordem

**Definição 2.24 (Relação de ordem parcial)** *Dado um conjunto  $\mathcal{D}$ , uma relação é chamada de relação de ordem parcial (representada por  $\preceq$ ) em  $\mathcal{D}$ , se ela for reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Se  $a \preceq b$  então usualmente diz-se que "a é menor que ou igual a b". Além disso, convencionou-se que  $c \succeq d$  "c é maior que ou igual a d" se  $d \preceq c$ .*

Conjuntos parcialmente ordenados finitos são representados por diagramas de Hasse. O diagrama de Hasse é um grafo acíclico direcionado com a propriedade de que existe um caminho direto de um vértice  $x$  a um vértice  $y$  se e somente se  $x \preceq y$ . Por exemplo o conjunto parcialmente ordenado  $\mathcal{D} = \{a, b, c, d, e, f\}$ , tal que  $a \preceq d \preceq f$ ,  $b \preceq d \preceq f$ ,  $b \preceq e \preceq f$  e  $c \preceq e \preceq f$ , é representado no diagrama da figura 2.1 .

A seguir será feita uma introdução à teoria de reticulados. Para maiores detalhes sobre conjuntos ordenados e reticulados (Birkhoff, 1940).



**Figura 2.1 :** Diagrama de Hasse

**Definição 2.25 (Ínfimo (Supremo) de um sub-conjunto)** Dado um conjunto  $\mathcal{S}$  e um subconjunto  $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ , define-se o ínfimo (supremo) de  $\mathcal{R}$  como sendo o maior (menor) elemento de  $\mathcal{S}$  que é menor (maior) que todos elementos de  $\mathcal{R}$ .

Convém observar que o ínfimo e o supremo de um subconjunto não pertencem necessariamente ao subconjunto.

**Definição 2.26 (Semi-reticulado inferior (superior))** É um conjunto ordenado tal que existe um ínfimo (supremo) para cada par de elementos.

**Definição 2.27 (Reticulado)** É um conjunto ordenado que é ao mesmo tempo um semi-reticulado inferior e superior.

**Definição 2.28 (semi-reticulado inferior (superior) completo)** É um conjunto ordenado tal que existe um ínfimo (supremo) para qualquer sub-conjunto (finito ou infinito).

**Definição 2.29 (Reticulado completo)** É um conjunto ordenado que é ao mesmo tempo um semi-reticulado inferior e superior completo.

**Definição 2.30 (Reticulado distributivo)** Seja  $a \vee b$  (respectivamente  $a \wedge b$ ) o supremo (ínfimo) de  $a$  e  $b$  num reticulado. Um reticulado  $\mathcal{D}$  é dito distributivo se as operações  $\vee$  e  $\wedge$  se distribuem uma em relação a outra, ou seja,  $\forall a, b, c \in \mathcal{D}$ :

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad (2.4)$$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c). \quad (2.5)$$

**Definição 2.31 (Mapeamento isotônico)** Um mapeamento  $f$  de um conjunto ordenado  $\mathcal{D}$  em um conjunto ordenado  $\mathcal{C}$  tal que

$$\forall a, b \in \mathcal{D}, \quad a \succeq b \implies f(a) \succeq f(b)$$

é dito ser isotônico.

Num dióide uma relação de ordem é definida como  $a \preceq b \Leftrightarrow b = a \oplus b$ . Se um dióide  $\mathcal{D}$  tem uma estrutura de semi-reticulado superior e é completo, ele possui um supremo que será representado por  $T$ . O elemento  $T$  corresponde à soma de todos elementos de  $\mathcal{D}$ :  $T = \bigoplus_{x \in \mathcal{D}} x$ . Além disso, um dióide possui sempre  $\varepsilon$  como ínfimo. Dessa forma, um dióide completo apresenta uma estrutura de reticulado completo com relação de ordem  $\preceq$ .

**Propriedade 2.32.** *Seja  $f$  um mapeamento isotônico de um dióide  $\mathcal{D}$  em um dióide  $\mathcal{C}$ , então*

$$\forall a, b \in \mathcal{D}, f(a \oplus b) \succeq f(a) \oplus f(b) \quad (2.6)$$

**Demonstração:**

$\forall a, b \in \mathcal{D}$ ,  $a \oplus b \succeq a$ , como  $f$  é isotônico,  $f(a \oplus b) \succeq f(a)$ , do mesmo modo,  $f(a \oplus b) \succeq f(b)$ . Assim,  $f(a \oplus b) \succeq f(a) \oplus f(b)$ . ■

**Definição 2.33 (Dióide distributivo)** *Um dióide  $\mathcal{D}$  é distributivo se ele é completo e se para todo sub-conjunto  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{D}$ ,*

$$\forall a \in \mathcal{C}, (\bigwedge_{c \in \mathcal{C}} c) \oplus a = \bigwedge_{c \in \mathcal{C}} (c \oplus a) \text{ e } (\bigoplus_{c \in \mathcal{C}} c) \wedge a = \bigoplus_{c \in \mathcal{C}} (c \wedge a).$$

sendo que  $x \wedge y$  é o ínfimo de  $x$  e  $y$ .

**Lema 2.34.** *Seja  $\Pi$  um homomorfismo de  $\mathcal{D}$  em  $\mathcal{C}$ . Seja a relação  $\mathcal{K}$  definida sobre  $\mathcal{D}$  por*

$$a \mathcal{K} b \iff \Pi(a) = \Pi(b).$$

Então:

- A imagem da função  $\Pi$ , denotada por  $\Pi(\mathcal{D})$ , é um sub-dióide de  $\mathcal{C}$ .
- $\Pi(\mathcal{D})$  é um dióide isomórfico ao dióide quociente  $\mathcal{D}/\mathcal{K}$ .

**Demonstração:**

Como o mapeamento  $\Pi$  é um homomorfismo, pela definição de homomorfismo dada em 2.18 tem-se que  $\Pi(\mathcal{D}) \subset \mathcal{C}$ ,  $\Pi(\varepsilon) = \varepsilon$ ,  $\Pi(e) = e$  e  $\Pi(\mathcal{D})$  é fechado em relação às operações  $\oplus$  e  $\otimes$ . Dessa forma,  $\Pi(\mathcal{D})$  é um sub-dióide de  $\mathcal{C}$  segundo a definição 2.14. A relação  $\mathcal{K}$  satisfaz a definição de congruência dada em 2.22. Além disso, os mapeamentos  $f : \Pi(y) \mapsto [y]$  e  $f^{-1} : [y] \mapsto \Pi(y)$  são homomorfismos e, portanto, segundo a definição 2.19,  $f$  é um isomorfismo e dessa forma os dióides são isomórficos. ■

**Definição 2.35 (Séries formais em dióides)** *Seja  $\mathcal{D}$  um dióide. Defina-se uma série formal em  $p$  variáveis (comutativas), representadas por  $z_1$  a  $z_p$ , com coeficientes em  $\mathcal{D}$  como um mapeamento  $f$  de  $\mathbb{Z}^p$  em  $\mathcal{D}$ .  $\forall k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$ ,  $f(k)$  representa o coeficiente de  $z_1^{k_1} \dots z_p^{k_p}$ . Uma outra representação equivalente da série  $f$  é*

$$f = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}^p} f(k_1, \dots, k_p) z_1^{k_1} \dots z_p^{k_p}.$$

**Lema 2.36 (Dióide de séries formais)** *O conjunto das séries formais nas variáveis  $z_1$  a  $z_p$  munido das operações seguintes*

$$\begin{aligned} f \oplus g &: (f \oplus g)(k) = f(k) \oplus g(k), \\ f \otimes g &: (f \otimes g)(k) = \bigoplus_{i+j=k} f(i) \otimes g(j), \end{aligned}$$

tendo como elemento neutro  $\varepsilon(k) = \varepsilon$  para todo  $k$  e como elemento identidade  $e(k) = e$  para todo  $k$  é um dióide representado por  $\mathcal{D}[[z_1, \dots, z_p]]$ .

A demonstração desse lema é a verificação simples dos axiomas dos dióides.

**Definição 2.37 (Suporte, Valoração e Grau)** *O suporte de uma série  $f$  é o conjunto*

$$\text{Supp}(f) = \{k \in \mathbb{Z}^p \mid f(k) \neq \varepsilon\}.$$

A valoração e o grau da série  $f$  são definidos respectivamente como o ínfimo e o supremo de  $\text{Supp}(f)$ , ou seja

$$\begin{aligned} \text{val}(f) &= \text{Inf}(\text{Supp}(f)) \\ \text{deg}(f) &= \text{Sup}(\text{Supp}(f)). \end{aligned}$$

Uma série formal com suporte finito é denominada *polinômio*. O sub-conjunto dos polinômios é um sub-dióide de  $\mathcal{D}[[z_1, \dots, z_p]]$  representado por  $\mathcal{D}[z_1, \dots, z_p]$ .

### 2.1.3 Equação implícita $x = ax \oplus b$

A equação implícita  $x = ax \oplus b$  aparece com frequência em diversos problemas que envolvem GET. Para maiores detalhes ver Baccelli et al. (1992, cap. 4).

**Teorema 2.38 (Teorema da estrela)** *Seja  $\mathcal{D}$  um dióide completo, a equação implícita*

$$x = ax \oplus b \tag{2.7}$$

em  $\mathcal{D}$  tem  $x = a^*b = \bigoplus_{k \geq 0} a^k b$  como menor solução, sendo que  $a^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} a^i$ .

O operador  $*$  é chamado usualmente de Estrela de Kleene.

**Demonstração:**

Primeiramente, mostra-se que  $x = a^*b$  é solução de (2.7). Observa-se que

$$a(a^*b) \oplus b = a(e \oplus a \oplus a^2 \oplus \dots)b \oplus b = (e \oplus a \oplus a^2 \oplus a^3 \dots)b = a^*b.$$

Se  $x$  é solução de (2.7) então  $x = ax \oplus b$ , ou seja

$$x \succeq ax \text{ e } x \succeq b.$$

Pela isotonia do produto,

$$x \succeq ax \Rightarrow x \succeq ax \succeq a^2x \succeq \dots \succeq a^kx,$$

Somando as parcelas, tem-se  $x \succeq \bigoplus_{k \geq 0} a^kx = a^*x$ . Finalmente, tem-se que

$$x \succeq a^*x \text{ e } x \succeq b \Rightarrow x \succeq a^*x \succeq a^*b.$$

Ou seja, toda solução de (2.7) é maior que  $a^*b$ . ■

**Teorema 2.39 (Gaubert (1992); Cottenceau (1999))** Seja  $\mathcal{D}$  um dióide completo e  $a^+ = \bigoplus_{i \geq 1} a^i$ , então  $\forall a, b \in \mathcal{D}$ :

$$a^+ \preceq a^* \tag{2.8}$$

$$a^*a^* = a^* \tag{2.9}$$

$$(a^*)^* = a^* \tag{2.10}$$

$$(a^*)^+ = a^* \tag{2.11}$$

$$(a^+)^* = a^* \tag{2.12}$$

$$(a^+)^+ = a^+ \tag{2.13}$$

$$a(ba)^* = (ab)^*a \tag{2.14}$$

$$(a \oplus b)^* = (a^*b)^*a^* = a^*(ba^*)^* = b^*(ab^*)^* = (b^*a)^*b^* \tag{2.15}$$

$$(ab^*)^+ = a(a \oplus b)^* \tag{2.16}$$

$$(ab^*)^* = e \oplus a(a \oplus b)^* \tag{2.17}$$

$$(a \oplus b)^* = (a^* \oplus b)^* = (a \oplus b^*)^* = (a^*b^*)^* = (a^* \oplus b^*)^* \tag{2.18}$$

Além disso, se  $\mathcal{D}$  é comutativo

$$(a \oplus b)^* = a^*b^*. \tag{2.19}$$

**Demonstração:**

(2.8) Advém do fato de que  $a^* = \bigoplus_{i \geq 0} a^i = e \oplus a^+$ .

(2.9) Observar que  $\forall i \geq 0, a^i a^* \preceq a^*$ . Somando todas as parcelas, obtém-se que  $\bigoplus_{i \geq 0} a^i a^* = a^* a^* \preceq a^*$ . Como  $a^* \succeq e$ , resulta da isotonia do produto que  $a^* a^* \succeq a^*$ , o que assegura a igualdade.

(2.10) Segue de (2.9) utilizando a propriedade de isotonia do produto que  $a^* = (a^*)^i$ . Logo  $\bigoplus_{i \geq 0} (a^*)^i = (a^*)^* = a^*$ .

(2.11) Usa-se o mesmo raciocínio anterior.

(2.12) Da definição de  $a^+$  e de tem-se que 2.8  $a \preceq a^+ \preceq a^*$ . Por isotonia da operação estrela,  $a^* \preceq (a^+)^* \preceq (a^*)^*$ , mas por 2.10,  $(a^*)^* = a^*$ .

(2.13) Como  $a^i a^+ \preceq a^+$  então  $\bigoplus_{i \geq 1} a^i a^+ = a^+ a^+ \preceq a^+$ . Pela isotonia do produto, obtém-se que  $(a^+)^i \preceq a^+$  e, portanto,  $a^+ \preceq \bigoplus_{i \geq 1} (a^+)^i = (a^+)^+ \preceq a^+$ .

(2.14)  $a(ab)^* = a \oplus aba \oplus ababa \oplus \dots = (e \oplus ba \oplus baba \oplus \dots)a = (ba)^* a$ .

(2.15) Pelo teorema 2.38 as equações abaixo apresentam a mesma solução mínima.

$$x = (a \oplus b)^*$$

$$x = ax \oplus bx \oplus e$$

$$x = a^* b x \oplus a^*$$

$$x = (a^* b)^* a^*$$

Além disso,  $(a^* b)^* a^* = a^* (b a^*)^*$  graças a (2.14). O mesmo raciocínio é usado para se obter as duas ultimas desigualdades partindo da equação  $x = b^* a x \oplus b^*$ .

(2.16) Observar que  $(ab^*)^+ = (ab^*)(ab^*)^* = a(b^*(ab^*)^*)$  e que  $b^*(ab^*)^* = (a \oplus b)^*$  por (2.15).

(2.17) Pois  $(ab^*)^* = e \oplus (ab^*)^+$ .

(2.18) Resulta de 2.15 que  $(a^* \oplus b^*)^* = ((a^*)^* b^*)^* (a^*)^* = (a^* b^*)^* a^* = (a \oplus b)^*$ , dado que por 2.10,  $(a^*)^* = a^*$ . Do mesmo modo, obtém-se  $(a \oplus b)^* = (a \oplus b^*)^* = (a^* \oplus b^*)^*$ . Resta mostrar que  $(a^* \oplus b^*)^* = (a^* b^*)^*$ . Como  $(a^* \oplus b^*)^* \succeq a^* b^*$ , então  $(a^* \oplus b^*)^* = ((a^* \oplus b^*)^*)^* \succeq (a^* b^*)^*$ ; por outro lado, devido à idempotência do dióide,  $a^* b^* = (a^* \oplus a^*) b^* \succeq a^* \oplus b^*$  o que implica em  $(a^* b^*)^* \succeq (a^* \oplus b^*)^*$ .

■

Conforme observado no teorema 2.38, o cálculo da Estrela de Kleene tem um papel importante na resolução de equações em dióides. O teorema a seguir possibilita o cálculo recursivo da estrela de uma matriz a partir de sua decomposição em quatro blocos.

**Teorema 2.40 (Baccelli et al. (1992))** *Seja  $A \in \mathcal{D}^{n \times n}$  particionada em quatro blocos*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

A matriz  $A^*$  é obtida da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^* \oplus a_{11}^* a_{12} (a_{21} a_{11}^* a_{12} \oplus a_{22})^* a_{21} a_{11}^* & a_{11}^* a_{12} (a_{21} a_{11}^* a_{12} \oplus a_{22})^* \\ (a_{21} a_{11}^* a_{12} \oplus a_{22})^* a_{21} a_{11}^* & (a_{21} a_{11}^* a_{12} \oplus a_{22})^* \end{pmatrix}.$$

**Demonstração:**

Sabe-se que  $A^*$  é a menor solução da equação  $X = AX + e$  sendo que  $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$ . Dessa forma, tem-se o seguinte sistema:

$$X_{11} = a_{11} X_{11} \oplus a_{12} X_{21} \oplus e \quad (2.20)$$

$$X_{12} = a_{11} X_{12} \oplus a_{12} X_{22} \quad (2.21)$$

$$X_{21} = a_{21} X_{11} \oplus a_{22} X_{21} \quad (2.22)$$

$$X_{22} = a_{21} X_{12} \oplus a_{22} X_{22} \oplus e \quad (2.23)$$

Aplicando-se o teorema 2.38 às equações 2.20 e 2.21 obtém-se que

$$X_{11} = a_{11}^* (a_{12} X_{21} \oplus e) \text{ e } X_{12} = a_{11}^* a_{12} X_{22}.$$

Essas equações são substituídas nas equações 2.22 e 2.23 que são resolvidas para  $X_{21}$  e  $X_{22}$ . A seguir essas variáveis são substituídas na equação acima, o que resulta na solução para  $X_{11}$  e  $X_{12}$ .

■

#### 2.1.4 Elementos da Teoria da Residuação: aplicação aos dióides

A equação  $f(x) = b$  aparece em diversos problemas que envolvem GET modelados por dióides. Neste trabalho, assume-se que  $f$  é um mapeamento isotônico de um dióide  $\mathcal{D}$  em um dióide  $\mathcal{C}$ . Assume-se ainda que os dióides  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{C}$  são completos de forma a garantir existência de ínfimos e supremos. É claro que se  $f$  não é sobrejetiva, a equação não terá solução para alguns valores de  $b$ . Além disso, se  $f$  não é injetiva, a equação não terá solução única. Uma maneira de se lidar com esse problema é considerar não somente as soluções possíveis, mas as subsoluções, ou seja, valores de  $x$  tais que  $f(x) \preceq b$ . Analogamente, definem-se as supersoluções  $f(x) = b$  como sendo os valores



de  $x$  tais que  $f(x) \succeq b$ . Essencialmente, a teoria da residuação busca a máxima subsolução ou a mínima supersolução para a inequação . Maiores detalhes podem ser encontrados em Blyth & Janowitz (1972). Aplicações da Residuação aos dióides são dadas em Baccelli et al. (1992).

**Definição 2.41 (Resíduo e mapeamento residuável)** *Um mapeamento isotônico  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ , no qual  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{E}$  são conjuntos ordenados, é um mapeamento residuável se para todo  $y \in \mathcal{E}$  existe a maior subsolução para a equação  $f(x) = y$  . Essa maior subsolução é denotada por  $f^\sharp(y)$  e o mapeamento  $f^\sharp$  é chamado resíduo de  $f$ .*

**Teorema 2.42 (Residuação)** *Seja  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  um mapeamento isotônico no qual  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{E}$  são conjuntos ordenados, então  $f$  é residuável se e somente se  $f^\sharp$  é o único mapeamento isotônico tal que*

$$f \circ f^\sharp(y) \preceq y \quad e \quad f^\sharp \circ f(x) \succeq x \quad (2.24)$$

$$\forall x \in \mathcal{D} \text{ e } \forall y \in \mathcal{E}.$$

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) *Se  $f$  é residuável,  $\forall x, y \in \mathcal{D}$  existe uma subsolução máxima para  $\{x | f(x) \preceq y\}$ . Seja  $f^\sharp(y)$  essa sub-solução máxima (observar que  $f^\sharp$  é isotônico). Logo  $f \circ f^\sharp(y) \preceq y$ . Além disso,  $f^\sharp \circ f(x)$  é solução máxima de  $\{z | f(z) \preceq f(x)\}$ ,  $\forall x \in \mathcal{D}$  e, portanto,  $f^\sharp \circ f(x) \succeq x$  já que  $x$  é também uma subsolução.*

( $\Leftarrow$ ) *Seja o sub-conjunto  $\{x | f(x) \preceq y\} \forall x, y \in \mathcal{D}$ . Pela isotonia de  $f^\sharp$  tem-se que  $f^\sharp \circ f(x) \preceq f^\sharp(y)$ , mas, por hipótese,  $f^\sharp(f(x)) \succeq x$ , logo  $x \preceq f^\sharp(y)$  pois  $f(x) \preceq y$ . Por hipótese também,  $f \circ f^\sharp(y) \preceq y$  o que implica que  $f^\sharp(y)$  é a máxima solução do sub-conjunto e, portanto,  $f$  é residuável. ■*

O teorema seguinte caracteriza os mapeamentos residuáveis para os dióides completos.

**Teorema 2.43.** *Considere os dióides completos  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{C}$  . O mapeamento  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  é residuável, se e somente se, para todo sub-conjunto  $X$  de  $\mathcal{D}$*

$$f\left(\bigoplus_{x \in X} x\right) = \bigoplus_{x \in X} f(x) \quad (2.25)$$

$$f(\varepsilon) = \varepsilon \quad (2.26)$$

**Demonstração:**

*Para a demonstração é importante lembrar que  $\varepsilon$  é o menor elemento de um dióide.*

( $\Rightarrow$ ) Se  $f$  é residuável, então  $f \circ f^\sharp(\varepsilon) \preceq \varepsilon$  (ver inequações 2.24), o que implica que  $f \circ f^\sharp(\varepsilon) = \varepsilon$ . Como  $f^\sharp(\varepsilon) \succeq \varepsilon$ , tem-se por isotonia que  $f \circ f^\sharp(\varepsilon) \succeq f(\varepsilon) \Rightarrow f(\varepsilon) = \varepsilon$ .

Seja  $X$  um sub-conjunto de  $\mathcal{D}$ . Como  $f$  é isotônico, pode-se mostrar facilmente utilizando a propriedade 2.32 que:

$$\bigoplus_{x \in X} f(x) \preceq f\left(\bigoplus_{x \in X} x\right) \quad (2.27)$$

Mostra-se agora que a inequação também vale no outro sentido, ou seja, tem-se na realidade uma igualdade. Seja  $y = f(x)$  para todo  $x \in X$ ,  $f^\sharp(y) \succeq x$  devido às equações 2.24. Assim,

$$f\left(\bigoplus_{x \in X} x\right) \preceq f\left(\bigoplus_{x \in X} f^\sharp(y)\right) \preceq f \circ f^\sharp\left(\bigoplus_{x \in X} y\right) \preceq \bigoplus_{x \in X} y = \bigoplus_{x \in X} f(x),$$

pois a inequação (2.27) também vale para  $f^\sharp(y)$  que é isotônico.

( $\Leftarrow$ ) Como  $f(\varepsilon) = \varepsilon$ , o conjunto  $\{x | f(x) \preceq y\}$  é não-vazio para todo  $y \in \mathcal{C}$ . Então,

$$f\left(\bigoplus_{x \in X} x\right) = \bigoplus_{x \in X} f(x) \preceq y.$$

O que significa que existe sempre uma solução máxima dada por  $\bigoplus_{x \in X} x$  e, dessa forma,  $f$  é residuável. ■

Resultados com demonstrações absolutamente análogas podem ser anunciados para os mapeamentos dualmente residuáveis.

**Definição 2.44 (Resíduo dual e mapeamento dualmente residuável)** Um mapeamento isotônico  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ , no qual  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{E}$  são conjuntos ordenados, é um mapeamento dualmente residuável se para todo  $y \in \mathcal{E}$  existe a menor supersolução para a equação  $f(x) = y$ . Essa menor supersolução é denotada por  $f^\flat(y)$  e o mapeamento  $f^\flat$  é chamado resíduo dual de  $f$ .

**Teorema 2.45 (Residuação Dual)** Seja um mapeamento isotônico  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ , no qual  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{E}$  são conjuntos ordenados, então  $f$  é dualmente residuável se e somente se  $f^\flat$  é o único mapeamento isotônico tal que

$$f \circ f^\flat(y) \succeq y \quad \text{and} \quad f^\flat \circ f(x) \preceq x \quad (2.28)$$

$\forall x \in \mathcal{D}$  e  $\forall y \in \mathcal{E}$ .

**Teorema 2.46.** Considere os dióides completos  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{C}$ . O mapeamento  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  é dualmente residuável se e somente se, para todo sub-conjunto  $X$  de  $\mathcal{D}$

$$f\left(\bigwedge_{x \in X} x\right) = \bigwedge_{x \in X} f(x) \quad (2.29)$$

$$f(\top) = \top \quad (2.30)$$

### Mapeamentos residuáveis e dualmente residuáveis nos dióides completos

Serão apresentados aqui alguns resultados derivados da Teoria da Residuação sobre os mapeamentos lineares ( $f(x) = a \otimes x$  ou  $x \otimes a$ ), sobre o mapeamento ínfimo ( $f(x) = a \wedge x$ ) e sobre o mapeamento afim  $f(x) = x \oplus a$ .

Sejam os mapeamentos<sup>2</sup>  $L_a$ ,  $R_a$ ,  $M_a$  e  $T_a$  definidos em um dióide completo  $\mathcal{D}$

$$L_a : x \mapsto a \otimes x \quad (2.31)$$

$$R_a : x \mapsto x \otimes a \quad (2.32)$$

$$M_a : x \mapsto a \wedge x \quad (2.33)$$

$$T_a : x \mapsto a \oplus x \quad (2.34)$$

A partir da definição 2.16 para um dióide completo, observa-se que a multiplicação se distribui em relação a somas infinitas tanto à esquerda como à direita para os mapeamentos  $L_a$ ,  $R_a$  e  $M_a$ . Observa-se ainda que  $L_a(\varepsilon) = R_a(\varepsilon) = M_a(\varepsilon) = \varepsilon$ . A aplicação do teorema 2.43 garante que esses mapeamentos são residuáveis. Além disso, se  $\mathcal{D}$  é comutativo tem-se que  $L_a = R_a$  e, portanto,  $L_a^\sharp = R_a^\sharp$ .

Considerando  $\mathcal{D}$  completo e distributivo, observa-se que  $T_a$ , não é sempre residuável (não satisfaz o teorema 2.43, pois  $T_a(\varepsilon) \neq \varepsilon$ ). Contudo  $T_a(\top) = \top$ , e verifica-se que  $T_a$  satisfaz o teorema 2.46 e é, por esse motivo, dualmente residuável.

As notações e as fórmulas dadas abaixo para os mapeamentos  $L_a$ ,  $R_a$  e  $T_a$  são apresentadas em Baccelli et al. (1992).

#### Notação 2.47 (Resíduos de $L_a$ , $R_a$ e $M_a$ )

$$L_a^\sharp(x) = a \backslash x = \frac{x}{a}$$

$$R_a^\sharp(x) = x / a = \frac{x}{a}$$

$$M_a^\sharp(x) = x \boxminus a$$

O resíduo dual  $T_a$  será representado por  $T_a^b(x) = x \ominus a$ .

**Teorema 2.48 (Fórmulas da Residuação)** *Os mapeamentos  $L_a^\sharp$  e  $R_a^\sharp$  apresentam as seguintes propriedades:*

---

<sup>2</sup>multiplicação à esquerda e à direita por  $a$ , ínfimo em relação a  $a$  e translação por  $a$  respectivamente.

$$a \frac{x}{a} \preceq x \quad \frac{x}{a} a \preceq x \quad (2.35)$$

$$\frac{ax}{a} \succeq x \quad \frac{xa}{a} \succeq x \quad (2.36)$$

$$a \frac{ax}{a} = ax \quad \frac{xa}{a} a = xa \quad (2.37)$$

$$\frac{a(a \setminus x)}{a} = \frac{x}{a} \quad \frac{(x \not/a)a}{a} = \frac{x}{a} \quad (2.38)$$

$$\frac{x \wedge y}{a} = \frac{x}{a} \wedge \frac{y}{a} \quad \frac{x \wedge y}{a} = \frac{x}{a} \wedge \frac{y}{a} \quad (2.39)$$

$$\frac{x}{a \oplus b} = \frac{x}{a} \wedge \frac{x}{b} \quad \frac{x}{a \oplus b} = \frac{x}{a} \wedge \frac{x}{b} \quad (2.40)$$

$$\frac{x \oplus y}{a} \succeq \frac{x}{a} \oplus \frac{y}{a} \quad \frac{x \oplus y}{a} \succeq \frac{x}{a} \oplus \frac{y}{a} \quad (2.41)$$

$$\frac{x}{a \wedge b} \succeq \frac{x}{a} \oplus \frac{x}{b} \quad \frac{x}{a \wedge b} \succeq \frac{x}{a} \oplus \frac{x}{b} \quad (2.42)$$

$$\frac{x}{ab} = \frac{a \setminus x}{b} \quad \frac{x}{ba} = \frac{x \not/a}{b} \quad (2.43)$$

$$\frac{x}{a} b \preceq \frac{xb}{a} \quad b \frac{x}{a} \preceq \frac{bx}{a} \quad (2.44)$$

Para evitar desenvolvimentos repetitivos e tediosos a demonstração será feita apenas para as fórmulas da primeira coluna já que as fórmulas apresentadas na segunda colunas são absolutamente análogas e podem ser obtidas utilizando o mesmo raciocínio. A base para todas as demonstrações é o teorema 2.42.

### Demonstração:

(2.35) Pois segundo o teorema 2.42,  $f \circ f^\sharp(x) \preceq x$ , sendo que  $f(x) = ax$ .

(2.36) Também consequência do teorema 2.42.

(2.37) Pelo teorema 2.42  $a \frac{ax}{a} \preceq ax$  e  $\frac{ax}{a} \succeq x$ . Dessa última equação, obtém-se por isotonia que  $a \frac{ax}{a} \succeq ax$  o que assegura a igualdade.

(2.38) Pelo mesmo teorema,  $\frac{a(a \setminus x)}{a} \succeq \frac{x}{a}$  e  $a(a \setminus x) \preceq x$  como  $f(y) = \frac{y}{a}$  é isotônico,  $\frac{a(a \setminus x)}{a} \preceq \frac{x}{a}$ .

(2.39) A partir da definição de residuação, pode-se escrever que  $\frac{x \wedge y}{a}$  é a maior subsolução do

conjunto  $L = \{az_i \preceq x \wedge y\}$ . Logo  $az_i \preceq x$  e  $az_i \preceq y$ . Dessa forma,  $z_i \preceq \frac{x}{a}$  e  $z_i \preceq \frac{y}{a}$  e, portanto,  $z_i \preceq \frac{x}{a} \wedge \frac{y}{a}$ . Além disso, observa-se que  $a(\frac{x}{a} \wedge \frac{y}{a}) \preceq x \wedge y$ , ou seja,  $\frac{x}{a} \wedge \frac{y}{a}$  é a maior solução do conjunto  $L$ .

(2.40)  $\frac{x}{a \oplus b}$  é a maior subsolução de  $(a \oplus b)y \preceq x$ . O resultado é obtido a partir das equivalências seguintes:

$$ay \oplus by \preceq x \Leftrightarrow \begin{cases} ay \preceq x \\ by \preceq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \preceq \frac{x}{a} \\ y \preceq \frac{x}{b} \end{cases} \Leftrightarrow y \preceq \frac{x}{a} \wedge \frac{x}{b}.$$

(2.41) Conseqüência direta da isotonia de  $\frac{x}{a}$  e da propriedade 2.32 para os mapeamentos isotônicos.

(2.42)  $\frac{x}{a \wedge b}$  é a máxima subsolução do conjunto  $\{(a \wedge b)y \preceq x\}$  e  $\frac{x}{a} \oplus \frac{x}{b}$  é uma subsolução. De fato,  $(a \wedge b)(\frac{x}{a} \oplus \frac{x}{b}) = (a \wedge b)\frac{x}{a} \oplus (a \wedge b)\frac{x}{b} \preceq a\frac{x}{a} \oplus b\frac{x}{b} \preceq x$ , pois pela fórmula 2.35  $z\frac{x}{z} \preceq x$ .

(2.43)  $\frac{x}{ab}$  é a máxima solução do conjunto  $\{aby \preceq x\}$  e as equações seguintes são equivalentes:

$$aby \preceq x \Leftrightarrow by \preceq a \backslash x \Leftrightarrow y \preceq \frac{a \backslash x}{b}.$$

(2.44)  $\frac{xb}{a}$  é a máxima subsolução do conjunto  $\{ay \preceq xb\}$  e  $\frac{x}{a}b$  é uma subsolução desse conjunto pois  $a\frac{x}{a}b \preceq xb$ .

■

O teorema 2.49 mostra algumas equações úteis envolvendo a residuação dos operadores  $\oplus$  e  $\wedge$  nos dióides.

**Teorema 2.49 (Fórmulas da Residuação e da Residuação Dual)** *Os mapeamentos  $T_a^b$  e  $M_a^\#$  verificam as seguintes propriedades:*

$$(x \ominus a) \oplus a = x \oplus a \qquad (x \boxminus a) \wedge a = x \wedge a \qquad (2.45)$$

$$(x \oplus a) \ominus a = x \ominus a \qquad (x \wedge a) \boxminus a = x \boxminus a \qquad (2.46)$$

$$(x \oplus y) \ominus a = (x \ominus a) \oplus (y \ominus a) \qquad (x \wedge y) \boxminus a = (x \boxminus a) \wedge (y \boxminus a) \qquad (2.47)$$

$$x \ominus (a \oplus b) = (x \ominus a) \ominus b = (x \ominus b) \ominus a \qquad x \boxminus (a \wedge b) = (x \boxminus a) \boxminus b = (x \boxminus b) \boxminus a \qquad (2.48)$$

$$x \oplus a = \varepsilon \Leftrightarrow a \succeq x \qquad x \boxplus a = \top \Leftrightarrow a \preceq x \qquad (2.49)$$

**Demonstração:** Convém observar que o mapeamento  $M_a$  pode ser obtido a partir do mapeamento  $L_a$  se a ordem do dióide é invertida. Sendo assim, a demonstração feita para o resíduo do operador " $\oplus$ " na primeira coluna vale também para " $\wedge$ ".

(2.45)  $x \oplus a$  é a menor super-solução do conjunto  $\{y \oplus a \succeq x\}$ , ou seja,  $(x \oplus a) \oplus a \succeq x$  o que implica que  $(x \oplus a) \oplus a \succeq x \oplus a$  devido a idempotência. Mas  $x$  é uma super-solução, logo  $x \oplus a \preceq x$  e, conseqüentemente,  $(x \oplus a) \oplus a \preceq x \oplus a$ .

(2.46) Segue da observação de que  $(x \oplus a) \oplus a$  é a menor super-solução do conjunto  $\{y \oplus a \succeq x \oplus a\}$  que é equivalente a  $\{y \oplus a \succeq x\}$ .

(2.47) As equações abaixo são equivalentes:

$$z \oplus a \succeq x \oplus y \iff \begin{cases} z \oplus a \succeq x \\ z \oplus a \succeq y \end{cases} \iff \begin{cases} z \succeq x \oplus a \\ z \succeq y \oplus a \end{cases} \iff z \succeq (x \oplus a) \oplus (y \oplus a).$$

(2.48) Notar que:  $y \oplus a \oplus b \succeq x \iff y \oplus b \succeq x \oplus a \iff y \succeq (x \oplus a) \oplus b$ . Do mesmo modo, obtém-se  $y \oplus a \oplus b \succeq x \iff y \succeq (x \oplus b) \oplus a$ .

(2.49)  $x \oplus a = \varepsilon \implies (x \oplus a) \oplus a = \varepsilon \oplus a = a$ ; contudo, pela fórmula 2.45,  $(x \oplus a) \oplus a = x \oplus a$ , o que resulta em  $x \oplus a = a$ . Por outro lado, se  $a \succeq x$ , o conjunto  $\{y \oplus a \succeq x\}$  admite  $\varepsilon$  como super-solução. ■

Outras fórmulas podem ser obtidas a partir da composição dos mapeamentos descritos. O teorema apresentado a seguir é bastante útil nesse sentido.

**Teorema 2.50.** Se  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  e  $g : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  são mapeamento residuáveis, então  $f \circ g$  é também residuável e,

$$(f \circ g)^\# = g^\# \circ f^\# \qquad (2.50)$$

O teorema dual é enunciado se  $f$  e  $g$  são mapeamento dualmente residuáveis. A demonstração desse teorema resulta diretamente da aplicação simples do teorema 2.42.

O resíduo de uma aplicação é dualmente residuável e vice-versa (em Baccelli et al. (1992) mostra-se que  $(f^\#)^\flat = f$  e que  $(f^\flat)^\# = f$ ). Dessa forma, como conseqüência do teorema 2.50, podem-se calcular os seguintes mapeamentos  $(L_a^\# \circ T_a)^\flat$ ,  $(L_a \circ T_a^\flat)^\#$ ,  $(M_a \circ T_a^\flat)^\#$ , etc.

**Teorema 2.51 (Resíduos de alguns mapeamentos)**

$$[(x \oplus a) \wedge b]^\sharp = (x \boxplus a) \wedge b \quad (x \boxplus a) \wedge b]^\flat = (x \oplus a) \wedge b \quad (2.51)$$

$$[(x \wedge b) \oplus a]^\sharp = (x \oplus a) \boxplus b \quad [(x \oplus a) \boxplus b]^\flat = (x \wedge b) \oplus a \quad (2.52)$$

$$[b \oplus (x \oplus a)]^\sharp = \frac{x}{b} \oplus a \quad \left[\frac{x}{b} \oplus a\right]^\flat = b \oplus (x \oplus a) \quad (2.53)$$

$$[(b \oplus x) \oplus a]^\sharp = \frac{x \oplus a}{b} \quad \left[\frac{x \oplus a}{b}\right]^\flat = (b \oplus x) \oplus a \quad (2.54)$$

$$[b \oplus (x \wedge a)]^\sharp = \frac{x}{b} \boxplus a \quad \left[\frac{x}{b} \boxplus a\right]^\flat = b \oplus (x \wedge a) \quad (2.55)$$

**Demonstração:**

A demonstração será feita para os mapeamentos da primeira coluna já que os da segunda colunas são mapeamentos duais.

(2.51) Basta observar que  $(M_b \circ T_a^\flat)^\sharp = T_a \circ M_b^\sharp$ , sendo que  $M_b(x) = x \wedge b$  e  $T_a(x) = x \oplus a$ .

(2.52)  $(L_b \circ T_a^\flat)^\sharp = T_a \circ L_b^\sharp$ .

(2.53)  $(T_a^\flat \circ M_b)^\sharp = M_b^\sharp \circ T_a$ .

(2.54)  $(L_a^\flat \circ T_b)^\sharp = T_b^\sharp \circ L_a$ .

(2.55)  $(L_b \circ M_b)^\sharp = M_b^\sharp \circ L_a^\sharp$ .

■

**Residuação do produto para o dióide matricial**

Considere as matrizes escalares  $n \times n$  com elementos pertencentes a um dióide "escalar"  $\mathcal{D}$ . As operações soma e produto de matrizes são definidas de maneira natural a partir da soma e da multiplicação no dióide  $\mathcal{D}$  da mesma maneira que foi feito para o dióide  $(\overline{\mathbb{Z}}_{max})^{n \times n}$  no exemplo 2.13, ou seja:

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} \text{ e } (A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj}.$$

Esse conjunto de matrizes com as operações definidas acima é um dióide que é representado por  $\mathcal{D}^{n \times n}$ . Assim, o mapeamento  $L_A$  é definido sobre o dióide matricial  $\mathcal{D}^{n \times n}$  como

$$\begin{aligned} L_A : \mathcal{D}^{n \times n} &\rightarrow \mathcal{D}^{n \times n} \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

**Teorema 2.52.** *Considere o dióide  $\mathcal{D}$  completo e  $\mathcal{D}^{n \times n}$  o dióide das matrizes com elementos em  $\mathcal{D}$  e ainda as matrizes  $A$  e  $B \in \mathcal{D}^{n \times n}$ . O supremo da inequação  $AX \preceq B$  existe e é dado pela matriz  $L_A^\sharp(B) \in \mathcal{D}^{n \times n}$ , também representada por  $\frac{B}{A} = A \backslash B$ . Os elementos dessa matriz são calculados por:*

$$(A \backslash B)_{ij} = \bigwedge_{l=1}^n A_{li} \backslash B_{lj}.$$

**Demonstração:**

A inequação  $AX \preceq B$  é equivalente à  $\forall l, j \leq n, (A \otimes X)_{lj} = \bigoplus_{i=1}^n (A_{li} X_{ij}) \preceq B_{lj}$ . Assim, pode-se igualmente dizer que  $\forall l, j, i \leq n, (A_{li} X_{ij}) \preceq B_{lj}$ . Como o mapeamento  $L_a$  definido em  $\mathcal{D}$  é residuável,  $AX \preceq B$  é equivalente às inequações  $\forall l, j, i \leq n, X_{ij} \preceq A_{li} \backslash B_{lj}$ . Portanto, tem-se que  $\forall i, j, X_{ij} \preceq \bigwedge_{l=1}^n A_{li} \backslash B_{lj}$ . Além disso,  $(A \otimes (A \backslash B)) \preceq B$  segue facilmente da equação 2.35, o que significa que  $A \backslash B$  é a maior subsolução de  $AX \preceq B$ . ■

Esse resultado pode ser estendido facilmente para os mapeamentos  $L_A$  e  $R_{A'}$  mostrados abaixo nos quais as matrizes são não-quadradas<sup>3</sup>.

$$\begin{aligned} L_A : \mathcal{D}^{p \times q} &\rightarrow \mathcal{D}^{n \times q} & R_{A'} : \mathcal{D}^{q \times p} &\rightarrow \mathcal{D}^{q \times n} \\ X &\mapsto AX \quad (A \in \mathcal{D}^{n \times p}) & X &\mapsto XA' \quad (A' \in \mathcal{D}^{p \times n}) \end{aligned}$$

Assim, as inequações  $AX \preceq B$  e  $XA' \preceq B'$  admitem  $L_A^\sharp(B)$  e  $R_{A'}^\sharp(B)$  respectivamente como supremos. De maneira análoga ao caso anterior, os elementos dessas matrizes são dados por

$$\begin{aligned} B \in \mathcal{D}^{n \times q}, (A \backslash B)_{ij} &= \bigwedge_{l=1}^n A_{li} \backslash B_{lj} \\ B' \in \mathcal{D}^{q \times n}, (B' \not\backslash A')_{ij} &= \bigwedge_{l=1}^n B'_{il} \not\backslash A'_{jl} \end{aligned}$$

Uma aplicação interessante da residuação diz respeito à solução da equação  $AX = B$ . Pode-se mostrar facilmente que essa equação tem solução se e somente se  $A(A \backslash B) = B$ . De fato, se  $X$  é solução da equação então  $X \preceq A \backslash B$ . Por isotonia da multiplicação, tem-se que  $AX = B \preceq A(A \backslash B) \preceq B$ . A demonstração no outro sentido é trivial.

<sup>3</sup>Na realidade, para que os dióides preservem suas propriedades de fechamento em relação a multiplicação as matrizes devem ser quadradas. No entanto na prática isso não é um problema, já que as matrizes podem ser completadas com elementos iguais a  $\varepsilon$  para que todas sejam quadradas e tenham a mesma dimensão.



**Teorema 2.53.** *Considere  $A \in \mathcal{D}^{n \times n}$  então  $A \backslash A = (A \backslash A)^*$ .*

**Demonstração:**

$X_{max} = A \backslash A$  é a máxima solução da inequação  $AX \preceq A$  e, portanto,  $AX_{max} \preceq A$ . Assim, pela isotonia do produto  $A \succeq AX_{max} \succeq AX_{max}^2 \succeq \dots \succeq AX_{max}^k \succeq \dots$ . Somando todos os termos das desigualdades, obtém-se  $A(e \oplus X_{max} \oplus X_{max}^2 \oplus \dots \oplus X_{max}^k \oplus \dots) = AX_{max}^* \preceq A$ . Dessa forma,  $X_{max}^*$  é também solução da inequação e, portanto,  $X_{max}^* \preceq X_{max}$ . Como para todo  $X$  sabe-se que  $X^* \succeq X$ , a conclusão é que  $X_{max}^* = X_{max}$ . ■

Seguindo o mesmo raciocínio, pode-se demonstrar resultado análogo para  $A / A$ , ou seja,  $A / A = (A / A)^*$ .

### Residuação restrita

O problema de residuação restrita aparece quando se faz uma restrição no domínio ou no contradomínio de uma função. Nesse trabalho, o interesse é sobretudo na residuação com restrição no domínio. Os resultados seguinte foram obtidos de Cottencau (1999).

**Definição 2.54 (Restrição de um mapeamento a um domínio  $A$ )** *Seja  $f : E \rightarrow F$  e  $A \subseteq E$ . Utiliza-se a notação  $f|_A$  para um mapeamento definido de  $A$  para  $F$ , e que verifica*

$$f|_A = f \circ \text{Id}|_A$$

no qual  $\text{Id}|_A : A \rightarrow E$  é tal que  $\forall x \in A, f(x) = x$ , e é chamada injeção canônica de  $A$  em  $E$ . O mapeamento  $f|_A$  será chamado de restrição de  $f$  ao domínio  $A$ .

De acordo com essa definição, tem-se o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \text{Id}|_A \uparrow & \nearrow & \\ A & & f|_A \end{array}$$

**Proposição 2.55 (Injeção canônica)** *Seja  $\text{Id}|_{\mathcal{D}_{\text{sub}}} : \mathcal{D}_{\text{sub}} \rightarrow \mathcal{D}$  a injeção canônica de um sub-dióide completo em um dióide completo. A injeção  $\text{Id}|_{\mathcal{D}_{\text{sub}}}$  é residuável e seu resíduo é notado como*

$$(\text{Id}|_{\mathcal{D}_{\text{sub}}})^\# = \text{Pr}_{\text{sub}}.$$

**Demonstração:**

Como  $\mathcal{D}_{\text{sub}}$  é completo e a injeção canônica  $\text{Id}_{|\mathcal{D}_{\text{sub}}}$  satisfaz  $\text{Id}_{|\mathcal{D}_{\text{sub}}}(\varepsilon) = \varepsilon$ , aplica-se o teorema 2.43. ■

Como consequência dessa proposição, o resíduo de uma injeção canônica de um subdióide completo em um dióide completo, representado por  $\text{Pr}_{\text{sub}}$ , é uma projeção de  $\mathcal{D}$  em  $\mathcal{D}_{\text{sub}}$ . Além disso, todo elemento de  $x \in \mathcal{D}_{\text{sub}}$  é invariante pela aplicação de  $\text{Pr}_{\text{sub}}$ :

$$x \in \mathcal{D}_{\text{sub}} \iff \text{Pr}_{\text{sub}}(x) = x.$$

Vale lembrar que se  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  é residuável e a injeção  $\text{Id}_{|\mathcal{D}_{\text{sub}}}$  é residuável (na qual  $\mathcal{D}_{\text{sub}}$  é um subdióide completo de  $\mathcal{D}$ ) então o mapeamento restrito  $f_{|\mathcal{D}_{\text{sub}}}$  é residuável (ver teorema 2.50). O resíduo é simplesmente  $\text{Pr}_{\text{sub}} \circ f^\sharp$ . O que significa que o problema com restrição

$$\begin{cases} f(x) \preceq b \\ x \in \mathcal{D}_{\text{sub}} \end{cases}$$

tem uma solução ótima no subdióide  $\mathcal{D}_{\text{sub}}$  para todo  $b$  de  $\mathcal{D}$ .

**2.2 Conclusão**

Neste capítulo, apresentaram-se as ferramentas algébricas que são fundamentais para o estudo dos sistemas max-plus proposto nesta tese. As duas ferramentas principais envolvidas foram a teoria de dióides e a de residuação. São contribuições deste capítulo, os resultados relativos à residuação do operador ínfimo (teoremas 2.49 e 2.51) e a simplificação de algumas demonstrações de resultados já conhecidos na literatura (Baccelli et al., 1992; Gaubert, 1992; Cottenceau, 1999), destacadamente o teorema 2.53.

## Capítulo 3

# Grafos a Eventos Temporizados

A álgebra  $(\max,+)$  tem como aplicação a modelagem de Sistemas a Eventos Discretos (SED) que apresentam sincronia de tarefas e retardo de tempo. Esses sistemas pode ser representados por Grafos a Eventos Temporizados (GET) que são uma subclasse de redes de Petri. Sabe-se que o comportamento dinâmico dos GET é usualmente descrito por equações não-lineares que envolvem os operadores "max" e "+" ( ou "min" e "+" ) na álgebra convencional. Um fato importante é que esse comportamento não-linear dos GET é linearizado quando se utiliza a álgebra  $(\max,+)$ . Neste capítulo é feita uma introdução aos SED descritos via GET com o objetivo de se obter modelos dinâmicos em dióides (outro nome bastante empregado na literatura para a álgebra  $(\max,+)$ ) que serão utilizados nos capítulos posteriores para o desenvolvimento dos métodos de identificação e controle.

### 3.1 Introdução às Redes de Petri

As Redes de Petri são basicamente uma linguagem gráfica para a descrição de fenômenos de sincronização e de concorrência. São utilizadas para a modelagem de uma ampla classe de Sistemas a Eventos Discretos como, por exemplo, protocolos de comunicação, sincronização de tarefas e processamento paralelo. Elas permitem uma descrição estrutural do sistema através de diagramas que se modificam de acordo com a ocorrência de eventos. Uma descrição ampla da bibliografia de modelos de Redes de Petri e suas análises é dada em Murata (1989).

### 3.1.1 Notação e definições

Uma Rede de Petri é um grafo com dois tipos de nós, os lugares e transições, conectados por arcos. Constitui um grafo bi-partido no sentido em que os arcos não conectam diretamente dois nós do mesmo tipo, ou seja, lugares só podem se conectar diretamente a transições e vice-versa. Nas redes de Petri, as transições são associadas a eventos. Para que uma transição ocorra algumas condições devem ser satisfeitas. As informações sobre essas condições estão contidas nos lugares. Transições, lugares e certas relações entre eles definem os componentes básicos de uma *Rede de Petri*.

**Definição 3.1 (Rede de Petri)** *Uma Rede de Petri (ou Estrutura de Rede Petri) é um grafo bi-partido ponderado*

$$(P, T, A, \omega)$$

no qual  $P$  é um conjunto finito de lugares;  $T$  é um conjunto finito de transições;  $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$  é o conjunto de arcos de lugares para transições e de transições para lugares no grafo;  $\omega : A \mapsto \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  é a função de ponderação dos arcos.

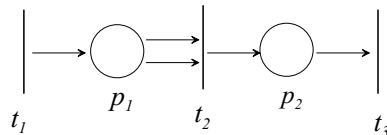
**Exemplo 3.2 ( Rede de Petri)** Considere uma Rede de Petri definida por

$$P = \{p_1, p_2\}, T = \{t_1, t_2, t_3\}, A = \{(t_1, p_1), (p_1, t_2), (t_2, p_2), (p_2, t_3)\}$$

e com os seguintes pesos

$$\omega(t_1, p_1) = 1, \omega(p_1, t_2) = 2, \omega(t_2, p_2) = 1, \omega(p_2, t_3) = 1.$$

A representação gráfica correspondente a essa Rede de Petri é dada pela figura 3.1.



**Figura 3.1 :** Um exemplo de grafo de Rede de Petri.

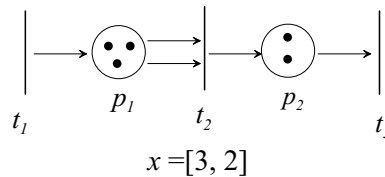
Vale ressaltar que numa Rede de Petri pode-se representar a conexão de dois nós através de múltiplos arcos como mostrado na figura 3.1, ou através de um único arco com um peso representando o número de arcos.

### 3.1.2 Marcação e Espaço de Estados

Partindo da idéia de que transições em uma Rede de Petri representam eventos, para a descrição do comportamento da rede é necessário indicar quando esses eventos podem ocorrer. Essa indicação é feita por meio de fichas que são introduzidas nos lugares e que determinam condições de disparo das transições abaixo delas. O modo pelo qual as fichas são dispostas numa rede definem a *marcação*.

**Definição 3.3 (Rede de Petri marcada)** *Uma Rede de Petri marcada é um conjunto  $(P, T, A, \omega, x)$  no qual  $(P, T, A, \omega)$  é uma Rede de Petri e  $x$  é uma função  $x : P \rightarrow \mathbb{N}$  que define o número de fichas em cada lugar. Usualmente a marcação de uma rede de Petri é representada pelo vetor linha  $\mathbf{x} = [x(p_1), x(p_2), \dots, x(p_n)] \in \mathbb{N}^n$ .*

Numa Rede de Petri, a marcação é usualmente indicada por pontos escuros conforme mostrado na figura 3.2.



**Figura 3.2 :** Rede de Petri Marcada.

Para a descrição de uma rede de Petri é conveniente usar  $I(t_j)$  para representar o conjunto de lugares conectados à entrada da transição  $t_j$  e  $O(t_j)$  para representar o conjunto de lugares conectados à saída da transição  $t_j$ , isto é,

$$I(t_j) = \{p_i \in P | (p_i, t_j) \in A\} \text{ e } O(t_j) = \{p_i \in P | (t_j, p_i) \in A\}.$$

Define-se ainda que

$$\omega(p_i, t_j) = 0 \text{ quando } p_i \notin I(t_j) \text{ e } \omega(t_j, p_i) = 0 \text{ quando } p_i \notin O(t_j).$$

### 3.1.3 Dinâmica das Redes de Petri

**Definição 3.4 (Transição habilitada)** *Uma transição  $t_j \in T$  em uma Rede de Petri é dita estar habilitada se*

$$x(p_i) \geq \omega(p_i, t_j) \text{ para todo } p_i \in I(t_j).$$

Em outras palavras, a transição  $t_j$  na Rede de Petri é habilitada quando o número de fichas em  $p_i$  é maior ou igual ao peso do arco que conecta  $p_i$  a  $t_j$  para todos lugares  $p_i$  que estão conectados à entrada da transição  $t_j$ . Como exemplo, pode-se ver que a transição  $t_2$  do exemplo 3.2 está habilitada.

A marcação, isto é a disposição de fichas, de uma Rede de Petri define o seu estado. Dessa forma a sua dinâmica, ou seja a evolução dos estados de acordo com a ocorrência de eventos, esta relacionada ao fluxo das fichas no interior da rede. Essa dinâmica depende obviamente dos disparos das transições.

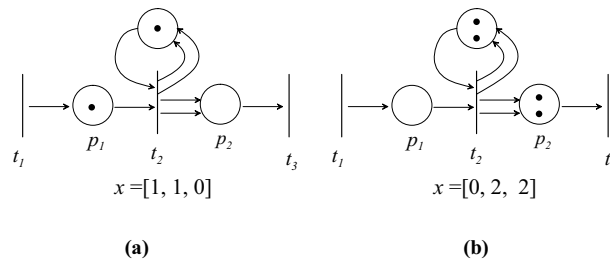
**Definição 3.5 (Dinâmica da Rede de Petri)** *A função de transição de estados  $f : \mathcal{N}^n \times T \rightarrow \mathcal{N}^n$  de uma Rede de Petri  $(P, T, A, \omega, x)$  é definida para a transição  $t_j \in T$  se e somente se*

$$x(p_i) \geq \omega(p_i, t_j) \text{ para todo } p_i \in I(t_j). \quad (3.1)$$

Se  $f(x, t_j)$  é definida, o próximo estado é dado por  $x' = f(x, t_j)$  na qual

$$x'(p_i) = x(p_i) - \omega(p_i, t_j) + \omega(t_j, p_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

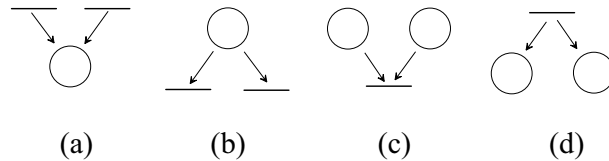
A condição 3.1 assegura que a função de transição de estados é definida somente para as transições que estão habilitadas. Pela equação 3.2, observa-se que o próximo estado depende do peso do arco conectado na entrada do lugar  $p_i$  (o lugar recebe fichas em número igual ao peso do arco) e também do arco que sai de  $p_i$  para a transição  $t_j$  (o lugar perde fichas em número igual ao peso do arco). A figura 3.3 ilustra a dinâmica de um rede simples.



**Figura 3.3 :** A figura (a) mostra a marcação da rede com transição  $t_2$  habilitada. A figura (b) mostra a marcação da rede após o disparo de  $t_2$ .

## 3.2 Grafos a Eventos Temporizados

De uma forma geral, as Redes de Petri são utilizadas para a modelagem de concorrência a recursos e a sincronização de tarefas. Essas situações são mostradas na figura 3.4.



**Figura 3.4 :** Configurações possíveis para fluxo de fichas numa Rede de Petri

Essa figura mostra as situações possíveis para o fluxo de fichas numa Rede de Petri. A concorrência é mostrada em (a) e (b) e a sincronização, em (c) e (d). A situação (a) modela a concorrência ao fornecimento de fichas para um lugar. Numa situação real, isso pode representar processadores que fornecem recursos assincronizadamente a um outro processador. Já a concorrência ao consumo de fichas de um lugar é mostrada em (b), o que modela, por exemplo, a situação em que diversos processadores "disputam" um recurso. Em (c) é ilustrada a sincronização ao consumo de fichas de diversos lugares e a a sincronização ao fornecimento de fichas a diversos lugares é mostrada em (d). Essas situações ocorrem respectivamente, por exemplo, quando um processador necessita que diversas informações estejam disponíveis numa mesma data para iniciar o seu processamento ou quando um processador fornece na mesma data recursos a outros processadores.

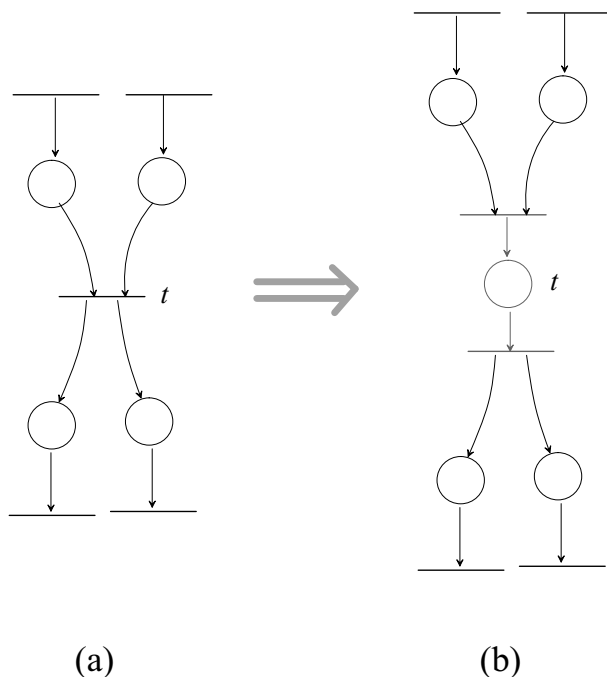
Os grafos a eventos são uma subclasse de Redes de Petri na qual as situações mostradas na figura 3.4 (a) e (b) não podem ocorrer. Isto significa que as situações de concorrência a recursos do SED não existem ou foram resolvidas por alguma política de sincronização. Do ponto de vista estrutural os grafos a eventos apresentam para cada lugar somente um arco de entrada e somente um arco de saída.

A temporização de uma Rede de Petri é importante quando se deseja avaliar o desempenho de um SED como, por exemplo, calcular a taxa de produção do sistema ou verificar se a data em que cada produto é produzido estará de acordo com a especificação. Em um Grafo a Eventos Temporizado a temporização é feita associando-se a cada lugar um tempo de espera para as fichas. Esses grafos permitem modelar e analisar o desempenho de processos temporizados, como, por exemplo, processos de montagens.

**Definição 3.6 (Grafo a Eventos Temporizado - GET)** *Um grafo a Eventos Temporizado é*

uma Rede de Petri na qual cada lugar tem um tempo de espera associado e somente uma transição de entrada e somente uma transição de saída.

A temporização de um GET pode estar associada ao tempo de disparo da transição, no entanto não há nenhuma perda de generalidade se colocarmos a temporização sobre o lugar. A figura 3.5 mostra a transformação de uma transição com atraso de disparo  $t$  em duas transições instantâneas separadas por um lugar com tempo de espera  $t$ .



**Figura 3.5 :** Transformação da temporização de um GET

### 3.2.1 Modelagem de GET através de Dióides

Para os GET, cada transição representa uma determinada família de eventos de mesma natureza e um evento corresponde ao disparo de uma transição. Por exemplo uma família de eventos pode ser a "Máquina  $M$  inicia operação" e um evento associado pode ser a "Máquina  $M$  inicia operação em  $t = 12h$ " (ou seja, a transição disparou em  $t = 12h$ ) ou "Máquina  $M$  inicia operação pela quarta vez" (ou seja, a transição disparou pela quarta vez). Usualmente, os GET são descritos por datadores ou contadores.

Na descrição por datadores, associa-se a cada transição  $x$  uma seqüência de datas de disparos da transição,  $x(k)$ , sendo que  $k$  é o número do disparo. De modo análogo, na descrição por contadores,



associa-se a cada transição  $x$  uma seqüência de contagem de disparos  $x(t)$  sendo que  $t$  é a data do disparo. A análise do comportamento dinâmico de um GET modelado via datadores ou contadores é feita a seguir.

1. Descrição por meio de datadores.

Seja  $x_i(k)$  a data do  $k$ -ésimo disparo da transição  $x_i$  e sejam  $\nu$  e  $s$  o número de fichas e o tempo de espera de um lugar. A partir da figura 3.6, tem-se as seguintes equações:

$$x_n(k) \geq \max(x_m(k), x_l(k)), \quad (3.3)$$

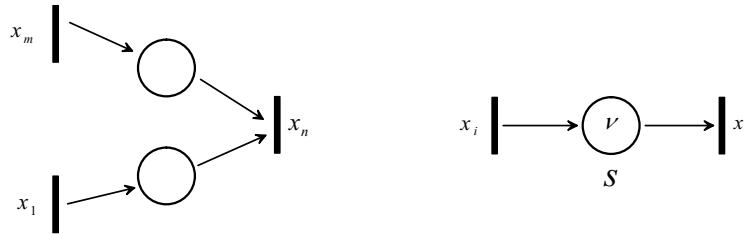
$$x_j(k) \geq x_i(k - \nu) + s. \quad (3.4)$$

2. Descrição por meio de contadores.

Considerando a mesma figura 3.6, seja  $x_i(t)$  o número de disparos de  $x_i$  ocorridos até a data  $t$ , tem-se que:

$$x_n(t) \leq \min(x_m(t), x_l(t)), \quad (3.5)$$

$$x_j(t) \leq x_i(t - s) + \nu. \quad (3.6)$$



**Figura 3.6 :** Algumas configurações possíveis para para as transições de GET

Pode-se observar ainda utilizando a figura 3.6 que a descrição por datador dada pelas inequação 3.3, significa que o  $k$ -ésimo disparo da transição  $x_n$  só pode ocorrer após o  $k$ -ésimo disparo as transições  $x_m$  e  $x_l$ . Já a descrição por contadores, inequação 3.5, significa que na data  $t$  o número de disparos da transição  $x_n$  é sempre menor ou igual ao número disparo as transições  $x_m$  e  $x_l$ . Além disso, as equações 3.4 e 3.6 mostram respectivamente que o número de fichas em um dado lugar ocasiona um avanço nos disparos e que o tempo de espera ocasiona um retardo na data em relação às transições  $x_i$  e  $x_j$ .

Vale ressaltar que a descrição via contador, dada por  $t \mapsto c(t)$  não pode ser definida de maneira única a partir da descrição via datador, dada por  $k \mapsto d(k)$ . Contudo, para se assegurar uma representação única, adota-se a definição seguinte:

$$c(t) = \sup\{k | d(k) \leq t\} \text{ e } d(k) = \sup\{t | c(t) \leq k\}. \quad (3.7)$$

Nessa definição, *sup* é o supremo do conjunto.

Observa-se que os operadores *min*, *max* e " + " tem um papel fundamental na modelagem dinâmica de um GET. Esses operadores permitem, conforme já foi dito, uma descrição linear do GET via álgebra de dióides. Dessa forma, o comportamento dinâmico via contadores ou datadores pode ser descrito de maneira natural utilizando os dióides  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$  e  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$  respectivamente (ver definição desses dióide no capítulo 2 exemplo 2.11).

Uma maneira conveniente de se trabalhar com datadores é através da transformação  $\gamma$ . A partir desse ponto,  $d(\gamma)$  denotará a transformação  $\gamma$  para um datador  $d$  que é dada por:

$$d(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} d(k) \gamma^k.$$

Os elementos resultantes das transformações  $\gamma$  são séries formais (definição 2.35, séries formais em dióides) com coeficientes em  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ . Esse conjunto munido das operações de adição e multiplicação introduzidas no capítulo 2, com elemento nulo  $\varepsilon(\gamma)$ , dado pela série em que todos coeficientes são iguais a  $-\infty$ , e elemento identidade  $e(\gamma) = \gamma^* = \gamma^0 \oplus \gamma \oplus \gamma^1 \oplus \dots$ , é também um dióide (lema 2.36, dióide de séries formais). Esse dióide é denotado  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$ .

De modo análogo, pode-se definir a transformação  $\delta$  para os contadores:

$$c(\delta) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} c(t) \delta^t$$

sendo que  $c(t)$  é um contador. O conjunto das séries formais  $c(\delta)$  munido das operações definidas de maneira análoga ao que foi feito anteriormente é também um dióide que é representado por  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[[\delta]]$ .

Vale lembrar que os operadores  $\gamma$  e  $\delta$  aqui têm papel similar ao do operador de retardo  $z^{-1}$  em teoria de sistemas dinâmicos lineares a tempos discretos, ou seja,

$$\begin{aligned} y(k) &= x(k-1) \iff y(\gamma) = \gamma x(\gamma) \\ y(t) &= x(t-1) \iff y(\delta) = \delta x(\delta). \end{aligned}$$

### 3.2.2 Descrição bidimensional: dióide $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

Não é difícil ver que as funções  $d(k)$  e  $c(t)$ , que representam respectivamente datadores e contadores para uma transição de um GET, são monotônicas. Isso implica que as trajetórias correspondentes devem ser tais que

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{Z}, \quad & \{d(k) \geq d(k-1)\} \Leftrightarrow \{d(k) = d(k) \oplus d(k-1)\}, \\ \forall t \in \mathbb{Z}, \quad & \{c(t+1) \geq c(t)\} \Leftrightarrow \{c(t) = c(t) \oplus c(t+1)\}. \end{aligned}$$

É importante observar que a ordem natural de dióide é invertida entre  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$  e  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ .

Conforme mostrado na seção anterior, a partir das funções  $d(k)$  e  $c(t)$ , podem-se construir as séries  $d(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} d(k)\gamma^k$  e  $c(\delta) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} c(t)\delta^t$  pertencentes aos dióides  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$  e  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[[\delta]]$  respectivamente.

Aplicando as transformações em  $\gamma$  e  $\delta$ , obtêm-se as seguintes relações:

$$d(\gamma) = d(\gamma) \oplus \gamma d(\gamma) \Leftrightarrow d(\gamma) = \gamma^* d(\gamma), \quad (3.8)$$

$$c(\delta) = c(\delta) \oplus \delta^{-1} c(\delta) \Leftrightarrow c(\delta) = (\delta^{-1})^* c(\delta). \quad (3.9)$$

Ou seja, a característica de monotonia das séries associadas a um GET implica na consideração dos subconjuntos  $\gamma^* \overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$  e  $(\delta^{-1})^* \overline{\mathbb{Z}}_{min}[[\delta]]$  de  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$  e  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[[\delta]]$  respectivamente. Isso equivale a uma filtragem das trajetórias de modo a torná-las monotônicas. Será mostrado a seguir que esses dois subconjuntos são também dióides.

**Teorema 3.7 (Baccelli et al. (1992))** *Considere o dióide  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$ .*

1. *O subconjunto  $\gamma^* \overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$  dos elementos da forma  $\gamma^* d(\gamma)$  é um dióide de elemento neutro  $\varepsilon(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon \gamma^k$  para a adição e  $\gamma^*$  para a multiplicação. Esse dióide será representado por  $\mathcal{D}[[\gamma]]$ .*
2. *Seja a congruência  $\equiv$  seguinte definida em  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$  por*

$$d_1(\gamma) \equiv d_2(\gamma) \iff \gamma^* d_1(\gamma) = \gamma^* d_2(\gamma).$$

*Cada classe do dióide quociente  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]_{/\equiv}$  contém um elemento supremo que pertence a  $\mathcal{D}[[\gamma]]$ .*

3. Os dióides  $\mathcal{D}[\gamma]$  e  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]_{/\equiv}$  são isomórficos.

**Demonstração:**

1. O conjunto  $\mathcal{D}[\gamma]$  é fechado para a soma e para o produto de  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]$  e tem  $\varepsilon(\gamma)$  como elemento neutro da adição e  $\gamma^*$  como elemento neutro da multiplicação. Esse subconjunto tem portanto uma estrutura de dióide completo.<sup>1</sup>
2. Os elementos  $x$  e  $\gamma^*x$  pertencem a uma mesma classe de equivalência e  $\gamma^*x \succeq x$  pois  $\gamma^* \succeq e$ . Seja  $y$  pertencente à mesma classe que  $x$ . Tem-se que  $\gamma^*y = \gamma^*x$ . Como  $\gamma^*y \succeq y$  logo  $y \preceq \gamma^*x$ . Portanto  $\gamma^*x$  é o maior representante da classe.
3. Há uma correspondência biunívoca entre uma classe de equivalência (classe de elementos de  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]$ ) e seu representante em  $\mathcal{D}[\gamma]$  (que pode se chamado representante canônico). Além disso, essa correspondência é um isomorfismo pois adicionar e multiplicar duas classes equivale a multiplicar os respectivos representantes canônicos (ver lema 2.23 sobre dióide quociente).

■

Pode-se mostrar utilizando o mesmo raciocínio que  $(\delta^{-1})^*\overline{\mathbb{Z}}_{min}[\delta]$  também é um dióide. Além disso,  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[\delta]_{/\equiv}$  é um dióide quociente isomórfico à  $\mathcal{D}[\gamma]$  sendo que a congruência  $\equiv$  é definida aqui por:

$$c_1(\delta) \equiv c_2(\delta) \iff (\delta^{-1})^*c_1(\delta) = (\delta^{-1})^*c_2(\delta).$$

**Regras de simplificação para a operação de elementos em  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]_{/\equiv}$  e  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[\delta]_{/\equiv}$**  Como as trajetórias de um GET são representadas por séries de  $\mathcal{D}[\gamma]$  e como esse dióide é isomórfico a  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]_{/\equiv}$ , pode-se manipular indiferentemente as séries de  $\mathcal{D}[\gamma]$  ou as classes de  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]_{/\equiv}$ .

Como simplificação da notação os colchetes  $[\cdot]_{/\equiv}$ , representativos de uma classe de elementos de  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]$  segundo a relação  $\equiv$ , serão omitidos. Mas é importante ter sempre em mente que os elementos manipulados serão sempre as classes.

Lembrando que em  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]$  tem-se que

$$\gamma^*(\gamma^n \oplus \gamma^{n'}) = \gamma^*\gamma^{\min(n,n')},$$

<sup>1</sup>Entretanto, como  $\mathcal{D}[\gamma]$  e  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]$  não tem os mesmos elementos neutros,  $\mathcal{D}[\gamma]$  não é um sub-dióide de  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]$ .

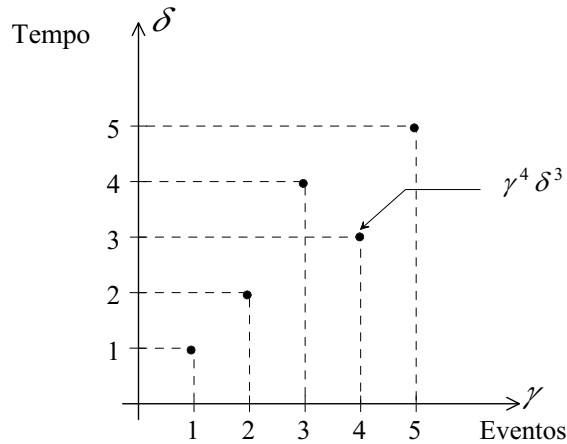
obtem-se a regra de simplificação seguinte em  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]_{/\equiv}$ :

$$\gamma^n \oplus \gamma^{n'} = \gamma^{\min(n,n')}. \quad (3.10)$$

Procedendo de maneira análoga, e utilizando a simplificação da notação (que consiste em não fazer distinção entre um elemento de uma classe e a própria classe), obtém-se a regra de simplificação seguinte em  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[[\delta]]_{/\equiv}$

$$\delta^t \oplus \delta^{t'} = \delta^{\max(t,t')}. \quad (3.11)$$

Geometricamente, observa-se que, de fato, os dióides  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]_{/\equiv}$  e  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[[\delta]]_{/\equiv}$  são isomórficos e podem ser representados através de séries em duas variáveis  $\gamma, \delta$  (Baccelli et al., 1992; Cohen et al., 1989). Essa descrição bidimensional permite unificar as descrições em datadores e em contadores a partir de séries formais com duas variáveis comutativas,  $\gamma$  e  $\delta$ , com expoentes em  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$  (que representam respectivamente os disparos e as datas desses disparos) e com coeficientes booleanos. O conjunto dessas séries formais nas variáveis  $\gamma$  e  $\delta$  munidos das operações de soma e multiplicação com elemento nulo  $\varepsilon(\gamma, \delta)$  (o que corresponde a uma série na qual todos os elementos são iguais a  $\varepsilon$ ) e elemento identidade  $e(\gamma, \delta) = \gamma^0 \delta^0$  é um dióide que é representado por  $\mathcal{B}[[\gamma, \delta]]$ . Um elemento de  $\mathcal{B}[[\gamma, \delta]]$  é representado graficamente por uma coleção de pontos de  $\mathbb{Z}^2$ . Por exemplo, o elemento  $X(\gamma, \delta) = \gamma\delta \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^3\delta^4 \oplus \gamma^4\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^5$  é mostrado na Figura 3.7.



**Figura 3.7 :** Um elemento do dióide  $\mathbb{B}[[\gamma\delta]]$

Conforme já foi dito, as descrições em contadores e em datadores envolvem sempre trajetórias monotônicas. A partir das equações 3.8 e 3.9, sabe-se que uma trajetória monotônica em  $X(\gamma, \delta)$

em  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  deve satisfazer

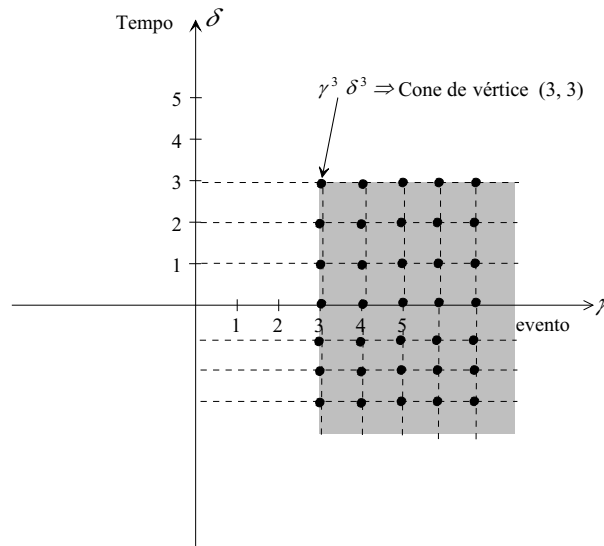
$$\begin{aligned} X(\gamma, \delta) &\succeq \gamma X(\gamma, \delta), \\ X(\gamma, \delta) &\succeq \delta^{-1} X(\gamma, \delta), \end{aligned}$$

Isso equivale a dizer que  $X(\gamma, \delta) \succeq (\gamma \oplus \delta^{-1})X(\gamma, \delta)$ .

Finalmente, utilizando o teorema 2.38, tem-se o resultado seguinte

$$X(\gamma, \delta) = (\gamma \oplus \delta^{-1})^* X(\gamma, \delta). \quad (3.12)$$

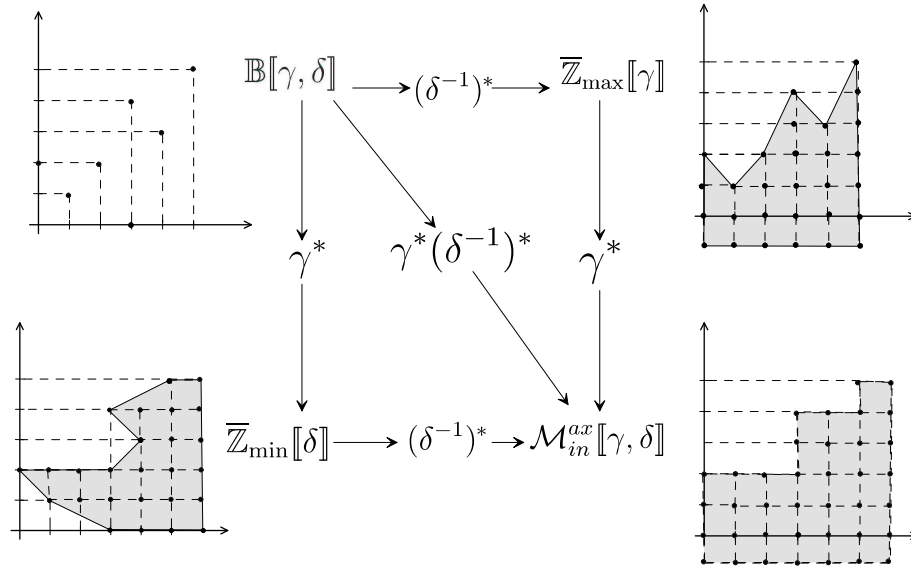
Ou seja, o subconjunto das trajetórias não-decrescentes é dado por  $(\gamma \oplus \delta^{-1})^* \mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$ . Esse subconjunto é um dióide que é simbolizado por  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ . Dessa forma os elementos de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  são descritos<sup>2</sup> como somas de séries na forma  $\gamma^n \delta^t (\gamma^* \delta^{-1})^* = \gamma^n \delta^t \bigoplus_{i \geq 0} \gamma^i (\delta^{-1})^*$ . Cada parcela  $\gamma^n \delta^t \gamma^i (\delta^{-1})^*$  representa uma semi-reta paralela ao eixo das ordenadas com início em  $(n + i, t)$ . Assim, a trajetória é representada por um conjunto de semi-retas com início em  $(n, t)$ ,  $(n + 1, t)$ ,  $(n + 2, t)$ , etc. Graficamente, considera-se não mais um ponto de coordenadas  $(n, t)$  mas um "cone Sudeste" de vértice  $(n, t)$  conforme mostrado na figura 3.8. Essa transformação tem por objetivo de preservar no dióide somente as séries monotônicas não-decrescentes. O procedimento descrito acima



**Figura 3.8 :** Representação no dióide  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  do elemento  $\gamma^3 \delta^3$ .

ilustra apenas uma das maneiras de se obter o dióide  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  partindo do dióide  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  já que há outras maneiras de obter esse dióide a partir de  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$ . A figura 3.9 ilustra as diversas maneiras possíveis de se obter o dióide  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  partindo do dióide  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$ . Observa-se que o maior e o

<sup>2</sup>Notar que como o dióide é comutativo tem-se que  $(\gamma \oplus \delta^{-1})^* = \gamma^* (\delta^{-1})^*$ .



**Figura 3.9 :** Maneiras de se obter o dióide  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

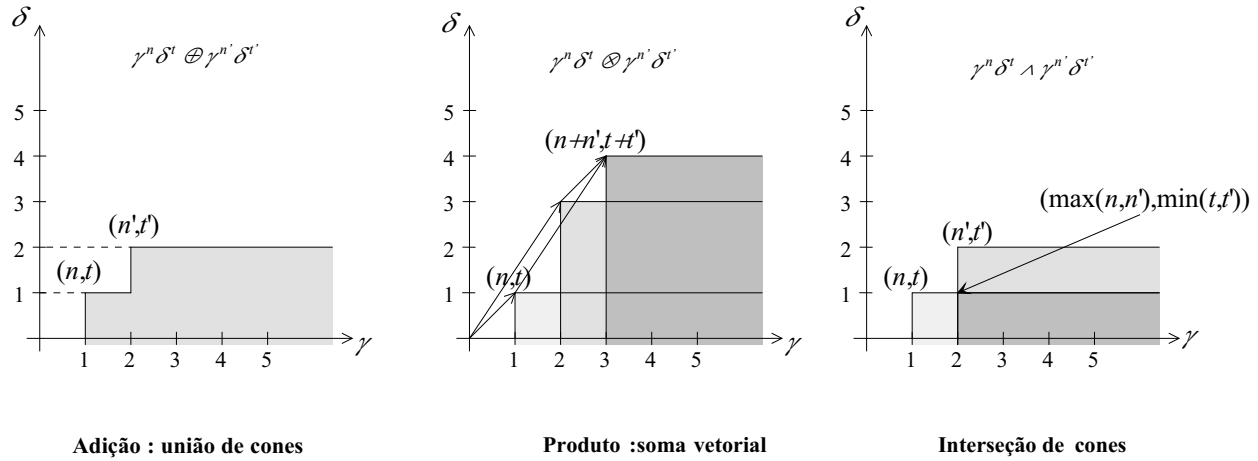
menor elemento de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  são dados respectivamente por  $\varepsilon = \gamma^{+\infty}\delta^{-\infty}$  e  $\top = \gamma^{-\infty}\delta^{+\infty}$ . Em um contexto de modelagem de GET,  $\varepsilon$  é o elemento menos restritivo e significa que todos os disparos uma dada transição ocorreram em  $t = -\infty$ ;  $\top$  é o mais restritivo e significa que nenhum disparo ocorreu (nenhum disparo até  $t = +\infty$ ).

Do dióide  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ , podem-se deduzir algumas expressões para o elemento neutro da multiplicação, como

$$e = \gamma^*(\delta^{-1})^* = \gamma^* = (\delta^{-1})^* = \gamma^0 = \delta^0 = \gamma^0\delta^0.$$

As operações de adição e de multiplicação e de limite inferior em  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  podem ser interpretadas graficamente conforme mostrado a seguir.

1. A soma de dois monômios  $\gamma^n\delta^t$  e  $\gamma^{n'}\delta^{t'}$  é representada graficamente pela união dos "cones a sudeste" de vértices  $(n, t)$  e  $(n', t')$  respectivamente.
2. O produto de dois monômios  $\gamma^n\delta^t$  e  $\gamma^{n'}\delta^{t'}$  é representado pelo cone de vértice  $(n + n', t + t')$  (o que corresponde ao cone cujo vértice é a soma vetorial dos vértices  $(n, t)$  e  $(n', t')$ ).
3. O ínfimo de dois monômios  $\gamma^n\delta^t$  e  $\gamma^{n'}\delta^{t'}$  é dado pela interseção dos "cones a sudeste" de vértices  $(n, t)$  e  $(n', t')$  respectivamente.



**Figura 3.10 :** Representação gráfica das operações do dióide  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

Finalmente, obtêm-se as seguinte regras de simplificação no dióide  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ :

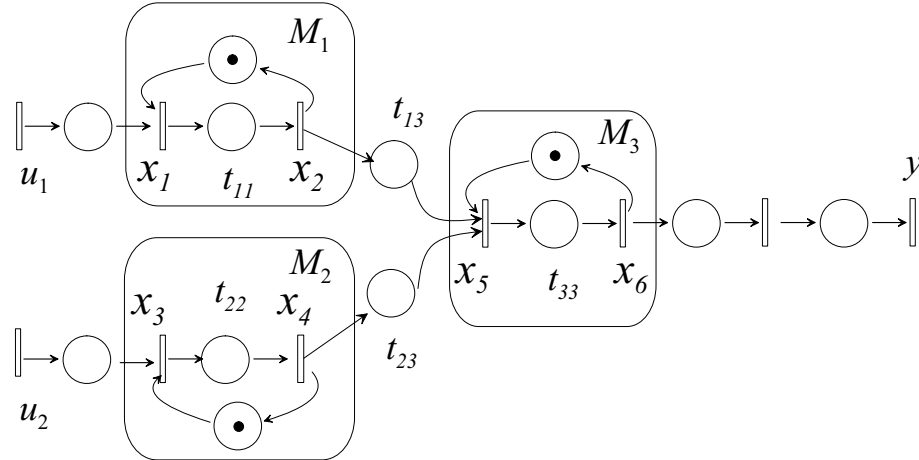
$$\begin{aligned}\gamma^n \delta^t \oplus \gamma^{n'} \delta^t &= \gamma^{\min(n, n')} \delta^t, \\ \gamma^n \delta^t \oplus \gamma^n \delta^{t'} &= \gamma^n \delta^{\max(t, t')}, \\ \gamma^n \delta^t \wedge \gamma^{n'} \delta^{t'} &= \gamma^{\max(n, n')} \delta^{\min(t, t')}.\end{aligned}$$

### 3.2.3 Matriz de Transferência

Sabe-se das seções precedentes que se pode associar a cada transição de um GET uma seqüência de datadores  $x = \{x(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . Em um problema real é importante saber descrever dinamicamente esses datadores através de equações para, por exemplo, fazer previsões, avaliar desempenho ou efetuar o controle de um sistema.

Considere o exemplo 3.11 que modela um sistema de manufatura com 3 máquinas ( $M_1$  a  $M_3$ ) no qual  $u_i$ ,  $i = 1, 2$ , são as datas de chegada das matérias-primas ao sistema e  $y$  é a data da saída do produto final;  $t_{ii}$  é a duração do processamento da máquina  $i$  e  $t_{ij}$ ,  $i \neq j$ , é o tempo que um material gasta para se deslocar da máquina  $i$  até a máquina  $j$ . Os datadores  $x_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) nesse





**Figura 3.11 :** Um sistema de manufatura com 3 máquinas.

GET podem ser modelados utilizando o dióide  $\mathbb{Z}_{\max}$  conforme mostrado na equação 3.13.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(k) = x_2(k-1) \oplus u_1(k) \\ x_2(k) = t_{11} \otimes x_1(k) \\ x_3(k) = x_4(k-1) \oplus u_2(k) \\ x_4(k) = t_{22} \otimes x_3(k) \\ x_5(k) = t_{13} \otimes x_2(k) \oplus t_{23} \otimes x_4(k) \oplus x_6(k-1) \\ x_6(k) = t_{33} \otimes x_5(k) \\ y(k) = x_6(k) \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Lembrando que a variável  $\gamma$  do dióide dos datadores,  $\mathcal{D}[\gamma]$ , pode ser interpretada como um operador de retardo, ou seja  $y(\gamma) = \gamma x(\gamma) \Leftrightarrow \forall k, y(k) = x(k-1)$ , o sistema de equações dadas em 3.13 é descrito no dióide  $\mathcal{D}[\gamma]$  como<sup>3</sup>

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(\gamma) = \gamma x_2(\gamma) \oplus u_1(\gamma) \\ x_2(\gamma) = t_{11} x_1(\gamma) \\ x_3(\gamma) = \gamma x_4(\gamma) \oplus u_2(\gamma) \\ x_4(\gamma) = t_{22} x_3(\gamma) \\ x_5(\gamma) = t_{13} x_2(\gamma) \oplus t_{23} x_4(\gamma) \oplus \gamma x_6(\gamma) \\ x_6(\gamma) = t_{33} x_5(\gamma) \\ y(\gamma) = x_6(\gamma). \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Fazendo as substituições apropriadas e as simplificações usando o teorema 2.38, obtêm-se as soluções

<sup>3</sup>Para simplificar a notação o operador  $\otimes$  será omitido nessa tese sempre que não houver confusão.

mínimas

$$\begin{cases} x_2(\gamma) = & t_{11}(t_{11}\gamma)^*u_1(\gamma) \\ x_4(\gamma) = & t_{22}(t_{22}\gamma)^*u_2(\gamma) \\ x_6(\gamma) = & t_{33}(t_{33}\gamma)^*(t_{13}x_2(\gamma) \oplus t_{23}x_4(\gamma)) \\ & = t_{33}(t_{33}\gamma)^*\{t_{13}t_{11}(t_{11}\gamma)^*u_1(\gamma) \oplus t_{23}t_{22}(t_{22}\gamma)^*u_2(\gamma)\} \\ y(\gamma) = & x_6(\gamma). \end{cases}$$

Assim, a solução mínima para a saída do sistema é dada por:

$$y(\gamma) = t_{33}(t_{33}\gamma)^*[t_{13}t_{11}(t_{11}\gamma)^* \quad t_{23}t_{22}(t_{22}\gamma)^*][u_1(\gamma) \quad u_2(\gamma)]^T$$

Por exemplo, para  $t_{11} = 1$ ,  $t_{22} = 2$ ,  $t_{33} = 1$  e  $t_{13} = t_{23} = 1$  e assumindo que  $u_1 = u_2 = e$ , a saída do sistema é dada por <sup>4</sup>

$$y(\gamma) = 3(1\gamma)^* \oplus 4(2\gamma)^* = 4(2\gamma)^* = 4(e \oplus 2\gamma \oplus 4\gamma^2 \oplus 6\gamma^3 \dots). \quad (3.15)$$

Dessa forma, a anti-transformada para  $y(\gamma)$  é dada por

$$y(k) = 4 + 2k, \quad (3.16)$$

sendo que  $y(k) = -\infty$  se  $k < 0$ .

Observa-se, segundo a equação 3.16, que a resposta impulsiva do sistema apresenta um comportamento periódico, sendo que cada ciclo de produção tem duração de 2 unidades de tempo (sai um produto do sistema a cada 2 unidades de tempo).

O resultado obtido para o GET da figura 3.11 pode ser generalizado a partir representação matricial seguinte usando o dióide  $\mathcal{D}[\gamma]$

$$\begin{cases} X(\gamma) = & A(\gamma)X(\gamma) \oplus B(\gamma)U(\gamma) \\ Y(\gamma) = & C(\gamma)X(\gamma), \end{cases} \quad (3.17)$$

na qual  $X(\gamma) \in (\mathcal{D}[\gamma])^n$ ,  $U(\gamma) \in (\mathcal{D}[\gamma])^p$  e  $Y(\gamma) \in (\mathcal{D}[\gamma])^m$  são os vetores de estado, entrada e de saída do sistema respectivamente;  $A(\gamma) \in (\mathcal{D}[\gamma])^{n \times n}$ ,  $B(\gamma) \in (\mathcal{D}[\gamma])^{n \times p}$  e  $C(\gamma) \in (\mathcal{D}[\gamma])^{m \times n}$  são matrizes. Resolvendo as equações de estado (3.17) utilizando o teorema 2.38, obtém-se a relação entre a entrada e a saída do sistema

$$Y(\gamma) = C(\gamma)A(\gamma)^*B(\gamma)U(\gamma) = H(\gamma)U(\gamma), \quad (3.18)$$

sendo que  $H(\gamma) = C(\gamma)A(\gamma)^*B(\gamma) \in (\mathcal{D}[\gamma])^{m \times p}$  é chamada de matriz de transferência do sistema. Vale observar que ela é igual a resposta impulsiva do sistema, isto é,  $Y(\gamma) = H(\gamma)$  se  $U(\gamma) = e$ .

<sup>4</sup>Num contexto de sistemas de manufatura,  $u = e$  significa que toda matéria prima do sistema está disponível em  $t = 0$ . Matematicamente, isso equivale a aplicar um impulso na entrada do sistema.

### 3.2.4 Racionalidade, Realizabilidade e Periodicidade

Os resultados apresentados aqui são obtidos para o dióide  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ , mas são estendidos naturalmente ao dióide  $\mathcal{D}[\gamma]$  pois esses dióides são isomórficos. Para maiores detalhes consultar Baccelli et al. (1992) e Gaubert (1992). O exemplo apresentado utilizando a figura 3.11 sugere que a função de transferência (ou resposta impulsiva) de GET apresenta comportamento periódico. De fato, de uma maneira geral, a matriz de transferência de um GET contém elementos que podem ser representados através de séries periódicas (Baccelli et al., 1992). Esse fato está relacionado à operação estrela da matriz  $A(\gamma)$  na expressão da função de transferência dada em 3.18.

**Definição 3.8 (Periodicidade)** *Uma série  $h(\gamma, \delta) \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  é dita ser periódica se existem dois polinômios  $p(\gamma, \delta)$  e  $q(\gamma, \delta)$  de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ , dados por*

$$p(\gamma) = \bigoplus_{i=0}^{\alpha} \gamma^{n_i} \delta^{t_i} \quad e \quad q(\gamma) = \bigoplus_{j=0}^{\beta} \gamma^{N_j} \delta^{T_j},$$

e um monômio  $\gamma^r \delta^s$  com  $r, s \geq 0$  tais que

$$h(\gamma, \delta) = p(\gamma, \delta) \oplus q(\gamma, \delta)(\gamma^r \delta^s)^*.$$

Uma matriz  $H(\gamma, \delta)$  é dita ser periódica se todos seus elementos são periódicos.

Mostra-se em Baccelli et al. (1992) que uma série  $h(\gamma)$  no dióide  $\mathcal{D}[\gamma]$  pode ser representada por

$$p(\gamma) \oplus q(\gamma)\gamma^\nu (s\gamma^r)^*. \quad (3.19)$$

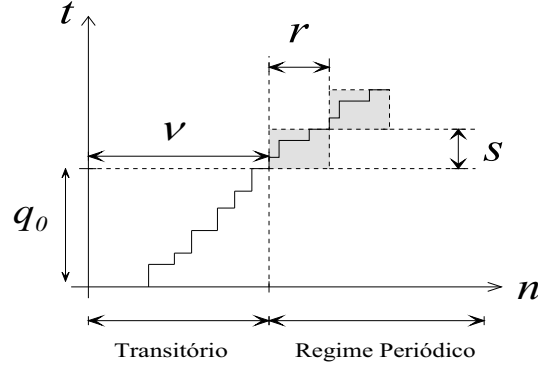
sendo que  $p(\gamma) = \bigoplus_{i=0}^{\nu-1} p_i \gamma^i$ ,  $p_i \in \mathbb{N}$  e  $q(\gamma) = \bigoplus_{j=0}^{r-1} q_j \gamma^j$ ,  $q_j \in \mathbb{N}$  são polinômios e os parâmetros  $\nu$ ,  $s$  e  $r$  são respectivamente o comprimento do transitório, a duração e o comprimento do regime permanente. Esses parâmetros pode ser interpretados num contexto de sistema de produção, considerando um estoque infinito de matéria-prima:

- $\nu$ : número de itens produzidos até que o sistema atinja um comportamento cíclico;
- $s$ : duração do ciclo de produção;
- $r$ : número de itens produzidos por ciclo.

A figura 3.12 ilustra graficamente o comportamento de uma série periódica. Vale ressaltar que pode-se também representar a série  $h(\gamma)$  utilizando o dióide  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  (que é isomórfico ao dióide  $\mathcal{D}[\gamma]$ ) como:

$$p(\gamma, \delta) \oplus q(\gamma, \delta)\gamma^\nu (\gamma^r \delta^s)^*, \quad (3.20)$$

sendo que  $p(\gamma, \delta) = \bigoplus_{i=0}^{\nu-1} \gamma^i \delta^{p_i}$ ,  $p_i \in \mathbb{N}$  e  $q(\gamma, \delta) = \bigoplus_{j=0}^{r-1} \gamma^j \delta^{q_j}$ ,  $q_i \in \mathbb{N}$ .



**Figura 3.12 :** Série  $h(\gamma)$  no dióide  $\mathcal{D}[[\gamma]]$ .

**Definição 3.9 (Causalidade)** Uma série  $h(\gamma, \delta) \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  é dita ser causal se  $h(\gamma, \delta) = \varepsilon(\gamma, \delta)$  (a série é nula) ou se  $val_\gamma(h(\gamma, \delta)) \geq 0$  e  $h(\gamma, \delta) \succeq \gamma^{val_\gamma(h(\gamma, \delta))}$ .

Dessa forma  $\gamma\delta^{-2} \oplus \gamma^3\delta^3$  é um elemento não-causal de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ , pois o termo  $\gamma\delta^{-2}$  diz que o disparo número 1 ocorre em data negativa. Graficamente, pode-se dizer que um elemento de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  é causal se os seus vértices pertencem ao primeiro quadrante do plano  $\mathbb{Z}^2$ .

**Notação 3.10** ( $\mathcal{M}_{in}^{ax+}[[\gamma, \delta]]$ ) O conjunto das séries causais de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  é fechado para a soma e para o produto em  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ . Esse conjunto forma um sub-dióide completo de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  simbolizado por  $\mathcal{M}_{in}^{ax+}[[\gamma, \delta]]$ . Observar que o elemento máximo de  $\mathcal{M}_{in}^{ax+}[[\gamma, \delta]]$  é  $\delta^*$ .

**Definição 3.11 (Racionalidade)** Um elemento  $h(\gamma, \delta) \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  é dito racional se seu representante mínimo pertence ao fechamento racional do conjunto  $\{\gamma, \delta, e, \varepsilon\}$ , isto é, pode ser descrito através de somas, produtos e de estrelas de elemento do conjunto  $\{\gamma, \delta, e, \varepsilon\}$ . Uma matriz é dita ser racional se todos seus elementos são racionais. O conjunto das séries racionais de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  é um sub-dióide de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  simbolizado por  $\mathcal{M}_{in}^{axrat}[[\gamma, \delta]]$ .

Observa-se que por definição um elemento racional é também causal pois todos seus vértices pertencem ao primeiro quadrante do plano  $\mathbb{Z}^2$ .

**Definição 3.12 (Realizabilidade)** Uma matriz  $H(\gamma, \delta) \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^{p \times m}$  é dita ser realizável se existem quatro matrizes  $A_1, A_2, B$  e  $C$  de dimensões respectivamente  $n \times n$ ,  $n \times n$ ,  $n \times m$  e  $p \times n$  com coeficientes no conjunto  $\{\varepsilon, e\}$  tais que  $H(\gamma, \delta) = C(\gamma A_1 \oplus \delta A_2)^* B$ .

Em outras palavras, essa definição diz que uma matriz  $H(\gamma, \delta) \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^{p \times m}$  é realizável se se pode construir um GET tal que sua função de transferência seja igual a  $H(\gamma, \delta)$ .

**Teorema 3.13 (Equivalência entre realizabilidade, racionalidade e periodicidade)** *Seja uma matriz  $H(\gamma, \delta) \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^{p \times m}$ . As afirmações seguintes são equivalentes.*

- (i)  $H(\gamma, \delta)$  é realizável
- (ii)  $H(\gamma, \delta)$  é racional.
- (iii)  $H(\gamma, \delta)$  é periódica e causal.

A demonstração desse teorema é dada em Baccelli et al. (1992).

No estudo de GET modelados através de dióides, utilizam-se sempre séries causais. Os resultados apresentados a seguir são obtidos de Cottenceau (1999).

**Propriedade 3.14.** *O conjunto das séries periódicas e causais de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  é fechado para a soma, o produto e a estrela de Kleene.*

**Proposição 3.15.** *A aplicação canônica  $\text{Id}_{|_+} : \mathcal{M}_{in}^{ax+}[[\gamma, \delta]] \rightarrow \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  é residuável. Seu resíduo será simbolizado por  $\text{Pr}_+$ .*

O cálculo prático de  $\text{Pr}_+$  para uma série  $h(\gamma, \delta) \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  pode ser obtido de modo imediato. Seja  $h(\gamma, \delta) = \bigoplus_{i \in I} s(n_i, t_i) \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$ .  $\text{Pr}_+(h(\gamma, \delta))$  é obtido simplesmente retirando de  $h(\gamma, \delta)$  os monômios não causais, ou seja, aqueles com expoentes negativos. Assim,

$$\text{Pr}_+(h(\gamma, \delta)) = \text{Pr}_+\left(\bigoplus_{i \in I} h(n_i, t_i) \gamma^{n_i} \delta^{t_i}\right) = \bigoplus_{i \in I} h_+(n_i, t_i) \gamma^{n_i} \delta^{t_i},$$

na qual

$$h_+(n_i, t_i) = \begin{cases} h(n_i, t_i) & \text{se } (n_i, t_i) \geq (0, 0), \\ \varepsilon & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Exemplo 3.16 (Cálculo de  $\text{Pr}_+$  para um elemento periódico)**  $\text{Pr}_+(\gamma^{-1} \delta^{-1} (\gamma \delta)^*) = \text{Pr}_+(\gamma^{-1} \delta^{-1} \oplus e \oplus \gamma^1 \delta^1 \oplus \dots) = (\gamma \delta)^*$ . Graficamente, o representante de  $\text{Pr}_+(s)$  conserva somente os vértices do representante de  $s$  contidos no primeiro quadrante do plano  $\mathbb{Z}^2$ .  $\diamond$

Finalmente, é importante notar que uma série  $h(\gamma, \delta)$  é causal se ela é invariante pela aplicação  $\text{Pr}_+$ , ou seja

$$h(\gamma, \delta) \in \mathcal{M}_{in}^{ax+}[[\gamma, \delta]] \iff h(\gamma, \delta) = \text{Pr}_+(h(\gamma, \delta)).$$

---

<sup>5</sup> $I : V \mapsto W$ , com  $V \subset W$  e  $\forall x \in V \ I(x) = x$ .

### 3.2.5 Propriedades Assintóticas

Considerando um GET que modela um sistema de produção, em que a saída é dada por  $y(\gamma, \delta) = h(\gamma, \delta)$  no dióide  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ , pode-se perguntar qual é a taxa de produção do sistema considerando que o tempo de operação é muito grande. Matematicamente, deseja-se calcular o valor do limite  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{y(k)}$ . Como  $h(\gamma, \delta)$  é periódico segundo o teorema 3.13, a definição 3.8 permite escrever que

$$h(k+r) = h(k) + s \text{ para todo } k \geq \nu.$$

Dessa forma,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{y(k)} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{a+lr}{h(a+lr)} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{a+lr}{h(a)+ls} = \frac{r}{s}$$

sendo que  $a \in [\nu, \nu+r-1]$  e  $l = \lfloor \frac{k-\nu}{r} \rfloor$  e a função  $\lfloor x \rfloor$  representa a parte inteira de  $x$ . Esse resultado motiva a definição seguinte.

**Definição 3.17 (Inclinação assintótica)** *A inclinação assintótica de uma série periódica  $h(\gamma, \delta) = p(\gamma, \delta) \oplus q(\gamma, \delta)\gamma^\nu(\gamma^r\delta^s)^*$  é simbolizada por  $\sigma_\infty(h(\gamma, \delta))$  e é definida como a razão  $\sigma_\infty(h(\gamma, \delta)) = r/s$ .*

**Teorema 3.18.** *O conjunto das séries periódicas de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  é fechado para a soma, o produto, o ínfimo e para a residuação. Além disso, para duas séries  $h_1(\gamma, \delta)$  e  $h_2(\gamma, \delta)$  periódicas não degeneradas (tais que  $r_1, r_2 \neq 0$  e  $s_1, s_2 \neq 0$ ), obtêm-se os resultados seguintes:*

$$\sigma_\infty(h_1(\gamma, \delta) \oplus h_2(\gamma, \delta)) = \min(\sigma_\infty(h_1(\gamma, \delta)), \sigma_\infty(h_2(\gamma, \delta))), \quad (3.21)$$

$$\sigma_\infty(h_1(\gamma, \delta) \otimes h_2(\gamma, \delta)) = \min(\sigma_\infty(h_1(\gamma, \delta)), \sigma_\infty(h_2(\gamma, \delta))), \quad (3.22)$$

$$\sigma_\infty(h_1(\gamma, \delta) \wedge h_2(\gamma, \delta)) = \max(\sigma_\infty(h_1(\gamma, \delta)), \sigma_\infty(h_2(\gamma, \delta))). \quad (3.23)$$

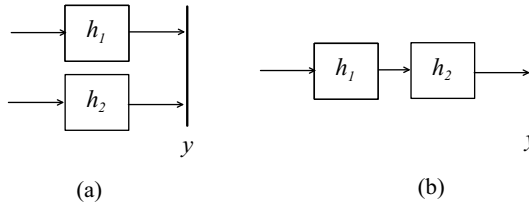
Se  $\sigma_\infty(h_1(\gamma, \delta)) \leq \sigma_\infty(h_2(\gamma, \delta))$  então

$$\sigma_\infty(h_2(\gamma, \delta) \setminus h_1(\gamma, \delta)) = \sigma_\infty(h_1(\gamma, \delta)), \quad (3.24)$$

senão,  $h_2(\gamma, \delta) \setminus h_1(\gamma, \delta) = \varepsilon(\gamma, \delta)$ .

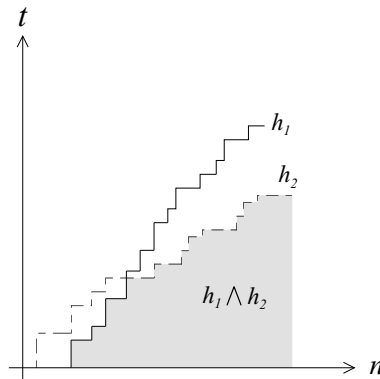
A demonstração desse teorema e de outros resultados envolvendo o estudo das séries periódicas podem ser encontrados em Gaubert (1992) e Cottenceau (1999). Contudo é possível interpretar esses resultados do ponto de vista de um sistema de produção composto de dois sub-sistemas com funções de transferências  $h_1(\gamma, \delta)$  e  $h_2(\gamma, \delta)$ .

- A função  $y(\gamma, \delta) = h_1(\gamma, \delta) \oplus h_2(\gamma, \delta)$  é interpretada como a sincronização da saída de dois GET em paralelo feita pela transição  $y$  conforme mostrado na figura 3.13(a). Dessa forma, a maior taxa de produção do sistema é igual à menor taxa dos dois GET, pois o sistema de menor taxa é um limitante para a taxa global. Dessa forma,  $\sigma_\infty(y(\gamma, \delta)) = \min(\sigma_\infty(h_1(\gamma, \delta)), \sigma_\infty(h_2(\gamma, \delta)))$



**Figura 3.13 :** Composição de dois GET.

- Interpreta-se a função  $y(\gamma, \delta) = h_1(\gamma, \delta) \otimes h_2(\gamma, \delta)$  como resultante da composição em série de dois GET, como ilustrado na figura 3.13(b). Pelo mesmo motivo anterior, é claro que a taxa de produção global é limitada pela menor taxa dos dois GET. Portanto,  $\sigma_\infty(y(\gamma, \delta)) = \min(\sigma_\infty(h_1(\gamma, \delta)), \sigma_\infty(h_2(\gamma, \delta)))$
- A figura 3.14 ilustra o fato de que a taxa de produção máxima de  $y(\gamma, \delta) = h_1(\gamma, \delta) \wedge h_2(\gamma, \delta)$  é dada pela trajetória de menor inclinação em relação ao eixo  $n$ . É importante observar que quanto menor a inclinação no gráfico  $n \times t$  maior é a inclinação assintótica. Assim, obtém-se que  $\sigma_\infty(y(\gamma, \delta)) = \max(\sigma_\infty(h_1(\gamma, \delta)), \sigma_\infty(h_2(\gamma, \delta)))$



**Figura 3.14 :** Ínfimo de duas séries periódicas.

- Sabe-se que  $y(\gamma, \delta) = h_2(\gamma, \delta) \wedge h_1(\gamma, \delta)$  é a maior sub-solução do subconjunto  $\{h_2(\gamma, \delta) \wedge h_1(\gamma, \delta) \preceq h_1(\gamma, \delta)\}$ . Supondo que  $y(\gamma, \delta) \neq \varepsilon$ , tem-se que  $\sigma_\infty(h_2(\gamma, \delta) \wedge h_1(\gamma, \delta)) \geq \sigma_\infty(h_1(\gamma, \delta))$ , pois a inclinação de  $h_2(\gamma, \delta) \wedge h_1(\gamma, \delta)$  no gráfico  $n \times t$  deve ser menor que a de  $h_1(\gamma, \delta)$ . Por outro lado,

a equação 3.22 assegura que  $\sigma_\infty(h_2(\gamma, \delta)y(\gamma, \delta)) \leq \sigma_\infty(h_2(\gamma, \delta))$  e, portanto,  $\sigma_\infty(h_1(\gamma, \delta)) \leq \sigma_\infty(h_2(\gamma, \delta)y(\gamma, \delta)) \leq \sigma_\infty(h_2(\gamma, \delta))$ . Como  $y(\gamma, \delta)$  é a maior sub-solução, ela deve ter a menor inclinação assintótica, ou seja,  $\sigma_\infty(h_1(\gamma, \delta))$ . Se  $\sigma_\infty(h_2(\gamma, \delta)) < \sigma_\infty(h_1(\gamma, \delta))$  a única solução possível é  $y(\gamma, \delta) = \varepsilon(\gamma, \delta)$ .

### 3.3 Conclusão

Neste capítulo foi feita uma revisão de Redes de Petri e da modelagem de Grafos a Eventos Temporizados (GET) utilizando a álgebra de dióides. Mostrou-se que um GET pode ser modelado por equações lineares quando se utilizam os dióides e foram introduzidos os conceitos de representação via espaço de estado e de matriz de transferência. Esses conceitos serão utilizados nos capítulos sobre identificação e controle de GET.



## Capítulo 4

# Identificação de Grafos a Eventos Temporizados

### 4.1 Introdução

Um problema central no estudo de GET, bem como na teoria de sistemas a tempo contínuo, é a obtenção do modelo do sistema. Nesse sentido, o estudo da identificação de GET tem um papel relevante. Em Boimond et al. (1995) é proposta a identificação paramétrica baseada na resposta impulsiva do modelo. A abordagem considera a estimação de dois modelos ARMA: um para o regime transitório e outro para o comportamento periódico. Em Gallot et al. (1997, 1998) considera-se a identificação a partir da resposta impulsiva do sistema baseada na decomposição do sistema em uma soma de sub-sistemas de primeira ordem (a resposta impulsiva é decomposta em uma soma de termos chamados elementos simples), ou seja, o método consiste na estimação de parâmetros de diversos sistemas de primeira ordem. Em Menguy et al. (2000a) é desenvolvido um algoritmo para a identificação não-paramétrica (direta) baseado no refinamento da estimativa da resposta impulsiva.

Esse trabalho propõe um novo método para a identificação paramétrica de Grafos a Eventos Temporizados com uma entrada e uma saída (GET SISO) baseado no conhecimento da estrutura do modelo (Maia et al., 2003c), isto é, supõem-se conhecidos o número de disparos durante o período transitório (*i.e.* o comprimento do transitório) e o número de disparos ocorridos em cada ciclo do regime permanente. Este último parâmetro está relacionado com o número de fichas no circuito crítico do GET. Por outro lado, são consideradas desconhecidas as durações temporais do transitório e do ciclo do regime permanente. Estes parâmetros devem ser estimados juntamente

com os parâmetros que definem completamente a resposta transitória e o comportamento em regime do sistema. Na seção 4.2, os parâmetros supostos conhecidos e os parâmetros a serem estimados são formalmente explicitados.

Para a obtenção do algoritmo de identificação, primeiramente é obtido um modelo apropriado a partir da função de transferência entre a entrada e a saída do GET. A seguir, o algoritmo é desenvolvido utilizando a Teoria da Residuação. É mostrado que o método não é restrito à estimação a partir da resposta impulsiva, como já abordado em trabalhos anteriores, e pode ser aplicado em outras condições de excitação. A principal contribuição em relação aos métodos propostos é que, conhecida a estrutura do modelo, o modelo estimado é mais próximo, segundo o ordenamento do dióide, do modelo real do sistema do que o obtido pelo cálculo direto da maior resposta impulsiva.

## 4.2 Resultados preliminares

Primeiramente, recorda-se que, conforme visto no capítulo 3, um GET SISO pode ser representado no dióide  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]$  por:

$$y(\gamma) = h(\gamma)u(\gamma). \quad (4.1)$$

na qual  $u(\gamma)$  e  $y(\gamma)$  são respectivamente a entrada e a saída do GET e  $h(\gamma)$  é a resposta impulsiva periódica, dada por:

$$h(\gamma) = p(\gamma) \oplus q(\gamma)\gamma^\nu (s\gamma^r)^*, \quad (4.2)$$

sendo que  $p(\gamma) = \bigoplus_{i=0}^{\nu-1} p_i \gamma^i$ ,  $p_i \in \mathbb{N}$  e  $q(\gamma) = \bigoplus_{j=0}^{r-1} q_j \gamma^j$ ,  $q_i \in \mathbb{N}$  são polinômios e  $\nu \in \mathbb{N}$ ,  $s \in \mathbb{N}$  e  $r \in \mathbb{N}$  são respectivamente o comprimento do transitório, a duração e o comprimento do regime permanente. Conforme discutido na seção 4.1, são considerados conhecidos os parâmetros  $\nu$  (comprimento do transitório) e  $r$  (comprimento do regime permanente). Observa-se que os graus dos polinômios  $p(\gamma)$  e  $q(\gamma)$  são respectivamente  $\nu - 1$  e  $r - 1$ . O algoritmo de identificação proposto neste capítulo deverá, portanto, estimar os coeficientes dos polinômios  $p(\gamma)$  e  $q(\gamma)$  assim como o parâmetro  $s$  (duração do ciclo do regime permanente).

Em algumas situações pode ser interessante trabalhar no domínio dos datadores. Nesse domínio a equação 4.1 é escrita como

$$y(k) = \bigoplus_{l=0}^k h(l) \otimes u(k-l). \quad (4.3)$$

Em outras palavras, isso significa que a saída é o resultado da convolução da entrada e da resposta ao impulso do GET.

Conforme mostrado no capítulo 3, o dióide  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]$  é importante para a descrição da dinâmica de um GET. Algumas propriedades das séries descritas nesse dióide, fundamentais para este capítulo, são deduzidas a seguir.

**Propriedade 4.1.** No dióide  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]$ , tem-se que  $y(\gamma) \oplus x(\gamma) = \left(\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} y(k)\gamma^k\right) \oplus \left(\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} x(i)\gamma^i\right) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (y(k) \oplus x(k))\gamma^k$ .

**Demonstração:**

Do capítulo 2, equação 2.47, tem-se que:

$$y(\gamma) \oplus x(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \{y(k)\gamma^k \oplus (\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} x(i)\gamma^i)\}.$$

$$\text{De 2.48, } y(k)\gamma^k \oplus (\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} x(i)\gamma^i) = \{y(k)\gamma^k \oplus (\bigoplus_{i > k} x(i)\gamma^i)\} \oplus (\bigoplus_{i \leq k} x(i)\gamma^i)$$

Observando-se que  $y(k)\gamma^k \oplus (\bigoplus_{i > k} x(i)\gamma^i) = y(k)\gamma^k$  e que  $y(k)\gamma^k \oplus \{\bigoplus_{i \leq k} x(i)\gamma^i\} = (y(k) \oplus x(k))\gamma^k$ , conclui-se a demonstração. ■

**Propriedade 4.2.** O datador associado (trajetória não decrescente) à série  $w(\gamma) = y(\gamma) \oplus x(\gamma)$  é dado por  $w(k) = \bigoplus_{i \leq k} (y(i) \oplus x(i))$ . Como resultado, se<sup>1</sup>  $w(\gamma) \neq \varepsilon(\gamma)$  então  $w(\text{val}(w(\gamma))) = y(\text{val}(w(\gamma)))$ .

**Demonstração:**

Como a trajetória deve ser não-decrescente, então tem-se que  $w(k) = \bigoplus_{i \leq k} (y(i) \oplus x(i))$ . Fazendo  $v_w = \text{val}(w(\gamma))$ , tem-se que:

$$w(v_w) = \bigoplus_{i \leq v_w} (y(i) \oplus x(i)) = \bigoplus_{i \leq v_w - 1} (y(i) \oplus x(i)) \oplus (y(v_w) \oplus x(v_w)) = w(v_w - 1) \oplus (y(v_w) \oplus x(v_w)).$$

Pela definição de valoração dada em 2.37  $w(v_w - 1) = \varepsilon$ , logo<sup>2</sup>  $w(v_w) = y(v_w)$ . ■

**Propriedade 4.3.** Sejam duas séries periódicas  $y(\gamma)$  e  $x(\gamma)$  e denote  $v_y = \text{val}(y(\gamma))$ . Se  $y(\gamma) \oplus x(\gamma) \neq \varepsilon(\gamma)$  então  $y(\gamma) \oplus x(\gamma) = \bigoplus_{k \geq v_y} (y(k) \oplus x(k))\gamma^k$ . Como conseqüência, tem-se que  $\text{val}(y(\gamma) \oplus x(\gamma)) \geq \text{val}(y(\gamma))$ .

<sup>1</sup>O elemento nulo do dióide  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]$  é  $\varepsilon(\gamma) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \varepsilon\gamma^i$ .

<sup>2</sup>Lembrando que para todos elementos  $a$  e  $b \in \overline{\mathbb{Z}}_{max}$ ,  $a \oplus b = \begin{cases} a & \text{se } b < a, \\ \varepsilon & \text{caso contrário.} \end{cases}$

**Demonstração:** Da propriedade 4.1, tem-se que:

$$y(\gamma) \oplus x(\gamma) = \bigoplus_{k < v_y} (y(k) \oplus x(k))\gamma^k \oplus \bigoplus_{k \geq v_y} (y(k) \oplus x(k))\gamma^k$$

Pela definição de valoração 2.37,  $y(k) = \varepsilon$  se  $k < v_y$  e, portanto pela definição de resíduo dual 2.44,  $y(k) \oplus x(k) = \varepsilon$  para todo  $k < v_y$ . Dessa forma,  $y(\gamma) \oplus x(\gamma) = \bigoplus_{k \geq v_y} (y(k) \oplus x(k))\gamma^k$  e conseqüentemente  $\text{val}(y(\gamma) \oplus x(\gamma)) \geq \text{val}(y(\gamma))$ . ■

Outro ponto importante para este capítulo é a residuação de séries periódicas. O resultado apresentado a seguir é devido a Baccelli et al. (1992).

**Lema 4.4 (Residuação de séries)** Considere-se um dióide completo  $\mathcal{D}$  e o dióide  $\mathcal{D}[[z]]$  constituído pelas séries formais<sup>3</sup> na variável abstrata  $z$  e com coeficientes em  $\mathcal{D}$ . Sejam  $u(z)$  e  $v(z)$  duas séries do dióide  $\mathcal{D}[[z]]$ , então:

$$\frac{u(z)}{v(z)} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \bigwedge_{l \in \mathbb{Z}} \frac{u(l+k)}{v(l)} z^k. \quad (4.4)$$

**Demonstração:**

Pela definição de séries formais 2.35 e pela fórmula 2.40:  $\frac{u(z)}{v(z)} = \frac{\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} u(j)z^j}{\bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} v(l)z^l} = \bigwedge_{l \in \mathbb{Z}} \frac{\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} u(j)z^j}{v(l)z^l}$ .

Como  $\frac{\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} u(j)z^j}{v(l)z^l} = \frac{\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} u(j)z^{j-l}}{v(l)} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \frac{u(j)}{v(l)} z^{j-l}$ , tem-se que  $\frac{u(z)}{v(z)} = \bigwedge_{l \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \frac{u(j)}{v(l)} z^{j-l}$ .

Entretanto, para séries formais, observa-se que, para todo  $a_i$  e  $b_j \in \mathcal{D}$ , com  $k_1 \neq k_2$ ,  $(a_1 z^{k_1} \oplus a_2 z^{k_2}) \wedge (b_1 z^{k_1} \oplus b_2 z^{k_2}) = (a_1 \wedge b_1) z^{k_1} \oplus (a_2 \wedge b_2) z^{k_2}$ . Assim, fazendo  $k = j - l$  obtêm-se que:

$$\frac{u(z)}{v(z)} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \bigwedge_{l \in \mathbb{Z}} \frac{u(k+l)}{v(l)} z^k. \quad \blacksquare$$

### 4.3 Método de Identificação

Para o desenvolvimento do método proposto, assume-se que um modelo para o GET SISO existe e é expresso pela equação 4.1. A estrutura, *i.e.* parâmetros  $\nu$  e  $r$  (equação 4.2), é também suposta

<sup>3</sup>No lema 2.36 mostra-se que  $\mathcal{D}[[z]]$  é um dióide.

conhecida. O objetivo do método de identificação é, então, estimar os polinômios desconhecidos  $p(\gamma)$ ,  $q(\gamma)$  e a duração do período  $s$ .

Expandindo a equação (4.1) utilizando (4.2) e introduzindo uma nova variável,  $z(\gamma) = (s\gamma^r)^*u(\gamma)$ , obtém-se que

$$y(\gamma) = p(\gamma)u(\gamma) \oplus q(\gamma)\gamma^\nu z(\gamma). \quad (4.5)$$

Observando que a equação  $z(\gamma) = (s\gamma^r)^*u(\gamma)$  é a solução da equação afim  $z(\gamma) = (s\gamma^r)z(\gamma) \oplus u(\gamma)$ , tem-se o sistema:

$$\begin{aligned} z(\gamma) &= (s\gamma^r)z(\gamma) \oplus u(\gamma) \\ y(\gamma) &= p(\gamma)u(\gamma) \oplus q(\gamma)\gamma^\nu z(\gamma) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Portanto, fazendo-se a transformação inversa, o sistema pode ser representado pelas equações seguintes no dióide  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ ,

$$\begin{aligned} z(k) &= s \otimes z(k-r) \oplus u(k) \\ y(k) &= p_0 u(k) \oplus \dots \oplus p_{\nu-1} u(k-\nu+1) \oplus \\ &\quad q_0 z(k-\nu) \oplus \dots \oplus q_{r-1} z(k-\nu-r+1) \end{aligned} \quad (4.7)$$

com condições iniciais tais que  $z(k) = u(k) = y(k) = \varepsilon$  para  $k < 0$ .

Seguindo o mesmo raciocínio clássico da teoria de identificação para sistemas dinâmicos a variável contínua (Ljung, 1987),  $y(k)$  pode ser reescrito como:

$$y(k) = \varphi_k^T \otimes \theta, \quad (4.8)$$

sendo que  $\varphi_k^T = [u(k) \dots u(k-\nu+1)z(k-\nu) \dots z(k-\nu-r+1)]$  é o vetor de regressão e  $\theta = [p_0 \dots p_{\nu-1}q_0 \dots q_{r-1}]^T$  é o vetor de parâmetros a ser estimado.

Dessa forma, a partir da observação de  $N$  disparos das transições de saída e de entrada, obtém-se a equação matricial:

$$Y = \Phi \otimes \theta, \quad (4.9)$$

na qual  $\Phi = [\varphi_0 \dots \varphi_N]^T$  é a matriz de regressão e  $Y = [y(0) \dots y(N)]^T$  é o vetor de saída observado.

Para estimação do parâmetro  $\theta$ , é conveniente a definição de um critério de erro como

$$J(\tilde{\theta}) = \bigoplus_k (y(k) - \tilde{y}(k)), \quad (4.10)$$

sendo que a saída do modelo estimado ( $\tilde{y}(k) = \Phi \otimes \tilde{\theta}$ ) é tal que  $\tilde{y}(k) \leq y(k)$ . Esse critério significa que, para uma mesma entrada, o melhor modelo deve produzir a maior saída possível que seja menor que a saída observada, *i.e.*, deve-se escolher o maior  $\tilde{\theta}$  tal que  $\Phi \otimes \tilde{\theta} \preceq Y$ .

Por enquanto, apenas para o desenvolvimento do algoritmo, assume-se que a variável  $z$  é conhecida. Assim, um estimador ótimo para o critério  $J(\tilde{\theta})$  é obtido diretamente através da Teoria da Residuação,

$$\hat{\theta} = \bigoplus_{\Phi \otimes \tilde{\theta} \preceq Y} \tilde{\theta} = \Phi \backslash Y. \quad (4.11)$$

Explicitamente, a solução dessa equação é dada por:

$$\begin{aligned} \hat{p}_i &= \bigwedge_{k=0}^N u(k-i) \backslash y(k), & i \in [0 \ \nu - 1], \\ \hat{q}_j &= \bigwedge_{k=0}^N z(k-\nu-j) \backslash y(k), & j \in [0 \ r - 1]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

**Nota 4.5**  $\hat{p}_i \geq p_i$  e  $\hat{q}_j \geq q_j$  pois  $\hat{\theta}$  é a maior solução de  $\Phi \otimes \tilde{\theta} \preceq Y$ . Conseqüentemente,  $\hat{\theta}$  é uma solução para a equação (4.9), *i.e.*,  $Y = \Phi \otimes \hat{\theta}$ . Esse resultado implica que  $\hat{p}_i$  e  $\hat{q}_j$  satisfazem a equação (4.7) para  $k = 1, \dots, N$ . Atribuindo  $u(k) = y(k) = \top$  para  $k > N$  (isso significa que nenhum evento ocorre para  $k > N$ ), a equação (4.7) é satisfeita para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Dessa maneira, a aplicação da transformação  $\gamma$  resulta em

$$y(\gamma) = \hat{p}(\gamma)u(\gamma) \oplus \hat{q}(\gamma)\gamma^\nu z(\gamma). \quad (4.13)$$

◇

**Nota 4.6** A condição necessária e suficiente para a convergência do estimador  $\hat{p}$  apresentado nas equações 4.12 é:

$$\text{para } i \in [0 \ \nu - 1], \exists k' \in [0 \ N] \text{ tal que } y(k') = p(i) + u(k' - i).$$

Como  $\hat{p}_i = \bigwedge_{k=0}^N u(k-i) \backslash y(k)$ , a necessidade é obtida lembrando-se que para  $u(k-i)$  e  $y(k)$  finitos tem-se  $u(k-i) \backslash y(k) = y(k) - u(k-i)$ . A suficiência é obtida através do fato de que  $\hat{p}$  é máximo e de que  $y(k') = p(i) + u(k' - i)$  implica em  $\hat{p}_i \leq p_i$ , ou seja, esses dois fatos resultam em  $\hat{p}_i = p_i$ . Analogamente, para  $\hat{q}$  a condição necessária e suficiente é:

$$\text{para } j \in [0 \ r - 1], \exists k' \in [0 \ N] \text{ tal que } y(k') = q(j) + z(k - \nu - j).$$

◇

Contudo esse resultado tem pouca utilidade prática já que não explicita qual deve ser a excitação do sistema para que a estimação seja correta. Uma condição de excitação suficiente é apresentada na proposição abaixo.

**Lema 4.7.** *Se a excitação do GET é tal que  $0 \leq u(k) \leq (\frac{h(\gamma)}{h(\gamma)})(k)$  para  $0 \leq k \leq N$  então  $y(k) = h(k)$ .*

**Demonstração:**

Pela fórmula 4.3,  $y(k) = \bigoplus_{l=0}^k h(l) \otimes u(k-l)$ . Dessa forma,  $y(k) \geq h(k)$  pois  $u(i) \geq 0$  para  $0 \leq i \leq N$ . Por outro lado:

$$y(k) \leq \bigoplus_{l=0}^k h(l) \left( \frac{h(\gamma)}{h(\gamma)} \right) (k-l) = \bigoplus_{l=0}^k h(l) \bigwedge_{i \in \mathbb{Z}} \frac{h(i+k-l)}{h(i)} \leq \bigoplus_{l=0}^k h(l) \frac{h(k)}{h(l)}.$$

Pois pelo lema 4.4,  $\left( \frac{h(\gamma)}{h(\gamma)} \right) (k-l) = \bigwedge_{i \in \mathbb{Z}} \frac{h(i+k-l)}{h(i)}$ . Assim pela fórmula 2.35,  $\bigoplus_{l=0}^k h(l) \frac{h(k)}{h(l)} \leq \bigoplus_{l=0}^k h(k) = h(k)$  e, portanto,  $y(k) \leq h(k)$  para  $0 \leq i \leq N$ . Como já foi mostrado que  $y(k) \geq h(k)$ , conclui-se que  $y(k) = h(k)$ . ■

Como conseqüência desse lema, se  $e \preceq u(\gamma) \preceq \frac{h(\gamma)}{h(\gamma)}$  então  $y(\gamma) = h(\gamma)$ , em outras palavras  $\frac{h(\gamma)}{h(\gamma)}$  é a maior entrada tal que a saída seja igual à resposta ao impulso.

**Proposição 4.8.** *Se o parâmetro  $s$  é conhecido e o sinal de entrada  $u$  é suficientemente "rico" (i.e.,  $0 \leq u(k) \leq \left( \frac{h(\gamma)}{h(\gamma)} \right) (k)$  para  $0 \leq k \leq N$  sendo que  $N \geq \nu + r - 1$ ) então os estimadores dados em 4.12 convergem para os parâmetros reais do sistema, precisamente  $\hat{p}_i = p_i$  e  $\hat{q}_j = q_j$  para  $i \in [0 \ \nu - 1]$  e  $j \in [0 \ r - 1]$ .*

**Demonstração:**

As hipóteses desta proposição para o sinal de entrada implicam, de acordo com o lema 4.7, que  $y(k) = h(k)$  para  $0 \leq k \leq N$ . Dessa forma,  $\hat{p}_i = \bigwedge_{k=0}^N u(k-i) \backslash h(k) \leq u(0) \backslash h(i) \leq h(i) = p_i$  ( $i < \nu$ ) pois  $u(0) \geq 0$ . Além disso, se  $s$  é conhecido, então  $z$  é também conhecido e os estimadores propostos sempre asseguram que  $\hat{p}_i \geq p_i$  e  $\hat{q}_j \geq q_j$ , pois eles são as maiores soluções para o problema. Assim, conclui-se que  $\hat{p}_i = p_i$ . O mesmo raciocínio é aplicado para a estimativa  $\hat{q}_j$  lembrando que  $q_j = h(\nu + j)$  para  $j < r$ . ■

**Nota 4.9** Se  $u(k) - u(0) \leq \frac{h(\gamma)}{h(\gamma)}(k)$ , o estimador também converge. De fato, fazendo  $u(k) = \bar{u}(k) + u(0) = \bar{u}(k) \otimes u(0)$ , então  $y(k) = \bar{y}(k) \otimes u(0)$  sendo que  $\bar{y}(k) = \bigoplus_{l=0}^k h(l) \otimes \bar{u}(k-l)$ . Do mesmo modo, mostra-se que  $z(k) = \bar{z}(k) \otimes u(0)$ . Dessa forma, a diferença entre os datadores  $(u, y, z)$  e  $(\bar{u}, \bar{y}, \bar{z})$  é o termo  $u(0)$ . Como os resíduos das equações 4.12 são calculados a partir de diferenças entre datadores, o resultado obtido utilizando  $(u, y, z)$  é mesmo que se obtém utilizando  $(\bar{u}, \bar{y}, \bar{z})$ . ◇

**Nota 4.10** Se  $u(k_1) \gg u(k_1 - 1)$  para  $k_1 > 0$ , então  $y(k_1 + j) = u(k_1) \otimes \left( \bigoplus_{l=0}^j h(j-l) \otimes \bar{u}(l) \right)$  para  $j \geq 0$ , sendo que  $u(k_1 + j) = u(k_1) + \bar{u}(j) = u(k_1) \otimes \bar{u}(j)$ . Esse resultado permite escrever a saída como  $y(k_1 + j) = u(k_1) \otimes \bar{y}(j)$  sendo que  $\bar{y}$  é saída do sistema para a entrada  $\bar{u}$ , ou seja, a partir do

$k_1$ -ésimo disparo, o sistema desconsidera a influência dos disparos anteriores. Do mesmo modo, a variável interna é escrita como  $z(k_1 + j) = u(k_1) \otimes \bar{z}(j)$  sendo que  $\bar{z}$  é a trajetória obtida utilizando a entrada  $\bar{u}$ . Como consequência dessa observação, se  $\bar{u}(i) \leq (\frac{h(\gamma)}{h(\gamma)}) (i)$  para  $0 \leq i \leq \nu + r - 1$ , então os estimadores também convergem conforme observado na nota 4.9. De fato, sabe-se que:

$$y(k_1 + j) = \bigoplus_{i=0}^{k_1-1} (h(k_1 + j - i) \otimes u(i)) \oplus \bigoplus_{i=k_1}^{k_1+j} (h(k_1 + j - i) \otimes u(i)).$$

Como  $u$  é crescente e  $u(k_1) \gg u(k_1 - 1)$  então o segundo somatório é maior que o primeiro. Assim, como  $u(k_1 + j) = u(k_1) \otimes \bar{u}(j)$ , tem-se que:

$$y(k_1 + j) = u(k_1) \otimes \left( \bigoplus_{i=k_1}^{k_1+j} h(k_1 + j - i) \otimes \bar{u}(i - k_1) \right).$$

Fazendo  $l = i - k_1$ , obtém-se que  $y(k_1 + j) = u(k_1) (\bigoplus_{l=0}^j h(j - l) \otimes \bar{u}(l))$ . Seguindo o mesmo argumento, mostra-se que  $z(k_1 + j) = u(k_1) \otimes \bar{z}(j)$  sendo que  $\bar{z}$  é a trajetória obtida utilizando a entrada  $\bar{u}$ .  $\diamond$

Uma interpretação para a situação apresentada na nota 4.10 é que após o  $(k_1 - 1)$ -ésimo disparo da transição de entrada espera-se um tempo tal que o sistema retorne à condição de "relaxado" para só assim disparar novamente essa transição. Dessa forma, a menos da translação temporal  $u(k_1)$ , o sistema passa a responder a partir do  $k_1$ -ésimo disparo como se estivesse no início do processo.

**Propriedade 4.11.** *Para o estimador proposto tem-se sempre  $\hat{p}_0 = p_0$ , ou seja,  $\hat{p}_0$  sempre converge para o valor real independentemente das condições de excitação do sistema.*

**Demonstração:**

Isso se deve o fato de que  $\hat{p}_0 = \bigwedge_{k=0}^N u(k) \wedge y(k) \leq u(0) \wedge y(0) = y(0) - u(0)$ . Como  $y(0) = p_0 \otimes u(0) = p_0 + u(0)$ , então  $\hat{p}_0 \leq p(0)$ . Entretanto, pela nota 4.5  $\hat{p}_0 \geq p_0$ , logo  $\hat{p}_0 = p_0$ .  $\blacksquare$

A estimação dos parâmetros  $q_j$  apresentada nas equações 4.12 requer o conhecimento da variável  $z$ . Entretanto essa variável é desconhecida mas pode ser estimada. Se uma estimativa de  $s$  (representada por  $\hat{s}$ ) é disponível, então uma estimativa de  $z$  (representada por  $\hat{z}$ ) é obtida iterativamente segundo a equação (4.7), ou seja,

$$\hat{z}(k) = \hat{s} \otimes \hat{z}(k - r) \oplus u(k). \quad (4.14)$$

Dessa forma, estima-se a variável  $z$  a partir da estimativa de  $s$ . Para a estimativa da duração do período,  $s$ , deve-se recordar que as estimativas dadas na equação 4.12 devem satisfazer a equação



4.13 conforme explicação dada na nota 4.5. Introduzindo uma nova variável  $w(\gamma)$ , essa equação é reescrita como

$$\begin{cases} w(\gamma) &= \widehat{q}(\gamma)\gamma^\nu(s\gamma^r)^*u(\gamma) \\ y(\gamma) &= \widehat{p}(\gamma)u(\gamma) \oplus w(\gamma). \end{cases} \quad (4.15)$$

Como conseqüência, um limitante inferior para  $w(\gamma)$  é dado pela residuação dual (ver capítulo 2, subseção 2.1.4):

$$w_{inf}(\gamma) = y(\gamma) \ominus \widehat{p}(\gamma)u(\gamma). \quad (4.16)$$

**Nota 4.12** Como as séries  $u(\gamma)$  e  $y(\gamma)$  são construídas de tal forma que  $u(k) = y(k) = \varepsilon$  para  $k < 0$  e  $u(k) = y(k) = \top$  para  $k > N$  então pelas propriedade 4.2,  $w_{inf}(k) = \varepsilon$  para  $k < 0$  e  $w_{inf}(k) = w_{inf}(N)$  para  $k > N$ , pois, segundo a definição de residuação dual 2.44,  $a \ominus a = \varepsilon$ .  $\diamond$

Dessa forma, obtêm-se as desigualdade seguintes

$$w_{inf}(\gamma) \preceq w(\gamma) \Rightarrow (s\gamma^r)^*w_{inf}(\gamma) \preceq (s\gamma^r)^*w(\gamma) \preceq y(\gamma) \quad (4.17)$$

pela isotonia do produto e observando na equação 4.15 que  $(s\gamma^r)^*w(\gamma) = w(\gamma) \preceq y(\gamma)$ . Portanto, pela residuação do produto obtêm-se que  $(s\gamma^r)^* \preceq w_{inf}(\gamma) \backslash y(\gamma)$ . Assim, para se estimar  $s$ , é conveniente considerar o conjunto

$$\mathbb{S} = \{s \in \mathbb{N} \mid (s\gamma^r)^* \preceq c(\gamma)\}, \quad (4.18)$$

no qual  $c(\gamma) = w_{inf}(\gamma) \backslash y(\gamma)$ . Convém observar que como  $w_{inf}(\gamma) \preceq y(\gamma)$  então  $c(\gamma) \succeq \varepsilon$ , o que implica que  $\mathbb{S}$  é não-vazio ( $s = 0 \in \mathbb{S}$ ).

**Nota 4.13** Segundo a propriedade 4.4, tem-se que  $c(k) = \bigwedge_{l \in \mathbb{Z}} \frac{y(l+k)}{w_{inf}(l)}$ . Portanto, segundo a nota 4.12, escreve-se que:

$$c(k) = \bigwedge_{l \in \mathbb{Z}} \frac{y(l+k)}{w_{inf}(l)} = \bigwedge_{l < 0} \frac{y(l+k)}{\varepsilon} \bigwedge_{l \geq 0} \frac{y(l+k)}{w_{inf}(l)} = \bigwedge_{l \geq 0} \frac{y(l+k)}{w_{inf}(l)}.$$

Como  $y(j) = \top$  para  $j > N$ , então para  $k \leq N$ , obtêm-se que:

$$c(k) = \bigwedge_{i=0}^{N-k} \frac{y(k+i)}{w_{inf}(i)} \bigwedge_{i=N-k+1}^{\infty} \frac{\top}{w_{inf}(i)} = \bigwedge_{i=0}^{N-k} \frac{y(k+i)}{w_{inf}(i)}.$$

Para  $k > N$ , observa-se que  $c(k) = \bigwedge_{l > 0} \frac{\top}{w_{inf}(l)} = \top$ .

$\diamond$

Para a obtenção de uma estimativa para  $s$ , expande-se a inequação  $(s\gamma^r)^* \preceq c(\gamma)$ , dada em 4.18. Mostra-se então que

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \preceq c(0), \\ (s\gamma^r)^1 \preceq c(r)\gamma^r, \\ \vdots \\ (s\gamma^r)^i \preceq c(ir)(\gamma^r)^i, \\ \vdots \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Como resultado,  $s \leq \frac{c(ir)}{i}$ ,  $\forall i \geq 1$ , e um limitante superior para  $s$  em  $\mathbb{N}$  é dado por  $s_{up} = \min_{i=1, \dots, \infty} \lfloor \frac{c(ir)}{i} \rfloor$ , na qual  $\lfloor x \rfloor$  é a parte inteira de  $x$ . Além disso,  $s_{up} \in \mathbb{S}$  pois

$$\left\{ \begin{array}{l} (s_{up}\gamma^r)^* = (\min_{i=1, \dots, \infty} \lfloor \frac{c(ir)}{i} \rfloor \gamma^r)^*, \\ = \bigoplus_{j=0}^{\infty} (\min_{i=1, \dots, \infty} \lfloor \frac{c(ir)}{i} \rfloor \gamma^r)^j, \\ \preceq e \oplus \bigoplus_{j=1}^{\infty} (\lfloor \frac{c(jr)}{j} \rfloor \gamma^r)^j, \\ \preceq e \oplus \bigoplus_{j=1}^{\infty} c(jr)\gamma^{jr}, \\ \preceq c(\gamma). \end{array} \right. \quad (4.20)$$

**Nota 4.14** Segundo a nota 4.13,  $c(k) = T$  para  $k > N$ , então a expressão para o limitante superior de  $s$  é simplificada para:

$$s_{up} = \min_{i=1, \dots, L} \lfloor \frac{c(ir)}{i} \rfloor, \quad (4.21)$$

sendo que  $L = \lfloor \frac{N}{r} \rfloor$ . ◇

Finalmente, a conclusão é que  $s_{up}$  é o supremo do conjunto  $\mathbb{S}$ . A proposta deste trabalho, então, é utilizar  $\hat{s} = s_{up}$  como um estimador para  $s$ . Algumas propriedades desse estimador são apresentadas a seguir.

**Lema 4.15.** *Se  $w_{inf}(\gamma) \neq \varepsilon$  então  $\nu \leq val(w_{inf}(\gamma)) \leq N$ .*

**Demonstração:**

*Observa-se no sistema de equações 4.15 que  $val(w(\gamma)) \geq \nu$ . Sabe-se que  $val(w_{inf}(\gamma)) = val\{y(\gamma) \oplus \hat{p}(\gamma)u(\gamma)\} = val\{(w(\gamma) \oplus \hat{p}(\gamma)u(\gamma)) \oplus \hat{p}(\gamma)u(\gamma)\} = val\{w(\gamma) \oplus \hat{p}(\gamma)u(\gamma)\}$  pela formula 2.46, e que  $val\{w(\gamma) \oplus \hat{p}(\gamma)u(\gamma)\} \geq val(w(\gamma)) \geq \nu$ , de acordo com a propriedade 4.3). Por outro lado, observando o comentário da nota 4.12, obtém-se que  $w_{inf}(\gamma) \leq N$ . ■*

Uma condição suficiente para a convergência do estimador proposto é apresentada a seguir. Convém lembrar que para que os efeitos da periodicidade da função de transferência sejam percebidos na saída é sempre necessário pelo menos  $\nu + r$  observações dos disparos da transição de saída.

**Proposição 4.16.** *Sejam  $w_{inf}(\gamma) \neq \varepsilon$ ,  $v_w = \text{val}(w_{inf}(\gamma))$  e o número de observações tal que  $N \geq r + v_w$ . Se  $0 \leq u(k) \leq (\frac{h(\gamma)}{h(\gamma)})(k)$  para  $0 \leq k \leq N$ , então  $\hat{s} = s$ .*

**Demonstração:**

Se  $0 \leq u(k) \leq (\frac{h(\gamma)}{h(\gamma)})(k)$  para  $0 \leq k \leq N$ , então pelo lema 4.7,  $y(k) = h(k)$  para  $0 \leq k \leq N$ . Pelo lema 4.15,  $\nu \leq v_w \leq N$ . Assim, pela propriedade 4.2, tem-se que  $w_{inf}(v_w) = y(v_w) = h(v_w)$ . Dessa forma,  $c(r) = \bigwedge_{l \in \mathbb{Z}} \frac{y(l+r)}{w_{inf}(l)} \leq \frac{y(r+v_w)}{w_{inf}(v_w)} = h(r+v_w) - h(v_w)$ . Como  $h$  é periódica<sup>4</sup>, então  $c(r) \leq s$  e, portanto,  $\hat{s} = \min_{i=1, \dots, L} \lfloor \frac{c(ir)}{i} \rfloor \leq c(r) \leq s$ . Entretanto  $\hat{s} \geq s$ , pois  $\hat{s}$  é um limitante superior para  $s$ . Assim, conclui-se que  $\hat{s} = s$ . ■

**Nota 4.17** A situação em que  $w_{inf}(\gamma) = \varepsilon$  implica que  $y(\gamma) = \hat{p}(\gamma)u(\gamma)$ ,  $\hat{s} = \top$  e que  $\hat{q}(\gamma) = \varepsilon$ . Isso significa que  $\hat{p}(\gamma)$  é um modelo para o GET que minimiza o critério de erro proposto (o erro é nulo). ◇

Finalizando esta seção, o método de identificação proposto é resumido nos algoritmos apresentados a seguir.

### Algoritmo 1

**begin**

Iniciar variáveis:  $z(k) = u(k) = y(k) = -\infty$  para  $k < 0$ .

Coletar  $N \geq \nu + r$  pares de dados de entrada e saída  $(u(k), y(k))$ ;

$\hat{p}_i = \bigwedge_{k=0}^N u(k-i) \wedge y(k)$   $i = 0, \dots, \nu - 1$ ;

**for**  $k = 0, \dots, N$

$(\hat{p}(\gamma)u(\gamma))(k) = \bigoplus_{i=0}^{\nu-1} (\hat{p}_i \otimes u(k-i))$ ;

$w_{inf}(k) = \bigoplus_{i=0}^k \{y(i) \oplus (\hat{p}(\gamma)u(\gamma))(i)\}$ ;

**end**

<sup>4</sup>De acordo com a equação 4.2,  $h(k+r) = h(k) + r$  para todo  $k \geq \nu$ .

$$c(k) = \bigwedge_{i=0}^{N-k} w_{inf}(i) \backslash y(k+i) \text{ for } k = 0, \dots, N;$$

$$\widehat{s} = \min_{i=1, \dots, L} \lfloor \frac{c(ir)}{i} \rfloor \text{ sendo que } L = \lfloor \frac{N}{r} \rfloor;$$

$$\widehat{z}(k) = \widehat{s} \otimes \widehat{z}(k-r) \oplus u(k) \text{ for } k = 0, \dots, N;$$

$$\widehat{q}_j = \bigwedge_{k=0}^N \widehat{z}(k-\nu-j) \backslash y(k) \text{ for } j = 0, \dots, r-1;$$

**end**

A condição dada pela proposição 4.16 é suficiente para a convergência dos estimador e, conseqüentemente, para a obtenção de  $J(\widetilde{\theta}) = 0$ . Caso essa condição não seja respeitada, ainda assim pode haver convergência (vide exemplo 4.19), mas pode também ocorrer a situação em que  $J(\widetilde{\theta}) \neq 0$ . Neste último caso, conforme a nota 4.14, e considerando que as hipóteses relativas ao modelo sejam verificadas, tem-se que o valor correto de  $s$  é majorado por  $s_{up}$ . Portanto uma maneira simples de se garantir a anulação do critério é utilizar um método de busca descendente para  $s$ . Isso pode ser feito a partir da observação de que  $s \in \mathbb{N}$  e que  $s \in [0 \ s_{up}]$ . Esse intervalo de busca pode ainda ser reduzido. De fato, sabe-se pela teoria da residuação que  $h(\gamma) = p(\gamma) \oplus q(\gamma)\gamma^\nu(s\gamma^r)^* \preceq u(\gamma) \backslash y(\gamma)$ . Como  $q(\gamma) \succeq e(\gamma)$  então  $\gamma^\nu(s\gamma^r)^* \preceq u(\gamma) \backslash y(\gamma)$ . Portanto  $s \leq s_{\widehat{g}}$ , sendo que  $s_{\widehat{g}} = \min_{m=1, \dots, \infty} \lfloor \frac{\widehat{g}(\nu+mr)}{i} \rfloor$  e  $\widehat{g} = u(\gamma) \backslash y(\gamma)$ . Dessa forma, utilizando as mesmas idéias do algoritmo 1, inicia-se  $\widehat{s} = \min\{s_{up}, s_{\widehat{g}}\}$  e decrementa-se esse valor sempre que o erro  $J(\widetilde{\theta})$  for superior a uma determinada tolerância. Vale dizer que esse procedimento assegura sempre a anulação do critério, pois a situação em que  $\widehat{s} = s$  (estimação correta) é atingível. Observada a nota 4.5, nessa situação o critério de erro  $J(\widetilde{\theta})$  é nulo. Esse procedimento é mostrado no algoritmo 2.

## Algoritmo 2

**begin**

Iniciar variáveis:  $z(k) = u(k) = y(k) = -\infty$  para  $k < 0$ .

Coletar  $N \geq \nu + r$  pares de dados de entrada e saída  $(u(k), y(k))$ ;

$$\widehat{p}_i = \bigwedge_{k=0}^N u(k-i) \backslash y(k) \text{ } i = 0, \dots, \nu-1;$$

**for**  $k = 0, \dots, N$

$$(\widehat{p}(\gamma)u(\gamma))(k) = \bigoplus_{i=0}^{\nu-1} (\widehat{p}_i \otimes u(k-i));$$

$$w_{inf}(k) = \bigoplus_{i=0}^k \{y(i) \ominus (\widehat{p}(\gamma)u(\gamma))(i)\};$$

**end**

$$c(k) = \bigwedge_{i=0}^{N-k} w_{inf}(i) \backslash y(k+i) \text{ for } k = 0, \dots, N;$$

$$s_{up} = \min_{i=1, \dots, L} \lfloor \frac{c(ir)}{i} \rfloor \text{ sendo que } L = \lfloor \frac{N}{r} \rfloor;$$

$$\hat{g}(k) = \bigwedge_{i=0}^{N-k} u(i) \& y(k+i) \text{ for } k = 0, \dots, N;$$

$$s_{\hat{g}} = \min_{m=1, \dots, M} \lfloor \frac{\hat{g}(\nu+mr)}{m} \rfloor \text{ sendo que } M = \lfloor \frac{N-\nu}{r} \rfloor;$$

$$\hat{s} = \min\{s_{up}, s_{\hat{g}}\}$$

$$\hat{z}(k) = \hat{s} \otimes \hat{z}(k-r) \oplus u(k) \text{ for } k = 0, \dots, N;$$

$$\hat{q}_j = \bigwedge_{k=0}^N \hat{z}(k-\nu-j) \& y(k) \text{ for } j = 0, \dots, r-1;$$

Calcular  $J(\tilde{\theta})$ ;

**while** ( $J(\tilde{\theta}) \geq Tol$ ) **and** ( $\hat{s} > 0$ )

$$\hat{s} = \hat{s} - 1;$$

$$\hat{z}(k) = \hat{s} \otimes \hat{z}(k-r) \oplus u(k) \text{ for } k = 0, \dots, N;$$

$$\hat{q}_j = \bigwedge_{k=0}^N \hat{z}(k-\nu-j) \& y(k) \text{ for } j = 0, \dots, r-1;$$

Calcular  $J(\tilde{\theta})$ ;

**end**

**end**

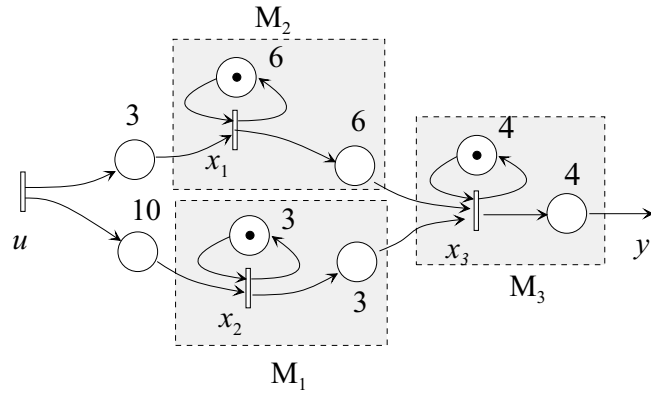
A terminação desse algoritmo é garantida pela existência da condição  $\hat{s} > 0$  no comando "while" e pelo fato de que a cada iteração  $\hat{s}$  é decrementado.

## 4.4 Exemplos Ilustrativos

Considere a figura 4.1, que representa um GET que modela um sistema de montagem com 3 máquinas que são representadas pelos símbolos  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ . Sejam  $u$  e  $y$  respectivamente os datadores das transições de entrada e de saída e  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  os datadores das transições internas desse GET.

Utilizando a transformação  $\gamma$ , obtém-se o sistema de equações (4.22) que relaciona essa variáveis no dióide  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]$  (Veja o capítulo 3 para maiores detalhes).

$$\begin{cases} x_1(\gamma) = & 6\gamma x_1(\gamma) \oplus 3u(\gamma) \\ x_2(\gamma) = & 3\gamma x_2(\gamma) \oplus 10u(\gamma) \\ x_3(\gamma) = & 4\gamma x_3(\gamma) \oplus 6x_1(\gamma) \oplus 3x_2(\gamma) \\ y(\gamma) = & 4x_3(\gamma) \end{cases} \quad (4.22)$$



**Figura 4.1 :** Exemplo de Grafo a Eventos Temporizados SISO

Utilizando o teorema da estrela 2.38, obtém-se a equação que relaciona a entrada e a saída do GET

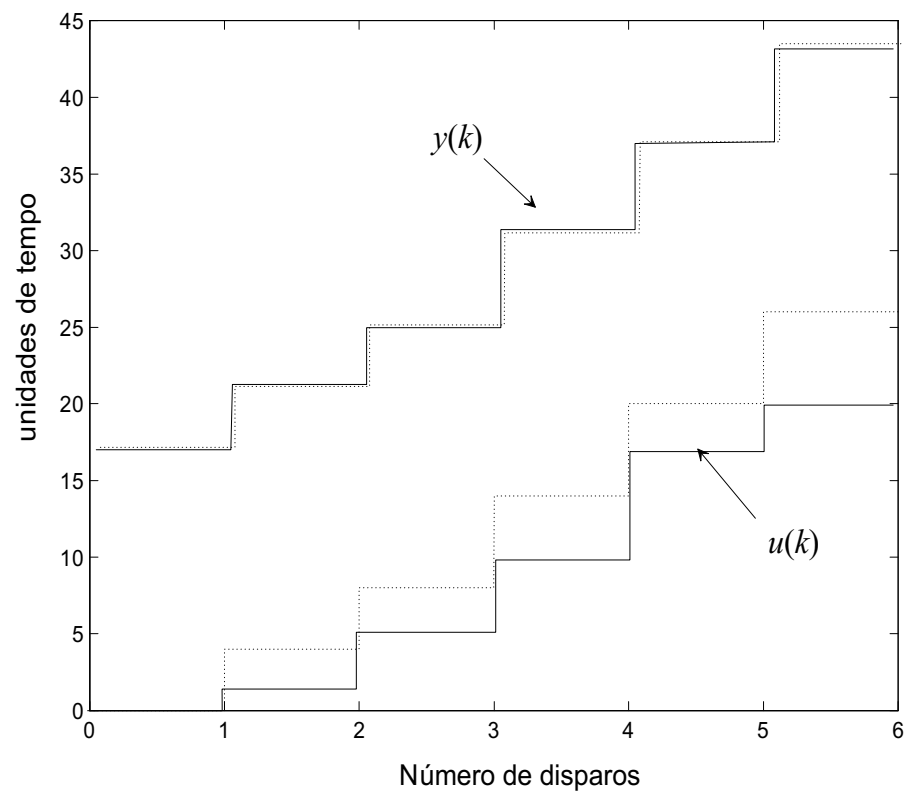
$$y(\gamma) = (17 \oplus 21\gamma \oplus (25\gamma^2)(6\gamma)^*)u(\gamma), \quad (4.23)$$

sendo que  $h(\gamma) = 17 \oplus 21\gamma \oplus (25\gamma^2)(6\gamma)^*$  ( $h = [17 \ 21 \ 25 \ 31 \ 37 \ 43 \dots]$ ) é a função de transferência do GET que apresenta parâmetros estruturais  $\nu = 2$  e  $r = 1$ .

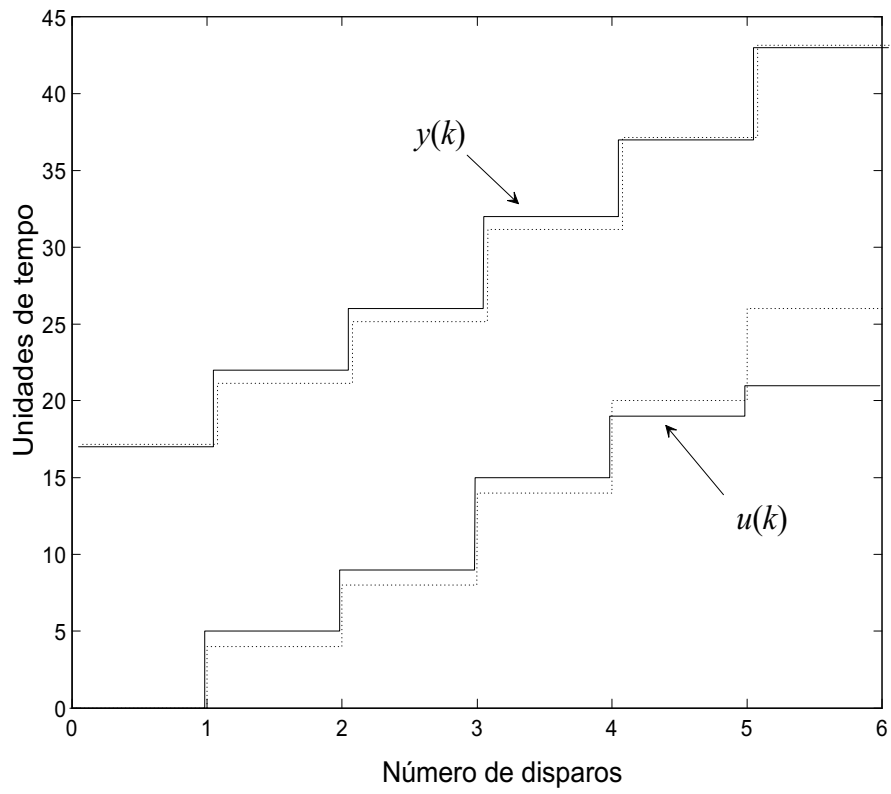
A planta descrita pela equação 4.23 será utilizada a seguir em diversas condições de excitação para ilustrar a aplicabilidade do método de identificação proposto. Nesse caso, a máxima entrada que garante a "excitação rica" do sistema é  $u_h(\gamma) = h(\gamma) \setminus h(\gamma)$  ( $u_h = [0 \ 4 \ 8 \ 14 \ 20 \ 26 \dots]$ ). Em cada exemplo, o par de entrada e saída  $(u_h, h)$  é mostrado nos gráficos em linhas pontilhadas.

**Exemplo 4.18** Considere-se a seqüência de disparos da transição de entrada dada por  $u = [0 \ 2 \ 5 \ 8 \ 17 \ 20]$ . Conseqüentemente, a seqüência de disparos da transição de saída é  $y = [17 \ 21 \ 25 \ 31 \ 37 \ 43]$ . A figura 4.2 mostra essas seqüências e o comportamento do GET em linhas pontilhadas quando a entrada é  $u_h$ . Nesse caso, observa-se que  $u \preceq u_h$  e que a condição de excitação do sistema satisfaz a hipótese da proposição 4.16. Como conseqüência, a aplicação do método de identificação proposto resulta em  $p_0 = 17$ ,  $p_1 = 21$ ,  $q_0 = 25$  e  $s = 6$ . Isto é, o método converge para os parâmetros reais do sistema.  $\diamond$

**Exemplo 4.19** Neste exemplo, supõe-se que a seqüência de disparos da transição de entrada seja dada por  $u = [0 \ 5 \ 9 \ 15 \ 19 \ 21]$ . Assim, a seqüência de disparos da transição de saída é  $y = [17 \ 22 \ 26 \ 32 \ 37 \ 43]$ . Esses dados são mostrados na figura 4.3. A aplicação do método de identificação proposto resulta em  $p_0 = 17$ ,  $p_1 = 21$ ,  $q_0 = 25$  e  $s = 6$ . Isto é, o método converge para os parâmetros reais do sistema embora a condição de excitação não satisfaça a hipótese da proposição 4.16 (*i.e.*  $u \not\preceq u_h$ ). Esse exemplo mostra que a proposição é suficiente para convergência mas não necessária.  $\diamond$

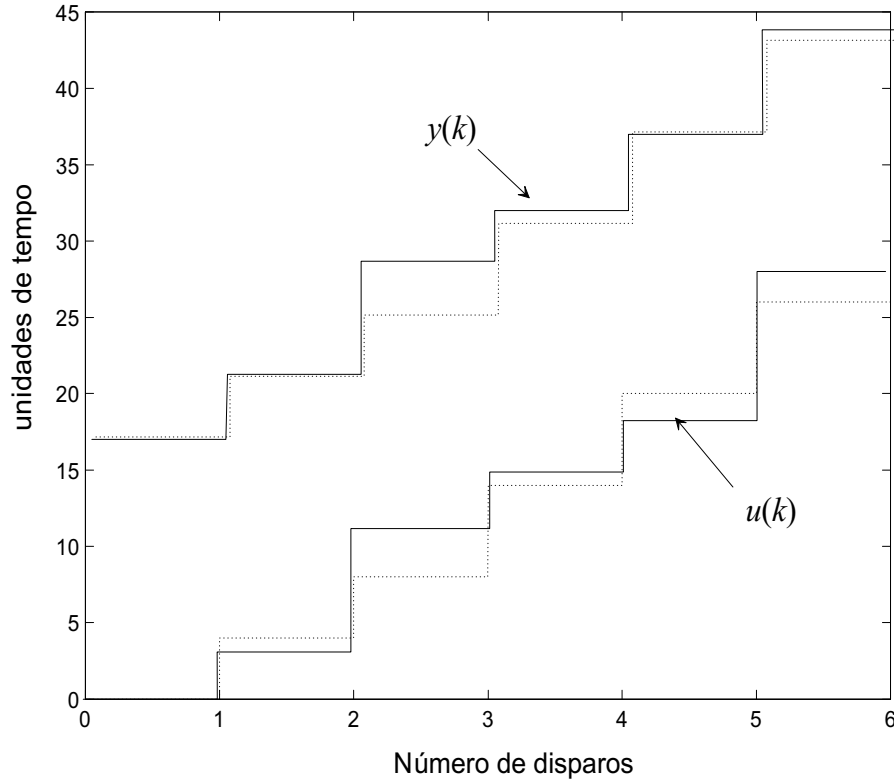


**Figura 4.2 :** Comportamento do GET para o exemplo 4.18



**Figura 4.3 :** Comportamento do GET para o exemplo 4.19





**Figura 4.4 :** Comportamento do GET para o exemplo 4.20

**Exemplo 4.20** Um outro exemplo de simulação utiliza uma seqüência de disparos da transição de entrada dada por  $u = [0 \ 3 \ 11 \ 15 \ 17 \ 27]$  cuja seqüência de disparos da transição de saída é  $y = [17 \ 21 \ 28 \ 32 \ 37 \ 44]$ . Esses dados são apresentados na figura 4.4. Neste exemplo a condição de excitação é tal que  $u \not\geq u_h$  e os resultados obtidos pelo método de identificação são:  $p_0 = 17$ ,  $p_1 = 24$ ,  $q_0 = \varepsilon$  e  $s = \top$ . Nesse caso, os parâmetros não convergiram para os valores reais. Pode-se fazer uma analogia dessa situação com o caso de excitação "pobre" em sistemas dinâmicos contínuos.

◇

**Exemplo 4.21** A figura 4.5 mostra outra simulação para uma seqüência de disparos da transição de entrada dada por  $u = [0 \ 7 \ 15 \ 22 \ 30 \ 37]$  cuja seqüência de disparos da transição de saída é  $y = [17 \ 24 \ 32 \ 39 \ 47 \ 54]$ . Nesse caso, novamente a condição de excitação não é satisfeita ( $u \not\geq u_h$ ). Os resultados obtidos pelo método de identificação são:  $p_0 = 17$ ,  $p_1 = 24$ ,  $q_0 = \varepsilon$  e  $s = \top$ , isto é, os parâmetros não convergiram para parâmetros reais da planta.

◇

**Exemplo 4.22** Nesta simulação a entrada é dada por  $u = [0 \ 26 \ 30 \ 33 \ 33 \ 33]$  e a saída correspondente é  $y = [17 \ 43 \ 47 \ 51 \ 57 \ 63]$ . A figura 4.6 mostra essas seqüências. Nesse caso, observar que  $u \geq u_h$ . Outra vez, como aconteceu no exemplo 4.19,  $p_0 = 17$ ,  $p_1 = 21$ ,  $q_0 = 25$  e  $s = 6$ , ou seja, mesmo

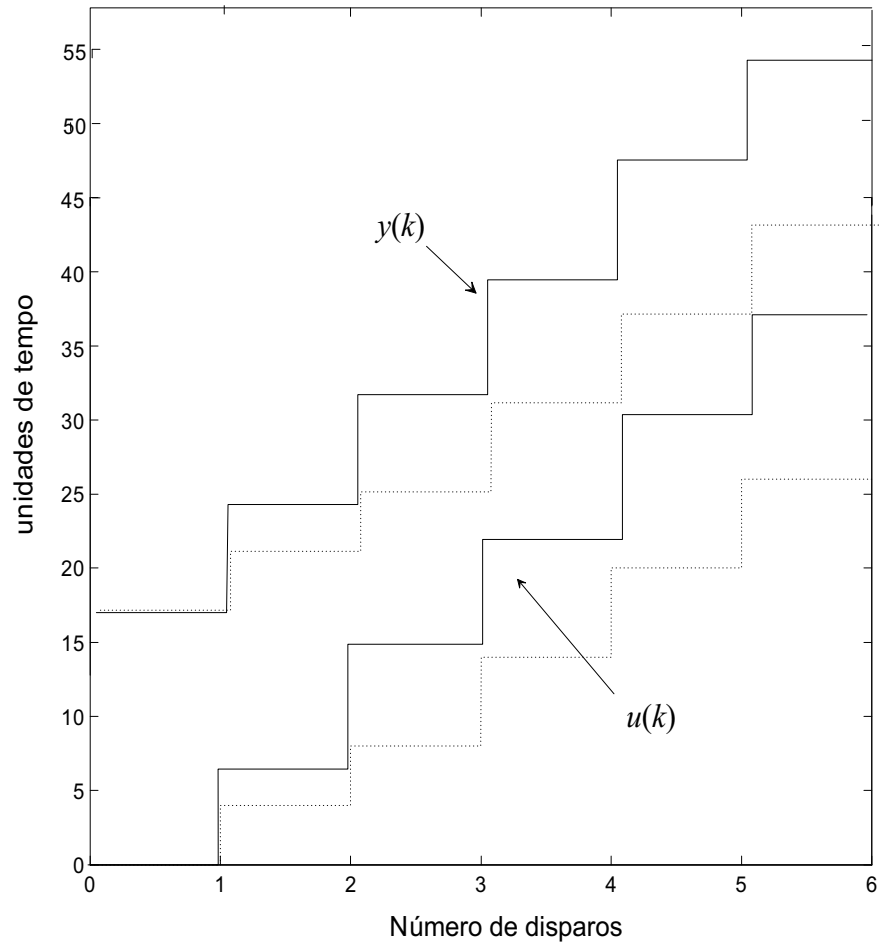
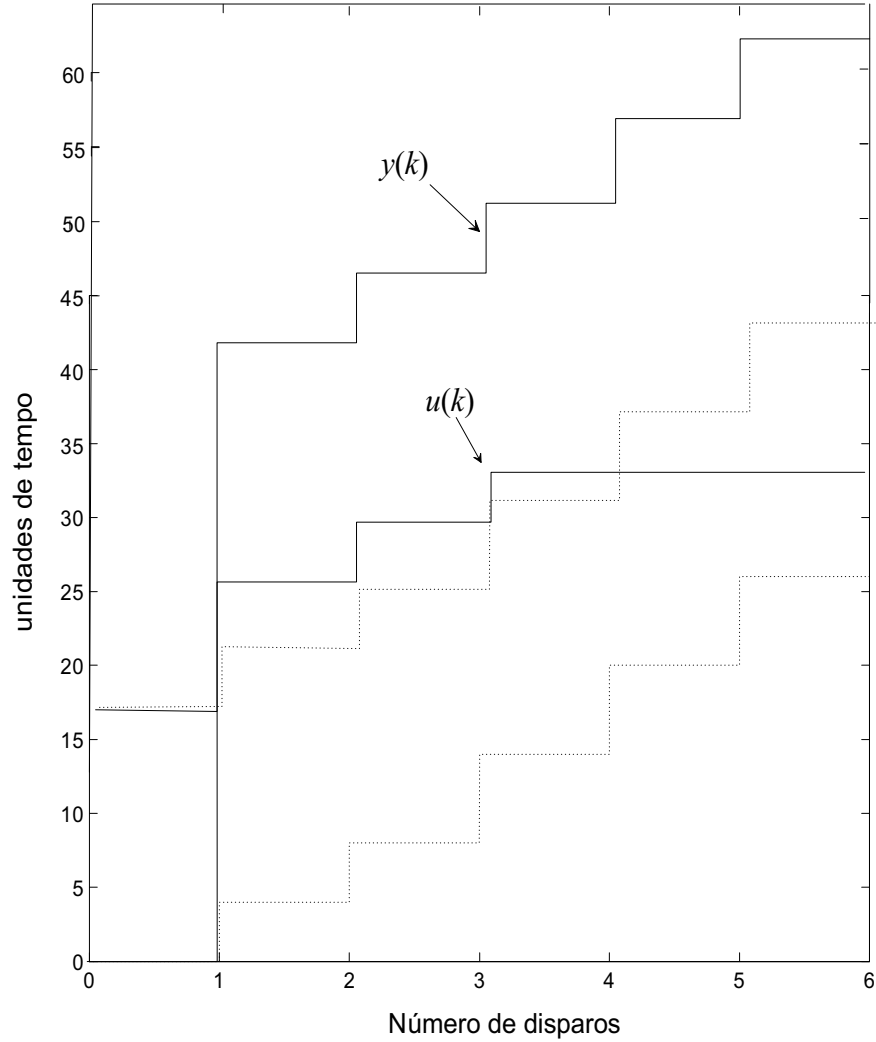


Figura 4.5 : Comportamento do GET para o exemplo 4.21



**Figura 4.6 :** Comportamento do GET para o exemplo 4.22

não satisfazendo a condição suficiente de excitação, os resultados obtidos mostram que estimadores convergem para os parâmetros reais do modelo da planta.  $\diamond$

Os exemplos 4.21 e 4.22 ilustram o fato de que se a excitação  $u_1$  leva a uma estimação não-convergente então a excitação  $u_2 \succeq u_1$  não necessariamente leva a uma estimação não convergente. A tabela 4.1 ilustra essas relações. O exemplo 4.21 ilustra particularmente o fato de que se incrementos na trajetória de  $u$  são muito grandes em relação aos de  $h$ , ou seja, a inclinação de  $u$  é suficientemente maior que a de  $h$ , o algoritmo de estimação sempre resulta em  $q_j = \varepsilon$  e  $s = \top$ . Isso se deve ao fato de que se  $u(k) - u(k-1)$  é suficientemente grande para todo  $k \in \mathbb{N}$  então as desigualdades  $h(0) \otimes u(k) \succeq h(1) \otimes u(k-1) \succeq \dots$  são verdadeiras. Como  $y(k) = \bigoplus_{l=0}^k h(l) \otimes u(k-l)$  e pela equação 4.2,  $p_i = h(i)$  para  $i \in [0 \ \nu - 1]$ , então essas desigualdades permitem escrever

**Tabela 4.1 :** Condições de convergência observadas para os exemplos

Exemplo	Condição de excitação	Comportamento observado
4.18	$u \preceq u_h$	Parâm. convergentes
4.19	$u \not\preceq u_h$	Parâm. convergentes
4.20	$u \not\preceq u_h$	Parâm. não-convergentes
4.21	$u \succeq u_h$	Parâm. não-convergentes
4.22	$u \succeq u_h$	Parâm. convergentes

que  $y(k) = \bigoplus_{l=0}^{\nu-1} p(l) \otimes u(k-l)$ . Dessa forma  $\hat{p}$  é tal que  $y(k) = \bigoplus_{l=0}^{\nu-1} \hat{p}_l \otimes u(k-l)$ , ou seja,  $\hat{p}$  é um modelo que assegura que o critério de erro é nulo. Intuitivamente, esse fato corresponde à situação em que a entrada de matéria-prima no sistema é lenta ao ponto de só se observarem fenômenos transitórios, isto é, a taxa de chegada de matéria-prima não permite que o polinômio  $q(\gamma)$  influencie na solução. Dessa forma, segundo o método de estimação apresentado no algoritmo 1,  $w_{inf}(\gamma)(k) = \varepsilon$  e, conseqüentemente,  $c(\gamma)(k) = \top$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Finalmente, isso resulta em  $\hat{s} = \top$  e, para um número de observações  $N \geq 2r + \nu - 1$ , tem-se que  $q_j = \varepsilon$  para  $j \in [0 \ r - 1]$ .

## 4.5 Conclusão

Neste capítulo, apresentou-se um método para a estimação dos parâmetros temporais para GET SISO. O método proposto baseia-se no conhecimento do comprimento do transitório e do comprimento do ciclo em regime permanente (respectivamente, parâmetros  $\nu$  e  $r$ ) e visa à estimação das durações do transitório e do ciclo em regime permanente (respectivamente, parâmetros  $q_o$  e  $s$ ) assim como a estimação dos demais coeficientes do polinômios  $p(\gamma)$  e do polinômio  $q(\gamma)$ . Uma contribuição deste trabalho é a utilização de um modelo apropriado para a estimação que utiliza uma variável interna desconhecida para modelar o comportamento do circuito crítico. Deve-se observar entretanto que a estimação desta variável interna apresenta dificuldades e constitui uma limitação para o método, devendo portanto ser objeto de atenção em trabalhos futuros. Outro resultado obtido é a determinação de um majorante para a duração do ciclo em regime permanente (parâmetro  $s$ ) mesmo que as condições suficientes de excitação definidas pela proposição 4.16 não sejam respeitadas. Este majorante é dado pela equação 4.21. Além disso, foram apresentadas diversas discussões teóricas sobre o problema de excitação do sistema e uma condição suficiente para a convergência do algoritmo de estimação proposto.

## Capítulo 5

# Controle de Grafos a Eventos Temporizados

### 5.1 Introdução

Conforme foi mostrado no capítulo 3, os Grafos a eventos temporizados (GET) são descritos por equações lineares quando se utiliza a álgebra de dióides. Esse fato tem permitido o desenvolvimento de uma teoria de controle para GET que utiliza os sistemas de controle lineares a tempos discretos como referência para as estratégias propostas.

Os problemas de controle para GET são usualmente propostos utilizando a política de gestão *just-in-time* na qual o objetivo é retardar ao máximo possível a entrada de matéria-prima na planta com a restrição de que os instantes de saída dos produtos finais atendam a uma dada especificação de demanda. Dessa forma, o controle possibilita a minimização dos estoques de matéria-prima e, conseqüentemente, a redução dos custos de produção. Nesse contexto, Boimond & Ferrier (1996) propõem o controle por modelo interno, cuja idéia central é utilizar a teoria da residuação para calcular o modelo inverso do sistema que é, então, utilizado para o projeto do controlador. Em Menguy (1997); Menguy et al. (2000a) e Maia & Santos-Mendes (2002) apresentam-se algumas idéias na direção de um controle adaptativo para GET baseado na estimação de parâmetros temporais do GET. O método considera um modelo que é estimado a partir da observação das datas de disparo das transições de entrada e de saída considerando que o ciclo de produção e o número de disparos do transitório são conhecidos. O controlador é projetado a partir do modelo estimado de forma que a saída do sistema atenda a uma dada referência de demanda. O problema de rastreamento quando a referência é atualizada é tratado em Menguy et al. (2000b). Nesse problema, a

síntese de controle requer a solução de um sistema de inequações com restrições de igualdade que é resolvido pela teoria da residuação. Esse artigo também aborda o problema de controle quando algumas transições de entrada do GET são não-controláveis. Já o problema de controle de GET com parâmetros temporais variantes no tempo é abordado em Lahaye et al. (1999).

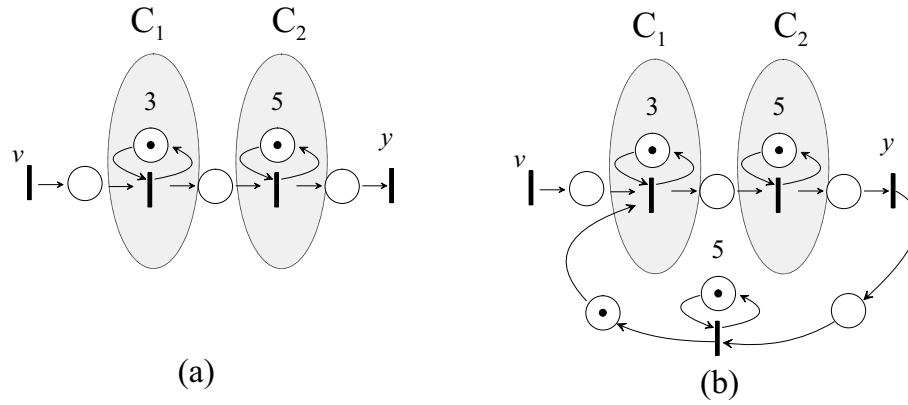
Uma outra estratégia possível para o controle de GET é a abordagem através de modelo de referência na qual o objetivo é fazer com que o sistema controlado se comporte de acordo com um dado modelo de referência que descreve o desempenho desejado (Libeaut, 1996; Cottenceau, 1999; Lüders, 2001). Em Libeaut & Loiseau (1996) o problema é estudado para o caso em que as condições iniciais são não-nulas. Em Cottenceau et al. (1999, 2001) o controle é abordado em termos de funções de transferência. Duas abordagens são propostas de modo geral na literatura: controle em malha aberta, utilizando pré-compensação, e em malha fechada, utilizando retroalimentação. Em Lüders (2001) e Lüders & Santos-Mendes (2002) as idéias de retroalimentação propostas por Cottenceau et al. (2001) são generalizadas considerando o problema em que somente parte das transições de estado estão disponíveis para observação e controle (acesso parcial aos estados). Dentre os resultados obtidos, são apresentadas condições suficientes para a existência de solução para o problema proposto.

As estratégias baseadas em retroalimentação, embora favoreçam a estabilidade, são limitadas no sentido em que o modelo de referência deve satisfazer certas condições restritivas. Já as baseadas em pré-compensação garantem desempenho ótimo para qualquer modelo de referência mas não garantem estabilidade (o conceito de estabilidade é apresentado na seção 5.2). A estratégia de controle proposta nesta tese é baseada na utilização simultânea da pré-compensação e retroalimentação (Maia et al., 2003a). A principal vantagem dessa abordagem é que ela garante otimalidade em relação aos estoques que alimentam o GET para qualquer modelo de referência escolhido. Além disso, sob determinadas condições, garante-se que sistema controlado é estável. A seção seguinte apresenta alguns resultados sobre estabilidade e, a seguir, na seção 5.3, é desenvolvida a estratégia de controle proposta.

## 5.2 Estabilidade de GET

A idéia de estabilidade de um GET está relacionada ao número de fichas de um lugar. Diz-se que o GET é estável se número de fichas é sempre limitado em todos lugares internos (que são os lugares que não estão conectados diretamente à transição de entrada) para qualquer entrada. O problema de estabilidade de GET é estudado em Max Plus (1991), Baccelli et al. (1992) e Commault (1998).

A figura 5.1 (a) mostra um GET instável pois o componente  $C_1$  produz uma ficha a cada 3 unidades de tempo (taxa de produção igual a  $\frac{1}{3}$ ) e o componente  $C_2$  só pode processar no máximo 1 ficha a cada 5 unidades (taxa de produção igual a  $\frac{1}{5}$ ), ou seja, pode haver acumulação de fichas no lugar localizado entre  $C_1$  e  $C_2$ . Já a figura 5.1 (b) mostra um GET estável pois o laço incluído no sistema impede que a taxa de produção de  $C_1$  seja superior a taxa de produção de  $C_2$  e, portanto, não é possível haver acumulação de fichas nos lugares internos do GET. Este exemplo simples indica um resultado importante (que será formalizado a seguir): a retroalimentação favorece a estabilidade.



**Figura 5.1** : Estabilidade: (a) GET instável (b) GET estável

**Definição 5.1 (Subgrafo interno e lugar interno)** *Define-se como subgrafo interno de um GET o grafo de eventos temporizados obtido através da supressão de todas as transições de entrada e de saída assim como de todos os lugares e respectivos arcos conectados a essas transições. Os lugares do subgrafo interno são denominados lugares internos*

**Definição 5.2 (Estabilidade Interna)** *Um GET é internamente estável se para qualquer entrada o número de fichas de seus lugares internos permanece limitado.*

Para o estudo de estabilidade, assume-se que o GET é representado por funções contadores. Assim para um lugar  $p$  que possui uma transição de entrada  $u$  e uma transição de saída  $v$ , o estoque de fichas no tempo  $t$ , representado por  $\bar{S}_{uv}(t)$ , é

$$\underbrace{\bar{S}_{uv}(t)}_{\text{estoque na data } t} = \underbrace{\bar{S}_{uv}(0)}_{\text{estoque inicial}} + \underbrace{u(t)}_{\text{fichas de entrada}} - \underbrace{v(t)}_{\text{fichas de saída}} \quad (5.1)$$

na qual  $\bar{S}_{uv}(0)$  é o estoque inicial, e  $u(t)$  e  $v(t)$  são funções contadores para as transições. A variável  $S_{uv}(t) = \bar{S}_{uv}(t) - \bar{S}_{uv}(0)$  descreve a evolução do estoque do lugar situado entre  $u$  e  $v$  da data 0 até

$t$ . De uma maneira mais geral, para duas transições conectadas por um caminho,  $S_{uv}(t)$  representa a variação do número total de fichas de todos os lugares ao longo do caminho. Dessa forma, a estabilidade é assegurada se  $S_{x_i x_j}(t)$  é limitado para todo  $t$  e para todo par de transições internas  $(x_i, x_j)$  ( $i, j = 1, \dots, q$ ) para qualquer seqüência de disparos das transições de entrada.

Conforme visto no capítulo 3 um GET SISO pode ser descrito através de contadores. Utilizando o dióide  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[[\delta]]$ , tem-se a seguinte equação (ver seção 3.2.1):

$$y(\delta) = h(\delta)u(\delta), \quad (5.2)$$

na qual  $u(\delta) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} u(t)\delta^t$ ,  $h(\delta) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} h(t)\delta^t$  e  $y(\delta) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} y(t)\delta^t$  são respectivamente a entrada, a função de transferência e a saída do GET. Desenvolvendo essas séries, pode-se escrever que

$$\begin{aligned} y(t) &= (h * u)(t) \\ &= \bigoplus_{\tau \in \mathbb{Z}} h(t - \tau) \otimes u(\tau) \quad \left( = \text{Min}_{\tau \in \mathbb{Z}} (h(t - \tau) + u(\tau)) \right). \end{aligned}$$

Ou seja, a trajetória de saída é obtida pela convolução da trajetória de entrada e a resposta impulsiva do GET.

Assim, a partir do lema 4.4, cada coeficiente da série  $v(\delta) \setminus u(\delta)$  em  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[[\delta]]$  é escrito como

$$(v(\delta) \setminus u(\delta))(t) = \bigwedge_{\tau \in \mathbb{Z}} (u(\tau) - v(\tau - t)) \quad \left( = \text{Max}_{\tau \in \mathbb{Z}} (u(\tau) - v(\tau - t)) \right)$$

**Teorema 5.3.** *Sejam  $u(\delta)$  e  $v(\delta)$  séries do dióide  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[[\delta]]$ . Então*

$$\forall t, S_{uv}(t) \leq (v(\delta) \setminus u(\delta))(0).$$

**Demonstração:** *Utilizando a equação 5.3, a expressão  $(v(\delta) \setminus u(\delta))(0)$  é equivalente a*

$$(v \setminus u)(0) = \text{Max}_{\tau \in \mathbb{Z}} (u(\tau) - v(\tau))$$

*o que representa o valor máximo atingindo pelo estoque  $S_{uv}(t)$  para todo  $t$ .* ■

Observa-se nesse caso que existe  $t \in \mathbb{Z}$  tal que  $S_{uv}(t) = (v \setminus u)(0)$ . Ou seja, para duas trajetórias de contadores dadas pelas séries  $u((\delta))$  e  $v((\delta))$ , o limitante superior do estoque é dado por  $(v \setminus u)(0)$  e é atingindo para alguma data  $t$ .

Para a obtenção dos resultados seguintes, convém lembrar que um GET é descrito através dióide  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  pela equação de estado abaixo.

$$\begin{cases} X &= AX \oplus BU \\ Y &= CX \end{cases}$$

com  $A \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^{n \times n}$ ,  $B \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^{n \times m}$  e  $C \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^{p \times n}$ .



**Notação 5.4 (Contador associado)** *Seja  $h$  uma série do dióide  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ . O contador associado a essa série é uma série em  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[[\delta]]$  simbolizado por  $\mathcal{C}_h$  cujos coeficientes são dados por*

$$\mathcal{C}_h(t) = \inf\{k \in \mathbb{Z} \mid \gamma^k \delta^t \preceq h\}. \quad (5.3)$$

Além disso, convencionou-se que  ${}^1 \mathcal{C}_\varepsilon(t) = \infty$  para todo  $t \in \mathbb{Z}$ .

Utilizando o resultado apresentado no teorema 5.3, sobre a evolução temporal dos estoques de um GET, e lembrando que os dióides  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[[\delta]]$  e  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  são isomorfos (ver seção 3.2.1), o teorema 5.5 apresenta uma condição necessária e suficiente de estabilidade dos estados internos internos.

**Teorema 5.5 (Max Plus (1991))** *O GET descrito pelas matrizes  $(A, B, C)$  é internamente estável se e somente se para  $i, j = 1, \dots, n$ ,*

$$[\mathcal{C}_{(A^*B\phi A^*B)}]_{ij}(0) < +\infty. \quad (5.4)$$

Para a demonstração desse teorema é conveniente a utilização do lema abaixo.

**Lema 5.6.** *Seja  $A \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^{q \times q}$  e  $B \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^{q \times m}$ . Para todo  $U \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^m$ ,*

$$(A^*BU)\phi(A^*BU) \succeq (A^*B)\phi(A^*B).$$

**Demonstração:**

A demonstração utiliza os resultados do teorema 2.48 do capítulo 2.

$$\frac{A^*BU}{A^*BU} = \frac{(A^*BU)\phi U}{A^*B} \text{ (aplicação de (2.43))}$$

De 2.36, sabe-se que  $(A^*BU)\phi U \succeq A^*B$ . Portanto, graças à isotonia do operador  $\frac{(\cdot)}{(\cdot)}$ , verifica-se que

$$\frac{A^*B(U\phi U)}{A^*B} \succeq \frac{A^*B}{A^*B}.$$

■

**Demonstração: (Teorema 5.5)**

**Suficiência.** O vetor de estados  $X \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]])^n$  é dado pela relação

$$X = A^*BU.$$

---

<sup>1</sup>Essa convenção advém do fato de que  $x = \varepsilon = \gamma^\infty \delta^{-\infty}$  ( $x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ ) significa que um número infinitamente grande de disparos da transição  $x$  ocorrem em  $t = -\infty$ .

Pelo lema 5.6,  $X \not\phi X \succeq \frac{A^*B}{A^*B}$ . Como a ordem no dióide  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[[\delta]]$  é invertida em relação à ordem usual,

$$\mathcal{C}_{(X \not\phi X)} \preceq \mathcal{C}_{(A^*B) \not\phi (A^*B)}.$$

E, portanto,

$$\mathcal{C}_{(X \not\phi X)}(0) \preceq \mathcal{C}_{(A^*B) \not\phi (A^*B)}(0).$$

Dessa forma o número de fichas para cada estado do GET é limitado por  $\mathcal{C}_{(A^*B) \not\phi (A^*B)}(0)$ .

**Necessidade.** Suponha-se que  $[\mathcal{C}_{(A^*B) \not\phi (A^*B)}]_{ij}(0) = +\infty$ . Utilizando o teorema 2.52, obtém-se que  $[(A^*B) \not\phi (A^*B)]_{ij} = \bigwedge_l (A^*B)_{il} \not\phi (A^*B)_{jl}$ . Portanto, existe  $k$  tal que  $\mathcal{C}_{((A^*B)_{ik} \not\phi (A^*B)_{jk})} = +\infty$ . Assim, para uma entrada  $U$  tal que  $u_k = e$  e  $u_l = \varepsilon, \forall l \neq k$  o sistema é tal que para as transições internas  $x_i$  e  $x_j$  existe um lugar entre elas cujo o número de fichas é ilimitado. ■

Conforme foi visto no exemplo dado na figura 5.1, as taxas de produção dos diversos componentes do GET têm um papel importante na avaliação da estabilidade. Nesse sentido, a proposição abaixo apresenta condições necessária e suficiente para a estabilidade de GET em relação às taxas de produção (inclinação assintótica) do sistema.

**Proposição 5.7 (Cottenceau (1999))** *A condição dada pela expressão 5.4 é verificada se e somente se todos elementos da matriz  $A^*B \in \mathcal{M}_{in}^{q \times q, rat}[[\gamma, \delta]]^{q \times m}$  são não nulos e tem mesma inclinação assintótica não nula.*

**Demonstração:** *Vale lembrar que os polinômios causais são séries racionais com inclinação infinita.*

**Suficiência.** *Se todos elementos  $(A^*B)_{ij}$  são séries racionais não nulas de mesma inclinação assintótica finita  $\sigma_\infty((A^*B)_{ij}) = \lambda \neq 0$ , então a partir do teorema 2.52 e do teorema 3.18, a matriz  $A^*B \not\phi A^*B$  é periódica e todos seus elementos são não-nulos e têm a mesma inclinação assintótica  $\lambda$ . Conseqüentemente,  $\mathcal{C}_{(A^*B) \not\phi (A^*B)}(0) < +\infty$  para todo par  $(i, j)$  <sup>2</sup>.*

**Necessidade.** *Se dois elementos de  $A^*B$  são tais que  $\sigma_\infty((A^*B)_{ij}) > \sigma_\infty((A^*B)_{kj})$ , então pelo teorema 3.18,  $(A^*B)_{ij} \not\phi (A^*B)_{kj} = \varepsilon$  e, portanto,  $\mathcal{C}_{(A^*B) \not\phi (A^*B)}(0) = +\infty$  e a condição (5.4) não é verificada. Se todos elementos de  $A^*B$  têm inclinação assintótica infinita, a função de transferência do GET é polinomial, o que corresponde a um sistema sem circuitos e, portanto, sem restrição para o número de fichas nos seus lugares. ■*

---

<sup>2</sup>O caso degenerado, no qual a inclinação é nula, corresponde a um GET estável que apresenta circuitos sem fichas. Trata-se portanto de uma rede não-viva cujas transições só podem disparar um número finito de vezes e não apresentam interesse do ponto de vista prático.

Em outras palavras, esse resultado diz que a estabilidade só pode ser assegurada se todas componentes do GET funcionam a uma mesma taxa de produção; caso contrário, haverá acumulação de fichas em algum lugar interno do sistema. Uma outra maneira de avaliar a estabilidade de GET é observar suas propriedades estruturais. O resultado apresentado a seguir, no teorema 5.8, é devido a Commault (1998). Antes da apresentação do resultado, algumas hipóteses estruturais baseadas na teoria de grafo são necessárias. Maiores detalhes sobre a teoria de grafos podem ser encontrados em Gondran & Minoux (1985).

A partir da definição de grafo a eventos temporizados dada em 3.6, observa-se que um GET é equivalente a um grafo cujos nós são as transições e cujos arcos são as seqüências arco-lugar-arco entre essas transições. Dessa forma, um nó  $i$  é dito predecessor de um nó  $j$  se existe um arco com início em  $i$  final em  $j$ . A definição para nó sucessor é análoga. Um caminho em um grafo é uma seqüência orientada  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  sendo que  $x_{j+1}$  é sucessor de  $x_j$  para  $j = 1, 2, \dots, p - 1$ . Um grafo orientado é conexo se para dois nós  $i$  e  $j$  quaisquer do grafo existe uma seqüência de nós  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  (não necessariamente um caminho) tal que para todo  $j = 1, 2, \dots, p - 1$  existe um arco entre  $x_j, x_{j+1}$ . O grafo é fortemente conexo se existe um caminho entre dois nós quaisquer do grafo. Quando um grafo não é fortemente conexo ele pode ser decomposto em componentes fortemente conexas. Uma componente fortemente conexa sem arcos de entrada é denominada componente de entrada fortemente conexa (CEFC), segundo a definição dada em Commault (1998).

O teorema de estabilidade 5.8, que apresenta duas condições necessárias e suficientes para a estabilidade GET, é uma adaptação dos resultados apresentados em Commault (1998).

**Teorema 5.8 (Condições de estabilidade para GET)** *Um GET conexo é estável se e somente se pelo menos uma das duas condições seguintes é verdadeira.*

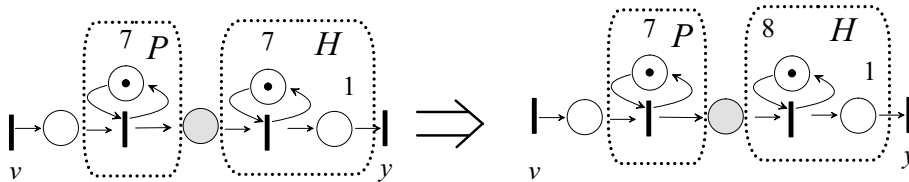
1. *O seu subgrafo interno é fortemente conexo.*
2. *Todas componentes de entrada fortemente conexas (CEFC's) possuem a mesma taxa de produção  $\lambda_0 \leq \lambda_j$  sendo que  $\lambda_j$  é a taxa de produção de qualquer outro componente fortemente conexo  $C_i$  do GET.*

A demonstração desse teorema é referenciada em Commault (1998) a partir de resultados obtidos por Chrétienne (1983) e Carlier & Chrétienne (1988). A explicação dessas condições é dada a seguir.

1) Se o subgrafo interno do GET é fortemente conexo então todas transições internas do GET "funcionam" com a mesma taxa de produção assim, pela proposição 5.7, o GET é estável.

2) Essa condição também assegura que todas componentes do GET "funcionem" com a mesma taxa e, portanto, segundo a proposição 5.7, o GET é estável.

Em outras palavras, esse teorema diz que a estabilidade é assegurada se os componentes são fortemente conexos ou se as taxas de produção dos componentes de entrada entrada são inferiores ou iguais à capacidade de processamento de cada componente do GET. Intuitivamente, caso a taxa de entrada seja maior que a capacidade de processamento poderá haver acumulação de produtos em algum lugar do sistema. Observa-se por um lado que a segunda condição de estabilidade pode ser facilmente violada se houver uma variação dos parâmetros temporais do GET, conforme mostrado na figura 5.2. Nesse caso, observa-se que a variação de um parâmetro no sub-sistema  $M$  leva o sistema à instabilidade. Por outro lado, a primeira condição só é violada se houver perda de conexão no sistema. Ou seja, a primeira condição é mais robusta no que diz respeito a variação temporal dos parâmetros. Dessa forma, o projeto dos controladores neste trabalho será feito com base na primeira condição de estabilidade. Vale dizer que a estabilização de um GET no contexto de controle por modelo de referência requer uma escolha apropriada do modelo de referência de modo que o sistema em malha fechada seja fortemente conexo.



**Figura 5.2 :** GET com estabilidade dependente dos parâmetros temporais.

Uma condição suficiente de estabilização via retroalimentação é apresentada no teorema 5.11 supondo que o GET seja, segundo as definições abaixo, estruturalmente controlável e observável (ver Baccelli et al. (1992)).

**Definição 5.9 (Controlabilidade Estrutural)** *Um grafo a eventos é estruturalmente controlável se existe um caminho para toda transição interna a partir de pelo menos uma transição de entrada.*

**Definição 5.10 (Observabilidade Estrutural)** *Um grafo a eventos é estruturalmente observável se existe um caminho de toda transição interna até pelo menos uma transição de saída.*

**Teorema 5.11 (Estabilização via retroalimentação (Baccelli et al., 1992))** *Todo grafo a eventos estruturalmente controlável e observável pode ser estabilizado por através de retroalimentação*

de saída

A demonstração desse teorema é baseada no fato de que todo grafo a eventos estruturalmente controlável e observável pode ser estabilizado se uma conexão efetiva via retroalimentação for estabelecida a partir de todas as saídas para todas as entradas. Esse procedimento assegura que o GET em malha fechada é fortemente conexo.

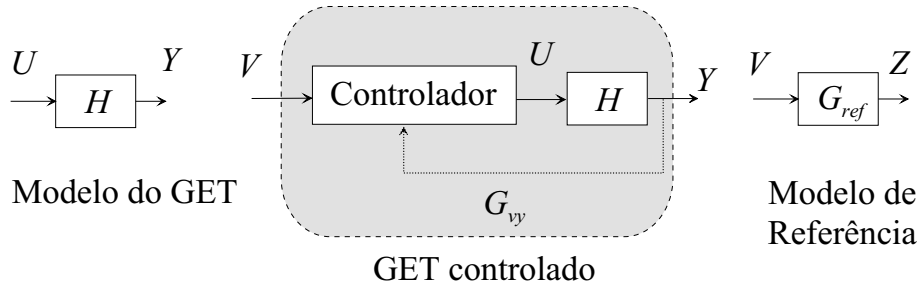
Na seção seguinte será apresentada a estrutura de controle proposta neste trabalho e a seguir essa estrutura será utilizada para solucionar problemas de estabilização de GET.

### 5.3 Controle por modelo de referência

O método de controle descrito aqui é baseado na política de gestão *Just-in-Time*. Formalmente, essa política é definida da seguinte maneira: dada uma referência de disparo para as datas da transições de saída (também chamada de trajetória de referência), calcular as maiores datas possíveis para os disparos da transições de entrada tais que as datas dos disparos da transição de saída ocorram antes da referência. Em um sistema de produção, o que se procura é satisfazer a demanda dos consumidores minimizando o estoque. Dessa forma, pode-se perceber que a Teoria da Residuação tem um papel importante para o desenvolvimento do método, já que o problema em questão é o cálculo da maior solução de uma inequação.

No contexto de modelo de referência, o objetivo é retardar o máximo possível os disparos da transição de entrada do GET assegurando que a função de transferência do sistema controlado seja sempre inferior ou igual ao modelo de referência (que representa a restrição imposta pela demanda num contexto de sistema de produção). Essa idéia é ilustrada na figura 5.3. Nessa figura,  $U$ ,  $Y$  e  $H$  representam respectivamente a entrada, a saída e a função de transferência do sistema; o modelo de referência é dado por  $G_{ref}$  e a entrada externa é dada por  $V$ . A variável  $V$  representa em um contexto *Just-in-Time*, a disponibilidade para o fornecimento de matéria prima e a variável  $U$  representa a permissão para a entrada de matéria prima dentro do sistema. Dessa forma, o problema de controle é definido formalmente a seguir. Sejam  $H \in (\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma])^{m \times p}$  a matriz de transferência de uma planta,  $G_{vy} \in (\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma])^{m \times p}$  a função de transferência do sistema controlado e  $G_{ref} \in (\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma])^{m \times p}$  um modelo de referência, *i.e.*, a matriz de transferência desejada para o sistema controlado. O objetivo do controle por modelo de referência é, então, maximizar  $U$  tal que  $G_{vy} \preceq G_{ref}$ .

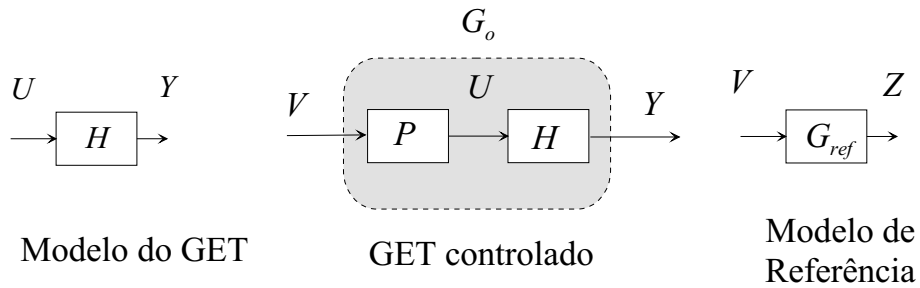
Um abordagem possível para o controle por modelo de referência é a utilização de pré-compensação



**Figura 5.3 :** Controle por modelo de referência

que é ilustrada na figura 5.4 (Cottenceau, 1999). Nesse caso o problema de controle é encontrar o maior pré-compensador  $P$  tal que  $HP \preceq G_{ref}$ . A solução ótima dessa inequação, denotada por  $P_{op}$ , é dada pela teoria da residuação:

$$P_{op} = H \setminus G_{ref}. \quad (5.5)$$

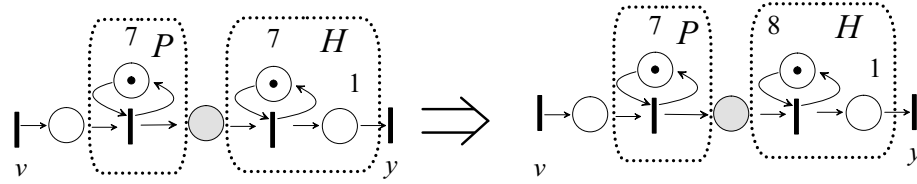


**Figura 5.4 :** Controle por pré-compensação

Essa estratégia de controle em malha aberta resulta na ação de controle  $U = P_{op}V$  que assegura sempre desempenho ótimo do sistema. Contudo, não se assegura a estabilidade robusta do sistema em relação a variações paramétricas, conforme mostrado no exemplo 5.12, *i.e.* variações dos parâmetros temporais da planta podem comprometer a estabilidade do sistema.

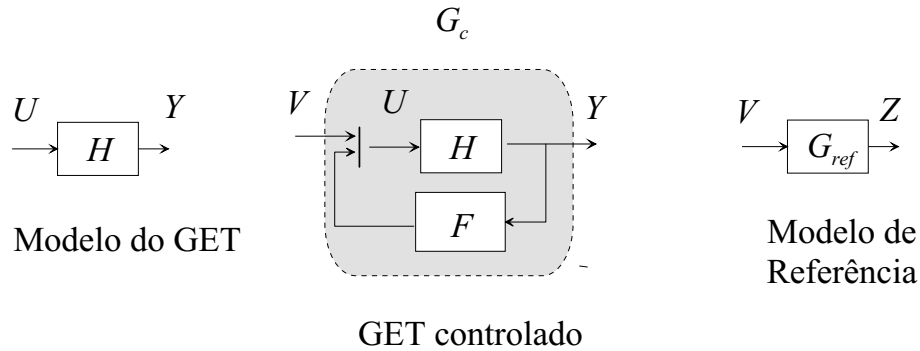
**Exemplo 5.12** Neste exemplo,  $H = 1(7\gamma)^*$  e modelo de referência é tal que  $G_{ref} = H$ , ou seja, o objetivo é preservar a função de transferência em malha aberta maximizando a entrada do sistema. A solução para o problema é  $P = \frac{H}{H} = (7\gamma)^*$ . Pode ser visto na figura 5.12 que o GET é sensível a variações paramétricas o que pode ocasionar problemas de instabilidade. No presente exemplo, se a temporização do ciclo aumentar, o pré-compensador se torna mais rápido do que o sistema e o número de fichas no lugar situado entre  $P$  e  $H$  cresce ilimitadamente.  $\diamond$

Para se contornar o problema de instabilidade, assegurando um sistema mais robusto (menos



**Figura 5.5 :** Problema de estabilidade na pré-compensação.

sensível a variações paramétricas) pode-se considerar o controle por modelo de referência utilizando a estratégia de retroalimentação conforme mostrado na figura 5.6.



**Figura 5.6 :** Controle por retroalimentação

Dessa figura, obtém-se as seguinte equações:

$$U = V \oplus FY, \tag{5.6}$$

$$Y = HU = HFY \oplus HV. \tag{5.7}$$

A solução da equação 5.7 através da aplicação teorema da estrela (2.38) é dada por:

$$Y = (HF)^*HV. \tag{5.8}$$

Dessa forma,  $U = (e \oplus F(HF)^*H)V$ . A equação 2.14 garante que  $(HF)^*H = H(FH)^*$ . Portanto  $U = (e \oplus FH(FH)^*)V = (e \oplus FH \oplus (FH)^2 \oplus \dots)V = (FH)^*V$  e conseqüentemente:

$$U = (FH)^*V. \tag{5.9}$$

O problema de controle para a estratégia de retroalimentação é então maximizar  $U = (FH)^*V$  tal que a função de transferência em malha fechada  $H(FH)^*$  seja menor ou igual ao modelo de

referência  $G_{ref}$ . Devido a isotonia dos operadores de adição e de multiplicação do dióide, esse problema equivale a encontrar a maior retroalimentação  $F$  tal que  $H(FH)^*$  seja menor ou igual a referência  $G_{ref}$ . Formalmente, o que se procura é a maior solução de  $H(FH)^* \preceq G_{ref}$  na álgebra de dióides. Esse problema pode ser resolvido via teoria da Residuação se algumas restrições são impostas no modelo de referência. O resultado seguinte é apresentado em Cottenceau et al. (2001).

**Proposição 5.13.** *Seja  $H \in \mathbb{D}^{m \times p}$  uma função de transferência de um GET escrita num dióide apropriado  $\mathbb{D}$ . Se o modelo de referência  $G_{ref}$  é tal que  $G_{ref} = R^*H$  ou  $G_{ref} = HS^*$  ( $R \in \mathbb{D}^{m \times m}$  e  $S \in \mathbb{D}^{p \times p}$ ) então existe o maior controlador por retroalimentação  $F \in \mathbb{D}^{p \times m}$  tal que a função de transferência do sistema em malha fechada é menor ou igual a  $G_{ref}$ . Esse controlador é dado por*

$$F_{op} = H \backslash G_{ref} / H.$$

Para a demonstração da proposição 5.13 é necessária a introdução de alguns resultados preliminares.

**Lema 5.14.** *Seja um dióide completo  $\mathbb{D}$  no qual  $a, b \in \mathbb{D}$ . Então  $\frac{ab^*}{a} = \frac{ab^*}{ab^*}$*

**Demonstração:**

*Para a demonstração, é suficiente mostrar a equivalência:  $xa \preceq ab^* \Leftrightarrow xab^* \preceq ab^*$ . De fato:*

*( $\Rightarrow$ )  $xa \preceq ab^* \Rightarrow xab^* \preceq ab^*b^* = ab^*$  pela isotonia do operador de multiplicação e utilizado o fato que  $b^*b^* = b^*$  dado pela fórmula 2.9;*

*( $\Leftarrow$ )  $xab^* \preceq ab^* \Rightarrow xa \oplus xab \oplus xab^2 \dots \preceq ab^*$  o que resulta em  $xa \preceq ab^*$ . ■*

**Lema 5.15.** *Seja  $\mathbb{S}_a = \{x \mid x^* \preceq a^*\}$  um subconjunto do dióide completo  $\mathbb{D}$  no qual  $a \in \mathbb{D}$ . Então  $\mathbb{S}_a = \{x \mid x \preceq a^*\}$  e, como consequência, o maior elemento de  $\mathbb{S}_a$  é  $a^*$ .*

**Demonstração:**

*É suficiente mostrar a equivalência  $x^* \preceq a^* \Leftrightarrow x \preceq a^*$ . Se  $x^* \preceq a^*$  então  $x^* = e \oplus x \oplus x^2 \oplus \dots \preceq a^*$  e, consequentemente,  $x \preceq a^*$ . Por outro lado, se  $x \preceq a^*$ , então  $x^2 \preceq a^*$  por causa da isotonia do operador da multiplicação e 2.9. Por indução, obtém-se  $\forall i \geq 1 \ x^i \preceq a^*$ , o que resultam em  $x^* = e \oplus x \oplus x^2 \oplus \dots \preceq a^*$ . ■*

Com esses resultados preliminares, pode se demonstrar a proposição 5.13 conforme é feito a seguir.



**Demonstração: (proposição 5.13)**

Para a demonstração, considera-se que  $G_{ref} = HS^*$ . A demonstração para o caso em que  $G_{ref} = HS^*$  é análoga.

O problema equivale a encontrar o máximo  $F$  tal que  $H(FH)^* \preceq HS^*$ . Pela teoria da residuação, essa equação é equivalente a  $(FH)^* \preceq \frac{HS^*}{H}$ . Utilizando o lema 5.14, tem-se que  $\frac{HS^*}{H} = \frac{HS^*}{HS^*}$ . O teorema 2.53 permite então escrever que:

$$\frac{HS^*}{H} = \left(\frac{HS^*}{HS^*}\right)^*.$$

Dessa forma, utilizando o lema 5.15, o problema é equivalente a:

$$FH \preceq \frac{HS^*}{H}.$$

Finalmente, a teoria da residuação assegura que o controlador máximo é dado por:

$$F_{op} = H \backslash HS^* \phi H.$$

■

É importante observar que nessa estratégia, a função de transferência entre  $U$  e  $V$  é  $(FH)^*$ .

**Proposição 5.16.** *Se  $H(FH)^* \preceq G_{ref}$ , para  $H$  e  $G_{ref}$  dados, então  $(FH)^* \preceq P_{op}$ .*

A demonstração segue diretamente do fato que  $ax \preceq b \Leftrightarrow x \preceq a \backslash b$ . Essa propriedade permite concluir que a função de transferência entre  $U$  e  $V$  para o controle ótimo em malha aberta é sempre maior que a obtida por qualquer controle ótimo por retroalimentação. Isso significa que a estratégia de controle via retroalimentação apresenta sempre desempenho inferior ou igual ao desempenho obtido pela pré-compensação.

Em contrapartida, sob determinadas condições a retroalimentação garante a estabilidade do sistema para qualquer variação dos parâmetros temporais do GET. Esse caso é ilustrado no exemplo 5.17.

**Exemplo 5.17** Neste exemplo,  $H = 1(7\gamma)^*$  e o modelo de referência é  $G_{ref} = H$ . Dessa forma,  $F = H \backslash H \phi H = 6\gamma(7\gamma)^*$ . Observa-se neste exemplo que a estabilidade é independente das variações paramétricas temporais.

◇

As estratégias de controle por modelo de referência via pré-compensação e retroalimentação apresentam portanto um compromisso entre desempenho versus estabilidade robusta. A estrutura proposta neste trabalho visa combinar as vantagens das duas abordagens.

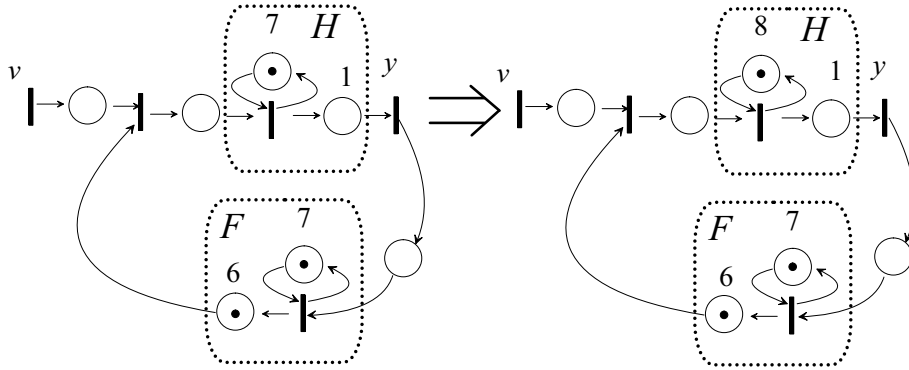


Figura 5.7 : Estabilidade robusta da retroalimentação

### 5.3.1 Controle por modelo de referência: estrutura proposta

A abordagem de controle proposta nesta tese é uma generalização das duas estratégias descritas anteriormente, ou seja, utiliza-se na estrutura de controle simultaneamente pré-compensação e retroalimentação. As duas principais vantagens dessa abordagem em relação à retroalimentação de saída, como proposto em Cottenceau et al. (2001) e Lüders & Santos-Mendes (2002), é que a ação de controle ótima é sempre máxima (igual a  $P_{op}V$ ) e, além disso, não há nenhuma restrição na escolha do modelo de referência. A figura 5.8 ilustra a abordagem proposta.

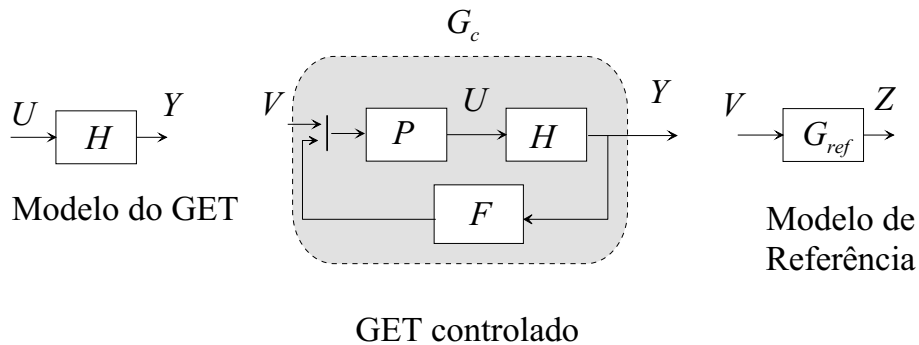


Figura 5.8 : Estratégia de controle proposta

A partir da figura 5.8, escrevem-se as seguintes equações:

$$U = PV \oplus PFY, \tag{5.10}$$

$$Y = (HPF)V \oplus HPV. \tag{5.11}$$

Usando o teorema 2.38 e a equação 2.14, obtém-se as equações que relacionam  $U$  e  $Y$  a  $V$

$$Y = G_C V = (HPF)^* HPV = HP(FHP)^* V, \quad (5.12)$$

$$U = G_{UV} V = P(FHP)^* V, \quad (5.13)$$

sendo que  $G_C$  e  $G_{UV}$  representam as funções de transferência em malha fechada entre  $Y$  e  $V$  e entre  $U$  e  $V$  respectivamente.

O problema de controle pode ser enunciado da seguinte maneira. *Dado um GET com função de transferência  $H$ , quais são as matrizes do controlador  $P$  e  $F$  que asseguram a maior função de transferência entre  $U$  e  $V$ , i.e.  $G_{UV}$ , tal que  $G_C \preceq G_{ref}$ ?* Num contexto de sistema de produção, conforme já discutido anteriormente, considerando a política Just-in-Time, o que se busca é um controlador que satisfaça a especificação da demanda,  $G_C \preceq G_{ref}$ , atrasando o máximo possível a entrada de matéria prima a ser processada. Formalmente, esse problema pode ser enunciado como:

$$\begin{aligned} \bigoplus_{P, F} G_{UV} = P(FHP)^* & \quad (5.14) \\ t. q. G_C = HP(FHP)^* \preceq G_{ref}. & \end{aligned}$$

O problema proposto em 5.14 tem sempre  $P = [\varepsilon]_{p \times p}$  como uma subsolução independentemente da escolha de  $F$ , o que significa que o conjunto de subsoluções é não-vazio. Além disso, é fácil ver que as estratégias que usam exclusivamente pré-compensação (fazendo com que  $F = [\varepsilon]_{p \times m}$ ) ou exclusivamente retroalimentação (fazendo-se  $P = I_{p \times p}$  sendo que  $I_{p \times p}$  é uma matriz identidade em dióide) são caso particulares do problema proposto.

**Proposição 5.18.** *Para o esquema de controle proposto mostrado na figura 5.8, as inequações seguintes são equivalentes:*

$$HP(FHP)^* \preceq G_{ref} \Leftrightarrow P(FHP)^* \preceq H \backslash G_{ref} \Leftrightarrow HP(FHP)^* \preceq H(H \backslash G_{ref}). \quad (5.15)$$

**Demonstração:**

A primeira relação,  $HP(FHP)^* \preceq G_{ref} \Rightarrow P(FHP)^* \preceq H \backslash G_{ref}$  é consequência direta da definição de residuação 2.41. A relação  $P(FHP)^* \preceq H \backslash G_{ref} \Rightarrow HP(FHP)^* \preceq H(H \backslash G_{ref})$ , segue pela isotonia de  $\otimes$ . Além disso,  $HP(FHP)^* \preceq H(H \backslash G_{ref}) \Rightarrow HP(FHP)^* \preceq G_{ref}$  pela equação 2.35. Essas relações têm como consequência a expressão 5.15. ■

**Lema 5.19.** *Toda solução para o problema (5.14) deve satisfazer  $P \preceq G_{UV} \preceq H \backslash G_{ref}$ .*

**Demonstração:**

Diretamente da definição do problema definição e da observação de que  $G_{UV} = P(FHP)^* = P \oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty} P(FHP)^i$  que implica em  $P \preceq G_{UV}$ . ■

**Proposição 5.20.** *Uma solução para o problema de otimização proposto em (5.14) é dada por:*

$$P_{op} = H \setminus G_{ref}. \quad (5.16)$$

$$F_{op} = (HP_{op}) \setminus (HP_{op}) \not\prec (HP_{op}). \quad (5.17)$$

**Demonstração:**

A partir do lema 5.19, observa-se que  $G_{UV}$  é máximo (é igual ao seu limitante superior) se  $P = H \setminus G_{ref}$  e  $F = \varepsilon$ . Dessa forma, o maior  $F$  para esse valor de  $P$  é dado pela maior subsolução da inequação  $P_{op}(FHP_{op})^* \preceq H \setminus G_{ref}$ . Essa inequação é por sua vez (pela proposição 5.18) equivalente a  $HP_{op}(FHP_{op})^* \preceq H(H \setminus G_{ref}) = HP_{op}$ , o que, a partir da definição de residuação, é equivalente a  $(FHP_{op})^* \preceq \frac{HP_{op}}{HP_{op}}$ . O teorema 2.53 assegura que  $((HP_{op}) \setminus (HP_{op}))^* = (HP_{op}) \setminus (HP_{op})$ . Graças ao lema 5.15, tem-se que  $FHP_{op} \preceq (HP_{op}) \setminus (HP_{op})$ . Finalmente, resolvendo essa última inequação, obtém-se que  $F_{op} = (HP_{op}) \setminus (HP_{op}) \not\prec (HP_{op})$ . ■

É importante observar que diferentemente da proposição 5.13 para estrutura com retroalimentação, a abordagem aqui proposta não impõe nenhuma restrição na escolha do modelo de referência.

**Propriedade 5.21.** *A solução dada pela proposição 5.20 assegura que  $G_{uv} = H \setminus G_{ref}$  e  $G_C = HP_{op}$ .*

Essa propriedade é resultado direto da proposição 5.20, lema 5.19 de da observação de que  $G_C = HG_{uv}$  dada pelas equações 5.12 e 5.13. Ela significa que a solução proposta sempre garante que as funções de transferência em malha fechada  $G_{uv}$  e  $G_C$  são iguais aos seus limitantes superiores, ou seja,  $P_{op}$  e  $HP_{op}$  respectivamente.

**Propriedade 5.22.** *Se existir uma matriz  $D$  tal que  $G_{ref} = HD$  então a solução ótima para a estrutura de controle proposta garante que  $G_c = G_{ref}$ . Essa condição significa que o sistema em malha fechada é efetivamente igual ao modelo de referência (total matching).*

**Demonstração:**

De acordo coma proposição 5.21, é suficiente mostrar que  $HP_{op} = G_{ref}$  para as condições

apresentadas . A equação 5.16 resulta em  $P_{op} = H \setminus (HD)$ . Portanto  $HP_{op} = H(H \setminus (HD))$  que por sua vez, pela equação 2.37, é igual à  $HD$ . ■

Se o objetivo é preservar a resposta impulsiva do sistema, isto é,  $G_{ref} = H$ , a solução ótima é obtida se  $P_{op} = H \setminus H$  e  $F_{op} = H \setminus H \not\setminus H$ . De novo, usa-se o fato de que  $a(a \setminus a) = a$  dado pela equação 2.37.

Um ponto importante a ser observado é que a abordagem proposta para o controle não garante que as soluções apresentadas na proposição 5.20 sejam sempre causais (ver definição de causalidade em 3.9). Entretanto, sabe-se que a injeção canônica<sup>3</sup> do conjunto de elementos causais de  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]$  (representado por  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}^+[\gamma]$ ) em  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]$  é também residuável como mostrado no capítulo 3, proposição 3.15. Na prática esse resultado significa que os coeficientes negativos da série podem ser descartados, conforme visto em 3.15, resultando em controladores causais. Dessa forma pode-se mostrar que  $(Pr_+(P_{op}), Pr_+(F_{op}))$  é uma solução ótima para o problema apresentado na equação 5.14 quando  $P$  e  $F$  são restritos ao conjunto dos elementos causais. De fato, em Cottenceau (1999) é demonstrado, num contexto de retroalimentação de saída, que a aplicação do operador  $Pr_+$  à solução do problema proposto preserva a otimalidade. Para o problema aqui proposto, resultados análogos podem ser obtidos. Dessa forma, como  $G_{uv} \preceq H \setminus G_{ref}$ , um limitante superior causal para  $G_{uv}$  é dado por  $Pr_+(H \setminus G_{ref})$ . Como conseqüência, se  $P = Pr_+(H \setminus G_{ref})$  e  $F = \varepsilon$  então  $G_{uv}$  é máximo. Usando um argumento similar àquele apresentado na proposição 5.20, demonstra-se que a maior retroalimentação causal é de fato dada por  $Pr_+((HP_{op}) \setminus (HP_{op}) \not\setminus (HP_{op}))$ . Uma sinopse da demonstração formal desses resultados é apresentada abaixo.

Dentro do contexto discutido anteriormente, o problema proposto é reformulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bigoplus_{P_+, F_+} G_{uv+}(P_+, F_+) & \quad (5.18) \\ t. \quad q. \quad G_c = HG_{uv+}(P_+, F_+) & \preceq G_{ref}. \end{aligned}$$

sendo que a notação  $x_+$  é utilizada para representar um elemento pertencente ao dióide de séries causais  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]$  e  $G_{uv+}(P_+, F_+) = P_+(F_+HP_+)^*$ .

Assim, seguindo o mesmo raciocínio apresentado anteriormente para a obtenção dos resultados da proposição 5.20, tem-se a equivalência:

$$HG_{uv+} \preceq G_{ref} \Leftrightarrow G_{uv+} \preceq H \setminus G_{ref} \quad (5.19)$$

<sup>3</sup>Injeção canônica é definida no capítulo 3 como:  $I : V \mapsto W$ , com  $V \subset W$  e  $x \mapsto x$ .

Portanto , existe um limitante superior causal para  $G_{uv+}$  o que resulta em:

$$G_{uv+} \preceq \text{Pr}_+(H \backslash G_{ref}) \quad (5.20)$$

Como  $G_{uv+} = P_+(F_+HP_+)^*$ , obtém-se usando o lema 5.19 que:

$$P_+ \preceq G_{uv+} \preceq \text{Pr}_+(H \backslash G_{ref}). \quad (5.21)$$

Portanto,  $G_{uv+}$  é máximo se  $P_+$  é máximo, *i.e.* se  $P_{op+} = \text{Pr}_+(H \backslash G_{ref})$  e  $F_+ = \varepsilon$ . Para calcular  $F_+$  máximo, utiliza-se a equivalência:

$$G_{uv+} \preceq P_{op+} \Leftrightarrow HG_{uv+} \preceq HP_{op+}, \quad (5.22)$$

que por sua vez é equivalente a:

$$HP_{op+}(F_+HP_{op+})^* \preceq HP_{op+} \Leftrightarrow F_+ \preceq (HP_{op+}) \backslash (HP_{op+}) \not\backslash (HP_{op+}). \quad (5.23)$$

Finalmente, a maior retroalimentação causal para  $P = P_{op+}$  é obtida por:

$$F_{op+} = \text{Pr}_+((HP_{op+}) \backslash (HP_{op+}) \not\backslash (HP_{op+})). \quad (5.24)$$

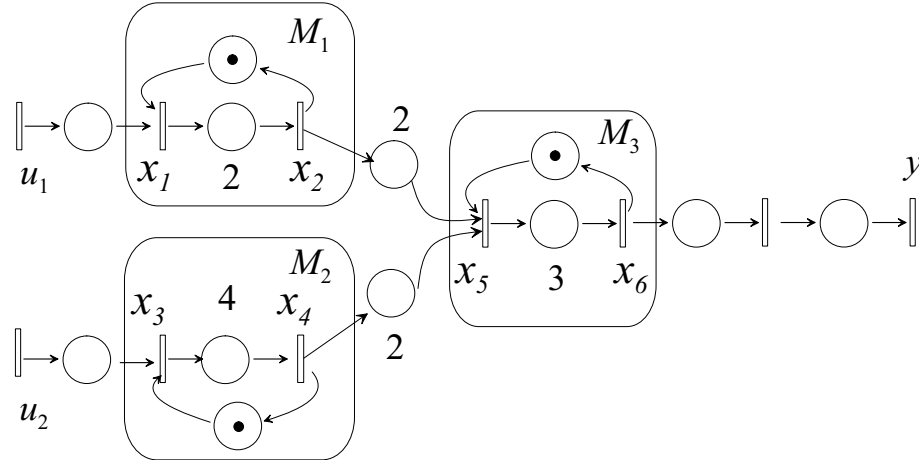
Uma aplicação da estratégia de controle proposta em problemas de estabilização de GET é apresentada a seguir.

### 5.3.2 Estabilização de GET

Considere o GET mostrado na figura 5.9 como exemplo ilustrativo de aplicação das idéias propostas neste capítulo. Esse GET representa um sistema de manufatura com 3 máquinas( $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ ) sendo que a equação entrada-saída é dada por

$$y = [7(3\gamma)^* \ 9(4\gamma)^*]u. \quad (5.25)$$

Uma característica desse sistema é que ele é instável pois as taxas de produção das máquinas  $M_1$  e  $M_2$  são diferentes o que significa que o número de produtos no lugar entre  $M_1$  e  $M_3$  pode crescer ilimitadamente . Contudo, sabe-se que sob determinadas condições um GET pode ser estabilizado desde que o sistema em malha fechada seja fortemente conexo conforme visto no teorema 5.8. A proposição seguinte apresenta condições suficientes que garantem a estabilidade do sistema de controle em malha fechada.



**Figura 5.9 :** Sistema de manufatura com 3 máquinas.

**Proposição 5.23 (Estabilização de GET )** *Seja  $H$  uma função de transferência de um GET estruturalmente controlável e observável tal que  $\sigma_\infty(H) = \min(\sigma_\infty(H_{ij})) \forall i \in [1, m]$  e  $\forall j \in [1, p]$ . Se  $G_{ref}$  é escolhida tal que  $\sigma_\infty([G_{ref}]_{ij}) = \lambda \leq \sigma_\infty(H)$ ,  $\forall (i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, p\}$ , então as equações 5.16 e 5.17 do controlador por modelo de referência conduzem a controladores ótimos,  $P_{op}$  e  $F_{op}$ , que asseguram a estabilidade do sistema em malha fechada.*

**Demonstração:**

*Se o GET é estruturalmente controlável e observável, em toda linha e em toda coluna da matriz  $H$  existe um elemento não-nulo. De acordo com a residuação de matrizes,  $[P_{op}]_{ij} = \bigwedge_{k=1}^m H_{kj} \setminus [G_{ref}]_{ki}$ ,  $\forall i, j \in \{1, \dots, p\}$ . Como  $\sigma_\infty([G_{ref}]_{ki}) = \lambda \leq \sigma_\infty(H)$  então pelo teorema 3.18,  $\sigma_\infty([P_{op}]_{ij}) = \lambda$ ,  $\forall i, j \in \{1, \dots, p\}$ , o que significa que a matriz  $P_{op}$  é cheia e que todos seus elementos têm a mesma inclinação assintótica. Além disso,  $\sigma_\infty([HP_{op}]_{ij}) = \lambda \leq \sigma_\infty(H)$ ,  $\forall (i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, p\}$ . Dessa forma, o GET resultante da composição de  $P$  e  $H$  é também conexo e estruturalmente controlável e observável. Usando o mesmo raciocínio para a equação 5.17, obtém-se  $\sigma_\infty([F_{op}]_{ij}) = \lambda$ ,  $\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, m\}$ . Assim todo elemento  $[F_{op}]_{ij} \neq \varepsilon$  e tem a mesma inclinação assintótica. Conseqüentemente, como o sistema é estruturalmente controlável e observável, o sistema em malha fechada é fortemente conexo e, portanto, segundo o teorema 5.8, estável. ■*

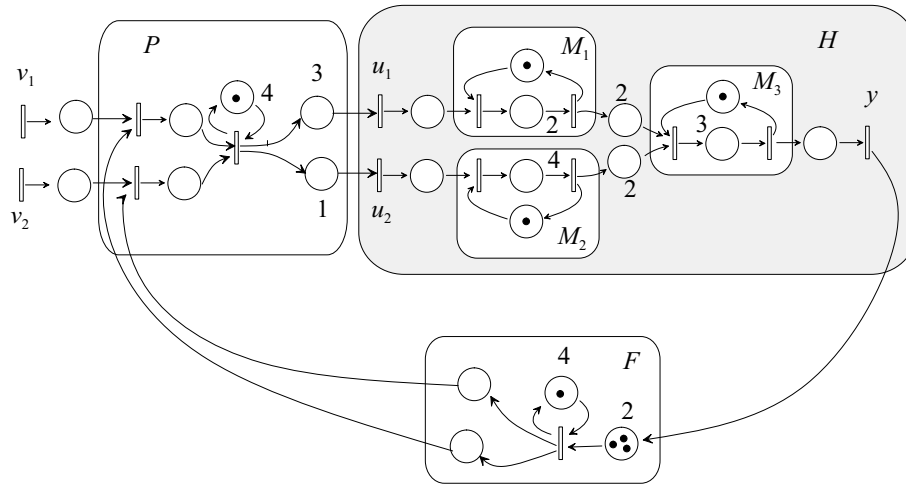
Para o exemplo apresentado, tem-se que  $\sigma_\infty(H) = \frac{1}{4}$ , então se o modelo de referência é escolhido como  $G_{ref} = [10(4\gamma)^* 10(4\gamma)^*]$  todas as condições do teorema 5.23 são satisfeitas. Vale observar que esse modelo de referência não satisfaz as condições da proposição 5.13 (de fato,  $G_{ref} \neq R^*H$  e  $G_{ref} \neq HS^*$ ). Dessa forma as soluções ótimas, dadas pelas equações 5.16 e 5.17, são respectiva-

mente: <sup>4</sup>

$$P_{op} = (4\gamma)^* \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad F_{op} = (4\gamma)^* \begin{pmatrix} -10 & -10 \end{pmatrix}.$$

A matriz de retroalimentação não é causal pois possui elementos com coeficientes negativos o que significa que ocorrem datas negativas para disparos das transições. Dessa forma, a maior retroalimentação causal para o exemplo da figura 5.9 é  $F_{op+} = \text{Pr}_+(F_{op}) = 2\gamma^3(4\gamma)^*(e \ e)$ .

Finalmente, o sistema controlado é mostrado na figura 5.10. Além disso, pode-se ver que o sistema em malha fechada é fortemente conexo e, portanto, estável. A Figura 5.10 mostra uma realização do sistema controlado.



**Figura 5.10** : Sistema de manufatura controlado

Esta condição de estabilização é suficiente. Conclui-se portanto que um importante tema a ser pesquisado diz respeito às condições necessárias para a estabilização de GET.

## 5.4 Conclusão

Neste capítulo, abordou-se o controle por modelo de referência para Grafos a Eventos Temporizados (GET) utilizando a política de gestão de recursos *Just-in-Time*. Foi mostrado que as estratégias baseadas em retroalimentação favorecem a estabilidade mas são limitadas no sentido em que o modelo de referência deve satisfazer certas condições restritivas; as baseadas em pré-compensação

<sup>4</sup>Programas para a manipulação da álgebra de dióide usando o pacote computacional Scilab podem ser encontrados nos sítios dados em SW2001 (2001).



---

garantem desempenho ótimo para qualquer modelo de referência mas não garantem estabilidade. A principal contribuição apresentada é uma nova estratégia de controle por modelo de referência para GET que utiliza simultaneamente a pré-compensação e a retroalimentação. Esse resultado generaliza as abordagens propostas anteriormente na literatura baseadas na pré-compensação ou na retroalimentação. Como outro aspecto teórico relevante, foi demonstrado que é sempre possível encontrar controladores que asseguram o comportamento ótimo do sistema dentro de um contexto *Just-in-Time*; além disso, se o modelo de referência é escolhido de forma adequada, também se assegura que o sistema em malha fechada seja sempre estável.



## Capítulo 6

# Conclusões e perspectivas

Grafos a eventos temporizados (GET) são uma ferramenta gráfica apropriada para a descrição de sistemas a eventos discretos que apresentam fenômenos de sincronização de tarefas, tais como sistemas de montagem ou de fluxo de dados. Apesar de serem descritos por equações não-lineares na álgebra convencional, esses sistemas têm como característica o fato de poderem ser descritos por equações lineares quando se utiliza uma álgebra não-convencional chamada de álgebra de dióides. Essa álgebra permite que se defina para um GET, assim como para os sistemas lineares a tempo contínuo, conceitos como equações de estado, matriz de transferência e resposta impulsiva.

Dentro desse contexto, este trabalho resulta em contribuições para a solução de dois problemas, tratados de maneira independente: a identificação e o controle de GET modelados via álgebra de dióides.

A contribuição em identificação é um algoritmo para a estimação dos parâmetros temporais para GET com uma entrada e uma saída (GET SISO). No trabalho é obtido um modelo entrada-saída apropriado para a identificação de GET. Em seguida, a partir de algumas hipóteses estruturais, o método de identificação é desenvolvido. São discutidas as condições de excitação para o sistema que asseguram a convergência do método proposto e é apresentada uma condição de excitação suficiente para a convergência. Os resultados de simulação mostram que há outras condições de excitação que também asseguram a convergência. Dessa forma, como perspectiva, há a possibilidade de se obter condições de excitação mais gerais do que as apresentadas e que sejam necessárias à convergência. Outro aspecto a ser abordado, de forma a tornar o método mais geral, é a identificação da estrutura de GET dada pelos parâmetros  $(\nu, r)$ . Dessa maneira, pode-se tratar o sistema como uma "caixa preta". Além disso, há a possibilidade de se estudar a identificação de GET com múltiplas entradas e múltiplas saídas (GET MIMO). Finalmente, vale citar que outro problema que pode ser estudado

é a identificação de parâmetros temporais quando a topologia dos GET, isto é, a disposição das transições, dos arcos e dos lugares, é conhecida. Do ponto de vista de sistema de manufatura, por exemplo, isto significaria que se conhecem as máquinas do sistema bem como todas as conexões entre elas e o objetivo é estimar a duração das diversas tarefas envolvidas no processo.

A contribuição em controle de GET proposta neste trabalho é o desenvolvimento de uma nova estrutura de controle dentro do contexto de modelo de referência e da política de gestão *Just-in-Time* utilizando simultaneamente a pré-compensação e a retroalimentação. Os resultados teóricos obtidos mostram que é sempre possível projetar para a estrutura proposta um sistema de controle tal que a entrada do sistema seja máxima. Isso significa, dentro do contexto da política *Just-in-Time*, que é possível retardar ao máximo a entrada de matéria-prima no sistema respeitando as restrições dinâmicas impostas pelo modelo de referência. Além disso, essa estrutura de controle favorece a estabilidade do sistema em malha fechada desde que o modelo de referência seja escolhido de forma adequada. No trabalho é apresentada uma condição suficiente para a escolha do modelo de referência que assegura a estabilidade. Algumas perspectivas para a extensão deste trabalho são listadas a seguir.

- Obtenção de outras condições para a escolha do modelo de referência pois a condição apresentada na proposição 5.23 é muito geral já que há diversos modelos de referência que atendem à especificação. Assim, deve-se introduzir algum critério que possibilite encontrar o melhor modelo estabilizante.
- Análise de robustez do desempenho do sistema em malha fechada quando se consideram variações paramétricas como iniciado em Lhommeau et al. (2001, 2003). Estudo da robustez da estabilidade do sistema em caso de perdas de conexão entre os elementos do sistema.
- Projeto de sistema de controle na presença de incertezas paramétricas considerando que as temporizações são variáveis aleatórias (ambiente estocástico) ou que pertençam a um dado intervalo (análise por intervalos).

Finalizando, vale dizer que outra abordagem que pode ser factível é o desenvolvimento de sistemas adaptativos que integrariam as idéias de identificação e controle propostas neste trabalho.

# Bibliografia

- F. Baccelli, G. Cohen, G. Olsder, e J. Quadrat. *Synchronisation and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems*. John Wiley and Sons, New York, 1992.
- G. Birkhoff. Lattice theory. In *American Mathematical Society Colloquium Publications*, volume XXV, Providence, Rhode Island, 1940.
- T. Blyth e M. Janowitz. *Residuation Theory*. Pergamon Press, Oxford, 1972.
- J. Boimond e J. Ferrier. Internal model control and max-algebra : Controller design. *IEEE TAC*, 41(3):457–461, March 1996.
- J. Boimond, L. Hardouin, e P. Chiron. A Modeling Method of SISO Discrete-Event Systems in Max-Algebra. In *ECC'95*, pages 2023–2026, Rome, Italy, 1995.
- J. Carlier e P. Chrétienne. *Problèmes d'ordonnancement: modélisation/ complexité/ algorithmes*. Etudes et Recherches en Informatiques, 1988.
- C. G. Cassandras e S. Lafortune. *Introduction to Discrete Event Systems*. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- C. G. Cassandras e P. J. Ramadge. Toward a control theory for discrete event eystems. *IEEE Control System Magazine*, pages 66–67, June 1990.
- P. Chrétienne. *Les réseaux de Petri temporisés*. Thèse d'état, Université Paris VI, 1983.
- G. Cohen, P. Moller, J. Quadrat, e M. Viot. Algebraic Tools for the Performance Evaluation of Discrete Event Systems. *IEEE Proceedings: Special issue on Discrete Event Systems*, 77(1): 39–58, January 1989.
- C. Commault. Feedback stabilization of some event graph models. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 43(10):1419–1423, October 1998.

- B. Cottenceau. *Contribution à la commande de systèmes à événements discrets: synthèse de correcteurs pour les graphes d'événements temporisés dans les dioïdes*. Thèse de doctorat, Université d'Angers, Angers - France, 1999.
- B. Cottenceau, L. Hardouin, J. Boimond, e J. Ferrier. Synthesis of greatest linear feedback for timed event graphs in dioid. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 44(6):1258–1262, June 1999.
- B. Cottenceau, L. Hardouin, J. Boimond, e J. Ferrier. Model Reference Control for Timed Event Graphs in Dioid. *Automatica*, 37:1451–1458, 2001.
- F. Gallot, J. Boimond, e L. Hardouin. Identification of Simple Elements in Max-Algebra: Application to SISO Discrete Event Systems Modelisation. In *ECC'97*, Bruxelles, 1997.
- F. Gallot, J. Boimond, e L. Hardouin. Identification of Linear Systems using MA and ARMA Models in Dioids. In *IFAC Conference Structure and Control*, Nantes, France, 1998.
- S. Gaubert. *Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, Paris, 1992.
- M. Gondran e M. Minoux. *Graphes et Algorithmes*. Eyrolles, 1985.
- S. Lahaye, J. Boimond, e L. Hardouin. Optimal control of  $(\min,+)$  linear time-varying systems. In *PNPM'99*, Saragoza, 1999.
- M. Lhommeau, L. Hardouin, B. Cottenceau, e J.-L. Boimond. Sur les correcteurs en boucle fermée dans les dioïdes. In *Modél. des syst. réact. (MSR'2001)*, pages 463–478, Toulouse, France, 2001.
- M. Lhommeau, L. Hardouin, B. Cottenceau, e C. A. Maia. Robusness analysis of control laws for  $(\max,+)$ -linear systems. In *International Workshop on Max-algebra (IWMA)*, Birmingham, Inglaterra, Jun. 2003.
- L. Libeaut. *Sur l'utilisation des dioïdes pour la commande des systèmes à événements discrets*. Thèse de doctorat, Ecole centrale de Nantes, Nantes, 1996.
- L. Libeaut e J. Loiseau. On the control of timed event graphs. In *International Workshop on Discrete Event Systems, WODES'96*, Edinburgh, 1996.
- L. Ljung. *System Identification : Theory for the User*. Prentice Hall, 1987.
- R. Lüders. *Controle Multivariável de Sistemas a Eventos Discretos em Dióides*. Tese de doutorado, UNICAMP, Campinas, 2001.

- R. Lüders e R. Santos-Mendes. Generalized Multivariable Control of Discrete Event Systems in Dioid. In *6th International Workshop on Discrete Event Systems (WODES'02)*, Zaragoza, Spain, 2002.
- C. A. Maia, L. Hardouin, R. Santos-Mendes, e B. Cottenceau. Optimal Closed-loop of Timed Event Graphs in Dioids. *IEEE Trans. on Automatic Control (submitted)*, 2003a.
- C. A. Maia, L. Hardouin, R. Santos-Mendes, e M. Lhommeau. Optimal Closed-loop Control of Timed Event Graphs in Dioids. In *International Workshop on Max-algebra (IWMA)*, Birmingham, Inglaterra, Jun. 2003b.
- C. A. Maia e R. Santos-Mendes. Some Results on Adaptive Control for Timed Event Graphs. In *XIV Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2002)*, pages 431–436, Natal, Brazil, 2002.
- C. A. Maia, R. Santos-Mendes, e L. Hardouin. Some Results on Identification of Timed Event Graphs in Dioids. In *11th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED'03)*, Rhodes, Grécia, Jun. 2003c.
- Max Plus. Second Order Theory of Min-linear Systems and its Application to Discrete Event Systems. In *Proceedings of the 30th CDC*, Brighton, England, Dec. 1991.
- E. Menguy. *Contribution à la commande des systèmes linéaires dans les dioïdes*. Thèse de doctorat, LISA, Université d'Angers, 1997.
- E. Menguy, J. Boimond, L. Hardouin, e J. Ferrier. A First Step Towards Adaptive Control for Linear Systems in Max Algebra. *Discrete Event Dynamic Systems. Theory and Applications*, 10: 347–367, 2000a.
- E. Menguy, J. Boimond, L. Hardouin, e J. Ferrier. Just-in-time Control of Timed Event Graphs Update of Reference Input, Presence of Uncontrollable Input. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 45(11):2155–2158, 2000b.
- T. Murata. Petri nets : properties, analysis and applications. *Proceedings of the IEEE*, 77(4): 541–580, 1989.
- SW2001. Software Tools for Manipulating Periodic Series. <http://www.istia-angers.fr/~hardouin/outils.html>, <http://amadeus.inria.fr/gaubert/papers/max.html>, <http://www-rocq.inria.fr/scilab/quadrat/quadrat.html>. 2001.





# Índice

- Causalidade, 60
- Contador, 49
  - associado, 89
- Controlabilidade Estrutural, 92
- Controle
  - pré-compensação, 94
  - pré-compensação e retroalimentação, 98
  - retroalimentação, 95
- Datador, 49
- Dióide, 23
  - bidimensional, 51
  - completo, 25
  - comutativo, 24
  - congruência, 26
  - de séries formais, 29
  - distributivo, 28
  - homomorfismo, 25
  - isomorfismo, 25
  - matricial, 24
  - quociente, 26
  - sub-Dióide, 25
- Estabilidade
  - condições, 89–91
  - interna, 87
  - via retroalimentação, 92
- Estabilização de GET, 102, 103
- Estrela de Kleene, 29, 30
- Grafos
  - a Eventos, 47
  - a Eventos Temporizados, 47
  - conexos, 91
  - fortemente conexos, 91
- Identificação
  - algoritmo, 75
  - matriz de regressão, 69
  - vetor de regressão, 69
- Injeção canônica, 41
- Just-in-Time, 85
- Lugar interno, 87
- Mapeamento
  - dualmente residuável, 34
  - isotônico, 27
  - residuável, 33
  - restrito, 41
- Matriz de transferência, 56
- Observabilidade Estrutural, 92
- Periodicidade, 59
- Racionalidade, 60
- Realizabilidade, 60
- Rede de Petri, 44
  - Dinâmica, 46
  - Marcada, 45

- Relação, 25
  - de Equivalência, 25
  - de ordem parcial, 26
- Resíduo, 33
  - dual, 34
- Residuação
  - fórmulas, 35
  - fórmulas mistas, 39
  - matricial, 40
  - restrita, 41
- Residuação Dual
  - Fórmulas, 37
- Reticulado, 27
  - completo, 27
  - distributivo, 27
- Série
  - causal, 60
  - formal, 29
  - grau, 29
  - inclinação assintótica, 62
  - periódica, 59
  - racional, 60
  - realizável, 60
  - residuação, 68
  - suporte, 29
  - valoração, 29
- Subgrafo interno, 87