

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
DEPARTAMENTO DA TELEMÁTICA

UMA METODOLOGIA PARA RESOLVER UM  
PROBLEMA DE TRANSPORTE  
MULTIPRODUTO NUM SISTEMA  
FERROVIÁRIO

**Autor:** *Isamara Carvalho Alves*

**Orientador:** *Prof. Dr. Akebo Yamakami OK*

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Julho 1993

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por ISAMARA CARVALHO ALVES e aprovada pela Comissão Julgadora em 30 / 07 / 93.

*AKEBO YAMAKAMI*  
Orientador



666-106

## Resumo

Nesta tese apresenta-se um problema de transporte multiproduto com restrições laterais aplicado a alocação de vagões numa rede ferroviária, considerando : os custos de distribuição de produtos, os custos de redistribuição dos meios de transportes descarregados e as limitações de frota e de trechos.

Para simplificar a solução do problema, divide-se em duas etapas: na primeira, um problema de transporte de carga aos seus respectivos destinos com restrições adicionais; na segunda, o problema da redistribuição dos vagões descarregados nos destinos para serem recarregados nas origens. A solução do problema de otimização de transporte de carga é feita com base no método exato de programação linear aplicado ao grafo, assim como o problema da redistribuição dos vagões descarregados. Para fazer a integração destes dois planos de solução, como também o tratamento multiproduto, desenvolve-se um algoritmo heurístico utilizando a teoria dos grafos.

Mostra-se exemplos da aplicação do algoritmo aos dados de um sistema ferroviário real e faz-se uma análise dos resultados obtidos. Esta análise permitiu concluir que a metodologia de solução aqui desenvolvida, apresentou resultados bastante satisfatórios, apesar da sua simplicidade de concepção e de implementação.

Palavras Chaves: Otimização Multiproduto, Heurística, Problema de Transporte.

## Abstract

In this thesis it presents a multicommodity transportation problem with side constraints, which is applied to the freight car allocation in the railroad system. It depicts some related restrictions of this system, such as: the distribution costs of products, the redistribution costs of empty freight-car, the freight-car number limitation, and the traction limitation. To simplify the solution of the problem, we divide the problem in two subproblems: in the first, the loading problem with additional constraints and, in the second, the distribution problem of empty freight-cars from locations where they have been unloaded to locations where they will be reloaded.

To solve the optimization problem of loading transportation and the redistribution problem of the empty freight-cars, it uses the linear programming method applied to network. It developed an heuristic algorithm using the network theory in order to combine the solution of the two subproblems, and also for solving the multicommodity problem.

Finally, it presents an examples for applying this algorithm in real data from railroad system and it discusses the obtained results. It concludes that the methodology of easy conception and implementation developed here, gives efficient results to this complex problem.

Keywords: Multicommodity Optimization, Heuristic, Transportation Problem.

A minha família:

Adalgisa, minha avó

Walter e Jucy, meus pais

Isa, Mara e César, meus irmãos

Monique e Celso, meus sobrinhos

Wagner e Celso, meus cunhados.

Também um sincero agradecimento a

Angélica, uma grande amiga.

# Agradecimentos

- Em especial ao amigo Adhemar, pelo apoio, atenção, orientação técnica e todo o incentivo que me deu através da sua amizade.
- Ao meu orientador Akebo Yamakami, pela orientação, apoio e atenção.
- Aos professores da UNICAMP Basílio Ernesto de Almeida Milani, Fausto Rodrigues Filho e Takaaki Ohishi , pela participação no julgamento deste trabalho.
- Aos amigos Guillermo, Andréa, Etienne, Luiza, André, Dirce, Eduardo, Reginaldo e Andrea, Paulo Maurício, Tereza, Júnior, Perla, Michelle, Nádia, Hadi e Mauro, que através das suas amizades, colaboraram na conclusão deste trabalho.
- Ao Miguel e colegas do DT, pela ajuda técnica.
- Aos colegas da Pós, pelo companheirismo.
- A CAPES, pela ajuda financeira.
- A FEPASA, pelo fornecimento dos dados.

*“(...) E o futuro é uma astronave que tentamos pilotar não tem tempo nem piedade, nem tem hora de chegar  
Sem pedir licença muda nossa vida e depois convida a rir ou chorar  
Nessa estrada não nos cabe conhecer ou ver o que virá o fim dela ninguém sabe bem o certo onde vai dar  
Vamos todos numa linda passarela de uma aquarela que um dia enfim descolorirá(...)”*

*(“ Aquarela ” - Toquinho e Vinícius)*

# Conteúdo

<b>RESUMO</b>	<b>i</b>
<b>AGRADECIMENTOS</b>	<b>iii</b>
<b>CONTEÚDO</b>	<b>v</b>
<b>1 Introdução Geral</b>	<b>1</b>
<b>2 Formulação Matemática</b>	<b>9</b>
2.1 Introdução . . . . .	10
2.2 Modelo Matemático . . . . .	11
2.3 Um Método de Decomposição . . . . .	18
2.3.1 Problema da “Ida” dos vagões . . . . .	19
2.3.2 Problema da “Volta” dos vagões . . . . .	23
2.3.3 Acoplamento . . . . .	25
2.4 Conclusão . . . . .	26
<b>3 Metodologia de Solução</b>	<b>27</b>
3.1 Introdução . . . . .	28
3.2 Método Heurístico . . . . .	28
3.3 Diagrama de Fluxo . . . . .	34

3.3.1 Fluxograma Geral . . . . .	34
3.3.2 Descrição do Fluxograma . . . . .	34
<b>4 Aplicações e Resultados Computacionais</b>	<b>39</b>
4.1 Introdução . . . . .	40
4.2 Exemplos . . . . .	40
<b>5 Conclusões</b>	<b>88</b>
5.1 Conclusões Finais . . . . .	89
5.2 Propostas Futuras . . . . .	90
<b>a ABREVIATURAS USADAS NOS EXEMPLOS</b>	<b>91</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>94</b>

# Capítulo 1

## Introdução Geral



O mundo atual, ante tantos e tão sérios problemas que se avolumam, lança constantes desafios. No elenco das prioridades comuns às nações, a questão **transportes** destaca-se pela sua magnitude, qualquer que seja o aspecto envolvido.

O encontro de uma solução satisfatória, que atenda, razoavelmente, aos interesses decorrentes, tanto dos que administram os sistemas, quanto dos que os utilizam, tem exigido criatividade e empenho por parte de todos os países, não só para harmonizar as várias modalidades disponíveis, como e sobretudo para desempenhá-las eficaz e economicamente. Neste contexto, as estradas de ferro acabaram assumindo destacado papel, isto é, vêm sendo redescobertas, mesmo antes da crise energética gerada pela escassez e pelo alto preço do petróleo, que hoje atinge a quase totalidade do mundo.

O panorama mundial demonstra, hoje mais do que nunca, a vital importância da estrada de ferro para a economia dos países, sobretudo no concernente ao transporte de cargas.

Maciços investimentos continuam sendo canalizados para as ferrovias, não só pelos países de economia liberal, como pelos de economia planificada.

Com o objetivo de adequar o binômio, eficácia e economicidade, 90% das estradas de ferro do mundo concentram-se, hoje, nos denominados Macrossistemas Ferroviários (MSF), ver [19].

Com os MSF, uma gama imensa de problemas operacionais foram eliminados, resultando não só na redução de custos, como na agilização do sistema e no aumento da produtividade. Assim, verifica-se, o uso mais intensivo da ferrovia:

- na Europa e no Japão para o transporte prioritário do passageiro, sem descuidar do transporte de carga;
- na América do Norte o transporte de carga é prioritário, não tendo o de passageiros grande expressão.
- nos países da antiga URSS para o transporte prioritário da carga, com bom transporte de passageiros, apesar dos usuários não terem a desejada mobilidade.

Os MSF na Europa são os mais antigos. Basicamente o transporte de cargas é executado por trens de peso variando de 2000t (carga geral) a 5000t (trens diretos e completos), sendo relativamente pequena a distância média de percurso.

Nos países da Europa, o transporte ferroviário é prioritário, atendendo ao menor custo social e de rendimento crescente, sendo desenvolvidos extensos programas para expandir,

principalmente, a tração elétrica e aumentar a capacidade de transporte.

Na América do Norte o sistema ferroviário destaca-se mais nos EUA e no Canadá.

Os EUA mantêm as suas ferrovias privatizadas porém, com interferência direta do Estado, todas as vezes que o interesse público assim o determine, predominantemente no transporte de passageiros, através da AMTRAK - National Railroad Passenger Corporation (Empresa Nacional de Transportes Ferroviários de Passageiros).

Mais recentemente, foi constituída a CONRAIL (Consolidated Rail Corporation) possuindo basicamente, a mesma atividade da AMTRAK porém, voltada para o transporte de cargas. As medidas que continuam sendo postas em prática, tanto pelas autoridades governamentais quanto pelas administrações ferroviárias, indicam o firme propósito de preservar o fortalecimento das estradas de ferro neste país quanto à produtividade, rentabilidade e qualidade dos serviços.

No Canadá, a rede ferroviária é formada pela Canadian Pacific (privada) mais a Canadian National (estatal) e linhas mineiras.

O transporte de passageiros continua em declínio e para respaldá-lo, foi criada a VIA (nos moldes da AMTRAK), subordinada à Canadian National, que utiliza as malhas desta e da Canadian Pacific, com trens LCR (leve-rápido-confortável), contando com subvenção federal.

A prioridade volta-se também, para o trem de carga, financeiramente saudável.

O Japão, nação constituída sob regime sociopolítico democrático como os demais países desenvolvidos, continua investindo em suas estradas de ferro, o que demonstra o grande significado dessa modalidade de transportes nos países industrializados. De notar que as ferrovias, neste país, estão sob rígido controle governamental.

No mesmo, o transporte de passageiros pela JNR (Japanese National Railways) supera o de carga em grande escala.

A ferrovia, no Japão, como nos demais países altamente industrializados, é alvo de permanente e séria atenção não só na manutenção mas sobretudo no desenvolvimento em termos globais (locomotivas, vagões, infra e superestrutura, instalações fixas e móveis, etc...) pois, sem dúvida, seria dramático para a economia desses países, cabendo-lhes significativo papel no contexto dos transportes, cuja coexistência harmônica e interdependente dos vários modos é imperativo indeclinável. Não fora assim, países como os EUA, Canadá, Japão, Alemanha e outros, não estariam, nos dias atuais, investindo somas vultosas em estradas de ferro, a fundo perdido até mesmo para a cobertura de déficits operacionais.

Pela destacada importância das ferrovias em relação aos demais transportes, aumenta cada vez mais a preocupação em resolver seus problemas a fim de melhorar a sua produtividade. No Brasil, contando com poucos recursos orçamentários, continuam as ferrovias defrontando-se com o gravame da onerosíssima manutenção da via, parques de tração, vagões e demais instalações, para cujas despesas pouco ou nenhum suporte lhes é deferido.

Na verdade é preciso identificar o benefício que o país auferir com as ferrovias, com o aproveitamento dos seus recursos naturais, derivados do rendimento energético, da capacidade de transporte maciço, da correta distribuição do tráfego e dos recursos entre as diversas modalidades, para que o **custo total do sistema seja minimizado e maximizada a eficácia**, isto significa dizer que os meios disponíveis, isto é, locomotivas, vagões, instalações, terminais e outros, devem ser convenientemente utilizados e explorados, em toda a potencialidade, para a obtenção de um satisfatório lucro operacional.

Assim infere-se, de todo o exposto acima, que a despeito dos problemas das ferrovias apresentados, estes podem ser tratados matematicamente como problemas lineares, e podem ser resolvidos utilizando algumas técnicas da Programação Linear, a saber: o algoritmo Hungarian, o clássico Simplex e o do Caminho Mínimo.

Constata-se, de um modo geral, que problemas lineares com estas características, são denominados “Problemas de Transporte Multifluxo” pois, possuem o fluxo de várias comodidades compartilhando uma mesma rede ferroviária.

Estes são caracterizados pela necessidade da distinção entre os fluxos das unidades de cada comodidade, pois cada uma possui uma origem e um destino diferente e interdependente. Com o intuito de resolver esta classe de problemas pode-se utilizar métodos apropriados como o de “Dantzig Wolfe”, o de “Rosen” e o da “Partição de Recursos”.

Nesse passo, é de grande valia descrever sumariamente, deixando maiores detalhes para os próximos capítulos, o problema multifluxo que será tratado neste trabalho.

Este diz respeito a um problema de transporte de carga que procura aprimorar o roteamento de trens, diretamente influenciado pela tração e pela alocação de recursos (frota), e a distribuição de vagões vazios logo após o ciclo do vagão carregado.

O tempo do ciclo do vagão de carga é definido como o tempo entre dois carregamentos consecutivos. Um ciclo começa quando o encarregado envia uma ordem solicitando carros vazios. Os carros são despachados e carregados. Os vagões são classificados por blocos que possuem o mesmo destino e cada bloco desse constitui um tipo diferente de frota. Então a jornada da frota ao destino começa. Nesta rota os vagões de carga passam por estações in-

intermediárias e seguem para as estações de destino, onde eles são descarregados e liberados para começarem um novo ciclo.

Como uma ferrovia possui várias estações interligadas por trechos é necessário que esta saiba decidir, de acordo com a frequência de pedidos, qual a rota que deve seguir para transportar as cargas de suas estações-origem às estações-destino respeitando alguns objetivos como a **minimização dos custos ou a maximização dos lucros**.

Ultimamente, tem-se desenvolvido importantes modelos de otimização e de simulação para representar os movimentos de carga na rede ferroviária. Na literatura alguns artigos como [8] e [16] trazem uma sinopse dos melhores artigos sobre modelagem de problemas das ferrovias, outros como [14], [26] e [29] contêm modelos para a distribuição de vagões vazios, e [10] mostram modelos para a classificação de trens que chegam numa estação intermediária.

Em particular, o problema de transporte ferroviário tratado aqui possui a estrutura de um problema de transporte multiproduto e objetiva determinar a política de distribuição dos vagões, carregados ou descarregados, adotada a fim de garantir que o lucro obtido, ou o custo, seja a melhor possível sendo que na rede ferroviária existe o fluxo de diferentes produtos possuindo suas estações origem-destino distintas, ou não, porém, independentes.

No tocante aos tipos de vagões, estes se distinguem pelo produto que é transportado (por exemplo: vagões do tipo Tanque-Combustível são adequados para transportar combustíveis como: gás, álcool, diesel, enquanto que vagões do tipo Fechado servem para o transporte de grãos :arroz, açúcar, trigo) e cada produto pode ser levado por mais de um tipo de vagão, sendo que cada tipo pode possuir tara (peso) e frota disponível diferente.

Convém salientar que a distribuição dos vagões de um mesmo tipo, para transportar os distintos tipos de produto, se faz selecionando os produtos que fornecem um lucro mais alto à ferrovia, exceto, o transporte de alguns produtos, que por motivos contratuais desenvolvidos entre a empresa que deseja transportar o produto e a transportadora (ferrovia), torna-se obrigatório.

Não obstante as restrições apresentadas, existem também as limitações impostas pelos trilhos ligadas basicamente ao peso por eixo do material rodante e/ou de tração.

O peso por eixo, quando excessivo para o diâmetro das rodas, pode levar a uma aceleração do processo de fadiga do trilho, que compromete a segurança da circulação e provoca frequentes interrupções (custos elevados e baixa confiabilidade).

O peso bruto por eixo dos vagões, no caso dos trens pesados, deve manter-se, no máximo,

entre 25 e 30t, operando com velocidades entre 60 e 100km/h.

No caso do material de tração, existe o problema das grandes massas não-suspensas (motores), que aumentam o impacto em altas velocidades, fazendo crescer os esforços sobre os trilhos e decrescer o seu ciclo de vida útil.

Nos transportes pesados, a tração é sempre múltipla, com locomotivas na frente dos vagões, e, em trechos com características mais pesadas, podem ser utilizadas locomotivas na cauda do trem como auxílio.

Então, cada trilho que interliga duas estações possui uma capacidade máxima de carga que pode ser tracionada. Estas possuem diferentes bitolas, algumas mais estreitas e outras mais largas que determinam o tipo de vagão que podem passar por eles, isto é, existe uma associação entre a bitola do trecho e o tipo de vagão transitando no mesmo.

A cada um desses trechos de linha (trilho) associa-se um custo do produto por tonelada transportada, levando em conta, que cada produto possui o seu tempo de percurso.

Esse tempo é definido de acordo com a duração real das viagens das estações de origem às suas estações de destino, mais o tempo de pátio do vagão carregado. Este último é calculado quando os vagões estão ociosos, em determinadas estações, aguardando o carregamento (ou descarga) e outros vagões, para que eles possam continuar a viagem.

Vale ainda observar que, o problema caracterizado acima, apresenta uma grande complexidade associada a um problema de sequenciamento com restrições laterais.

Em vista disso, existem algumas opções para modelar um problema deste tipo.

Considerando o problema separadamente, ou seja, dividindo-o em dois subproblemas, tem-se: um para a ida do vagão carregado e outro para a volta do vagão descarregado.

Para modelar o problema da ida, tem-se da literatura o trabalho de Kenington, ver [20]. Ele propõe um algoritmo para um problema de transporte multiproduto, faz comentários sobre a estrutura de dados a ser utilizada, mostra quais as simplificações que poderiam ser feitas nas operações básicas do método simplex revisado e depois mostra os resultados computacionais de alguns exemplos.

Mais recentemente, Kennington e Helgason, ver [22], abordam o mesmo algoritmo de um modo geral, o qual foi utilizado por Luchesi, ver [24], para modelar um problema de transporte de carga multifluxo estático e com restrições adicionais sem considerar a duração das viagens.

Neste sentido, este modelamento poderia ser aplicado ao problema da ida, se o mesmo passasse a ser estático, isto é, se este não utilizasse os tempos das viagens dos vagões porém,

isso foge à proposta do problema, que é considerar a ida dos vagões num processo dinâmico. Assim, uma melhor opção é utilizar a programação Dinâmica, ver [11] e [12].

Dessa forma, pode-se pensar num modelamento como segue:

- os estágios representados pelos instantes de tempo espaçados por alguma unidade de tempo. Como sugestão, pode utilizar cada dia de viagem do vagão como unidade;
- a decisão representada pela quantidade do produto a transportar;
- o estado representado pela quantidade diária de vagões, necessária para efetuar o transporte.

É preciso notar entretanto, que o modelamento proposto acima só se aplica ao problema da ida pois, se for aplicá-lo à volta dos vagões, teria que alterar a definição da decisão, já que, na volta não existem produtos para transportar, os vagões retornam vazios.

Outro inconveniente, é que não se pode pensar nos dois subproblemas (ida e volta) simultaneamente (ida + volta) pois, todos estes fatores originam uma formulação muito complexa devido à quantidade extremamente grande de informações que necessitam ser processadas e armazenadas, o que quase impossibilita a solução.

Uma outra alternativa é utilizar a técnica da Programação Multiobjetivo que pode ser encontrada em [15] ou, em [31], no qual é abordado um problema de transporte com múltiplos objetivos conflitantes sujeito às restrições, e utiliza a programação multiobjetivo aproximada para resolver o problema, onde cada objetivo recebe uma prioridade de solução e cada solução não pode ser alterada ao resolver os demais com prioridades inferiores.

Para o problema tratado aqui pode-se admitir para cada tipo de vagão uma função objetivo relacionada à quantidade dos produtos que está sendo levada por este vagão, com os respectivos custos.

Ao fim do processo, esta formulação torna-se proibitivamente grande, por causa do grande número de funções objetivo e, principalmente, do problema da volta, que torna impossível fazer uma formulação simultânea (ida + volta). Isto decorre dos custos relacionados e das limitações impostas na volta serem diferentes dos da ida do vagão.

Conclui-se, pois, que apesar da eficiência de todos estes métodos, o algoritmo de Luchesi (encontrado em [24]) - a Programação Dinâmica - a Programação Multiobjetivo, opta-se por não utilizá-los na solução do problema aqui proposto devido à grande complexidade apresentada, principalmente, quando trata-se da volta dos vagões descarregados e tenta-se

Como se vê, para resolver o problema, é preciso utilizar um método de solução que resolva os dois subproblemas simultaneamente.

Sendo assim, é apresentada neste trabalho uma forma alternativa de abordar o problema em questão, baseado na heurística e em alguns critérios de otimização que serão discutidos nos capítulos seguintes.

No capítulo II encontra-se a Formulação Matemática do problema incluindo a função objetivo e as restrições às quais está submetida. O capítulo III apresenta a Metodologia de Solução baseada em heurística, o algoritmo desenvolvido e o diagrama de blocos correspondente. As aplicações deste algoritmo com as respectivas análises dos resultados computacionais obtidos estão no capítulo IV e as conclusões finais, juntamente com algumas propostas futuras, encontram-se no capítulo V.

## Capítulo 2

# Formulação Matemática



## 2.1 Introdução

O problema tratado neste trabalho possui a estrutura de um problema de transporte multiproduto (PTM) no qual há o escoamento de vários produtos numa mesma malha ferroviária. Estes são transportados por vagões de uma estação-origem até uma estação-destino passando por estações intermediárias. Neste sentido, podem haver diversos caminhos para o vagão percorrer e dentre esses caminhos deseja-se encontrar o melhor possível, de modo a minimizar o custo de transporte (ou maximizar o lucro) considerando que:

- os produtos transportados são diferentes (uns são grãos, outros são combustíveis, minérios, etc...);
- cada produto possui uma estação de origem, uma de destino e um tempo de percurso;
- existem tipos de vagões específicos para cada produto;
- existe uma limitação de frota de vagões por tipo;
- cada trecho entre duas estações da ferrovia possui uma capacidade máxima de carga que pode ser tracionada;
- o custo associado ao transporte está relacionado com o tipo e a quantidade do produto que será transportada;
- a escolha do produto e a quantidade a transportar devem envolver o problema da redistribuição dos vagões descarregados nos destinos.

Diante das características apresentadas acima e no capítulo 1, é desenvolvido um modelamento para o problema definido.

Este é modelado como um problema de otimização linear, como será feito nos próximos itens deste capítulo.

## 2.2 Modelo Matemático

O modelamento do problema definido no ítem anterior deve tratar, simultaneamente, os dois subproblemas nele embutidos, a saber:

1. **O problema da carga**, que define a “ida” do vagão quando ele está carregando o produto; e
2. **O problema do vagão vazio**, que define a “volta” do vagão para ser novamente carregado após ter sido descarregado.

É de suma importância ressaltar que o mesmo tipo de vagão pode transportar vários tipos de produto e cada tipo de produto pode ser levado por mais de um tipo de vagão. Portanto, o vagão ao ser descarregado na estação de destino, não retorna necessariamente à mesma estação de origem, podendo ir até à estação de origem mais próxima que necessite, em específico, desses vagões vazios para efetuar um novo transporte dos produtos. Esta situação, criada devido à alocação dos vagões na volta ser diferente da ocorrida na ida, é a principal razão pela qual fica extremamente difícil usar a programação dinâmica para modelar o problema, pois neste caso tem que se fazer dois modelamentos, um para a ida e outro para a volta do vagão.

A fim de reproduzir o problema descrito, cria-se uma formulação matemática com uma função objetivo, que visa minimizar o custo do transporte de carga (ida do vagão) e o custo do percurso do vagão vazio (volta do vagão), submetida às restrições: de balanceamento, de limitação de frota e de limitação de tração.

A propósito, vale assinalar que o subproblema que descreve a volta do vagão é influenciado apenas, pelas duas primeiras restrições.

Analicamente a função desenvolvida e as equações de desigualdade criadas para representar respectivamente a função objetivo e as restrições (como pode ser visto em [5]), são:

$$PTM = \begin{cases} \min \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \sum_{j=1}^{\mathcal{J}} (c_{kj}^t x_{kj} + c_{kj}^t x'_{kj}) \\ \text{s.a.} \\ Ax_{kj} \leq r_{kj} ; \quad k = 1, \dots, \mathcal{K}; j = 1, \dots, \mathcal{J} \\ \sum_{j=1}^{\mathcal{J}} Ax'_{kj} = \sum_{j=1}^{\mathcal{J}} r'_{kj} = - \sum_{j=1}^{\mathcal{J}} Ax_{kj} = r'_k ; \quad k = 1, \dots, \mathcal{K} \\ \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \sum_{j=1}^{\mathcal{J}} D_{kj} x_{kj} \leq b \\ \sum_{j=1}^{\mathcal{J}} (t_{kj} \sigma_{kj} x_{kj} + T'_k x'_{kj}) \leq f_k ; \quad k = 1, \dots, \mathcal{K} \\ 0 \leq \sigma_{kj}^t x_{kj} \leq \mu_{kj} ; \quad k = 1, \dots, \mathcal{K}; j = 1, \dots, \mathcal{J} \\ x_{kj} \geq 0, \quad \forall k, j \end{cases} \quad (2.1)$$

onde:

$j$  - representa os produtos

$k$  - representa os vagões

$i$  - representa os trechos

$n$  - representa as estações

$\mathcal{J}$  - número total de tipos de produtos

$\mathcal{K}$  - número total de tipos de vagões

$\mathcal{I}$  - o dobro do número total de trechos (porque os vagões podem transportar os produtos nos dois sentidos)

$\mathcal{N}$  - número total de estações

$c_{kj}$  - vetor custo por unidade do vagão  $k$  carregando o produto  $j$ , onde :

$$c_{kj}^t = [c_{kj}^1, c_{kj}^2, c_{kj}^3, \dots, c_{kj}^{\mathcal{I}}]^t$$

$c'_{kj}$  - vetor custo por unidade do vagão k descarregado(vazio) no trecho i para transportar o produto j, onde :

$$c'_{kj} = [c'_{kj}{}^1 c'_{kj}{}^2 c'_{kj}{}^3 \dots c'_{kj}{}^I]^t$$

$x_{kj}$  - vetor quantidade do vagão k(por unidade) carregando o produto j(a determinar), onde :

$$x_{kj} = [x_{kj}{}^1 x_{kj}{}^2 x_{kj}{}^3 \dots x_{kj}{}^I]^t$$

$x'_{kj}$  - vetor quantidade do vagão k(por unidade) descarregado para o transporte do produto j, onde :

$$x'_{kj} = [x'_{kj}{}^1 x'_{kj}{}^2 x'_{kj}{}^3 \dots x'_{kj}{}^I]^t$$

A - matriz de incidência nó-arco do grafo representando a rede ferroviária

$r_{kj}$  - vetor coluna dos requerimentos da quantidade total do vagão k carregado com o produto j

$r'_{kj}$  - vetor coluna dos requerimentos da quantidade total do vagão k descarregado para levar o produto j

$r'_k$  - vetor coluna da soma algébrica dos  $r'_{kj}$

$D_{kj}$  - uma matriz diagonal com 1's nas posições referentes aos trechos onde está passando o vagão do tipo k carregado com o produto do tipo j

$b$  - vetor coluna da capacidade de tração por arco, i.e., limites de tração no trecho i, onde :

$$b^t = [b^1 b^2 b^3 \dots b^I]^t$$

$\sigma_{kj}$  - vetor com 1's nas posições referentes aos arcos de origem do produto j levado pelo vagão do tipo k , onde:

$$\sigma_{kj} = [\sigma_{kj}{}^1 \sigma_{kj}{}^2 \sigma_{kj}{}^3 \dots \sigma_{kj}{}^I]^t$$

$t_{kj}$  - constante representando o tempos de viagem gasto pelo vagão k para transportar o produto j

$T'_k$  - vetor dos tempos de viagem gasto pelo vagão vazio k para percorrer cada trecho, onde :

$$T'_k = [T'_k{}^1 T'_k{}^2 T'_k{}^3 \dots T'_k{}^I]$$

$f_k$  -frota tipo k disponível

$\mu_{kj}$  -restrições individuais por produtos j transportados pelo vagão k (quantidade diária permitida, isto é, a cadência)

As seis últimas equações do PTM representam as restrições deste problema. Destas, as duas primeiras são as de balanceamento associadas à ida e à volta do vagão respectivamente.

Como é mais cômodo trabalhar com restrições de igualdade, pode-se introduzir k arcos artificiais e um único nó artificial à rede real para obter o balanceamento do grafo, obtendo por conseguinte uma restrição de igualdade.

A limitação da capacidade de tração por arco, isto é, a limitação de tração nos trechos da malha ferroviária está diretamente influenciada pela potência da locomotiva que conduz os vagões, ou, pelas características topográficas do trecho. Portanto cada trecho de linha origina uma restrição de tração. Essa restrição é descrita pela terceira equação e não se aplica à volta do vagão, porque o peso do vagão vazio é menor em relação à capacidade de tração nos trechos, sendo portanto menos restritivo.

Na quinta equação aparece a restrição de frota que limita os diferentes tipos de frota fazendo com que cada uma não ultrapasse o número máximo de vagão disponível na ida e na volta do vagão. A alocação dos vagões é feita de acordo com o tipo do vagão correspondente ao tipo do produto. O tempo de percurso do vagão, na ida e na volta, é usado para ponderar a equação representado pela constante “ $t_{kj}$ ” e pelo vetor “ $T'_k$ ” respectivamente.

Como cada produto pode ser levado por mais de um tipo de vagão, a escolha deve favorecer o produto com a maior diferença entre o custo de transporte e a tarifa, ou seja, na ida deve dar preferência ao que fornecer o maior lucro à ferrovia.

Nesse mesmo sentido, a regra é válida para a alocação dos vagões vazios, estes devem ser alocados para carregar os produtos que forneçam um custo mínimo de transporte à ferrovia. Tanto na ida como na volta do vagão, o único parâmetro utilizado para selecionar a distribuição dos vagões é o lucro (tarifa – custo), dos produtos que estes vão transportar.

A última equação pode representar a limitação dos pátios. Esta determina a quantida-

de máxima de cada produto  $j$  que pode ser levada pelo vagão do tipo  $k$ , ou seja, indica a cadência, ou melhor dizendo, a capacidade de carga e descarga diária dos vagões nas estações.

As equações da formulação geral ficam mais fáceis de entender quando apresentadas na forma matricial abaixo:

$$\begin{bmatrix} [A_1] & [I_1] & & & \\ & [A_2] & & & \\ & & [I_2] & & \\ & & & [I_3] & \\ & & & & [I_4] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [X] \\ [S] \\ [S'] \\ [S''] \\ [S'''] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R] \\ [Z] \\ [B] \\ [F] \\ [M] \end{bmatrix}$$

onde:

$$A_1 = \begin{bmatrix} [A | 0] & & & \\ & \ddots & & \\ & & [A | 0] & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}; I_1 = \begin{bmatrix} [I] & & & \\ & \ddots & & \\ & & [I] & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} [A | A] & \cdots & [A | A] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [A | A] & \cdots & [A | A] \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} [D_{11} | 0] & \cdots & [D_{KJ} | 0] \end{bmatrix}; I_2 = \begin{bmatrix} [I] \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} [t_{11}\sigma_{11} | T'_{11}] & \cdots & [t_{1J}\sigma_{1J} | T'_{1J}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [t_{K1}\sigma_{K1} | T'_{K1}] & \cdots & [t_{KJ}\sigma_{KJ} | T'_{KJ}] \end{bmatrix}; \mathcal{I3} = \begin{bmatrix} [I] & & \\ & \ddots & \\ & & [I] \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} [\sigma'_{11} | 0] & & \\ & \ddots & \\ & & [\sigma'_{KJ} | 0] \end{bmatrix}; \mathcal{I4} = \begin{bmatrix} [I] & & \\ & \ddots & \\ & & [I] \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} [X_{11}] \\ \cdots \\ [X'_{11}] \\ \vdots \\ [X_{KJ}] \\ \cdots \\ [X'_{KJ}] \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ \vdots \\ S_{KJ} \end{bmatrix}; \mathcal{S}'' = \begin{bmatrix} S''_{11} \\ \vdots \\ S''_{KJ} \end{bmatrix}; \mathcal{S}''' = \begin{bmatrix} S'''_{11} \\ \vdots \\ S'''_{KJ} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_J \end{bmatrix}; \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \mathcal{B} = [b]; \mathcal{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_K \end{bmatrix}; \mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{KJ} \end{bmatrix}$$

Na estrutura acima pode-se observar algumas características, como:

- a matriz de restrições apresenta uma estrutura bloco triangular para as equações de balanceamento (ida do vagão) e de limitação de pátio;
- a matriz de restrições também apresenta a estrutura bloco triangular para as restrições de acoplamento representadas pelas equações de balanceamento (volta do vagão), de tração e de frota;
- a matriz de restrições é bastante esparsa.

Estas três características sugerem a utilização de um método de decomposição, explorando melhor as duas primeiras características, para resolver o problema. Esta sugestão pode ser encontrada na literatura ver [7] e [22], na qual o método é dividido em dois: “price-directive” e “resource-directive”.

No próximo item, é apresentado um método para resolver o problema proposto (PTM), sendo que este é decomposto em dois subproblemas já mencionados nos itens passados, e depois, é feito um acoplamento das duas soluções com o propósito de chegar à solução final do PTM.



## 2.3 Um Método de Decomposição

O método de Decomposição aqui proposto, é uma forma alternativa de resolver o PTM, como pode ser visto em [6]. Para se ter uma idéia mais clara de como funciona o método, é apresentado a seguir, um diagrama (figura 2.1) que descreve o processo utilizado para solucionar o problema. Este, baseado na formulação matemática feita anteriormente, subdivide o PTM (desmembrando-o em dois), formula e resolve cada subproblema. Em seguida, faz a junção dos dois através do acoplamento das suas soluções para encontrar a solução do PTM.

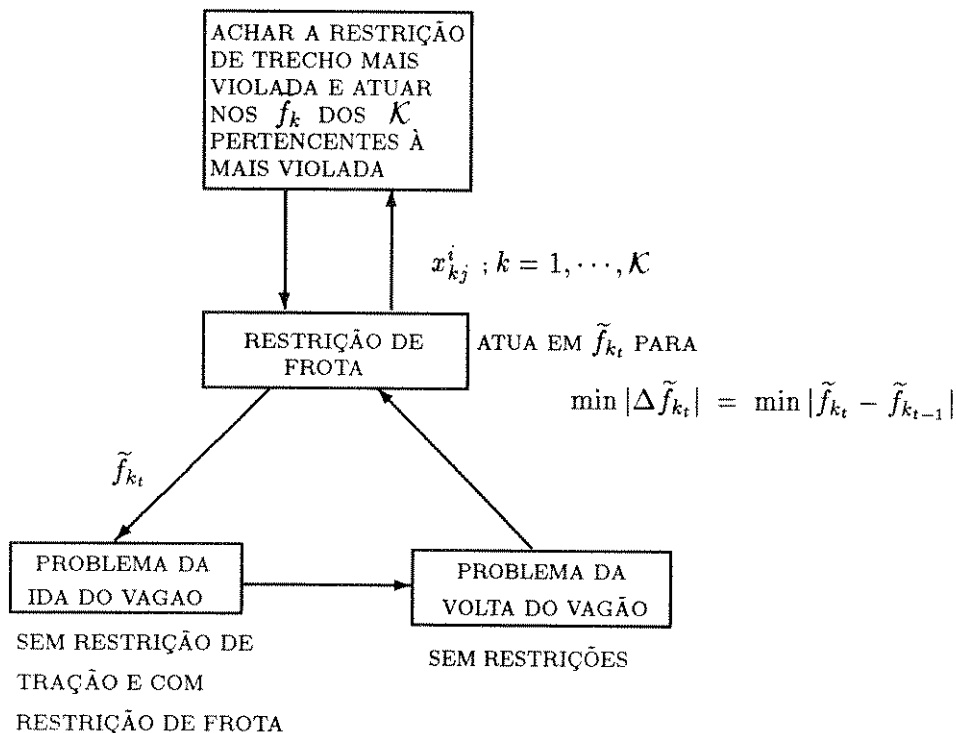


Figura 2.1: Método de Decomposição com Acoplamento

No diagrama acima, partindo da identificação e da distribuição dos vagões de acordo com os tipos dos produtos que eles podem levar, é aplicada a restrição de frota e a de trecho.

A limitação de frota é feita separadamente para cada tipo de vagão e a de trecho é utilizada para fazer o acoplamento da solução dos subproblemas.

Para efetuar a restrição de frota, atua-se na limitação  $\tilde{f}_k$  da frota do tipo k.

Então, considerando:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{k,\text{inicial}} &= f_{k,\text{real}} = \text{quantidade de vagões disponíveis da frota em questão} \\ \Delta \tilde{f}_{k_t} &= \sum_{j=1}^J (t_{kj} \sigma_{kj}^t x_{kj} + T_k' x_{kj}') - \tilde{f}_{k_{t-1}} = (\text{número de vagões gastos no transporte} \\ &\text{na iteração } t) - (\text{número de vagões do tipo } k \text{ disponíveis na frota na iteração anterior}) \\ \tilde{f}_{k_t} &= \tilde{f}_{k_{t-1}} - \Delta \tilde{f}_{k_t} = (\text{número de vagões disponíveis na frota do tipo } k \text{ na iteração} \\ &\text{anterior}) - (\text{variação entre o número de vagões gasto e o que estava disponível}), \\ &\text{deseja-se } \min |\Delta \tilde{f}_{k_t}|, \text{ onde para critério de convergência pode-se sugerir } \Delta \tilde{f}_k \leq \text{quantidade} \\ &\text{mínima de vagões desejada entre a quantidade disponível e a consumida, ou seja, é neces-} \\ &\text{sário aproximar cada vez mais } \Delta \tilde{f}_k \text{ de zero.} \end{aligned}$$

Em seguida, submete-se a soma das frotas, independente do tipo de vagão, à restrição de trecho. Neste caso, identifica-se qual o trecho com a capacidade mais violada e elimina-se esta violação atuando nas frotas que passam naquele trecho.

Em seguida reduz-se a quantidade de vagões destas frotas e submete-as novamente à restrição de frota. Depois retorna-se à restrição de trecho e verifica se ainda há trecho violado. Este processo continua até satisfazer todas as restrições.

Nos itens seguintes são apresentados os dois subproblemas com as suas formulações e o acoplamento das soluções.

### 2.3.1 Problema da “Ida” dos vagões

O problema de transporte multiproduto de carga para a ida dos vagões considera apenas, o subproblema que descreve o trajeto do vagão carregado da estação-origem até a estação-destino num intervalo de tempo e considera as restrições de trecho, de frota, de balanceamento e de pátio.

A solução destes problemas pode ser feita pelo método da decomposição ou pelo método do particionamento encontrados no artigo de Kenington, ver [22]. Este traz um algoritmo de multifluxo e mostra as duas aproximações, particionamento e decomposição, usadas para desenvolver técnicas especializadas que resolvem o problema multifluxo.

Assad em [7], propõe uma taxonomia hierárquica de modelamento e descreve uma classe de modelos delineando a rota de trens, feitos do ponto de vista de fluxos de rede e de otimização combinatória. Ele também compara o modelo com dois modelos de rede numa ferrovia e discute possibilidades para desenvolver um algoritmo.

Luchesi em [24], aborda um problema de roteamento de vagões de carga numa ferrovia com restrições laterais, semelhante ao subproblema da ida tratado aqui. Para solucionar o problema, ele opta por utilizar o método de particionamento e adapta um modelo matemático para o mesmo. Porém, este modelamento não se aplica ao problema da “Ida” dos vagões descrito neste trabalho, pois ele considera o problema estático sem se preocupar com a duração das viagens. Assim, um novo modelo é criado para este tipo de problema.

Então, para cada vagão do tipo  $k$  ( $k=1, \dots, \mathcal{K}$ ), tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{j=1}^{\mathcal{J}} c_{kj}^t x_{kj} \\ \text{s.a.} \\ Ax_{kj} \leq r_{kj}; \quad j = 1, \dots, \mathcal{J} \\ \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \sum_{j=1}^{\mathcal{J}} D_{kj} x_{kj} \leq b \\ \sum_{j=1}^{\mathcal{J}} (t_{kj} \sigma_{kj} x_{kj}) \leq \tilde{f}_k; \quad k = 1, \dots, \mathcal{K} \\ 0 \leq \sigma_{kj}^t x_{kj} \leq \mu_{kj}; \quad k = 1, \dots, \mathcal{K}; j = 1, \dots, \mathcal{J} \\ x_{kj} \geq 0; \quad k = 1, \dots, \mathcal{K}; j = 1, \dots, \mathcal{J} \end{array} \right. \quad (2.2)$$

onde:

$\tilde{f}_k$  -frota tipo  $k$  disponível

As equações de restrição representam as restrições de balanceamento, de tração, de frota e de pátio, respectivamente.

As características das variáveis desta formulação, podem ser encontradas na formulação geral do item 2.2, exceto  $\tilde{f}_k$  que representa a limitação de frota, como já foi explicado no item anterior.

A formulação apresentada para este tipo de problema pode ser melhor visualizada pela seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} [A_1] & [I_1] & & & \\ [D] & & [I_2] & & \\ [F] & & & [I_3] & \\ [S] & & & & [I_4] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [X] \\ [S] \\ [S'] \\ [S''] \\ [S'''] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R] \\ [B] \\ [F] \\ [M] \end{bmatrix}$$

onde:

$$A_1 = \begin{bmatrix} [A] & & & \\ & \ddots & & \\ & & [A] & \end{bmatrix}; I_1 = \begin{bmatrix} [I] & & & \\ & \ddots & & \\ & & [I] & \end{bmatrix}$$

$$D = \left[ \begin{bmatrix} D_{11} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} D_{KJ} \end{bmatrix} \right]; I_2 = \left[ \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} \right]$$

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} [t_{11}\sigma_{11}] & \cdots & [t_{1J}\sigma_{1J}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [t_{K1}\sigma_{K1}] & \cdots & [t_{KJ}\sigma_{KJ}] \end{bmatrix}; \mathcal{I3} = \begin{bmatrix} [I] & & \\ & \ddots & \\ & & [I] \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} [\sigma_{11}^t] & & \\ & \ddots & \\ & & [\sigma_{KJ}^t] \end{bmatrix}; \mathcal{I4} = \begin{bmatrix} [I] & & \\ & \ddots & \\ & & [I] \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} [X_{11}] \\ \vdots \\ [X_{KJ}] \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} \\ \vdots \\ S_{KJ} \end{bmatrix}; S'' = \begin{bmatrix} S''_{11} \\ \vdots \\ S''_{KJ} \end{bmatrix}; S''' = \begin{bmatrix} S'''_{11} \\ \vdots \\ S'''_{KJ} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_J \end{bmatrix}; B = [b]; F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_K \end{bmatrix}; M = \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{KJ} \end{bmatrix}$$

### 2.3.2 Problema da “Volta” dos vagões

A volta dos vagões é caracterizada pelo subproblema da redistribuição dos vagões descarregados. Este assunto é o mais estudado por ser mais difícil de tratar no contexto dos problemas de transporte ferroviário.

Da literatura pode-se citar alguns modelos propostos para resolver problemas deste tipo, sendo que cada um enfoca diferentes aspectos de operação da ferrovia.

Começando pelos trabalhos mais recentes, tem-se o artigo de Glickman e Sherali, ver [14]. Eles focalizam um sistema grande de distribuição de vagões vazios para um “pool” de companhias. O problema é apresentado de duas maneiras diferentes: uma procura minimizar o custo total da distribuição dos vagões descarregados, considerando o benefício comum das companhias, e a outra utiliza o custo minimizado na primeira para melhorar o balanço de benefícios individuais entre as companhias.

Markowicz e Kornhauser, ver [25] utilizam a simulação para fazer um modelo que avalia a utilização dos vagões vazios numa ferrovia.

Jordan e Turnquist, ver [18], desenvolvem um modelo que incorpora incertezas no suprimento, na demanda e no tempo de viagens dentro do processo da distribuição dos vagões descarregados. O modelo é dinâmico com decisões diárias num plano de horizonte e visa maximizar o lucro esperado sujeito à limitação da quantidade de vagão disponível sobre um espaço de tempo na rede. As variáveis de decisão são as quantidades de vagões enviadas da estação “i” para uma determinada estação “j”, num período “n” no plano de horizonte e cada variável de decisão em uma restrição linear.

Assim, o modelo possui uma função objetivo não linear sujeita às restrições lineares e é resolvido utilizando o algoritmo de Frank-Wolfe, ver [13].

Mendiratta e Turnquist, ver [26], modelam o problema através de submodelos que interagem, representando as atividades em dois níveis no sistema ferroviário.

O primeiro envolve o movimento dos vagões vazios na rede e determina a partir daí, os seus fluxos na rede. No outro nível, existe um modelo de orçamento que determina a oferta e a demanda da rede para vagões vazios em cada estação. A resolução destes submodelos é feita alternadamente, seguida de uma troca de informações. Este procedimento ocorre até que seja encontrada uma solução consistente. Ao final, tem-se o lucro da ferrovia maximizado, limitado pelas restrições de oferta, demanda e institucionais.

Allman, ver [1], aborda o suprimento de vagões vazios pela ferrovia. Ele examina o uso

de vagões não possuídos pela ferrovia e discute o aumento do uso destes vagões, propondo diversas alternativas para que isto ocorra.

Todos os modelos citados anteriormente resolvem a alocação dos vagões vazios. Estes supõem basicamente que cada vagão será alocado de uma estação-origem para uma estação-destino, com um determinado custo de locomoção e, em alguns, considerando o tempo deste percurso.

Em particular para o problema da volta do vagão apresentado aqui, que visa minimizar o custo de alocação dos vagões vazios submetidos à limitação de frota, pode-se atribuir um modelo matemático, baseado no fluxo do caminho mínimo.

Então para cada  $k$  ( $k=1, \dots, \mathcal{K}$ ) tem-se uma formulação da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{j=1}^{\mathcal{J}} c'_{kj} x'_{kj} \\ \text{s.a.} \\ Ax'_{kj} = r'_{kj}; \quad k = 1, \dots, \mathcal{K}; j = 1, \dots, \mathcal{J} \\ x_{kj} \geq 0; \quad k = 1, \dots, \mathcal{K}, j = 1, \dots, \mathcal{J} \end{array} \right. \quad (2.3)$$

onde:

$r'_{kj}$  - vetor coluna do requerimento do vagão vazio  $k$  nas estações

As variáveis que aparecem neste modelo estão descritas no item 2.2 da formulação geral, com exceção de  $r'_{kj}$ , que aqui, apesar de continuar sendo um vetor contendo os requerimentos do vagão vazio do tipo  $k$  em cada estação, é encontrado após resolver o problema da ida dos vagões e ao determinar cada  $x_{kj}$ , pois,  $r'_{kj} = Ax_{kj}$ , isto é,  $r'_{kj}$  representa a quantidade de vagões vazios em cada estação e esta só pode ser determinada quando é conhecido o número de vagões carregados que chegam em cada estação.

Neste modelo não aparece a limitação de frota porque esta é feita no próximo item quando se faz o acoplamento dos dois subproblemas. Neste momento, ocorre a interação das duas soluções, a fim de chegar numa solução ótima comum aos dois subproblemas.

Uma apresentação matricial para esta formulação pode ser como segue:

$$\begin{bmatrix} [A] & & & & [I] \\ & [A] & & & [I] \\ & & \dots & & \\ & & & [A] & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_{11} \\ X'_{12} \\ \vdots \\ X'_{\kappa\mathcal{J}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ \vdots \\ r'_\mathcal{J} \end{bmatrix}$$

### 2.3.3 Acoplamento

Neste ítem, acontece a interação dos dois subproblemas , “Ida” e “Volta” do vagão. Esta é feita através da satisfação da restrição de trecho e de frota.

Então, para aplicar estas restrições aos problemas, primeiro resolve-se o problema da ida do vagão, visando minimizar o custo do transporte da carga submetido à limitação de frota por tipo e depois encontra-se a solução do problema da volta do vagão descarregado, sem submetê-lo a mesma restrição.

Após determinar a solução de cada subproblema, começa o processo de acoplamento.

Este, inicialmente, minimiza uma equação, que faz a diferença entre o total de vagões gasto, juntando a ida com a volta e a quantidade real de vagões disponíveis em cada tipo de frota, ou seja, para cada frota obtém-se o número de vagões que pode ser utilizado, considerando o montante total da ida com a volta, sem ultrapassar a disponibilidade das frotas.

Finalizado o balanceamento de cada frota, verifica-se a restrição de tração por trecho. Esta é feita passando em cada trecho todos os vagões que ali trafegam, independente de serem de tipos diferentes.

Se houver algum trecho que possua a sua capacidade máxima excedida (violada), faz-se uma redução nas frotas que estão passando no mesmo. A frota que será reduzida, é escolhida de acordo com o produto que os seus vagões estão transportando, isto é, dentre os produtos que passam naquele trecho, reduz-se a quantidade do que fornecer um menor lucro operacional à ferrovia. Depois, cada frota é novamente submetida ao balanceamento de frota, retornando logo após a verificação das restrições de trecho.

Este processo iterativo se repete até satisfazer, por completo, as restrições de frota e tração, considerando a interação das soluções dos dois subproblemas.

Vale lembrar que a ordem de aplicação destas restrições não é fixa, podendo começar pela



restrição de trecho e depois aplicar a de frota.

## 2.4 Conclusão

As formulações matemáticas mostradas neste capítulo sugerem um modelamento para o problema geral analisado neste trabalho e para cada subproblema que depois são unidos por um acoplamento. Porém, a formulação geral quando aplicada, exige um esforço computacional muito grande do ponto de vista tanto da máquina como do usuário, devido à enorme quantidade de variáveis que aparece no modelo. O que dificulta encontrar uma solução para o problema através desta formulação, enquanto que a proposta de resolver individualmente os dois subproblemas, fazendo uma junção final, diminui a quantidade de variáveis utilizadas e, portanto, sugere uma alternativa melhor de solução.

Por isso, no próximo capítulo, é apresentada uma Metodologia de Solução baseada no método da programação linear para resolver os dois subproblemas simultaneamente.

A fim de encontrar tal solução é desenvolvido um algoritmo heurístico utilizando a teoria dos grafos que faz a interação da solução dos dois subproblemas.

Este algoritmo é baseado na filosofia da decomposição com acoplamento, como foi apresentada neste capítulo.

## Capítulo 3

# Metodologia de Solução

## 3.1 Introdução

Neste capítulo é desenvolvido e apresentado um método para resolver o problema da alocação de vagões estudado e discutido nos capítulos anteriores.

Referente à formulação matemática com acoplamento, previamente definida, cria-se um método heurístico, ver [3], que fornece uma solução próxima do ótimo para este tipo de problema.

Nos próximos itens é descrito e explicado claramente o método desenvolvido.

## 3.2 Método Heurístico

O método mostrado aqui é bastante simples e baseia-se fundamentalmente na manipulação de uma rede de grafo com a finalidade de obter resultados próximos do ótimo, considerando todas as restrições: limitação de frota por tipo de vagão, limitação da capacidade de tração por trecho, restrição de carga em relação ao produto e ao tipo de vagão correspondente e, finalmente, o problema da redistribuição dos vagões descarregados, nas estações de destino. Além destas restrições, é importante ressaltar que:

- a análise é feita no estado estacionário, ou seja, supõe-se que o processo de carga/volta está em regime. Isto significa que inicia-se o transporte de carga a partir do momento em que todos os vagões descarregados estão nos pátios prontos para transportar as suas respectivas cargas.

O processo da volta do vagão começa só depois que eles chegam nos seus respectivos destinos, são descarregados e estão prontos para retornar às estações que estão precisando de vagões vazios;

- o tempo de percurso é diferente para cada tipo de produto, isto é, o tempo gasto para transportar um produto da sua estação-origem até a sua estação-destino depende da distância e do tipo do produto que está sendo levado;
- a redistribuição dos vagões descarregados deve estar relacionada à restrição de frota e também à busca do percurso que possua o menor custo.

Levando em consideração as questões acima, opta-se por modelar a rede ferroviária através de um grafo no qual os nós representam as estações de origem, as de destino e as intermediárias, e os arcos representam as vias permanentes que interligam as estações. A fim de simplificar a resolução, o problema é subdividido em dois, como foi feito no item 2.3 :

1. o problema da ida (vagão carregado); e
2. o problema da volta (vagão descarregado).

No primeiro, tem-se o transporte dos produtos levados por vagões que saem da estação-origem e chegam à estação-destino, onde são requisitados. No segundo, ocorre o percurso inverso destes vagões. Estes, quando são descarregados, retornam às estações de origem dos produtos, que necessitam de vagões vazios, para novamente efetuar o transporte de carga. Vale lembrar que estes vagões descarregados não retornam necessariamente à mesma estação de origem, ou seja, como cada tipo de vagão pode transportar vários tipos de produtos, em cada viagem (de ida ou de volta) um mesmo tipo de vagão pode não estar carregando o mesmo tipo de produto.

No tocante à ida dos vagões, para facilitar, houve a divisão do problema em duas etapas:

1. satisfação das restrições de tração por trecho; e
2. satisfação das restrições de frota por tipo de vagão.

Esta separação justifica-se devido ao processo da restrição de frota executar frota por frota de acordo com o tipo do vagão, enquanto que as restrições de trecho admitem que para cada trecho existe a soma das frotas de diferentes tipos que compartilham o mesmo trecho.

Observando as etapas, vê-se que as duas consideram simultaneamente o problema da redistribuição dos vagões descarregados.

A ordem de considerar as etapas depende da situação de qual delas está mais restritiva.

A priori, não há conhecimento de quantos vagões carregados chegam nos seus destinos porque a quantidade dos produtos a transportar é submetida à restrição de frota que dispõe de um número limitado de vagões e estes quando carregados passam por trechos e são submetidos à restrição de tração dependendo da capacidade máxima de cada trecho.

No intuito de englobar estes dois aspectos o grafo original (Figura 3.1) é modificado acrescentando nós à rede para designar os vagões carregados chegando aos seus destinos.

Estes nós são conectados por arcos aos nós originais da rede que representam as estações de destino dos vagões cheios. Estes novos nós conectados por arcos à rede assumem a forma de “cachos” e cada nó representa um tipo diferente de produto chegando a sua estação de destino (Figura 3.2).

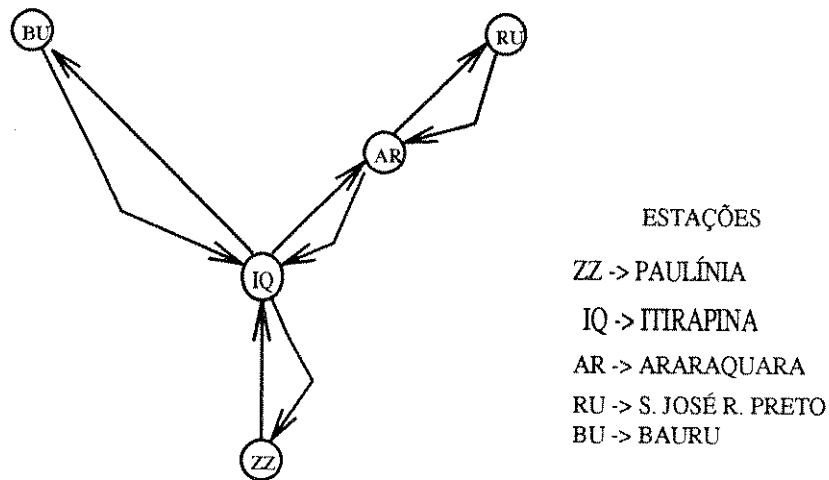


Figura 3.1: Rede Original

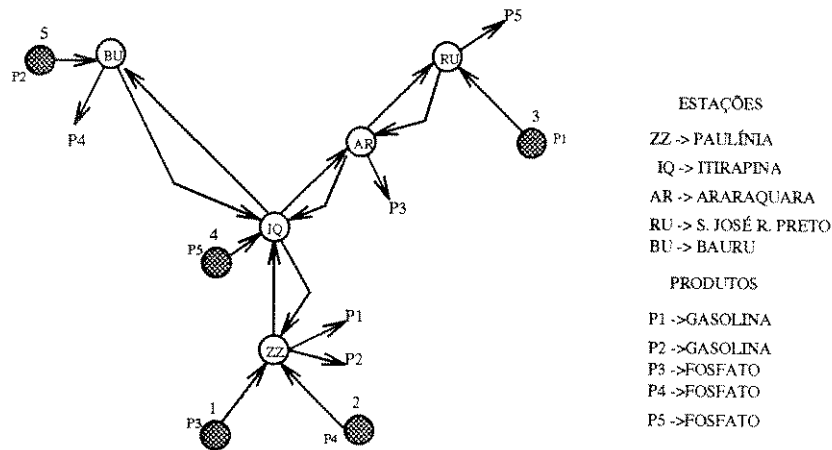


Figura 3.2: “ CACHOS ” para representar os produtos chegando às estações-destino da rede ferroviária (nós: 1,2,3,4,5)

As capacidades dos arcos que constituem o cacho, deve ser igual ou menor que a quantidade diária (cadência) dos produtos a transportar e os custos associados devem ser

os custos de transportar o produto da sua estação de origem até a sua estação de destino. Estes custos são calculados como sendo a diferença entre o quanto a ferrovia ganha (tarifa) e o quanto ela gasta (custo) para transportar.

Com este artifício tem-se a quantidade de vagões que são descarregados nos destinos e por conseguinte o número de vagões vazios disponíveis para serem redistribuídos.

Para influir na limitação de frota e de trecho, criam-se dois nós artificiais denominados de “**fechamento**”. No primeiro, concentra-se todo o tráfego dos vagões carregados e o segundo está ligado ao primeiro através de um arco que possui capacidade igual ao total da frota.

Assim, evidentemente, precisa-se criar arcos artificiais ligando os nós de origem dos produtos ao primeiro nó artificial (Figura 3.3).

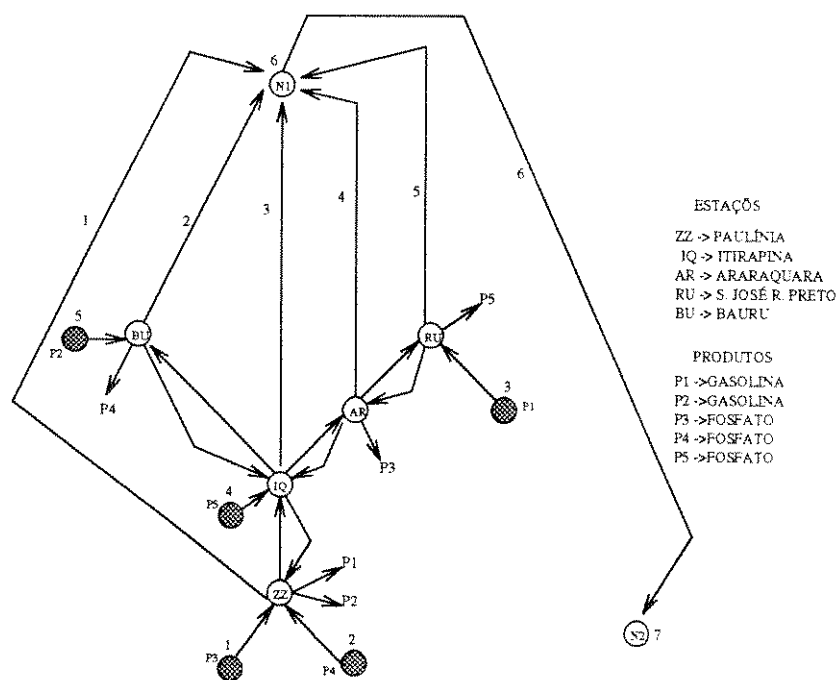


Figura 3.3: Criação de nós artificiais ( 6 e 7 ) e de arco de limitação de frota ( 6 ) e arcos de fechamento ( 1 a 5 )

Considerando que é melhor trabalhar com grafos balanceados, deve-se criar arcos artificiais, denominados de “**transbordo**”, ligando os nós do cache ao segundo nó artificial de fechamento (Figura 3.4).

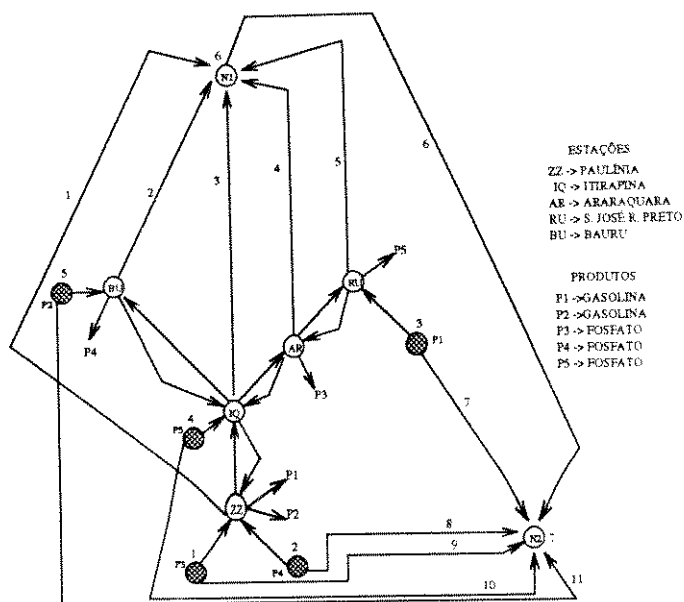


Figura 3.4: Criação de arcos de transbordo ( 7 a 11 )

A verificação da limitação de frota e de trecho é feita separadamente. Para aplicar a restrição de frota utilizam-se os seguintes procedimentos para cada tipo de frota:

1. na rede, introduzem-se e carregam-se os nós dos cachos representando os produtos que utilizam o mesmo tipo de frota em questão para os seus transportes;
2. ajusta-se o limite superior dos arcos dos cachos de acordo com a cadência dos produtos a transportar (ou limitado pelo trecho);
3. impõe-se um limite superior ao arco que faz a limitação de frota, igual à quantidade de vagões disponíveis do tipo de frota em questão;
4. roda-se o algoritmo do fluxo de custo mínimo para determinar a quantidade dos diferentes produtos que serão conduzidos pelo tipo de frota em evidência, isto é. são escolhidos os produtos que possuem o menor custo de transporte. ou melhor, que fornecem o maior lucro à ferrovia.

É importante dizer que na volta do vagão, como estes estão vazios e não retornam necessariamente às mesmas estações de onde vieram, a alocação destes vagões é feita

utilizando a busca do caminho mínimo baseando-se na minimização do percurso atribuído a cada trecho de passagem. Este custo por sua vez é estimado através do cálculo da média entre os custos dos vagões-carregados que passaram por aquele trecho, porque o custo da volta do vagão descarregado não é previamente conhecido.

No final, depois de ter submetido o transporte dos produtos à limitação de frota de acordo com o tipo, **o fluxo nos arcos dos cachos representam a quantidade de produtos transportados e o fluxo nos arcos da rede original determinam o fluxo dos vagões descarregados.**

Agora, paralelamente ao grafo da rede original, cria-se uma rede auxiliar também representando a rede ferroviária real. Nesta nova rede carregam-se todos os produtos que foram escolhidos para serem transportados depois de passarem pela limitação de frota, feita individualmente, independente do tipo de vagão utilizado para transportá-los.

Desse modo, a rede auxiliar serve para fazer a análise da capacidade dos trechos pois sem a preocupação com o tipo de frota carrega-se todos os produtos transportados na rede e utiliza-se os seguintes critérios:

1. procura-se entre os trechos que excederam a sua capacidade máxima o que foi mais violado;
2. em seguida identifica-se os produtos que transitam por este trecho;
3. ajusta-se os limites dos arcos dos cachos de acordo com o seguinte critério: para os produtos que não passam por este trecho iguala-se o limite inferior da capacidade dos arcos dos cachos ao limite superior para impedir que estes produtos diminuam a sua quantidade. Por outro lado, libera-se o limite inferior dos arcos dos cachos representando os produtos que passam pelo trecho;
4. roda-se o algoritmo do fluxo do custo mínimo para selecionar a quantidade dos produtos que continuam fluindo na rede após a limitação da capacidade máxima do trecho. Isto faz com que o trecho escolhido como o mais violado deixe de ultrapassar a sua capacidade.

O processo se repete até que todos os trechos sejam testados e a quantidade dos produtos determinada para passar por estes trechos respeitem os seus limites.



No ítem que segue será mostrado um diagrama de fluxo do algoritmo desenvolvido para este método.

### 3.3 Diagrama de Fluxo

O algoritmo criado utiliza uma metodologia de solução baseada em heurística e em otimização linear para encontrar a melhor política de alocação dos vagões carregados e descarregados, numa rede ferroviária com as características declaradas nos capítulos anteriores, como em [4].

A seguir é apresentado um fluxograma que descreve este algoritmo, porém, antes disso, é importante enfatizar a necessidade da leitura e compreensão dos ítems “2.3” e “3.2” para um perfeito entendimento do fluxograma.

#### 3.3.1 Fluxograma Geral

Este fluxograma (Figura 3.5), ilustra os procedimentos da metodologia desenvolvida neste trabalho de tese, para resolver o PTM (Problema de Transporte Multiproduto), sujeito as suas restrições.

#### 3.3.2 Descrição do Fluxograma

Para um melhor entendimento da figura 3.5 apresentada e por consequência do algoritmo desenvolvido é feita uma descrição detalhada de cada etapa do fluxo, como segue:

##### 1. Inicialização

##### (a) Leitura dos Dados

##### Identificação dos produtos :

- tipo (gasolina, álcool, trigo, arroz, ... );
- quantidade total que necessita ser transportada (demanda);

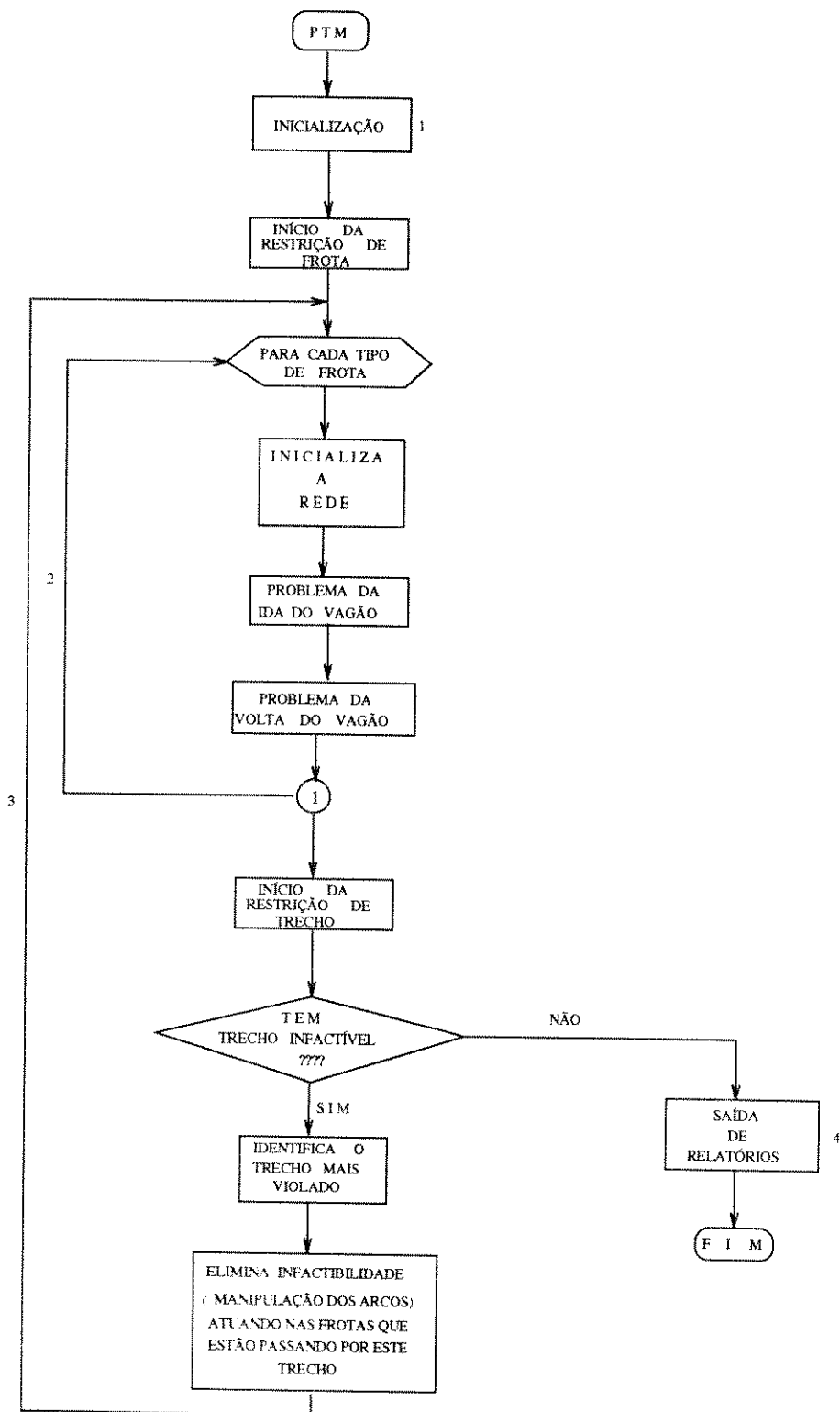


Figura 3.5: Fluxograma Geral

- cadência (quantidade diária permitida);
- estação-origem e estação-destino;
- tarifa (quanto a ferrovia recebe para transportar);
- custo (quanto a ferrovia gasta para transportar);
- tempo de viagem (número de dias que o vagão gasta para chegar a sua estação-destino);
- tipos-vagão (quantos tipos de vagão que podem levar o produto);
- tipos (identifica os tipos de vagão que podem levar o produto).

**Identificação dos trechos :**

- estação-origem e estação-destino, ou seja, onde começa e onde termina o trecho;
- distância (comprimento);
- capacidade máxima.

**Identificação das frotas :**

- tipo do vagão (Tanque-Combustível (TC), Hooper (HS), Fechado(FR)...);
- tara (peso dos vagões vazios);
- capacidade máxima de carga de cada vagão;
- tempo-vazio (tempo que o vagão-vazio gasta para ir da origem ao destino);
- quantidade de vagões em cada tipo de frota.

**(b) Construção da rede original**

**Criação dos nós** , representando as estações-origem, estações-destino e estações-intermediárias;

**Criação dos arcos** , interligando os nós, para representar os trechos de linha que ligam as estações numa ferrovia.

**2. Restrição de Frota**

Para cada tipo de frota:

**Inicializa a rede** - introduz-se os nós dos cachos à rede e carrega-os de acordo com o produto que cada um representa.

**Problema da ida do vagão** - faz-se a limitação de frota ajustando o limite superior dos arcos dos cachos de acordo com a cadência dos produtos (ou limitado pelo trecho). Esta limitação procura minimizar os  $|\Delta \tilde{f}_k|$  calculados (ver ítem 2.3). Desse modo, aplica-se o algoritmo do fluxo do custo mínimo para determinar o fluxo permitido de cada produto, dando prioridade ao que fornecer o maior lucro à ferrovia.

**Problema da volta do vagão** - neste não é feita a limitação de frota diretamente. Através do acoplamento, ele utiliza a limitação realizada na ida do vagão, pois o processo da volta só ocorre após os vagões chegarem carregados nas estações, como descrito no ítem 2.3 .

O processo finaliza após aplicar a restrição de frota em todos os tipos de frota. Ao final, tem-se nos arcos dos cachos o fluxo da quantidade dos produtos que foi transportada e nos arcos da rede construída inicialmente tem-se o fluxo dos vagões descarregados (vazios).

Nesse passo aparece na rede a solução dos dois subproblemas. *A solução da ida está representada nos arcos dos cachos e a solução da volta dos vagões-vazios aparecem nos arcos da rede.*

### 3. Restrição de Trecho

Em cada trecho aplica-se esta restrição conjuntamente para as frotas que nele estão passando.

**Identificação do trecho mais violado** - do conjunto dos trechos com suas capacidades extrapoladas, escolhe-se o mais violado. Depois, registra-se os tipos de vagões que estão passando por aquele trecho.

**Elimina infactibilidade** - atua-se nas frotas que possuem o fluxo neste trecho e reduz-se as suas quantidades baseadas em alguns critérios, a saber:

- para os vagões carregados que não passam no trecho, iguala-se o limite inferior da capacidade dos arcos dos cachos ao limite superior, impedindo a diminuição dos mesmos;
- em contrapartida, para os vagões-carregados que passam no trecho, libera-se o limite inferior dos arcos dos cachos;

- aplica-se novamente todo o processo da limitação de frota, às frotas que devem sofrer alterações nos números de vagões que passam no trecho escolhido.
- roda-se o PFCM (problema do fluxo do custo mínimo), determinando a quantidade de vagões e de qual produto será feita a redução.

A restrição de trecho termina quando não houver mais trechos com sua capacidade máxima estourada.

#### 4. Saída de relatórios

Após submeter o problema às restrições de frota e trecho, saem os relatórios finais com os seguintes resultados:

**quantidade de produto transportada** - fluxo de cada produto, limitado pelas restrições.

**tipo de vagão que leva os produtos** - determinado de acordo com o tipo do produto correspondente transportado e com a prioridade de alocação nos vagões atribuída a cada produto.

**destino dos vagões descarregados (vazios)** - as estações de destino dos vagões são iguais às estações de origem dos produtos que podem ser transportados por este tipo de vagão. Este só pode ser definido quando identifica-se as estações que necessitam de vagões vazios e que estão mais perto da estação onde foram descarregados.

**quantidade de vagões descarregados disponíveis** - fluxo de vagões vazios alocados para cada estação-origem dos produtos que necessitam ser transportados. Este fluxo só é determinado depois de resolver o problema da ida dos vagões carregados pois a quantidade de vagões-descarregados destinados a cada estação-origem é de acordo com o número de vagões-carregados que saiu desta mesma estação, isto porque os vagões vazios são encaminhados a estas estações para efetuar um novo transporte de carga.

Observa-se ao final deste capítulo que a metodologia desenvolvida e descrita aqui resolve o PTM sem tornar complexa a sua aplicação. Isto é, trata-se de um método simples de implementar, fornecendo resultados eficientes.

## Capítulo 4

# Aplicações e Resultados Computacionais

## 4.1 Introdução

Neste capítulo são feitos testes aplicativos da metodologia desenvolvida. Para tais, utiliza-se alguns exemplos representando um sistema ferroviário de transporte de carga multiproduto, com seus respectivos resultados computacionais. Para analisar estes resultados, são utilizados dois grupos de exemplos representando um sistema ferroviário com diferentes características: diferentes quantidades de produtos, rotas distintas, diferentes restrições, etc. Estes exemplos ilustram os problemas de uma ferrovia através de dados reais da rede ferroviária de carga do Estado de São Paulo, gentilmente fornecidos pela FEPASA. Nos itens seguintes são apresentados os exemplos, seus resultados computacionais e as respectivas análises.

## 4.2 Exemplos

Os exemplos trabalham com redes de diversos tamanhos, comportando fluxos de produtos distintos transportados por diferentes tipos de vagões. Em cada exemplo, inicialmente, constam dados referentes aos trechos, produtos e frotas. Para facilitar a compreensão destes dados, eles são apresentados em tabelas e os respectivos resultados computacionais também são organizados em tabelas por ordem de saída. Com o intuito de realizar uma análise comparativa, os mesmos tipos de exemplos aparecem primeiro isentos do conjunto de restrições (de frota e de trecho) e gradativamente, insere-se cada restrição. Isto gera diferentes situações para um mesmo tipo de exemplo, o que favorece uma análise comparativa dos resultados. O primeiro grupo de exemplos representa uma rede ferroviária contendo o fluxo de cinco produtos transportados por dois tipos de vagões, passando por quatro trechos, como mostram os quatro primeiros exemplos (1.1 a 1.4). O segundo representa a rede ferroviária com fluxo de quinze produtos transportados por três tipos de vagões, passando por vinte e dois trechos, como aparece nos exemplos subsequentes (1.5 a 1.8).

Exemplo 1.1. Rede ferroviária com cinco produtos, dois tipos de vagões e **sem restrições**:

Dados da Rede ferroviária

quantidade de estações = 5

número de trechos = 4

Trecho	est.origem	est.dest	distância (km)	capac. max (ton.)	tempo vazio (dia)
1	ZZ	IQ	136.0	76700.0	1.0
2	IQ	AR	140.0	76700.0	1.0
3	AR	RU	120.0	70000.0	1.0
4	IQ	BU	150.0	70000.0	1.0

Tabela 4.1: *Dados referentes aos TRECHOS*

quantidade de produtos = 5

quantidade de tipos de vagões = 2

Produto	orig.	dest.	quant. (ton.)	cadência (ton.)	tarifa Cr\$	custo Cr\$	capac. (ton.)	tempo (dia)	tipos-vagão	tipos
GAS	ZZ	RU	5000	500	7.0	3.0	50.0	3	1	TC
GAS	ZZ	BU	5000	500	6.0	2.0	50.0	2	1	TC
FOS	AR	ZZ	5000	200	5.0	2.0	50.0	2	1	HS
FOS	BU	ZZ	5000	200	5.0	2.0	50.0	2	1	HS
FOS	RU	IQ	5000	200	5.0	2.0	50.0	2	1	HS

Tabela 4.2: *Dados referentes aos PRODUTOS*



frota máxima por tipo de vagão

Tipo	máximo (un.)	tara (ton.)
TC	100	25.0
HS	100	25.0

Tabela 4.3: Frota máxima por tipo de vagão

### RELATÓRIO dos RESULTADOS

vagão tipo = 1

frota máxima = 100

Produto	fluxo		quant./dia (ton) (vagões)	receita×1000Cr\$ (por dia)	custo×1000Cr\$ (por dia)	líquido×1000Cr\$ (por dia)
	orig.	dest.				
GAS	ZZ	RU	500 10	3.50	1.50	2.00
GAS	ZZ	BU	500 10	3.00	1.00	2.00

Tabela 4.4: Vagões carregados/ dia (IDA)

Tipo-vagão	de	para	quantidade
TC	ZZ	IQ	0.
TC	IQ	AR	0.
TC	AR	RU	0.
TC	IQ	BU	0.
TC	IQ	ZZ	20.
TC	AR	IQ	10.
TC	RU	AR	10.
TC	BU	IQ	10.

Tabela 4.5: Vagões descarregados/ dia (VOLTA)

vagão tipo = 2

frota máxima = 100

Produto	fluxo orig. dest.	quant./dia (ton) (vagões)	receita×1000Cr\$ (por dia)	custo×1000Cr\$ (por dia)	líquido×1000Cr\$ (por dia)
FOS	AR ZZ	200 4	1.00	0.40	0.60
FOS	BU ZZ	200 4	1.00	0.40	0.60
FOS	RU IQ	200 4	1.00	0.40	0.60

Tabela 4.6: Vagões carregados/ dia (IDA)

Tipo-vagão	de	para	quantidade
HS	ZZ	IQ	8.
HS	IQ	AR	8.
HS	AR	RU	4.
HS	IQ	BU	4.
HS	IQ	ZZ	0.
HS	AR	IQ	0.
HS	RU	AR	0.
HS	BU	IQ	0.

Tabela 4.7: Vagões descarregados/ dia (VOLTA)

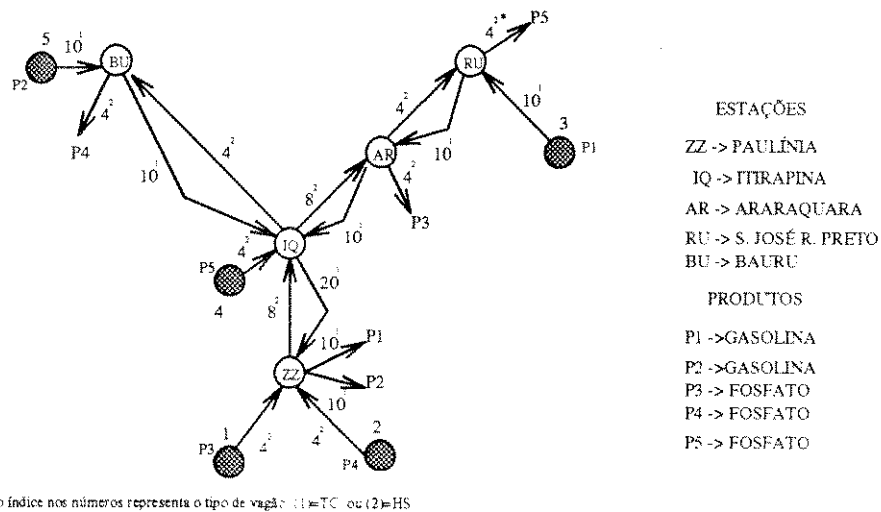


Figura 4.1: Grafo-solução Exemplo 1.1

Nas três primeiras tabelas vistas acima, aparecem os dados referentes aos trechos, produtos e frotas, respectivamente. Estes são suficientes para a aplicação do algoritmo.

Na tabela 4.1, têm-se as estações-origem e destino do trecho, a distância (ou comprimento), a capacidade máxima de tração e o tempo que o vagão-vazio gasta para percorrer aquele trecho.

Todas as informações dos produtos necessárias estão na tabela 4.2. Nesta constam as estações-origem e destino dos produtos, as demandas, as cadências (quantidade diária permitida), as tarifas (quanto a ferrovia recebe para efetuar o transporte), os custos (quanto a ferrovia gasta no transporte), as capacidades (quantidade máxima de carga por dia que o vagão-vazio pode transportar), os tempos de viagem (duração do transporte feito pelo vagão), a quantidade de tipos de vagões que pode levar o produto e os tipos de vagões que podem transportar este mesmo produto.

A frota disponível, os tipos de vagões que a compõem e o peso (tara) dos mesmos estão na tabela 4.3.

As tabelas 4.4 a 4.7, apresentam os resultados computacionais da aplicação do algoritmo neste exemplo.

As quatro tabelas dos resultados determinam as soluções do problema da ida e da volta do vagão, separados pelo tipo do vagão.

A solução para a ida do vagão-carregado aparece na tabela 4.4 (vagão do tipo-1) e na tabela 4.6 (vagão do tipo-2). Estas tabelas, além dos tipos e das estações-origem e destino dos produtos, incluem também, a quantidade transportada dos produtos, a receita ( $\text{tarifa} \times \text{quant./dia}$ ), o custo ( $\text{custo} \times \text{quant./dia}$ ) e o lucro líquido ( $\text{receita} - \text{custo}$ ) obtido no transporte de cada produto.

O lucro diário (calculado através dos dados da tabela (4.2),  $(\text{tarifa} - \text{custo}) / \text{tempo}$ ), relacionado com o tipo do produto é utilizado como parâmetro para selecionar, dentre os produtos, o que tem prioridade de fluxo na rede. A prioridade é atribuída ao produto que fornecer o maior lucro calculado à ferrovia.

Neste exemplo, em particular, todos os produtos são transportados pois, não estão submetidos às restrições.

Como a solução da volta depende da solução da ida do vagão, tem-se nas tabelas 4.5 e 4.6,

o fluxo dos vagões-vazios em cada trecho da rede, de acordo com a quantidade de vagões-carregados que chegaram nas estações-destino.

Através da figura 4.1, fica mais fácil visualizar a solução dos dois problemas, ou seja, a solução do PTM, já que este é constituído pelos dois problemas.

Os fluxos nos arcos dos cachos representam a quantidade de produto transportada por tipo, isto é, determinam a solução do problema da ida do vagão-carregado e, os fluxos nos arcos da rede original representam a quantidade de vagões-vazios passando em cada trecho, o que resulta na solução do problema da volta do vagão-descarregado.

Observa-se na figura 4.1 que, como não houve restrições, acontece o fluxo completo de toda a demanda dos produtos. Então, nos arcos aparecem exatamente, o número de vagões necessários para transportar as cadências dos produtos. E para saber quantos vagões são necessários, divide-se a cadência (quinta coluna da tabela 4.2) pela capacidade dos vagões-vazios (oitava coluna da mesma tabela). Na redistribuição dos vagões-vazios, vale-se deste mesmo cálculo para determinar quantos vagões devem ser enviados a cada estação-origem para dar continuidade ao transporte de carga.

É importante lembrar que nem sempre são os mesmos vagões que retornam às estações-origem dos produtos.

Analisando os fluxos na rede, através do exposto na figura 4.1. tem-se que na estação "ZZ" chegam 4 vagões carregando o produto  $P_3$  e mais 4 carregando  $P_4$ . Estes 8 vagões, todos do tipo 2, são descarregados e seguem para a estação "IQ". Nesta, chegam mais 4 vagões trazendo o produto  $P_5$ , também do tipo 2. Estes 12 vagões-vazios são re-allocados para as estações-origem de  $P_3$ ,  $P_4$  e  $P_5$ . Assim, 4 deles vão à estação "BU" para transportar  $P_4$  e 8 seguem para a estação "AR", sendo que 4 permanecem nesta estação para transportar  $P_3$  e os 4 restantes vão à estação "RU" para transportar  $P_5$ .

Olhando para os fluxos dos vagões do tipo-1, tem-se 10 vagões carregando o produto  $P_1$  e 10 carregando  $P_2$  que chegam e descarregando nas estações "RU" e "BU", respectivamente. Estes 20 vagões-vazios são enviados para a estação "ZZ", estação-origem de  $P_1$  e  $P_2$ , para começar um novo transporte de carga de  $P_1$  e  $P_2$ .

Vale aqui salientar que a análise deste exemplo foi simples. pois no mesmo não existe o conjunto de restrições (de frota e de trecho) e apesar de ter dois tipos de vagões, cada tipo de produto só pode ser transportado por um único tipo de vagão.

Os três exemplos seguintes abordam o mesmo tipo de problema de transporte multiproduto submetido às restrições. Estas são aplicadas alternadamente e depois, conjuntamente.

Exemplo 1.2. Rede ferroviária com cinco produtos, dois tipos de vagões e restrição de frota:

Dados da Rede ferroviária

quantidade de estações = 5

número de trechos = 4

Trecho	est.origem	est.dest	distância (km)	capac. max (ton.)	tempo vazio (dia)
1	ZZ	IQ	136.0	76700.0	1.0
2	IQ	AR	140.0	76700.0	1.0
3	AR	RU	120.0	70000.0	1.0
4	IQ	BU	150.0	70000.0	1.0

Tabela 4.8: *Dados referentes aos TRECHOS*

quantidade de produtos = 5

quantidade de tipos de vagões = 2

Produto	orig.	dest.	quant. (ton.)	cadência (ton.)	tarifa Cr\$	custo Cr\$	capac. (ton.)	tempo (dia)	tipos-vagão	tipos
GAS	ZZ	RU	5000	500	7.0	3.0	50.0	3	1	TC
GAS	ZZ	BU	5000	500	6.0	2.0	50.0	2	1	TC
FOS	AR	ZZ	5000	200	5.0	2.0	50.0	2	1	HS
FOS	BU	ZZ	5000	200	5.0	2.0	50.0	2	1	HS
FOS	RU	IQ	5000	200	5.0	2.0	50.0	2	1	HS

Tabela 4.9: *Dados referentes aos PRODUTOS*

frota máxima por tipo de vagão

Tipo	máximo (un.)	tara (ton.)
TC	70	25.0
HS	30	25.0

Tabela 4.10: Frota máxima por tipo de vagão

### RELATÓRIO dos RESULTADOS

vagão tipo = 1

frota máxima = 70

Produto	fluxo		quant./dia		receita×1000Cr\$	custo×1000Cr\$	líquido×1000Cr\$
	orig.	dest.	(ton)	(vagões)	(por dia)	(por dia)	(por dia)
GAS	ZZ	RU	250	5	1.75	0.75	1.00
GAS	ZZ	BU	500	10	3.00	1.00	2.00

Tabela 4.11: Vagões carregados/ dia (IDA)

Tipo-vagão	de	para	quantidade
TC	ZZ	IQ	0.
TC	IQ	AR	0.
TC	AR	RU	0.
TC	IQ	BU	0.
TC	IQ	ZZ	15.
TC	AR	IQ	5.
TC	RU	AR	5.
TC	BU	IQ	10.

Tabela 4.12: Vagões descarregados/ dia (VOLTA)

vagão tipo = 2

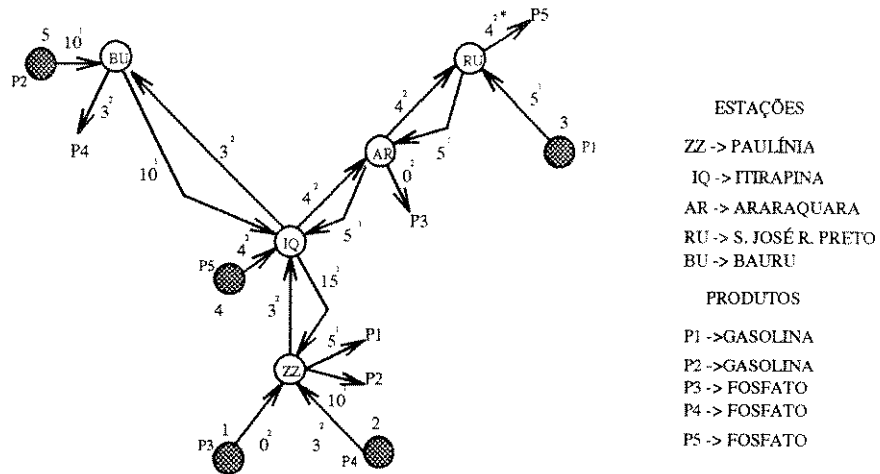
frota máxima = 30

Produto	fluxo orig. dest.	quant./dia (ton) (vagões)	receita×1000Cr\$ (por dia)	custo×1000Cr\$ (por dia)	líquido×1000Cr\$ (por dia)
FOS	AR ZZ	000 0	0.00	0.00	0.00
FOS	BU ZZ	150 3	0.75	0.30	0.45
FOS	RU IQ	200 4	1.00	0.45	0.55

Tabela 4.13: Vagões carregados/ dia (IDA)

Tipo-vagão	de	para	quantidade
HS	ZZ	IQ	3.
HS	IQ	AR	4.
HS	AR	RU	4.
HS	IQ	BU	3.
HS	IQ	ZZ	0.
HS	AR	IQ	0.
HS	RU	AR	0.
HS	BU	IQ	0.

Tabela 4.14: Vagões descarregados/ dia (VOLTA)



\* o índice nos números representa o tipo de vagão (1)=TC ou (2)=HS.

Figura 4.2: Grafo-solução Exemplo 1.2

Do exposto nas tabelas de resultados vê-se que, ao aplicar a restrição de frota, a quantidade de produtos transportada foi reduzida.

Fazendo uma análise mais detalhada dos resultados, tem-se que os produtos transportados pelo mesmo tipo de vagão, oferecem o mesmo lucro líquido à ferrovia e o critério para a redução da quantidade de vagões destinados para transportar cada produto, foi utilizar o lucro diário ((tarifa – custo)/ tempo) em relação a cada produto.

Assim para os produtos  $P_1$  e  $P_2$ , transportados pelo vagão-tipo1, tem-se os lucros de Cr\$ 1.3 e Cr\$ 2.0, respectivamente, e para  $P_3$ ,  $P_4$  e  $P_5$ , transportados pelo vagão-tipo2, tem-se os lucros calculados de valor igual a Cr\$ 1.5, neste caso que os custos são iguais, opta-se por retirar vagões do transporte dos primeiros produtos da lista.

A frota de vagões-tipo1 disponível é de 70 vagões e a de vagões-tipo2 é de 30 vagões. Então, baseado na demanda dos produtos, há a necessidade de reduzir 5 vagões-tipo1 e 5 vagões-tipo2 no transporte dos produtos.

Olhando a figura 4.2 e concentrando-se nos fluxos, fica evidente a aplicação da limitação de frota pois, se comparar estes fluxos dos vagões com os da figura 4.1 nota-se, claramente, em quais produtos é efetuada a redução.

Com base nos lucros dos produtos, reduz-se a demanda dos produtos  $P_1$ ,  $P_3$  e  $P_4$ , como mostram as tabelas 4.11, 4.12, 4.13 e 4.14. Logo, de  $P_4$  e de  $P_3$  retira-se um total de 5 vagões-tipo2, exigidos pela limitação da frota e de  $P_1$ , retira-se 5 vagões-tipo1.

Então, agora, chega-se na estação "ZZ" apenas, 3 vagões-tipo2 cheios do produto  $P_4$  já que diminuiu 1 vagão do transporte deste produto, o equivalente a redução de 50t na sua cadência e, retira-se os 4 vagões-tipo2 que transportava  $P_3$ . Os três vagões são descarregados e vão à estação "IQ", lá eles se juntam aos 4 vagões-vazios-tipo2 que chegaram carregados com  $P_5$ . Destes 7 vagões-vazios-tipo2, 4 deles se destinam a estação "RU" para transportar  $P_5$  e 3 vagões vão à estação "BU" para transportar  $P_4$ .

No caso dos vagões-tipo1, chegam 10 vagões carregados com  $P_2$  na estação "BU" e apenas, 5 vagões carregados com  $P_1$  na estação "RU" já que a cadência de  $P_1$  foi reduzida a 50% (equivalente a 250t). Estes 15 vagões são descarregados e seguem vazios para a estação "ZZ", onde 5 deles são alocados para transportar  $P_1$  e os 10 restantes para transportar  $P_2$ . No próximo exemplo do grupo é inserida a restrição de trecho e é retirada a de frota.



Exemplo 1.3. Rede ferroviária com cinco produtos, dois tipos de vagões e restrição de trecho:

Dados da Rede ferroviária

quantidade de estações = 5

número de trechos = 4

Trecho	est.origem	est.dest	distância (km)	capac. max (ton.)	tempo vazio (dia)
1	ZZ	IQ	136.0	400.0	1.0
2	IQ	AR	140.0	400.0	1.0
3	AR	RU	120.0	300.0	1.0
4	IQ	BU	150.0	300.0	1.0

Tabela 4.15: *Dados referentes aos TRECHOS*

quantidade de produtos = 5

quantidade de tipos de vagões = 2

Produto	orig.	dest.	quant. (ton.)	cadência (ton.)	tarifa Cr\$	custo Cr\$	capac. (ton.)	tempo (dia)	tipos-vagão	tipos
GAS	ZZ	RU	5000	500	7.0	3.0	50.0	3	1	TC
GAS	ZZ	BU	5000	500	6.0	2.0	50.0	2	1	TC
FOS	AR	ZZ	5000	200	5.0	2.0	50.0	2	1	HS
FOS	BU	ZZ	5000	200	5.0	2.0	50.0	2	1	HS
FOS	RU	IQ	5000	200	5.0	2.0	50.0	2	1	HS

Tabela 4.16: *Dados referentes aos PRODUTOS*

frota máxima por tipo de vagão

Tipo	máximo (un.)	tara (ton.)
TC	100	25.0
HS	100	25.0

Tabela 4.17: Frota máxima por tipo de vagão

### RELATÓRIO dos RESULTADOS

vagão tipo = 1

frota máxima = 100

Produto	fluxo		quant./dia		receita×1000Cr\$	custo×1000Cr\$	líquido×1000Cr\$
	orig.	dest.	(ton)	(vagões)	(por dia)	(por dia)	(por dia)
GAS	ZZ	RU	000	0	0.00	0.00	0.00
GAS	ZZ	BU	200	4	1.20	0.40	0.80

Tabela 4.18: Vagões carregados/ dia (IDA)

Tipo-vagão	de	para	quantidade
TC	ZZ	IQ	0.
TC	IQ	AR	0.
TC	AR	RU	0.
TC	IQ	BU	0.
TC	IQ	ZZ	4.
TC	AR	IQ	0.
TC	RU	AR	0.
TC	BU	IQ	4.

Tabela 4.19: Vagões descarregados/ dia (VOLTA)

vagão tipo = 2

frota máxima = 100

Produto	fluxo	quant./dia	receita×1000Cr\$	custo×1000Cr\$	líquido×1000Cr\$
	orig. dest.	(ton) (vagões)	(por dia)	(por dia)	(por dia)
FOS	AR ZZ	50 1	0.25	0.10	0.15
FOS	BU ZZ	200 4	1.00	0.40	0.60
FOS	RU IQ	200 4	1.00	0.40	0.60

Tabela 4.20: Vagões carregados/ dia (IDA)

Tipo-vagão	de	para	quantidade
HS	ZZ	IQ	5.
HS	IQ	AR	5.
HS	AR	RU	4.
HS	IQ	BU	4.
HS	IQ	ZZ	0.
HS	AR	IQ	0.
HS	RU	AR	0.
HS	BU	IQ	0.

Tabela 4.21: Vagões descarregados/ dia (VOLTA)

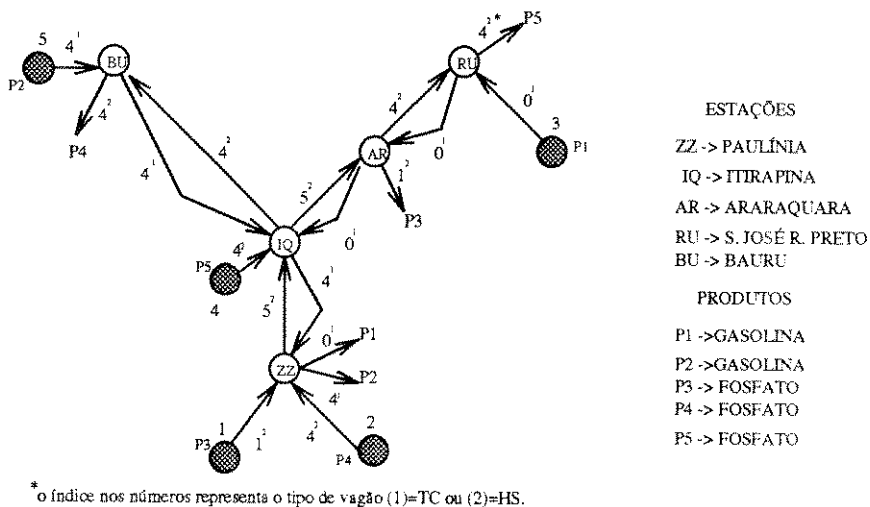


Figura 4.3: Grafo-solução Exemplo 1.3

Analisando as tabelas 4.18 a 4.21 e a figura 4.3 contendo os resultados, verifica-se a limitação de tração nos trechos, principalmente, se comparadas com as do exemplo 1.1, o qual era isento de restrições.

A redução na demanda dos produtos depende do valor do lucro calculado e das capacidades dos trechos.

Para aplicar a limitação de trecho, observa-se o peso dos vagões-carregados (peso do vagão-vazio(tara) + quantidade da carga que ele está transportando) que estão passando no trecho violado independente do tipo de vagão e, reduz-se o número de vagões-carregados daqueles que estão levando os produtos que fornecem um menor lucro à ferrovia.

Neste exemplo, tem-se a redução nas demandas dos produtos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  e  $P_5$ , de 500t, 300t, 150t e 0t, respectivamente. Isto ocorre porque cada trecho de linha (1, 2, 3 e 4) possui uma capacidade máxima de apenas 400t para os dois primeiros e de 300t para os dois últimos trechos. Estas limitações fazem com que os trechos não permitam a passagem de toda a demanda das cargas, reduzindo assim, o transporte de carga da ferrovia.

Fazendo a análise detalhada de cada trecho, percebe-se que, em particular para este exemplo, cada tipo de vagão percorre os trechos em sentidos opostos, o que faz com que a limitação de trecho ocorra para cada tipo de vagão, separadamente.

O trecho-1 (ZZ - > IQ) e o trecho-2 (IQ - > AR), com capacidade máxima de 400t, só permitem a passagem de 5 vagões-carregados, pois, cada um destes vagões possui 75t (sendo: 25t(tara) + 50t(capacidade)), enquanto que o trecho-3 (AR - > RU) e o trecho-4 (IQ - > BU) tem capacidade máxima de 300t permitindo o fluxo apenas, de 4 vagões-carregados (cada um com 75t).

Para facilitar o entendimento dos resultados, a análise é feita por tipo de vagão, já que seus fluxos são independentes pois caminham em sentidos opostos.

Sendo assim, no trecho-1 deseja-se passar 20 vagões-tipo1 (o equivalente a 1500t, pois, "  $20 \times (50t+25t)=1500t$  ", 10 carregados com  $P_1$  e 10 carregados com  $P_2$ ).

Como o trecho é limitado a 5 vagões-carregados, precisa-se reduzir 15 vagões-tipo1. Pelo que já foi explicado anteriormente, reduz-se o número de vagões do transporte do produto de menor lucro calculado. Como já foram calculados estes lucros, tem-se  $P_1$  com um lucro de Cr\$ 1.33 inferior ao de  $P_2$  de Cr\$ 2.00, ou seja, o lucro de  $P_1$  representa 66.5% do lucro de  $P_2$ , diminuindo assim, o lucro da ferrovia em 33.5% em relação a  $P_2$ .

Então, retirando-se os 10 vagões-tipo1 do transporte de  $P_1$ , ainda restam 10 vagões-tipo1 no transporte de  $P_2$  que ultrapassam o limite do trecho igual a 5 vagões. Daí, retira-se mais

5 vagões-tipo1 carregados com  $P_2$  passando neste trecho, sem exceder a sua capacidade máxima.

Estes 5 vagões têm que passar no trecho-4 para ir até a estação-destino, "BU", do produto  $P_2$ .

Porém, no trecho-4 só pode passar 4 vagões, então retira-se mais 1 vagão-tipo1 do transporte de  $P_2$ .

Nos trechos 2 e 3, apesar da limitação, não é necessário fazer a redução nos vagões-tipo1, pois, os vagões-tipo1 do transporte do produto  $P_1$ , foi reduzida a zero.

Começando de novo, a análise dos trechos no sentido oposto para o fluxo dos vagões-tipo2, tem-se no trecho-4 e no trecho-3, a necessidade de passar 4 vagões-tipo2 carregados com  $P_4$  e 4 carregados com  $P_5$ , respectivamente. Como estes trechos permitem o fluxo de até 4 vagões, não há diminuição no número de vagões. Já no trecho-1 e no trecho-2, como passam 8 vagões-tipo2 ( 4 carregados com  $P_5$  e 4 com  $P_3$  no trecho-2, e 4 com  $P_3$  e 4 com  $P_4$  no trecho-1), deve-se retirar 4 vagões-tipo2, pois estes trechos só permitem a passagem de 5 vagões, quase a metade do fluxo que deseja-se nestes trechos.

Para fazer a redução dos vagões-tipo2, novamente, observa-se os lucros calculados.

No caso de  $P_3$ ,  $P_4$  e  $P_5$ , eles fornecem o mesmo lucro à ferrovia, então, retira-se de  $P_3$ , porque vem primeiro na ordem de apresentação dos dados dos produtos e por não existir mais nenhuma característica que possa ser usada como parâmetro de escolha na redução dos vagões.

Assim, retira-se os 3 vagões-tipo2 do transporte de  $P_3$  e conseqüentemente, elimina-se a violação dos trechos.

Exemplo 1.4. Rede ferroviária com cinco produtos, dois tipos de vagões e restrição de trecho e de frota:

Dados da Rede ferroviária

quantidade de estações = 5

número de trechos = 4

Trecho	est.origem	est.dest	distância (km)	capac. max (ton.)	tempo vazio (dia)
1	ZZ	IQ	136.0	400.0	1.0
2	IQ	AR	140.0	400.0	1.0
3	AR	RU	120.0	300.0	1.0
4	IQ	BU	150.0	300.0	1.0

Tabela 4.22: *Dados referentes aos TRECHOS*

quantidade de produtos = 5

quantidade de tipos de vagões = 2

Produto	orig.	dest.	quant. (ton.)	cadência (ton.)	tarifa Cr\$	custo Cr\$	capac. (ton.)	tempo (dia)	tipos-vagão	tipos
GAS	ZZ	RU	5000	500	7.0	3.0	50.0	3	1	TC
GAS	ZZ	BU	5000	500	6.0	2.0	50.0	2	1	TC
FOS	AR	ZZ	5000	200	5.0	2.0	50.0	2	1	HS
FOS	BU	ZZ	5000	200	5.0	2.0	50.0	2	1	HS
FOS	RU	IQ	5000	200	5.0	2.0	50.0	2	1	HS

Tabela 4.23: *Dados referentes aos PRODUTOS*

frota máxima por tipo de vagão

Tipo	máximo (un.)	tara (ton.)
TC	70	25.0
HS	30	25.0

Tabela 4.24: Frota máxima por tipo de vagão

### RELATÓRIO dos RESULTADOS

vagão tipo = 1

frota máxima = 80

Produto	fluxo		quant./dia		receita×1000Cr\$	custo×1000Cr\$	líquido×1000Cr\$
	orig.	dest.	(ton)	(vagões)	(por dia)	(por dia)	(por dia)
GAS	ZZ	RU	000	0	0.00	0.00	0.00
GAS	ZZ	BU	200	4	1.20	0.40	0.80

Tabela 4.25: Vagões carregados/ dia (IDA)

Tipo-vagão	de	para	quantidade
TC	ZZ	IQ	0.
TC	IQ	AR	0.
TC	AR	RU	0.
TC	IQ	BU	0.
TC	IQ	ZZ	4.
TC	AR	IQ	0.
TC	RU	AR	0.
TC	BU	IQ	4.

Tabela 4.26: Vagões descarregados/ dia (VOLTA)

vagão tipo = 2

frota máxima = 30

Produto	fluxo		quant./dia		receita×1000Cr\$	custo×1000Cr\$	líquido×1000Cr\$
	orig.	dest.	(ton)	(vagões)	(por dia)	(por dia)	(por dia)
FOS	AR	ZZ	50	1	0.25	0.10	0.15
FOS	BU	ZZ	200	4	1.00	0.40	0.60
FOS	RU	IQ	200	4	1.00	0.40	0.60

Tabela 4.27: Vagões carregados/ dia (IDA)

Tipo-vagão	de	para	quantidade
HS	ZZ	IQ	5.
HS	IQ	AR	5.
HS	AR	RU	4.
HS	IQ	BU	4.
HS	IQ	ZZ	0.
HS	AR	IQ	0.
HS	RU	AR	0.
HS	BU	IQ	0.

Tabela 4.28: Vagões descarregados/ dia (VOLTA)

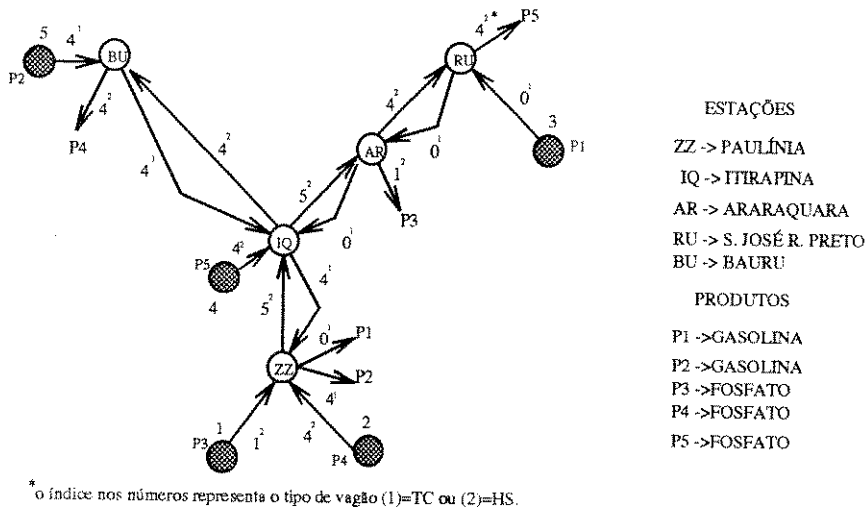


Figura 4.4: Grafo-solução Exemplo 1.4



Neste último exemplo do grupo-1, é aplicado conjuntamente, as duas restrições (de trecho e frota).

Quando aparecem as duas restrições ao mesmo tempo, primeiro faz-se a limitação mais restritiva e logo após, aplica-se a outra. A ordem da aplicação das limitações não importa pois, o resultado final é o mesmo.

Na solução deste exemplo, escolhe-se começar pela limitação de trecho, já que esta apresenta-se mais restritiva e depois aplica-se a limitação de frota.

Este exemplo, na verdade, torna-se uma junção do exemplo 1.2 com o 1.3, pois as limitações de frota e trecho impostas separadamente são as mesmas destes exemplos.

Desta forma, a solução deste exemplo é a junção das soluções dos dois exemplos passados porém, como a restrição de trecho é muito mais restritiva que a de frota, a solução encontrada para o corrente exemplo, coincide com a solução do exemplo 1.3, o que possui apenas, a restrição de trecho.

Para um melhor entendimento, ver as soluções apresentadas nas tabelas 4.25 a 4.28 e na figura 4.4, e, comparar com as tabelas 4.18 a 4.21 e com a figura 4.3 do exemplo 1.3.

O segundo grupo de exemplos representa uma rede ferroviária com quinze produtos, três tipos de vagões, vinte e duas estações e vinte e dois trechos.

Neste grupo, como no anterior, são apresentados exemplos sem restrições e com restrições de frota e/ou de trecho.

Nos exemplos seguintes, os dados referentes aos trechos, produtos, frotas e os resultados computacionais também estão organizados em tabelas.

Exemplo 2.1. Rede ferroviária com quinze produtos , três tipos de vagões, vinte e dois trechos, e **sem restrições**:

Dados da Rede ferroviária

quantidade de estações = 22

número de trechos = 22

Trecho	est.origem	est.dest	distância (km)	capac. max (ton.)	tempo vazio (dia)
1	IE	SS	35.1	99999.0	1.0
2	SS	KE	35.4	99999.0	1.0
3	KE	SO	143.2	99999.0	1.0
4	KE	BV	116.5	99999.0	1.0
5	BV	CP	9.0	99999.0	1.0
6	CP	JY	44.0	99999.0	1.0
7	BV	ZZ	10.3	99999.0	1.0
8	ZZ	MG	60.9	99999.0	1.0
9	MG	RP	218.3	99999.0	1.0
10	RP	UB	178.9	99999.0	1.0
11	UB	UL	128.8	99999.0	1.0
12	UL	AK	47.3	99999.0	1.0
13	IE	RJ	134.7	99999.0	1.0
14	RJ	BU	121.6	99999.0	1.0
15	RJ	PP	463.7	99999.0	1.0
16	PP	PE	103.9	99999.0	1.0
17	BU	ML	103.9	99999.0	1.0
18	ML	PM	242.7	99999.0	1.0
19	BU	IQ	162.0	99999.0	1.0
20	IQ	BV	116.5	99999.0	1.0
21	IQ	AR	79.4	99999.0	1.0
22	AR	RU	199.4	99999.0	1.0

Tabela 4.29: *Dados referentes aos TRECHOS*

quantidade de produtos = 15

quantidade de tipos de vagões = 3

Produto	orig.	dest.	quant. (ton.)	cadência (ton.)	tarifa Cr\$	custo Cr\$	capac. (ton.)	tempo (dia)	tipos-vagão	tipo
GAS	ZZ	RP	14000	500	7.0	3.0	50.0	2	1	TC
GAS	ZZ	BU	10000	500	7.0	3.0	50.0	3	1	TC
ALC	RU	ZZ	12000	200	5.0	2.0	50.0	4	1	TC
ALC	AR	ZZ	25000	200	5.0	2.0	50.0	3	1	TC
ALC	RP	ZZ	45000	200	5.0	2.0	50.0	2	1	TC
CAF	RU	JY	4200	50	3.0	2.0	50.0	5	1	FR
DIE	ZZ	RP	38000	3200	7.0	3.0	50.0	2	1	TC
TRI	PM	JY	50000	3600	3.0	1.0	50.0	6	1	FR
TRI	PE	SO	22000	3600	3.0	1.0	50.0	6	1	FR
MIL	ZZ	JY	50000	3000	2.0	2.0	50.0	3	1	FR
MIL	AK	ZZ	120000	3000	2.0	2.0	50.0	5	1	FR
MIL	UB	ZZ	15000	3000	5.0	2.0	50.0	3	1	FR
OUT	SO	MG	1000	50	7.0	3.0	50.0	4	1	HS
OUT	SO	PP	400	50	7.0	3.0	50.0	5	1	HS
OUT	SO	RJ	400	50	7.0	3.0	50.0	4	1	HS

Tabela 4.30: *Dados referentes aos PRODUTOS*

frota máxima por tipo de vagão

Tipo	máximo (un.)	tara (ton.)
TC	1500	25.0
HS	100	25.0
FR	5000	25.0

Tabela 4.31: *Frota máxima por tipo de vagão*

RELATÓRIO dos RESULTADOS

vagão tipo = 1

frota máxima = 1500

Produto	fluxo	quant./dia	receita×1000Cr\$	custo×1000Cr\$	líquido×1000Cr\$
	orig. dest.	(ton) (vagões)	(por dia)	(por dia)	(por dia)
GAS	ZZ RP	500 10	3.50	1.50	2.00
GAS	ZZ BU	500 10	3.50	1.50	2.00
ALC	RU ZZ	200 4	1.00	0.40	0.60
ALC	AR ZZ	200 4	1.00	0.40	0.60
ALC	RP ZZ	200 4	1.00	0.40	0.60
DIE	ZZ RP	3200 64	22.40	9.60	9.60

Tabela 4.32: *Vagões carregados/ dia (IDA)*

vagão	de	para	quant.	de	para	quant.	de	para	quant.
TC	IE	SS	0.	PP	PE	0.	RP	MG	70.
TC	SS	KE	0.	BU	ML	0.	UB	RP	0.
TC	KE	SO	0.	ML	PM	0.	UL	UB	0.
TC	KE	BV	0.	BU	IQ	10.	AK	UL	0.
TC	BV	CP	0.	IQ	BV	2.	RJ	IE	0.
TC	CP	JY	0.	IQ	AR	8.	BU	RJ	0.
TC	BV	ZZ	2.	AR	RU	4.	PP	RJ	0.
TC	ZZ	MG	0.	SS	IE	0.	PE	PP	0.
TC	MG	RP	0.	KE	SS	0.	ML	BU	0.
TC	RP	UB	0.	SO	KE	0.	PM	ML	0.
TC	UB	UL	0.	BV	KE	0.	IQ	BU	0.
TC	UL	AK	0.	CP	BV	0.	BV	IQ	0.
TC	IE	RJ	0.	JY	CP	0.	AR	IQ	0.
TC	RJ	BU	0.	ZZ	BV	0.	RU	AR	0.
TC	RJ	PP	0.	MG	ZZ	70.	-	-	-

Tabela 4.33: *Vagões descarregados/ dia (VOLTA)*

vagão tipo = 2

frota máxima = 100

Produto	fluxo	quant./dia	receita×1000Cr\$	custo×1000Cr\$	líquido×1000Cr\$
	orig. dest.	(ton) (vagões)	(por dia)	(por dia)	(por dia)
OUT	SO MG	50 1	0.35	0.15	0.20
OUT	SO PP	50 1	0.35	0.15	0.20
OUT	SO RJ	50 1	0.35	0.15	0.20

Tabela 4.34: Vagões carregados/ dia (IDA)

vagão	de	para	quant.	de	para	quant.	de	para	quant.
HS	IE	SS	2.	PP	PE	0.	RP	MG	0.
HS	SS	KE	2.	BU	ML	0.	UB	RP	0.
HS	KE	SO	3.	ML	PM	0.	UL	UB	0.
HS	KE	BV	0.	BU	IQ	0.	AK	UL	0.
HS	BV	CP	0.	IQ	BV	0.	RJ	IE	2.
HS	CP	JY	0.	IQ	AR	0.	BU	RJ	0.
HS	BV	ZZ	0.	AR	RU	0.	PP	RJ	1.
HS	ZZ	MG	0.	SS	IE	0.	PE	PP	0.
HS	MG	RP	0.	KE	SS	0.	ML	BU	0.
HS	RP	UB	0.	SO	KE	0.	PM	ML	0.
HS	UB	UL	0.	BV	KE	1.	IQ	BU	0.
HS	UL	AK	0.	CP	BV	0.	BV	IQ	0.
HS	IE	RJ	0.	JY	CP	0.	AR	IQ	0.
HS	RJ	BU	0.	ZZ	BV	1.	RU	AR	0.
HS	RJ	PP	0.	MG	ZZ	1.	-	-	-

Tabela 4.35: Vagões descarregados/ dia (VOLTA)

vagão tipo = 3

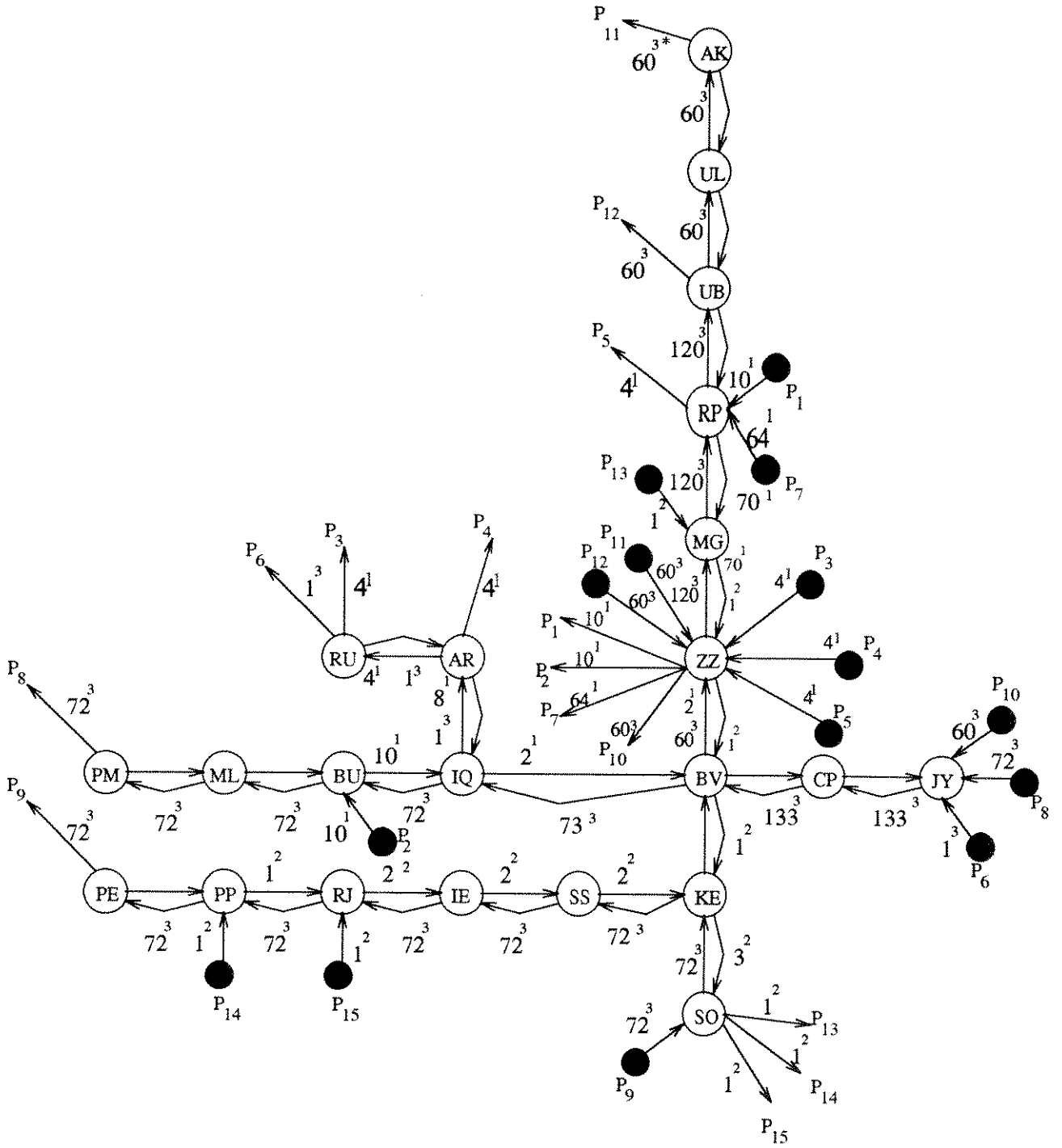
frota máxima = 5000

Produto	fluxo	quant./dia	receita×1000Cr\$	custo×1000Cr\$	líquido×1000Cr\$
	orig. dest.	(ton) (vagões)	(por dia)	(por dia)	(por dia)
CAF	RU JY	50 1	0.15	0.10	0.00
TRI	PM JY	3600 72	10.80	3.60	0.00
TRI	PE SO	3600 72	10.80	3.60	0.00
MIL	ZZ JY	3000 60	6.00	6.00	0.00
MIL	AK ZZ	3000 60	6.00	6.00	0.00
MIL	UB ZZ	3000 60	15.00	6.00	9.00

Tabela 4.36: Vagões carregados/ dia (IDA)

vagão	de	para	quant.	de	para	quant.	de	para	quant.
FR	IE	SS	0.	PP	PE	72.	RP	MG	0.
FR	SS	KE	0.	BU	ML	72.	UB	RP	0.
FR	KE	SO	0.	ML	PM	72.	UL	UB	0.
FR	KE	BV	0.	BU	IQ	0.	AK	UL	0.
FR	BV	CP	0.	IQ	BV	0.	RJ	IE	0.
FR	CP	JY	0.	IQ	AR	1.	BU	RJ	0.
FR	BV	ZZ	60.	AR	RU	1.	PP	RJ	0.
FR	ZZ	MG	120.	SS	IE	72.	PE	PP	0.
FR	MG	RP	120.	KE	SS	72.	ML	BU	0.
FR	RP	UB	120.	SO	KE	72.	PM	ML	0.
FR	UB	UL	60.	BV	KE	0.	IQ	BU	72.
FR	UL	AK	60.	CP	BV	133.	BV	IQ	73.
FR	IE	RJ	72.	JY	CP	133.	AR	IQ	0.
FR	RJ	BU	0.	ZZ	BV	0.	RU	AR	0.
FR	RJ	PP	72.	MG	ZZ	0.	-	-	-

Tabela 4.37: Vagões descarregados/ dia (VOLTA)



\* o índice nos números representa o tipo do vagão : (1)=TC, (2)=HS ou (3)=FR.

Figura 4.5: Grafo-solução Exemplo 2.1

---

Este primeiro exemplo é isento de restrições e por isso existe o fluxo de toda a demanda dos produtos.

Desta forma, na figura 4.5 e nas tabelas 4.32 a 4.37, estão os resultados computacionais deste exemplo, ou seja, as soluções da ida dos vagões-carregados e da volta dos vagões-vazios. A seguir, é apresentado e analisado os resultados deste mesmo exemplo submetido à restrição de frota.



Exemplo 2.2. Rede ferroviária com quinze produtos , três tipos de vagões, vinte e dois trechos, e **restrição de frota**:

Dados da Rede ferroviária

quantidade de estações = 22

número de trechos = 22

Trecho	est.origem	est.dest	distância (km)	capac. max (ton.)	tempo vazio (dia)
1	IE	SS	35.1	99999.0	1.0
2	SS	KE	35.4	99999.0	1.0
3	KE	SO	143.2	99999.0	1.0
4	KE	BV	116.5	99999.0	1.0
5	BV	CP	9.0	99999.0	1.0
6	CP	JY	44.0	99999.0	1.0
7	BV	ZZ	10.3	99999.0	1.0
8	ZZ	MG	60.9	99999.0	1.0
9	MG	RP	218.3	99999.0	1.0
10	RP	UB	178.9	99999.0	1.0
11	UB	UL	128.8	99999.0	1.0
12	UL	AK	47.3	99999.0	1.0
13	IE	RJ	134.7	99999.0	1.0
14	RJ	BU	121.6	99999.0	1.0
15	RJ	PP	463.7	99999.0	1.0
16	PP	PE	103.9	99999.0	1.0
17	BU	ML	103.9	99999.0	1.0
18	ML	PM	242.7	99999.0	1.0
19	BU	IQ	162.0	99999.0	1.0
20	IQ	BV	116.5	99999.0	1.0
21	IQ	AR	79.4	99999.0	1.0
22	AR	RU	199.4	99999.0	1.0

Tabela 4.38: *Dados referentes aos TRECHOS*

quantidade de produtos = 15

quantidade de tipos de vagões = 3

Produto	orig.	dest.	quant. (ton.)	cadência (ton.)	tarifa Cr\$	custo Cr\$	capac. (ton.)	tempo (dia)	tipos-vagão	tipo
GAS	ZZ	RP	14000	500	7.0	3.0	50.0	2	1	TC
GAS	ZZ	BU	10000	500	7.0	3.0	50.0	3	1	TC
ALC	RU	ZZ	12000	200	5.0	2.0	50.0	4	1	TC
ALC	AR	ZZ	25000	200	5.0	2.0	50.0	3	1	TC
ALC	RP	ZZ	45000	200	5.0	2.0	50.0	2	1	TC
CAF	RU	JY	4200	50	3.0	2.0	50.0	5	1	FR
DIE	ZZ	RP	38000	3200	7.0	3.0	50.0	2	1	TC
TRI	PM	JY	50000	3600	3.0	1.0	50.0	6	1	FR
TRI	PE	SO	22000	3600	3.0	1.0	50.0	6	1	FR
MIL	ZZ	JY	50000	3000	2.0	2.0	50.0	3	1	FR
MIL	AK	ZZ	120000	3000	2.0	2.0	50.0	5	1	FR
MIL	UB	ZZ	15000	3000	5.0	2.0	50.0	3	1	FR
OUT	SO	MG	1000	50	7.0	3.0	50.0	4	1	HS
OUT	SO	PP	400	50	7.0	3.0	50.0	5	1	HS
OUT	SO	RJ	400	50	7.0	3.0	50.0	4	1	HS

Tabela 4.39: *Dados referentes aos PRODUTOS*

frota máxima por tipo de vagão

Tipo	máximo (un.)	tara (ton.)
TC	200	25.0
HS	100	25.0
FR	1500	25.0

Tabela 4.40: *Frota máxima por tipo de vagão*

RELATÓRIO dos RESULTADOS

vagão tipo = 1

frota máxima = 200

Produto	fluxo orig. dest.	quant./dia (ton) (vagões)	receita×1000Cr\$ (por dia)	custo×1000Cr\$ (por dia)	líquido×1000Cr\$ (por dia)
GAS	ZZ RP	000 0	0.00	0.00	0.00
GAS	ZZ BU	150 3	1.05	0.45	0.60
ALC	RU ZZ	000 0	0.00	0.00	0.00
ALC	AR ZZ	200 4	1.00	0.40	0.60
ALC	RP ZZ	200 4	1.00	0.40	0.60
DIE	ZZ RP	2100 42	14.70	6.30	8.40

Tabela 4.41: *Vagões carregados/ dia (IDA)*

vagão	de	para	quant.	de	para	quant.	de	para	quant.
TC	IE	SS	0.	PP	PE	0.	RP	MG	38.
TC	SS	KE	0.	BU	ML	0.	UB	RP	0.
TC	KE	SO	0.	ML	PM	0.	UL	UB	0.
TC	KE	BV	0.	BU	IQ	3.	AK	UL	0.
TC	BV	CP	0.	IQ	BV	0.	RJ	IE	0.
TC	CP	JY	0.	IQ	AR	4.	BU	RJ	0.
TC	BV	ZZ	0.	AR	RU	0.	PP	RJ	0.
TC	ZZ	MG	0.	SS	IE	0.	PE	PP	0.
TC	MG	RP	0.	KE	SS	0.	ML	BU	0.
TC	RP	UB	0.	SO	KE	0.	PM	ML	0.
TC	UB	UL	0.	BV	KE	0.	IQ	BU	0.
TC	UL	AK	0.	CP	BV	0.	BV	IQ	1.
TC	IE	RJ	0.	JY	CP	0.	AR	IQ	0.
TC	RJ	BU	0.	ZZ	BV	1.	RU	AR	0.
TC	RJ	PP	0.	MG	ZZ	38.	-	-	-

Tabela 4.42: *Vagões descarregados/ dia (VOLTA)*

vagão tipo = 2

frota máxima = 100

Produto	fluxo	quant./dia	receita×1000Cr\$	custo×1000Cr\$	líquido×1000Cr\$
	orig. dest.	(ton) (vagões)	(por dia)	(por dia)	(por dia)
OUT	SO MG	50 1	0.35	0.15	0.20
OUT	SO PP	50 1	0.35	0.15	0.20
OUT	SO RJ	50 1	0.35	0.15	0.20

Tabela 4.43: *Vagões carregados/ dia (IDA)*

vagão	de	para	quant.	de	para	quant.	de	para	quant.
HS	IE	SS	2.	PP	PE	0.	RP	MG	0.
HS	SS	KE	2.	BU	ML	0.	UB	RP	0.
HS	KE	SO	3.	ML	PM	0.	UL	UB	0.
HS	KE	BV	0.	BU	IQ	0.	AK	UL	0.
HS	BV	CP	0.	IQ	BV	0.	RJ	IE	2.
HS	CP	JY	0.	IQ	AR	0.	BU	RJ	0.
HS	BV	ZZ	0.	AR	RU	0.	PP	RJ	1.
HS	ZZ	MG	0.	SS	IE	0.	PE	PP	0.
HS	MG	RP	0.	KE	SS	0.	ML	BU	0.
HS	RP	UB	0.	SO	KE	0.	PM	ML	0.
HS	UB	UL	0.	BV	KE	1.	IQ	BU	0.
HS	UL	AK	0.	CP	BV	0.	BV	IQ	0.
HS	IE	RJ	0.	JY	CP	0.	AR	IQ	0.
HS	RJ	BU	0.	ZZ	BV	1.	RU	AR	0.
HS	RJ	PP	0.	MG	ZZ	1.	-	-	-

Tabela 4.44: *Vagões descarregados/ dia (VOLTA)*

vagão tipo = 3

frota máxima = 1500

Produto	fluxo		quant./dia		receita×1000Cr\$	custo×1000Cr\$	líquido×1000Cr\$
	orig.	dest.	(ton)	(vagões)	(por dia)	(por dia)	(por dia)
CAF	RU	JY	0000	0	0.00	0.00	0.00
TRI	PM	JY	750	15	2.25	0.75	1.50
TRI	PE	SO	0000	0	0.00	0.00	0.00
MIL	ZZ	JY	3000	60	6.00	6.00	0.00
MIL	AK	ZZ	3000	60	6.00	6.00	0.00
MIL	UB	ZZ	3000	60	15.00	6.00	9.00

Tabela 4.45: Vagões carregados/ dia (IDA)

vagão	de	para	quant.	de	para	quant.	de	para	quant.
FR	IE	SS	0.	PP	PE	0.	RP	MG	0.
FR	SS	KE	0.	BU	ML	15.	UB	RP	0.
FR	KE	SO	0.	ML	PM	15.	UL	UB	0.
FR	KE	BV	0.	BU	IQ	0.	AK	UL	0.
FR	BV	CP	0.	IQ	BV	0.	RJ	IE	0.
FR	CP	JY	0.	IQ	AR	0.	BU	RJ	0.
FR	BV	ZZ	60.	AR	RU	0.	PP	RJ	0.
FR	ZZ	MG	120.	SS	IE	0.	PE	PP	0.
FR	MG	RP	120.	KE	SS	0.	ML	BU	0.
FR	RP	UB	120.	SO	KE	0.	PM	ML	0.
FR	UB	UL	60.	BV	KE	0.	IQ	BU	15.
FR	UL	AK	60.	CP	BV	75.	BV	IQ	15.
FR	IE	RJ	0.	JY	CP	75.	AR	IQ	0.
FR	RJ	BU	0.	ZZ	BV	0.	RU	AR	0.
FR	RJ	PP	0.	MG	ZZ	0.	-	-	-

Tabela 4.46: Vagões descarregados/ dia (VOLTA)



Com a aplicação da restrição de frota, a solução do exemplo anterior é modificada para satisfazer à limitação da quantidade de vagões disponível por tipo, em cada frota.

Como consequência desta limitação, tem-se os atendimentos às demandas de alguns produtos reduzidas, já que não existe quantidade necessária de vagões disponível para efetuar o transporte dos produtos.

Assim, antes de fazer a redução dos vagões, calcula-se os lucros dos produtos utilizando a tabela 4.42, a fim de usá-los como critério de seleção dos melhores produtos, ou seja, para saber qual deve ser o fluxo de cada produto na rede de acordo com a importância do seu transporte para a ferrovia.

Analisando numericamente, nota-se que existe uma quantidade limitada de cada tipo de vagão para efetuar o transporte total dos diferentes tipos de produtos. Então é preciso ter uma frota de 428 vagões-tipo1, 26 vagões-tipo2, e, 3058 vagões-tipo3, no pior caso, isto é, imaginando a ida de todos os vagões carregados e depois que todos eles são descarregados, acontece a re-alocação destes vagões vazios.

Baseado nos lucros dos produtos, começa o processo da redução do número dos vagões.

Para os produtos que são transportados pelos vagões-tipo1,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$ ,  $P_5$  e  $P_7$ , tem-se os lucros de Cr\$4.00, Cr\$4.00, Cr\$3.00, Cr\$3.00, Cr\$3.00 e Cr\$4.00, respectivamente. Diante destes valores, escolhe-se  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_7$ , para fazer a redução.

Quanto aos vagões-tipo3, tem-se os lucros de Cr\$1.00, Cr\$2.00, Cr\$2.00, Cr\$1.00, Cr\$1.00 e Cr\$3.00, dos produtos  $P_6$ ,  $P_8$ ,  $P_9$ ,  $P_{10}$ ,  $P_{11}$ ,  $P_{12}$ , respectivamente, e reduz-se o fluxo de  $P_6$ ,  $P_8$ ,  $P_9$ .

Ao terminar a redução, tem-se a alocação dos vagões de acordo com a disponibilidade de cada tipo de frota.

Exemplo 2.3. Rede ferroviária com quinze produtos , três tipos de vagões, vinte e dois trechos, e **restrição de trecho**:

Dados da Rede ferroviária

quantidade de estações = 22

número de trechos = 22

Trecho	est.origem	est.dest	distância (km)	capac. max (ton.)	tempo vazio (dia)
1	IE	SS	35.1	99999.0	1.0
2	SS	KE	35.4	99999.0	1.0
3	KE	SO	143.2	99999.0	1.0
4	KE	BV	116.5	99999.0	1.0
5	BV	CP	9.0	99999.0	1.0
6	CP	JY	44.0	99999.0	1.0
7	BV	ZZ	10.3	99999.0	1.0
8	ZZ	MG	60.9	150.0	1.0
9	MG	RP	218.3	150.0	1.0
10	RP	UB	178.9	150.0	1.0
11	UB	UL	128.8	99999.0	1.0
12	UL	AK	47.3	99999.0	1.0
13	IE	RJ	134.7	99999.0	1.0
14	RJ	BU	121.6	99999.0	1.0
15	RJ	PP	463.7	99999.0	1.0
16	PP	PE	103.9	99999.0	1.0
17	BU	ML	103.9	99999.0	1.0
18	ML	PM	242.7	99999.0	1.0
19	BU	IQ	162.0	99999.0	1.0
20	IQ	BV	116.5	99999.0	1.0
21	IQ	AR	79.4	99999.0	1.0
22	AR	RU	199.4	99999.0	1.0

Tabela 4.47: *Dados referentes aos TRECHOS*



quantidade de produtos = 15

quantidade de tipos de vagões = 3

Produto	orig.	dest.	quant. (ton.)	cadência (ton.)	tarifa Cr\$	custo Cr\$	capac. (ton.)	tempo (dia)	tipos-vagão	tipo
GAS	ZZ	RP	14000	500	7.0	3.0	50.0	2	1	T
GAS	ZZ	BU	10000	500	7.0	3.0	50.0	3	1	T
ALC	RU	ZZ	12000	200	5.0	2.0	50.0	4	1	T
ALC	AR	ZZ	25000	200	5.0	2.0	50.0	3	1	T
ALC	RP	ZZ	45000	200	5.0	2.0	50.0	2	1	T
CAF	RU	JY	4200	50	3.0	2.0	50.0	5	1	F
DIE	ZZ	RP	38000	3200	7.0	3.0	50.0	2	1	T
TRI	PM	JY	50000	3600	3.0	1.0	50.0	6	1	F
TRI	PE	SO	22000	3600	3.0	1.0	50.0	6	1	F
MIL	ZZ	JY	50000	3000	2.0	2.0	50.0	3	1	F
MIL	AK	ZZ	120000	3000	2.0	2.0	50.0	5	1	F
MIL	UB	ZZ	15000	3000	5.0	2.0	50.0	3	1	F
OUT	SO	MG	1000	50	7.0	3.0	50.0	4	1	H
OUT	SO	PP	400	50	7.0	3.0	50.0	5	1	H
OUT	SO	RJ	400	50	7.0	3.0	50.0	4	1	H

Tabela 4.48: *Dados referentes aos PRODUTOS*

frota máxima por tipo de vagão

Tipo	máximo (un.)	tara (ton.)
TC	1500	25.0
HS	100	25.0
FR	5000	25.0

Tabela 4.49: *Frota máxima por tipo de vagão*

RELATÓRIO dos RESULTADOS

vagão tipo = 1

frota máxima = 1500

Produto	fluxo	quant./dia	receita×1000Cr\$	custo×1000Cr\$	líquido×1000Cr\$
	orig. dest.	(ton) (vagões)	(por dia)	(por dia)	(por dia)
GAS	ZZ RP	000 0	0.00	0.00	0.00
GAS	ZZ BU	500 10	3.50	1.50	2.00
ALC	RU ZZ	200 4	1.00	0.40	0.60
ALC	AR ZZ	200 4	1.00	0.40	0.60
ALC	RP ZZ	100 2	0.50	0.20	0.30
DIE	ZZ RP	100 2	0.70	0.30	0.40

Tabela 4.50: *Vagões carregados/ dia (IDA)*

vagão	de	para	quant.	de	para	quant.	de	para	quant.
TC	IE	SS	0.	PP	PE	0.	RP	MG	0.
TC	SS	KE	0.	BU	ML	0.	UB	RP	0.
TC	KE	SO	0.	ML	PM	0.	UL	UB	0.
TC	KE	BV	0.	BU	IQ	10.	AK	UL	0.
TC	BV	CP	0.	IQ	BV	2.	RJ	IE	0.
TC	CP	JY	0.	IQ	AR	8.	BU	RJ	0.
TC	BV	ZZ	2.	AR	RU	4.	PP	RJ	0.
TC	ZZ	MG	0.	SS	IE	0.	PE	PP	0.
TC	MG	RP	0.	KE	SS	0.	ML	BU	0.
TC	RP	UB	0.	SO	KE	0.	PM	ML	0.
TC	UB	UL	0.	BV	KE	0.	IQ	BU	0.
TC	UL	AK	0.	CP	BV	0.	BV	IQ	0.
TC	IE	RJ	0.	JY	CP	0.	AR	IQ	0.
TC	RJ	BU	0.	ZZ	BV	0.	RU	AR	0.
TC	RJ	PP	0.	MG	ZZ	0.	-	-	-

Tabela 4.51: *Vagões descarregados/ dia (VOLTA)*

vagão tipo = 2

frota máxima = 100

Produto	fluxo		quant./dia		receita×1000Cr\$	custo×1000Cr\$	líquido×1000Cr\$
	orig.	dest.	(ton)	(vagões)	(por dia)	(por dia)	(por dia)
OUT	SO	MG	00	0	0.00	0.00	0.00
OUT	SO	PP	50	1	0.35	0.15	0.20
OUT	SO	RJ	50	1	0.35	0.15	0.20

Tabela 4.52: Vagões carregados/ dia (IDA)

vagão	de	para	quant.	de	para	quant.	de	para	quant.
HS	IE	SS	2.	PP	PE	0.	RP	MG	0.
HS	SS	KE	2.	BU	ML	0.	UB	RP	0.
HS	KE	SO	2.	ML	PM	0.	UL	UB	0.
HS	KE	BV	0.	BU	IQ	0.	AK	UL	0.
HS	BV	CP	0.	IQ	BV	0.	RJ	IE	2.
HS	CP	JY	0.	IQ	AR	0.	BU	RJ	0.
HS	BV	ZZ	0.	AR	RU	0.	PP	RJ	1.
HS	ZZ	MG	0.	SS	IE	0.	PE	PP	0.
HS	MG	RP	0.	KE	SS	0.	ML	BU	0.
HS	RP	UB	0.	SO	KE	0.	PM	ML	0.
HS	UB	UL	0.	BV	KE	0.	IQ	BU	0.
HS	UL	AK	0.	CP	BV	0.	BV	IQ	0.
HS	IE	RJ	0.	JY	CP	0.	AR	IQ	0.
HS	RJ	BU	0.	ZZ	BV	0.	RU	AR	0.
HS	RJ	PP	0.	MG	ZZ	0.	-	-	-

Tabela 4.53: Vagões descarregados/ dia (VOLTA)

vagão tipo = 3

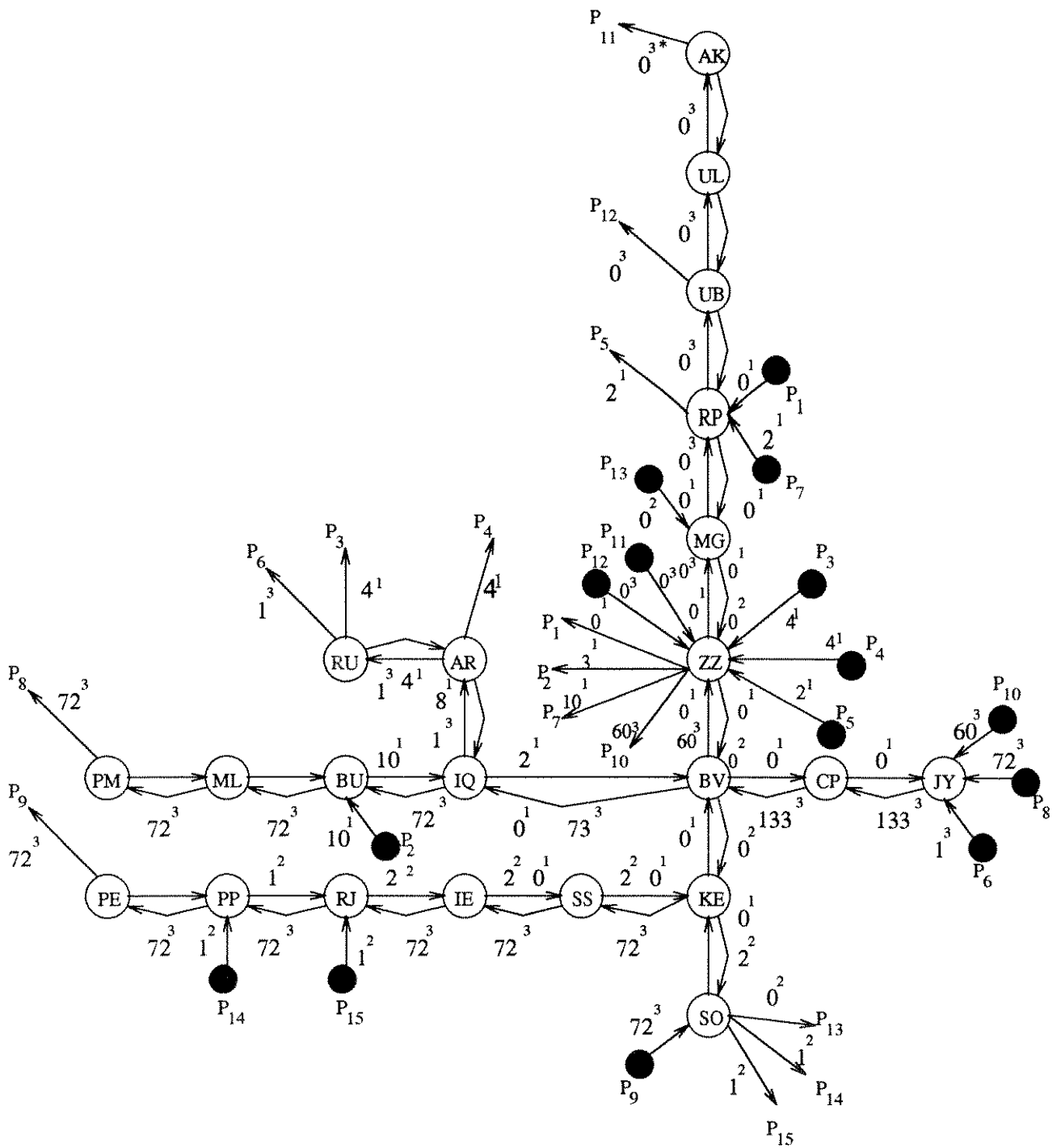
frota máxima = 5000

Produto	fluxo		quant./dia		receita×1000Cr\$	custo×1000Cr\$	líquido×1000Cr\$
	orig.	dest.	(ton)	(vagões)	(por dia)	(por dia)	(por dia)
CAF	RU	JY	50	1	0.15	0.10	0.05
TRI	PM	JY	3600	72	10.80	3.60	7.20
TRI	PE	SO	3600	72	10.80	3.60	7.20
MIL	ZZ	JY	3000	60	6.00	6.00	0.00
MIL	AK	ZZ	0000	0	0.00	0.00	0.00
MIL	UB	ZZ	0000	0	0.00	0.00	0.00

Tabela 4.54: *Vagões carregados/ dia (IDA)*

vagão	de	para	quant.	de	para	quant.	de	para	quant.
FR	IE	SS	0.	PP	PE	72.	RP	MG	0.
FR	SS	KE	0.	BU	ML	72.	UB	RP	0.
FR	KE	SO	0.	ML	PM	72.	UL	UB	0.
FR	KE	BV	0.	BU	IQ	0.	AK	UL	0.
FR	BV	CP	0.	IQ	BV	0.	RJ	IE	0.
FR	CP	JY	0.	IQ	AR	1.	BU	RJ	0.
FR	BV	ZZ	60.	AR	RU	1.	PP	RJ	0.
FR	ZZ	MG	0.	SS	IE	72.	PE	PP	0.
FR	MG	RP	0.	KE	SS	72.	ML	BU	0.
FR	RP	UB	0.	SO	KE	72.	PM	ML	0.
FR	UB	UL	0.	BV	KE	0.	IQ	BU	72.
FR	UL	AK	0.	CP	BV	133.	BV	IQ	73.
FR	IE	RJ	72.	JY	CP	133.	AR	IQ	0.
FR	RJ	BU	0.	ZZ	BV	0.	RU	AR	0.
FR	RJ	PP	72.	MG	ZZ	0.	-	-	-

Tabela 4.55: *Vagões descarregados/ dia (VOLTA)*



\* o índice nos números representa o tipo de vagão : (1)=TC, (2)=HS ou (3)=FR.

Figura 4.7: Grafo-solução Exemplo 2.3

Neste exemplo aparece a restrição de trecho no lugar da de frota.

A restrição limita apenas, a capacidade de alguns trechos, isto é, daqueles que apresentam um maior fluxo de vagões carregados e de diferentes tipos. Os trechos escolhidos foram: “ZZ <-> MG”, “MG <-> RP” e “RP <-> UB”.

A capacidade máxima destes trechos foi reduzida a 150t permitindo portanto, a passagem de apenas, 2 vagões-carregados (pois, “ $2 \times (25t(\text{tara}) + 50t(\text{capacidade}))$ ”). Como a carga dos vagões que passa nestes trechos é muito maior que a permitida, se faz necessário a redução do número de alguns vagões-carregados com determinados produtos.

Assim, entre os produtos,  $P_1$ ,  $P_5$ ,  $P_7$ ,  $P_{11}$ ,  $P_{12}$  e  $P_{13}$ , que passam nos trechos limitados, tem-se que fazer uma seleção para saber qual deles será transportado pelos 2 vagões.  $P_1$ ,  $P_7$  e  $P_{13}$  possuem o fluxo no sentido oposto a  $P_5$ ,  $P_{11}$  e  $P_{12}$ , sendo que  $P_1$ ,  $P_5$  e  $P_7$  só podem ser transportados por vagões-tipo1,  $P_{13}$  por vagões-tipo2 e  $P_{11}$  e  $P_{12}$  por vagões-tipo3.

Calculando os lucros (LUCRO = (tarifa - custo)/tempo), obtém-se os seguintes valores:

$$P_1 : \text{LUCRO} = (7 - 3) / 2 = 2.0$$

$$P_7 : \text{LUCRO} = (7 - 3) / 2 = 2.0$$

$$P_{13} : \text{LUCRO} = (7 - 3) / 4 = 1.0$$

$$P_5 : \text{LUCRO} = (5 - 2) / 3 = 1.5$$

$$P_{11} : \text{LUCRO} = (2 - 2) / 5 = 0.0$$

$$P_{12} : \text{LUCRO} = (5 - 2) / 3 = 1.0$$

Entre os três primeiros produtos que disputam os mesmos trechos nota-se que,  $P_1$  e  $P_7$  apresentam o mesmo lucro e de valor maior que o de  $P_{13}$ . Por isso, ao fazer a eliminação dos vagões, retira-se inicialmente, os vagões-carregados com  $P_{13}$  depois, os carregados com  $P_1$  pois, este na lista dos produtos vem antes de  $P_7$  e por fim, os carregados com  $P_7$ , restando apenas 2 vagões-tipo1 carregados com  $P_7$ .

Analisando agora, os três últimos produtos ( $P_5$ ,  $P_{11}$  e  $P_{12}$ ), transportados por diferentes tipos de vagões porém, dividindo os mesmos trechos, observa-se que deve reduzir os produtos pela ordem crescente dos valores de seus lucros (LUCRO ( $P_{11}$ ) < LUCRO ( $P_{12}$ ) < LUCRO ( $P_5$ )). Resulta deste critério apenas os 2 vagões-tipo1 carregados com  $P_5$ .

Vale lembrar que, os produtos escolhidos possuem o mesmo tipo de vagão para transportá-los, só por coincidência, pois a seleção é feita de acordo com o lucro calculado dos produtos e não pelo tipo de vagão.

Para acompanhar melhor o comentário dos resultados, é aconselhável ver as tabelas dos resultados 4.50 a 4.55 e a figura 4.7 com as soluções.

Exemplo 2.4. Rede ferroviária com quinze produtos , três tipos de vagões, vinte e dois trechos, e **restrição de trecho e frota**:

Dados da Rede ferroviária

quantidade de estações = 22

número de trechos = 22

Trecho	est.origem	est.dest	distância (km)	capac. max (ton.)	tempo vazio (dia)
1	IE	SS	35.1	99999.0	1.0
2	SS	KE	35.4	99999.0	1.0
3	KE	SO	143.2	99999.0	1.0
4	KE	BV	116.5	99999.0	1.0
5	BV	CP	9.0	99999.0	1.0
6	CP	JY	44.0	99999.0	1.0
7	BV	ZZ	10.3	99999.0	1.0
8	ZZ	MG	60.9	150.0	1.0
9	MG	RP	218.3	150.0	1.0
10	RP	UB	178.9	150.0	1.0
11	UB	UL	128.8	99999.0	1.0
12	UL	AK	47.3	99999.0	1.0
13	IE	RJ	134.7	99999.0	1.0
14	RJ	BU	121.6	99999.0	1.0
15	RJ	PP	463.7	99999.0	1.0
16	PP	PE	103.9	99999.0	1.0
17	BU	ML	103.9	99999.0	1.0
18	ML	PM	242.7	99999.0	1.0
19	BU	IQ	162.0	99999.0	1.0
20	IQ	BV	116.5	99999.0	1.0
21	IQ	AR	79.4	99999.0	1.0
22	AR	RU	199.4	99999.0	1.0

Tabela 4.56: *Dados referentes aos TRECHOS*



quantidade de produtos = 15

quantidade de tipos de vagões = 3

Produto	orig.	dest.	quant. (ton.)	cadência (ton.)	tarifa Cr\$	custo Cr\$	capac. (ton.)	tempo (dia)	tipos-vagão	tipo
GAS	ZZ	RP	14000	500	7.0	3.0	50.0	2	1	T
GAS	ZZ	BU	10000	500	7.0	3.0	50.0	3	1	T
ALC	RU	ZZ	12000	200	5.0	2.0	50.0	4	1	T
ALC	AR	ZZ	25000	200	5.0	2.0	50.0	3	1	T
ALC	RP	ZZ	45000	200	5.0	2.0	50.0	2	1	T
CAF	RU	JY	4200	50	3.0	2.0	50.0	5	1	F
DIE	ZZ	RP	38000	3200	7.0	3.0	50.0	2	1	T
TRI	PM	JY	50000	3600	3.0	1.0	50.0	6	1	F
TRI	PE	SO	22000	3600	3.0	1.0	50.0	6	1	F
MIL	ZZ	JY	50000	3000	2.0	2.0	50.0	3	1	F
MIL	AK	ZZ	120000	3000	2.0	2.0	50.0	5	1	F
MIL	UB	ZZ	15000	3000	5.0	2.0	50.0	3	1	F
OUT	SO	MG	1000	50	7.0	3.0	50.0	4	1	H
OUT	SO	PP	400	50	7.0	3.0	50.0	5	1	H
OUT	SO	RJ	400	50	7.0	3.0	50.0	4	1	H

Tabela 4.57: *Dados referentes aos PRODUTOS*

frota máxima por tipo de vagão

Tipo	máximo (un.)	tara (ton.)
TC	200	25.0
HS	100	25.0
FR	1500	25.0

Tabela 4.58: *Frota máxima por tipo de vagão*

RELATÓRIO dos RESULTADOS

vagão tipo = 1

frota máxima = 200

Produto	fluxo		quant./dia		receita×1000Cr\$	custo×1000Cr\$	líquido×1000Cr\$
	orig.	dest.	(ton)	(vagões)	(por dia)	(por dia)	(por dia)
GAS	ZZ	RP	000	0	0.00	0.00	0.00
GAS	ZZ	BU	500	10	3.50	1.50	2.00
ALC	RU	ZZ	200	4	1.00	0.40	0.60
ALC	AR	ZZ	200	4	1.00	0.40	0.60
ALC	RP	ZZ	100	2	0.50	0.20	0.30
DIE	ZZ	RP	100	2	0.70	0.30	0.40

Tabela 4.59: *Vagões carregados/ dia (IDA)*

vagão	de	para	quant.	de	para	quant.	de	para	quant.
TC	IE	SS	0.	PP	PE	0.	RP	MG	0.
TC	SS	KE	0.	BU	ML	0.	UB	RP	0.
TC	KE	SO	0.	ML	PM	0.	UL	UB	0.
TC	KE	BV	0.	BU	IQ	10.	AK	UL	0.
TC	BV	CP	0.	IQ	BV	2.	RJ	IE	0.
TC	CP	JY	0.	IQ	AR	8.	BU	RJ	0.
TC	BV	ZZ	2.	AR	RU	4.	PP	RJ	0.
TC	ZZ	MG	0.	SS	IE	0.	PE	PP	0.
TC	MG	RP	0.	KE	SS	0.	ML	BU	0.
TC	RP	UB	0.	SO	KE	0.	PM	ML	0.
TC	UB	UL	0.	BV	KE	0.	IQ	BU	0.
TC	UL	AK	0.	CP	BV	0.	BV	IQ	0.
TC	IE	RJ	0.	JY	CP	0.	AR	IQ	0.
TC	RJ	BU	0.	ZZ	BV	0.	RU	AR	0.
TC	RJ	PP	0.	MG	ZZ	0.	-	-	-

Tabela 4.60: *Vagões descarregados/ dia (VOLTA)*

vagão tipo = 2

frota máxima = 100

Produto	fluxo	quant./dia	receita×1000Cr\$	custo×1000Cr\$	líquido×1000Cr\$
	orig. dest.	(ton) (vagões)	(por dia)	(por dia)	(por dia)
OUT	SO MG	00 0	0.00	0.00	0.00
OUT	SO PP	50 1	0.35	0.15	0.20
OUT	SO RJ	50 1	0.35	0.15	0.20

Tabela 4.61: *Vagões carregados/ dia (IDA)*

vagão	de	para	quant.	de	para	quant.	de	para	quant.
HS	IE	SS	2.	PP	PE	0.	RP	MG	0.
HS	SS	KE	2.	BU	ML	0.	UB	RP	0.
HS	KE	SO	2.	ML	PM	0.	UL	UB	0.
HS	KE	BV	0.	BU	IQ	0.	AK	UL	0.
HS	BV	CP	0.	IQ	BV	0.	RJ	IE	2.
HS	CP	JY	0.	IQ	AR	0.	BU	RJ	0.
HS	BV	ZZ	0.	AR	RU	0.	PP	RJ	1.
HS	ZZ	MG	0.	SS	IE	0.	PE	PP	0.
HS	MG	RP	0.	KE	SS	0.	ML	BU	0.
HS	RP	UB	0.	SO	KE	0.	PM	ML	0.
HS	UB	UL	0.	BV	KE	0.	IQ	BU	0.
HS	UL	AK	0.	CP	BV	0.	BV	IQ	0.
HS	IE	RJ	0.	JY	CP	0.	AR	IQ	0.
HS	RJ	BU	0.	ZZ	BV	0.	RU	AR	0.
HS	RJ	PP	0.	MG	ZZ	0.	-	-	-

Tabela 4.62: *Vagões descarregados/ dia (VOLTA)*

vagão tipo = 3

frota máxima = 1500

Produto	fluxo		quant./dia		receita×1000Cr\$	custo×1000Cr\$	líquido×1000Cr\$
	orig.	dest.	(ton)	(vagões)	(por dia)	(por dia)	(por dia)
CAF	RU	JY	0000	0	0.00	0.00	0.00
TRI	PM	JY	3600	72	10.80	3.60	7.20
TRI	PE	SO	1150	23	3.45	1.15	2.30
MIL	ZZ	JY	3000	60	6.00	6.00	0.00
MIL	AK	ZZ	0000	0	0.00	0.00	0.00
MIL	UB	ZZ	0000	0	0.00	0.00	0.00

Tabela 4.63: Vagões carregados/ dia (IDA)

vagão	de	para	quant.	de	para	quant.	de	para	quant.
FR	IE	SS	0.	PP	PE	23.	RP	MG	0.
FR	SS	KE	0.	BU	ML	72.	UB	RP	0.
FR	KE	SO	0.	ML	PM	72.	UL	UB	0.
FR	KE	BV	0.	BU	IQ	0.	AK	UL	0.
FR	BV	CP	0.	IQ	BV	0.	RJ	IE	0.
FR	CP	JY	0.	IQ	AR	0.	BU	RJ	0.
FR	BV	ZZ	60.	AR	RU	0.	PP	RJ	0.
FR	ZZ	MG	0.	SS	IE	23.	PE	PP	0.
FR	MG	RP	0.	KE	SS	23.	ML	BU	0.
FR	RP	UB	0.	SO	KE	23.	PM	ML	0.
FR	UB	UL	0.	BV	KE	0.	IQ	BU	72.
FR	UL	AK	0.	CP	BV	132.	BV	IQ	72.
FR	IE	RJ	23.	JY	CP	132.	AR	IQ	0.
FR	RJ	BU	0.	ZZ	BV	0.	RU	AR	0.
FR	RJ	PP	23.	MG	ZZ	0.	-	-	-

Tabela 4.64: Vagões descarregados/ dia (VOLTA)



Neste último exemplo do segundo grupo, são inseridas as duas restrições (trecho e frota) e o processo de solução começa aplicando primeiro, as limitações dos trechos e depois, as limitações dos números de vagões disponíveis nas frotas. Não esquecendo que essa escolha é opcional pois, se começasse pela restrição de frota o resultado final seria o mesmo.

Ao aplicar a restrição de trecho obtém-se a mesma solução do exemplo anterior porém, quando submete-o às limitações de frota, nota-se uma redução no fluxo dos produtos  $P_6$  e  $P_9$  transportados pelo vagão-tipo3, pois a frota de vagões-tipo3 está limitada em 1500 vagões e mesmo com a aplicação da restrição de trecho esta continua violada, apresentando um excesso de 598 vagões.

Estes vagões são retirados da seguinte forma: 588 do transporte de  $P_9$  e 10 do transporte de  $P_6$ . A seleção dos produtos para a eliminação é a mesma utilizada no exemplo 2.2, o qual se submetia apenas, à restrição de frota.

No próximo capítulo, são apresentadas as conclusões finais, relacionadas ao que foi descrito neste trabalho e algumas propostas futuras do que poderia ser melhorado ou acrescentado ao mesmo.

## **Capítulo 5**

### **Conclusões**

## 5.1 Conclusões Finais

Este trabalho teve como objetivo apresentar uma nova metodologia baseada em heurística para resolver um problema de transporte multiproduto bastante complexo, no sentido de que muitas restrições foram consideradas simultaneamente, a saber:

- os produtos transportados são diferentes (uns são grãos, outros são combustíveis, minérios, etc...);
- cada produto possui uma estação de origem e uma de destino, e um respectivo tempo de percurso;
- existem tipos de vagões específicos para cada produto;
- existe uma limitação de frota de vagões por tipo;
- cada trecho entre duas estações da ferrovia possui uma capacidade máxima de carga que pode ser tracionada;
- o custo associado ao transporte está relacionado com o tipo e a quantidade do produto que será transportada;
- a escolha do produto e a quantidade a transportar deve envolver o problema da redistribuição dos vagões descarregados nos destinos.

Foi desenvolvido um algoritmo e aplicado a exemplos a fim de testar a metodologia criada. Verificou-se que o programa suporta vários tipos de vagões, restrições de trecho e de frota, como também problemas de pequeno e grande porte.

Foram escolhidos inicialmente exemplos relativamente simples com a finalidade de permitir a sua análise em diversas situações e depois, utilizou-se exemplos maiores e mais complicado objetivando a validação do processo desenvolvido. Estes exemplos foram montados a partir dos dados fornecidos pela FEPASA - Ferrovia Paulista S.A., o que os tornam bem próximo do processo real.

A análise dos resultados computacionais com a utilização do algoritmo desenvolvido, comprovou a eficiência do método e mostrou que os resultados obtidos foram satisfatórios e



ficaram próximo do processo real.

Vale lembrar que a vantagem de utilizar este método é que ele resolve dois problemas conjuntamente e com pouco esforço computacional, do ponto de vista da máquina e do usuário. É importante dizer que a solução destes problemas fornecida pelo método, trata-se apenas, de uma ferramenta de auxílio à decisão do gerente da ferrovia pois, cabe ao mesmo decidir qua a política de transporte que deve ser adotada.

## 5.2 Propostas Futuras

Apesar da eficiência comprovada da metodologia desenvolvida, seria interessante utilizar métodos de decomposição, ou particionamento, para resolver as formulações matemáticas propostas no capítulo 3, a fim de obter o resultado ótimo e daí fazer uma comparação precisa com o resultado obtido pela metodologia apresentada no capítulo 4.

Outras metodologias também poderiam ser implementadas para solucionar o problema multifluxo tratado neste trabalho, baseadas em diferentes técnicas de programação como a multiobjetivo, a dinâmica e a inteligência artificial, ver as referências [30] e [27].

Uma ferramenta que poderia ser desenvolvida, seria um simulador compatível com ambientes gráficos para a validação das técnicas de soluções propostas, utilizando por exemplo, os simuladores SLAM e RESQ.

Seria interessante também, aplicar o método desenvolvido em outros tipos de problemas de transporte multiproduto num sistema ferroviário como por exemplo, na formação de composição com custo variável de transporte em função do tamanho da decomposição.

Uma outra aplicação para este método, seria em outros sistemas de transporte que apresentam problemas de transporte multiproduto deste mesmo tipo, como por exemplo, num sistema rodoviário ou posteriormente, num sistema multimodal, que seria a integração dos meios de transporte.

Apêndice a

**ABREVIATURAS USADAS NOS  
EXEMPLOS**

Segue abaixo, uma relação das abreviaturas usadas nos exemplos desta dissertação:

1. Representando as ESTAÇÕES:

- **AK** = *Araguari*
- **UL** = *Uberlândia*
- **UB** = *Uberaba*
- **RP** = *Ribeirão Preto*
- **MG** = *M. Guaçu*
- **ZZ** = *Paulínia*
- **BV** = *Boa Vista*
- **KE** = *Canguera*
- **SO** = *Santos*
- **SS** = *Sorocaba*
- **IE** = *Iperó*
- **RJ** = *R. Junior*
- **PP** = *Pres. Prudente*
- **PE** = *Pres. Eptácio*
- **JY** = *Jundiaí*
- **CP** = *Campinas*
- **IQ** = *Itirapina*
- **BU** = *Bauru*
- **ML** = *Marília*
- **PM** = *Panorama*
- **AR** = *Araraquara*
- **RU** = *S. J. do Rio Preto*

2. Representando os TIPOS dos VAGÕES:

- (1)-TC = *Tanque*
- (2)-HS = *Hooper*
- (3)-FR = *Fechado*

3. Representando os PRODUTOS:

(a) Grupo-1 de exemplos:

- $P_1 = \text{GASolina}$
- $P_2 = \text{GASolina}$
- $P_3 = \text{FOSfato}$
- $P_4 = \text{FOSfato}$
- $P_5 = \text{FOSfato}$

(b) Grupo-2 de exemplos:

- $P_1 = \text{GASolina}$
- $P_2 = \text{GASolina}$
- $P_3 = \text{ALCool}$
- $P_4 = \text{ALCool}$
- $P_5 = \text{ALCool}$
- $P_6 = \text{CAFé}$
- $P_7 = \text{DIEsel}$
- $P_8 = \text{TRIgo}$
- $P_9 = \text{TRIgo}$
- $P_{10} = \text{MILho}$
- $P_{11} = \text{MILho}$
- $P_{12} = \text{MILho}$
- $P_{13} = \text{OUTros}$
- $P_{14} = \text{OUTros}$
- $P_{15} = \text{OUTros}$

## BIBLIOGRAFIA

- [1] ALLMAN, W.P. (1972) "*An Optimization Approach to Freight Car Allocation Under Time Mileage Per Diem Rental Rates*", Management Science, vol.18, no.10, pp.B567-574.
- [2] ALI, A. ; HELGASON, R. ; KENNINGTON, J. ; LALL, H. (1980) "*Computational Comparison Among Three Multicommodity Network Flow Algorithms*", Operations Research, vol.28, no.4.
- [3] ALVES, I.C. ; YAMAKAMI, A. (1992) "*Uma Nova Metodologia para Solucionar Problemas de Transporte Multiproduto*", XXIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Salvador-Ba.
- [4] ALVES, I.C. ; YAMAKAMI, A. (1992) "*Um Algoritmo para Solucionar Problemas de Transporte: aplicação em ferrovias*", XV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, São Carlos-SP.
- [5] ALVES, I.C. ; YAMAKAMI, A. (1993) "*Algoritmo para Controle de Distribuição de Materiais Rodantes em Ferrovias: implementação e análise*", I Seminário Latinoamericano de Automatization Avanzada, Santiago-Chile.
- [6] ALVES, I.C. ; YAMAKAMI, A. (1993) "*Método de Decomposição baseado em Heurística para resolver um Problema de Transporte Multiproduto num Sistema Ferroviário*", submetido ao XXV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Campinas-SP.
- [7] ASSAD, A. A. (1978) "*Multicommodity Network Flows - A Survey*", Networks, vol.8.

- 
- [8] **ASSAD, A. A.** (1980) "*Modelling for Rail Transportation*", Transportation Research-A, vol.14, no.3, pp.205-220.
- [9] **BAZARAA, S.M. ; JARVIS, J.J. ; SHERALI, H.D. ; ROMIG, W.** (1990) "*Linear Programming and Network Flows*", John Wiley & Sons, New York.
- [10] **BODIN, L.D. ; GOLDEN, B.L. ; SCHUSTER, A.D. ; ROMIG, W.** (1980) "*A Model for blocking of trains*", Transportation Research-B, vol.14, no.1/2, pp.115-120.
- [11] **BERTSEKAS, D.P.** (1987) "*Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models*", Prentice-Hall.
- [12] **DENARDO, E.V.** (1982) "*Dynamic Programming: Models and Applications*", Prentice-Hall.
- [13] **FRANK, M. ; WOLFE, P.** (1956) "*An Algorithm for Quadratic Programming*", Naval Research Logistics Quarterly, vol.3, no.1e2, pp.95-110.
- [14] **GLICKMAN, T.S. ; SHERALI, H.D.** (1985) "*Large-Scale network distribution of pooled empty freight cars over time, with limited substitution and equitable benefits*", Transportation Research-B, vol.19, no.2, pp.85-94.
- [15] **GOICOCHEA, A.** (1982) "*Multiobjective Decision analysis with Engineering and Business Applications*", John Wiley.
- [16] **HAGHANI, A.E.** (1987) "*Rail Freight Transportation: A Review of Recent Optimization Models for Train Routing and Empty Car Distribution*", Journal of Advanced Transportation, vol.21, no.2, pp.147-172.
- [17] **HARTMAN, J.K. ; LASDON, L.S.** (1972) "*A Generalized upper bounding algorithm for multicommodity network flow problems*", Networks, vol.1, pp.297-322.
- [18] **JORDAN, W.C. ; TURNQUIST, M.A.** (1983) "*A Sochastic Dynamic Model for Railroad Car Distribution*", Transportation Science, vol.17, no.2, pp.123-145.
- [19] **JACOB, C.** (1982) "*FERROVIA - O Caminho certo*", IMESP.
- [20] **KENNINGTON, J.L.** (1977) "*Solving Multicommodity Transportation Problems using a primal partitioning simplex techinque*", Naval Research Logistics Quartely, vol.24, pp.309-325.

- 
- [21] **KENNINGTON, J.L.** (1978) "*A Survey of Linear Cost Multicommodity Network Flow*", Operations Research, vol.26, no.2.
- [22] **KENNINGTON, J.L. ; HELGASON, R.V.** (1980) "*Algorithms for Network Programming*", John Wiley.
- [23] **LASDON, L.S.** (1970) "*Optimization Theory for Large Systems*", Mc Millan Co. .
- [24] **LUCESI, H.** (1989) "*Alocação de Material Rodante em Ferrovias*", Tese de Mestrado, FEE - UNICAMP .
- [25] **MARKOWICZ, B.P. ; KORNHAUSER, A.L.** (1983) "*Car Management Opportunities : Actual Return Mileage Versus Optimal Return Mileage*", Transportation Research Record, no.917, pp.6-13.
- [26] **MENDIRATTA, V.B. ; TURNQUIST, M.A.** (1982) "*Model for management of empty freight cars*", Transportation Research Record, no.838, pp.50-55.
- [27] **NILSON, N.J.** (1982) "*Principle of Artificial Inteligence*", Springer - Verlag Berlin Heidelberg, New York.
- [28] **PETERSEN, E.R. ; TAYLOR, A.J.** (1982) "*A Structured Model for Rail Line Simulation and Optimization*", Transportation Science, vol.16, no.2.
- [29] **PHILIP, C.E. ; SUSSMAN, J.M.** (1977) "*Inventory model of the railroad empty car distribution process*", Transportation Research Record, no.656, pp.52-60.
- [30] **RICH, E.** (1988) "*Inteligência Artificial*", Mc Graw Hill .
- [31] **SANG, M. L.** (1973) "*Optimizing Transportation Problems with Multiple Objectives*", AIIE Transactions, December.
- [32] **SIDDIQEE, W. ; D'ESOPPO D.A.** (1977) "*Computer Methods in Blocking and Train Operations Strategies*", Transportation Research Record, no.656, pp.45-52.