

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM EQUIPAMENTOS
ELETRÔNICOS: CONVECÇÃO NATURAL EM FONTES
TÉRMICAS SOBRE UMA SUPERFÍCIE VERTICAL

LUIZ FERNANDO MILANEZ

096/85

Trabalho apresentado à Universidade
Estadual de Campinas como parte dos
requisitos para o concurso de Livre-
Docência.

Campinas-1985

TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM EQUIPAMENTOS ELETRÔNICOS: CONVECÇÃO NATURAL EM FONTES TÉRMICAS SOBRE UMA SUPERFÍCIE VERTICAL

R E S U M O

Todo equipamento eletrônico dissipa uma certa quantidade de energia na forma de calor. A extrema miniaturização dos dispositivos eletrônicos agravou o problema térmico. Em muitos casos os componentes eletrônicos são montados de tal forma que a esteira causada pelas fontes de calor inferior afetam os outros elementos posicionados a jusante. Este problema é tratado neste trabalho.

Inicialmente, o problema fundamental de uma fonte térmica linear horizontal sobre uma superfície vertical adiabática é resolvido por similaridade. De acordo com a técnica de ordem de grandeza, são consideradas duas variáveis de similaridade, uma para $Pr < 1$ e outra para $Pr > 1$. Os resultados teóricos do perfil de temperatura na camada limite e da distribuição de temperatura na superfície são comparados com resultados experimentais obtidos em água, apresentando boa concordância.

Na segunda parte deste trabalho é efetuado um estudo experimental da interação entre dois aquecedores, com um posicionado na esteira do outro. A velocidade induzida pelo aquecedor inferior tende a aumentar o coeficiente de transferência de calor no aquecedor superior, porém este efeito é, de alguma forma, contrabalançado pelo pré aquecimento do fluido. Estes fatores portanto têm efeitos opostos sobre o coeficiente de transferência de calor no aquecedor superior, com o efeito resultante sendo função das taxas de dissipação de calor e do espaçamento entre os aquecedores. Os aquecedores considerados são de geometrias comumente encontradas em circuitos eletrônicos, tais como um par de tiras horizontais sobre uma superfície vertical e um par de cilindros de pequeno diâmetro sobre uma superfície vertical, adjacentes à su-

perfície ou afastados de uma distância igual ao diâmetro. As tiras simulam pastilhas enquanto que os cilindros simulam resistores. As experiências foram feitas com água e ar.

COOLING OF ELECTRONIC EQUIPMENT: NATURAL CONVECTION HEAT TRANSFER
FROM THERMAL SOURCES ON A VERTICAL SURFACE

A B S T R A C T

Every electronic equipment dissipates a certain amount of energy as heat. The extreme miniaturization of electronic devices has worsened the thermal problem. In many cases the electronic components are mounted in an array and the wake due to the lower heat sources affects other elements located downstream. This problem is treated in the present work.

Initially, the fundamental problem of the horizontal line source on an adiabatic vertical surface is solved by similarity. According to the scale analysis technique, two similarity variables are considered, one for $Pr < 1$ and other for $Pr > 1$. Theoretical results of the boundary layer temperature profile in the fluid and of the surface temperature distribution are compared to experiments carried out in water; the agreement is very good.

In the second part of this work, an experimental study of the interaction of two heaters is performed with one in the wake of the other. Streamwise velocities induced by the lower heater in the fluid tend to enhance the heat transfer coefficient in the upper heater, but this effect is, however, somewhat offset by the preheating of the fluid. These factors therefore have opposite effects on the upper heater heat transfer coefficient, with the resulting effect being a function of the heat release rates and also the distance between the heaters. The heaters considered were some of the common geometries found in electronic circuitry, like a pair of horizontal wide strips on an adiabatic vertical surface and a pair of small diameter horizontal cylinders on a vertical surface, either adjacent to the surface or

separated by a distance equal to the diameter. The strips simulate chips while the cylinders simulate resistors. Measurements were taken in both air and water.

AGRADECIMENTOS

Este texto, valorizado pela datilografia de TAKA OTA PERRONI e pelos desenhos de WILTON FURQUIM, registra parte da minha experiência em transferência de calor em equipamentos eletrônicos iniciada em 1981 através da elaboração de um relatório técnico solicitado pela ELEBRA. Este trabalho inicial contou com a participação do Prof. JOSÉ TOMAZ VIEIRA PEREIRA a quem sou grato não só por esta colaboração mas pelo prazer da convivência agradável e estimulante desfrutada ao longo de toda uma carreira que iniciamos juntos.

Em março de 1983 por solicitação da TELEBRÁS Telecomunicações Brasileiras S.A. coordenei a implantação da equipe "Estudos Técnicos da Mecânica Vertical Padrão" que passou a fazer parte de um convênio já existente com a Faculdade de Engenharia de Campinas. Quero agradecer à TELEBRÁS pelas condições fornecidas que permitiram a instalação de um laboratório de pesquisa nesta área e a formação de um grupo de pesquisadores integrado pelo Prof. Dr. LEONARDO GOLDSTEIN JR., Prof. MARCELO MOREIRA GANZAROLLI e RICARDO DIAS MARTINS DE CARVALHO. Meus agradecimentos aos integrantes deste grupo pelo trabalho conjunto desenvolvido.

De dezembro de 1984 a julho de 1985 realizei um programa de pós-doutorado neste tópico no Department of Mechanical Engineering, Iowa State University of Science and Technology a convite do Prof. ARTHUR EDWARD BERGLES a quem agradeço pela oportunidade de que me ofereceu de trabalhar consigo. A realização deste programa nos Estados Unidos somente tornou-se possível graças ao apoio financeiro garantido pela FAPESP a quem agradeço na figura do seu Diretor Científico Prof. Dr. RUY CARLOS DE CAMARGO VIEIRA de quem sempre recebi manifestações de apoio e consideração. Finalmente quero deixar registrado aqui o meu agradecimento ao Departamento de Engenharia Mecânica da UNICAMP pelo afastamento concedido para a realização deste programa no exterior.

TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM EQUIPAMENTOS ELETRÔNICOS: CONVECÇÃO
NATURAL EM FONTES TÉRMICAS SOBRE UMA SUPERFÍCIE VERTICAL

RESUMO	i
ABSTRACT	iii
AGRADECIMENTOS	v
CAPÍTULO 1. TÉCNICAS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR APLICADAS AO RESFRIAMENTO DE EQUIPAMENTOS ELÉTRICOS E ELETRÔNICOS	1
1.1. INTRODUÇÃO	1
1.2. EVOLUÇÃO DAS TÉCNICAS DE RESFRIAMENTO DE SISTEMAS ELÉTRICOS E ELETRÔNICOS	2
1.3. PUBLICAÇÕES RELACIONADAS AO RESFRIAMENTO DE EQUIPA- MENTOS ELETRÔNICOS	4
1.4. NÍVEIS DE RESISTÊNCIA TÉRMICA	6
1.5. LIMITAÇÕES DOS PROJETOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR ..	9
1.5.1. Ambiente Térmico de Operação	9
1.5.2. Confiabilidade	11
1.5.3. Condições de Serviço	12
1.5.4. Compatibilidade	12
1.5.5. Propriedades Termofísicas do Meio Condutor ..	13
1.6. ANÁLISE DO PROJETO TÉRMICO	14
1.6.1. Etapas da Análise Térmica	14
1.6.2. Teste Térmico	14
1.7. MÉTODOS E DISPOSITIVOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR ...	15
1.7.1. Resfriamento por Condução	15
1.7.2. Radiação e Convecção Natural	16
1.7.3. Convecção Forçada de Ar	17

1.7.4. Convecção Forçada de Líquidos	17
1.7.5. Ebulição Nucleada	18
1.7.6. Tubos de Calor	20
1.7.7. Resfriamento Termoelétrico	20
 CAPÍTULO 2. EQUAÇÕES DE CONVECÇÃO NATURAL	 24
2.1. INTRODUÇÃO	24
2.2. EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS	25
2.3. APROXIMAÇÕES DE BOUSSINESQ	27
2.4. APROXIMAÇÕES DA CAMADA LIMITE	32
2.5. ANÁLISE DE ORDEM DE GRANDEZA	36
2.5.1. Fluidos com Valores Elevados do Número de Prandtl	38
2.5.2. Fluidos com Valores Reduzidos do Número de Prandtl	40
2.5.3. Observações Finais	42
 CAPÍTULO 3. ANÁLISE DO ESCOAMENTO LAMINAR RESULTANTE DE UMA FONTE LINEAR HORIZONTAL SOBRE UMA SUPERFÍCIE VERTICAL ADIABÁTICA	 50
3.1. INTRODUÇÃO	50
3.2. CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA	52
3.3. A TÉCNICA DA SIMILARIDADE	54
3.4. FONTE LINEAR HORIZONTAL	61
3.5. RESULTADOS	66
3.6. ANÁLISE EXPERIMENTAL	71
3.7. CONCLUSÕES	75
 CAPÍTULO 4. ANÁLISE DO ESCOAMENTO LAMINAR RESULTANTE DE FONTES DISCRETAS DE ENERGIA SOBRE UMA SUPERFÍCIE VERTICAL	 94
4.1. INTRODUÇÃO	94
4.2. EFEITO DAS DIMENSÕES DO AQUECEDOR	96

4.3. INTERAÇÕES DE ESTEIRAS RESULTANTES DE FONTES DE ENERGIA	102
4.4. MECANISMO DE INTERAÇÃO	105
4.5. ANÁLISE EXPERIMENTAL DE ALGUMAS INTERAÇÕES	109
4.5.1. Montagem Experimental	110
4.5.2. Resultados Experimentais	113
4.5.3. Conclusões	115
APÊNDICE	138
LISTA DE SÍMBOLOS	148
REFERÊNCIAS	150

CAPÍTULO 1

TÉCNICAS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR APLICADAS AO RESFRIAMENTO
DE EQUIPAMENTOS ELÉTRICOS E ELETRÔNICOS

1.1. INTRODUÇÃO

Observa-se na história da fabricação e aplicação de dispositivos eletrônicos uma tendência para a redução do tamanho dos componentes. Neste sentido, as válvulas eletrônicas sofreram um processo constante de miniaturização até chegarem aos dispositivos semicondutores. Por exemplo, válvulas de 3000 W para sistemas eletrônicos de aeronaves podiam ser substituídas por transistores, elementos que além de não possuírem filamentos incandescentes, dissipavam cerca de 2100 W. No entanto, apesar da menor dissipação global de calor, o problema do controle térmico a nível do componente torna-se mais complexo devido às restrições de baixa temperatura na junção e menor tamanho do transistor, o que significa menor área disponível para a transferência de calor, e portanto maior temperatura do componente.

Quando os circuitos eletrônicos são empacotados, como ocorre com equipamentos de transmissão digital nas telecomunicações, os caminhos percorridos pelos fluxos de calor dissipado nos componentes devem ser identificados, bem como a distribuição de temperatura no interior do empacotamento. No campo das telecomunicações, os atuais e futuros projetos de sistemas e equipamentos de transmissão digital e comunicações ópticas para entroncamentos urbano-metropolitanos e os de longa distância desenvolvidos no país, em termos de tecnologia de componentes, estão demandando o uso de novas famílias cujas características de dissipação térmica impõem o aprofundamento do conhecimento do desempenho térmico do empacotamento.

No desenvolvimento das técnicas de transferência de calor para serem aplicadas aos equipamentos elétricos e eletrônicos, as temperaturas máximas e mínimas dos componentes devem ser limi-

tadas de maneira a se garantir um nível aceitável de confiabilidade. Além disso, as variações da temperatura entre os componentes conectados eletricamente devem ser minimizadas para um melhor desempenho, diminuindo-se os riscos de rupturas mecânicas por tensões térmicas.

A função primordial de um sistema de resfriamento para equipamentos elétricos e eletrônicos é garantir um caminho térmico de baixa resistência desde onde está ocorrendo a geração de energia (fonte) até um reservatório térmico de baixa temperatura (sumidouro). Em muitos casos práticos este reservatório térmico pode ser admitido como o ambiente onde o sistema eletrônico está operando, por exemplo, uma sala climatizada por ar condicionado no caso de um computador digital, ou o espaço sideral no caso de um sistema eletrônico em órbita.

1.2. EVOLUÇÃO DAS TÉCNICAS DE RESFRIAMENTO DE SISTEMAS ELÉTRICOS E ELETRÔNICOS

Em 1942 Mouromtseff [92] escreveu um artigo sobre o resfriamento de válvulas afirmando que no projeto de válvulas eletrônicas existem mais problemas de engenharia mecânica, metalúrgica e térmica do que os de caráter puramente eletrônicos. Em 1956 Kaye [73] enfatizava que a ciência de transferência de calor é extremamente importante para o projeto de componentes e dispositivos eletrônicos; ela pode levar a uma avaliação precisa do comportamento do equipamento antes da sua construção se forem conhecidos detalhes suficientes dos caminhos de escoamento do fluido e da transferência de calor. Estes dois comentários ilustram adequadamente o surgimento do reconhecimento da relevância da transferência de calor no projeto de equipamentos elétricos e eletrônicos.

É provável que as considerações térmicas tenham desempenhado um papel importante no projeto das primeiras máquinas elétricas. Entretanto, a literatura especializada anterior a 1950 contém apenas algumas poucas aplicações da transferência de calor em máquinas elétricas e dispositivos eletrônicos. Diversos estu-

dos experimentais ou semi-empíricos precederam a análise feita por Cockroft [37] em 1925 da distribuição da temperatura em transformadores. Sua solução para o fluxo de calor bidimensional em uma seção transversal retangular considerou geração de calor, condutividade térmica dependente da direção, diferentes coeficientes de transferência de calor nas faces adjacentes e temperaturas ambientes diferentes em cada face. Trabalhos posteriores introduziram mais alguns refinamentos a esta análise. Por exemplo, Higgins [63] inclui uma geração de calor dependente da temperatura e coeficientes de transferência de calor diferentes em todas as faces.

A partir de 1950 o número de aplicações da transferência de calor ao projeto de equipamentos elétricos e eletrônicos aumentou rapidamente. Somente no período de 1950 a 1954 surgiram mais de 200 referências [72]. Este desenvolvimento pode ser atribuído às necessidades de comunicação e aos sistemas de controle de aviões e mísseis supersônicos.

As válvulas de alta temperatura representaram um grande desafio tanto para a transferência de calor quanto para a engenharia de materiais. Estas válvulas eram necessárias para os ambientes de temperaturas elevadas causadas pelo aquecimento em velocidades supersônicas. Foram então desenvolvidas técnicas de resfriamento evaporativo utilizando líquidos halogeno-carbônicos dielétricos para reduzir as dimensões e o peso dos componentes e ao mesmo tempo melhorar o desempenho elétrico destes componentes [73].

Os transistores entraram em cena no final dos anos 40 e já pela metade dos anos 50 substituíram as válvulas em muitas aplicações. Estes dispositivos de estado sólido exigiam um controle mais rigoroso da temperatura por razões de confiabilidade e estabilidade. O problema do resfriamento tornou-se crítico muito embora as potências dissipadas fossem menores. Foram desenvolvidas então superfícies aletadas para o resfriamento destes transistores.

Em 1957 os soviéticos lançaram ao espaço o primeiro satélite artificial, o Sputnik, que marcou o início da era espacial. Os giroscópios utilizados nos equipamentos direcionais de veícu-

los espaciais, submarinos e aviões supersônicos exigiam sistemas de resfriamento extremamente elaborados. Nestas situações a temperatura do fluido de flutuação deve estar controlada com precisão de $0,01^{\circ}\text{C}$.

Nos anos 60 a indústria eletrônica expandiu-se rapidamente, com os equipamentos eletrônicos tornando-se mais sofisticados. Tornou-se necessário então direcionar a ciência da transferência de calor de uma maneira mais organizada para a solução de problemas elétricos e eletrônicos. Isto foi feito de maneira competente por Kraus [79] em 1965 ao escrever um livro sobre o assunto.

O resfriamento termoelétrico foi introduzido para diversas aplicações, desde o alívio de pontos quentes localizados em componentes até o resfriamento de um sistema completo [103]. Os circuitos impressos e os dispositivos de estado sólido introduziram problemas de transferência de calor que persistem até os dias de hoje.

1.3. PUBLICAÇÕES RELACIONADAS AO RESFRIAMENTO DE EQUIPAMENTOS ELETRÔNICOS

O primeiro livro dedicado exclusivamente a discutir o fenômeno da transferência de calor em equipamentos eletrônicos surgiu em 1965 [79] escrito por Kraus. Em 1969 Baum [16] preparou um capítulo sobre considerações de projeto térmico em um manual de empacotamento eletrônico. Em 1970 a Bell Telephone Laboratory [19] dedicou boa parte de um livro sobre o projeto físico de sistemas eletrônicos para o problema térmico, principalmente o cálculo da energia dissipada em cartões de circuito impresso.

Em 1972 Seely & Chu [104], dois cientistas da IBM, escreveram um livro tratando dos problemas de transferência de calor em equipamentos microeletrônicos. De acordo com informações prestadas pelos autores, uma segunda edição desta publicação está em preparação. Ainda em 1972 foi editado um livro escrito por Kern

& Kraus [75] totalmente dedicado ao cálculo do calor transferido em aletas, ou dissipadores de acordo com a linguagem utilizada pelos engenheiros elétricos e eletrônicos.

Em 1974 foi publicado um livro de nível elementar escrito por Scott [103], um engenheiro eletrônico cujo objetivo era o de colocar a transferência de calor ao alcance de qualquer engenheiro elétrico ou eletrônico.

A partir de 1980 o número de publicações nesta área aumentou de maneira significativa, não só com a edição de mais livros sobre o assunto bem como a introdução deste tópico em congressos de engenharia mecânica.

Em 1980 foi publicado um livro de autoria de Steinberg [110] dirigido para engenheiros elétricos e eletrônicos, de nível relativamente elementar, que não chegou a causar impacto por abordar assuntos que já haviam sido tratados anteriormente em maior profundidade. Ainda em 1980, Jaluria [66] que já vinha há algum tempo pesquisando o fenômeno da convecção natural em componentes eletrônicos escreveu um livro texto sobre convecção natural onde são ressaltadas as aplicações na eletrônica.

Em 1982 Kraus [81] escreveu um novo texto, mais atualizado sobretudo do ponto de vista de algoritmos computacionais, sobre análise e avaliação da utilização de aletas em dispositivos eletrônicos. Em 1983 foi editado o que pode ser considerado até agora o texto mais completo sobre a análise e o controle térmico de equipamentos eletrônicos, escrito por Kraus com a colaboração de Bar-Cohen [82]. Este texto além de registrar a experiência adquirida por Kraus neste assunto por mais de trinta anos, faz uma apresentação bastante detalhada sobre resistência térmica de contato, um assunto por si só difícil de ser tratado. Além disso o texto inclui uma interessante análise de confiabilidade dos dispositivos eletrônicos.

Em 1984, como era de se esperar, o computador entrou em cena. No texto elaborado por Ellison [43] os circuitos térmicos que simulam as situações encontradas em empacotamentos eletrônicos são resolvidos por algoritmos computacionais.

Como já foi mencionado anteriormente, a importância deste assunto vem se refletindo também nos congressos de engenharia. Em algumas oportunidades o congresso é especificamente sobre transferência de calor em equipamentos eletrônicos, como o realizado em 1977 em Atlanta, Georgia-USA, cujos artigos foram editados por Kraus, Bergles & Mollendorf [80]. Em 1981 os nove artigos apresentados na sessão "Heat Transfer in Electronic Equipment" no congresso anual ASME (The American Society of Mechanical Engineers) foram agrupados em um volume [3]. Em 1983 os cinco artigos apresentados na sessão "Advances in Cooling Microelectronics" e os seis artigos apresentados na sessão "Thermal-Fluid Mechanics in Electronic Packages" no congresso anual de inverno da ASME realizado em Boston, Massachusetts - USA, foram publicados em um único volume editado por Oktay & Bar-Cohen [94]. Em 1984 os doze artigos apresentados na sessão "Fundamentals of Natural Convection with Applications to Electronic Equipment Cooling" na vigésima-segunda Conferência Nacional de Transferência de Calor realizada em Niagara Falls, New York - USA, foram editados por Witte & Saxena [120] em um único volume. Em 1985 os cinco artigos apresentados na sessão "Thermal-Fluid Mechanisms in Thermal Control of Electronic Equipment" e os cinco artigos apresentados na sessão "Thermal Analysis of Electronic Equipment" foram editados por Oktay & Moffat em um volume [95].

É provável que daqui em diante este tópico venha a ter uma presença constante, em destaque como vem ocorrendo nos congressos da ASME, em congressos específicos sobre o assunto, ou através de artigos isolados publicados nas mais diversas revistas técnicas. Algumas destas publicações estão relacionadas nas referências apresentadas ao final deste trabalho.

1.4. NÍVEIS DE RESISTÊNCIA TÉRMICA

Existe uma analogia entre os fenômenos elétricos e térmicos. Na eletricidade, uma diferença de potencial entre dois pontos provoca a passagem de uma corrente elétrica que é proporcional à resistência elétrica entre estes pontos. Analogamente, na

transferência de calor uma diferença de temperatura entre dois pontos provoca a passagem de um fluxo de calor que é proporcional à resistência térmica entre estes dois pontos. No regime transitório, um sistema térmico armazena energia enquanto que o sistema elétrico armazena carga elétrica.

O desenvolvimento da tecnologia microeletrônica tem exigido a resolução de problemas térmicos complexos, tanto a nível do componente quanto a nível do sistema. Atualmente os projetos de empacotamento de alta densidade mantêm as temperaturas das junções dentro de níveis aceitáveis pela minimização das resistências térmicas internas, redução da resistência externa e pela manutenção de uma resistência térmica moderada a nível do sistema.

O primeiro nível de resistência térmica encontrado em um sistema eletrônico é o do componente, usualmente conhecido como resistência interna ou do componente. Esta resistência térmica pode ser definida como a que existe entre a junção do componente e algum ponto especificado na superfície da montagem do componente. Para desempenharem suas funções nos sistemas eletrônicos, os componentes devem ser arranjados ordenadamente sobre uma placa ou chassis. Em muitas montagens do componente, o calor deve ser transferido através de um número de diferentes materiais e interfaces, e a resistência interna total é a soma das resistências térmicas em série ou em paralelo. Em um conjunto bem projetado, o número de interfaces deverá ser minimizado, e as operações de solda e contato devem ser selecionadas de modo a oferecer a menor resistência interfacial possível.

O calor é removido do conjunto de componentes através de vários modos de transferência de calor, desde circulação natural de gases até ebulição nucleada em líquidos dielétricos. A resistência térmica associada à transferência de calor do conjunto de componentes é chamada de resistência externa ou do empacotamento.

As resistências interna e externa são as resistências térmicas básicas associadas aos equipamentos eletrônicos, porém um outro tipo de resistência também é importante: a resistência do sistema. É a resistência térmica que representa a elevação da tem

peratura do refrigerante e a efetividade do trocador de calor que existe entre a corrente de convecção e o sumidouro de energia.

Soluções idealizadas para problemas de condução tridimensional são utilizadas com frequência para a obtenção de resistências térmicas. Por exemplo, a junção de um semicondutor pode ser tratada como uma pequena fonte de calor (disco, placa retangular ou corpo semi-esférico) colocada sobre uma pastilha que é considerada como um corpo semi-infinito [34,42].

Em termos gerais, as resistências internas podem ser reduzidas utilizando-se materiais de elevada condutividade térmica, aumentando-se a área transversal para o fluxo de calor e minimizando-se as resistências de contato. Entretanto isto não é sempre possível uma vez que muitos dos materiais utilizados em empacotamentos possuem condutividades térmicas baixas. Além disso, as exigências elétricas para circuitos integrados, tais como condutividade elétrica, resistividade e rigidez dielétrica, em geral necessitam da utilização de outros materiais que possuem valores médios ou baixos de condutividade térmica. A maneira tradicional de reduzir a resistência térmica global do empacotamento é através da introdução de um sumidouro de energia. O sumidouro de energia basicamente aumenta a área superficial para a rejeição do calor para o fluido refrigerante, reduzindo desta maneira a resistência térmica associada à transferência de energia do componente para o fluido (resistência externa). Por definição, a resistência interna termina na interface sólido-fluido e portanto a introdução de um sumidouro de energia aumenta a resistência interna e reduz a resistência externa.

As considerações térmicas usuais a serem feitas para um melhor desempenho de equipamento são a condutividade térmica, maior área superficial possível, minimização da resistência de contato das superfícies parafusadas entre os componentes e o sumidouro. O problema da resistência de contato pode ser minimizado pela aplicação de pressão sobre a interface, utilização de pasta térmica ou utilização de arruelas de material macio. Em alguns casos é difícil conectar diretamente um dispositivo a um sumidouro.

1.5. LIMITAÇÕES DOS PROJETOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Além das limitações termo-hidráulicas, existem outras limitações que afetam os projetos de transferência de calor para equipamentos elétricos e eletrônicos. Quando um sistema é projetado para aplicações comerciais, o custo é o fator mais importante que irá determinar se o projeto irá progredir além do estágio de planejamento.

1.5.1. Ambiente Térmico de Operação

O sentido do termo ambiente térmico aqui empregado refere-se a todas as condições externas, configurações e fenômenos que de algum modo influenciam o projeto térmico de um equipamento elétrico ou eletrônico. Os ambientes térmicos de operação estão divididos em categorias, e uma das maiores limitações aos projetos de sistemas de controle térmico de equipamentos elétricos e eletrônicos é a grande variedade destes ambientes tanto dentro de uma mesma categoria como entre elas. Alguma característica do ambiente sempre atuará como sumidouro de energia para a energia térmica dissipada no equipamento, sendo que o tipo de sumidouro disponível é o fator de maior influência no projeto térmico global. Por exemplo, as condições ambientais a que estão sujeitos grandes computadores têm muito pouco em comum com aquelas a que estão submetidos os componentes eletrônicos de sistemas de microondas.

Existem basicamente três categorias de sistemas, sejam eles móveis ou estacionários: sistemas aéreos, marítimos e terrestres, cada qual com suas respectivas subcategorias. Para os sistemas aéreos e terrestres o ar atmosférico constitui o sumidouro de energia. As temperaturas das estruturas, carcaças de equipamentos e veículos terrestres são influenciadas de modo decisivo pela camada limite criada pelo ar atmosférico. A temperatura ambiente pode variar desde -50°C nas regiões polares até 50°C nos desertos subtropicais enquanto que a pressão pode variar deste $75,8 \text{ kN/m}^2$ em regiões de altitude considerável até $106,9 \text{ kN/m}^2$ em vales profundos.

Um equipamento projetado para operar em ambientes essencialmente ao nível do mar utilizará preferencialmente modos naturais de transferência de calor. Em geral este tipo de equipamento dissipa aproximadamente metade da energia térmica por convecção natural e o restante por radiação. Estruturas vizinhas ao equipamento podem atuar como fontes ou sumidouros de energia. Estruturas externas mais aquecidas, ou mesmo a radiação solar, poderão contribuir para um aumento da energia térmica que deve ser removida do equipamento.

As condições ambientais para veículos aéreos - aeronaves de baixa e alta velocidade - são fortemente influenciadas pelo escoamento aerodinâmico ao redor do veículo. Para baixas velocidades a maior dificuldade é a variação da temperatura ambiente nas proximidades do solo até a altitude de cruzeiro do voo. Já para altas velocidades os efeitos de dissipação viscosa tornam-se importantes elevando a temperatura da superfície para até cerca de 130°C . Os sistemas eletrônicos em órbita podem ser classificados como uma subcategoria deste grupo. Neste caso o espaço sideral é o ambiente de operação em vez do ar atmosférico. Trata-se de uma condição ambiental em que a transferência de calor ocorre somente por radiação para o ambiente pois o sistema opera no vácuo.

Veículos marítimos, tanto para profundidade quanto para superfícies, estão sujeitos a um ambiente muito mais favorável. Nesta categoria as temperaturas externas provavelmente não excederão 35°C nas águas equatoriais nem serão inferiores a 0°C na superfície de massas de água líquida ou sob crostas de gelo nas regiões polares.

Para a caracterização de um ambiente térmico de operação os seguintes itens devem ser considerados:

- a) temperatura do ar ambiente
- b) temperatura das estruturas vizinhas
- c) temperatura da estrutura para a montagem do equipamento
- d) método de montagem do equipamento na estrutura
- e) variações da pressão ambiente
- f) fluxo de radiação incidente

- g) emissividade das estruturas vizinhas
- h) propriedades do fluido refrigerante
- i) vazão do fluido refrigerante
- j) temperatura do fluido refrigerante
- l) pressão disponível do fluido refrigerante
- m) período de variação das condições ambientais externas
- n) ciclo de trabalho do equipamento

Nem todos estes itens aplicam-se necessariamente a todas as situações. Como regra geral, os itens constituintes de um ambiente térmico são aqueles situados além do controle imediato do projetista do equipamento e que, portanto, são limitações de projeto.

Os contínuos desenvolvimentos da tecnologia eletrônica e o simultâneo aumento das suas aplicações tornam difícil definir, em termos absolutos, o ambiente de operação para todos os componentes eletrônicos.

1.5.2. Confiabilidade

Os sistemas eletrônicos devem ter uma vida longa e ininterrupta devido à confiabilidade inerente dos dispositivos semicondutores, elementos de circuito impresso e microcomponentes discretos. Isto significa que o sistema de resfriamento deve ter um tempo de vida compatível com o equipamento que deve ser protegido. As taxas de falha mais elevadas em equipamentos de transferência de calor são encontradas em dispositivos de movimentação do fluido, válvulas e interruptores.

A necessidade de confiabilidade por tempo prolongado em sistemas eletrônicos sujeitos a condições ambientais variáveis e vários modos de operação ou ciclos de trabalho torna ainda mais difícil a análise e o projeto de equipamentos de controle térmico. Para se ter uma idéia da sensibilidade de um componente microeletrônico à temperatura, a confiabilidade deste elemento tipicamente diminui em 10 por cento para cada elevação de 2°C da temperatura [13]. A Fig. 1.1 ilustra o fator de deterioração térmica.

Um dimensionamento do sistema pelas condições extremas (máxima temperatura ambiente e máxima dissipação de calor) pode superar em muito os custos previstos inicialmente, pois estas mesmas condições podem ter baixa probabilidade de ocorrência ou ocorrem por pouco tempo. Este problema pode ser amenizado através do emprego de técnicas de controle térmico que consideram a deterioração gradual da taxa de remoção de calor. Esta metodologia não somente faz com que a análise de confiabilidade seja mais realista como também pode reduzir substancialmente a necessidade de equipamentos de resfriamento. Um exemplo desta técnica de deterioração gradual pode ser um sistema de resfriamento por convecção forçada de ar em aletas razoavelmente espaçadas. Na eventualidade da falha do ventilador, estas aletas propiciam considerável troca térmica por convecção natural e radiação.

1.5.3. Condições de Serviço

Por condições de serviço deve-se entender facilidade de manutenção. Um parâmetro importante de projeto para sistemas eletrônicos é que os componentes devem ser de acesso imediato para uma eventual remoção para testes, reparo ou substituição. Este parâmetro geralmente impõe uma limitação severa sobre as dimensões e a configuração dos dispositivos utilizados para facilitar a remoção do calor.

1.5.4. Compatibilidade

Deve haver compatibilidade entre o equipamento de transferência de calor e a aplicação geral do sistema eletrônico. Em aeronaves, por exemplo, o equipamento deve ser pequeno e leve. Fluidos tóxicos, corrosivos ou inflamáveis devem ser controlados, e as superfícies expostas devem ser mantidas dentro de limites de temperatura toleráveis. Deve haver também compatibilidade com o ambiente onde o sistema deverá operar. Um sistema pode ser solicitado a operar em diferentes pressões e altitudes, frequências diversas (50,60 Hz), as voltagens das linhas podem flutuar. Um elemento final de compatibilidade a ser considerado é em rela-

ção à possibilidade de uma elevação na capacidade de transferência de calor em algum ponto da vida do equipamento devido à deterioração do equipamento ou à introdução de novas funções aos componentes.

1.5.5. Propriedades Termofísicas do Meio Condutor

As exigências elétricas para dispositivos eletrônicos tais como a condutividade, resistividade e rigidez dielétrica, geralmente exigem a utilização de materiais que possuem valores baixos ou moderados de condutividade térmica. Uma maneira de se aumentar a transferência de calor a partir dos materiais sólidos deste tipo é montando-se a fonte de energia térmica sobre um segundo material de condutividade térmica elevada. Uma aplicação interessante é a utilização de diamantes como sumidouros de energia térmica para dispositivos de estado sólido [15]. De todos os materiais conhecidos, o diamante é o melhor condutor (cerca de duas a seis vezes a condutividade térmica do cobre). Porém esta solução tem sérias desvantagens pois é muito difícil fazer uma boa ligação entre o diamante e o dispositivo de estado sólido e, evidentemente, o elevado custo do diamante.

Podem ocorrer também dificuldades relacionadas com incompatibilidades decorrentes de coeficientes térmicos de expansão muito diferentes para dois materiais. Por exemplo, para a situação de uma pastilha montada sobre uma placa plana de cobre, o coeficiente de expansão térmica do cobre é seis vezes maior que o do silício e, desta forma, na junção direta entre estes dois materiais pode ocorrer a fratura do silício durante o ciclo térmico de operação. Esta situação pode ser amenizada pela introdução de um material amortecedor entre o silício e o cobre, cujo coeficiente de expansão é intermediário. Materiais adequados para este fim são o tungstênio e o molibdênio. A consequência nefasta desta solução é que o coeficiente global de transferência de calor diminui pois molibdênio e tungstênio possuem valores apenas moderados de condutividade térmica.

1.6. ANÁLISE DO PROJETO TÉRMICO

1.6.1. Etapas da Análise Térmica

Independentemente do tipo de equipamento de uma dada situação, o procedimento geral para a análise térmica é o mesmo e as sucessivas etapas são descritas a seguir:

- a) Definição do ambiente térmico em termos de temperaturas, pressões, tipos de montagem e sumidouro da energia dissipada.
- b) Especificação das características térmicas do equipamento; tanto as dissipações localizadas como a dissipação total devem ser determinadas. Os tipos de componentes e seus limites de temperatura devem ser estabelecidos.
- c) Certificação a respeito da existência dos caminhos térmicos necessários entre os componentes dissipativos e o sumidouro de energia. Para um projeto satisfatório, a resistência térmica global deve ser minimizada até um valor que mantenha os componentes a uma temperatura abaixo da máxima permitida para uma determinada dissipação térmica.

1.6.2. Teste Térmico

Este aspecto do estudo térmico torna-se necessário na medida em que os dados experimentais são importantes para efeito de comparação com resultados teóricos ou para servirem de subsídio para a continuidade do projeto térmico. O teste térmico em geral passa pelas fases de desenvolvimento, qualificação e aceitação.

Os testes de desenvolvimento são efetuados para fornecer elementos ao projeto dos componentes específicos ou de partes do sistema. Iniciam-se geralmente com testes de resistências térmicas de componentes individuais para os quais os resultados da

literatura não se enquadram na situação analisada. A maioria dos testes na fase de desenvolvimento envolve uma extensiva instrumentação para a medida de temperaturas e vazões em massa com a finalidade de uma garantia de que as técnicas de análise estão corretas. Após a fase de desenvolvimento são efetuados os testes de qualificação e aceitação. Os testes de qualificação são realizados no equipamento real com a finalidade de verificar se os objetivos do projeto térmico foram atingidos, inclusive as margens de segurança. Os testes de aceitação são aplicados nos componentes adquiridos para uma garantia de que o desempenho destes está dentro dos limites dos parâmetros do projeto.

1.7. MÉTODOS E DISPOSITIVOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Uma vez conhecido o fluxo de calor dissipado pelo componente, dispositivo ou sistema eletrônico, a máxima sobre temperatura (diferença de temperatura entre o componente e o ambiente) é especificada e o valor da diferença de temperatura entre a junção e a parede externa da estrutura é calculado. Deve-se então determinar qual o processo de transferência de calor (ou combinação de processos) a ser utilizado para que os objetivos do controle térmico sejam atingidos.

1.7.1. Resfriamento por Condução

Um método efetivo de remoção de calor de um dispositivo semicondutor é montar este dispositivo sobre uma placa fria. Um material de condutividade térmica elevada é utilizado para a placa, que é resfriada por convecção forçada de ar ou líquido. Desta forma o calor é transferido por condução da fonte de calor para a placa, por condução através do material desta e, finalmente, por convecção da placa para o fluido refrigerante. Em alguns casos deve ser utilizado um material intermediário, molibdênio ou tungstênio, para compensar as expansões térmicas desiguais.

1.7.2. Radiação e Convecção Natural

Antes do aparecimento dos dispositivos semicondutores, o método mais freqüentemente utilizado para o resfriamento era a convecção natural com uma eventual contribuição da radiação. Ainda hoje, linhas de transmissão, retificadores, transformadores e tipos similares de equipamentos elétricos são resfriados desta forma.

Em muitos equipamentos eletrônicos a transferência de calor ocorre simultaneamente por radiação e convecção natural. Entretanto, a quantidade de calor transferida através de cada modo depende da temperatura do sumidouro de energia, geometria e orientação das superfícies de transferência de calor.

Como os coeficientes de transferência de calor por convecção natural são baixos, uma configuração freqüentemente utilizada é a de um conjunto de aletas. Os textos escritos por Kern & Kraus [75] e Kraus [81] apresentam soluções para os modelos matemáticos padrões bem como procedimentos de projeto para muitas situações de interesse. Chaddock [32] testou conjuntos de aletas cujos resultados indicaram que o calor transferido pelas aletas por radiação representa de 10 a 20 por cento do calor transferido por convecção natural para os casos estudados.

Os trabalhos fundamentais com resfriamento por ar estão concentrados na determinação do escoamento por convecção natural e o calor transferido em placas verticais aquecidas (cartões de circuitos). Aung, Kessler & Beitin [7] apresentaram resultados numéricos e experimentais que possibilitam a avaliação da temperatura máxima do cartão em função do espaçamento dos cartões, dissipação térmica e altura do canal. Van Pol & Tiernay [117] consideraram a transferência de calor por convecção natural e radiação de um conjunto de aletas característico para o resfriamento de dispositivos eletrônicos. Hardwick & Levy [60] estudaram o problema da esteira de convecção natural acima de superfícies verticais aquecidas; quando cartões de circuitos ou fontes de energia térmica são empilhados verticalmente, a esteira de uma placa irá influenciar a camada limite da placa acima. Um problema semelhante, do escoamento por convecção natural provocado por diversas fontes ho

rizontais sobre uma parede vertical foi estudado por Jaluria [67] e por Sparrow & Faghri [108].

Se for utilizada a convecção natural em líquidos, o coeficiente de transferência de calor pode ser uma ordem de grandeza maior do que o que seria obtido com o ar como refrigerante. Neste caso o calor transferido por radiação é bem menor e algumas vezes pode ser desprezado. Os melhores resultados são obtidos quando a fonte de calor fica imersa em água, porém em muitos casos deve ser utilizado um fluido dielétrico. Infelizmente estes líquidos em geral são densos e muitos caros, e uma alternativa é a utilização de fluidos halogeno-carbônicos.

1.7.3. Convecção Forçada de Ar

O resfriamento através da convecção forçada de ar possibilita coeficientes de transferência de calor uma ordem de grandeza maiores do que os obtidos com convecção natural de ar. Entretanto, trata-se de um processo mais complicado pois necessita de um ventilador e de um sistema de controle deste ventilador.

Em muitos casos podem ser obtidas taxas de remoção de calor razoáveis simplesmente pela movimentação de uma corrente de ar sobre o equipamento. Em geral os coeficientes de transferência de calor são elevados devido às irregularidades das superfícies. Muitos sistemas resfriados por convecção forçada de ar descarregam o ar de resfriamento no mesmo ambiente de onde ele foi retirado. A temperatura de admissão do ar é mantida dentro de uma determinada faixa por meio de um sistema de condicionamento de ar do ambiente.

1.7.4. Convecção Forçada de Líquidos

O resfriamento por convecção forçada de ar, embora mais simples de ser implementado do que o resfriamento por convecção forçada de líquido, apresenta algumas desvantagens. Por exemplo, o resfriamento por convecção forçada de ar pode não ser adequado

para equipamentos que devem operar em altitudes elevadas onde a densidade do ar é baixa. Os ventiladores em geral são equipamentos que produzem ruídos e vibrações que podem ser prejudiciais ao sistema que está sendo resfriado. Além disso, para sistemas que dissipam quantidades elevadas de energia, como os grandes computadores, as unidades de ar condicionado não conseguem remover a carga térmica total.

Nos sistemas de resfriamento por convecção forçada de líquidos as bombas de movimentação do líquido bem como o reservatório do refrigerante, podem ser posicionados fora do empacotamento eletrônico propiciando um funcionamento silencioso e livre de vibrações. Em geral os coeficientes de transferência de calor por convecção forçada de líquidos são uma ordem de grandeza maiores do que os obtidos com ar. Um problema apresentado por esta técnica é que podem ser necessárias grandes quantidades de líquidos refrigerantes caros, e as bombas e os acessórios externos elevam o custo e as dimensões do equipamento ao mesmo tempo que reduzem a confiabilidade do sistema.

1.7.5. Ebulição Nucleada

A introdução de técnicas de integração em larga escala (LSI-Large Scale Integration) nos equipamentos eletrônicos criou alguns problemas de transferência de calor. Os dispositivos fabricados através deste método podem ser considerados como superfícies com conjuntos de pontos geradores de energia. Em alguns casos estes fluxos de energia são suficientemente baixos de tal modo que um resfriamento adequado pode ser conseguido montando-se o dispositivo sobre um sumidouro de energia; em outras aplicações, entretanto, torna-se necessária uma transferência de calor por ebulição nucleada. Uma maneira efetiva de se resolver este problema é pela imersão dos circuitos LSI em um líquido dielétrico; para fluxos de calor baixos o calor é transferido por convecção natural enquanto que para fluxos elevados ocorre a ebulição nucleada.

Baker [10] mostrou que a ebulição nucleada é um meio

bastante efetivo de resfriamento de fontes de energia térmica. Entretanto, para fontes com área superficial inferior a $0,01 \text{ cm}^2$ a ebulição nucleada não é muito mais efetiva do que a convecção natural com o mesmo líquido.

O resfriamento por ebulição tem a vantagem de não necessitar da utilização de bombas, e portanto trata-se de um método bastante simples, além de proporcionar os coeficientes de transferência de calor mais elevados.

As desvantagens desta técnica são:

- a) O sistema pode operar em uma direção somente, com a massa de líquido situada no ponto mais baixo do conjunto.
- b) A ebulição causa uma turbulência local elevada e grandes flutuações de temperatura junto à superfície da fonte, o que pode provocar tensões mecânicas nos componentes. Estas flutuações de temperatura podem também produzir ruído elétrico no sistema.
- c) Muitas das impurezas que se encontram dissolvidas no líquido refrigerante não serão vaporizadas na temperatura de ebulição do refrigerante. Quando o líquido vaporiza, estas impurezas serão concentradas nas proximidades do campo de nucleação. Desta forma a possibilidade de falha deste dispositivo devido à contaminação por estas impurezas será aumentada.
- d) A ebulição restringe o projeto físico do sistema. Por exemplo, o sistema deve estar contido em um tanque pressurizado impermeável à entrada de ar, provido de um condensador para o vapor e um mecanismo de alívio da pressão.
- e) A ebulição também restringe a escolha do refrigerante. Por exemplo, o ponto de ebulição de um refrigerante deve estar situado entre a temperatura do sumidouro de energia e a máxima temperatura de operação do dispositivo.

1.7.6. Tubos de Calor

Existe um interesse muito grande na utilização de tubos de calor para o resfriamento de dispositivos eletrônicos. Streb [111, 112] considerou três tipos de aplicações: remoção do calor de grandes componentes discretos, remoção do calor de empacotamentos fechados e controle térmico de sistemas sujeitos a uma extensa faixa de temperatura ambiente de operação. Os tubos de calor basicamente representam uma maneira alternativa de acoplar a fonte de calor ao fluido refrigerante. A resistência térmica deste acoplamento é muito baixa, uma vez que a condução é substituída por um transporte de entalpia. É importante salientar, entretanto, que o tubo de calor deve estar conectado termicamente de maneira eficiente à fonte de calor (extremidade do evaporador) e ao refrigerante (extremidade do condensador).

Basiulis & Hummel [14] discutem as aplicações específicas do tubo de calor no resfriamento eletrônico, citando o resfriamento de módulos e cartões de circuito impresso e transformadores. Streb [112] comenta a utilização do tubo de calor no resfriamento de computadores, amplificador de microondas e um sistema de controle numérico para uma máquina-ferramenta. Corman & McLaughlin [38] descrevem o resfriamento de motores elétricos de alta potência onde os tubos de calor são empregados no rotor e no estator para transferir o calor desde o ponto de geração até as extremidades do motor.

1.7.7. Resfriamento Termoelétrico

Estes dispositivos são mais empregados em equipamentos elétricos quando é necessário proporcionar um resfriamento localizado para um componente ou manter a temperatura interna da montagem, ou de parte dela, abaixo da temperatura ambiente.

Os resfriadores termoelétricos apresentam muitas vantagens sobre os demais sistemas de resfriamento. A sua principal vantagem é a capacidade de manter temperaturas abaixo da temperatura ambiente sem o uso de partes móveis como em um compressor e sem

necessidade de líquidos refrigerantes.

Seely [105] relaciona exemplos de sistemas de controle térmico que foram construídos utilizando dispositivos termoelétricos.

A Fig. 1.2 ilustra as diferenças de temperatura em função do fluxo de calor para vários modos de transferência de calor e vários fluidos de resfriamento.

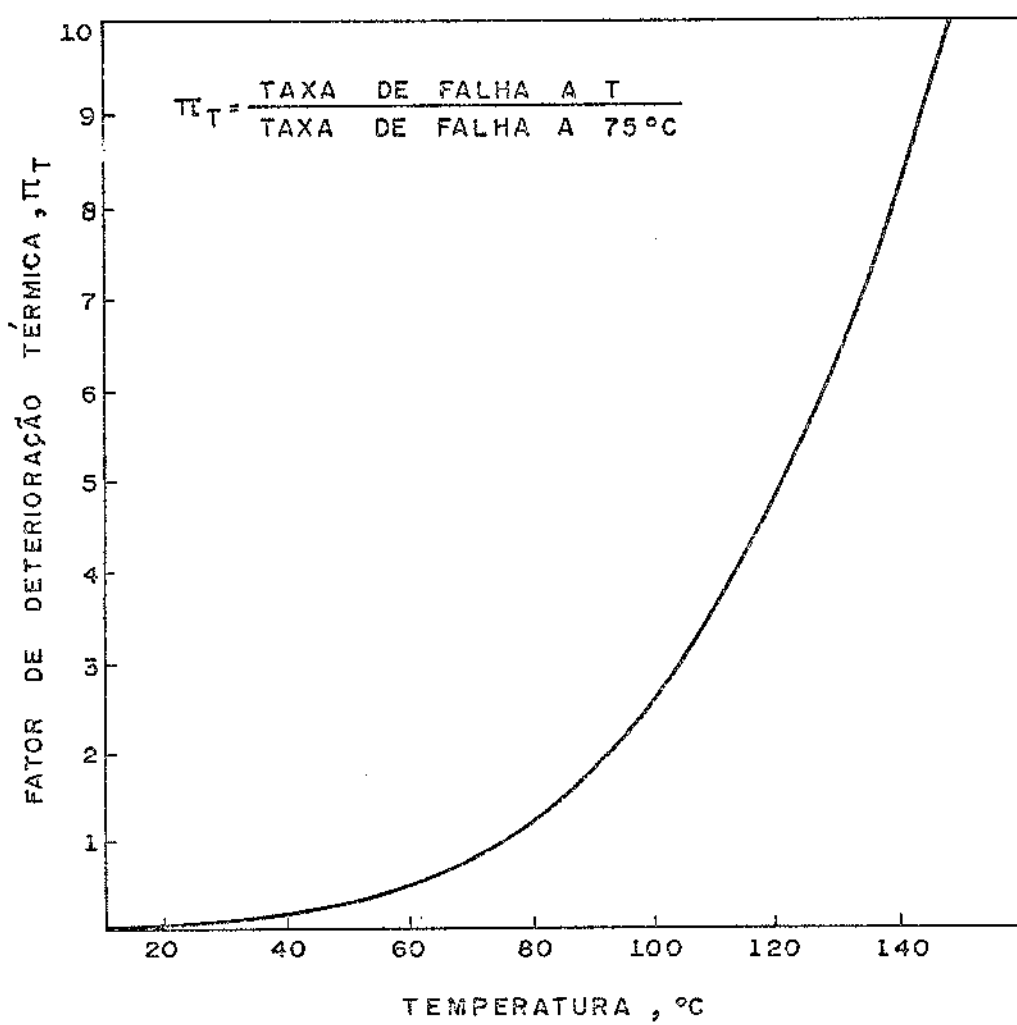


Figura 1.1 - Fator de deterioração térmica para dispositivos digitais bipolares [82].

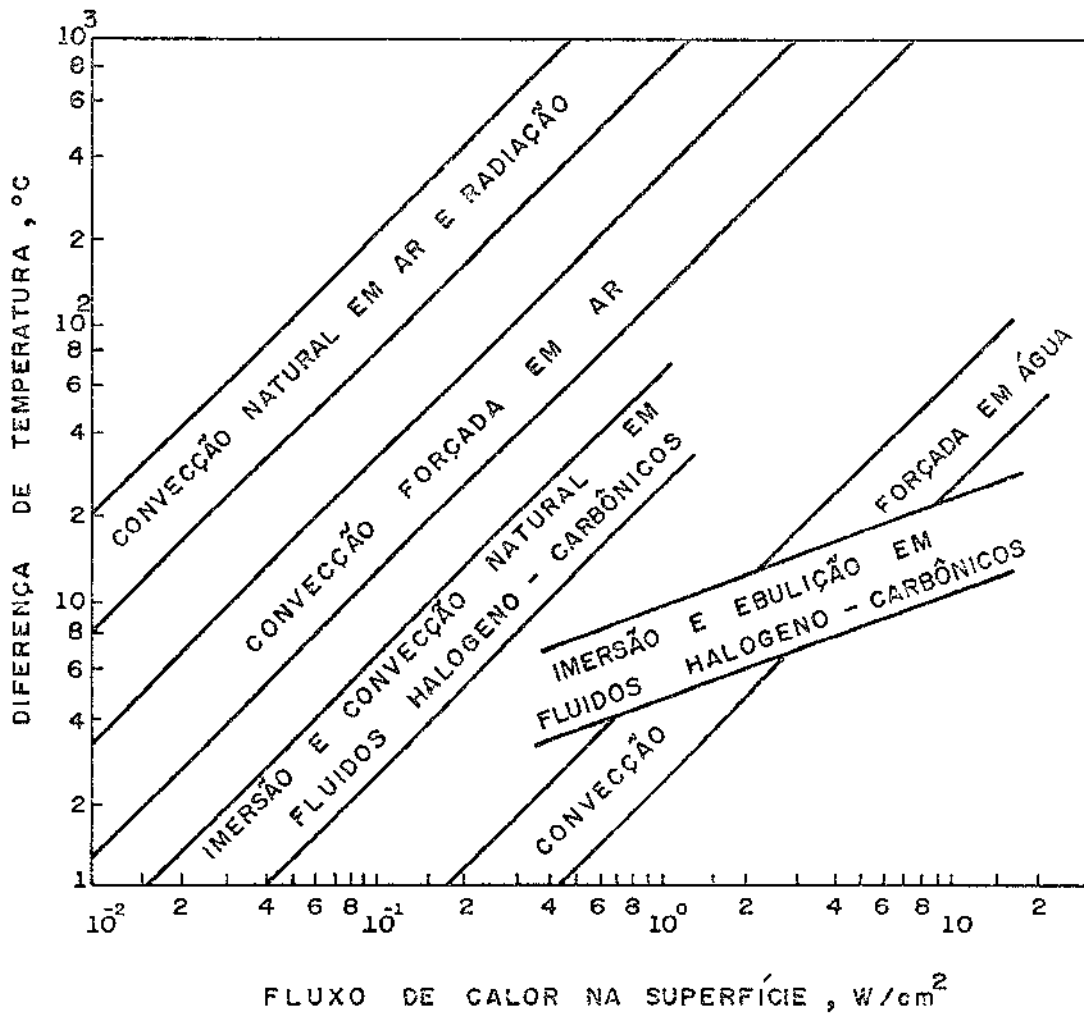


Figura 1.2 - Diferenças de temperatura em função do fluxo de calor para vários modos de transferência de calor e vários fluidos de resfriamento [82].

CAPÍTULO 2

EQUAÇÕES DA CONVECÇÃO NATURAL LAMINAR

2.1. INTRODUÇÃO

As equações fundamentais da dinâmica dos fluidos são baseadas nas seguintes leis universais de conservação:

- a) Conservação da massa
- b) Conservação da quantidade de movimento
- c) Conservação da energia

A equação escalar que resulta da aplicação da lei de conservação da massa a um escoamento é chamada de equação da continuidade. A lei da conservação da quantidade de movimento é na verdade a segunda lei de Newton. Quando esta lei é aplicada ao escoamento de um fluido, resulta em uma equação vetorial conhecida como equação da quantidade de movimento. A lei da conservação de energia é a primeira lei da termodinâmica e a equação escalar da dinâmica dos fluidos resultante é chamada de equação da energia. Além das equações desenvolvidas a partir destas leis universais é necessário estabelecer relações entre as propriedades dos fluidos para completar o sistema de equações. Um exemplo destas relações são as equações de estado que relacionam as variáveis termodinâmicas pressão, densidade e temperatura.

Historicamente existem duas metodologias diferentes para a obtenção das equações da dinâmica dos fluidos, a fenomenológica e a teoria cinética. Na metodologia fenomenológica são postuladas certas relações entre tensão e taxa de deformação, fluxo de calor e gradiente de temperatura, com as equações do escoamento sendo então desenvolvidas a partir das leis de conservação. Neste caso as constantes de proporcionalidade entre tensão e deformação, fluxo de calor e gradiente de temperatura (chamadas de coeficientes de transporte) devem ser determinadas experimentalmente. Na metodologia da teoria cinética, as equações do escoamento

mento são obtidas com os coeficientes de transporte definidos em termos de certas relações integrais que envolvem a dinâmica da colisão de partículas. A desvantagem desta metodologia é que as forças intermoleculares devem ser especificadas para que as integrais das colisões sejam avaliadas. Desta forma ocorre uma incerteza matemática em vez da incerteza experimental da metodologia fenomenológica. Estas duas metodologias evidentemente devem resultar nas mesmas equações do escoamento se forem feitas hipóteses equivalentes durante o tratamento destas.

A obtenção das equações fundamentais da convecção natural não será apresentada aqui. O desenvolvimento destas equações utilizando a metodologia fenomenológica é tratada em detalhes por Jaluria [66].

2.2. EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

Na convecção natural o escoamento é produzido por diferenças de densidade causadas por diferenças de temperatura. Para este tipo de escoamento as equações de conservação da massa, quantidade de movimento e energia são, respectivamente,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{F} - \vec{\nabla}P + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.2)$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla}T) + q''' + \beta T \frac{DP}{Dt} + \mu \phi \quad (2.3)$$

Na equação da quantidade de movimento $\vec{F} = \rho \vec{g}$ é a força de campo por unidade de volume onde ρ é a densidade e \vec{g} é a força gravitacional por unidade de massa.

Na equação da energia k é a condutividade térmica que pode ser variável, q''' é a energia gerada por unidade de volume e $\mu\phi$ é a dissipação viscosa onde ϕ é a função dissipação [18,50]. O termo $\beta T(DP/Dt)$ representa o efeito de compressibilidade e o coeficiente de expansão volumétrica β é definido através de

$$\beta = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad (2.4)$$

As equações que representam o escoamento em convecção natural são diferenciais parciais elípticas. A variação da densidade é causada pelos gradientes de temperatura. O campo de temperatura, descrito pela equação da energia, depende por sua vez, do campo de velocidade. Todas as equações de conservação são acopladas através da variação da densidade e devem ser resolvidas simultaneamente para fornecer a distribuição no espaço e no tempo dos campos de velocidade, pressão e temperatura. Devido a esta complexidade na análise deste tipo de escoamento são introduzidas algumas hipóteses simplificadoras e aproximações que facilitam a obtenção de soluções para estas equações.

Na Eq. (2.2) da quantidade de movimento, a pressão local P pode ser dividida em dois termos, um devido à pressão hidrostática do meio em repouso P_∞ e outro devido ao movimento do fluido, a pressão dinâmica P_d . O primeiro termo acoplado à força de campo atuando sobre o fluido constitui o mecanismo motor para o escoamento.

$$P = P_\infty + P_d \quad (2.5)$$

$$\vec{\nabla}P = \vec{\nabla}P_\infty + \vec{\nabla}P_d \quad (2.6)$$

Para o caso da direção x estar alinhada ao campo gravitacional,

$$\vec{\nabla}P_{\infty} = \frac{\partial P_{\infty}}{\partial x} \vec{i} = \frac{dP_{\infty}}{dx} \vec{i} = \rho_{\infty} \vec{g} \quad (2.7)$$

é o gradiente de pressão hidrostática no fluido de densidade ρ_{∞} . Desta forma, os dois primeiros termos do lado direito da Eq.(2.2) podem ser escritos como

$$\vec{F} - \vec{\nabla}P = \rho \vec{g} - (\vec{\nabla}P_{\infty} + \vec{\nabla}P_d) = (\rho - \rho_{\infty}) \vec{g} - \vec{\nabla}P_d \quad (2.8)$$

Como em geral o campo gravitacional é orientado no sentido contrário ao da direção x para este tipo de escoamento, $\vec{g} = -g\vec{i}$, e assim

$$\vec{F} - \vec{\nabla}P = (\rho_{\infty} - \rho) g \vec{i} - \vec{\nabla}P_d \quad (2.9)$$

Para \vec{g} formando um ângulo α com a direção x, o termo da força de empuxo é dado por $(\rho_{\infty} - \rho)g \cos \alpha$ na direção x e $(\rho_{\infty} - \rho)g \sin \alpha$ na direção y. Devido à dependência da densidade em relação à temperatura, este termo acopla as equações da quantidade de movimento e energia.

Na Eq. (2.3) da energia o termo que representa o efeito de compressibilidade é ignorado para escoamentos que podem ser considerados incompressíveis e o termo da dissipação viscosa só é significativo para velocidades elevadas.

2.3. APROXIMAÇÕES DE BOUSSINESQ

A maior dificuldade para a solução do conjunto de equações de conservação na convecção natural resulta principalmente da possível variação das propriedades de transporte μ e k , e da densidade ρ . Os valores de μ e k são basicamente dependentes da

temperatura. Variações significativas destes valores só ocorrem para diferenças grandes de temperatura, e um procedimento usual é considerar estas propriedades constantes. Entretanto, a variação da densidade deve ser levada em consideração pois é ela a causadora do movimento do fluido.

Para simplificar a análise, vamos considerar um escoamento bidimensional, como mostrado na Fig. 2.1, onde uma superfície vertical com temperatura $T_0 = T(x,0)$ está exposta a um extenso meio fluido mantido à temperatura T_∞ . Para efeito de ilustração seja $T_0 > T_\infty$.

O movimento do fluido é devido à diferença entre a força de campo e a força originada pelo gradiente de pressão no meio ambiente. Isto implica que a força motora do escoamento por unidade de volume do fluido é $g(\rho_\infty - \rho)$. Para uma estimativa das variações da densidade, é conveniente uma avaliação da velocidade característica de convecção, U_c . Se a força motora do escoamento atua ao longo de uma distância vertical x e se a energia desta forma adicionada for igualada à energia cinética por unidade de volume, resulta

$$\frac{\rho U_c^2}{2} \cong gx(\rho_\infty - \rho) \quad (2.10)$$

$$U_c \cong \sqrt{\frac{2gx}{\rho} (\rho_\infty - \rho)} \quad (2.11)$$

Como somente a força motora foi considerada, pois as forças viscosas foram ignoradas nesta análise, a estimativa de U_c é na realidade o valor máximo que pode ser esperado no escoamento. Para fluidos de viscosidade elevada esta estimativa é muito grande.

Considerando um fluido não-viscoso sobre a superfície vertical, a equação de Bernoulli pode ser aplicada para uma estimativa da diferença de pressão no escoamento. Se P_∞ é a pressão do meio ambiente e P no interior da camada limite, como a velocidade do meio ambiente é zero, resulta

$$P_{\infty} - P \equiv \frac{\rho U_c^2}{2} \quad (2.12)$$

$$P_{\infty} - P \equiv gx(\rho_{\infty} - \rho) \quad (2.13)$$

Assim, a diferença máxima de pressão entre a pressão no ambiente e no escoamento é estimada como sendo da ordem de $gx(\rho_{\infty} - \rho)$. Estes resultados podem agora ser utilizados para a estimativa das diferenças de densidade no escoamento em função da pressão e da temperatura.

Se a densidade do fluido ρ é uma função da pressão e da temperatura, a densidade em um dado ponto do escoamento, $\rho(P, T)$, pode ser escrita em termos da densidade do meio ambiente $\rho_{\infty}(P_{\infty}, T_{\infty})$ como uma expansão dupla em série de Taylor em torno das condições ambientes. Assim,

$$\begin{aligned} \rho_{\infty} = \rho &+ \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P (T_{\infty} - T) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2}\right)_P (T_{\infty} - T)^2 + \dots \\ &+ \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T (P_{\infty} - P) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial P^2}\right)_T (P_{\infty} - P)^2 + \dots \\ &+ \frac{\partial^2 \rho}{\partial P \partial T} (P_{\infty} - P) (T_{\infty} - T) + \dots \end{aligned} \quad (2.14)$$

Utilizando as Eqs. (2.4) e (2.13) resulta

$$\begin{aligned} \rho_{\infty} - \rho &= \rho \beta (T - T_{\infty}) + \frac{\rho \beta^2}{2!} (T - T_{\infty})^2 + \dots \\ &+ \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T [gx(\rho_{\infty} - \rho)] + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial P^2}\right)_P [gx(\rho_{\infty} - \rho)]^2 + \dots \\ &+ \frac{\partial^2 \rho}{\partial P \partial T} [gx(\rho_{\infty} - \rho) (T_{\infty} - T)] + \dots \end{aligned} \quad (2.15)$$

que é uma soma de três séries. Na primeira série $\rho\beta(T-T_\infty)$ é o primeiro termo e o enésimo termo é $\rho\beta^n(T-T_\infty)^n/n!$ sendo que o termo de ordem $(n-1)$ multiplicado por $\beta(T-T_\infty)/n$ fornece o enésimo termo. Para $\beta(T-T_\infty) < 1$ a série é convergente e se $\beta(T-T_\infty) \ll 1$ somente o primeiro termo desta série deve ser considerado. Na segunda série o termo $(\partial\rho/\partial P)_T gx$ deve ser comparado com a unidade, devido ao lado esquerdo da equação. Se $(\partial\rho/\partial P)_T gx \ll 1$ toda esta série pode ser desprezada. Portanto, se na terceira série $\beta(T-T_\infty)$ e $(\partial\rho/\partial P)_T gx$ forem bem menores que a unidade, a diferença de densidade pode ser avaliada através de

$$\rho_\infty - \rho = \rho\beta(T-T_\infty) \quad (2.16)$$

Para um gás ideal $P = \rho RT$ onde R é a constante do gás e T é a temperatura absoluta. Neste caso,

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T = \frac{1}{RT} \quad (2.17)$$

Além disso $\beta = 1/T$ para um gás ideal e, assim,

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T gx = \frac{g\beta x}{R} \quad (2.18)$$

Portanto, a Eq. (2.16) vale para gases ideais se $\beta(T-T_\infty) \ll 1$ e $g\beta x/R \ll 1$. Estas condições são facilmente observadas para gases. Para líquidos esta aproximação é ainda melhor pois β é igualmente muito menor que $1/T$ e o termo $(\partial\rho/\partial P)_T$ será também muito menor. Somente diferenças muito grandes de temperatura exigem que alguns termos adicionais na Eq. (2.15) sejam considerados.

A estimativa da velocidade característica (máxima) do escoamento pode agora ser combinada com a relação obtida para a diferença de densidade, Eq. (2.16). A velocidade característica de convecção, local e global, para fluidos de viscosidade modera-

da, é definida por

$$U_c(x) = \sqrt{g\beta x(T_0 - T_\infty)} \quad (2.19)$$

$$U_c = \sqrt{g\beta L(T_0 - T_\infty)} \quad (2.20)$$

onde L é a dimensão característica da superfície e a temperatura do fluido no escoamento foi considerada como sendo a média entre a temperatura da superfície T_0 e a temperatura do meio fluido T_∞ .

A Eq. (2.1) da continuidade também pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (2.21)$$

Para o caso de um fluido ambiente uniforme (não estratificado) a variação da densidade na equação da continuidade é considerada e comparada com outros termos na equação. O termo $\partial(\rho u)/\partial x$ pode ser escrito como $u(\partial\rho/\partial x) + \rho(\partial u/\partial x)$. Comparando o termo envolvido a variação da densidade com o termo da variação da velocidade resulta

$$\frac{u(\partial\rho/\partial x)}{\rho(\partial u/\partial x)} \equiv \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{u}{\Delta u} \quad (2.22)$$

A velocidade na direção x varia desde zero no meio ambiente até u em uma determinada posição no escoamento e, portanto, u e Δu são da mesma ordem de grandeza. A diferença de densidade é $\Delta\rho = \rho\beta(T - T_\infty)$ e, se $\beta(T - T_\infty) \ll 1$, a variação da densidade na equação da continuidade pode ser desprezada em relação aos outros termos pois estas mesmas considerações também são válidas para o termo $\partial(\rho v)/\partial y$.

Se as condições acima forem satisfeitas, juntamente com as consideradas anteriormente para a obtenção da Eq. (2.16), a diferença de densidade, que causa o escoamento devido a uma interação entre a força de campo gravitacional e o gradiente de pressão hidrostática, pode ser aproximada por um efeito da temperatura como indicado pela Eq. (2.16) e, além disso, as variações de densidade na equação da continuidade podem ser desprezadas. Estas duas aproximações são geralmente atribuídas a Boussinesq [25] e são conhecidas como aproximações de Boussinesq para a convecção natural. Entretanto Joseph [71] e Mihaljan [91] discutindo a história destas aproximações comentam que apesar do trabalho de Boussinesq ter sido publicado em 1903, estas simplificações foram inicialmente apresentadas por Oberbeck em 1879 e utilizadas por Lorenz em 1881.

Com as aproximações de Boussinesq, e para propriedades de transporte admitidas constantes, as equações da convecção natural ficam reduzidas a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.23)$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\rho\beta(T-T_\infty)\vec{g} - \vec{\nabla}P_d + \mu\nabla^2\vec{V} \quad (2.24)$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T + q''' + \beta T \frac{DP}{Dt} + \mu\phi \quad (2.25)$$

2.4. APROXIMAÇÕES DA CAMADA LIMITE

Segundo o conceito da camada limite introduzido por Prandtl em 1904 os efeitos viscosos no escoamento estão restritos a uma camada de fluido muito fina adjacente à superfície e o escoamento além desta região é essencialmente não-viscoso. Este conceito permite algumas simplificações adicionais às equações do escoamento [51].

Para tornar esta análise mais simples, vamos considerar um escoamento bidimensional incompressível, subsônico e sem geração de energia no fluido. Com estas hipóteses os três últimos termos da Eq. (2.25) podem ser desprezados. Gebhart [51] e Jaluria [66] fornecem detalhes sobre o tratamento destes termos. Para o escoamento representado na Fig. 2.1 as equações de conservação, na forma desenvolvida e para regime permanente, são

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.26)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_d}{\partial x} + g\beta(T-T_\infty) + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.27)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_d}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.28)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.29)$$

onde $\nu = \mu/\rho$ é a viscosidade cinemática ou difusividade da quantidade de movimento, e $\alpha = k/\rho c_p$ é a difusividade térmica. A relação entre as difusividades da quantidade de movimento e térmica caracterizam um importante grupo adimensional conhecido como número de Prandtl:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{k} \quad (2.30)$$

As equações da quantidade de movimento são também conhecidas como equações de Navier-Stokes, embora algumas vezes esta denominação seja utilizada para designar todo o conjunto de equações de conservação.

Agora será utilizada a hipótese que a espessura da camada limite térmica δ_t é pequena em relação à dimensão característica L , em geral a altura da superfície vertical. Assim, $\delta_t \ll L$ ou $\delta_t/L \ll 1$.

No interior da camada limite térmica x varia desde 0 até L e y varia desde 0 até δ_t , ou seja, $x \sim L$ e $y \sim \delta_t$ onde o sinal \sim significa "da ordem de grandeza de". Na Eq. (2.27) da quantidade de movimento na direção x podemos escrever $(\partial^2 u / \partial x^2) \sim u/L^2$ e $(\partial^2 u / \partial y^2) \sim u/\delta_t^2$ e comparar estes termos responsáveis pelo atrito viscoso através da relação

$$\frac{(\partial^2 u / \partial x^2)}{(\partial^2 u / \partial y^2)} = \frac{u/L^2}{u/\delta_t^2} = \left(\frac{\delta_t}{L}\right)^2 \ll 1 \quad (2.31)$$

Por esta relação fica claro que o termo $(\partial^2 u / \partial x^2)$ é muito menor que $(\partial^2 u / \partial y^2)$ e pode ser desprezado em relação a este.

Este mesmo procedimento pode ser aplicado à Eq. (2.28) para mostrar que o termo $(\partial^2 v / \partial x^2)$ pode ser desprezado em relação a $(\partial^2 v / \partial y^2)$. A ordem de grandeza da componente v da velocidade pode ser obtida da Eq. (2.26) como sendo $v \sim u\delta_t/L$ e, assim,

$$\frac{(\partial^2 v / \partial x^2)}{(\partial^2 v / \partial y^2)} = \frac{u\delta_t/L^3}{u\delta_t/L\delta_t^2} = \left(\frac{\delta_t}{L}\right)^2 \ll 1 \quad (2.32)$$

Analogamente para a Eq. (2.29) da energia $(\partial^2 T / \partial x^2) \sim T/L^2$ e $(\partial^2 T / \partial y^2) \sim T/\delta_t^2$. Avaliando-se a importância relativa dos termos

$$\frac{(\partial^2 T / \partial x^2)}{(\partial^2 T / \partial y^2)} = \frac{T/L^2}{T/\delta_t^2} = \left(\frac{\delta_t}{L}\right)^2 \ll 1 \quad (2.33)$$

e portanto, o termo $(\partial^2 T / \partial y^2)$ é predominante. Isto significa que a quantidade de calor transferida por condução na direção x é muito menor do que a transferida na direção y .

A Eq. (2.28) da quantidade de movimento na direção y não é usualmente utilizada na solução de problemas de convecção natural de uma superfície vertical paralela à direção do campo gravitacional exposta a um extenso meio fluido não confinado. Entretanto permite tirar uma conclusão importante, que as forças de pressão podem ser representadas por derivadas totais. Em geral, a pressão em qualquer ponto do escoamento é função de x e y , e a derivada total é escrita na forma:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \quad (2.34)$$

Dividindo por dx

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{dy}{dx} \quad (2.35)$$

Um balanço entre as forças de pressão e as forças de inércia nas Eqs. (2.27) e (2.28) fornece $(\partial P / \partial x) \sim \rho u^2 / L$ e $(\partial P / \partial y) \sim \rho u^2 \delta_t / L^2$.

$$\frac{(\partial P / \partial y) (dy / dx)}{(\partial P / \partial x)} = \frac{(\rho u^2 \delta_t / L^2) (\delta_t / L)}{\rho u^2 / L} = \left(\frac{\delta_t}{L} \right)^2 \ll 1 \quad (2.36)$$

Esta mesma conclusão seria obtida se fosse considerado o balanço entre as forças de pressão e o atrito viscoso. Portanto,

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.37)$$

Isto significa que a pressão na camada limite varia basicamente na direção longitudinal, ou seja, em qualquer posição x a pressão no interior da camada limite é praticamente igual à pressão imediatamente exterior.

O resultado mais relevante da simplificação das equações de Navier-Stokes pelas aproximações da camada limite é que a pressão pode ser aproximada pelo seu valor no contorno da camada limite e desta forma deixa de ser uma variável nas equações. Isto, juntamente com a desconsideração dos gradientes de tensão viscosa na direção x implica que uma perturbação introduzida em alguma posição no interior do escoamento viscoso não irá afetar o escoamento a montante desta posição (admitindo que a velocidade seja positiva) a menos que indiretamente perturbe a pressão externa. Esta ausência de "efeitos a montante" de uma perturbação significa que estas equações podem ser resolvidas numericamente por um processo de marcha iniciado em uma posição a montante e prosseguindo a jusante uma única vez [30]. As equações completas de Navier-Stokes, entretanto, permitem avaliar as influências a montante mas devem ser resolvidas repetindo-se o procedimento da marcha a jusante quantas vezes forem necessárias até a convergência da solução. Matematicamente isto significa que as equações de Navier-Stokes em regime permanente são elípticas enquanto que as equações da camada limite são parabólicas [1]. Estas mesmas considerações valem para a equação da energia.

2.5. ANÁLISE DE ORDEM DE GRANDEZA

Para uma superfície vertical paralela à direção do campo gravitacional mantida a uma temperatura T_0 e exposta a um meio fluido não confinado, as equações da convecção natural são

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.26)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T-T_\infty) \quad (2.38)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.39)$$

A Eq. (2.39) da energia expressa um balanço entre convecção e condução:

$$u \frac{\Delta T}{L} + v \frac{\Delta T}{\delta_t} = \alpha \frac{\Delta T}{\delta_t^2} \quad (2.40)$$

convecção
condução

onde $\Delta T = T_0 - T_\infty$ é da ordem de grandeza de $T - T_\infty$. Da Eq. (2.26) da continuidade já foi visto que $u/L \sim v/\delta_t$. Assim, os dois termos de convecção da Eq. (2.40) são da ordem de grandeza de $u\Delta T/L$ e, com isso,

$$u \frac{\Delta T}{L} \sim \alpha \frac{\Delta T}{\delta_t^2}$$

$$\therefore u \sim \frac{\alpha L}{\delta_t^2} \quad (2.41)$$

Considerando agora a ordem de grandeza dos termos da Eq. (2.38) da quantidade de movimento

$$u \frac{u}{L} + v \frac{u}{\delta_t} = \nu \frac{u}{\delta_t^2} + g\beta\Delta T \quad (2.42)$$

inércia
atrito
empuxo

Utilizando o valor da ordem de grandeza de v extraído da equação da continuidade pode-se observar que os dois termos das forças de inércia são da ordem de grandeza de u^2/L . Portanto, é interessante estabelecer em quais condições a espessura da camada limite térmica δ_t é controlada por um balanço inércia-empuxo em contraste com um balanço atrito-empuxo. A força de empuxo deve sempre ser preponderante pois se ela fosse desprezível não haveria escoamento. Assim, todos os termos da Eq. (2.42) são divididos por $g\beta\Delta T$ e através da Eq. (2.41) resulta

$$\underbrace{\left(\frac{L}{\delta_t}\right)^4 Ra_L^{-1} Pr^{-1}}_{\text{inércia}} - \underbrace{\left(\frac{L}{\delta_t}\right)^4 Ra_L^{-1}}_{\text{atrito}} + \underbrace{1}_{\text{empuxo}} \quad (2.43)$$

onde o número de Reyleigh é definido através de

$$Ra_L = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\alpha\nu} \quad (2.44)$$

Através desta análise fica claro que a competição entre as forças de inércia e de atrito viscoso é decidida por uma propriedade do fluido, o número de Prandtl. Fluidos com valores elevados do número de Prandtl formarão uma camada limite térmica controlada pelo balanço atrito-empuxo enquanto que fluidos com baixos valores do número de Prandtl formarão uma camada limite térmica com o empuxo equilibrado pela inércia.

2.5.1. Fluidos com Valores Elevados do Número de Prandtl

Quando $Pr \gg 1$ a espessura da camada limite térmica é controlada pelo balanço entre as forças de atrito viscoso e de empuxo e, de acordo com a Eq. (2.43)

$$\delta_t \sim L Ra_L^{-1/4} \quad (2.45)$$

Utilizando agora a Eq. (2.41) resulta

$$u \sim \frac{\alpha}{L} Ra_L^{1/2} \quad (2.46)$$

O calor transferido pela placa é calculado através de

$$\frac{q}{A} = -k \frac{\partial T}{\partial y} = h (T_0 - T_\infty) \quad (2.47)$$

ou, em termos de ordem de grandeza,

$$k \frac{\Delta T}{\delta_t} \sim h \Delta T \quad (2.48)$$

Então, como $h \sim k/\delta_t$, o número de Nusselt varia de acordo com

$$Nu = \frac{hL}{K} \sim Ra_L^{1/4} \quad (2.49)$$

A Fig. 2.2 ilustra qualitativamente estas conclusões. A camada limite de espessura δ_t efetua a transição desde T_0 até T_∞ e ao mesmo tempo provoca a elevação do fluido com a velocidade dada pela Eq. (2.46). Para fluidos com valores elevados de Pr , o movimento do fluido não está restrito somente à camada de espessura δ_t . A espessura aquecida δ_t pode arrastar, pelo atrito viscoso, uma camada de fluido não aquecido. A espessura desta camada limite dinâmica externa é δ e, para este caso, $\delta > \delta_t$. Considere agora a Eq. (2.38) da quantidade de movimento na camada limite dinâmica de espessura δ . Como o fluido exterior a δ_t é isotérmico, as for-

ças de empuxo estão ausentes nesta região. A espessura δ é estabelecida então através de um balanço entre as forças de atrito viscoso causadas pela espessura δ_t muito mais fina, e as forças de inércia. Portanto, da Eq. (2.38) pode-se obter a ordem de grandeza da espessura δ :

$$u \frac{u}{L} \sim \nu \frac{u}{\delta^2} \quad (2.50)$$

Utilizando o valor da velocidade da Eq. (2.46) resulta

$$\delta \sim L Ra_L^{-1/4} Pr^{1/2} \quad (2.51)$$

A relação entre as espessuras dinâmica e térmica é

$$\frac{\delta}{\delta_t} \sim Pr^{1/2} > 1 \quad (2.52)$$

Quanto maior o valor do número de Prandtl, mais espessa será a camada de fluido não aquecido arrastado pela camada aquecida.

2.5.2. Fluidos com Valores Reduzidos do Número de Prandtl

Se $Pr \ll 1$ a espessura da camada limite térmica é controlada pelo balanço entre as forças de inércia e de empuxo como pode ser observado pela análise da Eq. (2.43). Combinando-se este balanço de forças com o valor da ordem de grandeza da velocidade u da Eq. (2.41) resultam as relações

$$\delta_t \sim L (Ra_L Pr)^{-1/4} \quad (2.53)$$

$$u = \frac{\alpha}{L} (Ra_L Pr)^{1/2} \quad (2.54)$$

$$Nu = \frac{hL}{K} = (Ra_L Pr)^{1/4} \quad (2.55)$$

Pode-se observar aqui o aparecimento de um novo grupo adimensional, $Ra_L Pr$, que desempenha o mesmo papel para fluidos de Pr baixo do que Ra_L para fluidos de Pr elevado. A este grupo foi sugerido o nome de número de Boussinesq [54].

$$Bo_L = Ra_L Pr = \frac{g\beta \Delta T L^3}{\alpha^2} \quad (2.56)$$

A Fig. 2.3 mostra o significado da ordem de grandeza de δ_t e u . A camada δ_t resulta de um equilíbrio entre as forças de empuxo e as forças de inércia. Isto significa que fora da camada limite térmica, onde o fluido é isotérmico e os efeitos da força de empuxo não estão presentes, o fluido não tem movimento. O perfil de velocidade deve então ser tão extenso quanto o perfil de temperatura. Entretanto, pela condição de não deslizamento junto à parede, a localização do pico de velocidade é um parâmetro secundário de ordem de grandeza porém importante na caracterização do perfil de velocidade. Seja δ_v a espessura de uma camada muito fina junto à parede, uma camada onde a força de empuxo que movimenta o fluido é resistida pelo efeito de atrito viscoso junto à parede. O balanço empuxo-atrito nesta camada de espessura δ_v resulta em

$$v \frac{u}{\delta_v^2} = g\beta \Delta T \quad (2.57)$$

onde a ordem de grandeza de u é fornecida pela Eq. (2.54). Assim,

$$\delta_v \sim L Gr_L^{-1/4} \quad (2.58)$$

onde o número de Grashof é definido como

$$Gr_L = \frac{g\beta \Delta T L^3}{\nu^2} = \frac{Ra_L}{Pr} \quad (2.59)$$

Até hoje não se sabe exatamente porque este grupo adimensional recebeu este nome. Sanders & Holman [99] efetuaram uma pesquisa bibliográfica para estabelecer a origem de tal denominação. Verificaram que o primeiro a utilizar esta denominação foi Groeber em 1921. Aparentemente este grupo adimensional recebeu este nome em homenagem a Franz Grashof, um professor de mecânica aplicada em Karlsruhe na Alemanha por volta de 1863. Desenvolveu algumas fórmulas rudimentares para escoamento de vapor mas não fez contribuições significativas para a convecção natural. Segundo esta pesquisa bibliográfica a literatura não indica qualquer outra pessoa de nome Grashof que pudesse ter sido contemplada com a denominação deste grupo.

Dividindo-se a Eq. (2.58) pela Eq.(2.53) resulta

$$\frac{\delta_v}{\delta_t} \sim Pr^{1/2} < 1 \quad (2.60)$$

2.5.3. Observações Finais

A Fig. 2.4 apresenta uma comparação entre as ordens de grandeza das espessuras das camadas limites para escoamentos em convecção natural, usando $LRa_L^{-1/4}$ como unidade de comprimento na ordenada, mostrando a influência do número de Prandtl sobre estes valores. Pode-se observar que a geometria da camada limite para fluidos com $Pr < 1$ difere fundamentalmente da geometria para fluidos com $Pr > 1$.

De acordo com esta análise de grandeza, proposta por Bejan [18], os grupos adimensionais importantes na convecção natural sobre superfícies externas são os números de Rayleigh para fluidos com $Pr > 1$ e de Boussinesq para fluidos com $Pr < 1$. O número de Grashof, que aparece freqüentemente na literatura como um grupo adimensional importante, através desta análise aparece como relevante apenas na determinação de δ_v para fluidos com $Pr < 1$. Desta forma Gr_L seria relevante apenas na determinação da tensão de cisalhamento ao longo de uma parede vertical imersa em um metal líquido.

A Tab. 2.1 fornece um resumo das conclusões obtidas através da análise de ordem de grandeza das características de escoamento e da transferência de calor na camada limite de convecção natural sobre uma placa plana vertical de altura L .

Os números adimensionais Ra_L , Bo_L e Gr_L nesta forma não são muito representativos. O que tem mais significado é a potência $1/4$ destes números:

$$Ra_L^{1/4} = \frac{\text{altura da parede}}{\text{espessura da camada limite térmica}} \quad \text{se } Pr > 1$$

$$Bo_L^{1/4} = \frac{\text{altura da parede}}{\text{espessura da camada limite térmica}} \quad \text{se } Pr < 1$$

$$Gr_L^{1/4} = \frac{\text{altura da parede}}{\text{espessura da camada de máxima velocidade}} \quad \text{se } Pr < 1$$

O significado de $Ra_L^{1/4}$, $Bo_L^{1/4}$ e $Gr_L^{1/4}$ é puramente geométrico de acordo com esta análise, sendo uma medida relativa da espessura da região da camada limite ocupada pelo escoamento induzido pelo empuxo. O número de Grashof, por exemplo, é sempre interpretado como sendo um parâmetro que expressa uma relação entre as forças de empuxo e as forças viscosas na camada limite de convec-

ção natural. Para se ter uma idéia da impropriedade desta interpretação considere a convecção natural de ar ambiente sobre uma parede mais fria no interior de uma sala. Um valor típico para o número de Grashof neste caso é entre 10^8 e 10^{10} . De acordo com a interpretação usual, as forças viscosas devem ser desprezíveis em relação ao empuxo pois o número de Grashof é enorme! Isto certamente não é correto pois no caso do ar ($Pr \sim 1$) sempre existe um equilíbrio entre atrito viscoso e empuxo (ou entre as forças de inércia e o empuxo).

TABELA 2.1 - Resumo dos resultados da análise das ordens de grandeza para a convecção natural sobre uma superfície vertical [18].

Pr	δ_t	δ_v	δ	u	Nu
>1	$L Ra_L^{-1/4}$	$L Ra_L^{-1/4}$	$(L Ra_L^{-1/4}) Pr^{1/2}$	$\frac{\alpha}{L} Ra_L^{1/2}$	$Ra_L^{1/4}$
<1	$(L Ra_L^{-1/4}) Pr^{-1/4}$	$(L Ra_L^{-1/4}) Pr^{-1/4}$	$(L Ra_L^{-1/4}) Pr^{-1/4}$	$\frac{\alpha}{L} (Ra_L Pr)^{1/2}$	$(Ra_L Pr)^{1/4}$

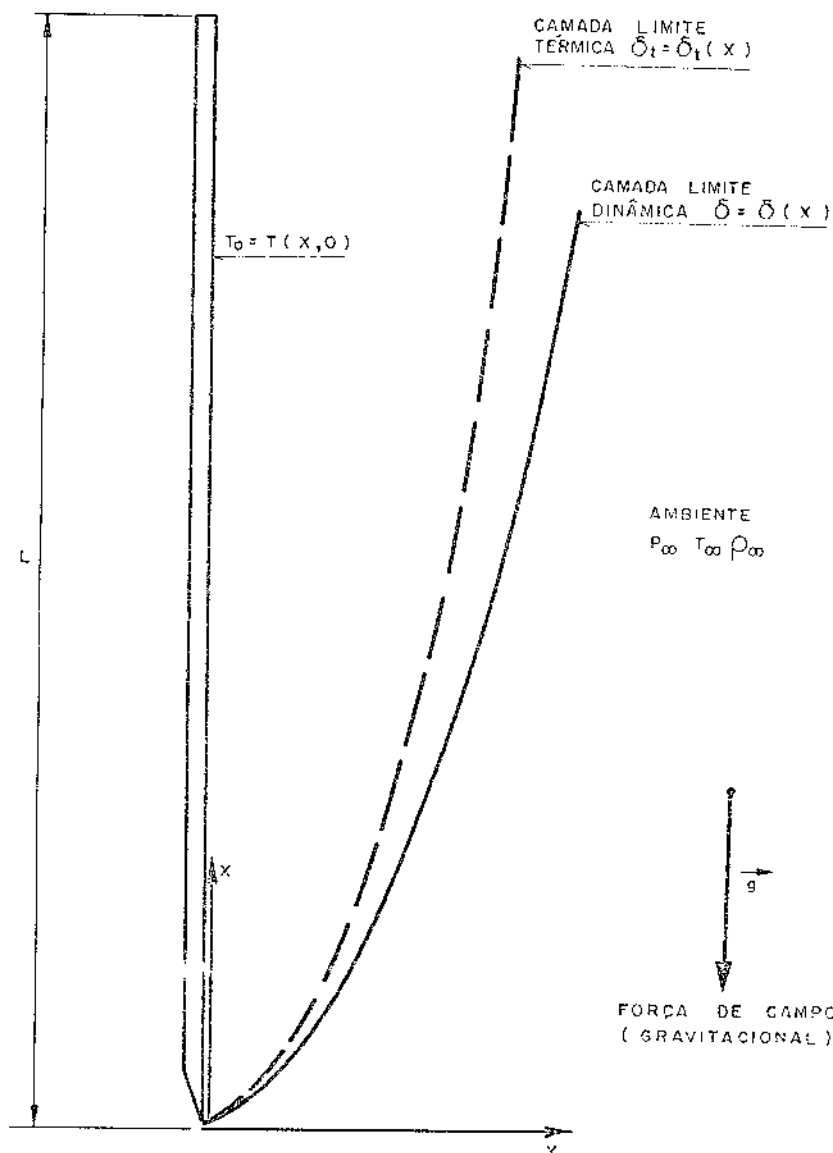


Figura 2.1 - Sistema de coordenadas para convecção natural sobre superfície vertical.

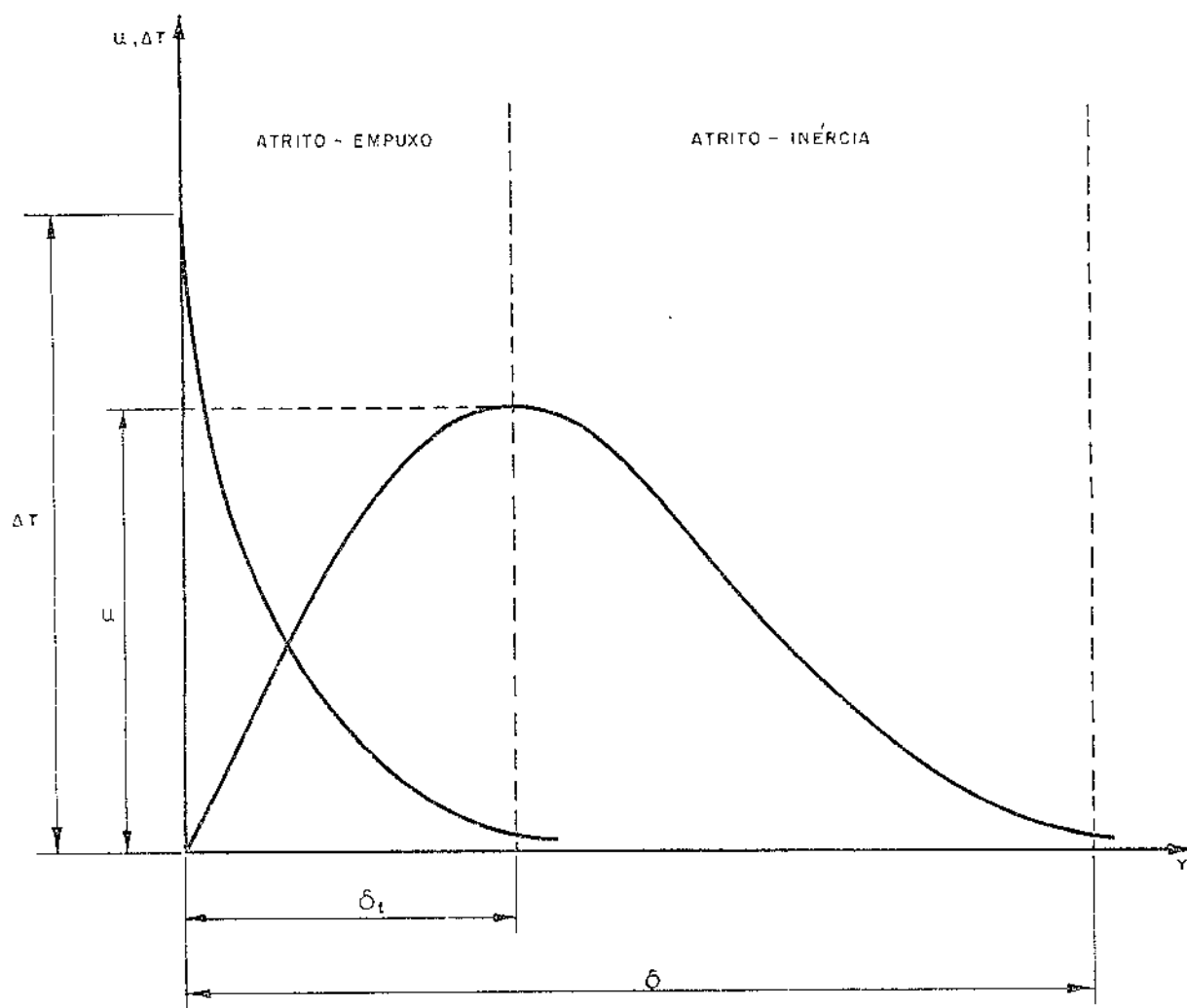


Figura 2.2 - Perfis de temperatura e velocidade para um fluido com $Pr \gg 1$.

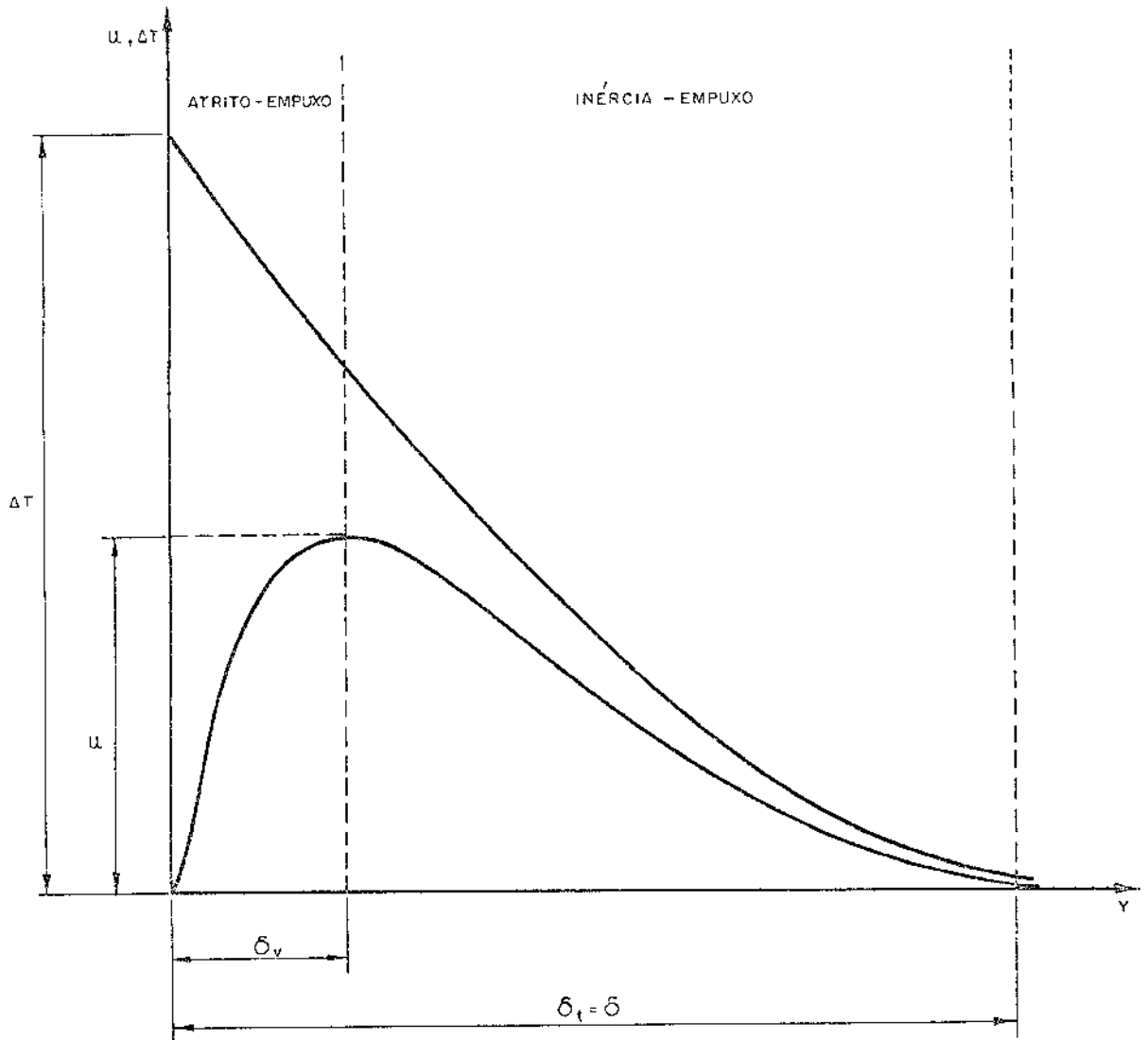


Figura 2.3 - Perfis de temperatura e velocidade para um fluido com $Pr \ll 1$.

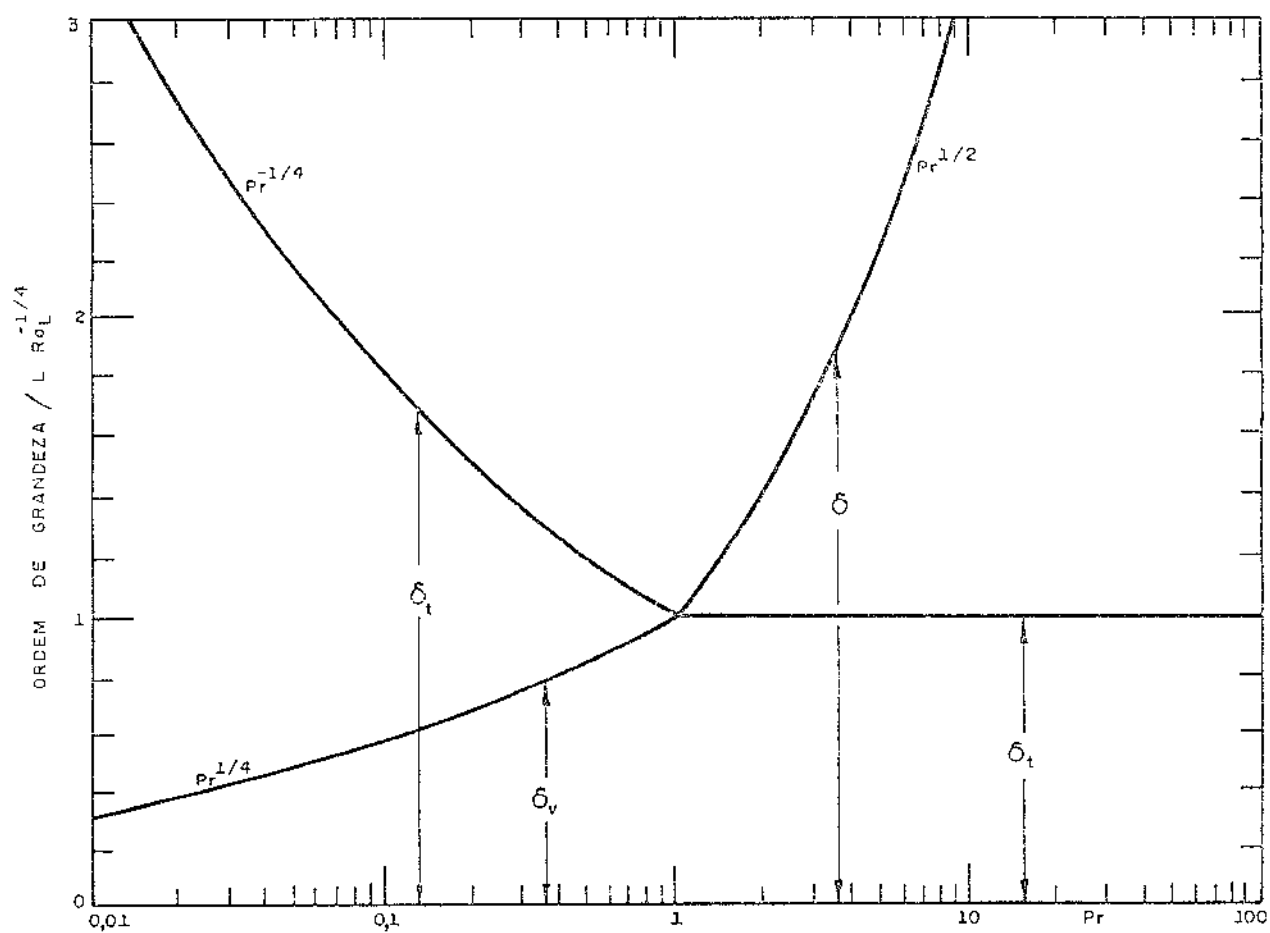


Figura 2.4 - Comparação entre as ordens de grandeza das camadas limites para convecção natural [18].

CAPÍTULO 3

ANÁLISE DO ESCOAMENTO LAMINAR RESULTANTE DE UMA FONTE LINEAR
HORIZONTAL SOBRE UMA SUPERFÍCIE VERTICAL ADIABÁTICA

3.1. INTRODUÇÃO

Um problema frequentemente encontrado na eletrônica é o de dispositivos que dissipam uma taxa constante de energia montados sobre superfícies não aquecidas. A remoção desta energia é, em geral, essencialmente por convecção natural com alguma contribuição da radiação e é importante conhecer a natureza da transferência de calor e do escoamento resultante. Estas considerações orientam a disposição dos componentes eletrônicos e dos circuitos para uma remoção efetiva da energia dissipada. Muitas das restrições em empacotamentos eletrônicos de alta densidade de energia são devidas às considerações de transferência de calor, tornando-se desta forma importante a determinação dos efeitos a jusante de um elemento aquecido localizado sobre uma superfície não aquecida.

O escoamento laminar resultante de uma fonte térmica linear horizontal dissipando energia em regime permanente sobre uma parede vertical adiabática foi inicialmente considerado por Zimin & Lyakhov [123] que fizeram um estudo analítico e experimental utilizando água como fluido e observando o campo de temperatura através de interferometria. A técnica empregada no estudo analítico foi semelhante à adotada por Fujii [46] para plumas livres que utiliza uma normalização como condição de contorno, e foram observados resultados numéricos correspondentes a $Pr=7,0$. Zimin & Lyakhov observaram que os resultados experimentais obtidos concordavam aproximadamente com o estudo teórico somente se fosse admitido que 73 por cento da energia dissipada no fio era transferida por convecção natural para água. Em se tratando de um líquido, estas perdas podem ser consideradas exageradas. Posteriormente, Liburdy & Faeth [84] resolveram o mesmo problema

analiticamente utilizando a técnica da similaridade para uma faixa de valores do número de Prandtl variando desde 0,01 até 100. Jaluria & Gebhart [65] trataram este problema analiticamente da mesma forma, porém para uma variável de similaridade um pouco distinta, para valores do número de Prandtl também variando de 0,01 até 100. Em seguida Jaluria [68] obteve alguns dados experimentais em ar utilizando termopares para a determinação da distribuição de temperatura através da camada limite onde foram observadas discrepâncias de até 15 por cento em relação às previsões teóricas, já descontadas as perdas por condução para a placa avaliadas em 7 por cento. O escoamento turbulento desta geometria foi considerado por Grolla & Faeth [56] que efetuaram medidas de velocidade e temperatura.

Um problema semelhante, o de plumas adjacentes a paredes verticais originadas por fontes horizontais de altura finita (bidimensional) também tem recebido alguma atenção na literatura. Sparrow e colaboradores [109] determinaram os estágios sucessivos de desenvolvimento de plumas a partir de um escoamento em convecção natural sobre uma placa plana isotérmica para duas situações diferentes: escoamento livre após a placa isotérmica ou em presença de uma parede adiabática. Kishinami & Seki [77] efetuaram uma investigação numérica e experimental do escoamento tipo pluma sobre uma placa vertical não aquecida originado em uma placa isotérmica situada a montante considerando a condução na placa e também o calor transferido por radiação. Hardwick & Levy [60] fizeram uma análise teórica e experimental da convecção natural em uma placa vertical onde a parte inferior é isotérmica e a parte superior é admitida adiabática. Ravine & Richards [98] examinaram experimentalmente a situação de um aquecedor horizontal montado sobre uma superfície vertical adiabática. A largura do aquecedor é igual à da superfície, porém sua altura é muito menor que a altura da placa e é posicionado de tal modo que a borda de ataque é mantida sem aquecimento, ou seja, o aquecedor é montado na placa em uma região acima da base da superfície.

3.2. CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA

O propósito desta capítulo é fazer uma análise teórica do escoamento laminar resultante de uma fonte linear horizontal sobre uma parede adiabática vertical utilizando o método da similaridade descrito por Hansen [59] com a variável de similaridade obtida a partir do conceito de ordem de grandeza considerado por Bejan [18] e reproduzido resumidamente na Seção 2.5 para as equações de conservação do escoamento. Em muitos escoamentos deste tipo encontrados na prática alguma transferência de calor para a parede sempre ocorre. Esta análise, entretanto, é limitada ao caso de uma parede adiabática que representa um limite superior para os níveis de temperatura em plumas de parede. Além disso o problema como está proposto, fonte linear e escoamento bidimensional sem outros tipos de interações, é uma idealização. Estas hipóteses simplificadoras, entretanto, permitem soluções exatas por similaridade que fornecem informações quantitativas e qualitativas que podem ser utilizadas para as situações encontradas na prática.

O escoamento a ser considerado é laminar, bidimensional e em regime permanente, resultante de uma fonte linear horizontal de energia situada ao longo da base de uma superfície vertical adiabática. A coordenada x é medida de baixo para cima a partir da localização da fonte sendo u a componente vertical da velocidade nesta direção. A coordenada y é medida horizontalmente a partir da superfície e v é a componente da velocidade nesta direção. O ambiente não é estratificado e tem temperatura uniforme T_∞ . Considerando as aproximações de Boussinesq e da camada limite as equações de conservação da massa, quantidade de movimento e energia são:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.26)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta (T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.38)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.39)$$

De acordo com a prática usual na convecção natural a densidade foi considerada como uma variável somente na formação do termo do empuxo $g\beta(T-T_\infty)$. Todas as outras propriedades foram consideradas constantes.

A equação da continuidade não contém termos viscosos ou termos de transferência de calor. Uma técnica que torna possível descartar esta equação do conjunto de equações a ser resolvida é a introdução da função de corrente ψ . Isto vale para escoamentos viscosos ou não-viscosos. Para a equação da continuidade bidimensional em coordenadas cartesianas de um escoamento incompressível em regime permanente a função de corrente é definida pelas relações

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.1)$$

Assim, a equação da continuidade não precisa ser resolvida pois é automaticamente satisfeita pela função de corrente, e o número de variáveis dependentes fica reduzido de um. A desvantagem é que as derivadas das velocidades nas demais equações serão uma ordem maior.

O significado físico da função de corrente torna-se evidente se considerarmos

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy \\ &= \vec{V} \cdot d\vec{A} = \frac{d\dot{m}}{\rho} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Podemos observar que as linhas que correspondem a $\psi = \text{constante}$, ou seja, $d\psi = 0$, são linhas através das quais não ocorrem fluxos de massa ($d\dot{m} = 0$). Uma linha de corrente é definida como uma linha no campo do escoamento cuja tangente em qualquer ponto tem a mesma direção do escoamento naquele ponto. Assim, linhas de corrente são linhas de $\psi = \text{constante}$ e a diferença entre os valores de ψ para quaisquer duas linhas de corrente representa o fluxo de massa por unidade de largura entre estas linhas de corrente.

Desta forma, as componentes u e v da velocidade nas equações da conservação da quantidade de movimento e da energia são substituídas por esta função de corrente resultando o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = g\beta(T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3.4)$$

As condições de contorno são

$$\text{para } y = 0 \quad u = v = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (3.5)$$

$$\text{para } y \rightarrow \infty \quad u = 0 \quad T = T_\infty$$

3.3. A TÉCNICA DA SIMILARIDADE

As equações diferenciais parciais (3.3) e (3.4) podem ser transformadas em um par de equações diferenciais ordinárias pela técnica da similaridade. A idéia básica na construção destas soluções é que os perfis de velocidade e temperatura são semelhantes

tes ao longo da camada limite laminar, daí o nome de soluções de similaridade. A hipótese que os perfis de velocidade e temperatura são geometricamente semelhantes diferindo apenas de um fator de proporcionalidade na direção x sugere que possa ser definida uma variável independente $\eta = \eta(x, y)$ chamada de variável de similaridade. A variável de similaridade η é proporcional a y e o fator de proporcionalidade depende de x . Assim, como o campo de temperatura na convecção natural é limitado em $0 < y < \delta_t$ uma proposição óbvia para esta variável de similaridade é

$$\eta = \frac{y}{\delta_t} \quad (3.6)$$

Seja inicialmente o caso de um fluido com $Pr > 1$. Para este caso, a ordem de grandeza da espessura da camada limite térmica é $x Ra_x^{-1/4}$ de acordo com a Tab. 2.1, e portanto,

$$\eta = \frac{y}{x} Ra_x^{1/4} \quad (3.7)$$

Em geral, o perfil adimensional de temperatura é uma função de $\eta(x, y)$ e de Pr . Seja esta função θ definida por

$$\theta(\eta, Pr) = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \quad (3.8)$$

onde $T_0 = T(x, 0)$ é a temperatura da superfície.

A velocidade vertical u é da ordem de grandeza de $(\alpha/x) Ra_x^{1/2}$ ainda de acordo com a Tab. 2.1. Assim, o perfil de velocidade pode ser admitido como

$$u = \frac{\alpha}{x} Ra_x^{1/2} f' \quad (3.9)$$

onde $f' = \partial f(\eta, Pr) / \partial \eta$ é uma função ainda desconhecida que representa o perfil de similaridade adimensional da velocidade no interior da camada limite.

O valor da função de corrente generalizada pode ser obtido a partir de

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\alpha}{x} Ra_x^{1/2} f' \quad (3.10)$$

Mas como

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{Ra_x^{1/4}}{x} \quad (3.11)$$

então

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \alpha Ra_x^{1/4} f' \quad (3.12)$$

e, portanto,

$$\psi = \alpha Ra_x^{1/4} f \quad (3.13)$$

A técnica de obtenção de soluções por similaridade não pode ser aplicada para uma variação arbitrária da temperatura de parede. Pohlhausen foi o pioneiro na utilização desta técnica para a solução das equações da camada limite para a convecção natural em regime permanente causada por uma placa plana vertical isotérmica. Sparrow & Gregg [107] acrescentaram soluções para placas verticais não isotérmicas com fluxo de calor constante e com temperaturas superficiais da forma $T_0 - T_\infty = Ax^n$ e $T_0 - T_\infty = Be^{mx}$ onde x é a

distância medida a partir da borda de ataque (a placa isotérmica é um caso particular da primeira forma para $n=0$ enquanto que a placa com fluxo de calor constante é um caso particular da segunda forma para $m=5/4$). Entretanto, Lock & Gunn [86] mostraram que estas duas formas resultam em equações transformadas semelhantes. Yang [120] concluiu que as distribuições de temperatura consideradas acima cobrem todas as soluções possíveis de similaridade para a convecção natural laminar em regime permanente sobre placas verticais. Hansen [59] apresentou de maneira generalizada a metodologia da obtenção de soluções por similaridade em problemas de contorno em engenharia.

Uma variação de temperatura que permite solução por similaridade e apropriada para as condições de um escoamento do tipo pluma é

$$T_0 - T_\infty = Nx^n \quad (3.14)$$

De acordo com esta distribuição de temperatura a variável de similaridade pode ser expressa através de

$$\eta = Cyx^{\frac{n-1}{4}} \quad (3.15)$$

onde

$$C = \left[\frac{g\beta N}{\alpha\nu} \right]^{1/4} \quad (3.16)$$

A função de corrente generalizada e a velocidade vertical ficam, respectivamente,

$$\psi = \alpha Cx^{\frac{n+3}{4}} f \quad (3.17)$$

$$u = \alpha C^2 x^{\frac{n+1}{2}} f' \quad (3.18)$$

A velocidade v pode ser calculada através da função de corrente dada pela Eq. (3.1) resultando

$$v = -\alpha C x^{\frac{n-1}{4}} \left[\left(\frac{n-1}{4} \right) f' \eta + \left(\frac{n+3}{4} \right) f \right] \quad (3.19)$$

Da distribuição de temperatura na superfície adiabática e da definição do perfil adimensional de temperatura na camada limite resulta

$$T - T_{\infty} = \Theta N x^n \quad (3.20)$$

A derivada da Eq. (3.20) em relação a x é

$$\frac{\partial T}{\partial x} = N x^{n-1} \left[n\Theta + \left(\frac{n-1}{4} \right) \Theta' \eta \right] \quad (3.21)$$

onde $\Theta' = \partial\Theta/\partial\eta$. Derivando agora a Eq. (3.20) em relação a y resulta

$$\frac{\partial T}{\partial y} = C N \Theta' x^{\frac{5n-1}{4}} \quad (3.22)$$

A derivada segunda em y é

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = C^2 N x^{\frac{6n-2}{4}} \Theta'' \quad (3.25)$$

onde $\theta'' = \partial^2 \theta / \partial \eta^2$. Substituindo-se (3.22) e (3.23) em (3.4) resulta

$$\theta'' + \left(\frac{n+3}{4} \right) f \theta' - f' n \theta = 0 \quad (3.24)$$

Resta agora avaliar $\partial^2 \psi / \partial y^2$, $\partial^3 \psi / \partial y^3$ e $\partial^2 \psi / \partial x \partial y$ para efetuar a substituição na equação da quantidade de movimento.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \alpha C^3 f'' x^{\frac{3n+1}{4}} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \alpha C^4 x^{\frac{n}{2}} f''' \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \alpha C^2 x^{\frac{n-1}{2}} \left[\left(\frac{n-1}{4} \right) f'' \eta + \left(\frac{n+1}{2} \right) f' \right] \quad (3.27)$$

onde $f'' = \partial^2 f / \partial \eta^2$ e $f''' = \partial^3 f / \partial \eta^3$. Introduzindo-se estes valores na Eq. (3.3) da quantidade de movimento resulta

$$f''' + \frac{1}{Pr} \left[\left(\frac{n+3}{4} \right) f f'' - \left(\frac{n+1}{2} \right) (f')^2 \right] + \theta = 0 \quad (3.28)$$

Para um fluido com $Pr < 1$ a variável de similaridade de acordo com a Tab. 2.1 deve ser

$$\eta = \frac{y}{\delta_t} = \frac{y}{x} (Ra_x Pr)^{1/4} = \frac{y}{x} \left(\frac{g \beta \Delta T x^3}{\alpha^3} \right)^{1/4} \quad (3.29)$$

Utilizando a Eq. (3.14) da distribuição da temperatura na parede resulta

$$\eta = yAx^{\frac{n-1}{4}} \quad (3.30)$$

onde

$$A = \left[\frac{g\beta N}{\alpha^2} \right]^{1/4} \quad (3.31)$$

Para este caso a velocidade u é dada por

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\alpha}{x} (Ra_x Pr)^{1/2} \quad (3.32)$$

e como

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{(Ra_x Pr)^{1/4}}{x} \quad (3.33)$$

então

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \alpha (Ra_x Pr)^{1/4} f' \quad (3.34)$$

e, portanto,

$$\psi = \alpha (Ra_x Pr)^{1/4} f = \alpha Ax^{\frac{n+3}{4}} f \quad (3.35)$$

Assim,

$$u = \frac{\alpha}{x} Ra_x^{1/2} Pr^{1/2} f' = \alpha A^2 x^{\frac{n+1}{2}} f' \quad (3.36)$$

Portanto para $Pr < 1$ as equações são as mesmas, somente com a constante C sendo substituída por A . Desta forma a equação da energia na forma de similaridade é a mesma do caso anterior.

$$\theta'' + \left(\frac{n+3}{4}\right) f\theta' - f'n\theta = 0 \quad (3.24)$$

e a equação da quantidade de movimento sofre apenas uma alteração no coeficiente de θ :

$$f''' + \frac{1}{Pr} \left[\left(\frac{n+3}{4}\right) ff'' - \frac{n+1}{2} (f')^2 \right] + \frac{\theta}{Pr} = 0 \quad (3.37)$$

3.4. FONTE LINEAR HORIZONTAL

O presente problema considera uma superfície plana vertical ($y=0, x>0$) colocada em um meio mantido à temperatura T_∞ . Na posição $x=0$ existe uma fonte linear de energia. A superfície é considerada adiabática e sua temperatura local resultante é indicada por $T_0 = T(x,0)$. Como a superfície é admitida adiabática, não há transferência de calor através da placa a jusante da fonte de energia de intensidade Q_0 . Portanto a energia transportada $Q(x)$ deve ser a mesma para todo $x>0$:

$$Q(x) = \int_0^\infty C_p(T-T_\infty)\rho u dy = Q_0 \quad (3.38)$$

Para $Pr > 1$ a componente vertical da velocidade é dada por, de acordo com as Eq. (3.16) e (3.18),

$$u = \alpha \left(\frac{g\beta N}{\alpha\nu}\right)^{1/2} x^{\frac{n+1}{2}} f' \quad (3.39)$$

A vazão em massa local é

$$\dot{m}(x) = \int_0^{\infty} \rho u dy = \rho \alpha Ra_x^{1/4} \int_0^{\infty} f' d\eta \quad (3.40)$$

onde o valor da integral de $f'd\eta$ representa o valor da função $f(\eta, Pr)$ no contorno da camada limite. A Eq. (3.40) dividida pela densidade fornece a vazão em volume.

A tensão de cisalhamento local junto à superfície é

$$\tau(x) = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\mu \alpha Ra_x^{3/4}}{x^2} f''(0) \quad (3.41)$$

Utilizando agora as Eq. (3.7), (3.9) e (3.14) a Eq. (3.38) da energia transportada pode ser escrita como

$$Q(x) = C_p N \rho \alpha \left(\frac{g \beta N}{\alpha \nu} \right)^{1/4} x^{\frac{5n+3}{4}} I \quad (3.42)$$

onde

$$I = \int_0^{\infty} f' \theta d\eta \quad (3.43)$$

Assim,

$$Q(x) = \left(\frac{k^4 N^5 g \beta}{\alpha \nu} \right)^{1/4} x^{\frac{5n+3}{4}} I \quad (3.44)$$

Como $Q(x)$ é igual a uma constante (igual a Q_0) deve ser independente de x . Isto ocorre quando $n = -3/5$ e desta forma a queda de temperatura ao longo da placa adiabática é proporcional

a $x^{-3/5}$, ou seja,

$$T - T_{\infty} = N x^{-3/5} = \left(\frac{\alpha \nu Q_0^4}{k^4 g \beta I^4} \right)^{1/5} x^{-3/5} \quad (3.45)$$

onde o valor de N foi obtido da Eq. (3.44) para $n=-3/5$.

Portanto, para um valor fixado de $Pr > 1$, $f=f(\eta)$ e as equações de similaridade da camada limite são da forma

$$f''' + \frac{1}{Pr} \left[\frac{3}{5} f f'' - \frac{1}{5} (f')^2 \right] + \theta = 0 \quad (3.46)$$

$$\theta'' + \frac{3}{5} f \theta' + \frac{3}{5} f' \theta = \theta'' + \frac{3}{5} (f \theta)' = 0 \quad (3.47)$$

Em $y=0$ ($\eta=0$) temos $u=0$ e $v=0$ e, portanto, $f'(0)=0$ e $f(0)=0$. Além disso, $\theta(0)=1$ e como a placa é admitida adiabática por hipótese $\theta'(0)=0$. As condições de contorno em $y=0$ são, portanto,

$$f(0) = f'(0) = \theta'(0) = 1 - \theta(0) = 0 \quad (3.48)$$

Para a solução do sistema de equações (3.46) e (3.47) é necessária mais uma condição de contorno. Pelas considerações de energia, todos os efeitos devem desaparecer para valores grandes de η , isto é, $u \rightarrow 0$ e $T \rightarrow T_{\infty}$ quando $\eta \rightarrow \infty$. Em termos das funções dependentes nestas circunstâncias temos

$$f'(\infty) \rightarrow 0 \quad \theta(\infty) \rightarrow 0 \quad (3.49)$$

Agora aparentemente está sobrando uma condição de contorno, ou seja, existe uma condição de contorno a mais do que o necessário. Entretanto, nem todas estas condições de contorno são independentes. A equação da energia na forma de similaridade, Eq. (3.47), pode ser integrada uma vez resultando

$$\theta' + 0,6 f\theta = B \tag{3.50}$$

onde B é a constante de integração. Neste caso B = 0 pois $\theta'(0)=f(0)=0$ e, portanto,

$$\frac{\theta'}{\theta} = - 0,6 f \tag{3.51}$$

Integrando novamente

$$\theta(\eta) = \theta(0) \exp \left[- 0,6 \int_0^\eta f d\eta \right] \tag{3.52}$$

onde $\theta(0)=1$. Como f é um valor positivo que tende para um valor constante para valores elevados de η , o valor da integral não é limitado e, assim,

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \theta(\eta) = 0 \tag{3.53}$$

Portanto a condição $\theta(\infty)=0$ não é independente, mas resultante das condições utilizadas para avaliar as constantes de integração.

Para um valor fixado de $Pr < 1$, $f=f(\eta)$ e as equações de similaridade da camada limite podem ser escritas como

$$\theta'' + \frac{3}{5} f\theta' + \frac{3}{5} f'\theta = 0 \quad (3.47)$$

$$f'''' + \frac{1}{Pr} \left[\frac{3}{5} ff'' - \frac{1}{5} (f')^2 \right] + \frac{\theta}{Pr} = 0 \quad (3.54)$$

As condições de contorno são as mesmas do caso anterior, onde $Pr > 1$. Quando $Pr < 1$ a componente vertical da velocidade é dada por

$$u = \alpha \left(\frac{g\beta N}{\alpha^2} \right)^{1/2} x^{\frac{n+1}{2}} f' \quad (3.55)$$

A vazão em massa local é dada por

$$\dot{m}(x) = \int_0^{\infty} \rho u dy = \rho \alpha (Ra_x Pr)^{1/4} \int_0^{\infty} f' dn \quad (3.56)$$

A tensão de cisalhamento local junto à parede é

$$\tau(x) = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\mu \alpha (Ra_x Pr)^{3/4}}{x^2} f''(0) \quad (3.57)$$

Neste caso, a energia transportada é calculada através de

$$Q(x) = C_p N \rho \alpha \left(\frac{g\beta N}{\alpha^2} \right)^{1/4} x^{\frac{n+3}{4}} I \quad (3.58)$$

onde o valor de I é obtido da Eq. (3.43). Como $Q(x)$ independe de x , então $n = -3/5$ e, assim,

$$Q_0 = (\rho^4 C_p^4 \alpha^2 g \beta N^5)^{1/4} I \quad (3.59)$$

A variação da temperatura na superfície adiabática é

$$\begin{aligned} T_0 - T_\infty &= Nx^{-3/5} = \left(\frac{Q_0^4}{\rho^4 C_p^4 \alpha^2 g \beta I^4} \right)^{1/5} x^{-3/5} \\ &= \left(\frac{Q_0^4 \alpha^2}{k^4 g \beta I^4} \right)^{1/5} x^{-3/5} \end{aligned} \quad (3.60)$$

3.5. RESULTADOS

Diversos métodos numéricos podem ser utilizados para resolver o sistema acoplado dado pelas equações (3.46) e (3.47) para $Pr > 1$ e equações (3.54) e (3.47) para $Pr < 1$. Um procedimento simples, recomendado por Cebeci & Bradshaw [30], porém não o mais eficiente, é resolver as equações separadamente. Integrando a Eq. (3.47) resulta, como já foi visto,

$$\theta(\eta) = \exp \left[-0,6 \int_0^\eta f(\eta) d\eta \right] \quad (3.52)$$

De acordo com este procedimento, o termo θ da Eq. (3.46) para $Pr > 1$ ou da Eq. (3.54) para $Pr < 1$ é considerado inicialmente igual a zero e a equação é resolvida admitindo-se qualquer expressão inicial para o perfil de velocidade $f'(\eta)$ que satisfaça todas as condições de contorno para $f(\eta)$. Uma vez obtida a expressão para $f(\eta)$, esta é introduzida na Eq. (3.52) para a obtenção do perfil de temperatura $\theta(\eta)$ que por sua vez é utilizado na Eq. (3.46) ou (3.54) agora com o termo θ calculado. Um novo valor de $f(\eta)$ é encontrado e o processo é repetido até a convergência.

O sistema de equações (3.46) e (3.47) para $Pr > 1$ e o

sistema de equações (3.54) e (3.47) para $Pr < 1$ foram, entretanto, resolvidos numericamente através do procedimento Runge-Kutta de quarta ordem como descrito por Arpaci & Larsen [2] por oferecer resultados mais precisos. Para ilustrar o método utilizado vamos considerar o conjunto de equações que representa a situação do problema para $Pr > 1$:

$$f''' + \frac{1}{5Pr} \left[3ff'' - (f')^2 \right] + \theta = 0 \quad (3.46)$$

$$\theta'' + \frac{3}{5} (f\theta' + f'\theta) = 0 \quad (3.47)$$

$$f(0) = f'(0) = \theta'(0) = 1 - \theta(0) = 0 \quad (3.48)$$

$$f(\infty) = \theta(\infty) = 0 \quad (3.49)$$

De acordo com a metodologia utilizada, a Eq. (3.46) pode ser decomposta em três equações de primeira ordem e a Eq. (3.47) em duas. Seja

$$\begin{aligned} X(\eta) &= f \\ Y(\eta) &= f' \\ Z(\eta) &= f'' \\ P(\eta) &= \theta \\ S(\eta) &= \theta' \end{aligned} \quad (3.61)$$

e, assim, podemos escrever as cinco equações:

$$X' = Y \quad (3.62)$$

$$Y' = Z \quad (3.63)$$

$$Z' = -(0,2/Pr)(3XZ - Y^2) - P \quad (3.64)$$

$$P' = S \quad (3.65)$$

$$S' = -0,6 (XS + YP) \quad (3.66)$$

onde a linha significa derivada em relação a η .

As condições de contorno junto à superfície, em $\eta=0$, são

$$X(0) = Y(0) = 1 - P(0) = S(0) = 0 \quad (3.67)$$

A integração tem início junto à superfície ($\eta=0$) e prossegue em direção à extremidade da camada limite η_0 . Todas as condições necessárias em $\eta=0$ são conhecidas à exceção de $Z(0)=f''(0)$ que deve ser inicialmente um valor adotado. Cada valor admitido irá resultar em uma solução e assim poderemos obter diversas soluções. Porém, a solução que vai nos interessar é a que corresponde a $f'(\eta_0)=c$ onde $c \rightarrow 0$ é um valor tão pequeno quanto a precisão desejada no cômputo numérico. As soluções numéricas correspondentes a cada iteração e a solução final convergente podem ser da forma geral mostrada na Figura 3.1. Após cada iteração, o valor de $f''(0)$ é corrigido por um esquema numérico de Newton. Admitindo-se que o erro $e=f'(\eta_0)-c$ seja uma função monotônica do valor adotado $f''(0)=g$, uma expansão em série de $e(g)$ a partir do resultado da primeira iteração fornece

$$e \equiv e_1 + \left(\frac{\partial e}{\partial g} \right)_1 \Delta g \quad (3.68)$$

Assim, para que o erro após a integração subsequente seja zero, g_1 deve ser incrementado de

$$\Delta g = - \frac{e_1}{(\partial e / \partial g)_1} \quad (3.69)$$

e o novo valor inicial de $f''(0)$ deve ser

$$g_2 = g_1 + \Delta g \quad (3.70)$$

A escolha de η_e é uma consideração importante. Uma boa indicação podem ser os resultados numéricos conhecidos para escoamentos semelhantes para um valor do número de Prandtl de interesse. Entretanto, o valor adotado para η_e deve ser examinado cuidadosamente em cada caso para que seja confirmada a validade da escolha. O valor de η_e é variado e, em cada caso, a solução convergente é obtida. O valor de η_e finalmente adotado é aquele para o qual um incremento neste valor não altera significativamente a solução. Mesmo a convergência é determinada de uma maneira de certa forma arbitrária pois o valor de $f'(\eta_e)$ é fixado arbitrariamente na precisão desejada. Portanto, o critério de convergência também pode ser variado até que o seu efeito sobre a solução final seja desprezível. A convergência deste método ocorre geralmente para uma faixa muito estreita do valor inicial admitido para a derivada segunda da função de corrente adimensional junto à superfície, $f''(0)$. Assim sendo, é melhor iniciar o processo com valores conhecidos de escoamentos semelhantes, se isto for possível.

O programa de computador utilizado para a solução das equações do problema está apresentado no Apêndice juntamente com

as listagens correspondentes a diferentes valores do número de Prandtl.

A Fig. 3.2 mostra a distribuição de velocidade adimensional para $Pr > 1$ e a Fig. 3.3 a distribuição da temperatura adimensional para $Pr > 1$. Através destas figuras pode-se observar a influência do valor do número de Prandtl sobre o comportamento dos perfis de velocidade e temperatura. Para $Pr = 1$ a espessura da camada limite dinâmica é igual à espessura da camada limite térmica que corresponde a $\eta \approx 8,0$. Entretanto para $Pr > 1$ a espessura da camada limite dinâmica é sempre maior do que a espessura da camada limite térmica, como discutido na Seção 2.5.1. Quanto maior o valor do número de Prandtl maior a espessura da camada limite dinâmica, devido ao atrito viscoso. Nestas figuras estão representados os perfis de velocidade e temperatura para um fluido com $Pr = 7,0$ que corresponde à água.

A Fig. 3.4 mostra a distribuição da velocidade adimensional para $Pr < 1$ e a Fig. 3.5 a distribuição de temperatura adimensional para $Pr < 1$. Novamente pode-se notar através destas figuras a influência do valor do número de Prandtl sobre o comportamento dos perfis de velocidade e temperatura. Uma análise destas figuras revela que a espessura da camada limite dinâmica é sempre igual à espessura da camada limite térmica para o mesmo valor do número de Prandtl, como discutido na Seção 2.5.2. Nestas figuras estão representados os perfis de velocidade e temperatura para um fluido com $Pr = 0,7$ que corresponde ao ar.

As Figs. 3.6 e 3.7 mostram a variação da temperatura da superfície em função da distância em relação à fonte para o ar ($Pr = 0,7$) e a água ($Pr = 7,0$), respectivamente, à temperatura de 20°C para diferentes valores da energia dissipada. Como a distribuição da temperatura na superfície foi admitida como sendo proporcional a $x^{-3/5}$, quando $x \rightarrow 0$ devemos ter $(T_0 - T_{\infty}) \rightarrow \infty$.

3.6. ANÁLISE EXPERIMENTAL

A seção de testes utilizada nesta análise para simular o escoamento laminar resultante de uma fonte linear horizontal sobre uma superfície vertical adiabática está ilustrada na Fig. 3.8. O objetivo desta análise experimental é determinar a distribuição de temperatura na superfície adiabática e a distribuição de temperatura ao longo da camada limite térmica. A seção de testes é construída sobre uma placa de circuito quadrada de 100 mm de lado. Toda a película de cobre que reveste a placa de circuito é removida com a exceção das duas porções mostradas na Fig. 3.8 para permitir as conexões elétricas necessárias. A fonte linear horizontal é simulada por um fio de aço inoxidável de bitola AWG 32 ($d=0,203$ mm) de comprimento efetivo de 60 mm. A superfície traseira da placa de circuito é isolada termicamente por meio de uma placa de acrílico (plexiglass) de 12,7 mm de espessura. Existem 11 termopares alinhados verticalmente sobre a fonte horizontal espaçados de 5mm. Além disso existem ainda 2 termopares abaixo da fonte para indicarem um possível aquecimento do fluido a montante. Os termopares utilizados são de cobre-constantan de bitola AWG 36 ($d=0,127$ mm).

A Fig. 3.9 mostra a instrumentação da seção de testes. A energia é fornecida por um gerador de corrente contínua HP 6296A. Um "shunt" calibrado permite a leitura da corrente por meio de um voltímetro e como a fonte horizontal está em série com esta conexão, esta é a corrente que está atravessando a fonte. A tensão entre os terminais da fonte é obtida por meio de fios de cobre de bitola AWG 32 soldados nas extremidades das placas de cobre, como indicado na figura. A potência dissipada nos 60 mm da fonte horizontal é obtida então através do produto da corrente pela voltagem.

A Fig. 3.10 mostra uma visão de conjunto do teste realizado incluindo o tanque de água e a sonda utilizada para a medida da distribuição da temperatura no interior da camada limite térmica. Nesta figura, para maior clareza, foram omitidas as conexões elétricas já mostradas na Fig. 3.9. O tanque é Pyrex Dow Corning de formato cúbico de 300 mm de lado. Os testes foram

la simetria e, portanto, esta situação aplica-se ao problema aqui considerado. Admitindo-se que metade da energia dissipada no cilindro é transferida para cada superfície da placa, as perdas por condução para o substrato podem então ser avaliadas desde que as temperaturas da superfície do cilindro e da superfície da placa sejam conhecidas. Com relação à temperatura da superfície traseira da placa, o valor do limite inferior é $T_2 = T_\infty$ e assim

$$Q_c = \frac{\pi k}{\ln(4Z/R)} (T_0 - T_\infty) \quad (3.72)$$

onde T_0 é a temperatura da superfície do fio e R é o raio do fio (0,102 mm). O valor teórico da temperatura da fonte linear é infinito, porém é óbvio que na prática o fio tem um diâmetro finito e também uma temperatura finita. A temperatura do fio não foi medida durante as experiências mas pode ser avaliada aproximadamente extrapolando-se os dados experimentais por meio de uma função exponencial da forma

$$T - T_\infty = \exp(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) \quad (3.73)$$

Para $x=R$ obtém-se o valor $T=T_0$. A porcentagem do calor perdido por condução através da placa, de acordo com o procedimento descrito acima, é da ordem de 3 por cento. Na realidade, a placa do problema é um meio composto, placa de circuito e plexiglass (polimetil metacrilato), porém estes materiais possuem condutividades térmicas da mesma ordem.

As perdas por radiação podem ser avaliadas da maneira usual, considerando-se um semi cilindro trocando calor com as paredes do recipiente do fluido. Estas perdas ficaram sempre bem abaixo de 1 por cento.

Portanto, podemos admitir um limite superior para a perda de calor da ordem de 5 por cento. O objetivo desta análise é a

determinação dos perfis de temperatura na camada limite e na superfície. Como não estamos interessados nas taxas de transferência de calor, estas perdas podem ser subtraídas do escoamento em convecção e assim nos resultados experimentais Q_0 representa 95 por cento do produto corrente vezes queda de tensão ao longo da fonte.

A Fig. 3.11 mostra uma comparação entre o perfil adimensional de temperatura calculado teoricamente para $Pr=7,0$ e os pontos experimentais obtidos para a água, para dois valores distintos de dissipação térmica. Para $Q_0=43,3$ W/m os perfis foram medidos em $x=15$ mm e $x=25$ mm. Para $Q_0=77,9$ W/m os perfis foram medidos em $x=15$ mm e $x=30$ mm. Pode-se observar que existe uma boa concordância entre os valores teóricos e experimentais. Pelo comportamento dos resultados experimentais próximos à superfície nota-se que a hipótese de placa adiabática está bastante razoável.

As Figs. 3.12, 3.13 e 3.14 mostram uma comparação entre os perfis de temperatura na superfície adiabática calculados teoricamente e os obtidos experimentalmente para valores da energia dissipada $Q_0=44,78$ W/m, $Q_0=78,90$ W/m e $Q_0=104,54$ W/m. Por estas 3 figuras pode-se observar que os valores experimentais ficam sempre abaixo dos valores previstos teoricamente. Ocorre que os valores teóricos são sensíveis ao valor da energia dissipada Q_0 e um valor preciso deste resultado seria obtido somente se a energia dissipada transportada por convecção natural fosse conhecida com precisão. Além disso, a seção de testes é de tamanho reduzido e, à medida que a distância à fonte tende a zero, a temperatura da superfície cresce exponencialmente até o infinito, o que evidentemente não ocorre na prática. Existe também um efeito adicional considerado a seguir.

Através dos resultados experimentais podemos observar que está ocorrendo um aquecimento da superfície vertical a montante da fonte. Isto revela que está ocorrendo uma condução longitudinal de calor não só na placa mas certamente também no fluido junto à fonte, devido ao gradiente de temperatura que existe nesta região. Convém aqui lembrar que a condutividade térmica do

fluido (água) é cerca de três vezes a condutividade térmica da placa traseira isolante. Este gradiente de temperatura é significativo pois está havendo uma dissipação localizada de energia e, portanto, haverá condução de calor também na direção x . Desta forma, a equação da energia (2.39) utilizada neste problema, para corresponder com mais precisão ao que realmente ocorre, deveria incluir o termo de condução de calor na direção longitudinal $\alpha(\partial^2 T/\partial x^2)$. Assim, a equação da energia para este problema deveria ser

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (3.74)$$

Este gradiente de temperatura longitudinal está localizado em um ponto específico do escoamento tendo pouca influência no campo de velocidades, como foi observado por Zinnes [124] para um problema semelhante. Assim, a equação da conservação da quantidade de movimento pode ser a mesma considerada anteriormente. Esta nova consideração do problema obriga a uma nova formulação numérica pois com a condução longitudinal presente fica prejudicada a hipótese inicial de que a energia transportada deve ser a mesma para todo $x > 0$. Jaluria [70] resolveu um problema similar para fontes discretas onde considerou as equações da convecção natural bidimensional com as aproximações de Boussinesq porém sem as aproximações da camada limite. Ou seja, considerou as equações da conservação da quantidade de movimento nas direções x e y e a equação da energia como descrita pela Eq. (3.74); em seguida resolveu o mesmo problema para hipótese de camada limite e observou que para $Gr > 10^4$ os resultados são praticamente coincidentes. As diferenças são mais significativas quanto menores os valores do número de Grashof.

3.7. CONCLUSÕES

Neste capítulo foi feita uma análise teórica do escoamento

mento laminar resultante de uma fonte linear horizontal sobre uma superfície vertical adiabática e uma verificação experimental dos campos de temperatura associados.

Na análise teórica as equações de conservação foram consideradas com as aproximações de Boussinesq e da camada limite e foram resolvidas pela técnica da similaridade.

Dos resultados teóricos dos campos de velocidade e temperatura através da camada limite pode-se observar o efeito do atrito viscoso para fluidos com $Pr > 1$. Nestes casos a espessura da camada limite dinâmica é sempre maior do que a espessura da camada limite térmica. Já para fluidos com $Pr < 1$ as espessuras das camadas limites dinâmica e térmica são iguais.

A comparação entre o perfil adimensional de temperatura no interior da camada limite calculado teoricamente para a água e os pontos experimentais mostra uma boa concordância entre estes valores.

Os valores experimentais da distribuição de temperatura na superfície adiabática para a água ficaram sempre abaixo dos valores teóricos previstos e, além disso, foi observado um aquecimento do fluido a montante da fonte. Uma possível explicação para estes comportamentos é que deve estar ocorrendo uma condução de calor longitudinal no fluido junto à fonte.

Uma solução mais rigorosa deste problema deveria partir das equações de conservação sem considerar as aproximações da camada limite. Entretanto, como foi mencionado na Seção 3.2, as hipóteses simplificadoras consideradas nesta análise permitem soluções por similaridade que fornecem informações quantitativas e qualitativas que podem ser utilizadas para muitas situações encontradas em problemas de engenharia.

Entre os resultados qualitativos mais importantes podemos destacar:

$$u = Q_0^{2/5} x^{1/5} \quad (3.75)$$

$$T_0 - T_\infty \sim Q_0^{4/5} x^{-3/5} \quad (3.76)$$

Estes resultados, que indicam como variam a velocidade e a temperatura no interior da camada limite, permitem uma melhor interpretação dos efeitos que ocorrem nas interações resultantes de conjuntos de fontes de energia.

Tabela 3.1 - Resumo das equações para $T_0 - T_\infty = Nx^n$

	Pr > 1	Pr < 1
η	$y \left(\frac{g\beta N}{\alpha v} \right)^{1/4} x^{\frac{n-1}{4}}$	$y \left(\frac{g\beta N}{\alpha^2} \right)^{1/4} x^{\frac{n-1}{4}}$
ψ	$\alpha \left(\frac{g\beta N}{\alpha v} \right)^{1/4} x^{\frac{n+3}{4}} f$	$\alpha \left(\frac{g\beta N}{\alpha^2} \right)^{1/4} x^{\frac{n+3}{4}} f$
u	$\alpha \left(\frac{g\beta N}{\alpha v} \right) x^{\frac{n+1}{2}} f'$	$\alpha \left(\frac{g\beta N}{\alpha^2} \right)^{1/4} x^{\frac{n+1}{2}} f'$
v	$-\alpha \left(\frac{g\beta N}{\alpha v} \right) x^{\frac{n-1}{4}} \left[\left(\frac{n-1}{4} \right) f' \eta + \left(\frac{n+3}{4} \right) f \right]$	$-\alpha \left(\frac{g\beta N}{\alpha^2} \right) x^{\frac{n-1}{4}} \left[\left(\frac{n-1}{4} \right) f' \eta + \left(\frac{n+3}{4} \right) f \right]$
quantidade de movimento	$f''' + \frac{1}{Pr} \left[\left(\frac{n+3}{4} \right) f f'' - \left(\frac{n+1}{2} \right) (f')^2 \right] + \theta = 0$	$f''' + \frac{1}{Pr} \left[\left(\frac{n+3}{4} \right) f f'' - \left(\frac{n+1}{2} \right) (f')^2 \right] + \frac{\theta}{Pr} = 0$
energia	$\theta'' + \left(\frac{n+3}{4} \right) f \theta' - f' n \theta = 0$	$\theta'' + \left(\frac{n+3}{4} \right) f \theta' - f' n \theta = 0$

Tabela 3.2 - Resumo das equações para $T_0 - T_\infty = Nx^{-3/5}$

	Pr > 1	Pr < 1
η	$y \left(\frac{g\beta N}{\alpha v} \right)^{1/4} x^{-2/5}$	$y \left(\frac{g\beta N}{\alpha^2} \right)^{1/4} x^{-2/5}$
ψ	$\alpha \left(\frac{g\beta N}{\alpha v} \right)^{1/4} x^{3/5} f$	$\alpha \left(\frac{g\beta N}{\alpha^2} \right)^{1/4} x^{3/5} f$
u	$\alpha \left(\frac{g\beta N}{\alpha v} \right)^{1/2} x^{1/5} f'$	$\alpha \left(\frac{g\beta N}{\alpha v} \right)^{1/2} x^{1/5} f'$
v	$-\alpha \left(\frac{g\beta N}{\alpha v} \right)^{1/4} x^{-2/5} \left(-\frac{2}{5} f' \eta + \frac{3}{5} f \right)$	$-\alpha \left(\frac{g\beta N}{\alpha^2} \right)^{1/4} x^{-2/5} \left(-\frac{2}{5} f' \eta + \frac{3}{5} f \right)$
N	$\left(\frac{Q_0^4 \alpha v}{k^4 g \beta I^4} \right)^{1/5}$	$\left(\frac{Q_0^4 \alpha^2}{k^4 g \beta I^4} \right)^{1/5}$
quantidade de movimento	$f''' + \frac{1}{Pr} \left[\frac{3}{5} f f'' - \frac{1}{5} (f')^2 \right] + \theta = 0$	$f''' + \frac{1}{Pr} \left[\frac{3}{5} f f'' - \frac{1}{5} (f')^2 \right] + \frac{\theta}{Pr} = 0$
energia	$\theta'' + \frac{3}{5} f \theta' + \frac{3}{5} f' \theta = 0$	$\theta'' + \frac{3}{5} f \theta' + \frac{3}{5} f' \theta = 0$

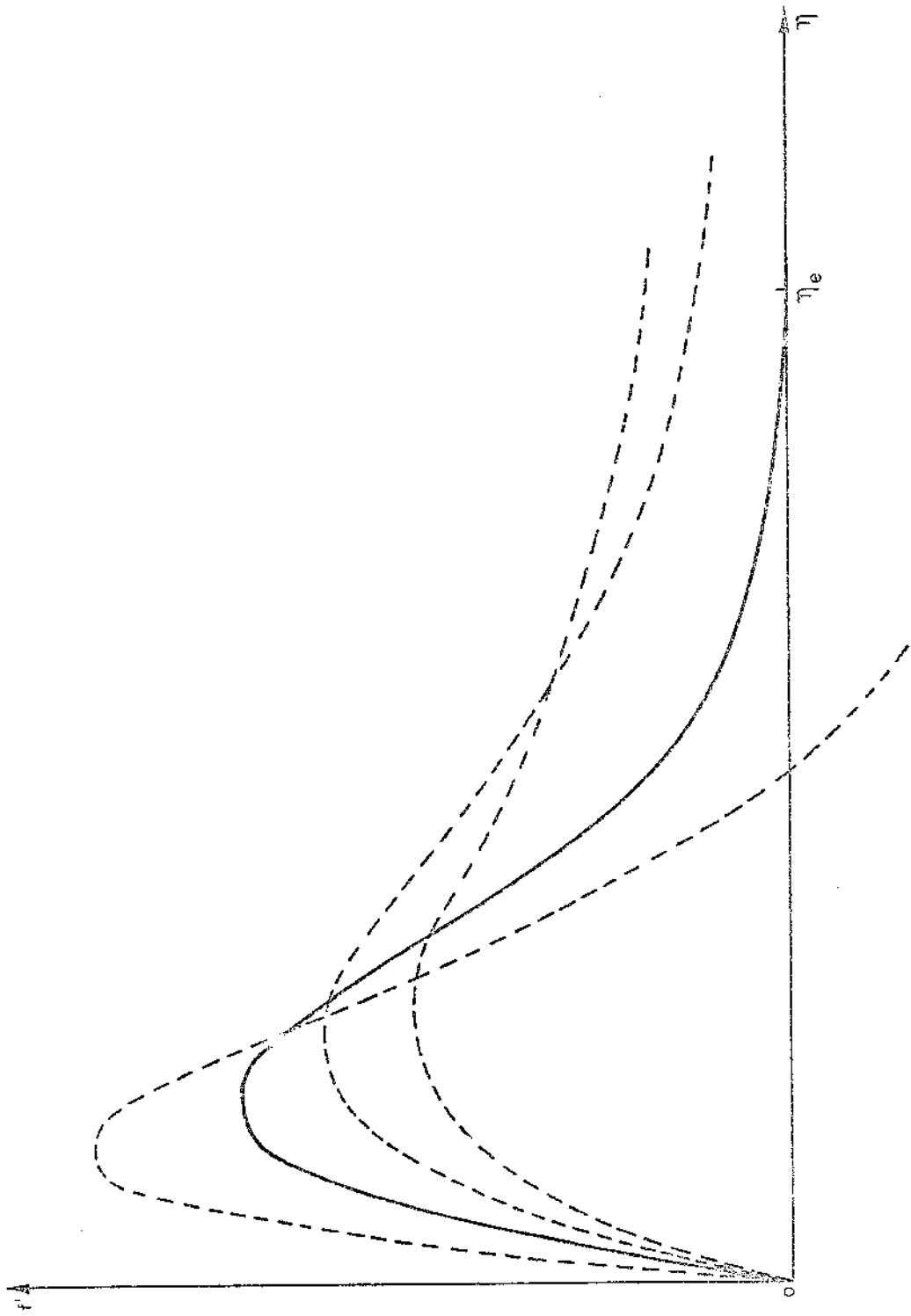


Figura 3.1 - Soluções numéricas típicas obtidas em cada iteração do perfil de velocidade.

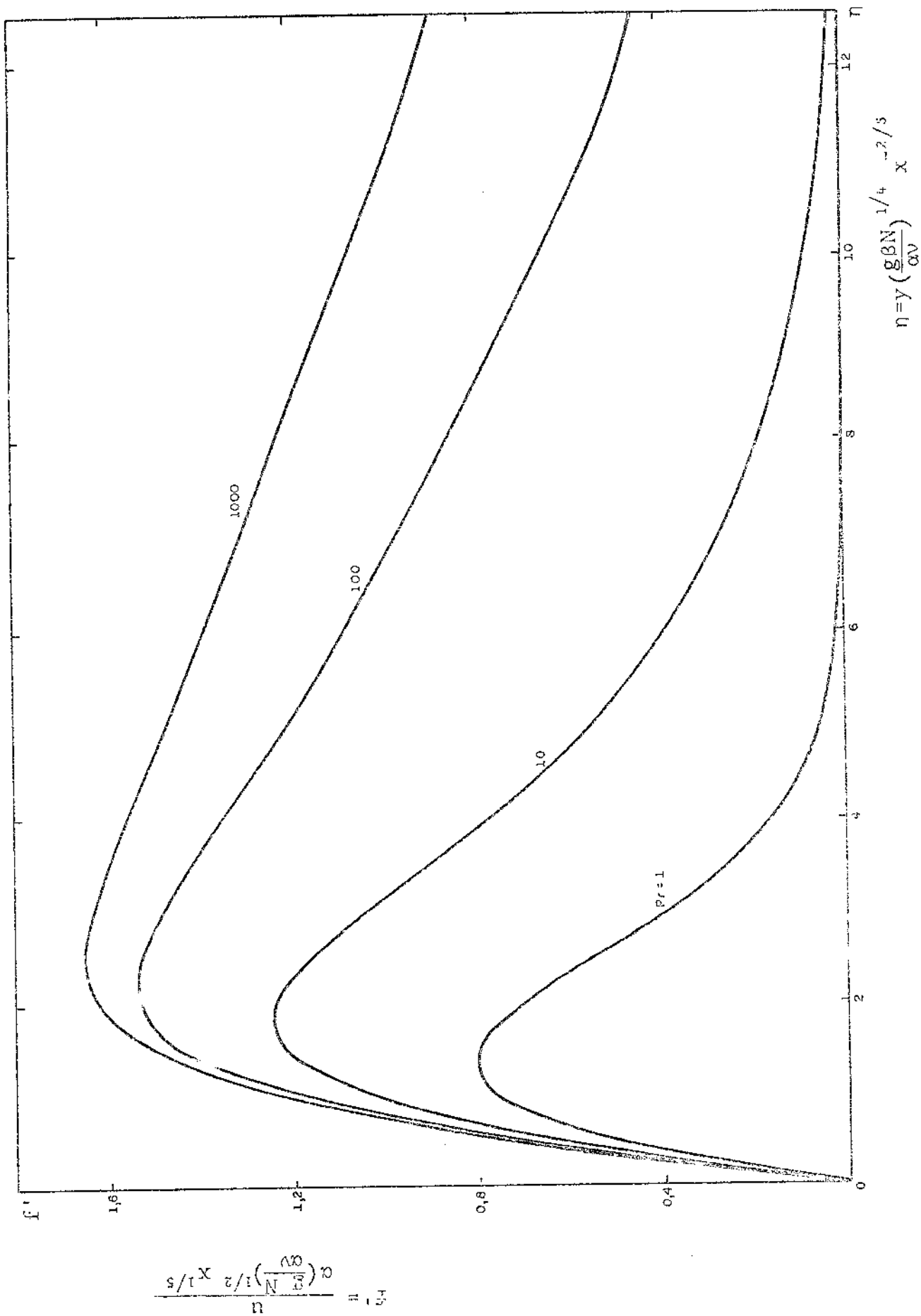


Figura 3.2 - Distribuição da velocidade adimensional para $Pr > 1$.

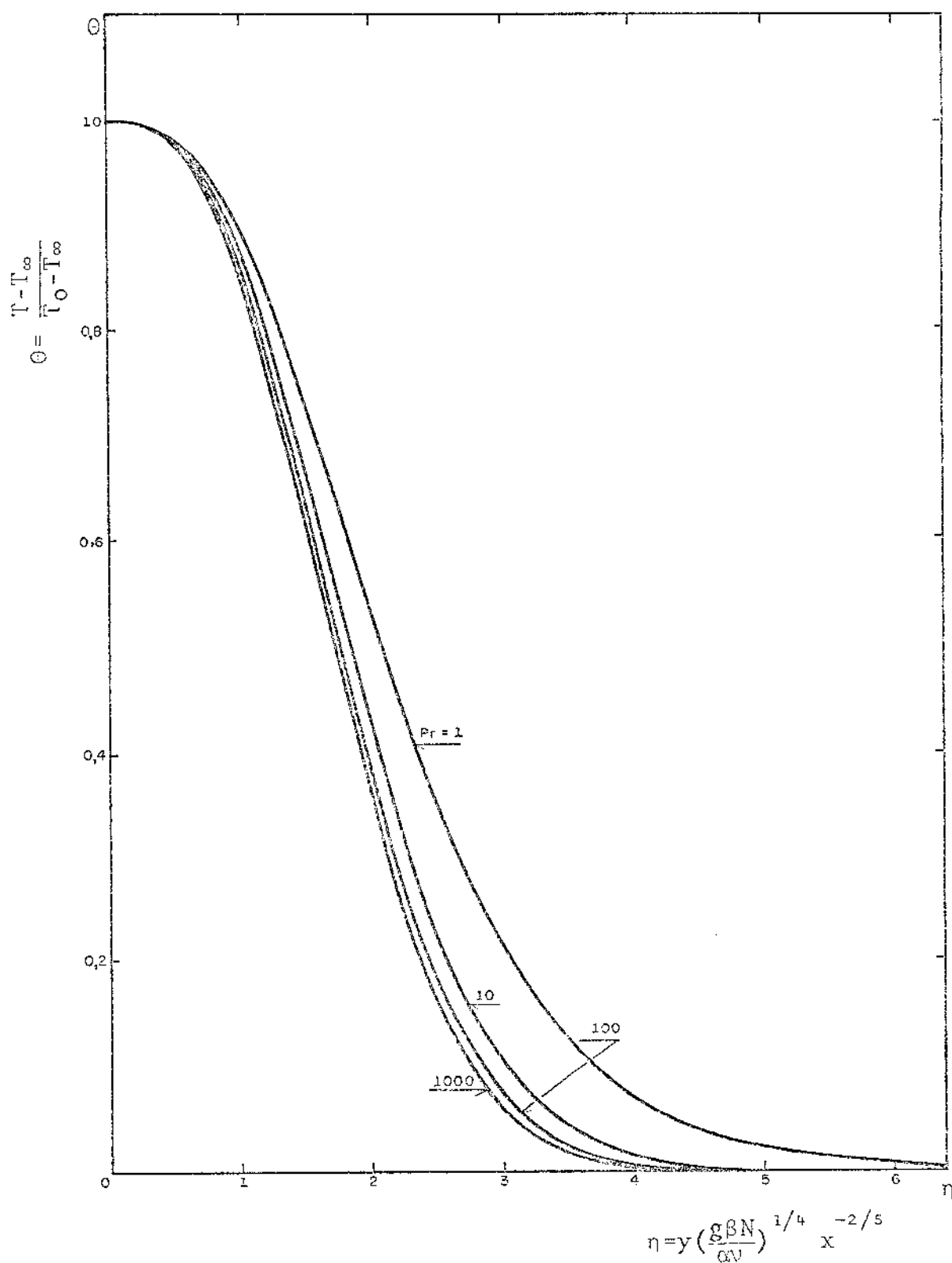


Figura 3.3 - Distribuição da temperatura adimensional para $Pr > 1$.

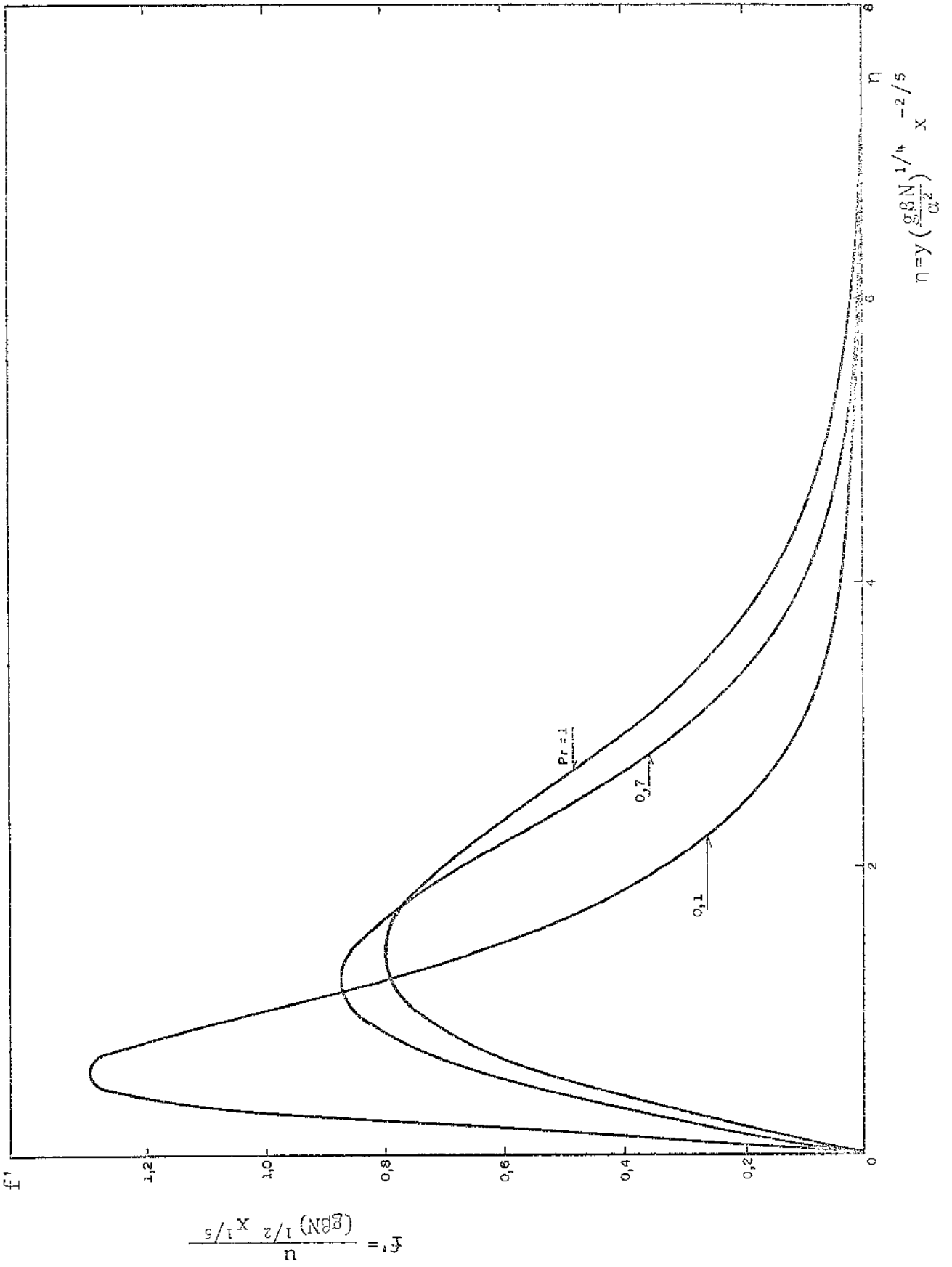


Figura 3.4 - Distribuição da velocidade adimensional para $Pr < 1$.

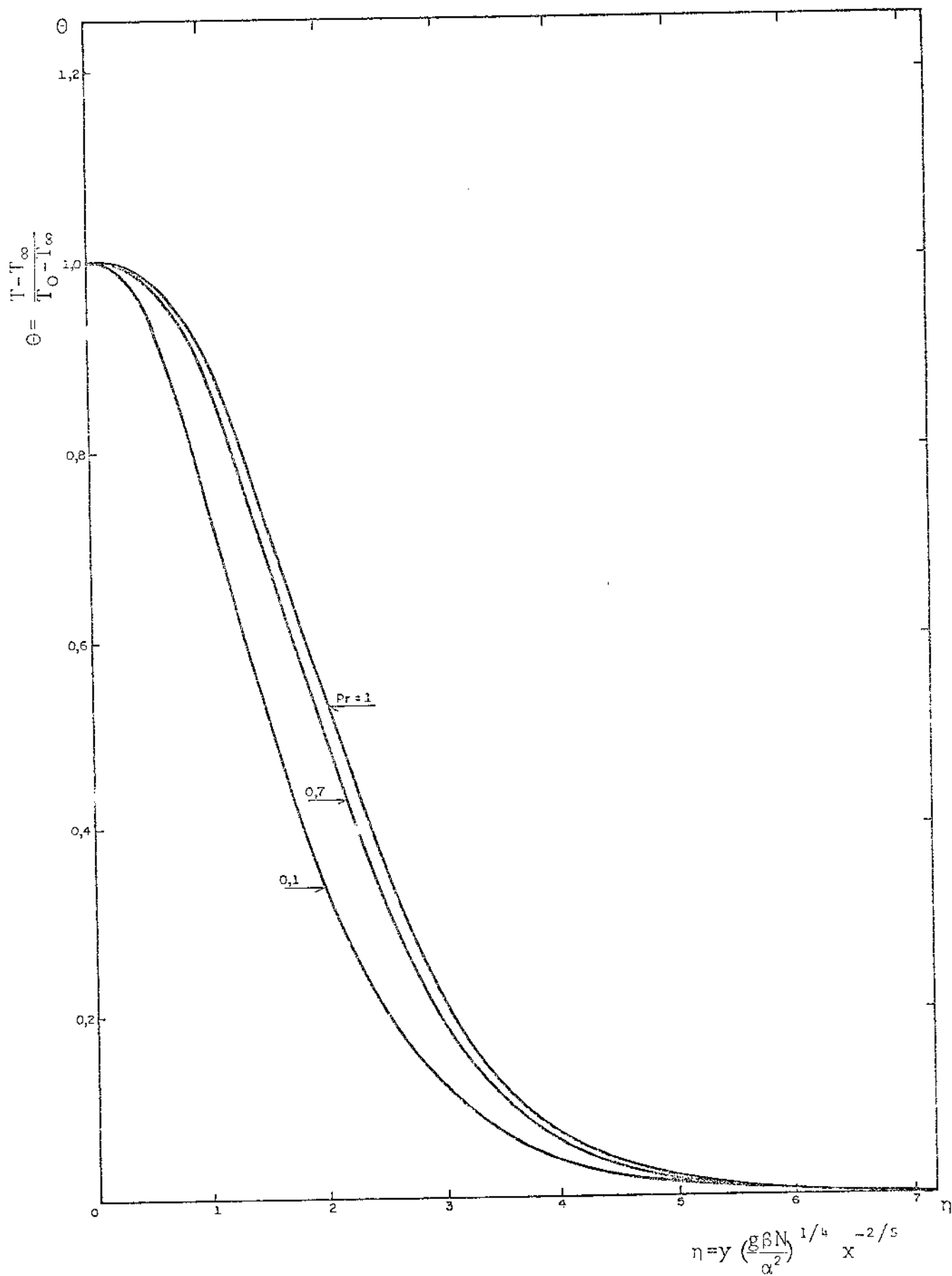


Figura 3.5 - Distribuição da temperatura adimensional para $Pr < 1$.

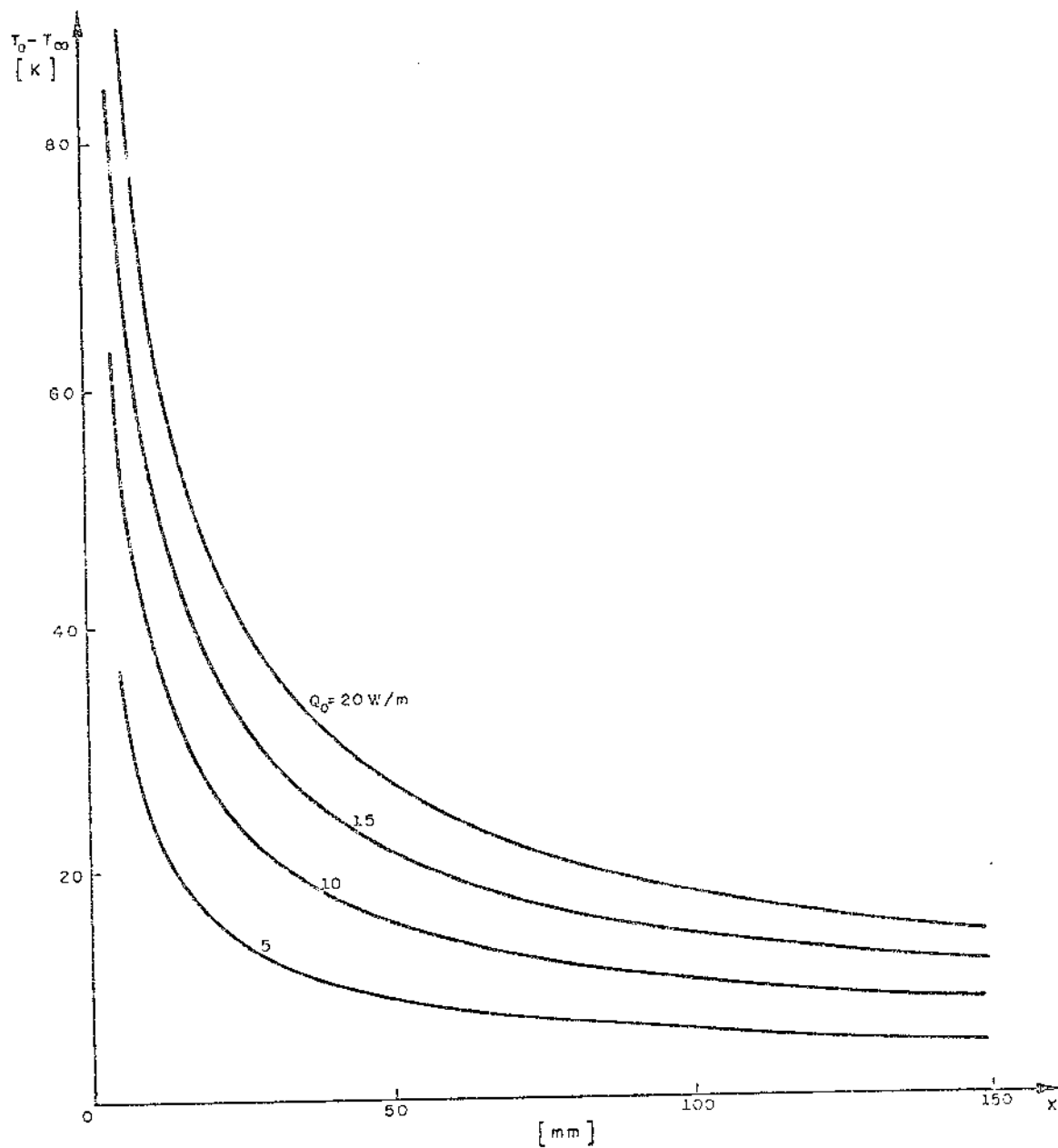


Figura 3.6 - Variação da temperatura da superfície em função da distância para ar a 293 K ($Pr=0,7$).

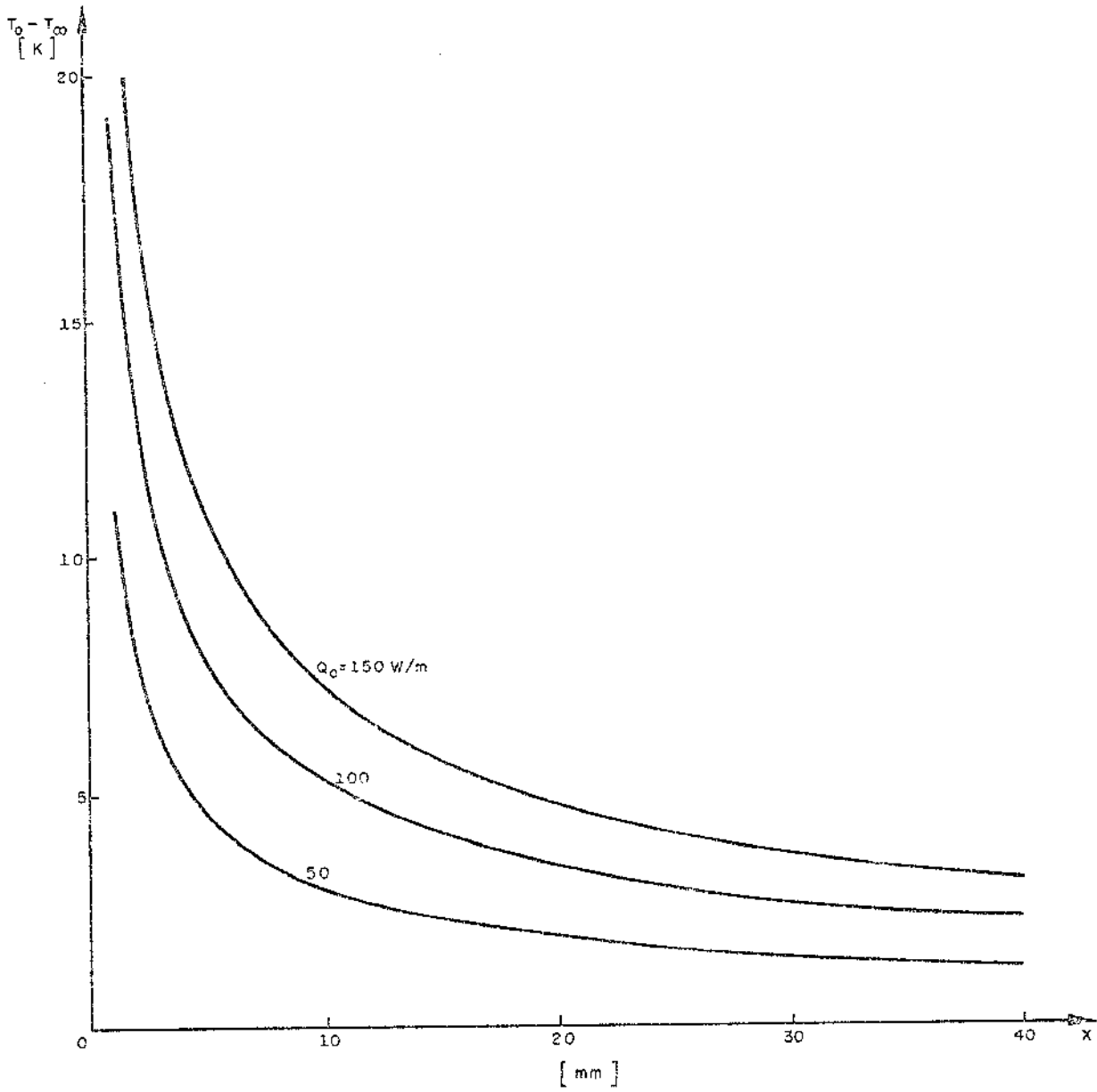


Figura 3.7 - Variação da temperatura da superfície em função da distância para água a 293 K ($Pr=7,0$).

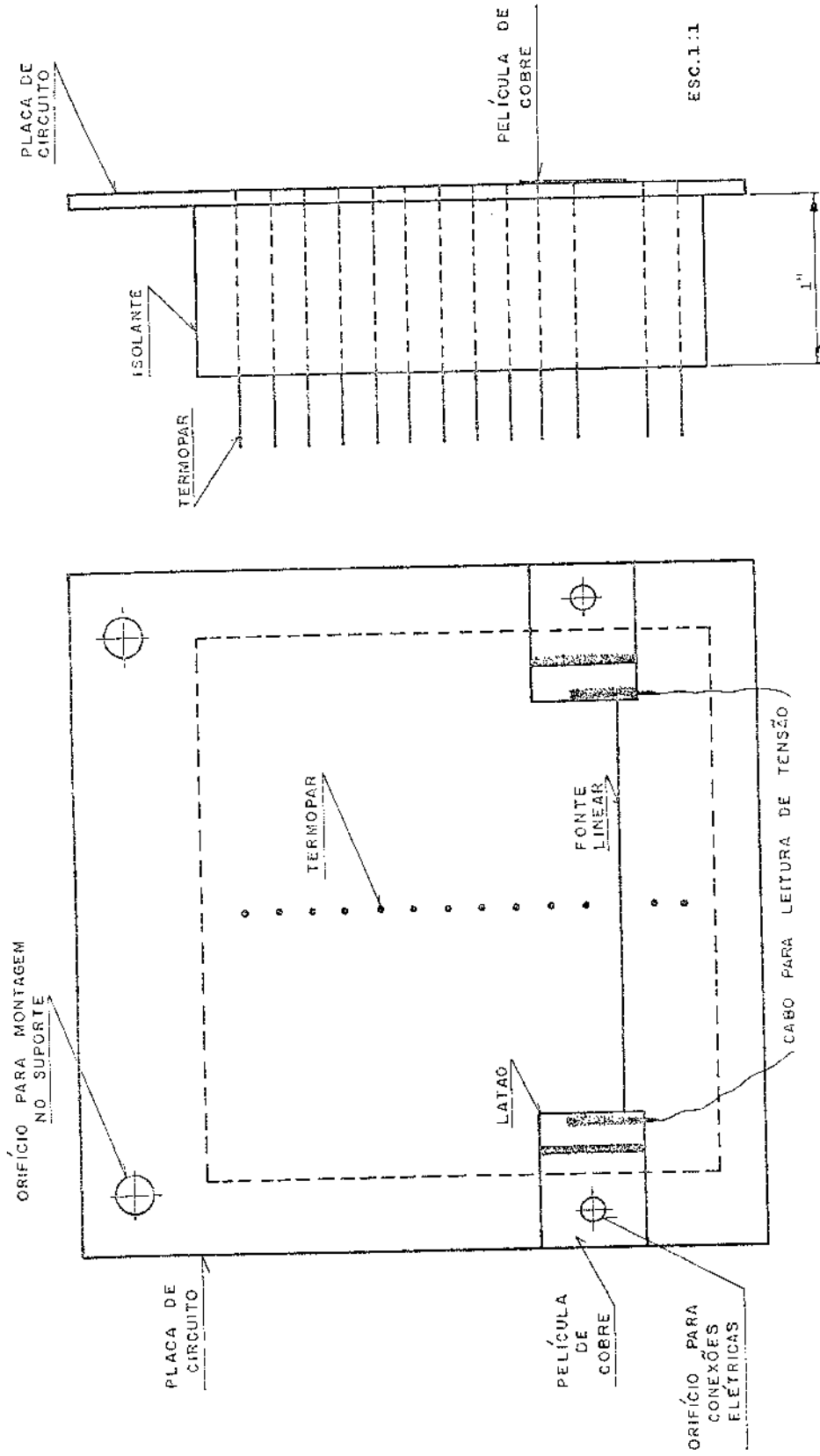


Figura 3.8 - Detalhe de seção de teste.

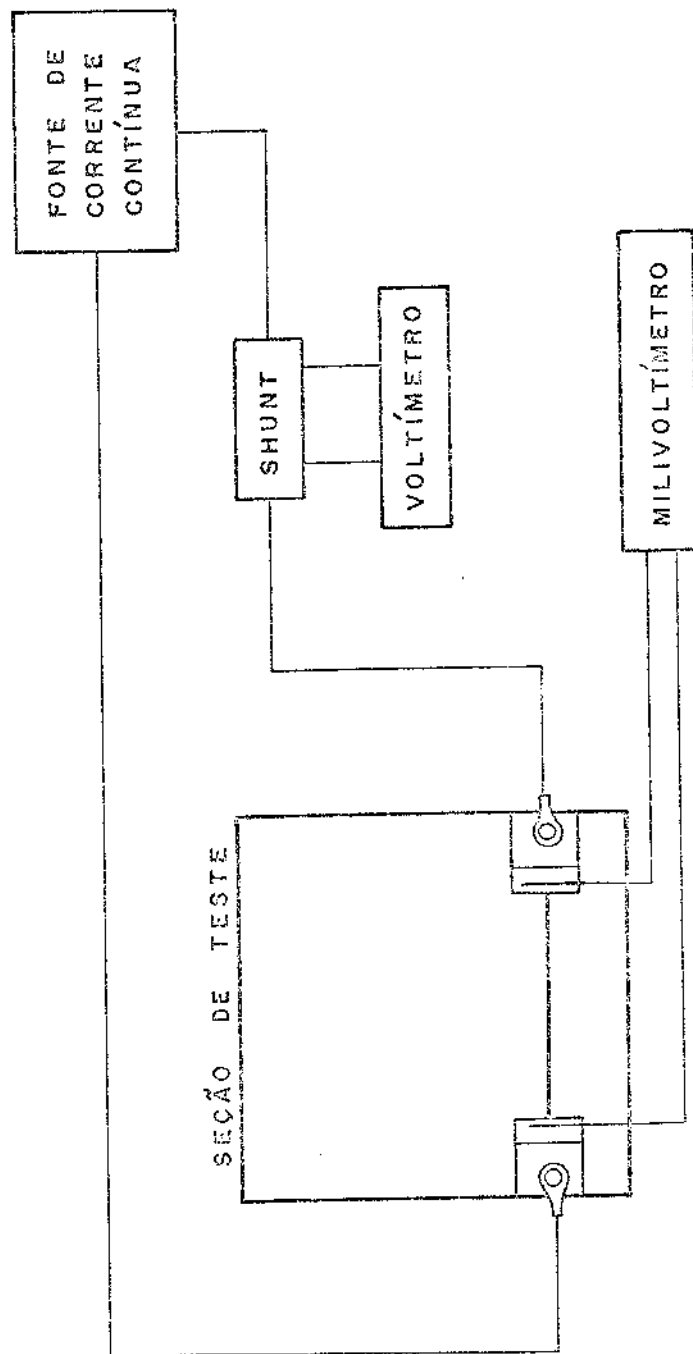


Figura 3.9 - Instrumentação da seção de testes.

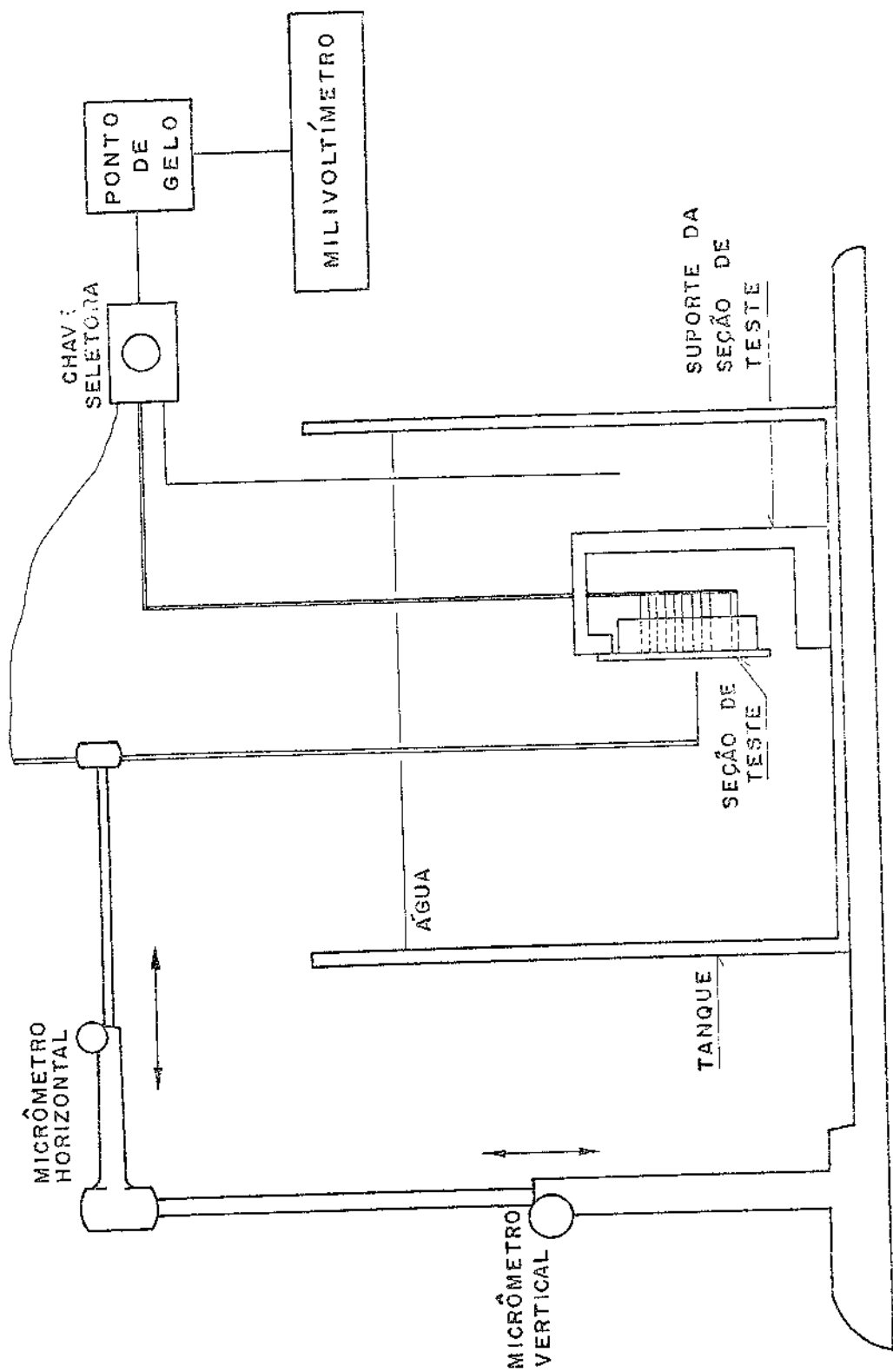


Figura 3.10 - Montagem experimental para a leitura de temperaturas.

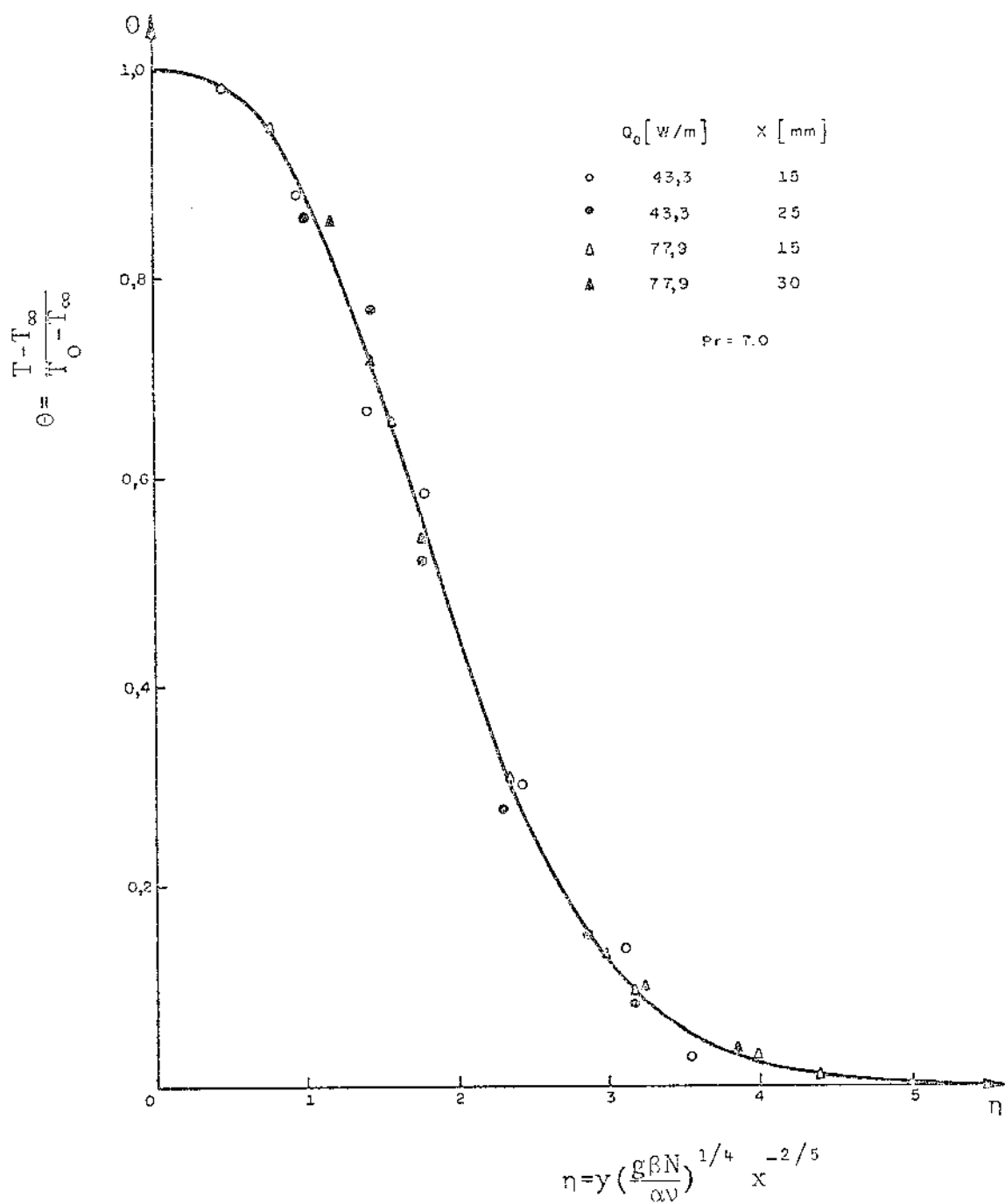


Figura 3.11 - Comparação entre a teoria e resultados experimentais para uma fonte linear horizontal sobre uma superfície vertical adiabática em água.

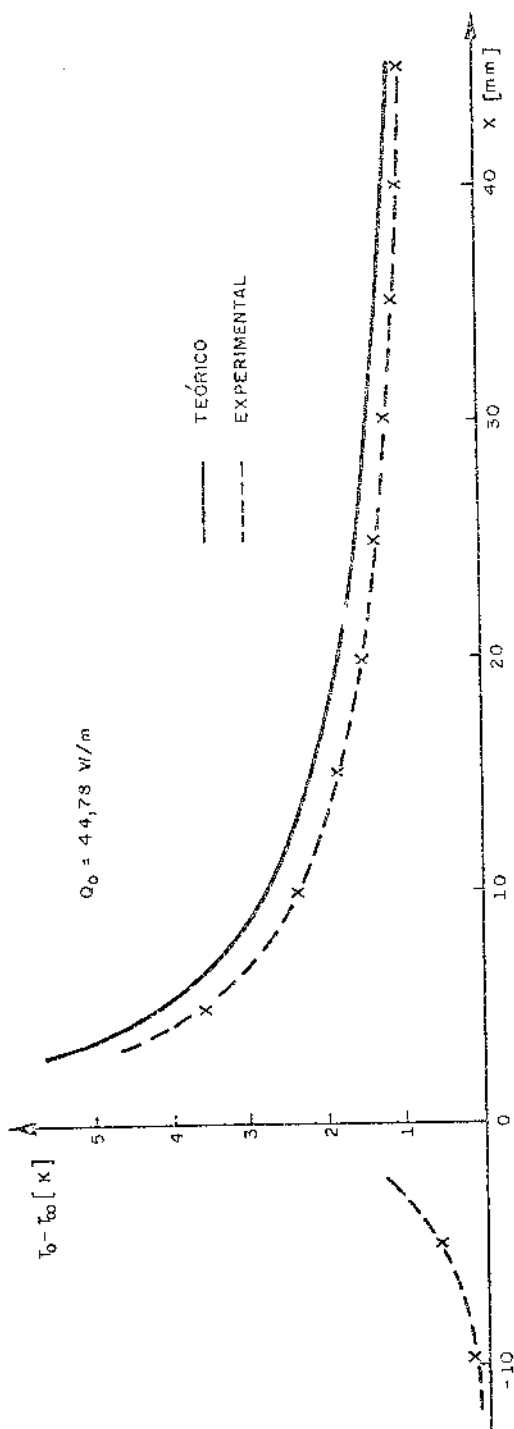


Figura 3.12 - Comparação entre o perfil teórico de temperatura na superfície adiabática e os resultados experimentais em água.

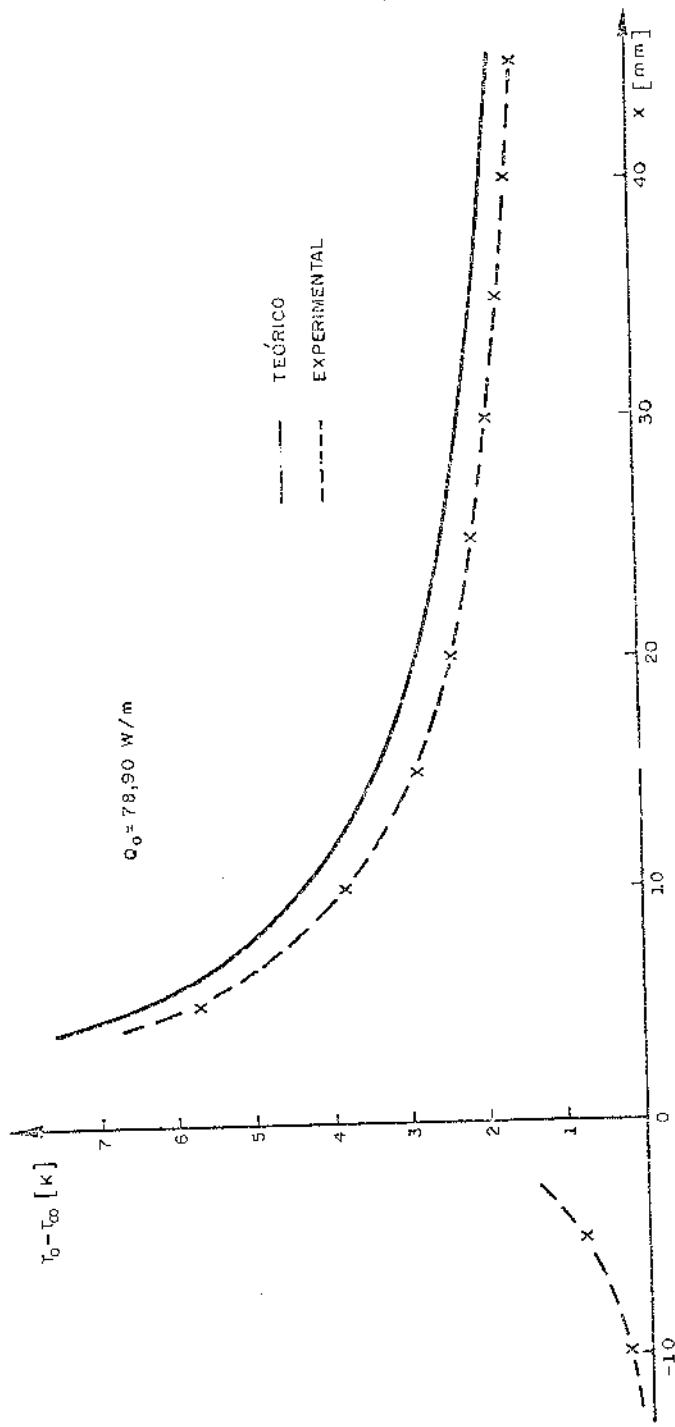


Figura 5.13 - Comparação entre o perfil teórico de temperatura na superfície adiabática e os resultados experimentais em água.

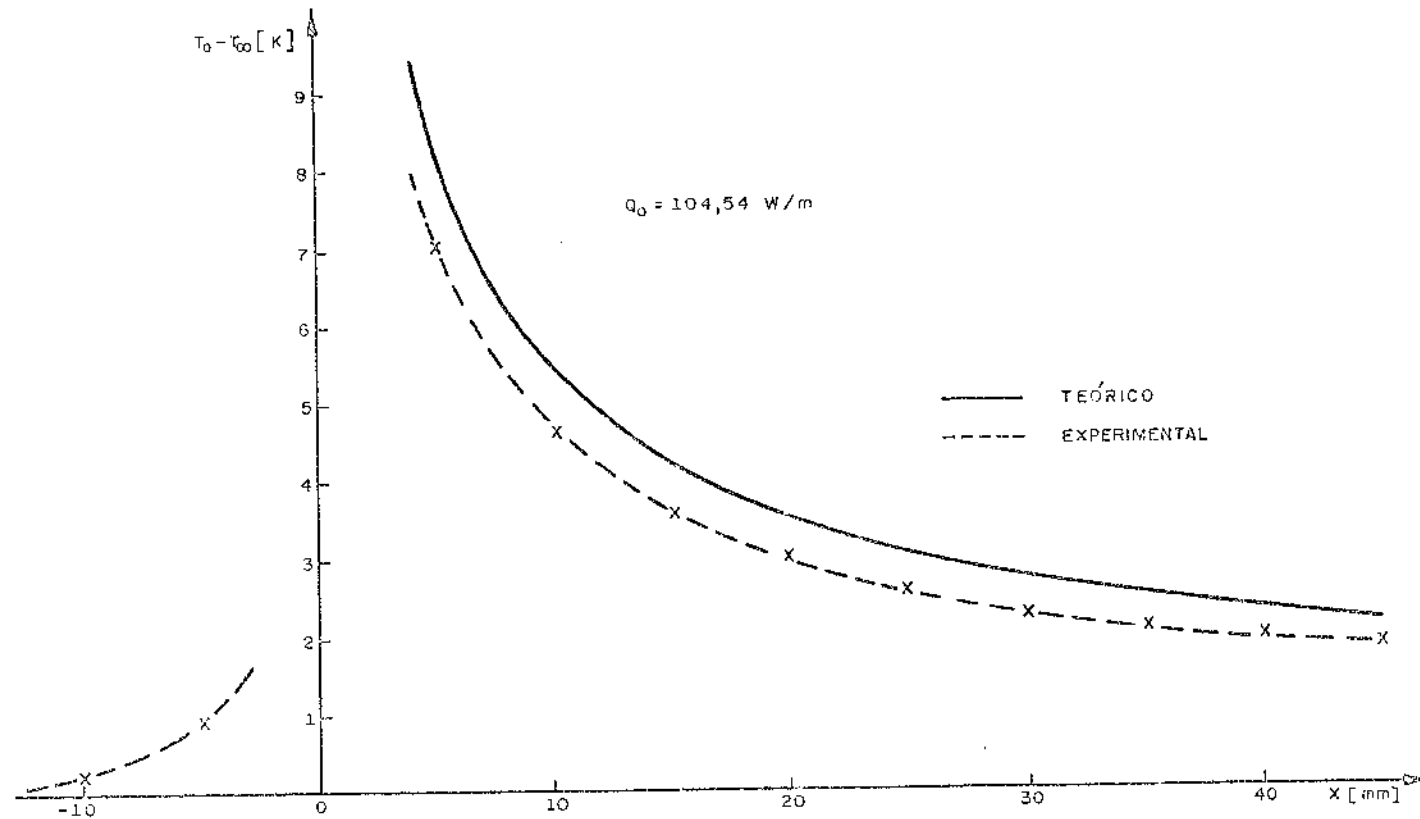


Figura 3.14 - Comparação entre o perfil teórico de temperatura na superfície adiabática e os resultados experimentais em água.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DO ESCOAMENTO LAMINAR RESULTANTE DE FONTES DISCRETAS DE ENERGIA SOBRE UMA SUPERFÍCIE VERTICAL

4.1. INTRODUÇÃO

A vida de um equipamento eletrônico é função inversa da temperatura a que este equipamento está submetido. Quanto maior a temperatura, menor será a vida do componente. Assim sendo, a otimização da dissipação térmica através da utilização de técnicas apropriadas de transferência de calor é de importância fundamental para a vida e o bom funcionamento de equipamentos eletrônicos.

A extrema miniaturização dos dispositivos eletrônicos agravou o problema térmico. A taxa de falha de pastilhas microeletrônicas aumenta exponencialmente com o aumento da temperatura da junção. No empacotamento de componentes microeletrônicos é importante o conhecimento e a previsão de todas as características e os modos de transferência de calor. A convecção natural é um modo importante de transferência de calor tanto para o resfriamento com ar como o resfriamento utilizando um líquido.

Bergles, Chu & Seely [20, 21], fizeram levantamentos das técnicas de transferência de calor apropriadas ao resfriamento de equipamentos eletrônicos. Outros trabalhos mais específicos consideraram o transporte global aproximando um conjunto de dispositivos dissipadores de energia por superfícies isotérmicas ou com fluxo de calor constante. Por exemplo, o resfriamento global por convecção natural de conjuntos de placas de circuito impresso foi estudado por Aung, Kessler & Beitin [7]. Neste trabalho foi considerada uma configuração de placas paralelas verticais tendo sido analisado teórica e experimentalmente o efeito da altura do canal formado pelas placas sobre a temperatura máxima das placas. Esta investigação considerou também as interações com as placas adjacentes. Aung [6] efetuou um trabalho adicional sobre escoamento entre placas, obtendo soluções fechadas para a convecção natu-

ral em regime laminar em um canal formado por placas paralelas verticais com aquecimento assimétrico, tanto para condição de temperatura de parede uniforme quanto para fluxo de calor constante. Aung, Fletcher & Sernas [5] consideraram o escoamento em desenvolvimento para a mesma configuração. Um tratamento mais completo de escoamento em dutos verticais, bidimensionais ou axialmente simétricos, foi efetuado recentemente por Cebeci e colaboradores [51] considerando temperatura de parede uniforme. Neste trabalho foi admitida a possibilidade de convecção mista (natural e forçada), regime laminar ou turbulento e foi considerada também a possibilidade de separação da camada limite ao longo do escoamento.

Todos estes estudos, entretanto, consideram um comportamento global, não tratando em detalhes do escoamento causado por um dispositivo único que dissipa energia e pode ser aproximado por uma fonte concentrada de energia. Os detalhes do transporte de energia são importantes pois revelam não só as características globais de operação mas também o comportamento individual do componente.

Em muitas aplicações na eletrônica os dispositivos são montados sobre superfícies verticais. Nestes casos, em geral as superfícies onde os dispositivos são montados não são boas condutoras de calor e os dispositivos podem ser idealizados como fontes de energia.

Fujii [46] apresentou uma solução de similaridade para a formação de uma pluma de fonte puntual, axialmente simétrica. Escoamentos do tipo pluma causados por fontes concentradas de energia em um meio ambiente extenso são essencialmente bidimensionais. A presença de uma superfície, entretanto, destrói a simetria e torna o problema tridimensional, como ilustrado na Fig. 4.1. Para este problema ilustrado na figura, mesmo a formulação analítica mais simples, para propriedades do fluido admitidas constantes, dissipação viscosa e trabalho de pressão desprezíveis além das duas aproximações de Boussinesq, resulta em um sistema de equações muito complicado. Um problema semelhante a este, o de escoamento viscoso devido à ação da gravidade de uma camada de líquido causado pela existência de uma fonte puntual de líquido situada no topo de um plano inclinado foi resolvido analiticamente por

Smith [106] utilizando a técnica da similaridade. Entretanto, a diferença básica entre o problema solucionado e o problema de convecção ilustrado na Fig. 4.1 é a força causadora do escoamento. O problema de convecção é mais complicado devido ao acoplamento das equações da quantidade de movimento a energia. Além disso, a superfície não tem neste caso uma condição uniforme pois a temperatura irá variar em cada ponto, o que torna impossível uma solução por similaridade.

As micropastilhas devem ser modeladas como elementos que dissipam uma taxa constante de energia. Devido ao reduzido tamanho, o escoamento é laminar. As correlações existentes de convecção natural, analíticas e experimentais, para fluxo de calor constante em placas verticais foram obtidas a partir do aquecimento de superfícies com tamanho considerável em apenas uma dimensão, a largura [48, 53, 118]. A área de dissipação térmica de uma micropastilha é muito pequena nas duas dimensões, da ordem de 5mm x 5mm. Para fontes tão pequenas, são poucos os dados disponíveis de transferência de calor.

Baker [9, 10] obteve coeficientes de transferência de calor no ponto médio dos resistores (utilizados para simular pastilhas) alinhados com a superfície do substrato. A largura dos resistores era igual ao dobro da altura (4,6 mm x 2,3mm; 9,8mm x 4,9mm; 20mm x 10mm). As curvas obtidas com R-113, mostradas na Fig. 4.2, ilustram os coeficientes elevados de transferência de calor observados, acima dos esperados para convecção natural e ebulição. Baker sugeriu qualitativamente que estes valores elevados deviam-se aos efeitos de borda de ataque e escoamentos laterais. Uma análise mostrou que a condução de calor para o substrato era relativamente sem importância.

4.2. EFEITO DAS DIMENSÕES DO AQUECEDOR

Baker [9] investigou teórica e experimentalmente o efeito das dimensões do componente eletrônico sobre o calor transferido por convecção natural e forçada de pequenos dispositivos com área superficial variando entre 0,01 e 2,00 cm². Como fluido

refrigerante foi utilizado o Freon 113 e um líquido dielétrico à base de silicone. Este estudo mostrou que a imersão do componente em líquido para a transferência de calor por convecção natural é uma maneira eficiente de resfriar pequenas fontes de calor. Este modo de transferência de calor mostrou ser três vezes mais efetivo do que o resfriamento do mesmo componente por convecção natural em ar.

Baker observou que a quantidade de calor transferida por condução para o substrato aumenta com a diminuição das dimensões da fonte de calor. Além disso, à medida que as dimensões da fonte aproximam-se da espessura da camada limite térmica os efeitos tridimensionais aumentam o fluxo de calor por convecção.

Carey & Mollendorf [28] utilizaram um pequeno aquecedor quadrado de 4,7mm de lado sobre uma superfície vertical adiabática para a determinação do coeficiente de transferência de calor por convecção natural em água. A geometria estudada é semelhante à mostrada na Fig. 4.1. O coeficiente assim obtido é 110 por cento maior que os valores previstos para superfícies aquecidas de dimensões maiores. Foram utilizados termopares para a determinação dos campos de temperatura na superfície e através da camada limite para posições acima da fonte. Além disso foi utilizado um sistema Schlieren para a visualização das camadas limites térmica nas direções y e z. Os resultados obtidos através das leituras dos termopares neste estudo indicaram que a temperatura da superfície $T_0 = T(x, 0, 0)$ diretamente acima da fonte obedece uma variação proporcional a $x^{-0,77}$. É significativo que este expoente de x avaliado experimentalmente esteja quase que exatamente entre o de uma pluma livre causada por uma fonte puntual (proporcional a x^{-1}) e o de uma fonte linear horizontal sobre uma superfície adiabática (proporcional a $x^{-0,6}$). Fisicamente é um resultado realista. A queda da temperatura a jusante é consequência da difusão do calor e da quantidade de movimento. Ocorre um crescimento da região do escoamento, e um aumento do fluxo de massa devido à incursão do fluido frio nesta zona. Da teoria desenvolvida para as soluções de similaridade para plumas livres de fontes puntuais ou lineares de energia constante, pode-se mostrar que a temperatura sobre a fonte é inversamente proporcional ao fluxo de massa local. Além disso, a espessura da região do escoamento é inversamente propor-

cional à velocidade do fluido que entra nesta zona. O resfriamento mais rápido da pluma axialmente simétrica causada por uma fonte puntual é coerente com o fato de que este escoamento permite a entrada de fluido ambiente mais frio em todas as direções radiais, convergindo para o eixo da pluma. Entretanto a presença de uma superfície vertical sobre a fonte puntual faz com que metade do meio fluido não esteja mais disponível para a entrada do fluido ambiente. Isto implica que a queda de temperatura será menor. Foi observado também que a espessura da camada limite térmica $\delta_z(x)$ na direção z cresce proporcionalmente a $x^{1/5}$ enquanto que na direção y o crescimento da camada limite normal $\delta_y(x)$ é diretamente proporcional a x . Como comparação, em uma pluma livre de fonte puntual a espessura da camada limite é proporcional a $x^{1/2}$ enquanto que para uma fonte linear horizontal sobre uma parede adiabática é proporcional a $x^{2/5}$. O crescimento preferencial da camada limite térmica na direção normal à superfície está coerente com a maneira como o fluido ambiente penetra nesta região. A entrada do fluido ambiente mais frio próximo à superfície é inibida pela força de cisalhamento viscoso exercida pela superfície sobre o fluido penetrante. Assim, o crescimento da espessura da camada limite na direção z é menor do que na direção y pois as velocidades locais de entrada do fluido ambiente são menores nesta região junto à parede.

Park & Bergles [96] efetuaram uma análise experimental para a determinação da influência das dimensões da superfície aquecida sobre o coeficiente de transferência de calor por convecção natural e ebulição nucleada. Água e refrigerante R-113 foram utilizados como fluidos refrigerantes. O refrigerante R-113 foi selecionado por ter as propriedades semelhantes às dos fluidos dielétricos usualmente utilizados no resfriamento por imersão de equipamentos eletrônicos. O tanque utilizado nesta análise está mostrado na Fig. 4.3. Uma placa de circuito impresso com uma película de cobre sobre uma das superfícies foi a base da seção de teste, mostrada na Fig. 4.4. A micropastilha foi simulada por uma tira de uma folha de níquel-cromo de 12,7 μm de espessura. Para fixar a tira do aquecedor sobre a placa do circuito foi utilizada a resina M610 (Measurements Group, Inc.). A tira de níquel-cromo foi soldada com estanho sobre a película de cobre com o auxílio de uma folha de latão de 25,4 μm de espessura para facilitar as

conexões elétricas. As pequenas saliências resultantes das conexões elétricas não afetaram a transferência de calor. A seção de teste foi alimentada por meio de uma fonte de corrente contínua. A área da superfície exposta foi medida por meio de um microscópio óptico. Neste conjunto de experiências um único termopar foi colocado no ponto médio na parte traseira dos aquecedores que simulam as micropastilhas. A principal variável desta análise experimental foi a largura do aquecedor. Foram utilizadas duas alturas (5mm e 10mm) com variações na largura desde 2mm até 70mm. O fluxo de calor nominal, calculado através do produto da queda de tensão através do aquecedor pela corrente indicada por um shunt calibrado, foi corrigido para compensar as perdas de calor através da placa e das conexões elétricas. Estas perdas foram avaliadas entre 10 e 15 por cento. O número de Nusselt foi calculado no ponto médio da seção de teste, que é a localização mais provável da temperatura máxima de uma micropastilha. De acordo com esta avaliação da taxa de transferência de calor, o número de Grashof modificado, definido por

$$Gr_x^* = \frac{g\beta q'' x^4}{k\nu^2} \quad (4.1)$$

também foi avaliado no ponto médio. Os resultados experimentais para as tiras de altura 5mm e 10mm em R-113 estão mostrados na Fig. 4.5. A linha cheia inferior nesta figura representa a correlação de Fujii & Fujii [48] para a camada limite laminar em uma superfície vertical com fluxo de calor constante:

$$Nu_x = \left[\frac{Pr}{4 + 9Pr^{1/2} + 10Pr} \right]^{1/5} (Gr_x^* Pr)^{1/5} \quad (4.2)$$

Os dados de Ma & Bergles [87] para uma seção de teste utilizando uma montagem semelhante, apresentam boa concordância com estes dados experimentais como pode ser visto na mesma figura. Pode-se observar que o coeficiente de transferência de calor aumenta com a redução da largura do aquecedor. A seção de teste que simula uma pastilha de 5mm x 5mm tem um coeficiente de transferência de ca-

lor que é 80 a 100 por cento mais elevado do que a seção de teste de maior largura. Foi observado, entretanto, que os coeficientes de transferência de calor para a seção de teste de maior largura são ainda 20 por cento maiores do que os previstos pela Eq. (4.8). A Fig. 4.6 mostra os resultados experimentais para a variação da largura do aquecedor em água, utilizando duas alturas distintas. Nesta figura também está mostrado o ponto que corresponde ao resultado obtido por Carcy & Mollendorf [28] com um aquecedor quadrado de 4,7mm de lado. O efeito da variação da largura mostrou ser menos pronunciado em água do que em R-113 mas este fato não chegou a ser discutido pelos autores.

De acordo com os resultados de Park & Bergles [96] pode-se notar que as correlações usuais de convecção natural não podem ser aplicadas a aquecedores de dimensões reduzidas. Mesmo para a seção de teste mais extensa os desvios observados em relação à teoria foram da ordem de 20 por cento. Muito embora não existam muitos trabalhos experimentais na literatura para seções de teste uniformemente aquecidas, existe uma boa quantidade de dados experimentais para aquecedores admitidos com temperatura uniforme que consideram tais desvios em detalhes.

Scherberg [101] chamou a atenção para o fato da solução das equações da camada limite por similaridade não ser adequada nas proximidades da borda de ataque de aquecedores reais. De acordo com esta teoria simplificada, as isotérmicas convergem para a borda de ataque onde seria observado um coeficiente de transferência de calor infinito. Na realidade, ocorre condução de calor no substrato para regiões a montante da borda de ataque. Além disso, nesta região de velocidades muito baixas, a condução de calor no fluido a montante pode tornar-se significativa. O resultado destes efeitos é que o escoamento de convecção natural pode ter início logo abaixo do aquecedor; as velocidades sobre o aquecedor serão ligeiramente maiores mas este efeito diminui com o aumento da distância a partir da borda de ataque. Scherberg [100, 101, 102] obteve soluções integrais que incorporam estes efeitos; entretanto, a ênfase foi direcionada mais para os detalhes matemáticos do que para a avaliação dos coeficientes de transferência de calor.

Recentemente Martynenko, Berezovsky & Sokovishin [38] fizeram um resumo das soluções analíticas da camada limite, que es

tá reproduzido na Fig. 4.7. De acordo com esta figura, os coeficientes médios previstos (solução de perturbação) para temperatura de parede uniforme aumentam quando são consideradas as interações com o escoamento externo induzido e aumentam mais ainda quando é considerado o escoamento a montante provocado pela condução no fluido na direção paralela à da superfície. Os efeitos da borda de fuga e das esteiras reduzem os coeficientes de transferência de calor.

Goldstein & Eckert [53] observaram que a distribuição de temperatura em uma placa aquecida por um fluxo de calor constante, obtida por meio de interferometria, não concorda com as previsões da camada limite nas proximidades da borda de ataque. Eichhorn [41] observou que o início do desenvolvimento do escoamento em convecção natural ocorre ligeiramente abaixo de uma placa de temperatura uniforme. Gryzagoridis [56] obteve coeficientes locais de transferência de calor por interferometria que demonstram claramente a elevação do coeficiente de transferência de calor para valores reduzidos do número de Grashof.

Park & Bergles [96] correlacionaram os dados obtidos, representados nas Figs. 4.5 e 4.6, baseado no número de Rayleigh modificado, definido por

$$Ra_x^* = \frac{g\beta q''x^4}{k\nu\alpha} \quad (4.3)$$

Eles observaram que o efeito da largura do aquecedor é função da relação entre a condução transversal e a energia transportada verticalmente por convecção. Os resultados experimentais mostraram que os efeitos da largura eram desprezíveis ao redor de 70mm. A largura foi então adimensionalizada dividindo-se o seu valor pelo valor assintótico. Esta largura adimensional caracteriza o efeito de condução de calor. A forma geral adotada para a correlação foi

$$Nu_x = a Ra_x^{*b} \quad (4.4)$$

Os valores de a e b foram calculados pela técnica de Churchill & Usagi [34] onde o número de Nusselt aproxima-se do valor limite para $W_{\infty} = 70\text{mm}$ à medida que a largura aumenta. O coeficiente a e o expoente b foram determinados por regressão linear. Para o R-113

$$a = 0,906 \left[1 + \frac{0,00111}{(W/W_{\infty})^{3,965}} \right]^{0,2745} \quad (4.5)$$

$$b = 0,184 \left[1 + \frac{2,64 \times 10^{-5}}{(W/W_{\infty})^{9,249}} \right]^{-0,0362}$$

c para a água

$$a = 0,906 \left[1 + \frac{0,09886}{(W/W_{\infty})^{4,98}} \right]^{0,04654} \quad (4.6)$$

$$b = 0,184 \left[1 + \frac{2,219 \times 10^{-9}}{(W/W_{\infty})^{9,634}} \right]^{-0,003966}$$

Na minha opinião existem alguns aspectos discutíveis nestas correlações. Em primeiro lugar existem relações diferentes para fluidos diferentes, o que não é desejável. O ideal seria uma única correlação para ambos os fluidos. Em segundo lugar, a largura foi adimensionalizada com base na largura assintótica, porém acredito que devesse ter sido levado em consideração uma variável importante como a relação entre a altura e a largura do aquecedor.

4.3. INTERAÇÕES RESULTANTES DE FONTES DE ENERGIA

Painéis e dispositivos que dissipam energia atuam como fontes térmicas e originam um escoamento característico de con-

vecção natural que em geral é importante para a determinação da energia que pode ser colocada em tais equipamentos bem como a melhor disposição para evitar um superaquecimento dos elementos da superfície onde eles estão localizados.

Todo componente eletrônico dissipa uma certa quantidade de energia na forma de calor. Em muitos casos os componentes são alinhados verticalmente e a esteira originada pelo componente inferior afeta os outros componentes a jusante. Quando um componente encontra-se na esteira de outro, o campo de velocidade induzido pelo componente inferior tende a aumentar a taxa de transferência de calor do componente superior, mas este efeito é, entretanto, de alguma forma contrabalançado pelo pré-aquecimento do fluido. Estes fatores, portanto, têm efeitos contrários sobre o coeficiente de transferência de calor no componente superior.

Uma pesquisa bibliográfica revela que existem poucos trabalhos experimentais que tratam da interação entre fontes de energia. Park & Bergles [96] realizaram um trabalho experimental que considera a interação entre pequenas fontes discretas de energia. Neste trabalho os circuitos microeletrônicos foram simulados por aquecedores feitos de folha metálica e alimentados por uma fonte de corrente contínua. Os aquecedores foram montados em duas configurações: nivelados com a superfície do cartão ou salientes cerca de 1mm. Foram obtidos resultados para aquecedores em linha e em quicôncio, com a mesma potência sendo dissipada nos mesmos.

Sparrow & Faghri [108] resolveram numericamente as equações da camada limite para o problema de convecção natural em ar de duas placas isotérmicas alinhadas verticalmente uma sobre a outra com um espaçamento de ar que é uma variável do problema.

Jaluria [67] estudou numericamente o escoamento em convecção natural devido a um conjunto de elementos discretos aquecidos localizados sobre uma superfície vertical adiabática. O problema foi considerado para um valor do número de Prandtl igual a 0,7 que se aplica ao ar. Os resultados obtidos foram os campos de velocidade e temperatura originados e a dependência destes campos em relação ao fluxo de calor e à distância entre os

elementos aquecidos. O escoamento é tratado como um problema de camada limite e as equações são resolvidas numericamente através de um método de diferenças finitas. As interações entre duas fontes lineares de energia térmica colocadas sobre uma superfície vertical adiabática foram analisadas experimentalmente por Jaluria [68].

Jaluria [70] considerou também um escoamento bidimensional originado por um conjunto de elementos discretos aquecidos localizados sobre uma superfície vertical adiabática, porém sem as simplificações da camada limite. As equações elípticas completas do escoamento foram resolvidas numericamente utilizando métodos de diferenças finitas. Uma condição de contorno utilizada neste problema é que na borda de ataque da superfície aquecida inferior existe uma superfície horizontal isotérmica cuja temperatura é a mesma do meio fluido. Uma comparação destes resultados com soluções baseadas nas hipóteses simplificadoras da camada limite mostra que situações com valores muito reduzidos do número de Rayleigh exigem a consideração das equações completas do escoamento. Esta é uma observação importante pois em muitas situações encontradas na prática com dispositivos eletrônicos existem fontes de dimensões reduzidas separadas por pequenas distâncias.

Existem ainda alguns estudos experimentais sobre interações observadas em conjuntos de fios [85,97] e pequenos tubos [89,114]. Alguns trabalhos analíticos e experimentais a respeito da formação de plumas a partir de fontes discretas de energia de largura considerável podem ser encontrados na literatura [28,60,65,77,109].

O desenvolvimento e a interação de plumas originadas de pequenas fontes de energia é um problema complexo, cuja solução numérica é muito difícil. Assim, torna-se importante obter uma boa compreensão física do problema através de uma análise experimental.

4.4. MECANISMO DE INTERAÇÃO

A primeira tentativa de se explicar o mecanismo de interação de esteiras resultantes de um conjunto de fontes aquecidas foi feita por Eckert & Soehngen [39] em 1948. Neste estudo foram avaliados os valores do número de Nusselt em ar para um conjunto de dois ou três tubos horizontais considerados isotérmicos, de 22,5mm de diâmetro externo. O número de Grashof para um tubo nas condições de teste, baseado no diâmetro do tubo, era 34300. Foi observado que para tubos horizontais alinhados verticalmente em intervalos regulares de centro a centro igual a duas vezes o diâmetro, o tubo inferior apresentava o maior valor do número de Nusselt, baseado no coeficiente médio de transferência de calor, e este valor diminuía para tubos colocados imediatamente acima. Por exemplo, para dois tubos horizontais alinhados verticalmente, o valor do número de Nusselt médio do tubo superior era 87 por cento do valor do tubo inferior. Quando um terceiro tubo era introduzido acima dos dois considerados inicialmente, o valor do número de Nusselt do tubo inferior permanecia o mesmo, o do tubo intermediário diminuía para 83 por cento do valor de referência do tubo inferior e o número de Nusselt do tubo superior era somente 63 por cento do valor de referência do tubo inferior. Os tubos foram também arranjados de modo que os tubos inferior e superior permaneceram alinhados verticalmente enquanto que o tubo intermediário foi deslocado horizontalmente de uma distância igual à metade do diâmetro do tubo. Para esta nova configuração o tubo inferior manteve o mesmo valor do número de Nusselt como era de se esperar, o número de Nusselt do tubo intermediário era 103 por cento do valor do tubo inferior e o tubo superior apresentou um número de Nusselt igual a 86 por cento do valor do tubo inferior. Assim, o arranjo em quicôncio exibiu um valor médio do número de Nusselt do conjunto de tubos maior do que o arranjo em linha. Uma das fotografias obtidas neste estudo de interferometria está reproduzida na Fig. 4.8.

Para explicar estes resultados, Eckert & Soehngen interpretaram que os campos de velocidade e temperatura induzidos possuem influências opostas sobre os valores do número de Nusselt nos tubos à jusante. Para tubos alinhados verticalmente, a dife-

ronça entre os tubos e o ar na vizinhança dos tubos é menor devido à esteira aquecida proveniente dos tubos situados abaixo. Isto provoca uma redução da transferência de calor nos tubos superiores e, portanto, no número de Nusselt. Quando os tubos foram arranjados em quicôncio, o tubo intermediário apresentou o maior valor do número de Nusselt. Este tubo não está completamente situado na esteira aquecida do tubo inferior e a velocidade induzida pela esteira aumenta a taxa de transferência de calor. O tubo superior do arranjo em quicôncio não está completamente na esteira do tubo intermediário, e portanto, aí também existe um efeito da velocidade no aumento do valor do número de Nusselt, porém ao mesmo tempo, o ar quente proveniente do tubo inferior diminui a taxa de transferência de calor. Estas conclusões de Eckert & Soehngen estão parcialmente corretas, porém incompletas pois os valores do número de Nusselt são funções também do espaçamento entre os tubos e da taxa de dissipação térmica. Marsters [89] retomou este problema para levar em consideração a variação do espaçamento.

As interações entre fontes térmicas ocorrem não só quando estas estão alinhadas verticalmente, mas também para arranjos horizontais. Lieberman & Gebhart [85] observaram que em arranjos horizontais e inclinados a temperatura dos elementos no centro do conjunto é menor do que a temperatura dos elementos nas extremidades. Um estudo detalhado da interação entre plumas térmicas laminares, bidimensionais e axialmente simétricas, foi conduzido por Pera & Gebhart [97]. Um dos resultados deste estudo está mostrado na Fig. 4.9. Esta figura mostra um estudo por meio da técnica de interferometria, da interação entre plumas térmicas causadas por duas fontes lineares horizontais, com variações do espaçamento horizontal entre as fontes. As fontes são simuladas por dois fios horizontais de pequeno diâmetro e 180 mm de comprimento. A aceleração do fluido no canal formado pelas duas esteiras provoca uma depressão que faz com que as plumas se aproximem uma da outra. Este tipo de interação entre as plumas origina uma pluma muito mais resistente aos efeitos de perturbação, o que é uma característica desejável em muitos casos. A Fig. 4.10 mostra a continuação deste trabalho, só que neste caso as fontes não são da mesma intensidade. A fonte da direita tem

uma intensidade 25 vezes menor do que a fonte da esquerda. O efeito observado neste caso é uma deflexão da pluma causada pela fonte de menor intensidade em direção à pluma da fonte mais intensa, tendendo juntar-se a esta. O trabalho de Pera & Gebhart considerou ainda a interação entre uma superfície vertical não aquecida e uma pluma bidimensional causada por uma fonte linear horizontal nas proximidades da superfície. Esta situação está mostrada na Fig. 4.11. Pela figura pode-se observar uma súbita deflexão do escoamento na direção da superfície imediatamente à jusante da fonte seguida de um movimento gradual em direção à superfície à medida que a distância à fonte aumenta. Esta deflexão é tão mais acentuada quanto mais próxima a fonte da superfície. O movimento rápido do fluido em direção à superfície pode ser explicado em grande parte pela ação restritiva da superfície à entrada de fluido nesta região, o que provoca uma queda de pressão e a conseqüente deflexão do escoamento em direção à superfície.

Jaluria [69] efetuou um estudo experimental da interação entre uma fonte térmica e uma superfície vertical não aquecida utilizando termopares para a determinação do campo de temperatura. Foram consideradas diversas intensidades da fonte e diferentes espaçamentos entre a fonte e a superfície. Um destes resultados está mostrado na Fig. 4.12. Foi observado que a localização do pico de temperatura desloca-se em direção à superfície vertical, indicando uma deflexão do escoamento em relação à superfície. Pode-se notar que a temperatura da superfície decresce à jusante, bem como a temperatura máxima do escoamento.

O propósito deste capítulo é analisar em uma situação de alinhamento de dois componentes montados em uma superfície vertical o efeito da presença do componente inferior sobre o coeficiente de transferência de calor no componente superior. As geometrias a serem consideradas são tiras e cilindros, que simulam pastilhas e resistores respectivamente.

Já foi mencionado que o mecanismo de interação entre fontes de energia é composto de dois efeitos contrários. Se por um lado a movimentação do fluido causada pelo aquecedor inferior tende a aumentar o coeficiente de transferência de calor no aquecedor superior, por outro lado o pré-aquecimento do fluido a

montante tendo a diminuí-lo. O efeito resultante é função das taxas de energia dissipadas nos aquecedores e do espaçamento entre eles. O propósito deste trabalho é, portanto, relacionar estas variáveis de modo a se conhecer as situações mais favoráveis à transferência de calor.

Para melhor compreender o mecanismo de interação entre os componentes a serem considerados, montados em uma superfície vertical, é conveniente examinar algumas das conclusões, em termos qualitativos, desenvolvidas no Cap. 3. A análise teórica do escoamento laminar resultante de uma fonte linear horizontal sobre uma superfície vertical adiabática considerada no Cap. 3 indica que:

$$u \sim Q_0^{2/5} x^{1/5} \quad (3.75)$$

$$(T_0 - T_\infty) \sim Q_0^{4/5} x^{-2/5} \quad (3.76)$$

Podemos então observar o seguinte:

- a) A velocidade máxima vertical na pluma de parede cresce com a potência um quinto da distância acima da fonte, enquanto o escoamento se mantiver laminar.
- b) A queda de temperatura da superfície é proporcional ao inverso da potência três quintos da distância acima da fonte.
- c) A velocidade máxima é proporcional à potência dois quintos da intensidade da fonte enquanto que a temperatura da superfície é proporcional à potência quatro quintos da intensidade da fonte.

Embora desenvolvidas para uma fonte linear sobre uma superfície vertical adiabática, estas observações permitem tirar algumas conclusões importantes. Para um escoamento laminar, à medida que a distância à fonte aumenta, aumenta a velocidade máxima enquanto a temperatura da superfície diminui. Estes dois efeitos

contribuem para um aumento do número de Nusselt em uma fonte posicionada a jusante da fonte considerada. Desta forma, maiores espaçamentos entre as fontes auxiliam o processo de transferência de calor. Obviamente deve existir um espaçamento ótimo onde estes efeitos ainda são sentidos. Com relação à potência dissipada na fonte inferior, ela tem um efeito maior sobre a temperatura do que sobre a velocidade, o que é prejudicial ao coeficiente de transferência de calor de uma fonte colocada a jusante. Assim, para maximizar o processo de transferência de calor entre duas fontes alinhadas, a energia dissipada na fonte inferior deve ser menor do que a dissipada na fonte superior.

4.5. ANÁLISE EXPERIMENTAL DE ALGUMAS INTERAÇÕES

O objetivo deste capítulo é estudar em uma configuração onde existem dois componentes dissipando energia montados em uma superfície vertical com um colocado na esteira térmica do outro, o efeito de presença do componente inferior sobre o coeficiente de transferência de calor no componente superior. Este estudo não pretende determinar os coeficientes de transferência de calor em cada elemento nestas situações pois estas informações podem ser encontradas nas referências já mencionadas, pelo menos para o componente inferior na maioria dos casos. O que se pretende avaliar aqui é a relação entre os coeficientes de transferência de calor superior e inferior, em função do espaçamento entre os componentes e das taxas de dissipação de energia. A partir destas relações o coeficiente de transferência de calor do componente superior pode ser calculado em função do valor do coeficiente de transferência de calor do componente inferior. Os coeficientes de transferência de calor são relacionados em termos dos valores do número de Nusselt. As geometrias a serem consideradas são tiras e cilindros, que simulam pastilhas e resistores. Os resultados foram obtidos em água e ar.

4.5.1. Montagem Experimental

Neste trabalho foram utilizados basicamente três tipos de seções de teste, um par de tiras sobre uma superfície vertical e um par de cilindros de pequeno diâmetro sobre uma superfície vertical, tanto adjacentes à superfície quanto afastados da superfície de uma distância igual ao diâmetro.

A Fig. 4.13 mostra as seções de teste do tipo tira. A largura W dos aquecedores mostrados nestas seções é 50mm e a altura H é 5mm, ou seja, uma relação $W/H=10$. Para esta relação o comportamento do escoamento é aproximadamente bidimensional. Uma placa de circuito impresso com uma película de cobre sobre uma das superfícies foi a base para a construção das seções de teste. A película de cobre no centro da placa foi removida com o auxílio de uma lâmina para abrir o espaço necessário para a montagem dos aquecedores. Os aquecedores do tipo tira, que simulam pastilhas, foram construídos a partir de uma folha de níquel-cromo de 12,7 μ m de espessura. Para fixar o aquecedor sobre a placa de circuito foi utilizada a resina M610 (Measurements Group Inc.). A tira de níquel-cromo (aquecedor) foi soldada com estanho sobre a película de cobre por meio de uma folha de latão de 25,4 μ m de espessura para facilitar as conexões elétricas. Sobre as peças de latão foram soldados com estanho fios de cobre de bitola AWG32 para a leitura da queda de tensão ao longo do aquecedor. Um único termopar cobre-constantan de bitola AWG32 foi colocado no ponto médio na parte traseira dos aquecedores que simulam pastilhas. O ponto médio do aquecedor foi escolhido por ser representativo do desempenho térmico de uma pastilha. Uma placa de plástico de baixa condutividade térmica (plexiglass) de 25,4mm de espessura foi colada na parte traseira da placa de circuito para diminuir as perdas por condução térmica. Foi construída uma seção de teste com o aquecedor posicionado no centro e duas seções de teste com o aquecedor posicionado nas extremidades.

A seção de teste com o aquecedor cilíndrico de aço inoxidável está mostrada na Fig. 4.14 onde o cilindro é adjacente à superfície. O diâmetro externo D do cilindro, que é oco, é 2mm e o comprimento efetivo do aquecedor W é 50mm. Portanto, a relação entre o comprimento e o diâmetro é $W/D=25$, uma boa aproximação

para escoamento bidimensional. Novamente aqui uma placa de circuito foi a base para a construção da seção de teste, com a película de cobre no centro da placa sendo removida para permitir a montagem do cilindro. As extremidades do cilindro foram soldadas com estanho sobre a película de cobre com o auxílio de uma folha de latão de 25,4µm de espessura para permitir as conexões elétricas. Sobre as peças de latão foram soldados com estanho fios de cobre para a leitura da queda de tensão ao longo do aquecedor. Um termopar cobre-constantan foi introduzido no interior do cilindro no ponto médio do seu comprimento efetivo. As extremidades do cilindro foram seladas com epóxi. Uma placa de plástico de 25,4mm de espessura foi colada na parte traseira da placa de circuito para reduzir a transferência de calor por condução nesta região. Foram construídas duas seções de teste idênticas à ilustrada na figura.

Foram construídas ainda duas seções de teste, não mostradas, semelhantes à da Fig. 4.14, porém com os aquecedores cilíndricos afastados da superfície de uma distância igual ao diâmetro.

A Fig. 4.15 ilustra a montagem das seções de teste de aquecedores de tira juntamente com os espaçadores. Os espaçadores são peças de placa de circuito, de mesmas dimensões das seções de teste (15mm de altura e 180mm de largura), onde toda a película de cobre foi removida. Na superfície traseira dos espaçadores também foi colada uma placa de plástico isolante de 25,4mm de espessura. Arranjando-se apropriadamente as seções de teste juntamente com os espaçadores foi possível variar a relação L/H desde 1 até 8, onde L é a distância entre os aquecedores. A montagem final simula um arranjo vertical da pastilha alinhadas com a superfície. As duas seções de teste foram instrumentadas separadamente por meio de um conjunto de equipamentos semelhante ao ilustrado na Fig. 3.9. A montagem das seções de teste de aquecedores cilíndricos, tanto os adjacentes à superfície quanto os afastados, é semelhante à da Fig. 4.15. Arranjos das seções de teste juntamente com os espaçadores tornaram possível variar a relação L/D desde 5 até 25 em intervalos iguais a 5, onde aqui L é a distância entre centros dos cilindros.

A energia total dissipada nos aquecedores é calculada pelo produto da corrente pela queda de tensão. Entretanto, nem toda esta energia é transferida ao fluido por convecção natural. A superfície traseira dos aquecedores não é perfeitamente isolada e, portanto, geralmente ocorre uma transferência de calor por condução para o substrato. Uma fração da energia total dissipada no aquecedor é também transferida por radiação para as paredes do recipiente que contém o fluido.

Como já foi mencionado anteriormente, o objetivo deste trabalho é avaliar a relação entre os valores do número de Nusselt entre os aquecedores superior e inferior, e portanto as perdas de calor por condução para o substrato e por radiação para o recipiente do fluido terão um efeito muito pequeno sobre esta relação. Entretanto estas perdas foram calculadas para cada medida efetuada e algumas correções foram feitas quando necessárias.

Para os aquecedores de tira, as perdas de calor por condução para o substrato foram estimadas de acordo com a solução analítica desenvolvida por Carslaw & Jaeger [29]:

$$q_c'' = \frac{\pi k_p (T_o - T_\infty) / 2}{W \sinh^{-1}(H/W) + H \sinh^{-1}(W/H)} \quad (4.7)$$

onde q_c'' é o fluxo de calor por condução para a parte traseira do aquecedor, k_p é a condutividade térmica combinada da placa de circuito e do plástico isolante, H e W as dimensões do aquecedor, T_o a temperatura do aquecedor indicada pelo termopar e T_∞ a temperatura do fluido não perturbado. O cálculo do calor transferido por radiação neste caso não apresenta maiores problemas.

Para os aquecedores cilíndricos, como as áreas de contato com a superfície são muito pequenas, a fração de energia perdida por condução para o substrato é muito menor do que no caso dos aquecedores de tira. Para este caso a transferência de calor por radiação é avaliada por meio de um método aproximado descrito por Marsters no apêndice da referência [89]. De acordo com este método, como a troca direta de energia por radiação entre os

cilindros é muito pequena, admite-se que os cilindros estejam em equilíbrio, do ponto de vista da radiação. Nestas circunstâncias a única troca líquida de calor por radiação é com as paredes do recipiente do fluido, com a superfície vertical comportando-se como uma superfície reirradiante.

As experiências com água foram realizadas no mesmo tanque de água mostrado na Fig. 3.10. Para as medidas em ar, devido ao fato que as plumas térmicas podem ser facilmente afetadas por correntes de ar na sala, o conjunto montado das seções de teste foi cercado pelos lados por paredes de papelão tomando-se o cuidado de não bloquear a entrada de ar pela parte inferior.

A Fig. 4.16 apresenta um resumo das três situações de seções de teste utilizadas neste trabalho, para identificação.

4.5.2. Resultados Experimentais

Os resultados para os aquecedores de tira em ar estão mostrados na Fig. 4.17 onde as linhas tracejadas representam as curvas que melhor acomodam os pontos experimentais. Nesta figura também estão mostrados para comparação, os resultados numéricos obtidos por Jaluria [67] para uma configuração semelhante de escoamento bidimensional, usando as aproximações de camada limite. Nota-se pela análise desta figura que os resultados numéricos e experimentais apresentam boa concordância, exceto quando os aquecedores estão muito próximos. Além disso, os resultados experimentais ficaram sempre abaixo dos resultados numéricos. Uma possível explicação para este comportamento é que os resultados numéricos foram obtidos baseados nas aproximações de camada limite que desprezam a condução de calor longitudinal no fluido, um efeito que de fato está presente no escoamento junto a fontes localizadas de energia e torna-se mais significativo quando os aquecedores estão muito próximos. Este fato aparentemente explica as discrepâncias encontradas quando a distância entre os aquecedores é pequena. Estas curvas representam a relação entre os valores do número de Nusselt entre os aquecedores superior e inferior em função da energia dissipada nos aquecedores e o espaça

mento entre eles. Para uma determinada relação entre as energias dissipadas nos aquecedores, o comportamento da curva é geralmente o de uma subida no início em direção a um valor máximo à medida que o espaçamento entre os aquecedores aumenta seguido de um movimento assintótico em direção a um valor constante. Quando ambos os aquecedores dissipam a mesma quantidade de energia, este valor constante é, obviamente, igual à unidade.

Na Fig. 4.18 estão representados os resultados experimentais para aquecedores de tira em água. Nesta figura e nas seguintes, a linha tracejada representa a curva que melhor acomoda os pontos experimentais.

As Figs. 4.19 e 4.20 mostram os resultados experimentais para os aquecedores cilíndricos adjacentes à superfície, para ar e água, respectivamente. Aqui o número de Prandtl tem uma influência mais pronunciada sobre o comportamento das curvas. O valor do número de Prandtl para a água é cerca de dez vezes maior do que o valor do número de Prandtl para o ar. Os resultados obtidos no ar mostram que para $L/D=25$, o maior espaçamento observado, as curvas tendem rapidamente para os valores assintóticos enquanto que para a água as curvas ainda estão na ascendente.

Os resultados experimentais para os cilindros afastados da superfície estão ilustrados nas Figs. 4.21 e 4.22, para ar e água, respectivamente. Novamente é possível observar a influência do valor do número de Prandtl sobre o comportamento das curvas, de modo semelhante ao caso dos cilindros adjacentes à superfície. Apenas a título de comparação, é conveniente aqui considerar o trabalho de Eckert & Soehngen [39] mencionado anteriormente. Eles observam que para dois tubos cilíndricos horizontais em ar o número de Nusselt do cilindro superior era 87 por cento do valor do cilindro inferior. Se observarmos atentamente a Fig. 4.21, que apresenta os resultados de dois cilindros horizontais em ar, a curva para $Q_s/Q_i=1$ tem um valor extrapolado próximo de 0,87 para $L/D=2$ que foi o passo usado em [39].

Nas Figs. 4.17 a 4.22, $(Nu)_s$ e $(Nu)_i$ são os valores do número de Nusselt para os aquecedores superior e inferior, respectivamente, e Q_s e Q_i representam as energias transferidas por convecção natural para o fluido pelos aquecedores superior e inferior, respectivamente.

4.5.3. Conclusões

Basicamente, o que as experiências revelam de mais importante é que na montagem de dois componentes alinhados sobre uma superfície, o que dissipa a maior quantidade de energia deve ficar no topo do arranjo. Além disso, se os componentes forem resistências elétricas de formato cilíndrico, em geral o efeito de resfriamento é mais efetivo se estes componentes forem montados afastados da superfície. Por exemplo, para o ar e $Q_s/Q_i=1$ na configuração de cilindros adjacentes a curva não chega a atingir um pico, tendendo diretamente para o valor assintótico igual a unidade para grandes espaçamentos. Quando os cilindros estão afastados da superfície, para a mesma situação de $Q_s/Q_i=1$ a curva passa por um valor de pico maior que a unidade.

Por meio de um arranjo adequado dos componentes eletrônicos, a presença de um componente abaixo do outro pode, de fato, em muitas circunstâncias, aumentar o coeficiente de transferência de calor do componente à jusante.

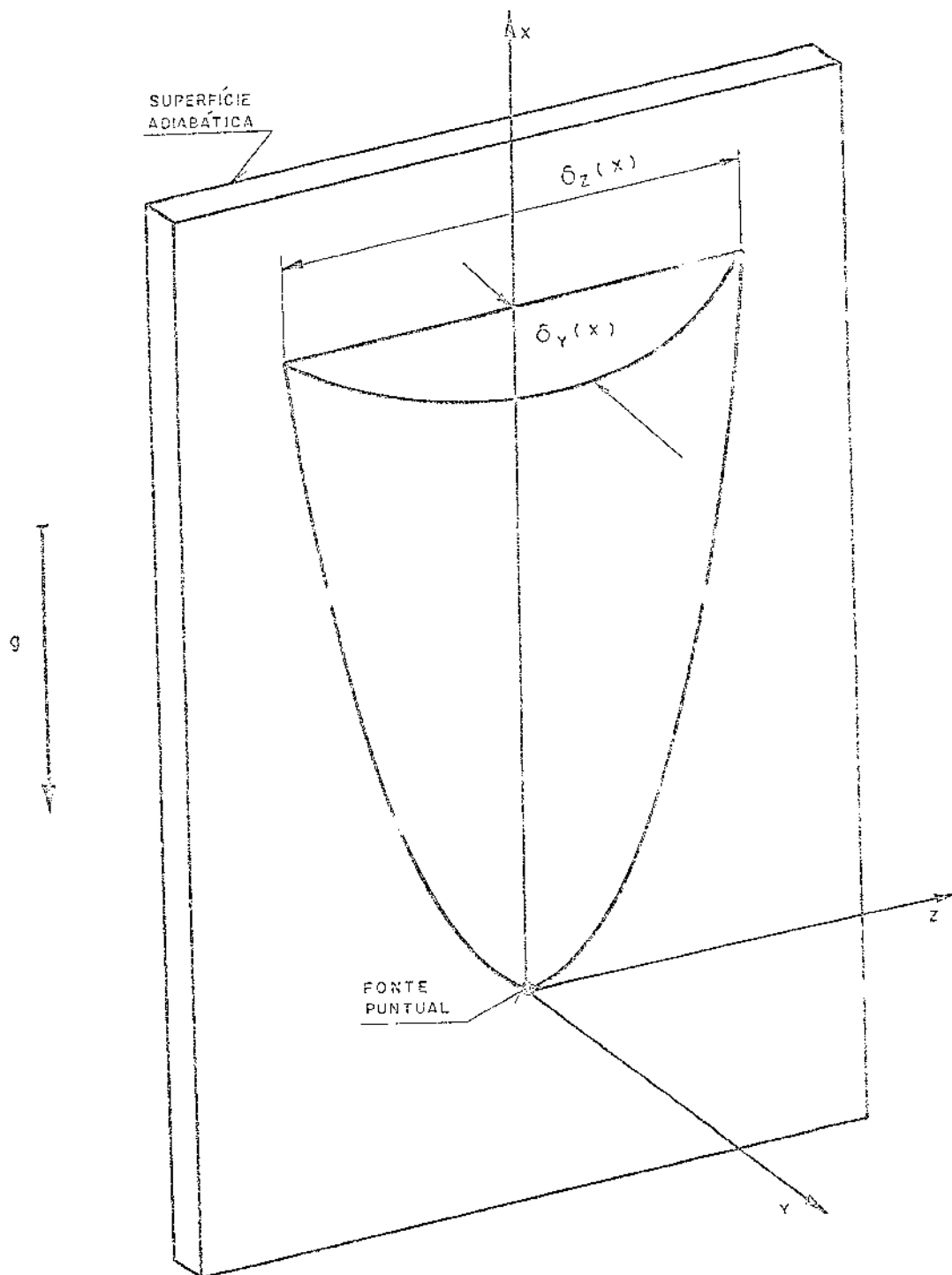


Figura 4.1 - Escoamento resultante de uma fonte concentrada de calor localizada sobre uma superfície vertical adiabática.

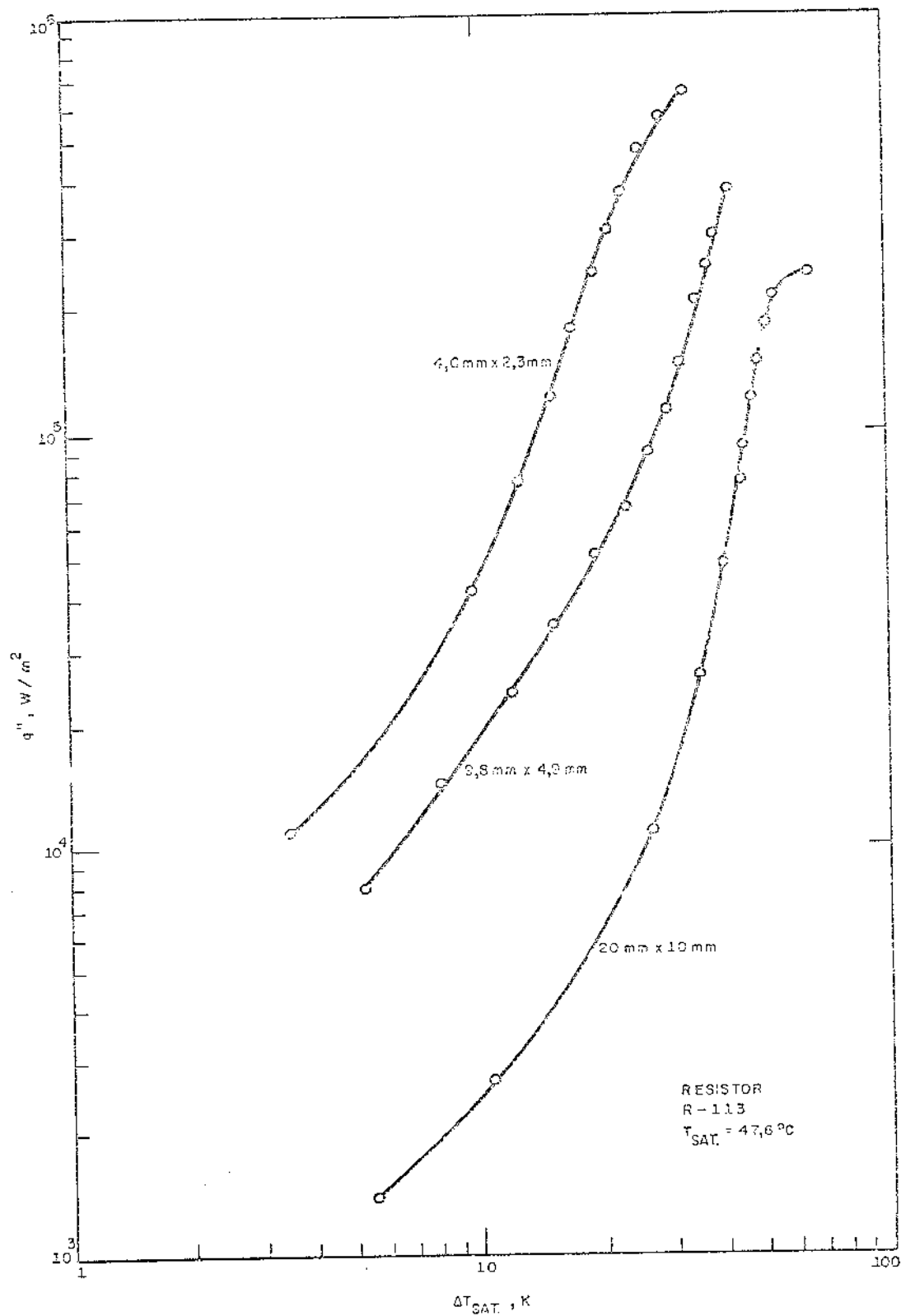


Figura 4.2 - Curvas de ebulição de Baker [10].

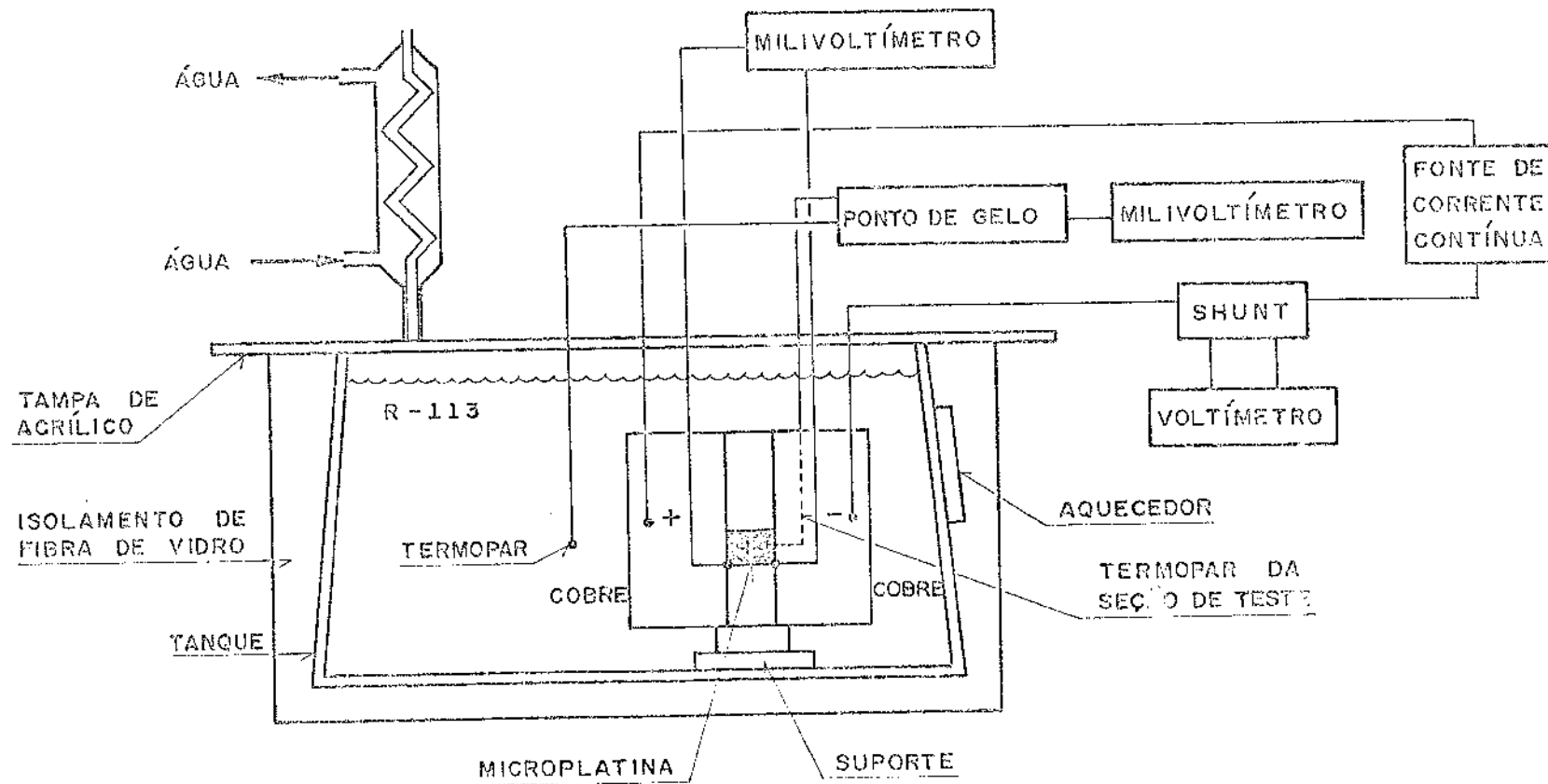


Figura 4.3 - Montagem experimental de Park & Bergles [96].

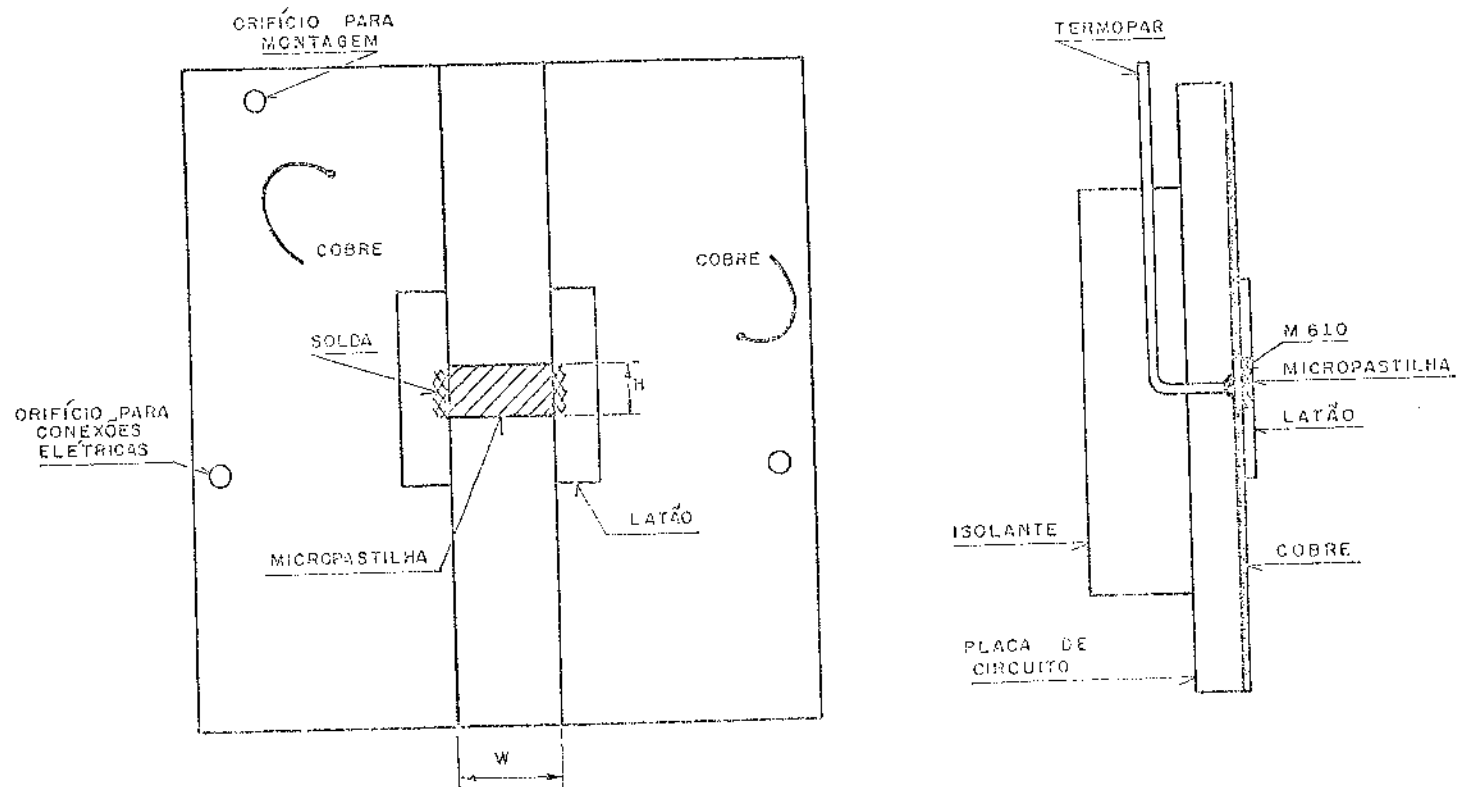


Figura 4.4 - Detalhes da seção de teste de Park & Bergles [96].

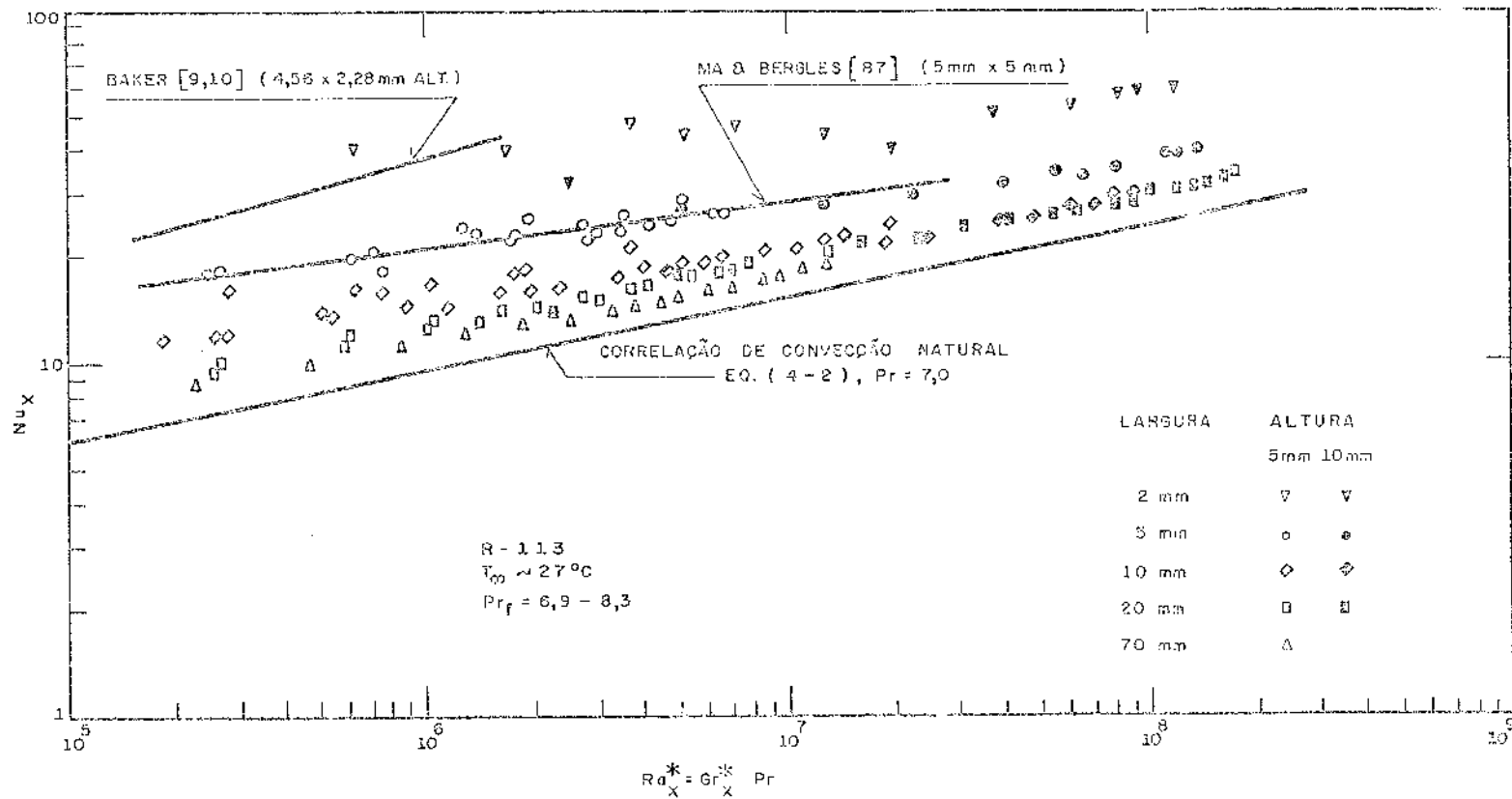


Figura 4.5 - Resultados experimentais de convecção natural em R113 para seção de teste de várias dimensões, obtidos por Park & Bergles [96].

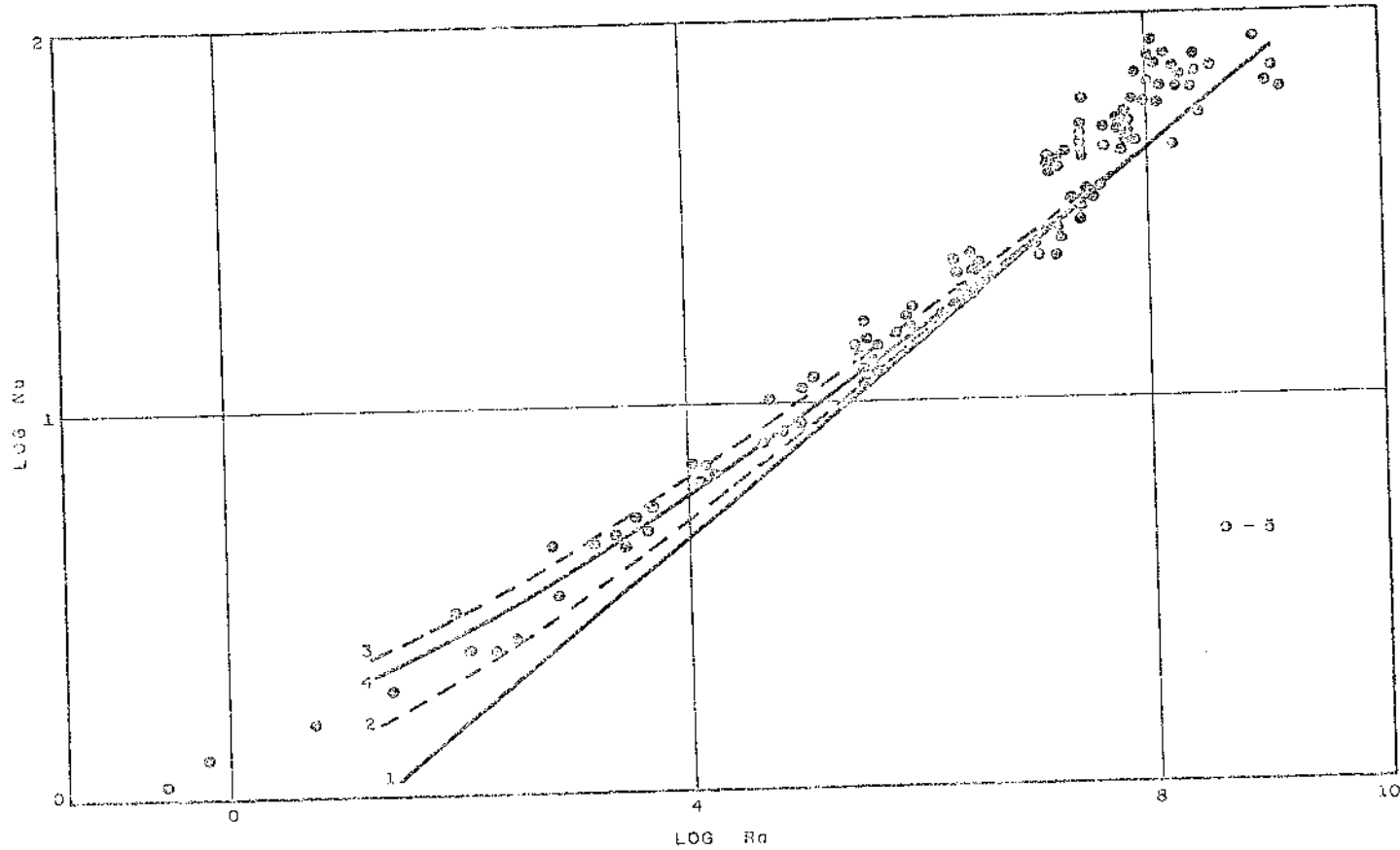


Figura 4.7 - Comparação entre resultados teóricos e experimentais baseados no coeficiente médio de transferência de calor: (1) teoria da camada limite, (2) considerando o escoamento externo, (3) considerando os efeitos da borda de ataque, (4) considerando os efeitos da borda de fuga e da esteira, (5) experimentais [40]. (Reproduzido de [88].)

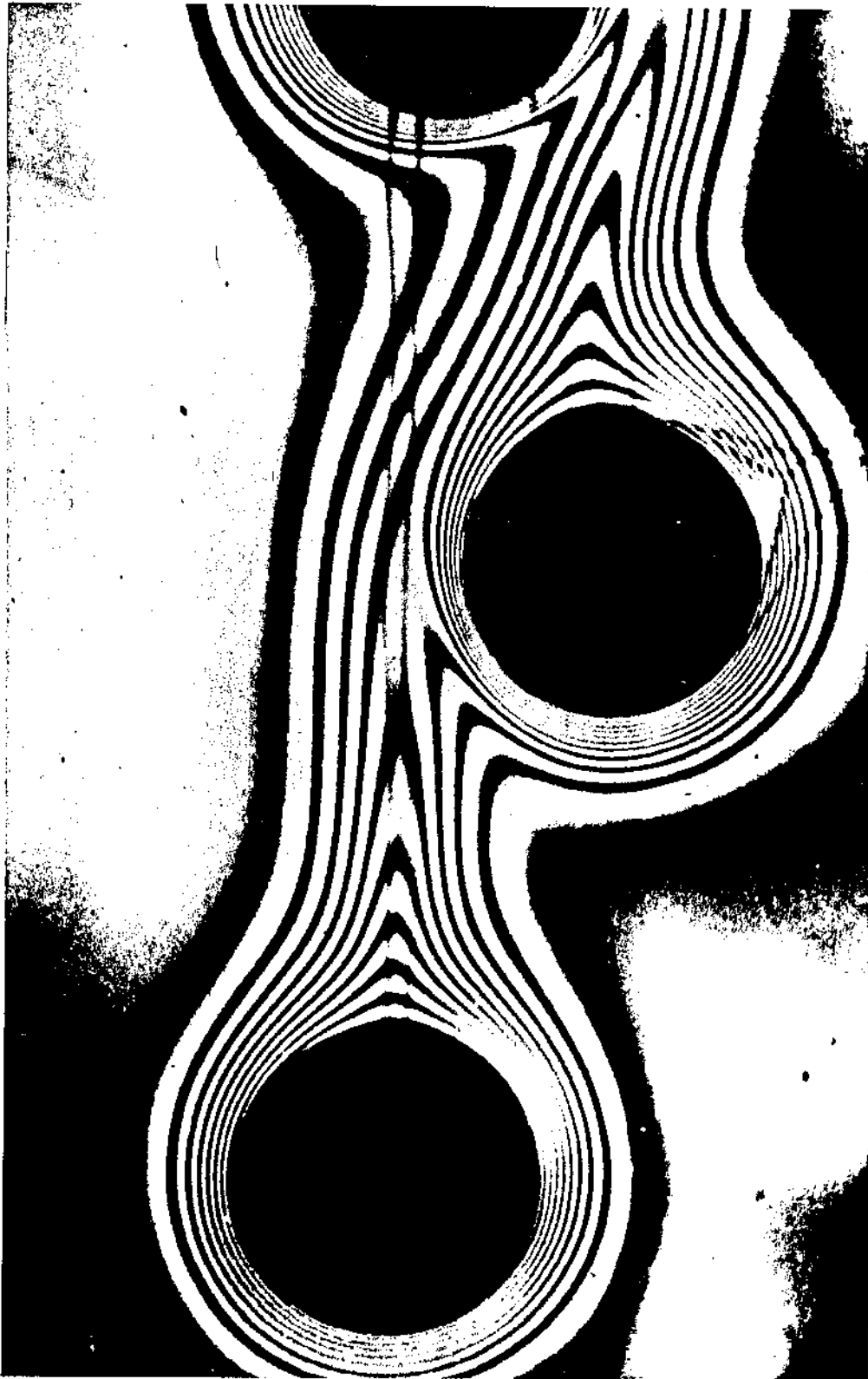


Figura 4.8 - Convecção natural em três cilindros horizontais.
(Reproduzido de [39].)

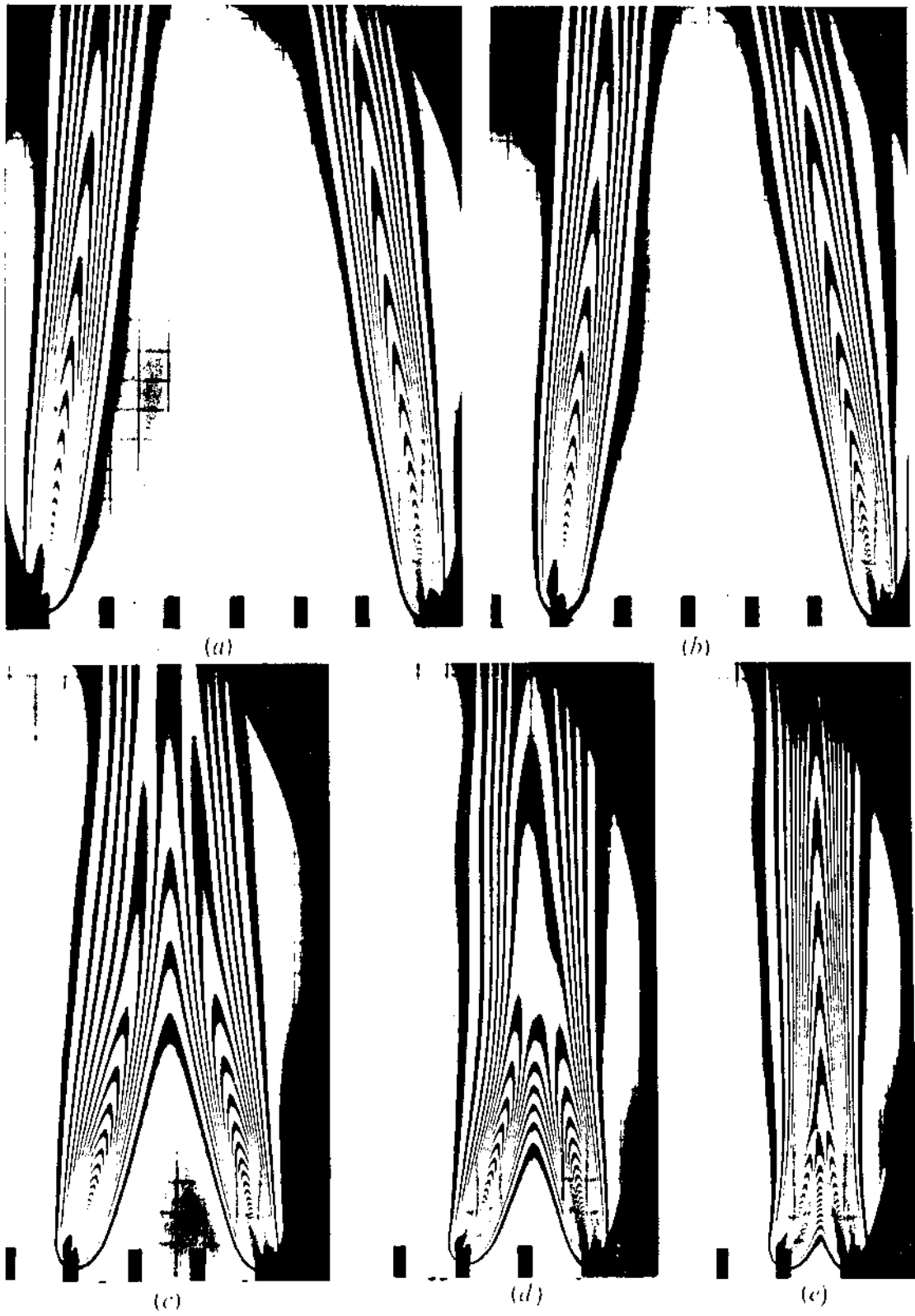


Figura 4.9 - Interações entre plumas de fontes lineares horizontais de intensidades iguais (Reproduzido de [97].)

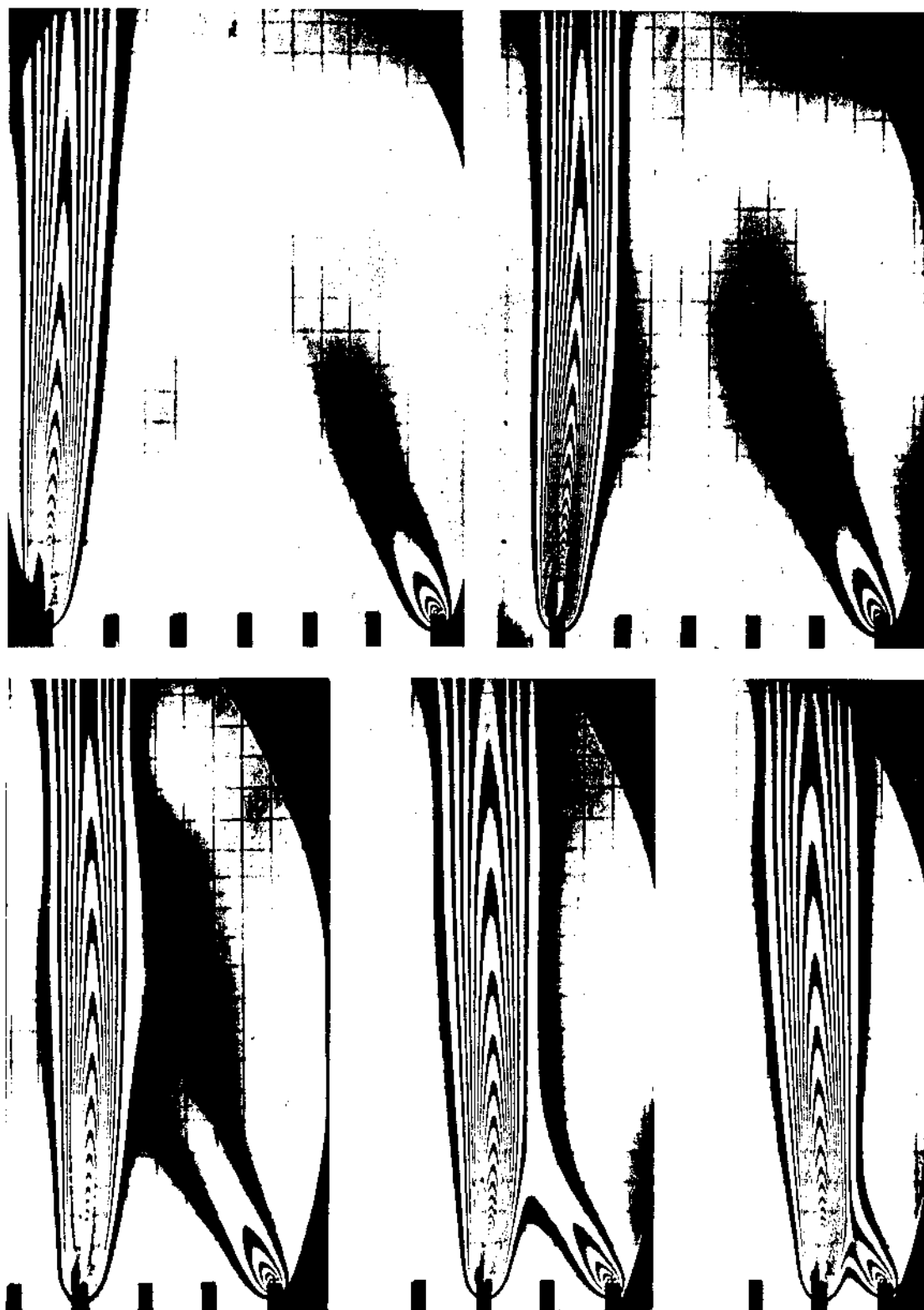


Figura 4.10 - Interações entre plumas de fontes lineares horizontais de intensidades diferentes; a fonte à direita tem intensidade 25 vezes menor do que a fonte à esquerda. (Reproduzido de [97].)

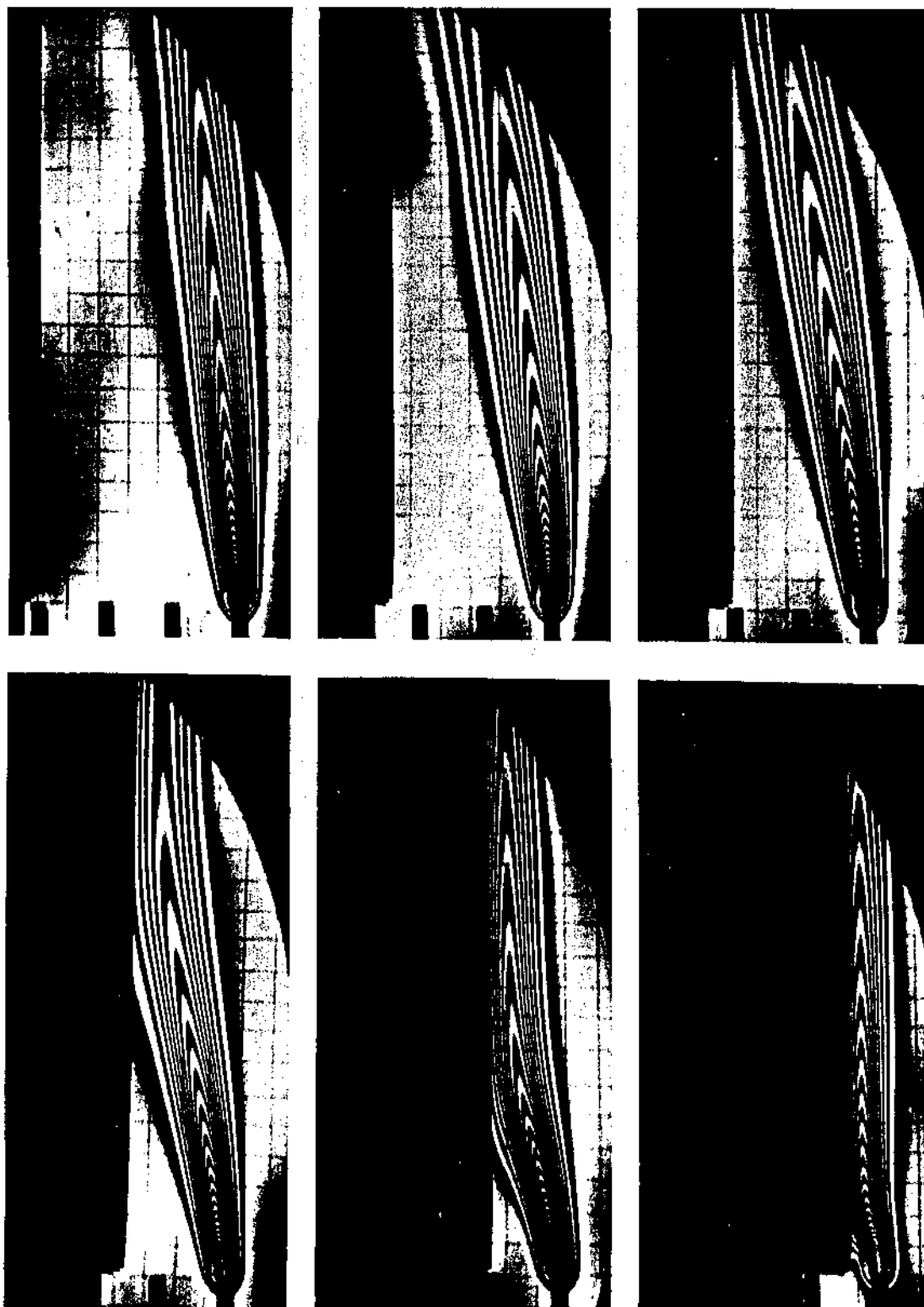


Figura 4.11 - Interações entre uma pluma de fonte linear horizontal e uma parede vertical. (Reproduzido de [97].)

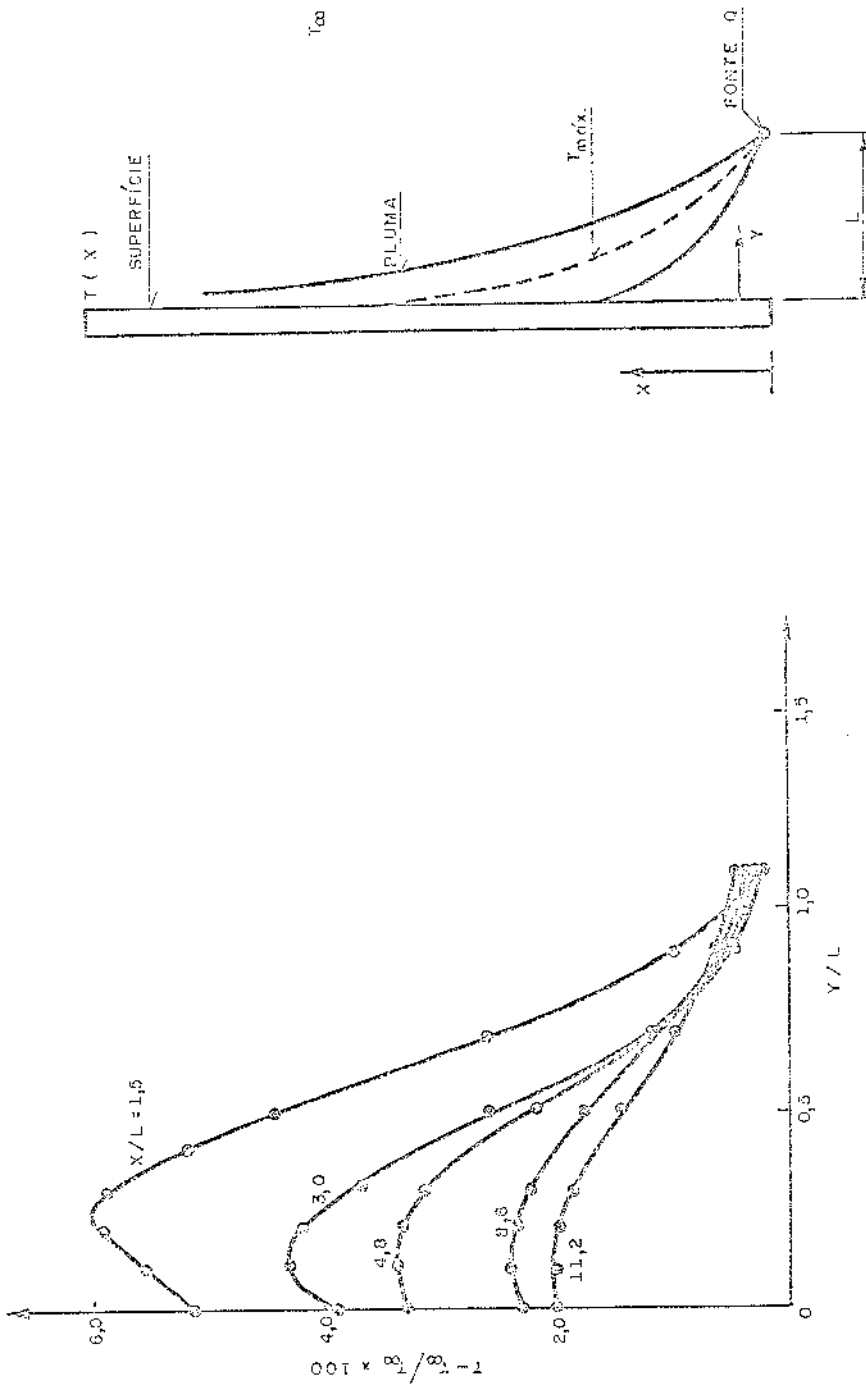


Figura 4.12 - Perfis de temperatura obtidos por Jaluria [69] no sistema de coordenadas mostrado, para $L=10$ mm e $Q=6,7$ W/a.

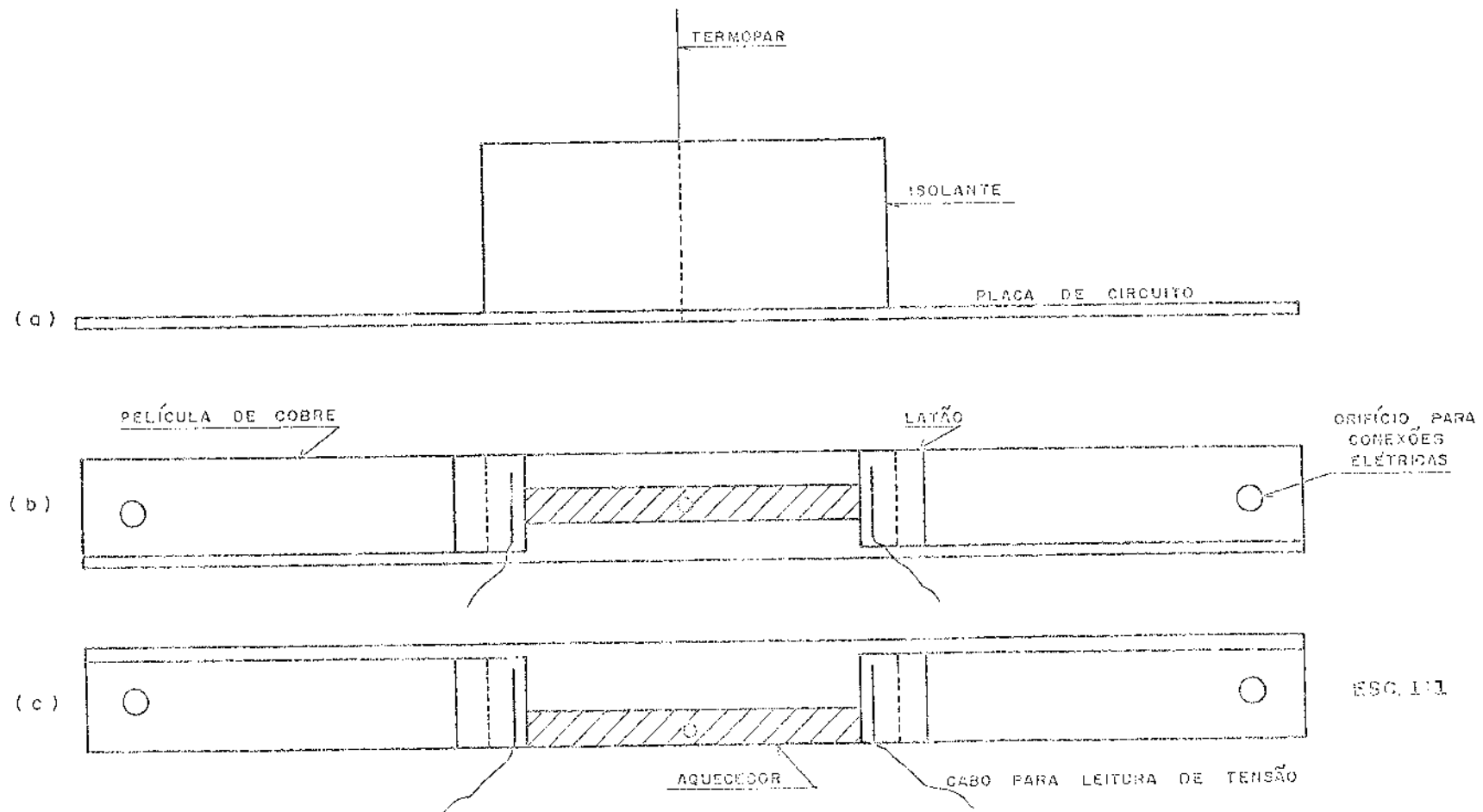


Figura 4.13 - Duas seções de teste com aquecedores de tira utilizadas nas experiências.
 (a) vista de topo das seções de teste; (b) seção do teste com o aquecedor
 posicionado no centro; (c) seção de teste com o aquecedor posicionado na
 extremidade.

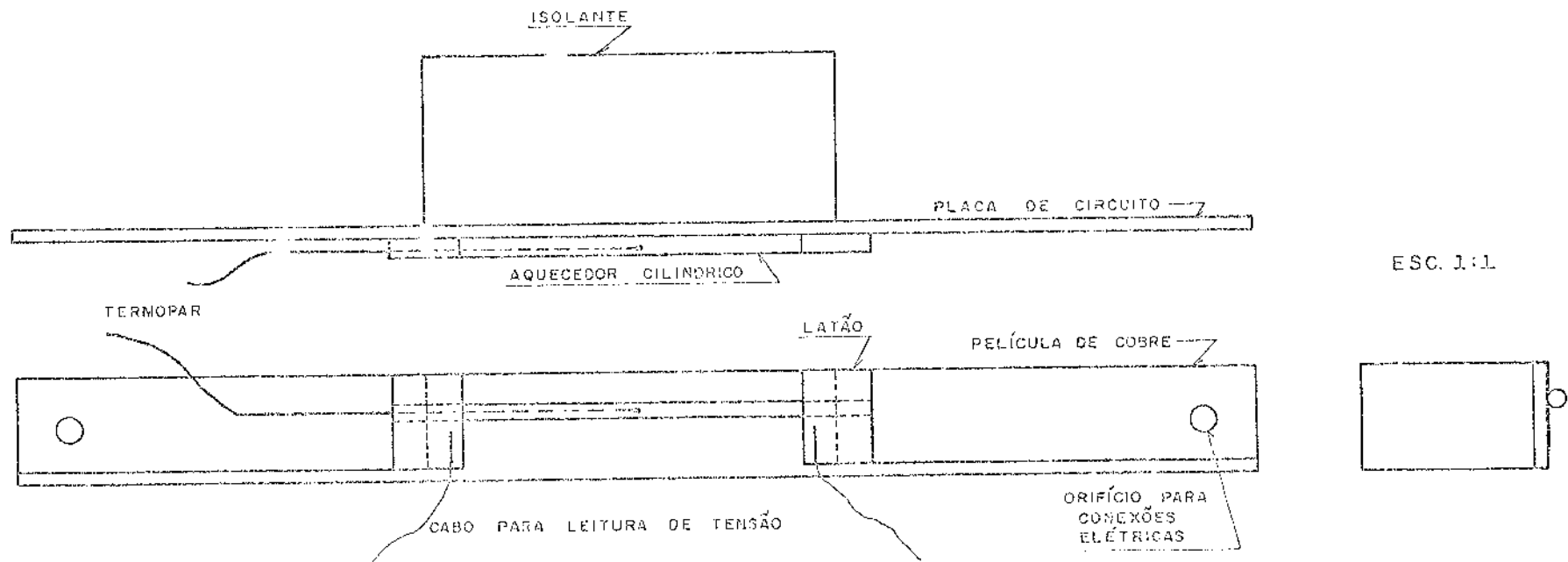


Figura 4.14 - Três vistas da seção de teste com o aquecedor cilíndrico adjacente à superfície utilizada nas experiências.

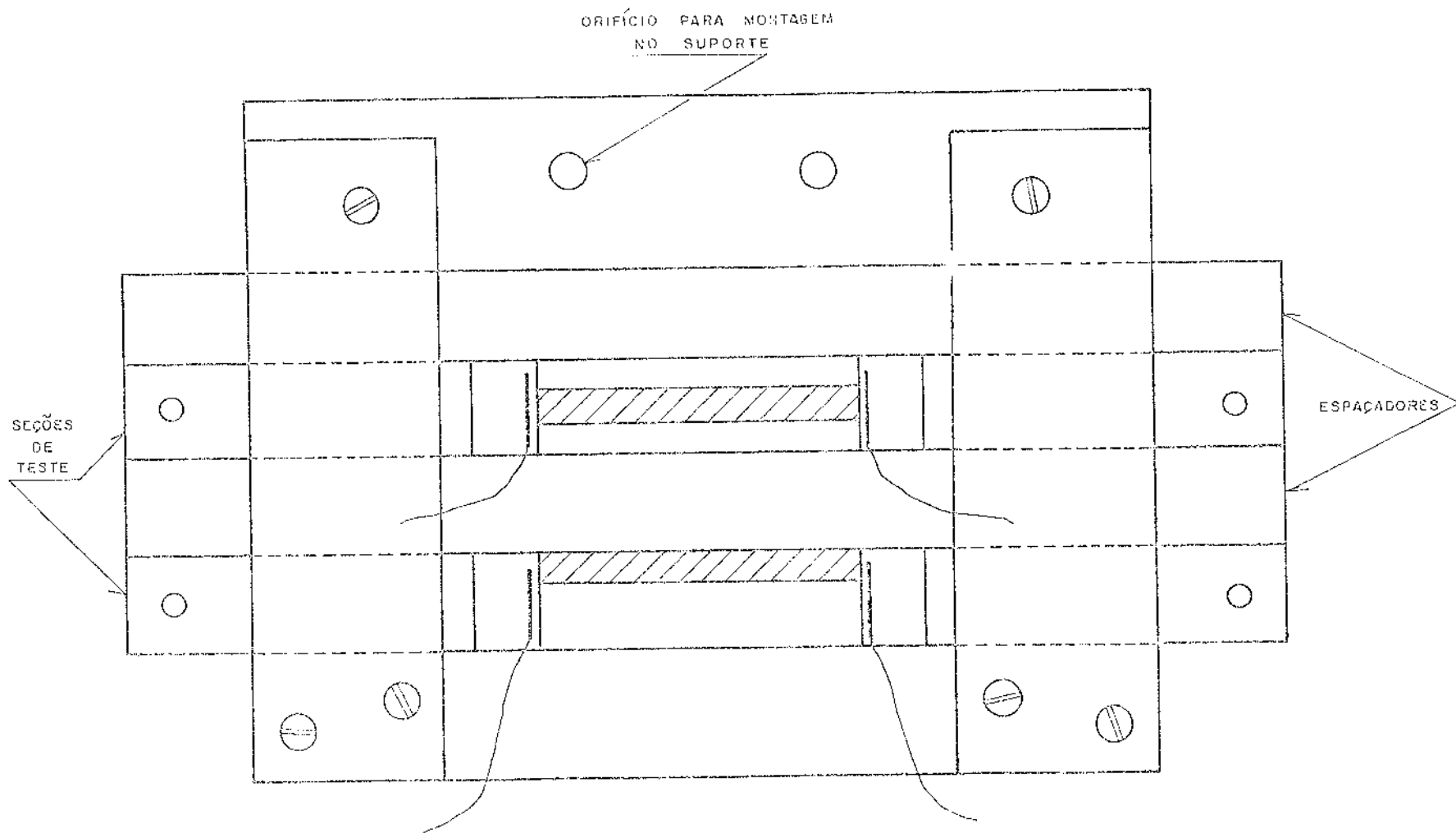


Figura 4.15 - Conjunto da montagem das seções de teste.

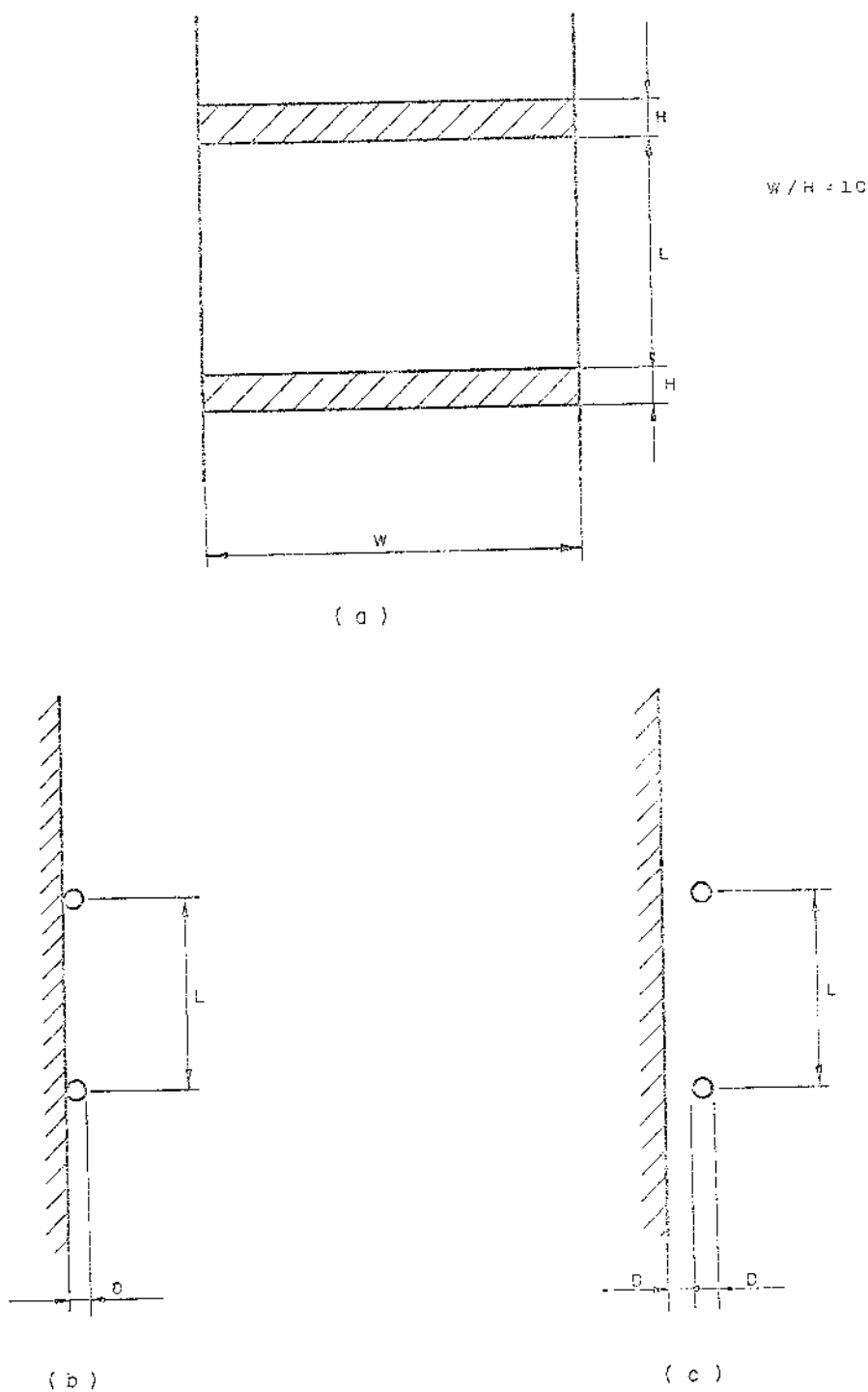


Figura 4.16 - Seções de teste utilizadas nesta análise:
 (a) aquecedores do tipo tira; (b) aquecedores cilíndricos adjacentes à superfície; (c) aquecedores cilíndricos afastados da superfície.

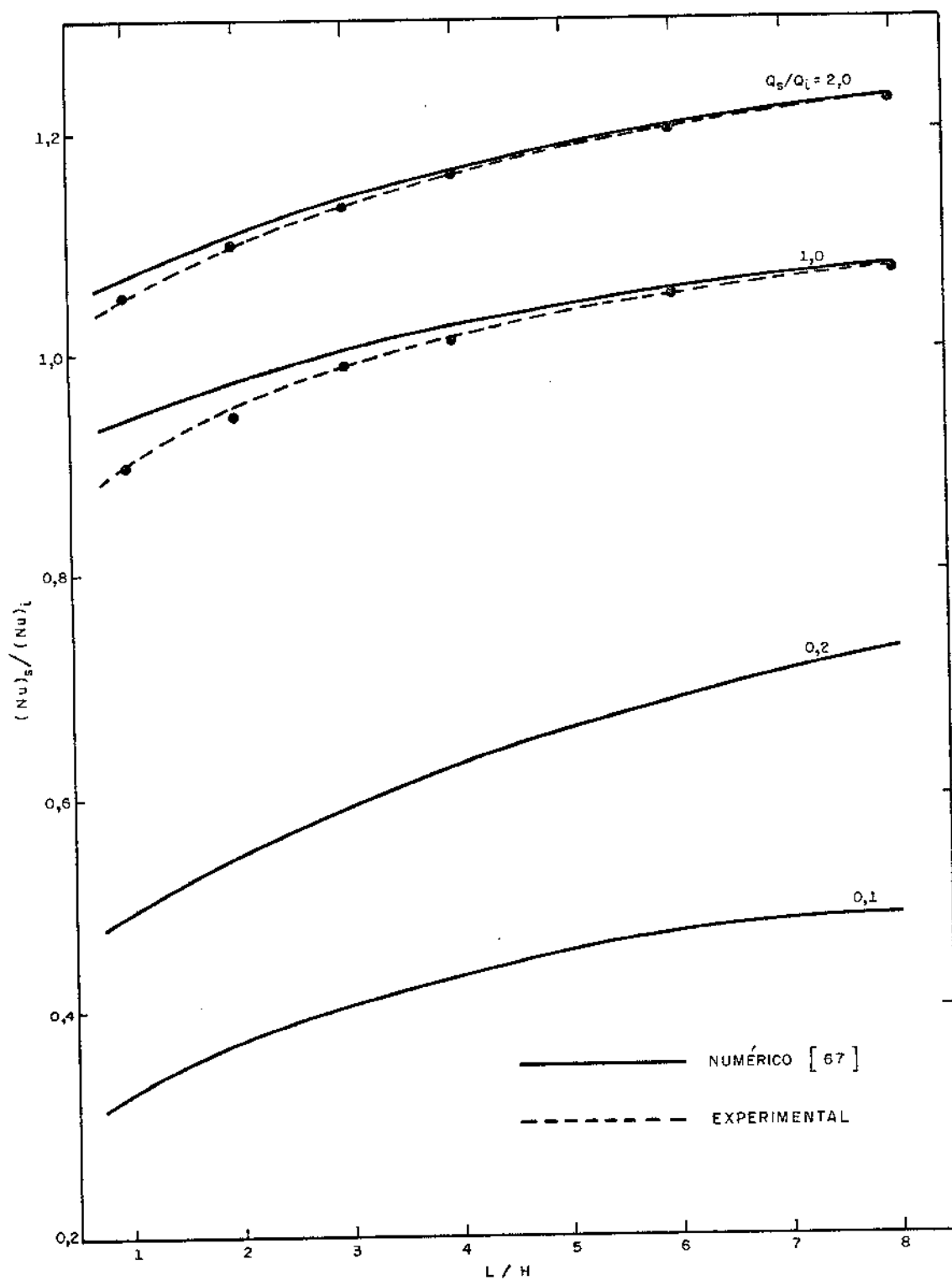


Figura 4.17 - Resultados experimentais para os aquecedores do tipo tira em ar comparados aos resultados numéricos obtidos por Jaluria [67] com as aproximações de camada limite.

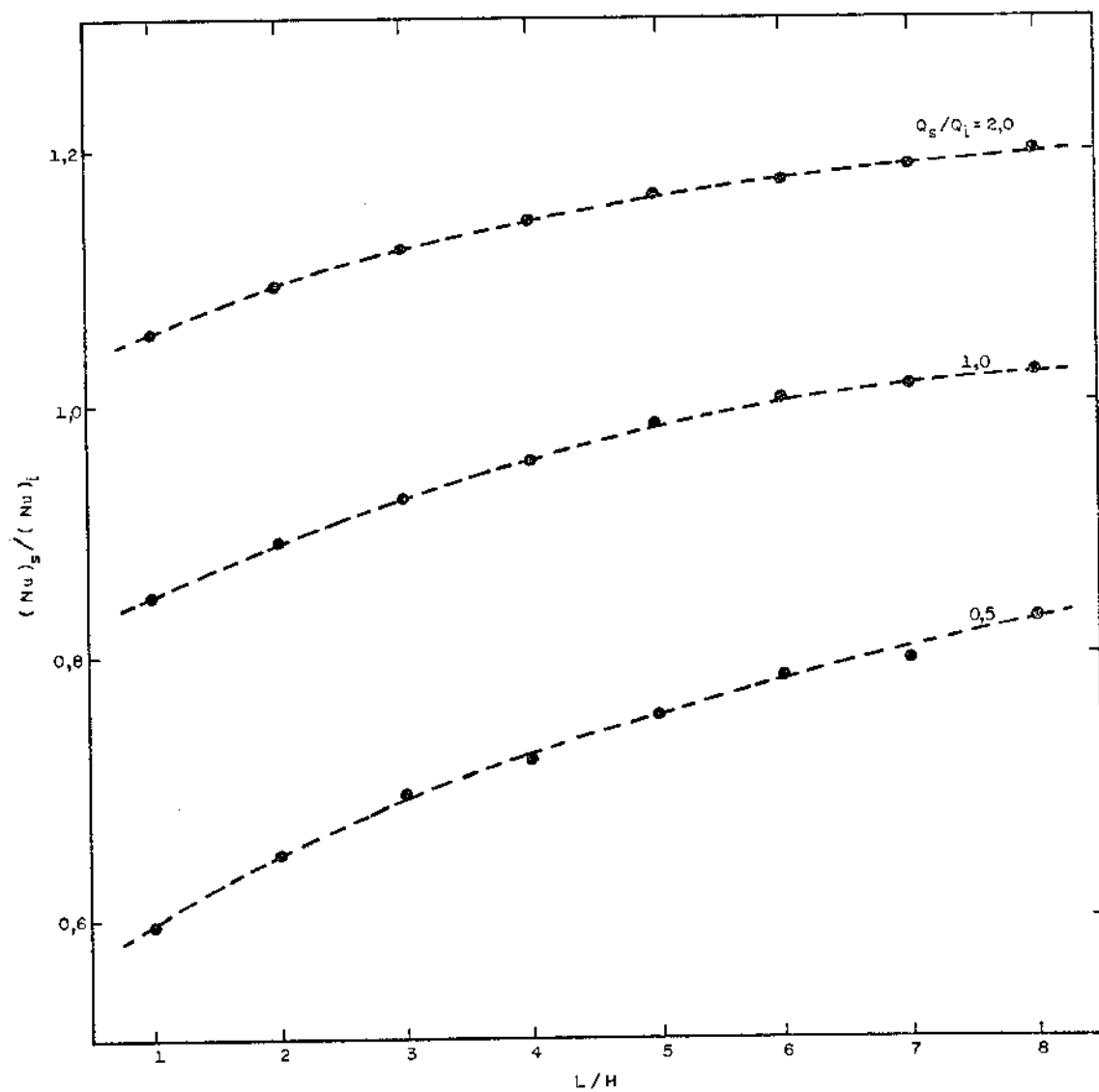


Figura 4.18 - Resultados experimentais para os aquecedores do tipo tira em água.

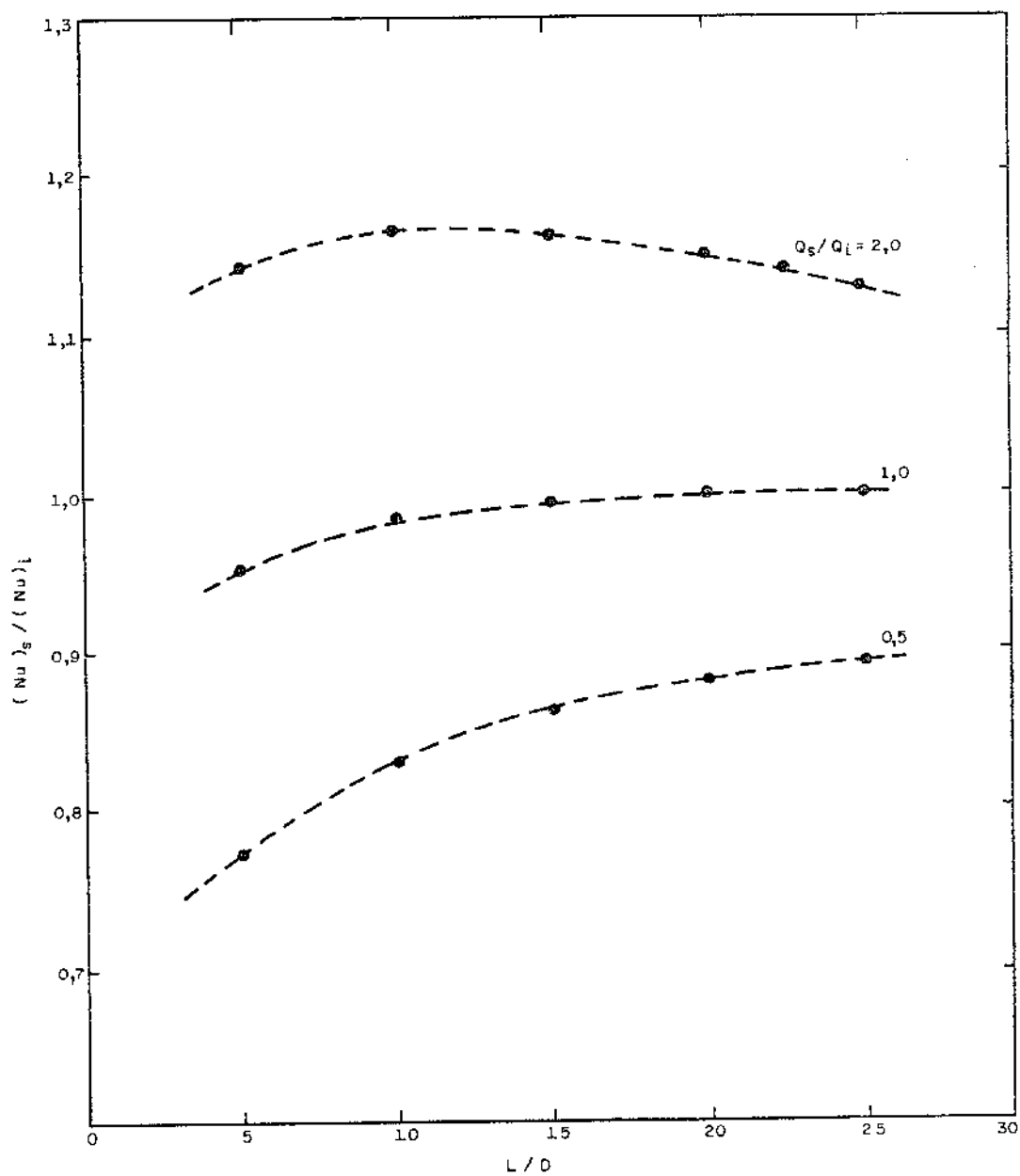


Figura 4.19 - Resultados experimentais para os aquecedores cilíndricos adjacentes à superfície em ar.

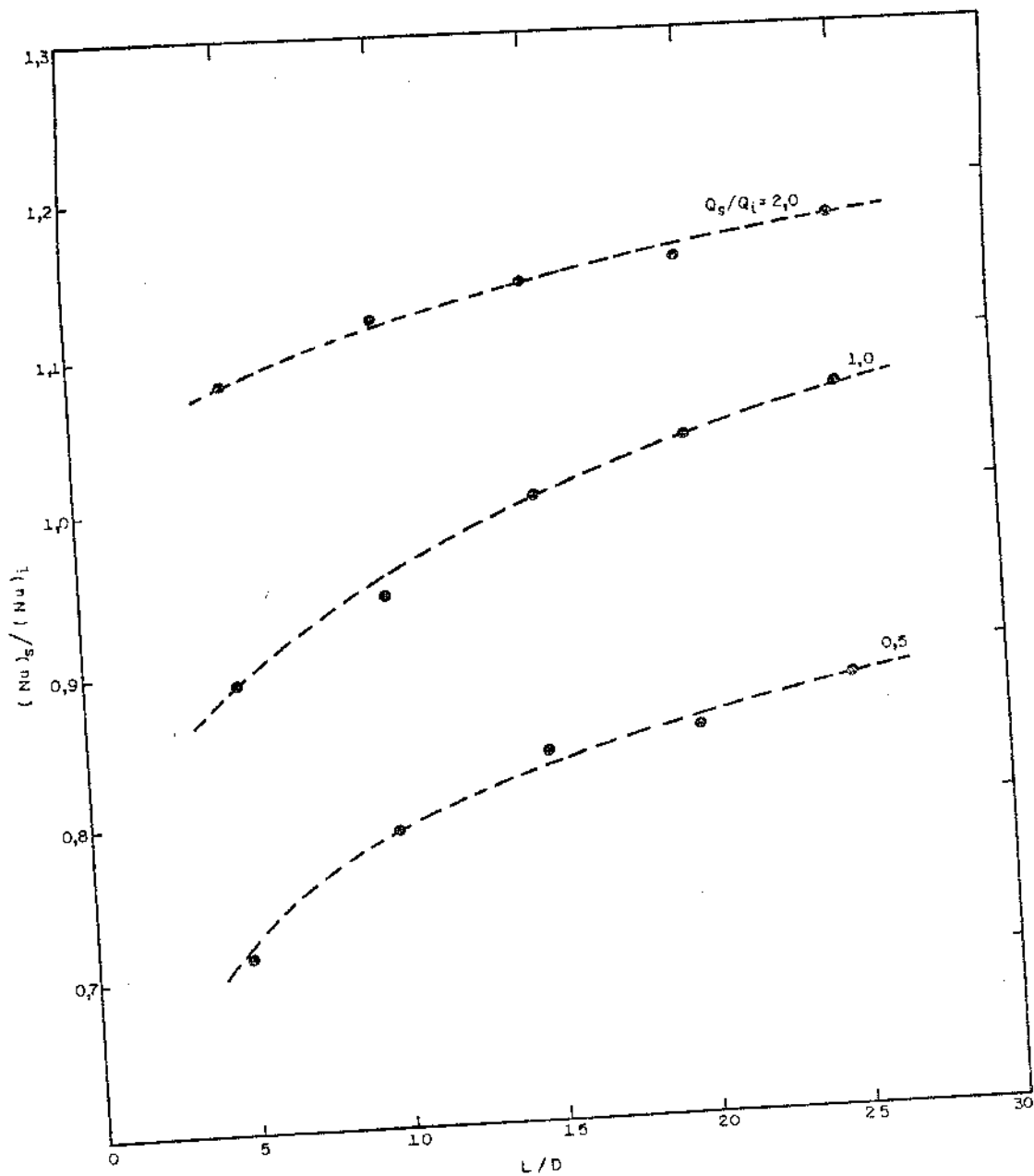


Figura 4.20 - Resultados experimentais para os aquecedores cilíndricos adjacentes à superfície em água.

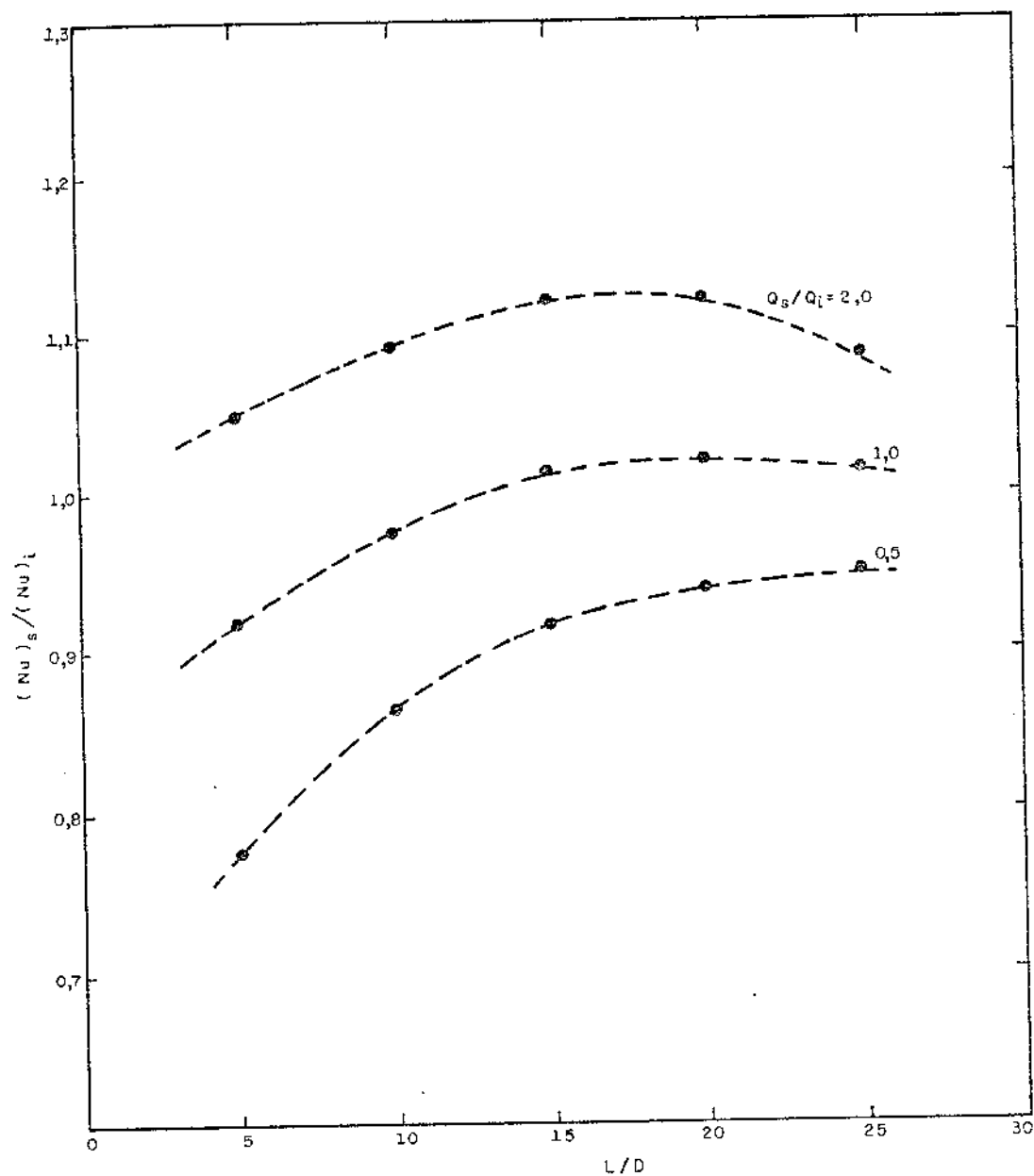


Figura 4.21 - Resultados experimentais para os aquecedores cilíndricos afastados da superfície em ar.

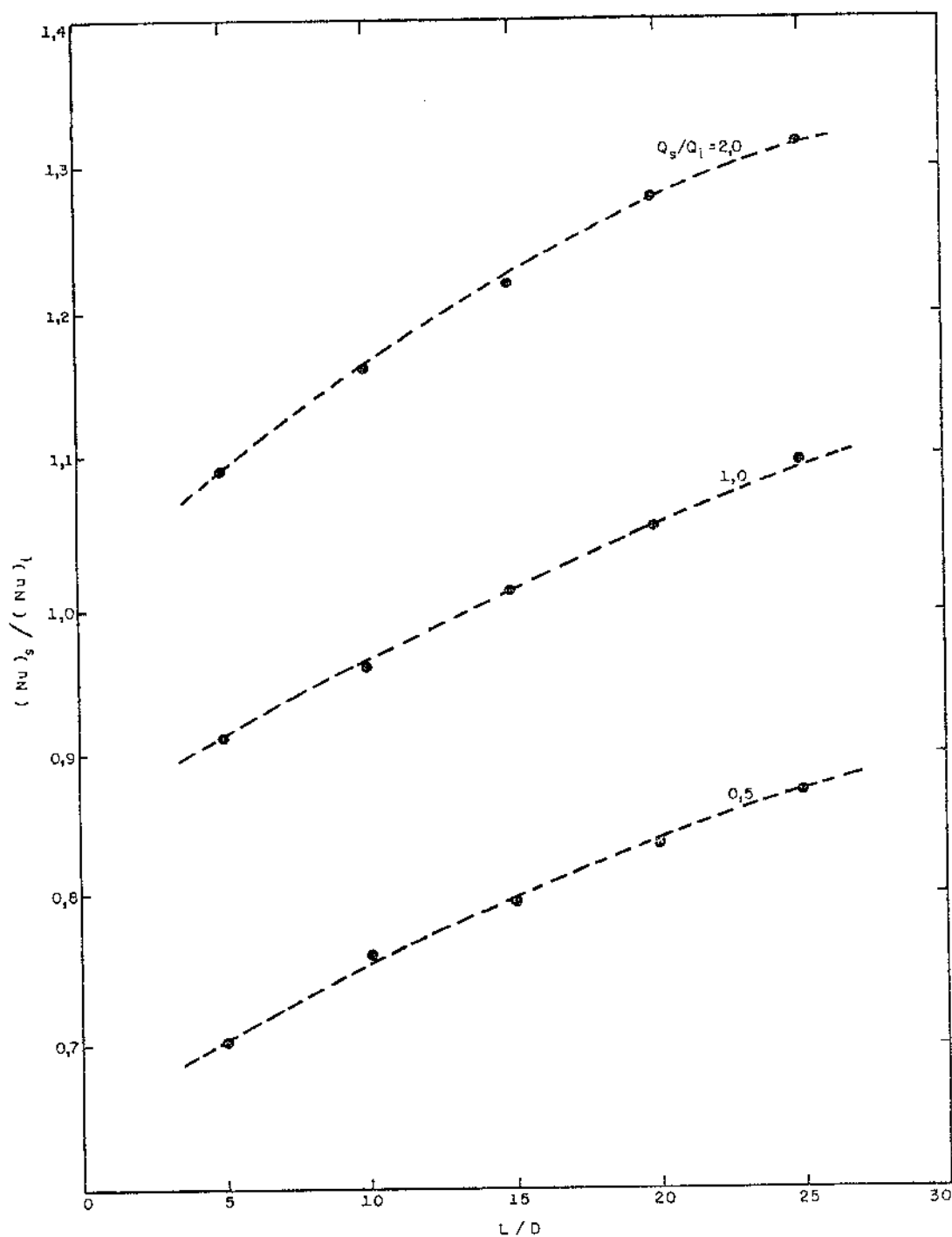


Figura 4.22 - Resultados experimentais para os aquecedores cilíndricos afastados da superfície em água.

A P P E N D I C E

```

C      SOLUTION OF THE NONDIMENSIONAL VELOCITY AND TEMPERATURE
C      PROFILES FOR STEADY LAMINAR FREE CONVECTION ARISING FROM
C      A LINE THERMAL SOURCE ON AN ADIABATIC VERTICAL SURFACE
C
C      X=NONDIMENSIONAL STREAM FUNCTION
C      Y=FIRST DERIVATIVE OF THE NONDIMENSIONAL STREAM FUNCTION
C      Z=SECOND DERIVATIVE OF THE NONDIMENSIONAL STREAM FUNCTION
C      P=NONDIMENSIONAL TEMPERATURE FUNCTION
C      S=NONDIMENSIONAL TEMPERATURE GRADIENT
C
C      ETA=THE INDEPENDENT VARIABLE
C      EMAX=MAXIMUM VALUE OF ETA
C      EPS=DESIRED ACCURACY
C      H=RUNGE-KUTTA STEP SIZE
C      ZO=ASSUMED INITIAL VALUE OF Z
C      DZ=INCREMENT IN ZO
C      PR=PRANDTL NUMBER
C
C      WRITE(6,100)
100    FORMAT(5X,'ETA',7X,'X',10X,'Y',10X,'Z',10X,'P',10X,'S')
C      PRINT WHEN CONVERGED (IFP=1)
C      PR=1.
C      IP=25
C      H=.01
C      EMAX=12.
C      ZO=1.25
C      DZ=.05
C      EPS=.00001
C      IFP=0
C      IT=0
C      INITIAL CONDITIONS
10    I=0
C      IT=IT+1
C      X=0.
C      Y=0.
C      Z=ZO
C      P=1.
C      S=0.
C      ETA=0.
C      SUM=0.
C      IF(IFP.EQ.0) GO TO 20
C      WRITE(6,101)ETA,X,Y,Z,P,S
101    FORMAT(2X,F7.3,5F11.6)
C      RUNGE-KUTTA PROCEDURE
C      I=I+1
C      A1=Y
C      B1=Z
C      IF(PR.GT.1) GO TO 11
C      C1=-.2/PR*(3.*X*Z-Y*Y)-P/PR
C      GO TO 12
11    C1=-.2/PR*(3.*X*Z-Y*Y)-P
12    D1=S

```

```

E1=-.6*(X*S+Y*P)
X1=X+A1*H/2.
Y1=Y+B1*H/2.
Z1=Z+C1*H/2.
P1=P+D1*H/2.
S1=S+E1*H/2.
A2=Y1
B2=Z1
IF(PR.GT.1) GO TO 13
C2=-.2/PR*(3.*X1*Z1-Y1*Y1)-P1/PR
GO TO 14
13 C2=-.2/PR*(3.*X1*Z1-Y1*Y1)-P1
14 D2=S1
E2=-.6*(X1*S1+Y1*P1)
X2=X+A2*H/2.
Y2=Y+B2*H/2.
Z2=Z+C2*H/2.
P2=P+D2*H/2.
S2=S+E2*H/2.
A3=Y2
B3=Z2
IF(PR.GT.1) GO TO 15
C3=-.2/PR*(3.*X2*Z2-Y2*Y2)-P2/PR
GO TO 16
15 C3=-.2/PR*(3.*X2*Z2-Y2*Y2)-P2
16 D3=S2
E3=-.6*(X2*S2+Y2*P2)
X3=X+A3*H
Y3=Y+B3*H
Z3=Z+C3*H
P3=P+D3*H
S3=S+E3*H
A4=Y3
B4=Z3
IF(PR.GT.1) GO TO 17
C4=-.2/PR*(3.*X3*Z3-Y3*Y3)-P3/PR
GO TO 18
17 C4=-.2/PR*(3.*X3*Z3-Y3*Y3)-P3
18 D4=S3
E4=-.6*(X3*S3+Y3*P3)
X=X+(A1+2.*A2+2.*A3+A4)/6.*H
Y=Y+(B1+2.*B2+2.*B3+B4)/6.*H
Z=Z+(C1+2.*C2+2.*C3+C4)/6.*H
P=P+(D1+2.*D2+2.*D3+D4)/6.*H
S=S+(E1+2.*E2+2.*E3+E4)/6.*H
C INTEGRAL FOR SURFACE TEMPERATURE DISTRIBUTION COEFFICIENT
SUM=SUM+Y*P*H
ETA=ETA+H
IF(IFP.EQ.0) GO TO 30
IF((I/IP)*IF.NE.I) GO TO 30
WRITE(6,101)ETA,X,Y,Z,P,S
30 IF(ETA.LT.EMAX) GO TO 20

```

```
C      CHECK BOUNDARY CONDITION AT EMAX FOR ERROR=ERR
      ERR=Y
      IF(ABS(ERR).LE.EPS) GO TO 40
C      FIRST ITERATION : STORE VALUES FOR NEWTON ITERATION
      IF(IT.GT.1) GO TO 35
      ERR1=ERR
      Z01=Z0
      Z0=Z0+DZ
      GO TO 10
C      NEWTON STEP
C      35  DZ=-ERR/(ERR-ERR1)*(Z0-Z01)
C      STORE NEW VALUE AND INTEGRATE ONCE MORE
      ERR1=ERR
      Z01=Z0
      Z0=Z0+DZ
      GO TO 10
C      END OF ITERATION LOOP. RE-DO INTEGRATION FOR PRINT OUT
      40  IF(IPF)50,50,60
      50  IFP=1
      GO TO 10
      60  WRITE(6,102)SUM
102     FORMAT(/,3X,'INTEGRAL=',F11.6)
      WRITE(6,104)IT
104     FORMAT(3X,'NUMBER OF ITERATIONS =',I4)
      WRITE(6,105)PR
105     FORMAT(3X,'PRANDTL NUMBER =',F12.5)
      STOP
      END
```

ETA	X	Y	Z	P	S
0.000	0.000000	0.000000	5.089167	1.000000	0.000000
0.250	0.132777	0.956207	2.549634	0.993055	-0.079113
0.500	0.426346	1.298934	0.324961	0.953284	-0.243857
0.750	0.746305	1.214004	-0.801122	0.872779	-0.390816
1.000	1.021228	0.978347	-0.981415	0.763851	-0.468039
1.250	1.236464	0.750337	-0.822979	0.644408	-0.478072
1.500	1.400360	0.568731	-0.634203	0.528479	-0.444036
1.750	1.524418	0.430082	-0.481610	0.424203	-0.387997
2.000	1.618186	0.324914	-0.365048	0.335020	-0.325274
2.250	1.688993	0.245234	-0.276438	0.261361	-0.264862
2.500	1.742414	0.184929	-0.209084	0.202018	-0.211199
2.750	1.782682	0.139344	-0.157944	0.155064	-0.165857
3.000	1.813014	0.104928	-0.119179	0.118398	-0.128794
3.250	1.835849	0.078970	-0.089846	0.090045	-0.099185
3.500	1.853031	0.059409	-0.067681	0.068277	-0.075912
3.750	1.865955	0.044678	-0.050955	0.051656	-0.057833
4.000	1.875673	0.033590	-0.038345	0.039015	-0.043908
4.250	1.882978	0.025247	-0.028846	0.029431	-0.033250
4.500	1.888468	0.018972	-0.021694	0.022179	-0.025131
4.750	1.892593	0.014253	-0.016312	0.016703	-0.018966
5.000	1.895691	0.010705	-0.012263	0.012572	-0.014299
5.250	1.898018	0.008038	-0.009219	0.009459	-0.010771
5.500	1.899766	0.006033	-0.006929	0.007114	-0.008109
5.750	1.901076	0.004526	-0.005208	0.005350	-0.006102
6.000	1.902059	0.003393	-0.003914	0.004022	-0.004590
6.250	1.902796	0.002542	-0.002942	0.003024	-0.003452
6.500	1.903348	0.001902	-0.002211	0.002273	-0.002595
6.750	1.903761	0.001422	-0.001661	0.001708	-0.001951
7.000	1.904069	0.001060	-0.001249	0.001284	-0.001467
7.250	1.904298	0.000789	-0.000938	0.000965	-0.001102
7.500	1.904469	0.000585	-0.000705	0.000725	-0.000829
7.750	1.904595	0.000431	-0.000530	0.000545	-0.000623
8.000	1.904688	0.000316	-0.000398	0.000410	-0.000468
8.250	1.904755	0.000229	-0.000299	0.000308	-0.000352
8.500	1.904804	0.000164	-0.000225	0.000232	-0.000264
8.750	1.904839	0.000115	-0.000169	0.000174	-0.000199
9.000	1.904863	0.000079	-0.000127	0.000131	-0.000149
9.250	1.904879	0.000051	-0.000096	0.000098	-0.000112
9.500	1.904889	0.000030	-0.000072	0.000074	-0.000084
9.750	1.904894	0.000014	-0.000054	0.000056	-0.000063
10.000	1.904896	0.000003	-0.000041	0.000042	-0.000048

INTEGRAL= 1.331983
 NUMBER OF ITERATIONS = 6
 FRANDTL NUMBER = 0.10000

ETA	X	Y	Z	P	S
0.000	0.000000	0.000000	1.571415	1.000000	0.000000
0.250	0.045382	0.348137	1.213243	0.997687	-0.027166
0.500	0.166587	0.606551	0.854747	0.982745	-0.098227
0.750	0.341278	0.776562	0.509163	0.946519	-0.193816
1.000	0.547971	0.864010	0.198088	0.885692	-0.291201
1.250	0.767339	0.880284	-0.057134	0.802532	-0.369488
1.500	0.983499	0.841256	-0.243002	0.703688	-0.415246
1.750	1.184847	0.764758	-0.357533	0.597928	-0.425072
2.000	1.364177	0.667747	-0.409192	0.493730	-0.404121
2.250	1.518185	0.564175	-0.412735	0.397616	-0.362193
2.500	1.646561	0.464023	-0.384482	0.313506	-0.309724
2.750	1.750997	0.373371	-0.338863	0.242917	-0.255208
3.000	1.834286	0.295120	-0.286771	0.185597	-0.204263
3.250	1.899648	0.229920	-0.235364	0.140236	-0.159840
3.500	1.950274	0.177038	-0.188683	0.105048	-0.122924
3.750	1.989074	0.135031	-0.148525	0.078166	-0.093287
4.000	2.018555	0.102199	-0.115253	0.057868	-0.070086
4.250	2.040798	0.076866	-0.088431	0.042676	-0.052256
4.500	2.057485	0.057514	-0.067245	0.031381	-0.038739
4.750	2.069945	0.042851	-0.050768	0.023025	-0.028597
5.000	2.079213	0.031812	-0.038108	0.016867	-0.021042
5.250	2.086082	0.023546	-0.028470	0.012341	-0.015447
5.500	2.091160	0.017381	-0.021189	0.009022	-0.011320
5.750	2.094904	0.012800	-0.015720	0.006591	-0.008284
6.000	2.097660	0.009406	-0.011632	0.004812	-0.006057
6.250	2.099682	0.006897	-0.008589	0.003513	-0.004425
6.500	2.101163	0.005046	-0.006330	0.002563	-0.003232
6.750	2.102246	0.003683	-0.004659	0.001870	-0.002359
7.000	2.103036	0.002681	-0.003424	0.001364	-0.001722
7.250	2.103609	0.001944	-0.002514	0.000995	-0.001256
7.500	2.104024	0.001404	-0.001844	0.000726	-0.000916
7.750	2.104323	0.001008	-0.001351	0.000529	-0.000668
8.000	2.104536	0.000717	-0.000990	0.000386	-0.000488
8.250	2.104688	0.000505	-0.000724	0.000282	-0.000356
8.500	2.104793	0.000349	-0.000530	0.000205	-0.000259
8.750	2.104866	0.000235	-0.000388	0.000150	-0.000189
9.000	2.104913	0.000152	-0.000283	0.000109	-0.000138
9.250	2.104944	0.000091	-0.000207	0.000080	-0.000101
9.500	2.104960	0.000047	-0.000151	0.000058	-0.000073
9.750	2.104968	0.000015	-0.000110	0.000042	-0.000053
10.000	2.104969	-0.000009	-0.000081	0.000031	-0.000039

INTEGRAL= 1.287897
 NUMBER OF ITERATIONS = 5
 PRANDTL NUMBER = 0.70000

ETA	X	Y	Z	P	S
0.000	0.000000	0.000000	1.254761	1.000000	0.000000
0.250	0.036605	0.292407	1.004295	0.998139	-0.021922
0.500	0.135976	0.502110	0.753615	0.985979	-0.080442
0.750	0.282477	0.659682	0.508696	0.955986	-0.162026
1.000	0.460855	0.757801	0.279930	0.904426	-0.250085
1.250	0.656873	0.801968	0.078949	0.831813	-0.327838
1.500	0.858022	0.800404	-0.084630	0.742472	-0.382235
1.750	1.054105	0.763222	-0.205559	0.643202	-0.406802
2.000	1.237564	0.701194	-0.283811	0.541525	-0.402104
2.250	1.403485	0.624505	-0.323901	0.444109	-0.373981
2.500	1.549322	0.541807	-0.333260	0.355794	-0.330744
2.750	1.674446	0.459726	-0.320386	0.279307	-0.280611
3.000	1.779619	0.382791	-0.293341	0.215512	-0.230118
3.250	1.866497	0.313672	-0.258841	0.163914	-0.183567
3.500	1.937209	0.253569	-0.221909	0.123208	-0.143208
3.750	1.994047	0.202634	-0.185929	0.091732	-0.109751
4.000	2.039248	0.160353	-0.152923	0.067778	-0.082930
4.250	2.074872	0.125840	-0.123889	0.049778	-0.061970
4.500	2.102729	0.098052	-0.099125	0.036385	-0.045905
4.750	2.124370	0.075932	-0.078494	0.026498	-0.033775
5.000	2.141084	0.058491	-0.061621	0.019242	-0.024719
5.250	2.153931	0.044849	-0.048023	0.013942	-0.018019
5.500	2.163761	0.034249	-0.037193	0.010085	-0.013093
5.750	2.171256	0.026061	-0.028653	0.007286	-0.009492
6.000	2.176949	0.019768	-0.021971	0.005258	-0.006868
6.250	2.181262	0.014952	-0.016780	0.003792	-0.004963
6.500	2.184520	0.011280	-0.012771	0.002733	-0.003582
6.750	2.186976	0.008489	-0.009689	0.001969	-0.002584
7.000	2.188821	0.006375	-0.007330	0.001418	-0.001863
7.250	2.190207	0.004777	-0.005532	0.001021	-0.001342
7.500	2.191243	0.003573	-0.004166	0.000735	-0.000967
7.750	2.192018	0.002667	-0.003131	0.000529	-0.000696
8.000	2.192596	0.001987	-0.002348	0.000381	-0.000501
8.250	2.193026	0.001477	-0.001758	0.000274	-0.000361
8.500	2.193345	0.001095	-0.001315	0.000197	-0.000260
8.750	2.193581	0.000810	-0.000981	0.000142	-0.000187
9.000	2.193756	0.000598	-0.000732	0.000102	-0.000134
9.250	2.193884	0.000439	-0.000545	0.000073	-0.000097
9.500	2.193979	0.000321	-0.000405	0.000053	-0.000070
9.750	2.194047	0.000233	-0.000301	0.000038	-0.000050
10.000	2.194097	0.000168	-0.000223	0.000027	-0.000036
10.250	2.194133	0.000120	-0.000166	0.000020	-0.000026
10.500	2.194158	0.000084	-0.000123	0.000014	-0.000019
10.750	2.194176	0.000058	-0.000091	0.000010	-0.000013
11.000	2.194188	0.000038	-0.000067	0.000007	-0.000010
11.250	2.194195	0.000024	-0.000050	0.000005	-0.000007
11.500	2.194201	0.000013	-0.000037	0.000004	-0.000005
11.750	2.194201	0.000005	-0.000027	0.000003	-0.000004
12.000	2.194201	-0.000001	-0.000020	0.000002	-0.000003

INTEGRAL= 1.264636
 NUMBER OF ITERATIONS = 6
 FRANDTL NUMBER = 1.00000

ETA	X	Y	Z	F	S
0.000	0.000000	0.000000	1.498902	1.000000	0.000000
0.250	0.044236	0.343474	1.248916	0.997758	-0.026482
0.500	0.166536	0.624567	1.000362	0.982973	-0.098220
0.750	0.351390	0.844158	0.757916	0.946171	-0.199485
1.000	0.583683	1.004622	0.528649	0.882531	-0.309071
1.250	0.849125	1.110238	0.320420	0.792873	-0.403949
1.500	1.134740	1.167168	0.140150	0.683380	-0.465275
1.750	1.429285	1.183032	-0.007599	0.563855	-0.483546
2.000	1.723532	1.166209	-0.121367	0.445093	-0.460279
2.250	2.010364	1.125056	-0.202726	0.336337	-0.405695
2.500	2.284675	1.067225	-0.255574	0.243667	-0.334020
2.750	2.543133	0.999212	-0.285110	0.169611	-0.258805
3.000	2.783864	0.926152	-0.296847	0.113722	-0.189951
3.250	3.006108	0.851845	-0.295874	0.073646	-0.132833
3.500	3.209904	0.778917	-0.286442	0.046194	-0.089966
3.750	3.395825	0.709053	-0.271833	0.028140	-0.057335
4.000	3.564770	0.643232	-0.254423	0.016692	-0.035702
4.250	3.717819	0.581939	-0.235833	0.009666	-0.021561
4.500	3.856129	0.525326	-0.217113	0.005474	-0.012669
4.750	3.980868	0.473338	-0.198908	0.003042	-0.007265
5.000	4.093169	0.425797	-0.181586	0.001660	-0.004076
5.250	4.194116	0.382456	-0.165335	0.000892	-0.002243
5.500	4.284723	0.343034	-0.150236	0.000472	-0.001213
5.750	4.365934	0.307241	-0.136298	0.000247	-0.000646
6.000	4.438622	0.274790	-0.123494	0.000128	-0.000339
6.250	4.503584	0.245404	-0.111772	0.000065	-0.000176
6.500	4.561555	0.218819	-0.101071	0.000033	-0.000090
6.750	4.613205	0.194789	-0.091323	0.000017	-0.000046
7.000	4.659142	0.173084	-0.082459	0.000008	-0.000023
7.250	4.699923	0.153491	-0.074412	0.000004	-0.000012
7.500	4.736049	0.135815	-0.067115	0.000002	-0.000006
7.750	4.767977	0.119877	-0.060506	0.000001	-0.000003
8.000	4.796119	0.105510	-0.054527	0.000001	-0.000001
8.250	4.820850	0.092565	-0.049122	0.000000	-0.000001
8.500	4.842507	0.080905	-0.044239	0.000000	-0.000000
8.750	4.861398	0.070406	-0.039832	0.000000	-0.000000
9.000	4.877797	0.060953	-0.035856	0.000000	-0.000000
9.250	4.891954	0.052445	-0.032271	0.000000	-0.000000
9.500	4.904090	0.044789	-0.029039	0.000000	-0.000000
9.750	4.914411	0.037899	-0.026128	0.000000	-0.000000
10.000	4.923097	0.031701	-0.023506	0.000000	-0.000000
10.250	4.930313	0.026124	-0.021145	0.000000	-0.000000
10.500	4.936206	0.021108	-0.019020	0.000000	-0.000000
10.750	4.940910	0.016596	-0.017108	0.000000	-0.000000
11.000	4.944544	0.012538	-0.015387	0.000000	-0.000000
11.250	4.947217	0.008889	-0.013839	0.000000	-0.000000
11.500	4.949020	0.005606	-0.012446	0.000000	-0.000000
11.750	4.950046	0.002654	-0.011194	0.000000	-0.000000
12.000	4.950371	-0.000001	-0.010067	0.000000	-0.000000

INTEGRAL= 1.647776
NUMBER OF ITERATIONS = 6
PRANDTL NUMBER = 7.00000

ETA	X	Y	Z	F	S
0.000	0.000000	0.000000	1.534620	1.000000	0.000000
0.300	0.064558	0.415392	1.234766	0.996067	-0.038582
0.600	0.240268	0.741184	0.938381	0.970533	-0.139913
0.900	0.500529	0.979699	0.654901	0.908911	-0.272961
1.200	0.819924	1.136708	0.397236	0.807637	-0.397320
1.500	1.175358	1.221866	0.177682	0.675139	-0.476118
1.800	1.547131	1.247947	0.004213	0.528484	-0.490580
2.100	1.919644	1.229194	-0.121466	0.386803	-0.445515
2.400	2.281554	1.179440	-0.203554	0.264961	-0.362714
2.700	2.625411	1.110621	-0.250088	0.170315	-0.268287
3.000	2.946956	1.032007	-0.270399	0.103108	-0.182313
3.300	3.244297	0.950136	-0.273100	0.059039	-0.114924
3.600	3.517138	0.869216	-0.265033	0.032114	-0.067770
3.900	3.766171	0.791702	-0.251047	0.016668	-0.037663
4.200	3.992629	0.718862	-0.234279	0.008288	-0.019855
4.500	4.198009	0.651222	-0.216607	0.003965	-0.009986
4.800	4.383893	0.588881	-0.199082	0.001831	-0.004815
5.100	4.551855	0.531703	-0.182249	0.000819	-0.002237
5.400	4.703407	0.479436	-0.166371	0.000356	-0.001005
5.700	4.839978	0.431774	-0.151552	0.000151	-0.000438
6.000	4.962900	0.388396	-0.137817	0.000062	-0.000186
6.300	5.073411	0.348978	-0.125145	0.000025	-0.000077
6.600	5.172651	0.313206	-0.113498	0.000010	-0.000031
6.900	5.261670	0.280782	-0.102821	0.000004	-0.000012
7.200	5.341428	0.251423	-0.093058	0.000002	-0.000005
7.500	5.412804	0.224862	-0.084149	0.000001	-0.000002
7.800	5.476601	0.200854	-0.076034	0.000000	-0.000001
8.100	5.533549	0.179168	-0.068655	0.000000	-0.000000
8.400	5.584312	0.159593	-0.061954	0.000000	-0.000000
8.700	5.629496	0.141933	-0.055877	0.000000	-0.000000
9.000	5.669648	0.126010	-0.050371	0.000000	-0.000000
9.300	5.705260	0.111658	-0.045389	0.000000	-0.000000
9.600	5.736784	0.098729	-0.040885	0.000000	-0.000000
9.900	5.764625	0.087084	-0.036815	0.000000	-0.000000
10.200	5.789150	0.076600	-0.033141	0.000000	-0.000000
10.500	5.810689	0.067164	-0.029826	0.000000	-0.000000
10.800	5.829541	0.058672	-0.026837	0.000000	-0.000000
11.100	5.845976	0.051032	-0.024143	0.000000	-0.000000
11.400	5.860238	0.044160	-0.021716	0.000000	-0.000000
11.700	5.872543	0.037978	-0.019530	0.000000	-0.000000
12.000	5.883086	0.032420	-0.017562	0.000000	-0.000000
12.300	5.892048	0.027421	-0.015791	0.000000	-0.000000
12.600	5.899588	0.022927	-0.014198	0.000000	-0.000000
12.900	5.905849	0.018887	-0.012764	0.000000	-0.000000
13.200	5.910961	0.015255	-0.011475	0.000000	-0.000000
13.500	5.915039	0.011989	-0.010315	0.000000	-0.000000
13.800	5.918189	0.009054	-0.009272	0.000000	-0.000000
14.100	5.920502	0.006415	-0.008335	0.000000	-0.000000
14.400	5.922065	0.004044	-0.007492	0.000000	-0.000000
14.700	5.922953	0.001912	-0.006734	0.000000	-0.000000
15.000	5.923234	-0.000005	-0.006053	0.000000	-0.000000

INTEGRAL= 1.696631

NUMBER OF ITERATIONS = 6

PRANDTL NUMBER = 10.00000

ETA	X	Y	Z	F	S
0.000	0.000000	0.000000	1.675120	1.000000	0.000000
0.500	0.188577	0.712798	1.177500	0.780809	-0.110975
1.000	0.672127	1.182388	0.710330	0.847085	-0.349675
1.500	1.335078	1.437612	0.329432	0.643701	-0.515635
2.000	2.083056	1.533031	0.074053	0.385944	-0.482366
2.500	2.852059	1.531661	-0.062502	0.184085	-0.315013
3.000	3.607096	1.483808	-0.119323	0.069820	-0.151109
3.500	4.333112	1.418859	-0.136425	0.021202	-0.055121
4.000	5.025324	1.349831	-0.138360	0.005204	-0.015691
4.500	5.683031	1.281220	-0.135740	0.001043	-0.003557
5.000	6.306823	1.214262	-0.132020	0.000173	-0.000653
5.500	6.897614	1.149233	-0.128085	0.000024	-0.000098
6.000	7.456385	1.086181	-0.124125	0.000003	-0.000012
6.500	7.984125	1.025105	-0.120182	0.000000	-0.000001
7.000	8.481819	0.965994	-0.116270	0.000000	-0.000000
7.500	8.950444	0.908828	-0.112402	0.000000	-0.000000
8.000	9.390966	0.853584	-0.108585	0.000000	-0.000000
8.500	9.804345	0.800233	-0.104829	0.000000	-0.000000
9.000	10.191514	0.748744	-0.101140	0.000000	-0.000000
9.500	10.553395	0.699081	-0.097525	0.000000	-0.000000
10.000	10.890891	0.651206	-0.093989	0.000000	-0.000000
10.500	11.204889	0.605078	-0.090536	0.000000	-0.000000
11.000	11.496252	0.560655	-0.087171	0.000000	-0.000000
11.500	11.765820	0.517892	-0.083896	0.000000	-0.000000
12.000	12.014413	0.476744	-0.080713	0.000000	-0.000000
12.500	12.242826	0.437164	-0.077623	0.000000	-0.000000
13.000	12.451834	0.399105	-0.074629	0.000000	-0.000000
13.500	12.642179	0.362519	-0.071729	0.000000	-0.000000
14.000	12.814591	0.327360	-0.068925	0.000000	-0.000000
14.500	12.969775	0.293579	-0.066215	0.000000	-0.000000
15.000	13.108397	0.261129	-0.063599	0.000000	-0.000000
15.500	13.231117	0.229964	-0.061076	0.000000	-0.000000
16.000	13.338566	0.200037	-0.058645	0.000000	-0.000000
16.500	13.431349	0.171304	-0.056302	0.000000	-0.000000
17.000	13.510057	0.143720	-0.054048	0.000000	-0.000000
17.500	13.575253	0.117242	-0.051879	0.000000	-0.000000
18.000	13.627476	0.091827	-0.049794	0.000000	-0.000000
18.500	13.667251	0.067434	-0.047790	0.000000	-0.000000
19.000	13.695079	0.044023	-0.045865	0.000000	-0.000000
19.500	13.711434	0.021556	-0.044017	0.000000	-0.000000
20.000	13.716789	-0.000006	-0.042242	0.000000	-0.000000

INTEGRAL= 1.867716
NUMBER OF ITERATIONS = 8
FRANITL NUMBER = 100.00000

ETA	X	Y	Z	P	S
0.000	0.000000	0.000000	1.718733	1.000000	0.000000
0.500	0.194030	0.734620	1.221241	0.980275	-0.114121
1.000	0.693988	1.226283	0.755136	0.863307	-0.359475
1.500	1.384589	1.504568	0.377232	0.634254	-0.526909
2.000	2.172205	1.625020	0.126545	0.372569	-0.485578
2.500	2.993964	1.651072	-0.005545	0.171711	-0.308458
3.000	3.815948	1.632375	-0.060117	0.061811	-0.141521
3.500	4.623655	1.597023	-0.077642	0.017421	-0.048330
4.000	5.412214	1.556871	-0.081860	0.003864	-0.012549
4.500	6.180377	1.515738	-0.082413	0.000679	-0.002517
5.000	6.927950	1.474579	-0.082179	0.000095	-0.000395
5.500	7.654983	1.433581	-0.081808	0.000011	-0.000049
6.000	8.361564	1.392775	-0.081414	0.000001	-0.000005
6.500	9.047791	1.352169	-0.081013	0.000000	-0.000000
7.000	9.713764	1.311763	-0.080609	-0.000000	-0.000000
7.500	10.359586	1.271561	-0.080200	-0.000000	0.000000
8.000	10.985358	1.231564	-0.079787	-0.000000	0.000000
8.500	11.591183	1.191774	-0.079370	-0.000000	0.000000
9.000	12.177166	1.152194	-0.078951	-0.000000	0.000000
9.500	12.743412	1.112824	-0.078528	-0.000000	0.000000
10.000	13.290025	1.073666	-0.078103	-0.000000	0.000000
10.500	13.817114	1.034721	-0.077675	-0.000000	0.000000
11.000	14.324783	0.995992	-0.077245	-0.000000	0.000000
11.500	14.813140	0.957477	-0.076813	-0.000000	0.000000
12.000	15.282293	0.919179	-0.076379	-0.000000	0.000000
12.500	15.732348	0.881099	-0.075943	-0.000000	0.000000
13.000	16.163424	0.843236	-0.075507	-0.000000	0.000000
13.500	16.575619	0.805592	-0.075069	-0.000000	0.000000
14.000	16.969049	0.768167	-0.074630	-0.000000	0.000000
14.500	17.343822	0.730962	-0.074191	-0.000000	0.000000
15.000	17.700048	0.693976	-0.073752	-0.000000	0.000000
15.500	18.037838	0.657210	-0.073312	-0.000000	0.000000
16.000	18.357298	0.620665	-0.072872	-0.000000	0.000000
16.500	18.658543	0.584339	-0.072432	-0.000000	0.000000
17.000	18.941679	0.548233	-0.071992	-0.000000	0.000000
17.500	19.206816	0.512346	-0.071554	-0.000000	0.000000
18.000	19.454063	0.476679	-0.071115	-0.000000	0.000000
18.500	19.683533	0.441231	-0.070678	-0.000000	0.000000
19.000	19.895332	0.406001	-0.070242	-0.000000	0.000000
19.500	20.089577	0.370989	-0.069807	-0.000000	0.000000
20.000	20.266363	0.336194	-0.069373	-0.000000	0.000000
20.500	20.425808	0.301616	-0.068941	-0.000000	0.000000
21.000	20.568022	0.267253	-0.068510	-0.000000	0.000000
21.500	20.693102	0.233105	-0.068081	-0.000000	0.000000
22.000	20.801165	0.199172	-0.067654	-0.000000	0.000000
22.500	20.892309	0.165451	-0.067229	-0.000000	0.000000
23.000	20.966656	0.131943	-0.066806	-0.000000	0.000000
23.500	21.024305	0.098646	-0.066385	-0.000000	0.000000
24.000	21.065348	0.065558	-0.065966	-0.000000	0.000000
24.500	21.089899	0.032679	-0.065550	-0.000000	0.000000
25.000	21.098064	0.000007	-0.065137	-0.000000	0.000000

INTEGRAL= 1.914764
 NUMBER OF ITERATIONS = 7
 PRANDTL NUMBER = 1000.00000

LISTA DE SÍMBOLOS

Bo_x	número de Boussinesq, $g\beta\Delta Tx^3/\alpha\nu$
c_p	calor específico à pressão constante do fluido
d	diâmetro do cilindro
f	função de corrente adimensional
f'	derivada primeira da função de corrente adimensional
f''	derivada segunda da função de corrente adimensional
f'''	derivada terceira da função de corrente adimensional
g	aceleração da gravidade
Gr_x	número de Grashof, $g\beta\Delta Tx^3/\nu^2$
Gr_x^*	número de Grashof modificado, $g\beta q''x^4/k\nu^2$
h	coeficiente de transferência de calor
H	altura do aquecedor
I	integral, eq. (3.43)
k	condutividade térmica do fluido
L	dimensão característica
\dot{m}	vazão em massa
n	constante, eq. (3.14)
N	constante, eq. (3.14)
Nu_x	número de Nusselt, hx/k
P	pressão
P_d	pressão dinâmica
P_∞	pressão hidrostática ambiente
Pr	número de Prandtl, ν/α
Q	energia dissipada por unidade de comprimento
q''	fluxo de calor
q'''	energia gerada por unidade de volume
R	resistência térmica
Ra_x	número de Rayleigh, $g\beta\Delta Tx^3/\alpha\nu$
Ra_x^*	número de Rayleigh modificado, $g\beta q''x^4/k\nu\alpha$
T	temperatura
T_0	temperatura da superfície
T_∞	temperatura ambiente
t	tempo
U_c	velocidade característica de convecção natural, eq. (2.19)

u	componente vertical da velocidade
v	componente horizontal da velocidade
W	largura do aquecedor
x	coordenada espacial vertical
y	coordenada espacial horizontal
α	difusividade térmica, $k/\rho c_p$
β	coeficiente da expansão volumétrica
δ	espessura da camada limite dinâmica
δ_t	espessura da camada limite térmica
η	variável independente
ψ	função de corrente
ρ	densidade do fluido
μ	viscosidade dinâmica
ν	viscosidade cinemática, μ/ρ
θ	temperatura adimensional
θ'	gradiente de temperatura adimensional
θ''	derivada segunda da temperatura adimensional

Índices

o	superfície
∞	ambiente
d	condição dinâmica
i	seção de teste inferior
s	seção de teste superior

Todas as propriedades são avaliadas na temperatura de película a menos de observação em contrário.

REFERÊNCIAS

1. ANDERSON, D.A., TANEHILL, J.C. & PLETCHER, R.H., "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", Mc Graw-Hill, 1984.
2. ARPACI, V.S. & LARSEN, P.S., "Convection Heat Transfer", Prentice-Hall, 1984.
3. ASME, "Heat Transfer in Electronic Equipment", LFD vol. 20, 1981.
4. AUDUNSON, T. & GEBHART, B., "An Experimental and Analytical Study of Natural Convection With Appreciable Thermal Radiation Effects", J. Fluid Mech., vol. 52, p. 52-95, 1972.
5. AUNG, W., FLETCHER, L.S. & SERNAS, V., "Developing Laminar Free Convection Between Vertical Flat Plates with Asymmetric Heating", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 15, p. 2293-2308, 1972.
6. AUNG, W., "Heat Transfer in Electronic Systems With Emphasis on Asymmetric Heating", The Bell System Technical Journal, vol. 52, p. 907-925, 1973.
7. AUNG, W., KESSLER, T.J. & BEITIN, K.I., "Free Convection of Electronic Systems", IEEE Transactions on PHP, vol. PHP-9, p. 75-86, 1973.
8. BAKER, E., "Series Solution for Heat Transfer Through a Turbulent Boundary Layer", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 9, p. 417-426, 1966.
9. BAKER, E., "Liquid Cooling of Microelectronic Devices by Free and Forced Convection", Microelectronics and Reliability, vol. 11, p. 213-222, 1972.

10. BAKER, E., "Liquid Immersion Cooling of Small Electronic Devices", Microelectronics and Reliability, vol. 12, p. 163-173, 1973.
11. BAR-COHEN, A. & KRAUS, A.D., "Thermal Consideration in the Packaging of Electrical and Electronic Components", ASME HTD vol. 20, p. 1-9, 1981.
12. BAR-COHEN, A. & ROHSENOW, "Thermally Optimum Spacing of Vertical, Natural Convection Cooled Parallel Plates", ASME HTD vol. 20, p. 11-18, 1981.
13. BAR-COHEN, A., KRAUS, A.D. & DAVIDSON, S.F., "Thermal Frontiers in the Design and Packaging of Microelectronic Equipment", Mechanical Engineering, p. 53-59, June 1983.
14. BASIULIS, A. & HUMMEL, T.A., "The Application of Heat Pipe Techniques to Electronic Component Cooling", ASME paper 72-WA/IIT-42, 1972.
15. BATCH, A.T., "Heat Sinking Solid State Devices With Diamonds", Electronic Packaging and Production, Aug. 1970.
16. BAUM, J.R., "Thermal Design Considerations for Packaging Electronic Equipment", Chapter 11, Handbook of Electronic Packaging, C.A. Harper, Mc Graw-Hill, 1969.
17. BAXTER, G.K. & ANSLOW, J.W., "High Temperature Thermal Characteristics of Microelectronic Package", IEEE Trans. PHP, vol. PHP-13, p. 385-389, 1977.
18. BEJAN, A., "Convection Heat Transfer", John Wiley & Sons, 1984.
19. BELL Telephone Laboratories, "Physical Design of Electronic Systems - Thermal Design", Prentice-Hall, 1970.

20. BERGLES, A.E., CHU, R.C. & SEELY, J.H., "Survey of Heat Transfer Techniques Applied to Electronic Equipment", ASME paper 72 WA/HT-39, 1972.
21. BERGLES, A.E., CHU, R.C. & SEELY, J.H., "Survey of Heat Transfer Techniques Applied to Electronic Packages", Proceedings of the Technical Program, National Electronic Packaging and Production Conference, p. 370-385, 1977.
22. BERGLES, A.E., PARK, K.A. & KIM, C., "Cooling Enhancement for Chip/Module Testing", Technical Report 85431, Iowa State University, Ames, 1984.
23. BIRNBREIER, H., "Experimental Investigation on the Temperature Rise of Printed Circuit Boards in Open Cabinets With Natural Ventilation", ASME HTD vol. 20, p. 19-23, 1981.
24. BLACK, E.P. & DALEY, E.M., "Thermal Design Considerations for Electronic Components", ASME paper 70-DE-17, 1970.
25. BOUSSINESQ, J., "Theorie Analytique de la Chaleur", vol. 2, Gauthier - Villars, Paris, 1903.
26. BULLER, M.L. & KILBURN, R.F., "Evaluation of Surface Heat Transfer Coefficients for Electronic Module Packages", ASME HTD, vol. 20, p. 25-28, 1981.
27. BULLER, M.L. & DUCLOS, T.G., "Thermal Characteristics of Horizontally Oriented Electronic Components in an Enclosed Environment", IEEE Transactions on Components, Hybrids and Manufacturing Technology, vol. CHMT-5, p. 493-498, 1982.
28. CAREY, V.P. & MOLLENDORF, J.C., "The Temperature Field Above a Concentrated Heat Source on a Vertical Adiabatic Surface", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 20, p. 1059-1067, 1977.
29. CARSLAW, H.S. & JAEGER, J.C., "Conduction of Heat in Solids", 2nd. ed., Oxford University Press, 1959.

30. CEBECI, T. & BRADSHAW, P., "Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer", Springer-Verlag, 1984.
31. CEBECI, T., LEE, K.H., WONG, S. & CHANG, K.C., "Heat Transfer in Vertical Duct Flows", Report ME-84-1, Dept. Mech. Eng., California State University, June, 1984.
32. CHADDOCK, J.B., "Free Convection Heat Transfer from Vertical Rectangular Fin Arrays", ASHRAE Journal, Aug. 1970.
33. CHU, H.H.S., CHURCHILL, S.W. & PATTERSON, C.V.S., "The Effect of Heater Size, Location, Aspect Ratio and Boundary Conditions on Two-Dimensional, Laminar, Natural Convection in Rectangular Channels", ASME J. Heat Transfer, p. 194-201, 1976.
34. CHURCHILL, S.W. & USAGI, R., "A General Expression for the Correlation of Rates of Transfer and Other Phenomena", AIChE Journal, vol. 18, p. 1121-1128, 1972.
35. CHURCHILL, S.W. & OZOE, H.A., "A Correlation for Laminar Free Convection from a Vertical Plate", Trans. ASME J. Heat Transfer, vol. 95, p. 540-541, 1973.
36. CHURCHILL, S.W. & CHU, H.H.S., "Correlation Equations for Laminar and Turbulent Free Convection from a Vertical Plate", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 18, p. 1323-1329, 1975.
37. COCKROFT, J.D., "The Temperature Distribution in a Transformer or Other Laminated Core of Rectangular Cross Section in Which Heat is Generated at a Uniform Rate", Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 22, p. 759-772, 1925.
38. CORMAN, J.C. & McLAUGHLIN, M.H., "Thermal Development of Heat Pipe Cooled IC Packages", ASME paper 72-WA/HT-44, 1972.

39. ECKERT, E.G. & SOEHNGEN, E., "Studies of Heat Transfer in Laminar Free Convection with the Zehnder-Mach Interferometer", Tech. Rep. 5747 USAF AMC Dayton, Ohio, 1948.
40. EDE, A.J., "Advances in Free Convection", Advances in Heat Transfer, Academic Press, vol. 4, p. 1-64, 1967.
41. EICHHORN, R., "Measurement of Low Speed Gas Flows by Particle Trajectories: a New Determination of Free Convection Velocity Profiles", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 5, p. 915-928, 1962.
42. ELENBAAS, W., "Heat Distribution of Parallel Plates by Free Convection", Physica, vol. 9, p. 665-671, 1942.
43. ELLISON, G.N., "Thermal Computations for Electronic Equipment", Van Nostrand Reinhold Company, 1984.
44. FELDMANIS, C.J., "Cooling Techniques and Thermal Analysis of Circuit Board Mounted Electronic Equipment", ASME HTD vol. 20, p. 29-38, 1981.
45. FLACK, R.D. & TURNER, B.L., "Heat Transfer Correlations For Use in Naturally Cooled Enclosures With High-Power Integrated Circuits", IEEE Trans. Components, Hybrids, Manuf. Technol., vol. CHMT-3, p. 449-452, 1980.
46. FUJII, T., "Theory of the Steady Laminar Convection Above a Horizontal Line Source and a Point Source", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 6, p. 597-606, 1963.
47. FUJII, T. & IMURA, H., "Natural Convection Heat Transfer from a Plate With Arbitrary Inclination", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 15, p. 755-767, 1972.
48. FUJII, T. & FUJII, M., "The Dependence of Local Nusselt Number on Prandtl Number in the Case of Free Convection Along a Vertical Surface With Uniform Heat Flux", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 19, p. 121-122, 1976.

49. GEBHART, B. & PERA, L. & SCHORR, A.W., "Steady Laminar Natural Convection Plumes Above a Horizontal Line Source", Int. J. Heat Mass Transfer, p. 161-171, 1970.
50. GEBHART, B., "Heat Transfer" 2nd. ed., McGraw-Hill, 1971.
51. GEBHART, B., "Natural Convection Flows and Stability", Advances in Heat Transfer, vol. 9, p. 273-348, Academic Press, 1973.
52. GOLDEN, F.B., "Analysis Can Take the Heat Off Power Semiconductors", Electronics, p. 103-109, dec. 6, 1973.
53. GOLDSTEIN, R.J. & ECKERT, E.R.G., "The Steady and Transient Free Convection Boundary Layer on a Uniformly Heated Vertical Plate", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 1, p. 209-218, 1960.
54. GRAND, D. & VERNIER, P., "Combined Convection in Liquid Metals", Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Turbulent Forced Convection in Channels and Rod Bundles, Istanbul, 1978.
55. GRAY, D.D. & GIORGINI, A., "The Validity of the Boussinesq Approximation for Liquid and Gases", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 19, p. 545-551, 1976.
56. GRELLA, J.J. & FAETH, G.M., "Measurements in a Two-Dimensional Thermal Plume Along a Vertical Adiabatic Wall", J. Fluid Mech., vol. 71, p. 701-710, 1975.
57. GREENHOUSE, H.M. & MCGILL, R.L., "Design of Temperature Controlled Substrates for Hybrids Microcircuits", IEEE Trans. Parts, Hybrids and Packaging, vol. PHP-10, p. 137-145, 1974.
58. GRYZAGORIDIS, J., "Leading Edge Effects on the Nusselt Number for a Vertical Plate in Free Convection", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 16, p. 517-520, 1971.

69. JALURIA, Y., "Thermal Plume Interaction With Vertical Surfaces", Letters in Heat and Mass Transfer, vol. 9, p. 107-117, 1982.
70. JALURIA, Y., "Interaction of Natural Convection Wakes Arising From Thermal Sources on a Vertical Surface", ASME HTD vol. 32, p. 67-76, 1984.
71. JOSEPH, D.D., "Stability of Convection in Containers of Arbitrary shape", J. Fluid Mech., vol. 47, p. 257, 1971.
72. KAYE, J. & RIVAS, M.A., "Bibliography on Thermal Effects in Electronic Equipment in Small Electrical Machines", MIT Research Laboratory of Heat Transfer in Electronics, Report RLHTE-9, may 1955.
73. KAYE, J., "Review of Industrial Applications of Heat Transfer to Electronics", Proceedings of the IRE, vol. 44, p. 977-991, 1956.
74. KELLEHER, M., "Free Convection From a Vertical Plate With Discontinuous Wall Temperature", Trans. ASME J. Heat Transfer, vol. 93, p. 349-356, 1971.
75. KERN, D.Q. & KRAUS, A.D., "Extended Surface Heat Transfer", McGraw-Hill, 1972.
76. KINNIMENT, D.J. & EDWARDS, D.A., "Thermal Design in a Hybrid System With High Packing Density", IEEE Trans. Components, Hybrids, Manuf. Technol., CHMT-1, p. 176-181, 1978.
77. KISHINAMI, K. & SEKI, N., "Natural Convective Heat Transfer on an Unheated Vertical Plate Attached to an Upstream Isothermal Plate", Trans. ASME J. Heat Transfer, vol. 105, p. 759-766, 1983.
78. KRAUS, A.D., "The Use of Steady State Electric Network Analysis in Solving Heat Flow Problems", ASME paper 58-HT-14, 1958.

79. KRAUS, A.D., "Cooling Electronic Equipment", Prentice-Hall, 1965.
80. KRAUS, A.D., BERGLES, A.E. & MOLLENDORF, J.C., "Directions of Heat Transfer in Electronic Equipment", Report of Research Workshop, Atlanta-Georgia, 1977.
81. KRAUS, A.D., "Analysis and Evaluation of Extended Surfaces Thermal Analysis", Hemisphere Publishing Co., 1982.
82. KRAUS, A.D. & BAR-COHEN, A., "Thermal Analysis and Control of Electronic Equipment", Mc Graw-Hill, 1983.
83. LEVY, E.K., "Optimum Plate Spacings for Laminar Natural Convection Heat Transfer From Parallel Vertical Isothermal Flat Plates", Trans. ASME J. Heat Transfer, vol. 93, p. 463-465, 1971.
84. LIBURDY, J.A. & FAETH, G.M., "Theory of Steady Laminar Thermal Plume Along a Vertical Adiabatic Wall", Letters in Heat and Mass Transfer, vol. 2, p. 407-418, 1975.
85. LIEBERMAN, J. & GEBHART, B., "Interactions in Natural Convection From an Array of Heated Elements, Experimental", Int. J. Heat Transfer, vol. 12, p. 1385-1396, 1969.
86. LOCK, G.S.H. & GUNN, J.C., "Laminar Free Convection From a Downward Projecting Fin", Trans. ASME J. Heat Transfer, vol. 90, p. 63-70, 1968.
87. MA, C.F. & BERGLES, A.E., "Boiling Jet Impingement Cooling of Simulated Microelectronic Chips", ASME HTD vol. 28, p. 5-12, 1983.
88. MARTYNENKO, O.G., BEREZOVSKY, A.A. & SOKOVISHIN, Y.A., "Laminar Free Convection: Effects of Leading and Trailing Edges and Discontinuous Temperature", J. Appl. Math. Phy., vol. 27, p. 633-651, 1976.

89. MARSTER, G.F., "Arrays of Heated Horizontal Cylinders in Natural Convection", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 15, p. 921-933, 1972.
90. MESSITER, A.F. & LINAN, A., "The Vertical Plate in Laminar Free Convection: Effects of Leading and Trailing Edges and Discontinuous Temperature", J. Appl. Math. Phy., vol. 27, p. 633-651, 1976.
91. MIHALJAN, J., "A Rigorous Exposition of the Boussinesq Approximation Applicable to a Thin Layer of Fluid", Astrophys. J., vol. 136, p. 1126-1133, 1962.
92. MOUROMTSEFF, I.E., "Water and Forced Air Cooling of Vacuum Tubes", Proceedings of the IRE, vol. 30, p. 190-205, 1942.
93. NORONHA, R.I., "Free Convective Cooling of Cabinets Containing Heat Dissipating Components", Proc. Inst. Mech. Eng., vol. 179, p. 439-450, 1964.
94. OKTAY, S. & BAR-COHEN, A., "Heat Transfer in Electronic Equipment", ASME HTD vol. 28, 1983.
95. OKTAY, S. & MOFFAT, R.J., "Heat Transfer in Electronic Equipment", ASME HTD vol. 48, 1985.
96. PARK, K.A. & BERGLES, A.E., "Natural Convection Heat Transfer Characteristics of Simulated Microelectronic Chips", ASME HTD vol. 48, p. 29-37, 1985.
97. PERA, L. & GEBHART, B., "Laminar Plume Interactions", J. Fluid Mech., vol. 68 part 2, p. 259-271, 1975.
98. RAVINE, T.L. & RICHARDS, D.E., "Natural Convection Cooling of a Finite-Sized Thermal Source on the Wall of a Vertical Channel", ASME paper 84-WA/HT-90, 1984.

99. SANDERS, C.J. & HOLMAN, J.P., "Franz Grashof and the Grashof Number", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 15, p. 562-563, 1972.
100. SCHERBERG, M.G., "Natural Convection from Wall Sections of Arbitrary Temperature Distribution by an Integral Method", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 7, p. 501-516, 1964.
101. SCHERBERG, M.G., "Natural Convection Near and Above Thermal Leading Edges on Vertical Walls", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 5, p. 1001-1010, 1962.
102. SCHERBERG, M.G., "Natural Convection at a Thermal Leading Edge on a Vertical Wall", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 8, p. 1319-1331, 1965.
103. SCOTT, A.W., "Cooling of Electronic Equipment", John Wiley & Sons, 1974.
104. SEELY, J.H. & CHU, R.C., "Heat Transfer in Microelectronic Equipment", Marcel Dekker, 1972.
105. SEELY, J.H., "Applications of Thermoelectric Heat Transfer to Electronic Equipment", IBM Technical Report TR00. 1833-1, Feb. 1969.
106. SMITH, P.C., "A Similarity Solution for Slow Viscous Flow Down an Inclined Plane", J. Fluid Mech., vol. 58, p. 275-288, 1973.
107. SPARROW, E.M. & GREGG, J.L., "Similar Solutions for Free Convection from a Non isothermal Vertical Plate", Trans. ASME, p. 379-386, 1958.
108. SPARROW, E.M. & FAGHRI, M., "Natural Convection Heat Transfer from the Upper Plate of a Colinear, Separated Pair of Vertical Plates", Trans. ASME J. Heat Transfer, vol. 102, p. 623-629, 1980.

109. SPARROW, E.M., PATANKAR, S.V. & ABDEL-WAHED, R.M., "Development of Wall and Free Plumes Above a Heated Vertical Plate", ASME J. Heat Transfer, vol. 100, p. 184-190, 1978.
110. STEINBERG, D.S., "Cooling Techniques for Electronic Equipment", John Wiley & Sons, 1980.
111. STREB, A.J., "The Heat Pipe: Overcoming the Thermal Resistance Barrier", Electronic Packaging and Production, dec. 1971.
112. STREB, A.J., "Heat Pipes Cool Gear in Restricted Spaces", Electronics, p. 114-117, dec. 12, 1974.
113. TAYLOR, G.M., "Forced Air Cooling in High-Density Systems", Electronics, p. 87-89, Jna. 24, 1974.
114. TOKURA, I., SAITO, H., KISHINAMI, K. & MURAMOTO, K., "An Experimental Study of Free Convection Heat Transfer From a Horizontal Cylinder in a Vertical Array Set in Free Space Between Parallel Walls", Trans. ASME J. Heat Transfer, vol. 105, p. 102-107, 1983.
115. TURNER, B.L. & FLACK, R.D., "The Experimental Measurement of Natural Convection Heat Transfer in Rectangular Enclosures with Concentrated Energy Sources", Trans. ASME J. Heat Transfer, p. 236-241, 1980.
116. TURNER, J.S., "Buoyancy Effects in Fluids", Cambridge at the University Press, 1979.
117. VAN de POL, D. & TIERNEY, J.K., "Free Convection Heat Transfer from Vertical Fin Arrays", IEEE Trans. Parts, Hybrids and Packaging, p. 267-271, dec. 1974.
118. VLIET, G.C., "Natural Convection Local Heat Transfer on Constant Heat Flux Inclined Surface", Trans. ASME J. Heat Transfer, vol. 91, p. 121-122, 1976.

119. WATSON, D., "Thermal Study of Circuit Card Assembly", Micro-electronic and Reliability, vol. 12, p. 531-534, 1973.
120. WITTE, L.C. & SAXENA, L.S., "Fundamentals of Natural Convection/Electronic Equipment Cooling", ASME HTD vol. 32, 1984.
121. YANG, K.T., "Possible Similarity Solutions for Laminar Free Convection on Vertical Plates and Cylinders", Trans. ASME J. Applied Mech., p. 230-236, 1960.
122. YANG, K.T. & JERGER, E.W., "First-Order Perturbations of Laminar Free Convection Boundary Layers on a Vertical Plate", Trans. ASME J. Heat Transfer, vol. 86, p. 107-115, 1964.
123. ZIMIN, V.D. & LYAKHOV, Y.N., "Convective Wall Plume", J. Appl. Mech. Tech. Phys., vol. 11, p. 511-513, 1970.
124. ZINNES, A.E., "The Coupling of Conduction with Laminar Natural Convection from a Vertical Flat Plate with Arbitrary Surface Heating", Trans. ASME J. Heat Transfer, p. 528-535, 1970.