

SINGULARIDADES SIMÉTRICAS
DE CAMPOS VETORIAIS REVERSÍVEIS
EM DIMENSÃO TRÊS

por

João Carlos da Rocha Medrado¹

TESE DE DOUTORADO

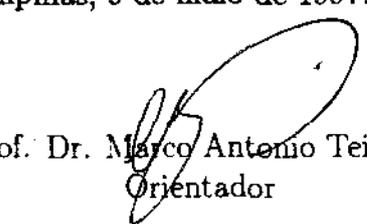
IMECC-UNICAMP
1997

¹O autor teve apoio financeiro do programa PICD-CAPES durante a elaboração desta tese.

SINGULARIDADES SIMÉTRICAS
DE CAMPOS VETORIAIS REVERSÍVEIS
EM DIMENSÃO TRÊS

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. João Carlos da Rocha Medrado e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 9 de maio de 1997.


Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira
Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica-UNICAMP,
como requisito parcial para obtenção do Título
de Doutor em Matemática.

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	T/UNICAMP
	M469s
V.º	Es.
	1000131061
P.º	281197
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	15/07/97
N.º CPD	

CM-00098926-4

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA
DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO
CIENTÍFICA - UNICAMP**

M469s Medrado, João Carlos da Rocha
Singularidades simétricas de campos vetoriais reversíveis
em dimensão três / João Carlos da Rocha Medrado. ---
Campinas, SP : [s.n.], 1997.

Orientador : Marco Antonio Teixeira
Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Com-
putação Científica

1. Teoria da bifurcação. 2. Campos vetoriais. 3. Singularidades
(matemática). I. Teixeira, Marco Antonio II. Universidade
Estadual de Campinas - Instituto de Matemática Estatística e
Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 09 de MAIO de 1997

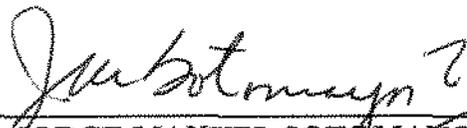
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). MARCO ANTONIO TEIXEIRA



Prof (a). Dr (a). KETTY ABAROA DE REZENDE



Prof (a). Dr (a). JORGE MANUEL SOTOMAYOR TELLO



Prof (a). Dr (a). MARIA APARECIDA SOARES RUAS



Prof (a). Dr (a). RONALDO GARCIA

À Cláudia e Lucas

Agradecimentos

À Deus por estar sempre do meu lado.

Ao Prof. Marco Antonio Teixeira, meu orientador, pela dedicação, competência e honestidade.

À minha esposa Cláudia, pela compreensão, paciência e incentivo, ao longo destes últimos quatro anos, e ao meu filho Lucas pelo seu sorriso de todo dia.

À minha família, em especial à minha mãe, pelo constante incentivo.

Aos amigos Buzzi e Fukuoka, pelas discussões e sugestões.

Aos amigos do predinho, pelo constante incentivo, apoio e discussões.

Aos colegas do Departamento de Matemática da UFG, pelo incentivo para o doutoramento.

À todos aqueles, que de uma forma ou de outra contribuíram para que tornasse possível a conclusão deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, estudamos as singularidades simétricas de campos vetoriais reversíveis sobre um espaço de dimensão três, e tal que a dimensão do espaço de pontos fixos da involução associada é dois. Apresentamos todos os tipos topológicos de singularidade simétricas de codimensão zero, um e dois, e suas respectivas formas normais, usando a noção de C^0 -equivalência.

Conteúdo

Introdução	1
0.1 Resultados Principais	5
0.1.1 Exemplos	8
1 Preliminares	11
1.1 Singularidades no Bordo	13
1.2 Sistemas de Coordenadas	14
1.2.1 Mudança de Coordenadas	14
1.2.2 Fluxo Tubular	15
1.2.3 Singularidades do Tipo Tangencial	16
2 Singularidades Codimensão 0	20
2.1 Prova do Teorema A	24
2.2 Propriedades Globais de campos vetoriais reversíveis do tipo (3,2)	24
3 Singularidades de Codimensão 1	26

3.1	Prova do Teorema B	30
3.2	Propriedades Globais de campos vetoriais reversíveis do tipo (3,2)	31
4	Singularidades de Codimensão 2	35
4.1	Construção das Submersões	39
4.1.1	Pontos Críticos no Bordo	39
4.1.2	Singularidades do Tipo Tangencial	63
4.2	Caracterização das Tangências	67
4.3	Estabilidade Estrutural	95
4.3.1	Ponto Crítico Hiperbólico	95
4.3.2	Estratificação de uma vizinhança de p_G	98
4.3.3	Singularidades Tangenciais	102
4.4	Diagramas de Bifurcação	106
4.4.1	Sela-Nó	107
4.4.2	Hopf	108
4.4.3	Nó Degenerado	109
4.4.4	Hiperbólico Tangente	110
4.4.5	Foco Degenerado	114
4.4.6	Foco Tangente 1	115
4.4.7	Foco Tangente 2	117
4.4.8	Goose	119
4.4.9	Gull	120

4.4.10 Butterfly	121
4.5 Prova do Teorema C	122

Lista de Figuras

0.1	Singularidades Codimensão Zero	4
2.1	Laço Heteroclínico Persistente	25
3.1	Beaks:Bordo \times Reversível	32
3.2	Lips:Bordo \times Reversível	33
3.3	Dove's Tail:Bordo \times Reversível	34
4.1	Homeomorfismo: Vizinhanças nos casos 3,4,5,6,7,8	99
4.2	Homeomorfismo: Vizinhanças nos casos 9.1 e 9.2, respectivamente	100
4.3	Ponto Crítico Sela-Nó	107
4.4	Ponto Crítico Hopf	108
4.5	Ponto Crítico Nó Degenerado	109
4.6	Ponto Crítico Hiperbólico Tangente $k_2 < 0$	110
4.7	Ponto Crítico Hiperbólico tangente $k_2 > 0$	112
4.8	Ponto Crítico Foco Degenerado	114
4.9	Ponto Crítico Foco Tangente 1	115

4.10	Ponto Crítico Foco Tangente 2	117
4.11	S -singularidade Goose	119
4.12	S -singularidade Gull	120
4.13	S -singularidade Butterfly	121
4.14	Sela-Nó:Bordo \times Reversível	125
4.15	Hiperbólico Tangente Nó:Bordo \times Reversível	126
4.16	Hiperbólico Tangente Sela:Bordo \times Reversível	127
4.17	Hiperbólico Tangente Foco:Bordo \times Reversível	128
4.18	Nó Degenerado:Bordo \times Reversível	129
4.19	Foco Tangente I:Bordo \times Reversível	130
4.20	Foco Tangente II:Bordo \times Reversível	131

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar localmente as singularidades simétricas de campos vetoriais reversíveis em dimensão 3.

Este estudo se desenvolve ao longo das linhas gerais propostas no programa de Thom-Smale restrito a campos vetoriais reversíveis. Isto é, para tal classe se estuda primeiramente aquela subclasse constituída pelos campos vetoriais estruturalmente estáveis e posteriormente a estabilidade de famílias à k -parâmetros, com $k = 1, 2, \dots$

A abordagem adotada neste trabalho segue a linha de pesquisa estabelecida por (Sotomayor,[20]) e (Sotomayor-Teixeira,[21]), através da reformulação do problema original em termos de campos vetoriais definidos em variedades com bordo.

Seja X um germe de um campo vetorial de classe C^r , definido em $(\mathbb{R}^n, 0)$. Seja φ um germe de uma involução de classe C^∞ em $(\mathbb{R}^n, 0)$; isto é, φ é um germe de um difeomorfismo(em 0) de classe C^∞ e $\varphi \circ \varphi = Id$.

Denotemos por $S = Fix\{\varphi\}$, o conjunto dos pontos fixos da involução φ . Por (Sevryuk,[18]), sabemos que, S é uma subvariedade de $(\mathbb{R}^n, 0)$.

Dizemos que X é φ -reversível do tipo (n, k) se valem as seguintes condições:

$$\begin{aligned} (1) \quad \varphi_* X &= -X\varphi & (1) \\ (2) \quad \dim S &= k \end{aligned}$$

Seja Ω o espaço de germes de campos vetoriais, em 0, φ -reversíveis sobre \mathbb{R}^3 , de classe C^r , $r > 3$. Consideremos Ω munido da topologia C^r .

Seja p tal que $X(p) = 0$. Se $p \in S$, então dizemos que p é uma *singularidade simétrica*. Caso contrário, p é uma *singularidade assimétrica*. Qualquer outro ponto em $(\mathbb{R}^3, 0)$ é um *ponto regular* de X .

Na teoria de sistemas dinâmicos, a importância da reversibilidade foi primeiro notada por Birkhoff ([6], 1915), que a usou no estudo de problema restrito de três corpos. Em sistemas mecânicos, as equações de movimento podem ser deduzidas de um Hamiltoniano, $H(p, q)$, que é a energia funcional definida no espaço de fase com momentum e coordenadas de posição (p, q) . Tal sistema é φ -reversível do tipo $(2n, n)$ quando

$$H(p, q) = H(-p, q)$$

onde a involução associada é dada por

$$\varphi(p, q) = (-p, q).$$

Devaney ([7]), trabalhou com campos vetoriais do tipo $(2n, n)$, e demonstrou um Teorema de Kupka-Smale para campos vetoriais reversíveis.

O trabalho de Devaney, provocou um crescente interesse por sistemas dinâmicos reversíveis. Arnol'd e em particular Sevryuk, discutiram extensões dos resultados dos sistemas Hamiltonianos para os reversíveis (tais como Teoria KAM). Neste contexto mencionamos o trabalho de Vanderbauwhede ([27], 1990) sobre bifurcação subharmônica (*subharmonic branching*). Arnol'd ([4], 1984) e Sevryuk ([18], 1986), trabalharam com campos vetoriais *fracamente reversíveis*, ou sejam, são campos vetoriais que satisfazem a equação (1), mas o difeomorfismo φ não precisa ser necessariamente uma involução.

Mackay ([10]), no início dos anos 80, obteve resultados interessantes envolvendo renormalização de aplicações que preservam área e sistemas reversíveis. Lamb ([9]), em sua tese estudou sistemas reversíveis sob diversos aspectos. Além de muitos exemplos, ele exibiu formas normais de sistemas reversíveis usando as técnicas desenvolvidas por Takens ([23]). Na literatura encontramos um leque enorme de exemplos e aplicações envolvendo sistemas reversíveis. Sugerimos ao leitor para mais detalhes e conexões com outros problemas o trabalho de Roberts e Quispel em ([17], 1992).

Neste trabalho classificaremos genericamente, via equivalência topológica, famílias locais à 2-parâmetros de campos de vetores reversíveis do tipo (3, 2) numa vizinhança de um ponto crítico simétrico.

Em (Teixeira, [26]), é desenvolvida uma técnica que classifica, de uma forma simples, as singularidades simétricas de campos vetoriais reversíveis do tipo (2, 1). Neste trabalho, seguimos esta idéia e nosso principal objetivo é classificar as singularidades, as quais ocorrem genericamente em famílias à dois parâmetros de campos vetoriais reversíveis sobre \mathbb{R}^3 . Esta técnica consiste em, primeiramente, efetuarmos uma mudança especial de coordenadas numa vizinhança da singularidade simétrica e então dirigir a análise ao estudo do contato entre um sistema geral e uma subvariedade de codimensão um de \mathbb{R}^3 . Descrevemos o comportamento da singularidade e estabelecemos uma relação entre estas singularidades, as quais emanam do contato entre o campo vetorial e a superfície simétrica original. A principal razão do uso desta técnica é que a teoria do contato fornece ferramentas geométricas muito úteis.

Neste trabalho, apresentamos todos os tipos topológicos de singularidades simétricas de campos vetoriais reversíveis do tipo (3, 2) de codimensões 0, 1 e 2, suas C^0 -formas normais e respectivos desdobramentos versais. Assim, geramos uma lista completa de modelos topológicos locais para todas as possíveis famílias genéricas à 2-parâmetros de campos vetoriais reversíveis.

Para atingirmos este objetivo, estendemos o estudo de campos vetoriais definidos em variedades de dimensão três, com bordo de dimensão dois, iniciado em (Sotomayor-Teixeira, [21]), classificando os campos vetoriais de codimensão dois. Completamos o nosso estudo, usando a simetria e reversibilidade dos campos vetoriais reversíveis.

Mencionamos que um campo vetorial de codimensão zero tem uma curva regular γ de pontos críticos em S . Esta curva pode ser vista como uma família à 1-parâmetro de campos vetoriais planares, no sentido que o espaço é folheado por planos invariantes tais que uma das seguintes situações ocorre: (i) qualquer ponto crítico é uma sela hiperbólica e cada folha é transversa à γ ; (ii) qualquer ponto crítico é do tipo Elíptico e cada folha é transversa à γ ; (iii) a família é um desdobramento genérico de uma cúspide reversível (Medrado-Teixeira, [11]), de tal forma que na cúspide, o contato entre a folha e γ é quadrático. (veja figura 0.1) Tal fato é provado no Capítulo 3.

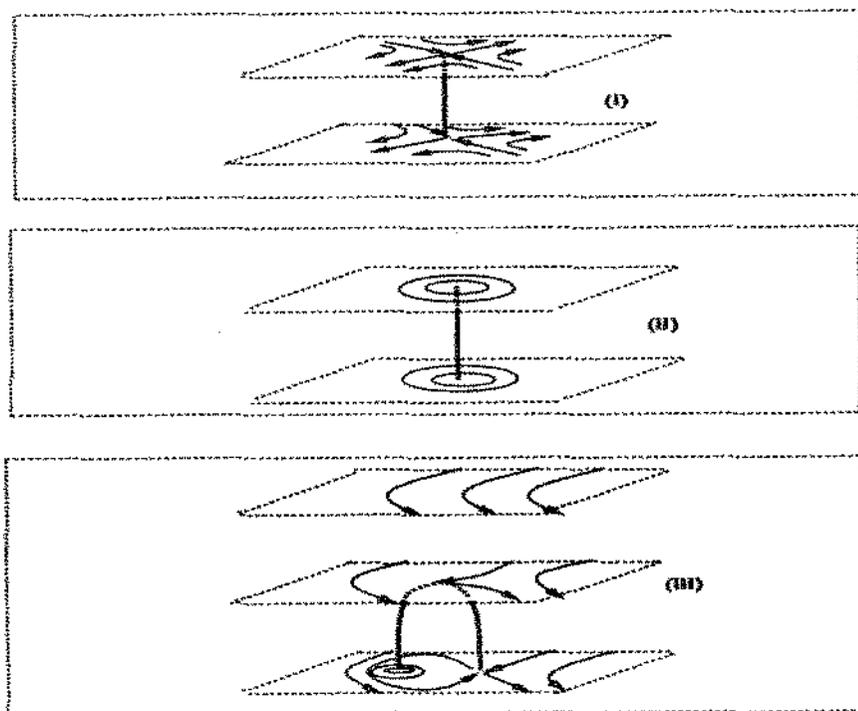


Figura 0.1: Singularidades Codimensão Zero

Este trabalho, está composto de quatro capítulos, além da presente introdução, onde apresentamos os resultados principais: Teorema A, Teorema B e Teorema C, que serão demonstrados nos capítulos subsequentes. No Capítulo 1, estabelecemos a notação e definimos a mudança de coordenadas fundamental para o desenvolvimento deste trabalho. Esta mudança de coordenadas, faz a conexão entre os campos vetoriais Reversíveis e os campos vetoriais definidos em variedades com Bordo. No Capítulo 2, demonstramos o Teorema A. No Capítulo 3, demonstramos o Teorema B. No Capítulo 4, classificamos as singularidades de codimensão 2 de campos vetoriais definidos em variedades de dimensão 3 com bordo. A seguir, exibimos as C^0 - formas normais, os Diagramas de Bifurcação, de campos vetoriais reversíveis, e provamos o Teorema C.

0.1 Resultados Principais

O conceito de estabilidade estrutural em Ω vem da seguinte definição .

Definição 0.1

Dizemos que dois campos vetoriais X_1 e X_2 em Ω são C^0 – equivalentes, se existe um homeomorfismo de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3 , que aplica trajetórias de X_1 em trajetórias de X_2 preservando o sentido dos mesmos.

Denotamos por ν_0 o conjunto dos elementos em Ω os quais são estruturalmente estáveis.

Teorema A

- (i) ν_0 é aberto e denso em Ω ;
- (ii) $X \in \nu_0$ se e somente se X é C^0 – equivalente à uma das seguintes formas normais:

(0.0) Ponto Regular: $X(x, y, z) = (0, 0, 1)$;

(0.1) Tipo Dobra Sela: $X(x, y, z) = (z, 0, \frac{1}{2}x)$;

(0.2) Tipo Dobra Elíptico: $X(x, y, z) = (z, 0, -\frac{1}{2}x)$;

(0.3) Tipo cúspide: $X(x, y, z) = (z, 0, \frac{1}{2}(y + x^2))$.

Denotamos por ν_1 o conjunto dos elementos em Ω os quais são estruturalmente estáveis relativo à $\Omega_1 = \Omega - \nu_0$.

Consideremos o espaço Θ_1 dado por:

$$\Theta_1 = \{ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega \text{ de classe } C^1 \}$$

munido da Topologia C^1 .

Teorema B (Classificação singularidades de Codimensão 1)

(i) ν_1 é uma subvariedade de codimensão 1 em Ω e denso em Ω_1 ;

(ii) Consideremos o conjunto Γ_1 dado por:

$$\Gamma_1 = \{\gamma \in \Theta_1 \text{ tal que } \gamma \text{ é transversal à } \nu_1\}.$$

Então, qualquer $\gamma \in \Gamma_1$ é C^0 -equivalente à uma das seguintes formas normais:

(1.0) Todos os tipos listados no Teorema A;

(1.1) **L 1.1-Nó** $X_\alpha(x, y, z) = (axz, byz, \frac{1}{2}(ax + by + cz^2 + \alpha))$, com $(a, b, c) = \delta(3, 2, 1)$, e $\delta = \pm 1$;

(1.2) **L 1.2-Nó** $X_\alpha(x, y, z) = (axz, byz, \frac{1}{2}(ax + by + cz^2 + \alpha))$, com $(a, b, c) = \delta(1, 3, 2)$, e $\delta = \pm 1$;

(1.3) **L 1.3-Nó** $X_\alpha(x, y, z) = (axz, byz, \frac{1}{2}(ax + by + cz^2 + \alpha))$, com $(a, b, c) = \delta(1, 2, 3)$, e $\delta = \pm 1$;

(1.4) **Sela** $X_\alpha(x, y, z) = (xz, 2yz, \frac{1}{2}(x + 2y - z^2 + \alpha))$;

(1.5) **Foco 1** $X_\alpha(x, y, z) = ((-x + y)z, (-x - y)z, \frac{1}{2}(-3x - y + z^2 + \alpha))$;

(1.6) **Lips** $X_\alpha(x, y, z) = (z, 0, \frac{1}{2}(-3x^2 + y^2 + \alpha))$;

(1.7) **Bec to Bec** $X_\alpha(x, y, z) = (z, 0, \frac{1}{2}(-3x^2 - y^2 + \alpha))$;

(1.8) **Dove's Tail** $X_\alpha(x, y, z) = (z, 0, \frac{1}{2}(4\delta x^3 + y + \alpha x))$, com $\delta = \pm 1$;

Denotamos por ν_2 o conjunto dos elementos em Ω os quais são estruturalmente estáveis relativo à $\Omega_2 = \Omega_1 - \nu_1$.

Consideremos o espaço Θ_2 dado por:

$$\Theta_2 = \{\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega \text{ de classe } C^1\}$$

munido da Topologia C^1 .

Teorema C (Classificação singularidades de Codimensão 2)

- (i) ν_2 é uma subvariedade de codimensão 2 em Ω e denso em Ω_2 ;
(ii) Consideremos o conjunto Γ_2 dado por:

$$\Gamma_2 = \{\gamma \in \Theta_2 \text{ tal que } \gamma \text{ é transversal à } \nu_2\}.$$

Então, qualquer $\gamma \in \Gamma_2$ é C^0 -equivalente à uma das seguintes formas normais:

(2.0) Todos os tipos listados no Teorema B;

(2.1) **Sela-nó** $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (z(\varepsilon(x+y)^2 + \alpha), z(x-y), \frac{1}{2}(3x+y-2z^2 + \varepsilon(x+y)^2 + \beta))$;

(2.2) **Hopf** $F_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (z(-y+x(\alpha-x^2-v^2)), z(x+y(\alpha-x^2-v^2)), -x-3y+2z^2 + (x+y)(\alpha-x^2-v^2) + \beta)$;

(2.3) **L 2.1-Nó** $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (axz, byz, \frac{1}{2}(y+cz^2 + \varepsilon(c-2a)x^2 + \alpha u + \beta))$,
com $(a, b, c) = \delta(5, 3, 1)$, se $\varepsilon < 0$, $(a, b, c) = \delta(1, 3, 5)$, se $\varepsilon > 0$ e $\delta = \pm 1$;

(2.4) **L 2.3-Nó** $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (axz, byz, \frac{1}{2}(y+cz^2 + \varepsilon(c-2a)x^2 + \alpha u + \beta))$,
com $(a, b, c) = \delta(3, 1, 5)$ e $\delta = \pm 1$;

(2.5) **L 2.5-Nó** $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (axz, byz, \frac{1}{2}(y+cz^2 + \varepsilon(c-2a)x^2 + \alpha u + \beta))$,
com $(a, b, c) = \delta(1, 3, 5)$, se $\varepsilon < 0$, $(a, b, c) = \delta(5, 3, 1)$, se $\varepsilon > 0$ e $\delta = \pm 1$;

(2.6) **L 2.0-Sela** $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (axz, byz, \frac{1}{2}(y+cz^2 + \varepsilon(c-2a)x^2 + \alpha u + \beta))$,
com $(a, b, c) = \delta(-3, -1, 1)$, se $\varepsilon < 0$, $(a, b, c) = \delta(-1, -3, 1)$, se $\varepsilon > 0$ e $\delta = \pm 1$;

(2.7) **L 2.2-Sela** $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (axz, byz, \frac{1}{2}(y+cz^2 + \varepsilon(c-2a)x^2 + \alpha u + \beta))$,
com $(a, b, c) = \delta(-1, -3, 1)$, se $\varepsilon < 0$, $(a, b, c) = \delta(-3, -1, 1)$, se $\varepsilon > 0$ e $\delta = \pm 1$;

- (2.8) **Foco 2** $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (axz, (a^2 - 2ab - b^2)yz + 2abz^3 - 2abx^2z - 2ab\alpha xz, \frac{1}{2}(-2by + (a+b)z^2 - (a+b+2c)x^2 - \alpha(a+b+c)x + \beta))$, com $(a, b, c) \in \{\delta(1, 2, 3), \delta(1, 2, -3)\}$ e $\delta = \pm 1$;
- (2.9) **Nó Degenerado** $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (axz + \alpha yz, xz + ayz, \frac{1}{2}(x + y + cz^2 + \beta))$, com $(a, c) \in \{\delta(1, 2), \delta(1, -2)\}$ e $\delta = \pm 1$;
- (2.10) **Foco Degenerado** $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (axz + byz + \alpha xz, -bxz + ayz, \frac{1}{2}(x + y + az^2 + \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)xy + \beta))$, com $(a, b) \in \{\delta(1, 2), \delta(1, -2)\}$, $\delta = \pm 1$ e $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{1, -1\}$;
- (2.11) **Foco Tangente 1** $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (axz + byz, -bxz + ayz, \frac{1}{2}(cz^2 + x^2 + y^2 + \alpha x + \beta))$, com $(a, b, c) \in \{\delta(1, 2, 3), \delta(1, 2, -3)\}$ e $\delta = \pm 1$;
- (2.12) **Foco Tangente 2** $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (axz + byz, -bxz + ayz, \frac{1}{2}(cz^2 + x^2 - y^2 + \alpha x + \beta))$, com $(a, b, c) \in \{\delta(1, 2, 3), \delta(1, 2, -3)\}$ e $\delta = \pm 1$;
- (2.13) **Goose** $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (z, 0, \frac{1}{2}(3x^2 + y^3 + \alpha y + \beta))$;
- (2.14) **Gull** $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (z, 0, \frac{1}{2}(4x^3 + 2xy - y^2 + \alpha y + \beta))$;
- (2.15) **Butterfly** $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (z, 0, \frac{1}{2}(5x^4 + 3\varepsilon x^2 y + y + \alpha x^2 + \beta x))$ com $\varepsilon = \pm 1$;

Observação 0.2 Não exigimos continuidade com relação aos parâmetros na obtenção das formas normais.

0.1.1 Exemplos

A seguir, apresentaremos dois exemplos para ilustrarmos alguns resultados desta tese. Notações e definições são encontradas no capítulo 1.

Exemplo 1 Seja o campo vetorial φ -reversível $X \in \Omega$ dado por

$$X(x, y, z) = (z(a + f(x, y, z^2)), 0, x/2),$$

onde:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) &= (x, y, -z), \quad a \neq 0 \text{ e} \\ f(x, y, z^2) &= \sum_{i+j+k>1} m_{ijk} x^i y^j z^{2k}.\end{aligned}$$

Consideremos $S = \text{Fix}(\varphi) = \{z = 0\}$. Temos então uma linha de pontos críticos simétricos L_X dado por

$$L_X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0|x = z = 0\}.$$

Seja a mudança de variáveis em $\mathbb{R}^3, 0$ dada por:

$$(u, v, w) = (x, y, z^2), \quad z > 0.$$

Ficamos agora com

$$X_1(u, v, w) = (\sqrt{w}(a + f(u, v, w)), 0, \sqrt{w}u)$$

que é topologicamente equivalente à:

$$F = F(X) = (a + f(u, v, w), 0, u),$$

para $w > 0$. Consideremos S dado implicitamente por $h(u, v, w) = w$.

Através desta mudança de variáveis temos que, estudar o campo vetorial φ -reversível $X \in \Omega$ é equivalente à estudar o campo vetorial $F \in \mathfrak{X}^r$ definido em $\mathbb{R}^3, 0$ com bordo S .

Observemos que F não tem pontos críticos numa vizinhança do 0, em S e temos uma linha de tangências das órbitas do campo F com S , dada por $Fh(u, v, 0) = u = 0$, ou seja $L_F = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3, 0|u = w = 0\}$. Temos ainda que ao longo de L_F , $F^2h \neq 0$, ou seja as tangências são quadráticas.

Assim pelo Teorema 2.1, temos que F tem codimensão zero em \mathfrak{X}^r e forma normal C^0 -equivalente à $\tilde{F}(u, v, w) = (a, 0, u)$. E, equivalentemente, X tem codimensão zero em Ω e forma normal C^0 -equivalente à $\tilde{X}(x, y, z) = (az, 0, x)$. (Teorema A)

Exemplo 2 *Seja o campo vetorial φ -reversível $X \in \Omega$ dado por*

$$X(x, y, z) = (z(x + f^1(x, y, z^2)), z(2y + f^2(x, y, z^2)), (x + y + 3z^2)/2),$$

onde:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) &= (x, y, -z), \\ f^1(x, y, z^2) &= \sum_{i+j+k>1} m_{ijk} x^i y^j z^{2k} \text{ e} \\ f^2(x, y, z^2) &= \sum_{i+j+k>1} n_{ijk} x^i y^j z^{2k}.\end{aligned}$$

Consideremos $S = \text{Fix}(\varphi) = \{z = 0\}$. Temos então uma linha de pontos críticos simétricos L_X dado por

$$L_X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 | x = -y, z = 0\}.$$

Seja a mudança de variáveis em $\mathbb{R}^3, 0$ dada por:

$$(u, v, w) = (x, y, z^2), z > 0.$$

Ficamos agora com

$$X_1(u, v, w) = (\sqrt{w}(x + f^1(u, v, w)), \sqrt{w}(2y + f^2(u, v, w)), \sqrt{w}(u + v + 3w))$$

que é topologicamente equivalente à:

$$F(u, v, w) = F(X) = ((x + f^1(u, v, w)), (2y + f^2(u, v, w)), u + v + 3w),$$

para $w > 0$. Consideremos S dado implicitamente por $h(u, v, w) = w$.

Através desta mudança de variáveis temos que, estudar o campo vetorial φ -reversível $X \in \Omega$ é equivalente à estudar o campo vetorial $F \in \mathcal{X}^r$ definido em $\mathbb{R}^3, 0$ com bordo S .

Observemos que F tem um ponto crítico hiperbólico em $0 \in S$ com autovalores $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ e os autoespaços associados transversais à S em 0 . Temos uma linha de tangências das órbitas do campo F com S , dada por $Fh(u, v, 0) = u + v = 0$, ou seja $L_F = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3, 0 | u = -v, w = 0\}$. Temos ainda que ao longo de L_F , $F^2h \neq 0$, ou seja as tangências são quadráticas.

Assim pelo Teorema 3.3, temos que F tem codimensão um em \mathcal{X}^r e forma normal C^0 -equivalente à $\tilde{F}(u, v, w) = (u, 2v, u + v + 3w)$. E, equivalentemente, X tem codimensão um em Ω e forma normal C^0 -equivalente à $\tilde{X}(x, y, z) = (zx, 2zy, x + y + 3z^2 + \alpha)$. (Teorema B)

Capítulo 1

Preliminares

Consideraremos sistemas dinâmicos gerados por campos vetoriais sobre variedades com bordo. Por simplicidade, consideramos M mergulhada em uma variedade tri-dimensional N , sem bordo.

Dizemos que dois campos vetoriais X, Y são germe equivalentes sobre M se eles coincidem em uma vizinhança de M . Um campo vetorial X sobre M é por definição uma classe de campos vetoriais germes equivalentes (sobre M) definidos em N . Se o campo X tem um representante \tilde{X} de classe C^r , $0 \leq r \leq \infty$, sobre N , dizemos que X é de classe C^r .

Definimos agora o fluxo de X . Tome o fluxo $\tilde{\varphi}$ de um representante \tilde{X} de X ; $\tilde{\varphi}$ está definida sobre um conjunto $D(\tilde{X}) = \{(x, t) \in N \times \mathbb{R}, t \in \tilde{I}\}$, onde \tilde{I} é um intervalo aberto com extremos ω_-, ω_+ , os quais podem ser infinito. O fluxo φ de X é definido por $\varphi(x, t) = \tilde{\varphi}(x, t)$ para $x \in M$ e $t \in I(x)$, onde $I(x)$ é o intervalo maximal contendo 0 para o qual $\tilde{\varphi} \in M$ quando $t \in I(x)$. φ e $D(X)$ não dependem do representante \tilde{X} de X . Mais ainda, quaisquer dois representantes de X definem fluxos sobre N que coincidem numa vizinhança de $D(X)$. Temos que $\varphi = \tilde{\varphi}|D(X)$.

A órbita $\gamma(x)$ de X , passando por $x \in M$ é por definição a imagem de $I(x)$ pela aplicação curva integral $\varphi(x) : t \rightarrow \varphi(x, t)$. Órbitas são orientadas pela orientação induzida por esta aplicação da orientação positiva de $I(x)$.

Germe de órbitas e germe de trajetória tem definições similares.

Dizemos que dois campos vetoriais X e Y sobre M são topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo h sobre M , aplicando órbitas de X em órbitas de Y preservando o sentido dos mesmos.

Estudaremos famílias locais numa vizinhança de $(0, 0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^k$, ou seja, germes de famílias em $(0, 0)$. Tal família local X_μ será chamado desdobramento à k - parâmetros de X_0 .

Como o conjunto $S = \text{Fix}(\varphi)$ é uma superfície suave em $(\mathbb{R}^3, 0)$, sabemos (Teorema Montgomery-Bochner em [13]) que a involução φ é C^∞ -conjugada à $\varphi_0(x, y, z) = (x, y, -z)$. Observemos ainda que este mesmo resultado é consequência da Proposição 1.5. Nestas coordenadas, temos que $S = \{z = 0\}$.

Seja X um campo vetorial(germe de) C^r sobre $(\mathbb{R}^3, 0)$ e φ uma involução.

Definição 1.1

Dizemos que X é φ - reversível se

$$D\varphi(p)X(p) = -X(\varphi(p))$$

para $p \in (\mathbb{R}^3, 0)$.

Fixemos coordenadas em $(\mathbb{R}^3, 0)$, de tal forma que $\varphi(x, y, z) = (x, y, -z)$ e denotemos por Ω o conjunto de todos campos vetoriais φ - reversíveis sobre $(\mathbb{R}^3, 0)$. Nestas coordenadas temos que o conjunto dos pontos fixos de φ , S , é dado por $S = \{z = 0\}$.

Munimos Ω com a topologia C^r , com $r > 3$.

Qualquer ponto crítico de $X \in \Omega$ sobre S é chamada uma singularidade simétrica(ou simplesmente, singularidade) de X ; caso contrário, é uma singularidade assimétrica. Qualquer outro ponto em $(\mathbb{R}^3, 0)$, é um ponto regular de X .

1.1 Singularidades no Bordo

Seja (u, v, w) um sistema de coordenadas em $(\mathbb{R}^3, 0)$.

Consideremos $M = \{(u, v, w) \in (\mathbb{R}^3, 0) | w \geq 0\}$ e o conjunto \mathcal{X}^r dos campos vetoriais C^r sobre M ($r > 3$) munido com a topologia C^r . Denotemos o bordo de M por S .

Definição 1.2

Um ponto $p \in S$ é uma S -singularidade (ou simplesmente singularidade) de F de \mathcal{X}^r se $F(p)$ é tangente à S em p .

Seja $h : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $h(u, v, w) = w$.

Nestas coordenadas o conjunto S -singular de F em \mathcal{X}^r é determinado pelas seguintes equações :

$$h(u, v, w) = 0 \text{ e } Fh(u, v, w) = 0$$

Em nosso contexto, as S -singularidades de F , são primeiramente classificadas por:

- (i) $F(p) \neq 0$
- (ii) p é um ponto crítico de F .

O segundo caso não acontece genericamente para as singularidades de codimensão 0. No primeiro caso, a teoria de singularidades ocupa lugar de destaque na classificação das singularidades.

No decorrer de nossos argumentos, embora omitidas algumas vezes no texto, usamos técnicas conhecidas (Melo-Palis, [12] e Sotomayor-Teixeira, [21]) para determinarmos homeomorfismos locais os quais são C^0 -equivalências entre dois campos vetoriais definidas numa vizinhança da fronteira de uma região em \mathbb{R}^3 . Para C^0 -equivalências entre duas famílias de campos vetoriais, nós não requeremos continuidade com respeito aos parâmetros.

1.2 Sistemas de Coordenadas

A seguir, apresentaremos três sistemas de coordenadas, os quais serão muito úteis no decorrer deste trabalho.

O primeiro, usando a definição de reversibilidade do campos vetorial X , fazemos uma troca de coordenadas, endereçando a análise das S -singularidades ao estudo de campos vetoriais em variedades com bordo.

Os outros dois sistemas de coordenadas, são usados na análise dos campos vetoriais com bordo. Usamos estes para analisarmos as singularidades Tangenciais ($F(p) \neq 0$).

1.2.1 Mudança de Coordenadas

A seguinte construção será muito útil ao longo deste trabalho.

Seja X em Ω . Nas coordenadas acima, a definição de um campo vetorial reversível implica a seguinte forma geral para o campo vetorial X :

$$X(x, y, z) = (zf^1(x, y, z^2), zf^2(x, y, z^2), \frac{g(x, y, z^2)}{2}) \quad (1.1)$$

No semi-espço $z > 0$, consideraremos

$$u = x, \quad v = y \quad \text{e} \quad w = z^2$$

Um cálculo simples mostra que nestas coordenadas X é transformado em:

$$X_1(u, v, w) = (\sqrt{w}f^1(u, v, w), \sqrt{w}f^2(u, v, w), \sqrt{wg}(u, v, w)) \quad \text{em} \quad w > 0$$

Para $z > 0$, F é topologicamente equivalente à $F = F(X)$, onde:

$$F(u, v, w) = (f^1(u, v, w), f^2(u, v, w), g(u, v, w)) \text{ para } w > 0$$

Observemos que F pode ser C^∞ – estendido à uma vizinhança completa do 0. Devido à propriedades de simetria de X (com respeito à involução canônica), deduzimos que o comportamento de $F(X)$ em $(M, 0)$, determina completamente o comportamento de X em 0. Assim o problema inicial é conduzido à analisar o retrato de fase de F em M . A seguir, não faremos distinção entre F e qualquer uma de suas extensões.

Observação 1.3 *Teixeira, [26]*

Em um ponto regular a trajetória de X é sempre “ortogonal” à S . Em um ponto crítico de X , o contato entre uma variedade invariante e S decai por um fator de $1/2$ em comparação com a órbita ou variedade invariante passando pelo mesmo ponto. Ilustramos este fato, assumindo que $\{w = u^k, k > 0\}$ é uma variedade invariante de $F(X)$ sobre a região $w \geq 0$. Isto implica que a curva $z = x^{k/2}$ é uma variedade invariante de X sobre $z \geq 0$.

1.2.2 Fluxo Tubular

Seja F um campo vetorial C^∞ sobre \mathbb{R}^3 parametrizado por (x, y, z) tal que $X(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Um *Fluxo Tubular* K_F em (x_0, y_0, z_0) consiste de uma mudança de coordenadas C^∞ (i.e., um germe de um difeomorfismo C^∞), $K_F(x, y, z) = (u, v, w)$ em uma vizinhança de (x_0, y_0, z_0) , tal que $K_F(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ e no novo sistema de coordenadas temos $X(u, v, w) = (1, 0, 0)$. Temos que se G é uma pequena perturbação de F , então a aplicação $G \rightarrow K_G$ é C^∞ . (Melo-Palis, [12])

1.2.3 Singularidades do Tipo Tangencial

Consideremos agora coordenadas $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, numa vizinhança de $p \in S$ tal que $F = \frac{\partial}{\partial \xi_1}$ e possamos resolver $s(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ por $\xi_3 = \eta(\xi_1, \xi_2)$ com $\eta(0, 0) = 0$. Fixemos $N = \{\xi_1 = 0\}$ sendo uma secção transversal à F em p . Definimos, agora a aplicação, $\sigma_F : S, p \rightarrow N, p$ por:

$$\sigma_F(\xi_1, \xi_2, \eta(\xi_1, \xi_2)) = (0, \xi_2, \eta(\xi_1, \xi_2))$$

A aplicação σ_F é da mesma classe de diferenciabilidade de F e é chamada de projecção de S ao longo das órbitas de F sobre uma superfície transversal N (detalhes em Sotomayor, [19]).

A seguir uma generalização para \mathbb{R}^3 de um resultado dado por (Teixeira, [25]) para \mathbb{R}^2 .

Seja $\varphi_1 : \mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$, um germe de uma involução com coordenadas $\varphi_1 = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$.

Lema 1.4

Suponhamos que φ satisfaz:

1. $\theta_3(x, y, 0) = 0$
2. $z\theta_3(x, y, z) < 0$ se $z < 0$

Então existe um germe de uma C^∞ dobra $\delta : \mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ tal que $\delta \circ \varphi_1 = \delta$.

Prova:

Temos que

$$D\varphi(x, y, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\theta_1}{\partial x}(x, y, 0) & \frac{\partial\theta_1}{\partial y}(x, y, 0) & \frac{\partial\theta_1}{\partial z}(x, y, 0) \\ \frac{\partial\theta_2}{\partial x}(x, y, 0) & \frac{\partial\theta_2}{\partial y}(x, y, 0) & \frac{\partial\theta_2}{\partial z}(x, y, 0) \\ 0 & 0 & \frac{\partial\theta_3}{\partial z}(x, y, 0) \end{pmatrix}$$

Usando o fato de φ ser uma involução, ou seja

$$\varphi \circ \varphi(x, y, z) = (\theta_1(p), \theta_2(p), \theta_3(p)) = (x, y, z)$$

onde $p = (\theta_1(x, y, z), \theta_2(x, y, z), \theta_3(x, y, z))$.

Após alguns cálculos, temos que:

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial x}(x, y, 0) = \frac{\partial\theta_2}{\partial y}(x, y, 0) = 1 \text{ e } \frac{\partial\theta_3}{\partial z}(x, y, 0) = -1$$

A função requerida é dada por:

$$\delta(x, y, z) = (x + \theta_1(x, y, z), y + \theta_2(x, y, z), x\theta_1(x, y, z) + y\theta_2(x, y, z) + z\theta_3(x, y, z))$$

Pois,

$$D\delta = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial\theta_1}{\partial x} & \frac{\partial\theta_1}{\partial y} & \frac{\partial\theta_1}{\partial z} \\ \frac{\partial\theta_2}{\partial x} & 1 + \frac{\partial\theta_2}{\partial y} & \frac{\partial\theta_2}{\partial z} \\ \theta_1 + x\frac{\partial\theta_1}{\partial x} + y\frac{\partial\theta_2}{\partial x} + z\frac{\partial\theta_3}{\partial x} & x\frac{\partial\theta_1}{\partial y} + \theta_2 + y\frac{\partial\theta_2}{\partial y} + z\frac{\partial\theta_3}{\partial y} & x\frac{\partial\theta_1}{\partial z} + y\frac{\partial\theta_2}{\partial z} + \theta_3 + z\frac{\partial\theta_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

E,

$$D\delta(0) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{\partial\theta_1}{\partial y} & \frac{\partial\theta_1}{\partial z} \\ \frac{\partial\theta_2}{\partial x} & 2 & \frac{\partial\theta_2}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A função $\Delta(x, y, z) = \det(D\delta(x, y, z))$ satisfaz:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial x}(0) = \frac{\partial\Delta}{\partial y}(0) = 0 \text{ e } \frac{\partial\Delta}{\partial z}(0) < 0$$

E assim $K = \text{Kernel}(D\delta(0))$ é transversal à $\tilde{\Sigma}(\delta) = \{(x, y, z) | \Delta(x, y, z) = 0\}$ em 0.

O que finaliza a prova. ■

Proposição 1.5

Com as hipótese do Lema 1.4, existe um germe de um C^∞ -difeomorfismo $\zeta : \mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ tal que $\varphi_1 \zeta = \zeta \varphi$, onde $\varphi : \mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ é dado por $\varphi(x, y, z) = (x, y, -z)$.

Prova:

Seja δ a dobra associada à φ_1 (via Lema 1.4).

Sabemos que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3, 0 & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{R}^3, 0 \\ \zeta \downarrow & & k \downarrow \\ \mathbb{R}^3, 0 & \xrightarrow{\delta_0} & \mathbb{R}^3, 0 \end{array}$$

onde $\delta_0(x, y, z) = (x, y, z^2)$.

O Resultado agora é imediato. ■

A seguir apresentaremos o polinômio característico relacionado com uma matriz em dimensão 3.

Observação 1.6

O polinômio característico de uma matriz $A_{3 \times 3}$ é dado por:

$$P_\lambda(A) = \lambda^3 - \sigma(A)\lambda^2 + \sigma(A^*)\lambda - \det(A)$$

onde:

- $\sigma(A)$ é o traço da matriz A ;
- A^* é a matriz dos cofatores de A ;
- $\det(A)$ é o determinante da matriz A .

Relacionaremos a seguir, o polinômio com o tipo de autovalores λ que podemos ter.

1. Temos as relações :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \sigma(A)$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \det(A)$$

2. Se $\det(A) \neq 0$, então os autovalores são não nulos;

3. O polinômio pode ser escrito nas formas abaixo:

$$P_\lambda(A) = (\lambda - \lambda_3)(\lambda^2 - (\sigma(A) - \lambda_3)\lambda + \lambda_3(\lambda_3 - \sigma(A)) + \sigma(A^*))$$

ou

$$P_\lambda(A) = (\lambda - \lambda_3)\left(\lambda^2 - (\sigma(A) - \lambda_3)\lambda + \frac{\det(A)}{\lambda_3}\right), \quad \lambda_3 \neq 0$$

ou ainda:

$$P_\lambda(A) = \lambda(\lambda^2 - \sigma(A)\lambda + \sigma(A^*)), \quad \lambda_3 = 0$$

onde λ_3 é um autovalor real.

4. Seja

$$\Delta = [(\lambda_3 - \sigma(A))^2 - 4\frac{\det(A)}{\lambda_3}] \text{ se } \det(A) \neq 0$$

ou

$$\Delta = \sigma(A)^2 - 4\sigma(A^*) \text{ se } \det(A) = 0.$$

Se $\Delta < 0$ os autovalores λ_1, λ_2 tem parte imaginária não nula; caso contrário, λ_1, λ_2 são reais;

5. A parte real dos autovalores λ_1, λ_2 é dado pelo valor de $\lambda_3 - \sigma(A)$;

Capítulo 2

Singularidades Codimensão 0

Neste capítulo, demonstraremos o **Teorema A**. Usaremos fundamentalmente o artigo de *Sotomayor-Teixeira* ([21]). Neste artigo, temos a análise de singularidades de campos vetoriais definidos em variedades com bordo em $(\mathbb{R}^3, 0)$. Usamos a construção feita na secção 1.2.1 e endereçamos a análise para os resultados deste artigo. Usamos ainda a simetria e a reversibilidade para completarmos o estudo.

O próximo resultado está provado em (Sotomayor-Teixeira, [21]).

Teorema 2.1 (Sotomayor e Teixeira)

As seguintes afirmações são válidas:

1. *Um campo vetorial $F \in \mathcal{X}^r$ está em Σ_0 se e somente se*
 - (a) $F(p) \neq 0$ para todo $p \in S$;
 - (b) *para toda definição local, h , de S em p , uma das seguintes condições é satisfeita:*
 - (b₁) **Caso Regular** $Fh \neq 0$;
 - (b₂) **Caso Dobra** $Fh(p) = 0$ e $F^2h(p) \neq 0$;

(b₃) **Caso Cúspide** $Fh(p) = F^2h(p) = 0$, $F^3h(p) \neq 0$ e o conjunto de vetores $\{dh(p), dFh(p), dF^2h(p)\}$ é Linearmente Independente.

2. Fixando $h(u, v, w) = w$, as formas normais genéricas dos campos vetoriais em Σ_0 são dadas por:

1-Caso Regular $F(u, v, w) = (0, 0, 1)$;

2-Caso Dobra $F(u, v, w) = (1, 0, u)$;

3-Caso Cúspide $F(u, v, w) = (1, 0, u^2 + v)$.

3. O conjunto de todos campos vetoriais estáveis é aberto e denso em \mathcal{X}^r .

Os pontos em S para os quais $Fh \neq 0$ (resp. $Fh = 0$) são chamados pontos S - regulares (resp. S - singulares) de F . Os pontos S - singulares em S que satisfazem b_2 , são chamados de *Dobra*. Estes formam curvas L_F em S , ao longo das quais, F tem contato quadrático com S . Esta tangência pode ser interna (se $F^2h(p) < 0$) ou externa (se $F^2h(p) > 0$).

O conjunto, onde b_3 é satisfeito, é a união de pontos isolados de contato cúbico entre F e S , localizados no extremos das curvas de singularidades tipo Dobra e são chamadas *singularidades tipo Cúspidais*, ou simplesmente *cúspides*.

Assumimos que $X(0) = 0$. Isto implica que $g(0) = 0$. Assim, o campo vetorial F fica escrito na forma: Tomemos o campo vetorial F dado por:

$$\begin{aligned} f^1(u, v, w) &= a_{000} + a_{100}u + a_{001}v + h.o.t. \\ f^2(u, v, w) &= b_{000} + b_{100}u + b_{001}v + h.o.t. \\ g(u, v, w) &= c_{000} + c_{100}u + c_{001}v + h.o.t. \end{aligned}$$

De $X(0) = 0$ temos que $c_{000} = 0$. Como $h(u, v, w) = w$, temos que

$$Fh(u, v, w) = g(u, v, w)$$

Se $X \in \Omega$, denotemos por L_X o conjunto crítico de $X \in (\mathbb{R}^3, 0)$.

O próximo Lema nos garante que, se uma trajetória de um campo vetorial reversível intercepta S em dois pontos distintos, então esta trajetória é fechada.

Lema 2.2

Seja X_t o fluxo associado ao campo vetorial $X \in \Omega$, tal que $X_0(p) = p$ e $p \in S$. Se $X_\tau(p) = q \in S$ com $p \neq q$ e $\tau \in \mathbb{R}$, então, $X_{2\tau}(p) = p$.

Prova:

A seguinte expressão segue da definição de reversibilidade:

$$X_t \circ \varphi \circ X_t(p) = \varphi(p)$$

Assim,

$$X_\tau \circ \varphi \circ X_\tau(p) = \varphi(p)$$

Mas,

$$p, q \in S = \text{Fix}(\varphi) \Rightarrow (p) = p \text{ e } \varphi(X_\tau(p)) = X_\tau(p)$$

Portanto,

$$X_{2\tau}(p) = p$$

■

O próximo Lema, caracteriza todas as singularidades de Codimensão 0 de X em Ω .

Lema 2.3

Seja $X \in \Omega$ tal que $X(0) = 0$ e 0 é uma singularidade de Codimensão 0 de $F(X)$. Então, o conjunto crítico de X numa vizinhança de 0 é constituído por uma curva $L_X(s) \in S$, com $s \in (\mathbb{R}, 0)$. Mais ainda, $(\mathbb{R}^3, 0)$ é folheado por "planos" invariantes suaves Ξ_λ , $0 \in \Xi_0$, de tal forma que:

- (1) para todo ponto $p \in L_X$ temos que, ou p é uma sela hiperbólica ou um ponto Elíptico de $X|_{\Xi_\lambda}$, desde que 0 seja uma singularidade tipo Dobra de $F(X)$;
- (2) se 0 é uma singularidade Cúspide, então $p \in L_X$ é um ponto crítico de $X|_{\Xi_\lambda}$ enquanto que $X|_{\Xi_\lambda}$ não tem ponto crítico de X desde que $\lambda < 0$ e $X|_{\Xi_\lambda}$ tenha dois pontos críticos (um ponto sela e um ponto Elíptico) para $\lambda > 0$.

Prova:

Nas coordenadas canônicas (ver secção 1.2.1), os campos vetoriais reversíveis, fica na seguinte forma:

$$X(x, y, z) = (zf^1(x, y, z^2), zf^2(x, y, z^2), g(x, y, z^2))$$

Assim, o campo vetorial auxiliar $F = F(X)$ fica na forma:

$$F(u, v, w) = (f^1(u, v, w), f^2(u, v, w), g(u, v, w))$$

A curva L_F de tangência entre F e S , é expressa (veja Teorema 2.1) por

$$\{w = 0\} \text{ e } \{g = 0\}$$

Neste caso, $F(0) \neq 0$, então nós temos, pela Teorema do Fluxo Tubular, um campo vetorial G e planos invariantes Ξ_λ tais que nas Dobras, Ξ_λ é transversal à linha de tangência e na Cúspide, Ξ_λ tem contato quadrático com a linha de tangência. Mais ainda, genericamente temos que 0, ou é uma (a) Dobra ou uma (b) Cúspide de F (veja Sotomayor-Teixeira, [21]).

Agora, traduzimos este resultado para o campo vetorial original X . No caso (a), devemos separar os casos: (a_1) $F^2h(0) > 0$ (tangência interna) e (a_2) $F^2h(0) < 0$ (tangência externa). Nós encontramos que:

Caso (a_1) significa que existe uma curva $L_X(s) \in S$ com $s \in (\mathbb{R}, 0)$ de pontos críticos de X de forma que $(\mathbb{R}^3, 0)$, é folheado por planos suaves invariantes Ξ_λ transversal à $L_X(s)$ tal que em s_0 , $p = L_X(s_0)$ é um ponto crítico do tipo sela hiperbólica de $X_{/\Xi_{\lambda_0}}$, $p \in \Xi_{\lambda_0}$;

Caso (a_2) significa que existe uma curva $L_X(s) \in S$ com $s \in (\mathbb{R}, 0)$ de pontos críticos de X de forma que $(\mathbb{R}^3, 0)$, é folheado por planos suaves invariantes Ξ_λ transversal à $L_X(s)$ tal que em s_0 , $p = L_X(s_0)$ é um ponto crítico Elíptico de $X_{/\Xi_{\lambda_0}}$, $p \in \Xi_{\lambda_0}$;

Caso (b) significa que existe uma curva $L_X(s) \in S$, with $s \in (\mathbb{R}, 0)$, de tal forma que $(\mathbb{R}^3, 0)$ é folheado por planos invariantes à um parâmetro Ξ_λ , onde 0 é um ponto crítico Cúspide de $X_{/\Xi_0}$; mais ainda, $X_{/\Xi_\lambda}$ não contém

pontos críticos, desde que $\lambda < 0$, e para $\lambda > 0$, X contém dois pontos críticos, $p_1 = L_X(s_1)$ e $p_2 = L_X(s_2)$ em $L_X(s)$ satisfazendo $s_1 s_2 < 0$, com p_1 (resp. p_2), sendo uma sela (resp. Elíptico) de X_{Ξ_λ} .

Agora a prova do Lema é imediata. ■

O próximo resultado é uma consequência imediata do Lema 2.3 e do Teorema 2.1.

Corolário 2.4

$X \in \nu_0$ se e somente se $F(X) \in \Sigma_0$. Mais, as C^0 -formas normais das singularidades de codimensão 0, ou são $X(x, y, z) = (z, 0, \frac{1}{2}\delta x)$ com $\delta = \pm 1$, ou $X(x, y, z) = (z, 0, \frac{1}{2}(y + x^2))$.

2.1 Prova do Teorema A

O Teorema A, segue do Corolário 2.4 e do Teorema 2.1. ■

2.2 Propriedades Globais de campos vetoriais reversíveis do tipo (3,2)

Nesta secção, listaremos algumas propriedades globais persistentes de um elemento $X \in \Omega$.

1. Se $X(p) = 0$ então $X(\varphi(p)) = 0$ e φ permuta as variedades estáveis e instáveis, Mais, qualquer ponto crítico simétrico não pode ser, nem atrator, nem repulsor;
2. Qualquer órbita periódica de X intersectando S é chamado de órbita periódica simétrica. Qualquer órbita periódica simétrica, nunca é um ciclo limite isolado. Se, por outro lado, uma órbita periódica, γ , de X

está sempre longe de S , ela é chamada de assimétrica, e sempre está acompanhada de outra órbita periódica assimétrica dada por $\varphi(\gamma)$;

3. Qualquer órbita de X conectando duas selas hiperbólicas assimétricas é persistente sob perturbações de X em Ω ;
4. Sejam p_1 e p_2 dois pontos críticos simétricos de codimensão zero de X do tipo sela. Chamemos por L_i o conjunto crítico numa vizinhança de p_i , $i = 1, 2$. Suponhamos que exista uma órbita γ de X , inteiramente contida em $\mathbb{R}^3 - S$, conectando p_1 e p_2 . Genericamente, esta conexão implica na existência de um laço heteroclínico, o qual não pode ser destruído por perturbações de X em Ω . (veja figura 2.1)

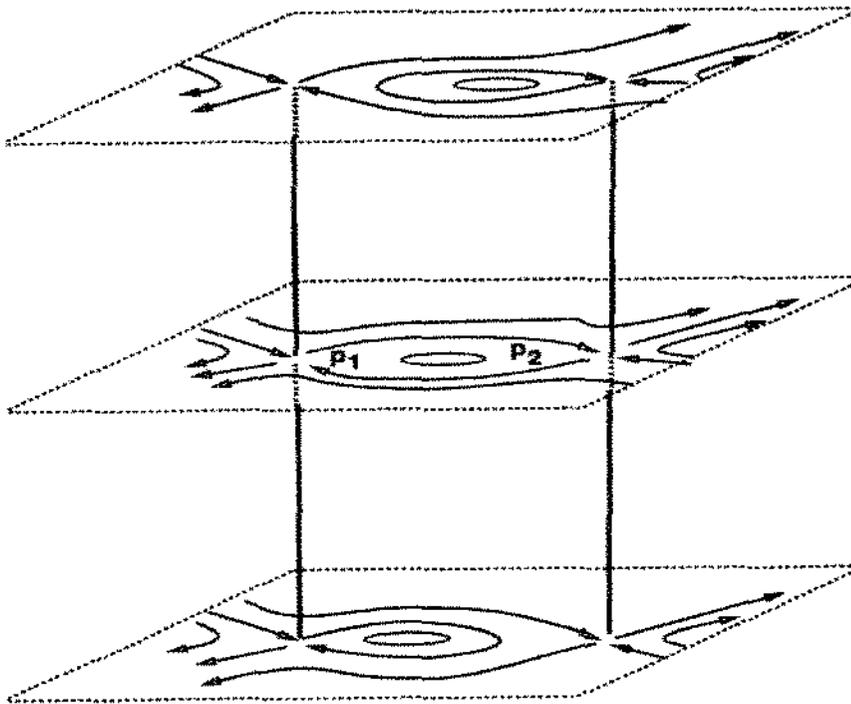


Figura 2.1: Laço Heteroclínico Persistente

Capítulo 3

Singularidades de Codimensão

1

Consideremos os conjuntos $\mathcal{X}_1^r = \mathcal{X}^r \setminus \Sigma_0$ (o conjunto de bifurcação de \mathcal{X}^r). Seja Σ_1 o subconjunto de \mathcal{X}_1^r constituído por elementos os quais são estruturalmente estáveis relativo à \mathcal{X}_1^r .

Como antes, o primeiro passo é encontrarmos as C^0 -formas normais para as singularidades de codimensão 1. Isto é feito nos Lemas 3.4, 3.5, e na Proposição 3.7.

Inicialmente, daremos uma idéia intuitiva da estratégia usada para classificar as singularidades do campo vetorial que estão no bordo.

Dado $F = (f^1, f^2, g)$ em \mathcal{X}^r tal que $g(0) = 0$, nós temos as seguintes possibilidades:

$$(i)(f^1(0), f^2(0)) \neq (0, 0) \text{ ou } (ii)(f^1(0), f^2(0)) = (0, 0)$$

Para o caso (i), todas as formas normais procuradas podem ser obtidas do Lema das Formas Normais de Vishik ([28]). Observemos que o caso (ii) não ocorre em codimensão 0. Na sequência de nossa análise, temos o resultado principal contido em ([21]), o qual nos dá uma classificação das S -singula-

ridades de codimensão 1. Iniciamos definindo os subconjuntos $\Sigma_1(a)$ e $\Sigma_1(b)$ de \mathcal{X}_1^r .

Seja h uma definição local de S em 0.

Definição 3.1

Dizemos que F está em $\Sigma_1(a)$ se as seguintes condições valem:

1. 0 é um ponto crítico hiperbólico de F ;
2. os autovalores de $DF(0)$ são distintos aos pares e os autoespaços correspondentes são transversais à S em 0 ;
3. cada par de autovalores complexos não conjugados de $DF(0)$ tem partes reais distintas.

Definição 3.2

Dizemos que F está em $\Sigma_1(b)$, se $F(0) \neq 0$, $Fh(0) = 0$, $F^2h(0) = 0$ e vale uma das seguintes condições :

- (b₁) $F^3h(0) \neq 0$, posto $\{dh(0), dFH(0), dF^2h(0)\} = 2$ e a função $Fh|_S$ tem em 0 um ponto crítico não degenerado (Morse);
- (b₂) $F^3h(0) = 0$, $F^4h(0) \neq 0$ e 0 é um ponto regular de $Fh|_S$.

O próximo resultado é muito útil na análise das singularidades de Codimensão 1, e está provado em [21].

Teorema 3.3 (Sotomayor e Teixeira)

As seguintes afirmações valem:

1. $\Sigma_1 = \Sigma_1(a) \cup \Sigma_1(b)$;
2. Σ_1 é uma subvariedade de codimensão 1 de \mathcal{X}_1^r ;

3. Σ_1 é aberto e denso em \mathcal{X}_1^r , na topologia induzida de \mathcal{X}^r ;
4. para um conjunto residual de curva suaves $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}^r$, γ intersecta Σ_1 transversalmente e $\gamma^{-1}(\mathcal{X}_2^r) = \emptyset$, $\mathcal{X}_2^r = \mathcal{X}_1^r - \Sigma_1$.

Consideramos ao longo deste capítulo, a função h uma definição implícita de S numa vizinhança do ponto crítico de F . Todos os resultados e definições nesta secção (3) não dependem da particular função h .

A próxima definição caracteriza com detalhes os campos vectoriais de Codimensão 1.

Denotemos por H o Hessiano de uma função f .

Definição 3.4

1. Os elementos de $\Sigma_1(a)$ são classificados por:
 - (a₁₁) **Nó** : $F(0) = 0$, os autovalores de $DF(0)$, λ_j , $j = 1, 2, 3$, são reais, distintos, $\lambda_1 \lambda_j > 0$, $j = 2, 3$, e os autoespaços são transversais à S em 0;
 - (a₁₂) **Sela** : $F(0) = 0$, os autovalores de $DF(0)$, λ_j , $j = 1, 2, 3$, são reais, distintos, $\lambda_1 \lambda_j < 0$, $j = 2, 3$, e os autoespaços são transversais à S em 0;
 - (a₁₃) **Foco** : 0 é um ponto crítico hiperbólico de F , os autovalores de $DF(0)$ são $\lambda_{12} = a \pm ib$, $\lambda_3 = c$, com a, b, c não nulos, $c \neq a$, e os autoespaços são transversais à S em 0.
2. Os elementos de $\Sigma_1(b)$ são classificados por:
 - (b₁₁) **Lips** definido em 3.2 (b₁), com $\det H(Fh_{/S}(0)) > 0$;
 - (b₁₂) **Bec to Bec** definido em 3.2 (b₁), com $\det H(Fh_{/S}(0)) < 0$;
 - (b₁₃) **Dove's Tail** definido em 3.2 (b₂);

No próximo Lema classificamos todos os tipos topológicos de singularidades de codimensão 1.

Lema 3.5 (Lema da C^0 -Forma Normal Codimensão 1)

Qualquer família à um parâmetro F_μ , $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, de campos vetoriais em \mathcal{X}^r , transversal à Σ_1 em F_0 , tem uma das seguintes C^0 -formas normais:

(1.1) **L 1.1-Nó** $F_\mu(u, v, w) = (au, bv, au + bv + cw + \mu)$, com $(a, b, c) = \delta(3, 2, 1)$, e $\delta = \pm 1$;

(1.2) **L 1.2Nó** $F_\mu(u, v, w) = (au, bv, au + bv + cw + \mu)$, com $(a, b, c) = \delta(1, 3, 2)$, e $\delta = \pm 1$;

(1.3) **L 1.3-Nó** $F_\mu(u, v, w) = (au, bv, au + bv + cw + \mu)$, com $(a, b, c) = \delta(1, 2, 3)$, e $\delta = \pm 1$;

(1.4) **Sela** $F_\mu(u, v, w) = (u, 2v, u + 2v - w + \mu)$;

(1.5) **Foco** $F_\mu(u, v, w) = (-u + v, -u - v, -3u - v + w + \mu)$.

(1.6) **Lips** $F_\mu(u, v, w) = (1, 0, -3u^2 + v^2 + \mu)$;

(1.7) **Bec to Bec** $F_\mu(u, v, w) = (1, 0, -3u^2 - v^2 + \mu)$;

(1.8) **Dove's Tail** $F_\mu(u, v, w) = (1, 0, 4\delta u^3 + v + \mu u)$ com $\delta = \pm 1$;

Prova:

Daremos um esboço da prova.

1 Se 0 é uma singularidade Lips de $F_0 = (f^1, f^2, g)$, então temos que $f^1(0) = a_{000}$, $f^2(0) = b_{000}$ e $g(u, v, 0) = c_{200}u^2 + c_{020}v^2 + h.o.t$, com $a_{000} \neq 0$, $c_{200} \neq 0$ e $c_{020} \neq 0$. A forma normal e o desdobramento universal de tal singularidade vem da aplicação canônica da teoria geral de singularidade de aplicações .

2 Se $F_0 = 0$, existem vizinhanças V de 0 em \mathbb{R}^3 e B de F_0 em \mathcal{X}^r tal que: (a) qualquer $G \in B$ tem um único ponto crítico hiperbólico $p(G)$ em V , o qual é do mesmo tipo de p ; (b) existe uma função C^∞ $\alpha : B \rightarrow V$, tal que se $p(G) \notin S \cap V$, então $\alpha(G)$ é uma Dobra de G (veja Lema 8.9 em [24]); caso contrário, $\alpha(G) = p(G)$. Denotemos $p(G) = (p_1(G), p_2(G), p_3(G))$. A conclusão da demonstração segue mostrando que a função $\gamma : B \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\gamma(G) = p_3(G)$ é uma submersão . ■

3.1 Prova do Teorema B

Denotemos $\Omega_1 = \Omega \setminus \nu$.

Em Ω_1 , definimos o subconjunto ν_1 da seguinte forma: " $X \in \nu_1$ desde que a origem seja uma singularidade de codimensão 1 do correspondente $F = F(X)$ ". Isto significa que $X \in \nu_1$ se, e somente se, $F = F(X) \in \Sigma_1$.

Segue da definição de ν_1 e do Teorema principal em [26] que:

Lema 3.6

ν_1 é aberto e denso em Ω_1 . Mais, ν_1 é uma subvariedade de codimensão 1 de Ω .

O próximo resultado é uma consequência do Lema 3.5 e do Teorema 3.3.

Proposição 3.7

1. $X \in \Omega_1$ é estruturalmente estável relativo à Ω_1 se, e somente se, $F(X)$ é estruturalmente estável relativo à \mathcal{E}_1^r ;
2. X é estruturalmente estável relativo à Ω_1 se, e somente se, $X \in \nu_1$;
3. as formas normais de qualquer família à um parâmetro em Ω passando por $X_0 \in \nu_1$ e transversalmente à ν_1 são :

(1.1) L 1.1-Nó $X_\alpha(x, y, z) = (axz, byz, \frac{1}{2}(ax + by + cz^2 + \alpha))$, com $(a, b, c) = \delta(3, 2, 1)$, e $\delta = \pm 1$;

(1.2) L 1.2-Nó $X_\alpha(x, y, z) = (axz, byz, \frac{1}{2}(ax + by + cz^2 + \alpha))$, com $(a, b, c) = \delta(1, 3, 2)$, e $\delta = \pm 1$;

(1.3) L 1.3-Nó $X_\alpha(x, y, z) = (axz, byz, \frac{1}{2}(ax + by + cz^2 + \alpha))$, com $(a, b, c) = \delta(1, 2, 3)$, e $\delta = \pm 1$;

(1.4) Sela $X_\alpha(x, y, z) = (xz, 2yz, \frac{1}{2}(x + 2y - z^2 + \alpha))$;

(1.5) Foco $X_\alpha(x, y, z) = ((-x + y)z, (-x - y)z, \frac{1}{2}(-3x - y + z^2 + \alpha))$;

(1.6) Lips $X_\alpha(x, y, z) = (z, 0, \frac{1}{2}(-3x^2 + y^2 + \alpha))$;

(1.7) Bec to Bec $X_\alpha(x, y, z) = (z, 0, \frac{1}{2}(-3x^2 - y^2 + \alpha))$;

(1.8) Dove's Tail $X_\alpha(x, y, z) = (z, 0, \frac{1}{2}(4\delta x^3 + y + \alpha))$, com $\delta = \pm 1$;

Prova do Teorema B

A prova segue da Proposição 3.7 e do Teorema 3.3. ■

3.2 Propriedades Globais de campos vetoriais reversíveis do tipo (3,2)

A seguir listamos algumas propriedades globais de campos vetoriais, relacionados com campos em Σ_1 .

No que segue, listamos alguns fenômenos globais, os quais ocorrem genericamente para famílias à um parâmetro de campos vetoriais definidos em variedades com bordo. Uma bifurcação genérica de codimensão 1 ocorre para F em \mathcal{X}^r se uma das seguintes situações ocorre:

- (i) F tem uma separatriz de sela, a qual é tangente à S em um único ponto tipo Cúspide;
- (ii) F tem uma trajetória periódica a qual é tangente à S em exatamente um ponto tipo Dobra.

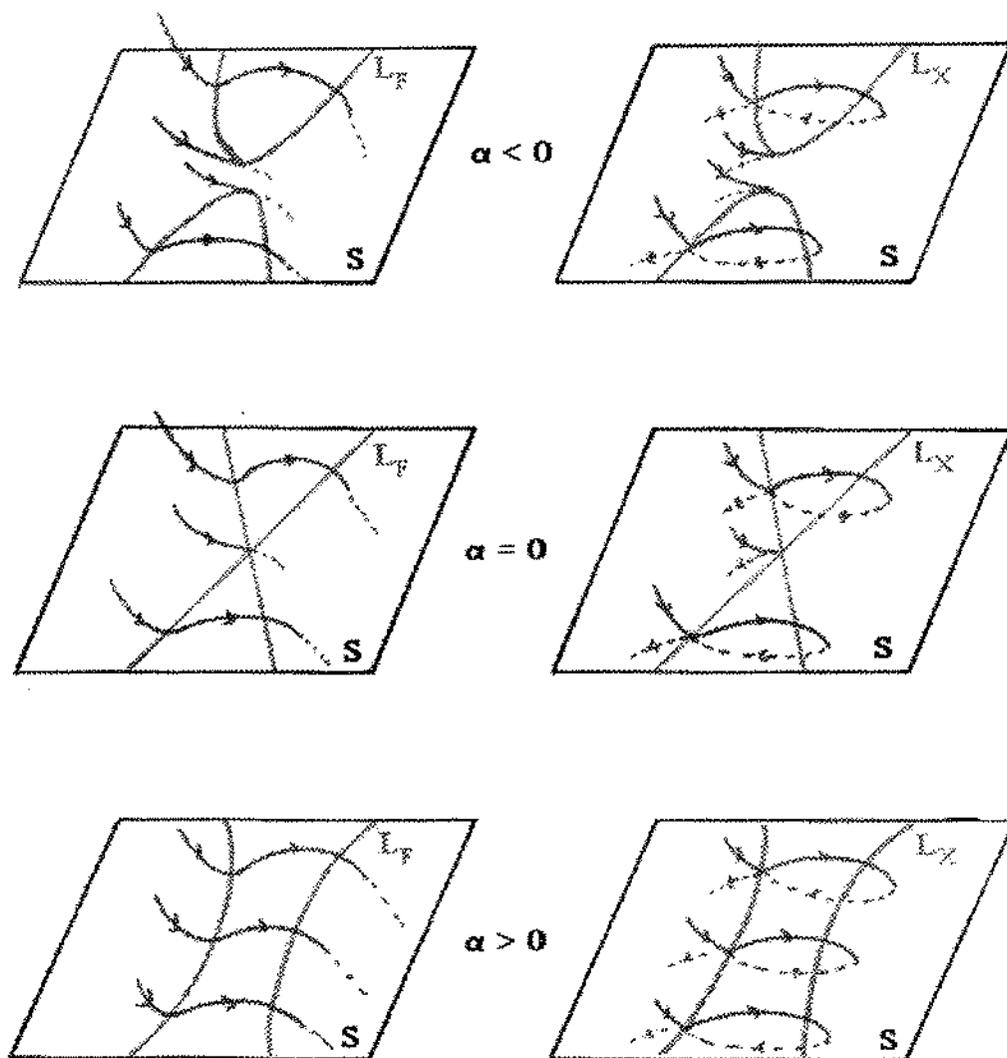


Figura 3.1: Beaks:Bordo \times Reversível

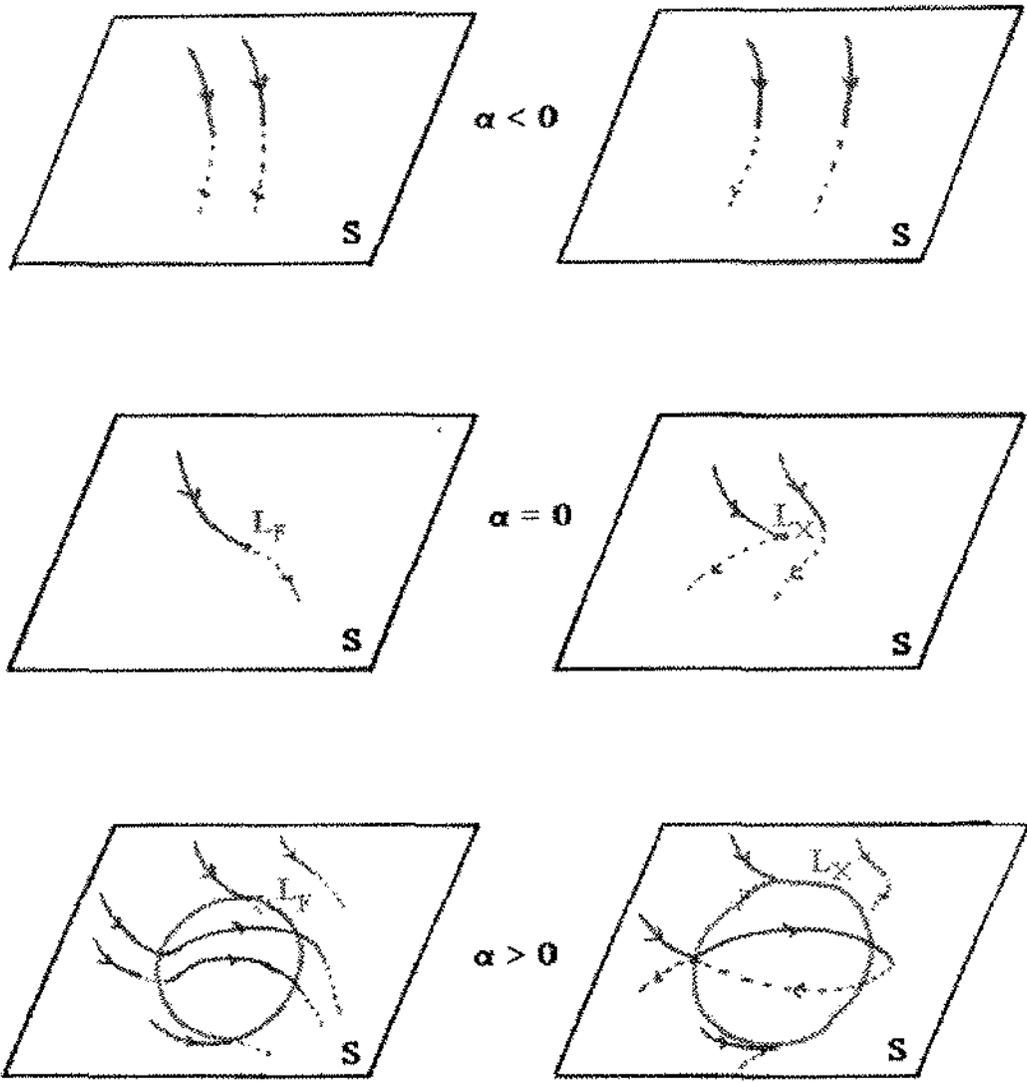


Figura 3.2: Lips:Bordo \times Reversível

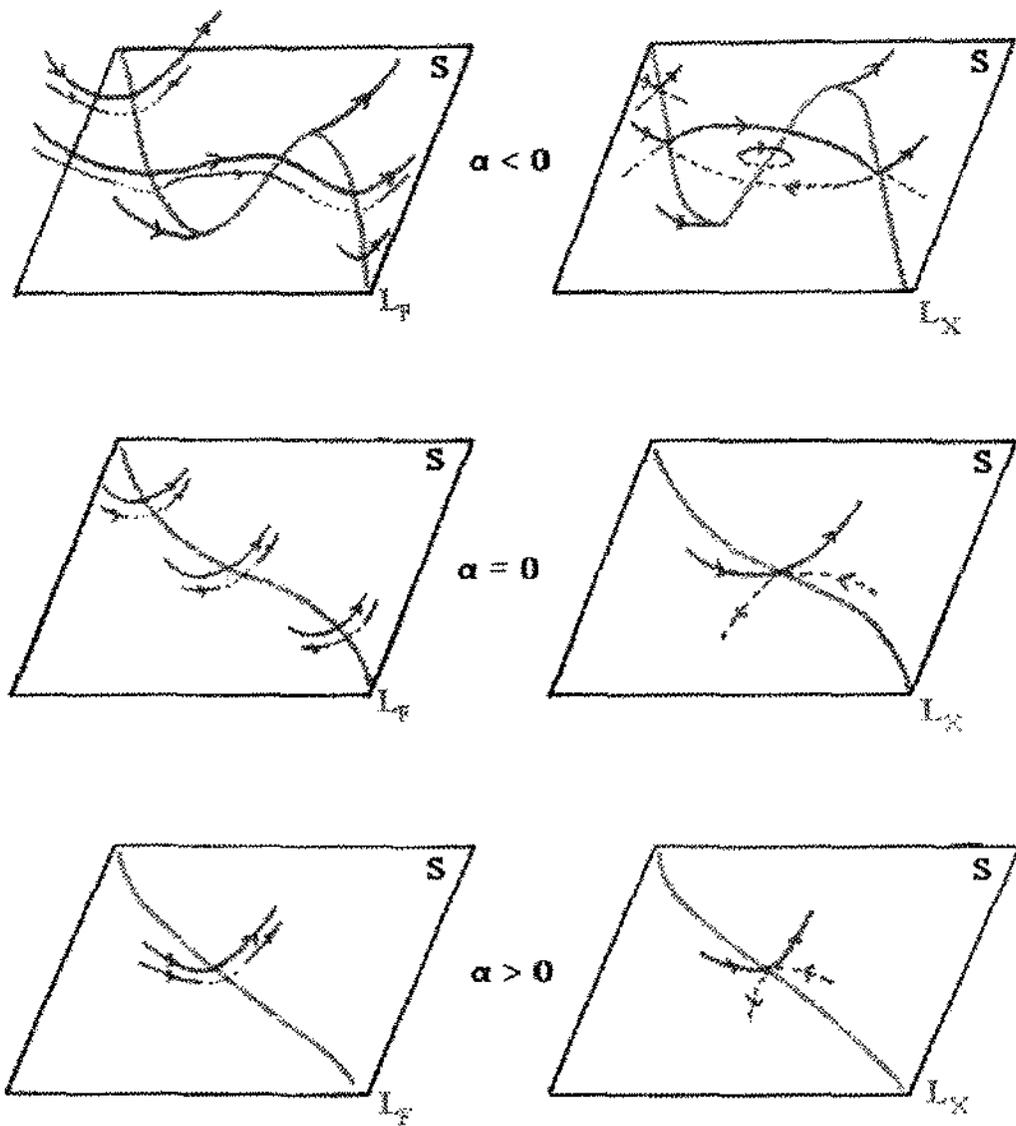


Figura 3.3: Dove's Tail: Bordo \times Reversível

Capítulo 4

Singularidades de Codimensão 2

Neste capítulo exibimos C^0 -formas normais das S -singularidades de codimensão dois e deduzimos os tipos topológicos de famílias à 2-parâmetros de campos vetoriais em Ω .

Seja X em $\Omega_2 = \Omega_1 \setminus \nu_1$. Então o correspondente $F = F(X)$ está em $\mathcal{X}_2^r = \mathcal{X}_1^r \setminus \Sigma_1$ e vice-versa.

Seja $\Sigma_2 \subset \mathcal{X}_2^r$, constituído por elementos os quais são estruturalmente estáveis relativo à \mathcal{X}_2^r . Estes campos vetoriais serão caracterizados a seguir.

Inicialmente, daremos uma idéia intuitiva da estratégia usada para classificar as singularidades do bordo.

Dado $F = (f^1, f^2, g)$ em \mathcal{X}^r tal que $g(0) = 0$, nós temos, como antes, as seguintes possibilidades:

$$(i)(f^1(0), f^2(0)) = (0, 0) \text{ ou } (ii)(f^1(0), f^2(0)) \neq (0, 0)$$

Escrevemos então Σ_2 como $\Sigma_2 = \Sigma_2(a) \cup \Sigma_2(b)$, onde $\Sigma_2(a)$ é o subconjunto de \mathcal{X}_2^r tais que satisfazem a condição (i) acima. O conjunto dos

campos vetoriais F em \mathcal{X}_2^r que satisfazem a condição (ii), denotemos por $\Sigma_2(b)$.

Seja h uma definição local de S em 0 .

Definição 4.1

Denotamos por $\Sigma_2(a)$ o conjunto dos campos vetoriais $F \in \mathcal{X}_2^r$, os quais tem um único ponto $0 \in S$ tal que $F(0) = 0$ e vale uma das seguintes condições :

- (a₂₁) **Sela-Nó** 0 é uma sela-nó de F e os auto-espacos de $DF(0)$ são transversais à S em 0 ;
- (a₂₂) **Hopf** 0 é uma singularidade de codimensão 1 de Hopf de F e os auto-espacos de $DF(0)$ são transversais à S em 0 ;
- (a₂₃) **Nó Degenerado** Os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ de $DF(0)$ satisfazem $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, $\text{rank}(DF(0) - \lambda_1 Id) = 2$. Mais ainda, os auto-espacos associados aos autovalores são transversais à S em 0 ;
- (a₂₄) **Hiperbólica Tangente** Os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ de $DF(0)$ são distintos e existe uma variedade invariante de dimensão 1 com contato quadrático com S em 0 . Mais ainda, os outros auto-espacos são transversais à S em 0 ;
- (a₂₅) **Foco Degenerado** Os autovalores $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ e $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ de $DF(0)$ satisfazem $\text{Re}(\lambda) = \lambda_1$. Mais ainda, os auto-espacos associados aos autovalores são transversais à S em 0 e o $\text{rank}(\text{Hessiano}(Fh|_S))$ é não nulo.
- (a₂₆) **Foco Tangente** Os autovalores $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ e $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ de $DF(0)$ satisfazem $\text{Re}(\lambda) \neq \lambda_1$. Mais ainda, os auto-espacos associados aos autovalores complexos tem contato quadrático com S em 0 (Morse) e o auto-espaço associado ao autovalor real é transversal à S em 0 .

Definição 4.2

Denotamos por $\Sigma_2(b)$ o conjunto dos campos vetoriais $F \in \Sigma_2$, os quais tem um único ponto $p \in S$ tal que $F(p) \neq 0$, $Fh(p) = 0$, $F^2h(p) = 0$ e vale uma das seguintes condições :

(b₂₁) **Goose** $F^3h(p) \neq 0$, $\text{posto}\{dh(p), d(Fh)(p), d(F^2h)(p)\} = 2$ e a função $Fh|_S$ é equivalente, em p , à um germe simples de codimensão 1;

(b₂₂) **Gull** $F^3h(p) = 0$, $F^4h(p) \neq 0$ e p é um ponto crítico não degenerado de $Fh|_S$.

(b₂₃) **Butterfly** $F^3h(p) = 0$, $F^4h(p) = 0$, $F^5h(p) \neq 0$ e p é um ponto regular de $Fh|_S$.

Proposição 4.3

1. Σ_2 é aberto e denso em \mathcal{X}_2^r ;
2. F é estruturalmente estável relativo à \mathcal{X}_2^r se, e somente se, $F \in \Sigma_2$;
3. Σ_2 é uma subvariedade de codimensão 2 de \mathcal{X}^r ;
4. as C^0 -formas normais de qualquer família à 2-parâmetros $F_{\alpha\beta}$ transversal à Σ_2 em F_{00} são :

2.1 Sela-nó

$$F_{\alpha,\beta}(u, v, w) = \begin{cases} \dot{u} = \varepsilon(u + v)^2 + \alpha \\ \dot{v} = u - v \\ \dot{w} = u + v + \lambda_3 w + \beta \\ \text{com } \lambda_3 \notin 0, -1; \varepsilon = \pm 1 \end{cases}$$

2.2 Hopf

$$F_{\alpha,\beta}(u, v, w) = \begin{cases} \dot{u} = -v + u(\alpha - u^2 - v^2) \\ \dot{v} = u + v(\alpha - u^2 - v^2) \\ \dot{w} = ku + v + \lambda_3 w + \beta \\ \text{com } \lambda_3 \notin 0, 1; k \neq 1 \end{cases}$$

2.3 Nó Degenerado

$$F_{\alpha,\beta}(u, v, w) = \begin{cases} \dot{u} = \lambda_1 u + \alpha v \\ \dot{v} = u + \lambda_1 v \\ \dot{w} = u + v + \lambda_3 w + \beta \\ \text{com } \lambda_3 \neq 0; \lambda_3 \neq \lambda_1 \end{cases}$$

2.4 Hiperbólico Tangente 1

$$F_{\alpha,\beta}(u, v, w) = \begin{cases} \dot{u} = \lambda_1 u \\ \dot{v} = \lambda_2 v \\ \dot{w} = \lambda_3 w + v + \varepsilon_1(\lambda_3 - 2\lambda_1)u^2 + \alpha u + \beta \\ \text{com } \lambda_3 \neq 0; \lambda_3 \neq 2\lambda_1; \lambda_3 \neq 2\lambda_2; \lambda_2 \neq 2\lambda_1 \end{cases}$$

2.5 Hiperbólico Tangente 2

$$F_{\alpha,\beta}(u, v, w) = \begin{cases} \dot{u} = \lambda_1 u \\ \dot{v} = (a^2 - 2ab - b^2)v + 2abw - 2abu^2 - 2ab\alpha u \\ \dot{w} = -2bv + (a + b)w - (a + b + 2\lambda)u^2 - \alpha(a + b + \lambda)u + \beta \\ \text{com } a, b, \lambda \text{ reais, distintos e não nulos} \end{cases}$$

2.6 Foco Degenerado

$$F_{\alpha,\beta}(u, v, w) = \begin{cases} \dot{u} = au + bv + \alpha u \\ \dot{v} = -bu + \alpha v \\ \dot{w} = u + v + auw + \varepsilon_1 u^2 + \varepsilon_2 v^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)uv + \beta \\ \text{com } a, b \text{ não nulos e } \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, 2 \end{cases}$$

2.7 Foco Tangente 1

$$F_{\alpha,\beta}(u, v, w) = \begin{cases} \dot{u} = au + bv \\ \dot{v} = -bu + \alpha v \\ \dot{w} = \lambda_3 w + u^2 + v^2 + \alpha u + \beta; \\ \text{com } \lambda_3, a \text{ reais, distintos e não nulos} \end{cases}$$

2.8 Foco Tangente 2

$$F_{\alpha,\beta}(u, v, w) = \begin{cases} \dot{u} = au + bv \\ \dot{v} = -bu + \alpha v \\ \dot{w} = \lambda_3 w + u^2 - v^2 + \alpha u + \beta; \\ \text{com } \lambda_3, a \text{ reais, distintos e não nulos} \end{cases}$$

2.9 Goose

$$F_{\alpha,\beta}(u, v, w) = \begin{cases} \dot{u} = 1 \\ \dot{v} = 0 \\ \dot{w} = -3u^2 - v^3 + \alpha v + \beta \end{cases}$$

2.10 Gull

$$F_{\alpha,\beta}(u, v, w) = \begin{cases} \dot{u} = 1 \\ \dot{v} = 0 \\ \dot{w} = 4u^3 + 2uv + v^2 + \alpha v + \beta \end{cases}$$

2.11 Butterfly

$$F_{\alpha,\beta}(u, v, w) = \begin{cases} \dot{u} = 1 \\ \dot{v} = 0 \\ \dot{w} = 5u^4 + 3\varepsilon u^2 v + v + \alpha u^2 + \beta u \end{cases}$$

onde $\varepsilon = \pm 1$

Iremos a seguir, demonstrar este resultado.

4.1 Construção das Submersões

Nesta secção estabeleceremos os resultados necessários para mostrarmos que Σ_2 é uma subvariedade de Codimensão 2 em \mathcal{X}^r .

Dividiremos a prova em duas partes: na primeira trabalharemos com os campos vetoriais G que tem ponto crítico no bordo e na outra com os campos vetoriais que tem singularidades tangenciais(sem ponto crítico no bordo).

4.1.1 Pontos Críticos no Bordo

Nesta secção mostraremos que o conjunto de campos vetoriais que tem um ponto crítico no bordo, como cada um dos citados na definição 4.1, é uma subvariedade de codimensão 2 em \mathcal{X}^r .

O próximo Lema, é muito útil, pois em quase todos os casos abaixo, com excessão da Sela-Nó, ele assegura a existência de um ponto crítico para um campo vetorial G , na vizinhança de um campo vetorial F dado. Este Lema está demonstrado em [19], e repetimos aqui o argumento principal da prova.

Lema 4.4 (Sotomayor, [19])

Sejam as vizinhanças V de $p \in M$ e B do campo vetorial $F \in \mathcal{X}^r$, onde p é um ponto crítico simples de F .

Seja a aplicação f dada por:

$$f : \begin{array}{ccc} B \times V & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (G, p_G) & & G(p_G) \end{array}$$

Então, existem uma vizinhança $B_1 \subset B$ de F e uma função C^{r-1} , $p_G : B_1 \rightarrow V$ e tais que $G(p_G) = 0 \Leftrightarrow p_G \in F$.

Prova:

Observemos que $f(F, p) = 0$ e $\frac{\partial}{\partial p_G}(F, p) \neq 0$. De fato, pois $\det(DF)_p \neq 0$.

O resultado segue do teorema da função implícita. ■

Lema 4.5 (Submersão: Sela-Nó)

Seja $p \in S$, um ponto crítico do tipo Sela-Nó do Campo Vetorial $F \in \mathcal{X}^r$. Então, existem vizinhanças, B de F em \mathcal{X}^r , e N de p em M e uma função C^{r-1} , $\xi : B \rightarrow \mathbb{R}^2$, tais que:

1. $\xi(G) = 0 \Leftrightarrow G \in B$, tem um único ponto crítico, que é uma Sela-Nó, $p_G \in S \cap N$;
2. $d\xi_F$ é sobrejetora.

Prova:

Seja (u_1, u_2, u_3) um sistema de coordenadas numa vizinhança de p tal que:

$$u_1(p) = u_2(p) = u_3(p) = 0$$

e

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(p) \in T_i, \quad i = 1, 2, 3$$

onde T_i é o autoespaço associado ao autovalor λ_i de $(DF)_p$. Nestas coordenadas, temos pela forma normal de Takens que, podemos escrever o campo vetorial F na forma:

$$F = (F^1(u_1, u_2, u_3), F^2(u_1, u_2, u_3), F^3(u_1, u_2, u_3)) = (u_1^2, \lambda_2 u_2, \lambda_3 u_3) \quad (4.1)$$

com λ_2, λ_3 reais não nulos e distintos.

Seja S dado implicitamente por:

$$h(u_1, u_2, u_3) = au_1 + bu_2 + cu_3 + \sum_{i+j+k>1} a_{i,j,k} u_1^i u_2^j u_3^k = 0 \quad (4.2)$$

onde a, b, c são reais não nulos.

Pela equação 4.1, temos que:

$$F_{u_1}^1(0) = 0; \quad F_{u_1 u_1}^1(0) \neq 0; \quad F_{u_2}^2(0) \neq 0; \quad F_{u_3}^3(0) \neq 0 \quad (4.3)$$

Das relações em 4.3, temos por continuidade, a existência de vizinhanças B_0 e N_0 de F e p , respectivamente.

Seja o campo vetorial $G \in B_0$, dado por

$$G = (G^1(u_1, u_2, u_3), G^2(u_1, u_2, u_3), G^3(u_1, u_2, u_3)) \quad (4.4)$$

Definimos a aplicação $\zeta : B_0 \times N_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\zeta_1(G; u_1, u_2, u_3) = (G^2(u_1, u_2, u_3), G^3(u_1, u_2, u_3)) \quad (4.5)$$

ζ é de classe C^r , pois é uma "evaluation map" ([1]), mais:

$$\zeta(F; 0, 0, 0) = (0, 0)$$

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial u_2 \partial u_3}(F; 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Pelo Teorema do Função Implícita, existem vizinhanças $B_1 \times I_1$ de $(F, 0)$ e $I_2 \times I_3$ de $(0, 0)$ e um único par de aplicações C^r , $\iota_1, \iota_2 : B_1 \times I_1 \rightarrow I_2 \times I_3$ tais que:

$$\zeta_1(F; 0, 0, 0) = (0, 0)$$

$$\zeta_1(G; u_1, u_2, u_3) = 0$$

para $(G, u_1) \in B_1 \times I_1$, $(u_2, u_3) \in I_2 \times I_3$ somente se

$$u_2 = \iota_1(G, u_1) \quad u_3 = \iota_2(G, u_1)$$

Definimos a aplicação $\zeta_2 : B_1 \times I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r , por

$$\zeta_2(G, u_1) = G^1(u_1, \iota_1(G, u_1), \iota_2(G, u_1))$$

Temos:

$$\zeta_2(F, 0) = 0$$

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial u_1}(F, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial u_1^2}(F, 0) = 2 > 0$$

Assim, pelo Teorema da Função Implícita, existem uma vizinhança E de $(F, 0)$, $B \subseteq B_1$ e I de 0 e uma única função C^{r-1} , $\zeta_3 : B \rightarrow I$ tais que:

$$\zeta_1(F) = 0$$

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial u_1}(G, u_1) = 0$$

para $G \in B$, $u_1 \in I$ somente se $u_1 = \zeta_3(G)$.

Definimos as aplicações $\xi_1 : B \rightarrow \mathbb{R}$ e $p_G : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$\xi_1(G) = \zeta_2(Y, \zeta_3(G)) = G^1(\zeta_3(Y), \iota_1(G, \zeta_3(G)), \iota_2(G, \zeta_3(G))) \quad (4.10)$$

$$p_G(G) = (\zeta_3(Y), \iota_1(G, \zeta_3(G)), \iota_2(G, \zeta_3(G))) \quad (4.11)$$

Das definições de $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, $G \in B$ tem um ponto crítico $(u_1, u_2, u_3) \in N = I_1 \times I_2 \times I_3$ se e somente se $u_2 = \iota_1(G, u_1)$, $u_3 = \iota_2(G, u_1)$ e $\zeta_2(G, u_1) = 0$.

Das equações 4.3 e 4.9 temos que $\xi_1(G)$ é mínimo de $\zeta_2(G, u_1)$, $u_1 \in I_1$ e este mínimo é atingido em $p_G(G)$.

Assim, se $\xi_1(G) > 0$, G não tem pontos críticos em N ; G tem um único ponto crítico em N se $\xi_1(G) = 0$, que é uma sela-nó e G tem dois pontos críticos se $\xi_1(G) < 0$, os quais são uma sela e um nó.

Seja Π a projeção de N sobre T^3 paralela à S .

Consideremos a função C^{∞} , $\xi_2 : B \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\xi_2 = \Pi(p_G(G)) \quad (4.12)$$

Definimos a aplicação $\xi : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\xi(G) = (\xi_1(G), \xi_2(G)) \quad (4.13)$$

Temos que:

$$\xi(F) = (0, 0)$$

Observemos que $\xi(G) = (0, 0)$, implica que o campo vetorial $G \in B$ tem um ponto crítico p_G em $N \cap S$ que é uma sela-nó.

A recíproca é imediata. De fato, pois se $p_G \in S$ é um ponto crítico do tipo sela-nó, então $G^1(p_G) = 0 \Rightarrow \xi_1(G) = 0$, e de $p_G \in S \Rightarrow \xi_2(G) = 0$.

Mostremos então que $(D\xi)_F$ é sobrejetora.

Tomemos a curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow B$ definida por:

$$\alpha(s) = F + s(1, 0, 0); \quad \alpha(0) = F \quad (4.14)$$

Temos que o ponto de mínimo para a curva α é atingido em $p_{\alpha(s)} = (0, 0, 0)$. Assim,

$$\begin{aligned} (D\xi)_F &= \left. \frac{\partial}{\partial s}(\xi_1(\alpha(s)), \xi_2(\alpha(s))) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial s}(\alpha^1(p_{\alpha(s)}), \Pi(p_{\alpha(s)})) \right|_{s=0} \\ &= (1, 0) \end{aligned}$$

Tomemos agora a curva $\beta : B \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\beta(s) = F + s(0, 0, \lambda_3); \quad \beta(0) = F \quad (4.15)$$

Temos que o ponto de mínimo para a curva β é $(0, 0, -s)$. Assim, temos que

$$(d\xi_2)_F = -1 \neq 0$$

Segue então que $(D\xi)_F$ é sobrejetora. ■

Observação 4.6

*Se $\xi_1(G) > 0$, então G não tem pontos críticos.
Se $\xi_1(G) = 0$, então G tem um único ponto crítico p_G que é uma sela-nó. Mais ainda, se $\xi_2(G) = 0$, então $p_G \in S$; caso contrário, $p_G \notin S$. Se $\xi_1(G) < 0$, G tem dois pontos críticos, uma sela e um nó.*

Antes de construirmos a submersão para o caso Hopf, apresentemos alguns resultados úteis para este caso. (Ver [8])

Consideremos um sistema autônomo de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{du}{dt} + F(u, \mu) = 0 \quad (4.16)$$

onde $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é C^∞ e μ é o parâmetro de bifurcação.

Suponha que

$$F(0, \mu) = 0 \quad (4.17)$$

Então $u = 0$ é um ponto crítico de 4.16, para todo μ .

Seja $A(\mu) = (dF)_{0,\mu}$, o jacobiano da matriz de F em 0, e $A(\mu)$ tem autovalores simples $\lambda_{12} = \omega_1(\mu) \pm i\omega_2$, com ω^1, ω^2 são suaves.

Dizemos que 0 é uma ponto crítico de Hopf se

- H1** $A(0)$ tem autovalores simples $\pm i$;
- H2** $A(0)$ não tem outros autovalores sobre o eixo imaginário;
- H3** $\frac{\partial \omega^1}{\partial \mu}(0) \neq 0$.

Temos o seguinte Teorema:

Teorema 4.7

1. Se o sistema 4.16 tem em 0 um ponto crítico de Hopf, então existe uma família à 1-parâmetro de órbitas periódicas de 4.16, bifurcando do ponto crítico $u = 0$ em $\mu = 0$;
2. Existe um germe suave $g(x, \mu)$ na forma

$$g(x, \mu) = r(x^2, \mu); \quad r(0, 0) = 0$$

tal que, localmente as soluções de $g(x, \mu) = 0$, com $x \geq 0$, estão em correspondência biunívoca com órbitas periódicas de pequena amplitude do sistema 4.16, com período próximo de 2π ;

3. Se $r_z(0, 0) \neq 0$; $z = x^2$, então para cada μ , a equação de bifurcação reduzida g é \mathbb{Z}_2 -equivalente à pitchfork $\varepsilon x^3 + \delta \mu x$, onde $\varepsilon = \text{sign}(r_z(0, 0))$ e $\delta = \text{sign}((\omega_1)_\mu(0))$;
4. Se os autovalores reais são positivos, então as soluções periódicas correspondentes às soluções de (x, μ) de $g(x, \mu) = 0$, são assintoticamente estáveis se $g_z(x, \mu) > 0$, e instáveis se $g_z(x, \mu) < 0$.

Podemos calcular $r_z(0, 0)$ e $r_\mu(0, 0)$ usando as fórmulas:

$$r_\mu(0, 0) = (\omega_\mu^1(0, 0)) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(d^t) A_\mu(0) c; \quad (4.18)$$

$$r_z(0, 0) = \frac{1}{4} \operatorname{Re}(d^t [d^2 F(c, b_0) + d^2 F(\bar{c}, b_2) + \frac{1}{4} d^3 F(c, c, \bar{c})]) \quad (4.19)$$

onde, c, d são autovetores de A_0, A_0^t respectivamente tais que:

$$A_0 c = -ic; \quad \bar{c}^t c = 2$$

$$A_0^t d = id; \quad d^t c = 2; \quad d^t c = 0$$

e $b_0, b_2 \in \mathbf{C}^m$ definidos por:

$$A_0 b_0 = -\frac{1}{2} d^2 F(c, \bar{c})$$

$$(A_0 + 2iI) b_2 = -\frac{1}{4} d^2 F(c, c)$$

Tomemos agora a forma normal do campo vetorial F , tendo em 0 um ponto crítico de Hopf.

$$F(u, \mu) = A(\mu)u + |u|^2 u; \quad u = (u_1, u_2, u_3) \quad (4.20)$$

onde

$$A(\mu) = - \begin{pmatrix} \mu & -1 & 0 \\ 1 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Temos então que A tem autovalores

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm i; \quad \lambda_3 \neq 0$$

Observamos que $(d^2 F)_{0,0} \equiv 0$ e assim $r_z(0, 0)$ fica dado por:

$$r_z(0, 0) = \frac{1}{16} \operatorname{Re}(d^t d^3 F(c, c, \bar{c}))$$

com

$$c = (1, -i, 0); \quad d = (1, -i, 0)$$

Substituindo, ficamos com

$$r_z(0,0) = 1$$

Portanto, $g(x, \mu)$ é equivalente à $\varepsilon x^3 + \delta \mu x$, onde $\varepsilon = \text{sign}(r_z(0,0))$ e $\delta = \text{sign}((\omega_1)_\mu(0))$;

Lema 4.8 (Submersão : Hopf)

Seja $p \in S$ um ponto crítico de Hopf do campo vetorial $F \in \mathcal{X}^r$. Então, existem vizinhanças B de F em \mathcal{X}^r , N de p em M , e uma função C^{r-1} , $\xi : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ tais que:

1. $\xi(G) = 0 \Leftrightarrow G \in B$ tem um único ponto crítico, que é de Hopf, $p_G \in S \cap N$;
2. $d(\xi)_F$ é sobrejetora.

Prova:

Seja (u_1, u_2, u_3) um sistema de coordenadas numa vizinhança de p tal que:

$$u_1(p) = u_2(p) = u_3(p) = 0$$

e

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(p) \in T_i, \quad i = 1, 2, 3$$

onde T_i é o autoespaço associado ao autovalor λ_i de $(DF)_p$.

Denotemos por A_F a matriz $(DF)_0$. Como 0 é um ponto crítico de Hopf, temos:

h1 Os autovalores de A_F são $\lambda_{12} = \pm i, \lambda_3 = d \neq 0$;

h2 $(DF_\alpha)_p$ tem autovalores:

$$\lambda_{12}(\alpha) = \alpha \pm i; \quad \lambda_3 = d \neq 0$$

$$\mathbf{h3} \quad \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} (\operatorname{Re}(\lambda_{12})(\alpha)) \right|_{\alpha=0} \neq 0$$

Nestas coordenadas, temos pela forma normal de Takens que, podemos escrever o campo vetorial F na forma:

$$F_\alpha = \begin{cases} F_\alpha^1(u_1, u_2, u_3) = -u_2 + u_1(\alpha - u_1^2 - u_2^2) + h.o.t \\ F_\alpha^2(u_1, u_2, u_3) = u_1 + u_2(\alpha - u_1^2 - u_2^2) + h.o.t \\ F_\alpha^3(u_1, u_2, u_3) = du_3 + h.o.t \end{cases} \quad (4.21)$$

com $d \neq 0$

Denotemos por $F = F_0$.

Seja S dado implicitamente por:

$$h(u_1, u_2, u_3) = au_1 + bu_2 + cu_3 + \sum_{i+j+k>1} a_{i,j,k} u_1^i u_2^j u_3^k = 0 \quad (4.22)$$

onde a, b, c são reais não nulos.

Temos então a existência de vizinhanças B_0 e N_0 de F e 0 , respectivamente.

Sejam as vizinhanças B_0 de F em \mathcal{X}^r e N_0 de 0 em M . Seja o campo vetorial $G \in B_0$, dado por

$$G = (G^1(u_1, u_2, u_3), G^2(u_1, u_2, u_3), G^3(u_1, u_2, u_3)) \quad (4.23)$$

Pelo lema 4.4, temos que a correspondência $G \in B_0 \rightarrow p_G \in N_0$ é C^{r-1} e $p_F = 0$ e $G(p_G) = 0$.

Pela Observação 1.6, temos que o polinômio característico associado à $A_G = (DG)_{p_G}$ é dado por:

$$P_\lambda(A_G) = \lambda^3 - \sigma(A_G)\lambda^2 + \sigma(A_G^*)\lambda - \det(A_G) \quad (4.24)$$

Devido aos autovalores de F , temos que $\det(A_F) \neq 0$ e por continuidade $\det(A_G) \neq 0$. Consideremos $R_1 \in \mathbb{R}$, uma vizinhança de $\lambda_3 = d$.

Consideremos a seguinte aplicação :

$$\eta : \begin{array}{ccc} B_1 \times R_1 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (G, \lambda) & & P_\lambda(A_G) \end{array} \quad (4.25)$$

Temos $\eta(F, d) = 0$ (d é autovalor de F).

Mostremos agora que $\frac{\partial \eta}{\partial \lambda}(F, d) \neq 0$.

$$\frac{\partial \eta}{\partial \lambda}(G, \lambda) = 3\lambda^2 - 2\sigma(A_G)\lambda + \sigma(A_G^*) \quad (4.26)$$

Suponhamos, por absurdo, que $\frac{\partial \eta}{\partial \lambda} = 0$.

Assim, temos então que $[\sigma(A_G)]^2 - 3\sigma(A_G^*) \geq 0$. Como A_F tem autovalores complexos, com parte imaginária não nula temos a relação :

$$[d - \sigma(A_F)]^2 - 4[d(d - \sigma(A_F)) + \sigma(A_F^*)] < 0 \quad (4.27)$$

ou ainda,

$$\sigma(A_F)^2 - 3\sigma(A_F^*) < 3d^2 - 2\sigma(A_F)d + \sigma(A_F^*) = 0 \quad (4.28)$$

e temos assim uma contradição .

Assim, pelo teorema da função implícita, temos que existem vizinhanças $B \subset \mathcal{X}^r$ de F , N_1 de d , e uma função $\lambda_3 : B \rightarrow N_1$ tais que $\eta(G, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \lambda_3(G)$.

Definimos a aplicação : $\xi_1 : B \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\xi_1(G) = \lambda_3(G) - \sigma((A_G)_{p_G}) \quad (4.29)$$

Temos assim que se $\xi_1(G) = 0$, com $G \in B$, então o campo vetorial G tem autovalores $\lambda_3(G) \in \mathbb{R}$ e $\lambda_{12} = \pm \epsilon i$. Assim, p_G é um ponto crítico de Hopf de G .

Seja Π a projeção de N sobre T^3 paralela à S .

Consideremos a função C^{r-1} , $\xi_2 : B \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\xi_2 = \Pi(p_G(G)) \quad (4.30)$$

Definimos a aplicação $\xi : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\xi(G) = (\xi_1(G), \xi_2(G)) \quad (4.31)$$

Temos que:

$$\xi(F) = (0, 0)$$

Observemos que $\xi_1(G) = 0$ implica que G tem em p_G um ponto crítico de Hopf, pois tem autovalores

$$\lambda_{12}^G = \pm ki; \lambda_3^G = \tilde{d}$$

e por continuidade,

$$\frac{\partial \lambda_{12}^G}{\partial \mu} \neq 0$$

onde μ é o parâmetro da bifurcação de Hopf desta família.

Observemos ainda que, $\xi_2(G) = 0$ implica que p_G está em S .

A recíproca é imediata. De fato, pois se $p_G \in S$ é um ponto crítico tipo Hopf, então $(DG)_{p_G}$ tem autovalores $\pm i, \lambda_3$ e assim $\xi_1(G) = 0$. Temos ainda que $p_G \in S \Rightarrow \xi_2 = 0$.

Mostremos então que $(D\xi)_F$ é sobrejetora.

Tomemos a curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow B$ definida por:

$$\alpha_1(s) = F + s(u, u, 0); \quad \alpha_1(0) = F \quad (4.32)$$

Para a curva $\alpha_1(s)$ temos que o ponto crítico é $p_{\alpha_1(s)} = (0, 0, 0)$. Calculemos então, $(d\xi)_F$.

$$\begin{aligned} (D\xi)_F &= \left. \frac{\partial}{\partial s} (\xi_1(\alpha_1(s)), \xi_2(\alpha_1(s))) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial s} (\lambda_3(\alpha_1(s)) - \sigma(\alpha_1(s)), \Pi(p_{\alpha_1(s)})) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial s} (2s, 0) \right|_{s=0} \\ &= (2, 0) \end{aligned}$$

Tomemos agora a curva $\beta : B \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\beta(s) = F + s(0, 0, d); \quad \beta(0) = F \quad (4.33)$$

Temos que o ponto crítico para a curva β é $(0, 0, -s)$. Assim, temos que

$$(d\xi_2)_F = -1 \neq 0$$

Segue então que $(D\xi)_F$ é sobrejetora. ■

Observação 4.9

Se $\xi_1(G) \leq 0$, então G tem um ponto crítico p_G , tal que $(DG)_{p_G}$ tem autovalores $\lambda_{12} = \zeta_1 \pm \zeta_2 i$ e λ_3 real não nulo (se $\xi_1(G) = 0$, então $\zeta_1 = 0$), e o ponto crítico é um foco atrator ou repulsor. Caso $\xi_1(G) > 0$, o ponto crítico continua sendo um foco, mas surge uma órbita periódica próximo de p_G .

Se $\xi_2(G) = 0$, então G tem um ponto crítico em S ; se $\xi_2(G) < 0$, então G não tem pontos críticos; e finalmente, se $\xi_2(G) > 0$, então G tem um ponto crítico fora de S .

Lema 4.10 (Submersão : Nó Degenerado)

Seja $p \in S$ um ponto crítico do tipo Nó Degenerado do campo vetorial $F \in \mathcal{X}^r$. Então existem: uma vizinhança B de F em \mathcal{X}^r ; uma vizinhança N de p em M ; e uma função C^{r-1} , $\xi : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ tais que:

1. $\xi(G) = 0 \Leftrightarrow G \in B$ tem um único ponto crítico, que é do tipo Nó degenerado, $p_G \in N$;
2. $d(\xi)_F$ é sobrejetora.

Prova:

Seja (u_1, u_2, u_3) um sistema de coordenadas numa vizinhança de p tal que:

$$u_1(p) = u_2(p) = u_3(p) = 0$$

e

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(p) \in T_i, \quad i = 1, 2, 3$$

onde T_i é o autoespaço associado ao autovalor λ_i de $(DF)_p$.

Como p é um ponto crítico do tipo nó degenerado temos que, $A_F = (DF)_p$ tem autovalores $\lambda_3 \neq (\lambda_1 = \lambda_2) \in \mathbb{R}$. Assim, pela observação 1.6, temos as relações :

$$\det F \neq 0$$

$$(\sigma(F) - \lambda_3)^2 - 4 \frac{\det F}{\lambda_3} = 0$$

E assim, nas coordenadas acima, temos pela forma normal de Takens que podemos escrever o campo vetorial F na forma:

$$F = \begin{cases} \dot{u}_1 &= \lambda_1 u_1 + h.o.t \\ \dot{u}_2 &= u_1 + \lambda_1 u_2 + h.o.t \\ \dot{u}_3 &= \lambda_3 u_3 + h.o.t \end{cases} \quad (4.34)$$

Seja $B_0 \subset \mathcal{X}^r$, uma vizinhança de F e $N_0 \subset M$ uma vizinhança de p .

Pelo Lema 4.4, temos que para $G \in B_0$ temos $p_G \in N_0$ e $G(p_G) = 0$.

Pela observação 1.6, temos que o polinômico característico associado à $(DG)_{p_G}$, é dado por:

$$P_\lambda(G) = \lambda^3 - \sigma(G)\lambda^2 + \sigma(G^*)\lambda - \det(G) \quad (4.35)$$

onde $\sigma(G)$ é o traço da matriz $(DG)_{p_G}$ e $\sigma(G^*)$ é o traço da matriz dos cofatores de $(DG)_{p_G}$.

Consideremos R_0 uma vizinhança de λ_3 em \mathbb{R} .

Definimos a aplicação $\tilde{\xi} : B_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por:

$$\tilde{\xi}(G, \lambda) = P_\lambda(G) \quad (4.36)$$

Assim, temos que $\tilde{\xi}(F, \lambda_3) = 0$ e

$$\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \lambda}(F, \lambda_3) = 3\lambda_3^2 - \sigma(F)\lambda_3 + \sigma(F^*) = 2\lambda_3^2 + \lambda_1^2 \neq 0$$

Assim, pelo teorema da função implícita, temos que existe uma vizinhança $B \subset B \subset B_0$ e uma única aplicação $\lambda_3 : B \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\tilde{\xi}(G, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_3 = \lambda(G)$ com $G \in B$.

Definimos agora a aplicação $\xi_1 : B \rightarrow \mathbb{R}$, dado por:

$$\xi_1(G) = (\sigma(G) - \lambda_3(G))^2 - 4 \frac{\det(G)}{\lambda_3(G)} \quad (4.37)$$

Seja Π a projeção de N sobre T^3 paralela à S .

Consideremos a função C^r , $\xi_2 : B \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\xi_2 = \Pi(p_G(G)) \quad (4.38)$$

Definimos a aplicação $\xi : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\xi(G) = (\xi_1(G), \xi_2(G)) \quad (4.39)$$

Temos que $\xi(F) = (0, 0)$. Observemos que $\xi(G) = 0$, implica que o campo vetorial $G \in B$ tem um ponto crítico p_G em $N \cap S$, o qual é um nó degenerado, pois $\xi_1(G) = 0$ implica que $(DG)p_G$ tem autovalores $\lambda_1^G = \lambda_2^G \neq \lambda_3^G \in \mathbb{R}$.

A recíproca é imediata. De fato, pois se $p_G \in S$ é um ponto crítico tipo Nó Degenerado, então $(DG)_{p_G}$ tem autovalores $\lambda_1 = \lambda_2, \lambda_3 \neq \lambda_1$ e assim $\xi_1(G) = 0$. Temos ainda que $p_G \in S \Rightarrow \xi_2 = 0$.

Mostremos que $(D\xi)_F$ é sobrejetora.

Tomemos a curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow B$ definida por:

$$\alpha(s) = F + s(u, 0, 0); \quad \alpha(0) = F \quad (4.40)$$

Para a curva $\alpha(s)$ temos que o ponto crítico é $p_{\alpha(s)} = (0, 0, 0)$. Calculemos então, $(D\xi)_F$.

$$\begin{aligned} (D\xi)_F &= \left. \frac{\partial}{\partial s} (\xi_1(\alpha_1(s)), \xi_2(\alpha_1(s))) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial s} ((\sigma(\alpha(s)) - \lambda_3(\alpha(s)))^2 - 4 \frac{\det(\alpha(s))}{\lambda_3(\alpha(s))}, \Pi(p_{\alpha(s)})) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial s} (4s, 0) \right|_{s=0} \\ &= (4, 0) \end{aligned}$$

Tomemos agora a curva $\beta : B \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\beta(s) = F + s(0, 0, \lambda_3); \quad \beta(0) = F \quad (4.41)$$

Temos que o ponto crítico para a curva β é $(0, 0, -s + h.o.t)$.

Assim, temos que

$$(d\xi_2)_F = -1 \neq 0$$

Segue então que $(D\xi)_F$ é sobrejetora. ■

Observação 4.11

Observemos que $\xi(G) = 0$, implica que o campo vetorial $G \in B$ tem um ponto crítico p_G em $N \cap S$, o qual é um nó degenerado. De fato, pois $\xi_1(G) = 0$ implica que $(DG)p_G$ tem autovalores $\lambda_1^G = \lambda_2^G \neq \lambda_3^G \in \mathbb{R}$. Se $\xi(G) > 0$ ($\xi(G) < 0$), então G tem um ponto crítico hiperbólico que é um nó (foco) atrator ou repulsor.

Se $\xi_2(G) = 0$, então G tem um ponto crítico em S ; se $\xi_2(G) < 0$, então G não tem pontos críticos; e finalmente, se $\xi_2(G) > 0$, então G tem um ponto crítico fora de S .

Lema 4.12 (Submersão : Hiperbólico Tangente)

Seja $p \in S$ um ponto crítico do tipo Hiperbólico Tangente do campo vetorial $F \in \mathfrak{X}^r$. Então existem: uma vizinhança B de F em \mathfrak{X}^r ; uma vizinhança N de p em M ; e uma função C^{r-1} , $\xi : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ tais que:

1. $\xi(G) = 0 \Leftrightarrow G \in B$ tem um único ponto crítico, que é do tipo Hiperbólico Tangente, $p_G \in N$;
2. $d\xi_F$ é sobrejetora.

Prova:

Seja (u_1, u_2, u_3) um sistema de coordenadas numa vizinhança de p tal que:

$$u_1(p) = u_2(p) = u_3(p) = 0$$

e

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(p) \in T_i, \quad i = 1, 2, 3$$

onde T_i é o autoespaço associado ao autovalor λ_i de $(DF)_p$.

Seja $F \in \mathfrak{X}^r$ tal que $0 \in S$ é um ponto crítico do tipo Hiperbólico Tangente de F . Podemos escrever o campo vetorial na forma:

$$F = \begin{cases} \dot{u}_1 = \lambda_1 u_1 + h.o.t. \\ \dot{u}_2 = \lambda_2 u_2 + h.o.t. \\ \dot{u}_3 = \lambda_3 u_3 + u_2 + \varepsilon_1(\lambda_3 - 2\lambda_1)u_1^2 \end{cases} \quad (4.42)$$

onde $\varepsilon_1 = \pm 1$ e $\varepsilon_2 = \pm 1$.

O campo vetorial F tem uma variedade invariante, γ , tangente à S , dada por:

$$\gamma(u_1) = (u_1, 0, -\varepsilon_1 u_1^2) \quad (4.43)$$

Sejam B e V vizinhanças de F e 0 respectivamente, e uma função C^∞ . Seja o campo vetorial $G \in B$, com $G(u) = (G^1(u), G^2(u), G^3(u))$.

Pelo Lema 4.4, temos que G tem um ponto crítico $p_G \in N$. Como 0 é um ponto crítico hiperbólico de F , temos que a variedade invariante é indestrutível por pequenas perturbações de F , ou seja G tem também uma variedade invariante γ^G próxima de γ . (ver [14])

Por continuidade temos que $(DC)_{p_G}$ tem autovalores $\lambda_1^G, \lambda_2^G, \lambda_3^G$, reais e não nulos, e

$$\begin{aligned} 2\lambda_1^G &\neq \lambda_3^G; & 2\lambda_2^G &\neq \lambda_3^G; \\ G_{u_2}^3(p_G) &\neq 0; & G_{u_3}^3(p_G) &\neq 0; \\ G_{u_1 u_1}^3(p_G) &\neq 0; & G_{u_2 u_2}^3(p_G) &\neq 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Observemos ainda que,

$$Gh(u_1, 0, 0) = G^1(u_1, 0, 0) \text{ e } G^2h(u_1, 0, 0) = G^1(u_1, 0, 0)G_{u_1}^3(u_1, 0, 0) \quad (4.45)$$

Definimos então a função C^{r-1} , $\xi_1 : B \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$\xi_1(G) = G_{u_1}^3(p_G) \quad (4.46)$$

Seja Π a projeção de N sobre T^3 paralela à S .

Consideremos a função C^{r-1} , $\xi_2 : B \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\xi_2 = \Pi(p_G(G)) \quad (4.47)$$

Definimos a aplicação $\xi : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\xi(G) = (\xi_1(G), \xi_2(G)) \quad (4.48)$$

Temos que $\xi(F) = (0, 0)$. Observemos que $\xi(G) = 0$, implica que o campo vetorial $G \in B$ tem um ponto crítico p_G em $N \cap S$, o qual é do tipo Hiperbólico Tangente (ver equação 4.44).

A recíproca é imediata. De fato, pois se $p_G \in S$ é um ponto crítico Hiperbólico Tangente, então G tem uma variedade invariante tangente à S (digamos, na direção de $\frac{\partial}{\partial u_1}$) e portanto $\xi_1(G) = 0$. Temos ainda que $p_G \in S \Rightarrow \xi_2 = 0$.

Mostremos que $(D\xi)_F$ é sobrejetora.

Tomemos a curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow B$ definida por:

$$\alpha(s) = F + s(0, 0, u); \quad \alpha(0) = F \quad (4.49)$$

Para a curva $\alpha(s)$ temos que o ponto crítico é $p_{\alpha(s)} = (0, 0, 0)$. Calculemos então, $(D\xi)_F$.

$$\begin{aligned} (D\xi)_F &= \left. \frac{\partial}{\partial s} (\xi_1(\alpha(s)), \xi_2(\alpha(s))) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial s} (\alpha_{u_1}^3(s), 0) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial s} (s, 0) \right|_{s=0} \\ &= (1, 0) \end{aligned}$$

Tomemos agora a curva $\beta : B \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\beta(s) = F + s(0, 0, \lambda_3); \quad \beta(0) = F \quad (4.50)$$

Temos que o ponto crítico para a curva β é $(0, 0, -s + h.o.t)$. Assim, temos que

$$(d\xi_2)_F = -1 \neq 0$$

Segue então que $(D\xi)_F$ é sobrejetora. ■

Observação 4.13

Observemos que $\xi(G) = 0$, implica que o campo vetorial $G \in B$ tem um ponto crítico p_G em $N \cap S$, o qual é um hiperbólico tangente, pois $\xi_1(G) = 0$ implica que G tem uma variedade invariante uni-dimensional tangente à S . Se $\xi(G) \neq 0$, então G tem um ponto crítico hiperbólico com as variedades invariantes transversais à S .

Se $\xi_2(G) = 0$, então G tem um ponto crítico em S ; se $\xi_2(G) < 0$, então G não tem pontos críticos; e finalmente, se $\xi_2(G) > 0$, então G tem um ponto crítico fora de S .

Lema 4.14 (Submersão : Foco Degenerado)

Seja $p \in S$ um ponto crítico do tipo Foco Degenerado do campo vetorial $F \in \mathcal{X}^r$. Então existem: uma vizinhança B de F em \mathcal{X}^r ; uma vizinhança N de p em M ; e uma função C^{r-1} , $\xi : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ tais que:

1. $\xi(G) = 0 \Leftrightarrow G \in B$ tem um único ponto crítico, que é do tipo Foco Degenerado, $p_G \in N$;
2. $d\xi_F$ é sobrejetora.

Prova:

Seja (u_1, u_2, u_3) um sistema de coordenadas numa vizinhança de p tal que:

$$u_1(p) = u_2(p) = u_3(p) = 0$$

e

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(p) \in T_i, \quad i = 1, 2, 3$$

onde T_i é o autoespaço associado ao autovalor λ_i de $(DF)_p$.

Seja $F \in \mathcal{X}^r$ tal que $0 \in S$ é um ponto crítico do tipo Foco Degenerado de F . Podemos escrever o campo vetorial na forma:

$$F = \begin{cases} \dot{u}_1 = k_1 u_1 + k_2 u_2 + h.o.t. \\ \dot{u}_2 = -k_2 u_1 + k_1 u_2 + h.o.t. \\ \dot{u}_3 = -k_2 u + k_1 v + k_1 w + h.o.t. \end{cases} \quad (4.51)$$

onde k_1, k_2, λ_3 são não nulos, e $\lambda_3 \neq k_1$; $\lambda_3 \neq 2k_1$.

Da observação 1.6, temos que:

$$\Delta_F = (\sigma(F) - k_1)^2 - \frac{4 \det(F)}{k_1} < 0 \quad (4.52)$$

Sejam vizinhanças, B de F em \mathcal{X}^r e N de p em M . Seja $G \in B$.

Do Lema 4.4, temos que G tem um ponto crítico $p_G \in N$. Seja ainda a função λ_3^G como definida na demonstração do Lema 4.10.

Por continuidade, temos ainda que:

$$\Delta_G < 0 \quad (4.53)$$

Definimos então a função C^{r-1} , $\xi_1 : B \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$\xi_1(G) = \sigma(G) - 3\lambda_3^G \quad (4.54)$$

onde $\sigma(G)$ é o traço da matriz $(DG)_{p_G}$.

Seja Π a projeção de N sobre T^3 paralela à S .

Consideremos a função C^{r-1} , $\xi_2 : B \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\xi_2 = \Pi(p_G(G)) \quad (4.55)$$

Definimos a aplicação $\xi : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\xi(G) = (\xi_1(G), \xi_2(G)) \quad (4.56)$$

Temos que $\xi(F) = (0, 0)$. Observemos que $\xi(G) = 0$ e da equação 4.53, implica que o campo vetorial $G \in B$ tem um ponto crítico p_G em $N \cap S$, o qual é do tipo Foco Degenerado.

A recíproca é imediata. De fato, pois se $p_G \in S$ é um ponto crítico tipo Foco Degenerado, então $(DG)_{p_G}$ tem autovalores $\lambda_{12} = a \pm ib$, $\lambda_3 = a$ e assim $\xi_1(G) = 0$. Temos ainda que $p_G \in S \Rightarrow \xi_2 = 0$.

Mostremos que $(D\xi)_F$ é sobrejetora.

Tomemos a curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow B$ definida por:

$$\alpha(s) = F + s(u, 0, 0); \quad \alpha(0) = F \quad (4.57)$$

Para a curva $\alpha(s)$ temos que o ponto crítico é $p_{\alpha(s)} = (0, 0, 0)$. Calculemos então, $(D\xi)_F$.

$$\begin{aligned} (D\xi)_F &= \left. \frac{\partial}{\partial s} (\xi_1(\alpha(s)), \xi_2(\alpha(s))) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial s} (\sigma(\alpha(s)) - \lambda_3^G(\alpha(s), 0)) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial s} (s, 0) \right|_{s=0} \\ &= (1, 0) \end{aligned}$$

Tomemos agora a curva $\beta : B \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\beta(s) = F + s(0, 0, k_1); \quad \beta(0) = F \quad (4.58)$$

Temos que o ponto crítico para a curva β é $(0, 0, -s + h.o.t)$. Assim, temos que

$$(d\xi_2)_F = -1 \neq 0$$

Segue então que $(D\xi)_F$ é sobrejetora. ■

Observação 4.15

Observemos que $\xi(G) = 0$, implica que o campo vetorial $G \in B$ tem um ponto crítico p_G em $N \cap S$, o qual é um foco degenerado, pois $\xi_1(G) = 0$ implica que $(DG)p_G$ tem autovalores $Re((\lambda_{12}^G) = \lambda_3^G$. Se $\xi(G) \neq 0$, então G tem um ponto crítico hiperbólico que é um (foco) atrator ou repulsor, com $Re((\lambda_{12}^G) \neq \lambda_3^G$.

Se $\xi_2(G) = 0$, então G tem um ponto crítico em S ; se $\xi_2(G) < 0$, então G não tem pontos críticos; e finalmente, se $\xi_2(G) > 0$, então G tem um ponto crítico fora de S .

Lema 4.16 (Submersão : Foco Tangente)

Seja $p \in S$ um ponto crítico do tipo Foco Tangente do campo vetorial $F \in \mathfrak{X}^r$. Então existem: uma vizinhança B de F em \mathfrak{X}^r ; uma vizinhança N de p em M ; e uma função C^{r-1} , $\xi : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ tais que:

1. $\xi(G) = 0 \Leftrightarrow G \in B$ tem um único ponto crítico, que é do tipo Foco Tangente, $p_G \in N$;
2. $d\xi_F$ é sobrejetora.

Prova:

Seja (u_1, u_2, u_3) um sistema de coordenadas numa vizinhança de p tal que:

$$u_1(p) = u_2(p) = u_3(p) = 0$$

e

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(p) \in T_i, \quad i = 1, 2, 3$$

onde T_i é o autoespaço associado ao autovalor λ_i de $(DF)_p$.

Seja $F \in \mathcal{X}^r$ tal que $0 \in S$ é um ponto crítico do tipo Foco Tangente de F . Podemos escrever os campo vetorial na forma:

$$F = \begin{cases} \dot{u}_1 = au_1 + bu_2 + h.o.t. \\ \dot{u}_2 = -bu_1 + au_2 + h.o.t. \\ \dot{u}_3 = \lambda_3 u_3 + \varepsilon_1(2a - \lambda_3)u_1^2 + \varepsilon_2(2a - \lambda_3)u_2^2 + 2b(1 - \varepsilon_2) + h.o.t \end{cases} \quad (4.59)$$

onde a, b, λ_3 são não nulos, $\lambda_3 \neq a$; $\lambda_3 \neq 2a$ e $\varepsilon_1 = \pm 1$; $\varepsilon_2 = \pm 1$.

O campo vetorial F tem uma variedade invariante, γ , tangente à S , dada por:

$$\gamma(u_1, u_2, u_3) = u_3 - \varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_2^2 \quad (4.60)$$

Sejam B e V vizinhanças de F e 0 respectivamente.

Seja o campo vetorial $G \in B$, com $G(u) = (G^1(u), G^2(u), G^3(u))$.

Pelo Lema 4.4, temos que G tem um ponto crítico $p_G \in N$. Como 0 é um ponto crítico hiperbólico, temos que a variedade invariante é indestrutível, ou seja G tem também uma variedade invariante γ^G próxima de γ . (ver [14])

Observemos ainda que 0 é um ponto crítico não degenerado de γ e assim γ^G tem em p_G um ponto crítico não degenerado.

Por continuidade temos que $(DG)_{p_G}$ tem autovalores $\lambda_{12}^G = a^G \pm b^G i$, λ_3^G , com a^G, b^G, λ_3^G reais, não nulos, e

$$2a^G \neq \lambda_3^G; \quad a_2^G \neq \lambda_3^G; \quad (4.61)$$

Definimos então a função C^{r-1} , $\xi_1 : B \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$\xi_1(G) = \gamma_{u_1}^G(p_G) \quad (4.62)$$

Seja Π a projeção de N sobre T^3 paralela à S .

Consideremos a função C^{r-1} , $\xi_2 : B \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\xi_2 = \Pi(p_G(G)) \quad (4.63)$$

Definimos a aplicação $\xi : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\xi(G) = (\xi_1(G), \xi_2(G)) \quad (4.64)$$

Temos que $\xi(F) = (0, 0)$. Observemos que $\xi(G) = 0$, implica que o campo vetorial $G \in B$ tem um ponto crítico p_G em $N \cap S$, o qual é do tipo Foco Tangente(ver equação 4.61).

A recíproca é imediata. De fato, pois se $p_G \in S$ é um ponto crítico tipo Foco Tangente, então existe uma variedade invariante bi-dimensional, γ^G tangente à S em p_G e assim $\gamma_{u_1}^G(p_G) = \gamma_{u_2}^G(p_G) = 0$, e portanto $\xi_1(G) = 0$. Temos ainda que $p_G \in S \Rightarrow \xi_2 = 0$.

Mostremos que $(D\xi)_F$ é sobrejetora.

Tomemos a curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow B$ definida por:

$$\alpha(s) = F + s(0, 0, u); \quad \alpha(0) = F \quad (4.65)$$

Para a curva $\alpha(s)$ temos que o ponto crítico é $p_{\alpha(s)} = (0, 0, 0)$ e a variedade invariante γ^G é dada por:

$$\gamma^{\alpha(s)} = u_3 - \varepsilon_1 u_1^2 - 2 u_2^2 + \frac{a}{a^2 + b^2}(su) - \frac{b}{a^2 + b^2}(sv) \quad (4.66)$$

Calculemos então, $(D\xi)_F$.

$$\begin{aligned} (D\xi)_F &= \left. \frac{\partial}{\partial s} (\xi_1(\alpha(s)), \xi_2(\alpha(s))) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial s} (\gamma_{u_1}^{\alpha(s)}, 0) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial s} (-2\varepsilon_1 u_1 + \frac{a}{a^2 + b^2} s, 0) \right|_{s=0} \\ &= \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, 0 \right) \end{aligned}$$

Tomemos agora a curva $\beta : B \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\beta(s) = F + s(0, 0, \lambda_3); \quad \beta(0) = F \quad (4.67)$$

Temos que o ponto crítico para a curva β é $(0, 0, -s + h.o.t)$. Assim, temos que

$$(d\xi_2)_F = -1 \neq 0$$

Segue então que $(D\xi)_F$ é sobrejetora. ■

Observação 4.17

Observemos que $\xi(G) = 0$, implica que o campo vetorial $G \in B$ tem um ponto crítico p_G em $N \cap S$, o qual é um hiperbólico tangente, pois $\xi_1(G) = 0$ implica que G tem uma variedade invariante bi-dimensional tangente à S . Se $\xi(G) \neq 0$, então G tem um ponto crítico hiperbólico com as variedades invariantes transversais à S .

Se $\xi_2(G) = 0$, então G tem um ponto crítico em S ; se $\xi_2(G) < 0$, então G não tem pontos críticos; e finalmente, se $\xi_2(G) > 0$, então G tem um ponto crítico fora de S .

A análise completa numa vizinhança de G é feita nos Lemas 4.31 e 4.32.

4.1.2 Singularidades do Tipo Tangencial

Nesta secção, mostramos que o conjunto de campos vetoriais que tem um ponto crítico no bordo, como um dos citados na definição 4.2, é uma subvariedade de codimensão 2 em \mathcal{X}^r .

Lema 4.18 2.9 Goose

Seja 0 uma S -singularidade do tipo Goose de $F \in \mathcal{X}^r$. Então, existem vizinhanças B de F em \mathcal{X}^r , V de 0 em \mathbb{R}^3 e uma função C^∞ , $\xi : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

1. Se $\xi(G) = 0$, $G \in B$, então existe uma única S -singularidade de G em V do tipo Goose;
2. $D\xi(F)$ é sobrejetora.

Prova:

Nas coordenadas (u, v, w) previamente fixadas temos que o campo F é dado por:

$$F(u, v, w) = (f^1(u, v, w), f^2(u, v, w), g(u, v, w))$$

e o conjunto dos pontos fixos da involução, S tem a seguinte definição implícita:

$$h(u, v, w) = w$$

Seja 0 uma S -singularidade de F do tipo Goose, temos que:

- $F(0) \neq 0$;
- $Fh(0) = h(0) = 0 \Rightarrow c_{000} = b_{000} = 0$; $a_{000} \neq 0$;
- $F^2h(0) = 0 \Rightarrow c_{100} = 0$;
- $Fh|_S$ equivalente a um germe simples do tipo $A_2 \Rightarrow c_{200} \cdot c_{030} \neq 0$ (Neste caso temos que $Fh|_S(u, \zeta) = \pm \zeta^3 + \varepsilon_1 \cdot u^2$; $\varepsilon_1 = \pm 1$).

Temos assim que o contato entre a trajetória de F e S em 0 é de terceira ordem. Escrevemos então:

$$F^3(u, v, 0) = c_{200}u^2 + c_{030}v^3 + \dots$$

Seja G uma perturbação do campo F em \mathcal{X}^r dado por $G = (G^1, G^2, G^3)$ nas coordenadas (u, v, w) . Por continuidade, para $p_G = (u, v, w)$ numa vizinhança de 0 ficamos com:

$$\tilde{f}^1(u, v, w) \neq 0$$

$$\tilde{g}_{uu}(u, v, w) \neq 0$$

$$\tilde{g}_{vvv}(u, v, w) \neq 0$$

Genericamente temos que $G^3(u, v, 0)$ se desdobra em:

$$G_{\alpha, \beta}^3(u, v, 0) = c_{200}u^2 + c_{030}v^3 + \alpha v + \beta + h.o.t.$$

Parametrizamos as trajetórias de G que passam por $(u, v, 0)$ por:

$$\Gamma(u, v, w) = (u, v, c_{200}^1u^3 + c_{030}^1uv^3 + \alpha uw + \beta u + h.o.t.)$$

Consideremos agora, como em [28], novas coordenadas para o campo G em uma vizinhança pequena de F , dadas pelo fluxo tubular K_G , ou ainda:

$$G(r_1, r_2, r_3) = (1, 0, 0)$$

$$S = \{(r_1, r_2, r_3) : r_3 = m_G(r_1, r_2)\}$$

onde m_G é uma função C^∞ tal que $m_F(r_1, r_2) = b^1u^3 + b^2uv^3$.

Observemos que as relações $G \rightarrow K_G$ e $G \rightarrow m_G$ são contínuas com $K_G \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ e $m_G \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Fixemos G e analisemos os pontos de tangência, ou seja os pontos onde $G_s = 0$, ou ainda os pontos tais que:

$$\frac{dm_G(r_1, r_2)}{dr_1} = 0$$

Definemos então a aplicação C^r dada por:

$$\xi : \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ G & & (G_v^3(p), G^3(p)) \end{array}$$

tal que se $\xi(G) = (\alpha, \beta)$ então G é equivalente à $G_{\alpha, \beta} = (1, 0, 0)$, no sistema de coordenadas dado por K_G e S dado implicitamente por:

$$m_{\alpha,\beta} = b_1u^3 + b_2uv^3 + \alpha uv + \beta u$$

Assim pela definição de $\xi(G)$ a conclusão segue.

Observação :

- $\xi(F) = 0 \iff \exists! p \in S$, tal que p é uma S -singularidade do tipo Goose;
- $D\xi(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cujo determinante é diferente de 0, ou ainda $D\xi(F)$ é sobrejetora.

■

A demonstração dos Lemas 4.19 e 4.20, é feita forma análoga a demonstração do Lema 4.18.

Lema 4.19 *2.10 Gull*

Seja 0 uma S -singularidade do tipo Gull de $F \in \mathcal{X}^r$. Então, existem vizinhanças B de F em \mathcal{X}^r , V de 0 em \mathbb{R}^3 e uma função C^∞ , $\xi : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

1. Se $\xi(G) = 0$, $G \in B$, então existe uma única S -singularidade de G em V do tipo Gull;
2. $D\xi(F)$ é sobrejetora.

Prova:

De forma análoga à demonstração do Lema 4.18.

■

Lema 4.20 *2.11 Butterfly*

Seja 0 uma S -singularidade do tipo Goose de $F \in \mathcal{X}^r$. Então, existem vizinhanças B de F em \mathcal{X}^r , V de 0 em \mathbb{R}^3 e uma função C^∞ , $\xi : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

1. Se $\xi(G) = 0$, $G \in B$, então existe uma única S -singularidade de G em V do tipo Butterfly;
2. $D\xi(F)$ é sobrejetora.

Prova:

De forma análoga à demonstração do Lema 4.18. ■

4.2 Caracterização das Tangências

Na sequência assumiremos a seguinte notação .

Seja $p \in M$ um ponto crítico do campo vetorial $F \in \mathcal{X}^r$. Denotemos por $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$, os autovalores de $(DF)_p$.

Seja (u_1, u_2, u_3) um sistema de coordenadas numa vizinhança de p tal que:

$$u_1(p) = u_2(p) = u_3(p) = 0$$

e

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(p) \in T_i, \quad i = 1, 2, 3$$

onde T_i é o autoespaço associado ao autovalor λ_i de $(DF)_p$.

Sejam ainda, $B_0 \subset \mathcal{X}^r$ e $N_0 \in M$, vizinhanças de F e p respectivamente.

Denotemos por L_F a linha de tangências entre as órbitas do Campo Vetorial F e S , ou ainda

$$L_F = \{q \in M : h(q) = Fh(q) = 0\} \quad (4.68)$$

onde h é uma definição implícita de S tal que $h(p) = 0$.

Lema 4.21 (L_F : Regular ou Cônica) .

Seja $p \in S$ um ponto crítico do campo vetorial $F \in \mathcal{X}^r$.

L_F^1 Se temos dois autoespaços que são transversais à S e $Re(\lambda_i) \neq Re(\lambda_j)$, para algum $i \neq j$; $i, j \in \{1, 2, 3\}$, então L_F é uma curva regular;

L_F^2 Se os autoespaços são tais que, dois são tangentes à S e o outro transversal à S , e $(Re(\lambda_1) - 2\lambda_3) \neq 0$; $i \in \{1, 2, 3\}$, então L_F é uma cônica;

Prova:

Seja S dado implicitamente por:

$$h(u_1, u_2, u_3) = au_1 + bu_2 + cu_3 + \sum_{i+j+k>1} a_{i,j,k}u_1^i u_2^j u_3^k = 0 \quad (4.69)$$

Digamos que os autoespaços transversais à S sejam T_2, T_3 , temos então que b, c são reais não nulos.

Sejam os campos vetoriais $F_R, F_M \in \mathcal{X}^r$, onde F_R tem autovalores reais $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e F_M com autovalores $\lambda_{12} = k_1 \pm ik_2$, $k_2 \neq 0$; $\lambda_3 \in \mathbb{R}$, dados por:

$$F_R = \begin{cases} \dot{u}_1 = \lambda_1 u_1 + \tilde{F}^1(u_1, u_2, u_3) \\ \dot{u}_2 = \lambda_2 u_2 + \tilde{F}^2(u_1, u_2, u_3) \\ \dot{u}_3 = \lambda_3 u_3 + \tilde{F}^3(u_1, u_2, u_3) \end{cases} \quad (4.70)$$

$$F_M = \begin{cases} \dot{u}_1 = k_1 u_1 + k_2 u_2 + \tilde{F}^1(u_1, u_2, u_3) \\ \dot{u}_2 = -k_2 u_1 + k_1 u_2 + \tilde{F}^2(u_1, u_2, u_3) \\ \dot{u}_3 = \lambda_3 u_3 + \tilde{F}^3(u_1, u_2, u_3) \end{cases} \quad (4.71)$$

Temos que,

$$(F_R h)(u) = (a\lambda_1)u_1 + (b\lambda_2)u_2 + (c\lambda_3)u_3 + h.o.t \quad (4.72)$$

$$(F_M h)(u) = (ak_1 - bk_2)u_1 + (ak_2 + bk_1)u_2 + (c\lambda_3)u_3 + h.o.t \quad (4.73)$$

Definimos a aplicação $\zeta_R : N_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\zeta_R(u) = (h(u), Fh(u)) \quad (4.74)$$

onde $u = (u_1, u_2, u_3)$ e Fh , ou é $F_R h$ ou $F_M h$.

Temos que,

$$\zeta_R(0) = 0$$

$$(D\zeta_R)_0 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ (Fh)_{u_1}(0) & (Fh)_{u_2}(0) & (Fh)_{u_3}(0) \end{pmatrix}$$

onde Fh , ou é $F_R h$ ou $F_M h$.

Das equações 4.72 e 4.73, temos que:

$$\nabla(F_R h)(0) = (a\lambda_1, b\lambda_2, c\lambda_3)$$

$$\nabla(F_M h)(0) = (ak_1 - bk_2, ak_2 + bk_1, c\lambda_3)$$

Se $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, e $\lambda_i \neq \lambda_j$, para algum $i, j \in \{1, 2, 3\}$, então $(\nabla h)(0), (\nabla(Fh)_R)(0)$ são linearmente independentes;

Se $\lambda_{12} = k_1 \pm ik_2$; $k_2 \neq 0$; $\lambda_3 \in \mathbb{R}$, então $(\nabla h)(0), (\nabla(F_M h))(0)$ são linearmente dependentes, se somente se,

$$\lambda_3 = \frac{ak_1 - bk_2}{a} = \frac{ak_2 + bk_1}{b} \quad (4.75)$$

Mas, se vale 4.75, temos que:

$$ak_2 + bk_1 - b\lambda_3 = 0$$

e,

$$0 = ak_2 + bk_1 - \frac{a}{b}(ak_1 - bk_2) = (a^2 + b^2)k_2 \neq 0$$

Portanto, $(\nabla h)(0), (\nabla(F_M h))(0)$ são linearmente independentes, e segue que $(d\zeta_R)_0$ é sobrejetora, e então $L_F = \zeta_R^{-1}(0)$ é uma curva regular em S . E assim, mostramos o item 4.21(L_F^1).

Provemos agora o item L_F^2 . Digamos que os autoespaços tangentes à são T_1, T_2 e tomemos S dado implicitamente por:

$$h_M(u_1, u_2, u_3) = au_1^2 + bu_2^2 + cu_3 + h.o.t. \quad (4.76)$$

com $a = \pm 1$, $b = \pm 1$ e c real não nulo. Observemos que, como 0 é um ponto crítico não degenerado(Morse), podemos desconsiderar os termos de ordem mais alta(h.o.t.)

Temos que:

$$(F_R h_M)(u) = (2a\lambda_1)u_1^2 + (2b\lambda_2)u_2^2 + (c\lambda_3)u_3 + h.o.t \quad (4.77)$$

$$(F_M h_M)(u) = (2ak_1)u_1^2 + (2bk_1)u_2^2 + (2ak_2 - 2bk_2)u_1u_2 + (c\lambda_3)u_3 + h.o.t \quad (4.78)$$

Tomaremos como antes Fh_M como sendo $F_R h_M$ ou $F_M h_M$.

Observemos que $(\nabla Fh_m)(0)$ é nulo, e assim 0 é um ponto crítico de $Fh_{/S}$.

E,

$$(F_R h_M)_{/S}(u) = (2\lambda_1 - \lambda_3)au_1^2 + (2\lambda_2 - \lambda_3)bu_2^2 + h.o.t \quad (4.79)$$

$$(F_M h_M)_{/S}(u) = (2k_1 - \lambda_3)au_1^2 + (2k_1 - \lambda_3)bu_2^2 + (2ak_2 - 2bk_2)u_1u_2 + h.o.t \quad (4.80)$$

Definimos a aplicação $\zeta_M : N_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\zeta_M(u) = ((\widehat{Fh})_{u_1}(u), (\widehat{Fh})_{u_2}(u)) \quad (4.81)$$

onde \widehat{Fh} , ou é $(F_R h_M)_{/S}$ ou $(F_M h_M)_{/S}$.

Temos que,

$$\zeta_M(0) = 0$$

$$(D\zeta_M)_0 = \begin{pmatrix} (\nabla(\widehat{Fh})_{u_1})(0) \\ (\nabla(\widehat{Fh})_{u_2})(0) \end{pmatrix}$$

onde \widehat{Fh} , ou é $(F_R h_M)_{/S}$ ou $(F_M h_M)_{/S}$.

E,

$$(\nabla((F_R h_M)_{/S})_{u_1}(0) = ((2\lambda_1 - \lambda_3)a, 0)$$

$$(\nabla((F_R h_M)_{/S})_{u_2}(0) = (0, (2\lambda_2 - \lambda_3)b)$$

$$(\nabla((F_M h_M)_{/S})_{u_1}(0) = (2a(2k_1 - \lambda_3), 2k_2(a - b))$$

$$(\nabla((F_M h_M)_{/S})_{u_2}(0) = (2k_2(a - b), 2b(2k_1 - \lambda_3))$$

Como.

$$\det((D\zeta_M)_0) = (2\lambda_1 - \lambda_3)(2\lambda_2 - \lambda_3) \neq 0$$

ou,

$$\det((D\zeta_M)_0) = 4ab(2k_1 - \lambda_3)^2 - 4k_2^2(a - b)^2 \neq 0$$

Temos assim que $(D\zeta_M)_0$ é sobrejetora e portanto 0 é um ponto crítico não degenerado de $Fh_{/S}$ e L_F é uma cônica.

Observamos ainda que se $(2\operatorname{Re}(\lambda_1) - \lambda_3)(2\operatorname{Re}(\lambda_2) - \lambda_3)ab > 0 (< 0)$ temos que L_F é um ponto ou elipse (par de retas ou hipérbole). ■

Tomemos agora um sistema de coordenadas (u_1, u_2, u_3) com $u_i(p) = 0$, $i = 1, 2, 3$ tal que S é dado implicitamente por:

$$h(u_1, u_2, u_3) = u_3$$

A curva L_F agora é dado por:

$$L_F = \{q \in \mathbb{R}^3 : q = (u_1, u_2, 0), F^3(q) = 0\}$$

pois $Fh(q) = F^3(q)$.

Temos o resultado:

Corolário 4.22

Sejam $p \in M$ uma ponto crítico do campo vetorial $F \in \mathcal{X}^r$, e S dado implicitamente por $h(u_1, u_2, u_3) = u_3$.

L_F^1 Se $F_{u_1}^3(p)$ ou $F_{u_2}^3(p)$ é não nulo, então L_F é uma curva regular em S ;

L_F^2 se $F_{u_1}^3(p) = F_{u_2}^3(p) = 0$ e o Hessiano de $F_{/S}^3$ é não nulo, então L_F é uma cônica em S .

Prova:

Segue como no Lema 4.21, considerando as aplicações $\zeta_R : N_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\zeta_M : N_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por:

$$\begin{aligned}\zeta_R(u) &= (h(u), F^3(u)) \\ \zeta_M(u) &= (F_{u_1}^3(u), F_{u_2}^3(u))\end{aligned}$$

■

Caracterizaremos a seguir, as curvas de tangências L_G de um campo vetorial G numa vizinhança $B_0 \subset \mathcal{X}^r$ de F .

Lema 4.23 (Caracterização de L_G)

Sejam as vizinhanças B_0 do campo vetorial F em \mathcal{E}^r , e N_0 do ponto crítico p de F em M . Tomemos $G \in B_0$

L_G^1 Se temos dois autoespaços que são transversais à S e $Re(\lambda_i) \neq Re(\lambda_j)$, para algum $i \neq j$; $i, j \in \{1, 2, 3\}$, então L_G é uma curva regular;

L_G^2 Se os autoespaços são tais que, no mínimo dois são tangentes à S , e $(Re(\lambda_1) - 2\lambda_3) \neq 0$; $i \in \{1, 2, 3\}$, então, ou L_G é uma cônica em S , ou G é transversal à S .

Prova:

Definimos as aplicações $\zeta^R : B_0 \times N_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\zeta^M : B_0 \times N_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definidas por:

$$\zeta^R(G, u) = \zeta_R(u) \quad (4.82)$$

$$\zeta^M(G, u) = \zeta_M(u) \quad (4.83)$$

onde $u = (u_1, u_2, u_3)$.

O aplicação do Lema 4.21 e do Teorema da Função Implícita, prova o item L_G^1 . No caso L_G^2 , a aplicação do Lema 4.21 e do Teorema da Função Implícita, garante a existência de um único ponto $\tilde{p}_G \in N_0$ tal que é um ponto tal que

$$(Gh_{/S})_{u_1}(\tilde{p}_G) = 0; \quad (Gh_{/S})_{u_2}(\tilde{p}_G) = 0$$

Por continuidade, temos que o Hessiano de $(Gh_{/S})(\tilde{p}_G) \neq 0$. Podemos ter então:

$$(Gh_{/S})(\tilde{p}_G) = 0; \quad (Gh_{/S})(\tilde{p}_G) \neq 0$$

Se $(Gh_{/S})(\tilde{p}_G) = 0$, então \tilde{p}_G é um ponto crítico não degenerado de $(Gh_{/S})$ e o Hessiano de $(Gh_{/S})(\tilde{p}_G)$ tem o mesmo sinal do Hessiano de $(Fh_{/S}(0))$. Assim, se Hessiano de $(Gh_{/S})(\tilde{p}_G)$ é menor que zero, então \tilde{p}_G , ou é um par de retas, ou é uma hipérbole; Caso contrário, \tilde{p}_G , ou é um ponto, ou é uma elipse.

Se $(Gh_{/S})(\tilde{p}_G) \neq 0$, então em \tilde{p}_G (e numa vizinhança deste) temos que G é transversal à S . ■

Lema 4.24

Seja $p \in S$, uma singularidade do Campo Vetorial $F \in \mathcal{E}^r$. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ os autovalores de $(DF)_p$.

Se os autoespaços T_i , $i = 1, 2, 3$ associados aos autovalores λ_i , $i = 1, 2, 3$, são transversais à S e vale uma das seguintes hipóteses:

- 1 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, são distintos aos pares;
- 2 $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \in \mathbb{R}$, e $\text{rank}((DF)_p - \lambda_1 Id) = 2$
- 3 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$, com parte imaginária não nula.

Então, o conjunto $\{(\nabla h)_p, (\nabla Fh)_p, (\nabla F^2h)_p\}$ é linearmente independente, onde h é uma definição implícita de S ,

Prova:

Seja (u_1, u_2, u_3) um sistema de coordenadas numa vizinhança de p tal que:

$$u_1(p) = u_2(p) = u_3(p) = 0$$

e

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(p) \in T_i, \quad i = 1, 2, 3$$

onde T_i é o autoespaço associado ao autovalor λ_i de $(DF)_p$.

Seja S dado implicitamente por:

$$h(u_1, u_2, u_3) = au_1 + bu_2 + cu_3 + \sum_{i+j+k>1} a_{i,j,k} u_1^i u_2^j u_3^k = 0 \quad (4.84)$$

onde a, b, c são reais não nulos.

(1) Seja inicialmente F , tal que $(DF)_0$ tenha autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Nestas coordenadas, temos pela forma normal de Takens que, podemos escrever o campo vetorial F na forma:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \lambda_1 u_1 + F^1(u_1, u_2, u_3) \\ \dot{u}_2 = \lambda_2 u_2 + F^2(u_1, u_2, u_3) \\ \dot{u}_3 = \lambda_3 u_3 + F^3(u_1, u_2, u_3) \end{cases} \quad (4.85)$$

com $F^i(0) = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Ficamos com:

$$Fh(u_1, u_2, u_3) = a\lambda_1 u_1 + b\lambda_2 u_2 + c\lambda_3 u_3 + h.o.t. \quad (4.86)$$

$$F^2h(u_1, u_2, u_3) = a\lambda_1^2 u_1 + b\lambda_2^2 u_2 + c\lambda_3^2 u_3 + h.o.t. \quad (4.87)$$

Assim,

$$(\nabla h)_0 = (a, b, c) \quad (4.88)$$

$$(\nabla Fh)_0 = (a\lambda_1, b\lambda_2, c\lambda_3) \quad (4.89)$$

$$(\nabla F^2h)_0 = (a\lambda_1^2, b\lambda_2^2, c\lambda_3^2) \quad (4.90)$$

e

$$D_r = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a\lambda_1 & b\lambda_2 & c\lambda_3 \\ a\lambda_1^2 & b\lambda_2^2 & c\lambda_3^2 \end{pmatrix} = abc(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1) \quad (4.91)$$

Assim, $D_r = 0$ se, somente se $\lambda_i = \lambda_j$, para algum $i \neq j$, e $i, j = 1, 2, 3$.

(2) Tomemos agora F , tal que $(DF)_0$ tenha autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Temos que a forma normal de pode ser escrita na forma:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \lambda_1 u_1 + h.o.t \\ \dot{u}_2 = \lambda_1 u_2 + h.o.t. \\ \dot{u}_3 = \lambda_3 u_3 + h.o.t. \end{cases} \quad (4.92)$$

Ficamos com:

$$Fh(u_1, u_2, u_3) = (a\lambda_1 + b)u_1 + (b\lambda_1)u_2 + c\lambda_3 u_3 + h.o.t. \quad (4.93)$$

$$F^2h(u_1, u_2, u_3) = (a\lambda_1^2 + 2b\lambda_1)u_1 + (b\lambda_1^2)u_2 + (c\lambda_3^2)u_3 + h.o.t. \quad (4.94)$$

Assim,

$$(\nabla h)_0 = (a, b, c) \quad (4.95)$$

$$(\nabla Fh)_0 = (a\lambda_1 + b, b\lambda_1, c\lambda_3) \quad (4.96)$$

$$(\nabla F^2h)_0 = (a\lambda_1^2 + 2b\lambda_1, b\lambda_1^2, c\lambda_3^2) \quad (4.97)$$

e

$$D_r^* = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a\lambda_1 + b & b\lambda_1 & c\lambda_3 \\ a\lambda_1^2 + 2b\lambda_1 & b\lambda_1^2 & c\lambda_3^2 \end{pmatrix} = -b^2c(\lambda_1 - \lambda_3)^2 \quad (4.98)$$

Assim, $D_r^* = 0$ se, somente se $\lambda_1 = \lambda_3$.

Tomemos agora F , tal que $(DF)_0$ tenha autovalores $\lambda_{12} = \alpha \pm \beta$, $\beta \neq 0$, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$. Nestas coordenadas, temos pela forma normal de Takens que, podemos escrever o campo vetorial F na forma:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \alpha u_1 + \beta u_2 + F^1(u_1, u_2, u_3) \\ \dot{u}_2 = -\beta u_1 + \alpha u_2 + F^2(u_1, u_2, u_3) \\ \dot{u}_3 = \lambda_3 u_3 + F^3(u_1, u_2, u_3) \end{cases} \quad (4.99)$$

com $F^i(0) = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Ficamos com:

$$Fh(u_1, u_2, u_3) = (a\alpha - b\beta)u_1 + (a\alpha + b\beta)u_2 + cu_3 + h.o.t. \quad (4.100)$$

$$F^2h(u_1, u_2, u_3) = (a(\alpha^2 - \beta^2) - 2b\alpha\beta)u_1 + (b(\alpha^2 - \beta^2) + 2a\alpha\beta)u_2 + c\lambda_3^2 u_3 + h.o.t. \quad (4.101)$$

Assim,

$$(\nabla h)_0 = (a, b, c) \quad (4.102)$$

$$(\nabla Fh)_0 = (a\alpha - b\beta, a\alpha + b\beta, c\lambda_3) \quad (4.103)$$

$$(\nabla F^2h)_0 = (a(\alpha^2 - \beta^2) - 2b\alpha\beta, b(\alpha^2 - \beta^2) + 2a\alpha\beta, c\lambda_3^2) \quad (4.104)$$

e

$$D_c = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a\alpha - b\beta & a\alpha + b\beta & c\lambda_3 \\ a(\alpha^2 - \beta^2) - 2b\alpha\beta & b(\alpha^2 - \beta^2) + 2a\alpha\beta & c\lambda_3^2 \end{pmatrix} \quad (4.105)$$

$$D_c = c\beta(a^2 + b^2)(\lambda_3^2 - \alpha\lambda_3 + \alpha^2 + \beta^2) \quad (4.106)$$

Na equação 4.106. temos que

$$\alpha^2 - 4(\alpha^2 + \beta^2) = -(3\alpha^2 + 4\beta^2) < 0$$

Assim, $D_c \neq 0$. ■

O próximo lema caracteriza o tipo de contato (dobra ou cúspide) com S , do campo G , que está numa vizinhança de F , onde F tem os autoespaços T_i , $i = 1, 2, 3$ associados aos autovalores λ_i , $i = 1, 2, 3$, são transversais à S .

Lema 4.25 (Ponto crítico ou Cúspide)

Seja $p \in S$ um ponto crítico de F tal que os autoespaços T_i , $i = 1, 2, 3$ associados aos autovalores λ_i , $i = 1, 2, 3$, são transversais à S .

Então existem vizinhanças B de F em \mathcal{E}^r e N de p em M , e uma única aplicação $\tilde{p}_G : B \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que:

1. \tilde{p}_G é o único ponto em N , para $G \in B$, tal que

$$h(\tilde{p}_G) = Gh(\tilde{p}_G) = G^2h(\tilde{p}_G) = 0;$$

2. ou \tilde{p}_G é um ponto crítico de G , se $G^3h(\tilde{p}_G) = 0$, ou caso contrário, \tilde{p}_G é uma cúspide.
3. Se $q \in L_G$, com $q \neq \tilde{p}_G$, então q é uma singularidade tipo dobra.

Prova:

Seja (u_1, u_2, u_3) um sistema de coordenadas numa vizinhança de p tal que:

$$u_1(p) = u_2(p) = u_3(p) = 0$$

e

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(p) \in T_i, \quad i = 1, 2, 3$$

onde T_i é o autoespaço associado ao autovalor λ_i de $(DF)_p$.

Seja S dado implicitamente por:

$$h(u_1, u_2, u_3) = au_1 + bu_2 + cu_3 + \sum_{i+j+k>1} a_{i,j,k} u_1^i u_2^j u_3^k = 0 \quad (4.107)$$

onde a, b, c são reais não nulos.

Consideremos vizinhanças $B_0 \subset \mathcal{X}^r$ de $F \in \Sigma_2(a)$, e N_0 de p .

Definimos a aplicação $\zeta : B_0 \times N_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$\zeta(G, p) = (h(p), Gh(p), G^2h(p)) \quad (4.108)$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \zeta(F, 0) &= 0 \\ \frac{\partial \zeta}{\partial p}(F, 0) &= \begin{pmatrix} (\nabla h)_0 \\ (\nabla Gh)_0 \\ (\nabla G^2h)_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.109)$$

e pelo lema 4.24 temos que

$$\det \left(\frac{\partial \zeta}{\partial p}(F, 0) \right) \neq 0$$

Pelo Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança $B \subset B_0$ de F e $N \subset N_0$ de p e uma única função $\tilde{p}_G : B \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que para $G \in B$, $\zeta(G, p) = 0$ somente se $p = \tilde{p}_G(G)$. Isto prova o primeiro item.

Seja então $G^3h(\tilde{p}_G(G)) = 0$. Denotemos $\tilde{p}_G = \tilde{p}_G(G)$. Temos que:

$$\begin{aligned} (Gh)(\tilde{p}_G) + (G^2h)(\tilde{p}_G) + (G^3h)(\tilde{p}_G) &= 0 \\ G(\tilde{p}_G)(\nabla h)_{\tilde{p}_G} + G(\tilde{p}_G)(\nabla Gh)_{\tilde{p}_G} + G(\tilde{p}_G)(\nabla G^2h)_{\tilde{p}_G} &= 0 \end{aligned}$$

Pela Lema 4.24 e por continuidade, temos que os vetores

$$(\nabla h)_{\tilde{p}_G}, (\nabla Gh)_{\tilde{p}_G}, (\nabla G^2h)_{\tilde{p}_G}$$

são linearmente independentes e portanto formam uma base em \mathbb{R}^3 .

Portanto, temos que $G(\tilde{p}_G) = 0$.

Agora, seja $q \in L_G$, com $q \neq \tilde{p}_G$. Temos que

$$h(q) = 0; \quad Gh(q) = 0$$

Se $G^2h(q) = 0$, então, pelo item 2, temos que $q = \tilde{p}_G$. Caso contrário, temos que q é um singularidade tipo dobra. ■

A seguir, caracterizaremos as tangências de um Campo Vetorial, G , numa vizinhança de um Campo Vetorial $F \in \Sigma_2$ dado. Estabeleceremos, caso a caso, as tangências bem como o tipo do ponto crítico existente.

No caso dos Campos Vetoriais com ponto crítico, usaremos as C^∞ -formas normais dado por Yang (ver [29]) para campos vetoriais em \mathbb{R}^3 , nos Lemas a seguir. Uma vantagem destas C^∞ -formas normais, é que para nosso caso, temos que elas são finitamente determinadas. Entretanto, não conseguimos efetuar a mudança de coordenadas a fim de encontrarmos a forma normal, e ao mesmo tempo termos uma expressão simples para a função implícita que define o bordo S . Devemos observar ainda que, para a análise dos diagramas de bifurcações, usamos C^0 -equivalências (C^0 -formas normais).

Lema 4.26 (Sela-Nó:DB)

Seja p um ponto crítico do tipo Sela-Nó do campo vetorial F e B uma vizinhança de $F \in \mathcal{X}_2^$. Se $G \in B$, então L_G , tem uma única Cúspide (se $p_G \in L_G$, então não temos Cúspides), e G , ou não tem pontos críticos, ou tem um único ponto crítico simétrico, ou tem um ponto crítico simétrico e um ponto crítico assimétrico, ou ainda tem dois pontos críticos assimétricos.*

Prova:

Consideremos S dado implicitamente por $h(u, v, w) = w + \dots$

Neste caso, o Campo Vetorial $(DF)_p$ tem autovalores $0, \lambda_2, \lambda_3$ e os res-

pectivos autoespaços são transversais à S . Assim, por [29] e [26], a forma normal de G fica dada por:

$$G = \begin{cases} \dot{u} = \varepsilon(u+v)^2 + \iota_1 u^3 \\ \dot{v} = u - v + \iota_2 uv \\ \dot{w} = u + v + \lambda_3 w + \iota_3 uv + \delta v^m \end{cases} \quad (4.110)$$

onde $\delta \in \{0, 1\}$ e $m \in \mathbb{Z}$ no caso de termos ressonância do tipo $\lambda_3 = m\lambda_2$. Caso não tenhamos ressonância temos que $\iota_1, \iota_2, \iota_3, \delta$ são nulos.

Assim para analisarmos o diagrama de bifurcações, consideramos S dado implicitamente por, $h(u, v, w) = w$, e o C^0 -desdobramento universal do Campo Vetorial G , dado por:

$$G = \begin{cases} \dot{u} = \varepsilon(u+v)^2 + \alpha \\ \dot{v} = u - v \\ \dot{w} = u + v + \lambda_3 w + \beta \end{cases} \quad (4.111)$$

Temos que:

$$\begin{aligned} Gh|_S &= u + v + \beta \\ G^2 h|_S &= \varepsilon(u+v)^2 + \alpha + u - v \\ G^2 h|_{L_G} &= \varepsilon\beta^2 + \alpha + 2u + \beta \end{aligned}$$

Observamos então que $G^2 h|_{L_G}(q) = 0$, apenas em um único ponto q , o qual é simples, logo $G^3 h|_{L_G}(q) \neq 0$ e q é uma cúspide;

Analisemos agora para quais α, β temos que G tem um ponto crítico simétrico. Basta resolvermos $G(q) = 0$, com $q \in S$. De um breve cálculo, temos que ao longo da curva $\gamma(\alpha, \beta) = \varepsilon\beta^2 + \alpha = 0$, G tem um ponto crítico simétrico, para $\varepsilon\gamma(\alpha, \beta) > 0$, $\alpha \neq 0$, G tem um ponto crítico assimétrico e para $\varepsilon\gamma(\alpha, \beta) < 0$, $\alpha \neq 0$, ou G tem dois pontos críticos assimétricos ($\alpha > 0$), ou G não tem pontos críticos; se $\alpha = 0$, G tem um ponto crítico do tipo Sela-Nó assimétrico. ■

Lema 4.27 (Hopf:DB)

Seja p um ponto crítico do tipo Hopf do campo vetorial F . Se G está próximo de F , então L_G , tem sempre duas Cúspides (se $p_G \in L_G$, então temos uma Cúspide), e existe uma curva de Campos Vetoriais, que tem a órbita periódica tangente (quadrática) à S .

Consideremos S dado implicitamente por $h(u, v, w) = w + \dots$

Neste caso, o Campo Vetorial $(DF)_p$ tem autovalores $bi, -bi, \lambda_3$ e os respectivos autoespaços são transversais à S . Assim, por [29], a forma normal de G fica dada por:

$$G = \begin{cases} \dot{u} = -bv + \iota_1 u\sigma - \iota_2 v\sigma + \iota_3 u\sigma^2 \\ \dot{v} = bu + \iota_2 u\sigma + \iota_1 v\sigma + \iota_3 v\sigma^2 \\ \dot{w} = ku + v + \lambda_3 w + \iota_4 w\sigma; k \neq 1 \end{cases} \quad (4.112)$$

onde $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ são constantes e $\sigma = (u^2 + v^2)$. Observamos ainda que, neste caso temos necessariamente que $\iota_1 \neq 0$.

Assim para analisarmos o diagrama de bifurcações, consideramos S dado implicitamente por, $h(u, v, w) = w$, e o C^0 -desdobramento universal do Campo Vetorial G , dado por:

$$G = \begin{cases} \dot{u} = -v + u(\alpha - u^2 - v^2) + \alpha \\ \dot{v} = u + v(\alpha - u^2 - v^2) \\ \dot{w} = ku + v + \lambda_3 w + \beta; k \neq 1 \end{cases} \quad (4.113)$$

Temos que:

$$\begin{aligned} Gh_{/S} &= ku + v + \beta \\ G^2 h_{/S} &= kv + u + (ku + v)(\alpha - u^2 - v^2) \\ G^2 h_{/L_G} &= \beta(k^2 + 1)u^2 + (2\beta^2 k + k^2 + 1)u + \beta(k - \alpha + \beta^2) \end{aligned}$$

As órbitas periódicas surgem para $\alpha > 0$, e são dadas por:

$$u^2 + v^2 = \alpha$$

Analisemos os zeros de $G^2 h_{/L_G}$. Devemos neste caso analisar o discriminante desta equação, que é dado por:

$$\Delta = 1 + k^4 + 2k^2 + 4\beta^2(2\beta^2 k^2 + 2k^3 + 5k - k^2 - \alpha + \beta^2)$$

Então, para (α, β) numa vizinhança do 0 temos que $\Delta > 0$. Logo, $G^2 h/L_G$ tem sempre dois zeros simples ($G^3 h/L_G \neq 0$), e portanto G tem duas cúspides.

Estudemos agora o tipo de contato da órbita periódica de $G(\alpha > 0)$.

Para termos a órbita periódica tangente à S , devemos ter:

$$u^2 + v^2 = \alpha, \quad \text{e} \quad ku + v = -\beta$$

Resolvendo este sistema, impondo solução única, concluímos que para todo campo vetorial $G = F_{\alpha, \beta}$, tal que

$$\beta^2 = (k^2 + 1)\alpha$$

tem uma órbita periódica tangente à S em q_1 , e

$$G^2 h/L_G(q_1) = -\frac{\beta k}{k^2 + 1}(k^2 - k)$$

que é sempre não nulo, e portanto o contato é quadrático. ■

Lema 4.28 (Nó Degenerado:DB)

Seja p um ponto crítico do tipo Nó Degenerado do campo vetorial F . Se G está próximo de F , então L_G , tem sempre uma única Cúspide (se $p_G \in L_G$, então não temos Cúspide).

Consideremos S dado implicitamente por $h(u, v, w) = w + \dots$

Neste caso, o Campo Vetorial $(DF)_p$ tem autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ reais e não nulos, e os respectivos autoespaços transversais à S . Assim, por [29], a forma normal de G fica dada por:

$$G = \begin{cases} \dot{u} = \lambda_1 u + \iota_1 u \sigma + \delta u \sigma^2 \\ \dot{v} = u + \lambda_2 v + \iota_2 v \sigma \\ \dot{w} = u + v + \lambda_3 w + \iota_3 w \sigma \end{cases} \quad (4.114)$$

onde $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ são constantes, $\sigma = u^{k_1} v^{k_2} w^{k_3}$ com $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}^+$ satisfazendo $(k_1 + k_2)\lambda_1 + k_3\lambda_1 = 0$ e $\sigma \in \{0, \pm 1\}$. Observamos ainda que, se $\lambda_1 \lambda_3 > 0$, podemos considerar $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ nulos e $\dot{w} = u + v + q\lambda_1 w + \delta v^q$, onde $\lambda_3 = q\lambda_1$.

Assim para analisarmos o diagrama de bifurcações, consideramos S dado implicitamente por, $h(u, v, w) = w$, e o C^0 - desdobramento universal do Campo Vetorial G , dado por:

$$G = \begin{cases} \dot{u} = \lambda_1 u + \alpha v \\ \dot{v} = u + \lambda_1 v \\ \dot{w} = u + v + \lambda_3 w + \beta \end{cases} \quad (4.115)$$

Temos que:

$$\begin{aligned} Gh/S &= u + v + \beta \\ G^2h/S &= (\lambda_1 + 1)u + (\alpha + \lambda_1)v \\ G^2h/L_G &= (1 - \alpha)u - \beta(\alpha + \lambda_1) \end{aligned}$$

Logo, G tem sempre uma única cúspide. E pelo Lema 4.25, sabemos que se $p_G \in L_G$, então não temos cúspides neste caso. ■

Lema 4.29 (Foco Degenerado:DB)

Seja p um ponto crítico do tipo Foco Degenerado do campo vetorial F . Se G está próximo de F , então L_G , tem sempre duas Cúspides (se $p_G \in L_G$, então temos uma Cúspide).

Consideremos S dado implicitamente por $h(u, v, w) = w + \dots$

Neste caso, o Campo Vetorial $(DF)_p$ tem autovalores $a \pm bi$, a , com a, b não nulos com os respectivos autoespaços são transversais à S e o Hessiano de Fh/S não nulo. Observamos ainda que neste caso não temos ressonância, logo por Sternberg ([22]), temos que F tem a C^∞ - forma normal dada por:

$$G = \begin{cases} \dot{u} = au - bv \\ \dot{v} = -bu + av \\ \dot{w} = u + v + aw + \varepsilon_1 u^2 + \varepsilon_2 v^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)uv \end{cases} \quad (4.116)$$

onde $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$.

Assim para analisarmos o diagrama de bifurcações, consideramos S dado implicitamente por, $h(u, v, w) = w$, e o C^0 - desdobramento universal do Campo Vetorial G , dado por:

$$G = \begin{cases} \dot{u} = au + bv + \alpha u \\ \dot{v} = -bu + av \\ \dot{w} = 2u + 2v + aw + \varepsilon_1 u^2 + \varepsilon_2 v^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)uv + \beta; \\ \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, 2 \end{cases} \quad (4.117)$$

Temos que:

$$\begin{aligned} Gh_{/S} &= 2u + 2v + \varepsilon_1 u^2 + \varepsilon_2 v^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)uv \\ G^2 h_{/S} &= (2\varepsilon_1(a + \alpha) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)b)u^2 + (2\varepsilon_2 a - b(\varepsilon_1 - \varepsilon_2))v^2 + \\ &\quad + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(2(b - a) - \alpha)uv + \\ &\quad + (2(a - b) + 2\alpha)u + 2(a + b)v \end{aligned}$$

Consideremos inicialmente o caso $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, e ainda, para simplificar os cálculos, e sem perda de generalidade, consideremos $a = b = 1$.

Ficamos com:

$$G^2 h_{/L_G} = \alpha u^2 + (\alpha - 2)u - \beta$$

e o discriminante é dado por:

$$\Delta = 4 + \alpha(\alpha - 4 + 4\beta)$$

Então, para (α, β) numa vizinhança do 0 temos que $\Delta > 0$. Logo, $G^2 h_{/L_G}$ tem sempre dois zeros simples ($G^3 h_{/L_G} \neq 0$), e portanto G tem duas cúspides.

Para o caso $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = -1$, e fazendo os mesmos cálculos acima, ficamos com:

$$G^2 h_{/L_G} = 2(2 + \alpha)u^2 + 2(\alpha + 2)u + 2\beta$$

e o discriminante é dado por:

$$\Delta = 4 + \alpha(\alpha + 2) - 4\beta(\alpha + 2)$$

E temos a mesma conclusão que acima, ou seja G tem sempre duas cúspides.

Assim para analisarmos o diagrama de bifurcações, consideramos S dado implicitamente por $h(u, v, w) = w$, e o C^0 -desdobramento universal do Campo Vetorial G , dado por:

$$G = \begin{cases} \dot{u} = au + bv + \alpha u \\ \dot{v} = -bu + av \\ \dot{w} = 2u + 2v + aw + \varepsilon_1 u^2 + \varepsilon_2 v^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)uv + \beta; \\ \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, 2 \end{cases} \quad (4.117)$$

Temos que:

$$\begin{aligned} Gh_{/S} &= 2u + 2v + \varepsilon_1 u^2 + \varepsilon_2 v^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)uv \\ G^2 h_{/S} &= (2\varepsilon_1(a + \alpha) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)b)u^2 + (2\varepsilon_2 a - b(\varepsilon_1 - \varepsilon_2))v^2 + \\ &\quad + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(2(b - a) - \alpha)uv + \\ &\quad + (2(a - b) + 2\alpha)u + 2(a + b)v \end{aligned}$$

Consideremos inicialmente o caso $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, e ainda, para simplificar os cálculos, e sem perda de generalidade, consideremos $a = b = 1$.

Ficamos com:

$$G^2 h_{/LG} = \alpha u^2 + (\alpha - 2)u - \beta$$

e o discriminante é dado por:

$$\Delta = 4 + \alpha(\alpha - 4 + 4\beta)$$

Então, para (α, β) numa vizinhança do 0 temos que $\Delta > 0$. Logo, $G^2 h_{/LG}$ tem sempre dois zeros simples ($G^3 h_{/LG} \neq 0$), e portanto G tem duas cúspides.

Para o caso $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = -1$, e fazendo os mesmos cálculos acima, ficamos com:

$$G^2 h_{/LG} = 2(2 + \alpha)u^2 + 2(\alpha + 2)u + 2\beta$$

e o discriminante é dado por:

$$\Delta = 4 + \alpha(\alpha + 2) - 4\beta(\alpha + 2)$$

E temos a mesma conclusão que acima, ou seja G tem sempre duas cúspides. ■

Consideremos o caso do Hiperbólico tangente. Neste caso F tem um autoespaço tangente à S , digamos T_1 . Temos o seguinte lema:

Lema 4.30 (Hip. Tangente:DB)

Seja p um ponto crítico do tipo hiperbólico tangente do campo vetorial F . Se G está próximo de F , então L_G , ou tem duas singularidades do tipo Cúspide, ou uma singularidade tipo Dove's Tail, ou somente dobras.

Prova:

Pelo Lema 4.23, temos que a curva de tangências de G é uma curva regular. Seja (u_1, u_2, u_3) um sistema de coordenadas numa vizinhança de p tal que:

$$u_1(p) = u_2(p) = u_3(p) = 0$$

e

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(p) \in T_i, \quad i = 1, 2, 3$$

onde T_i é o autoespaço associado ao autovalor λ_i de $(DF)_p$.

Seja $F \in \mathfrak{X}^r$ tal que $0 \in S$ é uma singularidade do tipo Hiperbólico Tangente de F , e $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ os autovalores de $(DF)_p$. Consideremos S dado implicitamente por $h(u_1, u_2, u_3) = u_3 + \dots$

Em [29] temos os seguintes resultados sobre C^∞ -formas normais, para este caso.

Seja a equação

$$k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 = 0 \tag{4.118}$$

com $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}^+$

Se a equação 4.118 for satisfeita apenas para k_1, k_2, k_3 nulos, então as relações de ressonância são da forma:

$$\lambda_3 = \tilde{k}_1\lambda_1 + \tilde{k}_2\lambda_2$$

e a forma normal de F é finitamente determinada.

Caso contrário, ou seja existem k_1, k_2, k_3 não nulos que satisfazem a equação 4.118, então a forma normal é dada por:

$$G = F_{\alpha, \beta} = \begin{cases} \dot{u}_1 = \lambda_1 u_1 + \iota_1 u z + \delta u z^2 \\ \dot{u}_2 = \lambda_2 u_2 + \iota_2 v z \\ \dot{u}_3 = \lambda_3 u_3 + u_2 + \varepsilon_1 (\lambda_3 - 2\lambda_1) u_1^2 + \iota_3 w z \end{cases} \quad (4.119)$$

onde $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ são constantes, $\delta \in \{0, \pm 1\}$, $z = u_1^{k_1} + u_2^{k_2} + u_3^{k_3}$.

Assim para analisarmos o diagrama de bifurcações, consideramos S dado implicitamente por, $h(u, v, w) = w$, e o C^0 -desdobramento universal do Campo Vetorial G , dado por:

$$G = F_{\alpha, \beta} = \begin{cases} \dot{u}_1 = \lambda_1 u_1 \\ \dot{u}_2 = \lambda_2 u_2 \\ \dot{u}_3 = \lambda_3 u_3 + u_2 + \varepsilon_1 (\lambda_3 - 2\lambda_1) u_1^2 + \alpha u + \beta \end{cases} \quad (4.120)$$

onde $\varepsilon_1 = \pm 1$ e $\varepsilon_2 = \pm 1$ e os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são distintos e não nulos.

Calculemos $Fh/S, F^2h/S$, pois a prova segue da análise dos tipos dos zeros de $Fh/S = F^2h/S = 0$.

$$Fh/S(u_1, u_2) = u_2 + \varepsilon_1 (\lambda_3 - 2\lambda_1) u_1^2 + \alpha u_1 + \beta \quad (4.121)$$

$$F^2h/S(u_1, u_2) = \lambda_1 [2\varepsilon_1 (\lambda_3 - 2\lambda_1) u_1^2 + \alpha u_1] + \lambda_2 u_2 \quad (4.122)$$

Fixemos α e β . Assim ao longo de L_G , temos:

$$u_2 = -(\varepsilon_1 (\lambda_3 - 2\lambda_1) u_1^2 + \alpha u_1 + \beta) \quad (4.123)$$

$$F^2h/L_G(u_1) = \varepsilon_1 (\lambda_3 - 2\lambda_1) (2\lambda_1 - \lambda_2) u_1^2 + \alpha (\lambda_1 - \lambda_2) u_1 - \lambda_2 \beta \quad (4.124)$$

Observemos que, conforme o valor de

$$\Delta = [\alpha (\lambda_1 - \lambda_2)]^2 + 4\varepsilon_1 \lambda_2 \beta (\lambda_3 - 2\lambda_1) (2\lambda_1 - \lambda_2)$$

ou ainda

$$\Delta = k_1 \alpha^2 + k_2 \beta$$

onde

$$k_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2, \quad k_2 = 4\varepsilon_1\lambda_2(\lambda_3 - 2\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)$$

temos que $F^2h_{/L_G}$, ou tem dois zeros simples, ou um zero duplo, ou ainda não tem zeros.

Se q é um zero duplo($\Delta = 0$) de $F^2h_{/L_G}$, então temos que

$$F^3h_{/L_G}(q) = 0, \quad F^4h_{/L_G}(q) \neq 0$$

e $\nabla(Gh(q)) \neq 0$, temos que q é uma singularidade do tipo Dove's Tail; se q é um zero simples($\Delta > 0$), então

$$F^3h_{/L_G}(q) \neq 0$$

ou seja, q é uma singularidade do tipo cúspide, neste caso temos duas cúspides; finalmente, se $F^2h_{/L_G}(q) \neq 0, \forall q(\Delta < 0)$, então L_G , somente tem dobras.

Observemos ainda que ao variarmos α e β temos que Δ se amula ao longo de uma curva(*parábola*) nos parâmetros α e β .

O mesmo resultado é obtido, quando consideramos o caso onde o ponto crítico é um Foco. Consideramos neste caso o seguinte C^0 -desdobramento universal do Campo Vetorial G dado por:

$$G = F_{\alpha,\beta} = \begin{cases} \dot{u}_1 = \lambda u \\ \dot{u}_2 = (a^2 - 2ab - b^2)v + 2abw - 2ab\alpha u - 2abu^2 \\ \dot{u}_3 = -2bv + (a + b)w - \alpha(a + b + \lambda)u - (a + b + 2\lambda)u^2 + \beta \end{cases} \quad (4.125)$$

onde a, b, λ_3 são reais, distintos e não nulos. ■

Lema 4.31 (Foco Tangente Parabolóide:DB)

Seja $p \in S$ um ponto crítico do tipo Foco Tangente do campo vetorial F , com o Hessiano de $Fh_{/S}$ positivo. Se G está próximo de F , então L_G , ou tem duas singularidades do tipo Cúspide, ou uma singularidade tipo Dove's Tail, ou somente dobras.

Prova:

Pelo Lema 4.23, sabemos que para todo campo vetorial G numa vizinhança de F , L_G é uma cônica. Neste caso, ou L_G se reduz a um ponto, ou é uma *elipse* ou ainda *vazio* (G é transversal à S).

Consideremos S dado implicitamente por $h(u, v, w) = w + \dots$.

Neste caso, o Campo Vetorial $(DF)_p$ tem autovalores $a+bi, a-bi, \lambda_3 \neq a$ e os respectivos autoespaços são transversais à S . Assim, usando o Lema 4.12, e por [29], a C^∞ - forma normal de G fica dada por:

$$G = \begin{cases} \dot{u} = au - bv + \iota_1 u \sigma - \iota_2 v \sigma + \iota_3 u \sigma^2 \\ \dot{v} = bu + av + \iota_2 u \sigma + \iota_1 v \sigma + \iota_3 v \sigma^2 \\ \dot{w} = ku + v + \lambda_3 w + u^2 + v^2 + \iota_4 w \sigma; k \neq 1 \end{cases} \quad (4.126)$$

onde $\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4$ são constantes e $\sigma = (u^2 + v^2)^m w^n$, onde m, n são os menores inteiros não negativos tais que $m+n > 0$ e $2ma + n\lambda_3 = 0$. Observamos ainda que, neste caso, temos uma condição de genericidade dada por $2m\iota_1 + n\iota_4 \neq 0$.

Assim na análise do diagrama de bifurcações, consideramos $h(u, v, w) = w$ e o C^0 - desdobramento universal do Campo Vetorial G , dado por:

$$G = F_{\alpha, \beta} = \begin{cases} \dot{u}_1 = au_1 + bu_2 \\ \dot{u}_2 = -bu_1 + au_2 \\ \dot{u}_3 = \lambda_3 u_3 + \epsilon_1 u_1^2 + \epsilon_2 u_2^2 + \alpha u_1 + \beta \end{cases} \quad (4.127)$$

onde $\epsilon_1 \epsilon_2 > 0$ e $a, b, \lambda_3; a \neq \lambda_3$ são não nulos. Calculemos $Fh_{/S}, F^2h_{/S}$, pois a prova segue da análise dos tipos dos zeros de $Fh_{/S} = F^2h_{/S} = 0$. Sem perda de generalidade, e para facilitar os cálculos, consideremos $a = b = -1$ e $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$.

$$Fh_{/S}(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2 + \alpha u_1 + \beta \quad (4.128)$$

$$F^2h_{/S}(u_1, u_2) = -2u_1^2 - 2u_2^2 - a(u_1 + u_2) \quad (4.129)$$

Observemos que

$$Fh_{/S}(u_1, u_2) = \left(u_1 + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + u_2^2 = \frac{\alpha^2}{4} - \beta \quad (4.130)$$

e assim a curva

$$\gamma(\alpha, \beta) = \frac{\alpha^2}{4} - \beta = 0$$

separa no espaço de parâmetros, os campos vetoriais G tais que G tem L_G como um ponto ($\gamma(\alpha, \beta) = 0$), uma *ellipse* ($\gamma(\alpha, \beta) > 0$) ou *vazio* ($\gamma(\alpha, \beta) < 0$).

Fixemos α e β . Assim ao longo de L_G , temos:

$$u_2 = u_1 + \frac{2\beta}{\alpha}; \quad \alpha \neq 0 \quad (4.131)$$

$$F^2 h_{/L_G}(u_1) = 2u_1^2 + \frac{\alpha^2 + 4\beta}{\alpha} u_1 + \frac{(\alpha^2 + 4\beta)\beta}{\alpha^2} \quad (4.132)$$

Se $\alpha = 0$, temos que $F^2 h_{/L_G} = 2\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$, ou seja $G = F$

Observemos que, conforme o valor de

$$\Delta = \frac{(\alpha^2 + 4\beta)(\alpha^2 - 4\beta)}{\alpha^2}$$

ou ainda

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 4\beta \text{ ou } \alpha^2 = -4\beta$$

temos que $F^2 h_{/L_G}$, ou tem dois zeros simples, ou um zero duplo, ou ainda não tem zeros.

Se q é um zero duplo ($\Delta = 0$) de $F^2 h_{/L_G}$, então temos que

$$F^3 h_{/L_G}(q) = 0, \quad F^4 h_{/L_G}(q) \neq 0$$

e $\nabla(Gh(q)) \neq 0$, temos que q é uma singularidade do tipo Dove's Tail; se q é um zero simples ($\Delta > 0$), então

$$F^3 h_{/L_G}(q) \neq 0$$

ou seja, q é uma singularidade do tipo cúspide, neste caso temos duas cúspides; finalmente, se $F^2 h_{/L_G}(q) \neq 0, \forall q (\Delta < 0)$, então L_G , somente tem dobras.

Observemos ainda que ao variarmos α e β temos que Δ se anula ao longo de duas curvas (*parábola*) nos parâmetros α e β .

■

Lema 4.32 (Foco Tangente Sela:DB)

Seja $p \in S$ um ponto crítico do tipo Foco Tangente do campo vetorial F , com o Hessiano de $Fh|_S$ negativo. Se G está próximo de F , então L_G , ou tem duas singularidades do tipo Cúspide, ou uma singularidade tipo Dove's Tail, ou somente dobras.

Prova:

Pelo Lema 4.23, sabemos que para todo campo vetorial G numa vizinhança de F , L_G é uma cônica. Neste caso, ou L_G são duas retas ou são hipérbolas.

Consideremos S dado implicitamente por $h(u, v, w) = w + \dots$. Neste caso, o Campo Vetorial $(DF)_p$ tem autovalores $a + bi, a - bi, \lambda_3 \neq a$ e os respectivos autoespaços são transversais à S . Assim, usando o Lema 4.12, e por [29], a C^∞ - forma normal de G fica dada por:

$$G = \begin{cases} \dot{u} = au - bv + \iota_1 u\sigma - \iota_2 v\sigma + \iota_3 u\sigma^2 \\ \dot{v} = bu + av + \iota_2 u\sigma + \iota_1 v\sigma + \iota_3 v\sigma^2 \\ \dot{w} = ku + v + \lambda_3 w + u^2 - v^2 + \iota_4 w\sigma; k \neq 1 \end{cases} \quad (4.133)$$

onde $\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4$ são constantes e $\sigma = (u^2 + v^2)^m w^n$, onde m, n são os menores inteiros não negativos tais que $m+n > 0$ e $2ma + n\lambda_3 = 0$. Observamos ainda que, neste caso, temos uma condição de genericidade dada por $2m\iota_1 + n\iota_4 \neq 0$.

Assim para analisarmos o diagrama de bifurcações, consideramos S dado implicitamente por, $h(u, v, w) = w$, e o C^0 - desdobramento universal do Campo Vetorial G , dado por:

$$G = F_{\alpha, \beta} = \begin{cases} \dot{u}_1 = au_1 + bu_2 \\ \dot{u}_2 = -bu_1 + au_2 \\ \dot{u}_3 = \lambda_3 u_3 + \epsilon_1 u_1^2 + \epsilon_2 u_2^2 + \alpha u_1 + \beta \end{cases} \quad (4.134)$$

onde $\epsilon_1 \epsilon_2 > 0$ e $a, b, \lambda_3; a \neq \lambda_3$ são não nulos

Calculemos $Fh|_S, F^2h|_S$, pois a prova segue da análise dos tipos dos zeros

de $Fh_{/S} = F^2h_{/S} = 0$. Sem perda de generalidade, e para facilitar os cálculos, consideremos $a = b = -1$ e $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$.

$$Fh_{/S}(u_1, u_2) = u_1^2 - u_2^2 + \alpha u_1 + \beta \quad (4.135)$$

$$F^2h_{/S}(u_1, u_2) = -2u_1^2 + 2u_2^2 - 4u_1u_2 - a(u_1 + u_2) \quad (4.136)$$

Observemos que

$$Fh_{/S}(u_1, u_2) = (u_1 + \frac{\alpha}{2})^2 - u_2^2 = \frac{\alpha^2}{4} - \beta \quad (4.137)$$

e assim a curva

$$\gamma(\alpha, \beta) = \frac{\alpha^2}{4} - \beta = 0$$

separa no espaço de parâmetros, os campos vetoriais G tais que G tem L_G como duas *retas* ($\gamma(\alpha, \beta) = 0$) ou *hipérbolas* ($\gamma(\alpha, \beta) \neq 0$).

Fixemos α e β . Assim ao longo de L_G , temos:

$$u_2 = \frac{3\alpha u_1 + 2\beta}{4u_1 - \alpha}, \quad u_1 \neq \frac{\alpha}{4} \quad (4.138)$$

$$F^2h_{/L_G}(u_1) = 16u_1^4 + 8\alpha u_1^3 + 16(\beta - \alpha^2)u_1^2 + \alpha(\alpha^2 - 20\beta)u_1 + \beta(\alpha^2 - 4\beta) \quad (4.139)$$

Substituindo $u_1 = \frac{\alpha}{4}$ em $Fh_{/L_G}(u_1, u_2) = F^2h_{/L_G}(u_1, u_2) = 0$, temos que $F^2_{L_G}(u_1, u_2) \neq 0$. Temos ainda que:

$$8\beta = -3\alpha^2 \Leftrightarrow u_1 = \frac{\alpha}{4}$$

O discriminante de $F^2h_{/L_G}$ é dado por:

$$\Delta = \frac{909}{65536}\alpha^{12} + \frac{2649}{8192}\alpha^{10}\beta + \frac{6185}{4096}\alpha^8\beta^2 + \frac{97}{256}\alpha^6\beta^3 - \frac{731}{64}\alpha^4\beta^4 - 25\alpha^2\beta^5 - 16\beta^6$$

$\Delta = 0$, são duas curvas (*parábolas*) pelo zero, e temos que $F^2h_{/L_G}$ tem um zero duplo e dois zeros simples. Analisando o sinal do discriminante da derivada de $F^2h_{/L_G}$ com respeito à u , com o auxílio da teoria de singularidades (analisamos o desdobramento do germe x^4 e encontramos a curva de

histeresis e duplo limite), e de teoria sobre raízes de polinômios, concluimos que:

Se q é um zero duplo($\Delta = 0$) de $F^2h_{/L_G}$, então temos que

$$F^3h_{/L_G}(q) = 0, F^4h_{/L_G}(q) \neq 0$$

e $\nabla(Gh(q)) \neq 0$, temos que q é uma singularidade do tipo Dove's Tail; se q é um zero simples($\Delta > 0$), então

$$F^3h_{/L_G}(q) \neq 0$$

ou seja, q é uma singularidade do tipo cúspide.

Neste caso temos duas cúspides quando $\Delta < 0$ e quatro cúspides quando $\Delta > 0$;

■

Lema 4.33 (Goose:DB)

Seja p uma S -singularidade do tipo Goose do campo vetorial F . Se G está próximo de F , então L_G tem, ou uma Cúspide, ou três Cúspides, ou ainda uma Cúspide e um Dove's Tail.

Usemos o desdobramento(dado por Arnol'd) deste caso para analisarmos completamente o que ocorre na vizinhança de $F = F_{0,0}$.

Consideremos S dado implicitamente por $h(u, v, w) = w$ e o campo vetorial $G = F_{\alpha,\beta}$ dado por(ver Lema 4.41):

$$G = \begin{cases} \dot{u} = 1 \\ \dot{v} = 0 \\ \dot{w} = -3u^2 - v^3 + \alpha v + \beta \end{cases} \quad (4.140)$$

Temos que:

$$Gh_{/S} = -3u^2 - v^3 + \alpha v + \beta$$

$$G^2h_{/S} = -6u$$

$$G^3 h_{/S} = -6$$

De $G^2 h = 0$ ficamos com $u = 0$ e substituindo em $Gh = 0$, temos a seguinte equação :

$$-v^3 + \alpha v + \beta$$

Devemos então analisar o tipo dos zeros desta equação (duplos ou simples). Para isto, como antes, calculamos o discriminante desta equação , e neste caso é dado por:

$$4a^3 - 27b^2 = 0$$

As soluções para o discriminante nulo, numa vizinhança de $(0, 0)$, fica:

$$b = -\frac{2}{9}\sqrt{3}a^{\frac{3}{2}}$$

$$b = \frac{2}{9}\sqrt{3}a^{\frac{3}{2}}$$

Para (α, β) ao longo destas soluções temos que G tem uma Cúspide e um Lips. Fora destas curvas temos duas regiões distintas, onde G ou, tem uma Cúspide, ou tem três Cúspides.

■

Lema 4.34 (Gull:DB)

Seja p uma S -singularidade do tipo Gull do campo vetorial F . Se G está próximo de F , então L_G tem, ou duas Cúspides, ou quatro Cúspides, ou ainda duas Cúspides e um Dove's Tail.

Usemos o desdobramento(dado por Arnol'd) deste caso para analisarmos completamente o que ocorre na vizinhança de $F = F_{0,0}$.

Consideremos S dado implicitamente por $h(u, v, w) = w$ e o campo vetorial $G = F_{\alpha,\beta}$ dado por(ver Lema 4.41):

$$G = \begin{cases} \dot{u} = 1 \\ \dot{v} = 0 \\ \dot{w} = 4u^3 + 2uv + v^2 + \alpha v + \beta \end{cases} \quad (4.141)$$

Temos que:

$$Gh_{/S} = 4u^3 + 2uv + v^2 + \alpha v + \beta$$

$$G^2h_{/S} = 12u^2 + 2v$$

$$G^3h_{/S} = 24u$$

$$G^4h_{/S} = 24$$

De $G^2h = 0$ ficamos com $v = -6u^2$. Substituindo em $Gh = 0$, temos a seguinte equação :

$$36u^4 - 8u^3 - 6\alpha u^2 + \beta = 0$$

Devemos então analisar o tipo dos zeros desta equação (duplos ou simples). Para isto, como antes, calculamos o discriminante desta equação , e neste caso é dado por:

$$4096b(2916b^3 - 10368ba^2 - 1296ba + 9216a^4 + 256a^3 - 27b) = 0$$

As soluções para o discriminante nulo, numa vizinhança de $(0, 0)$, fica:

$$b = 0$$

$$b = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{12}a + \frac{1}{216} - \frac{1}{216}\sqrt{(12a + 1)^3}$$

Para (α, β) ao longo destas soluções temos que G tem uma Cúspide e um Dove's Tail. Fora destas curvas temos quatro regiões distintas, onde G ou, tem quatro Cúspides ou tem duas Cúspides.

■

Lema 4.35 (Butterfly:DB)

Seja p uma S -singularidade do tipo Butterfly do campo vetorial F . Se G está próximo de F , então L_G tem, ou duas Cúspides, ou quatro Cúspides, ou ainda duas Cúspides e um Dove's Tail.

Usemos o desdobramento (dado por Arnol'd) deste caso para analisarmos completamente o que ocorre na vizinhança de $F = F_{0,0}$.

Consideremos S dado implicitamente por $h(u, v, w) = w$ e o campo vetorial $G = F_{\alpha,\beta}$ dado por (ver Lema 4.41):

$$G = \begin{cases} \dot{u} = 1 \\ \dot{v} = 0 \\ \dot{w} = 5u^4 + 3\epsilon u^2 v + v + \alpha u^2 + \beta u; \epsilon = \pm 1 \end{cases} \quad (4.142)$$

Sem perda de generalidade, consideremos $\epsilon = \pm 1$. Temos que:

$$Gh_{/S} = 5u^4 + 3u^2 v + v + \alpha u^2 + \beta u$$

$$G^2 h_{/S} = 20u^3 + 6uv + 2\alpha u + \beta$$

$$G^3 h_{/S} = 60u^2 + 6v + 2\alpha$$

$$G^4 h_{/S} = 120u$$

$$G^5 h_{/S} = 120$$

De $Gh = 0$ ficamos com

$$v = -\frac{5u^4 + \alpha u^2 + \beta u}{3u^2 + 1}$$

e substituindo em $G^2 h = 0$, temos a seguinte equação :

$$30u^5 + 20u^3 - 3\beta u^2 + 2\alpha u + \beta = 0$$

Devemos então analisar o tipo dos zeros desta equação (duplos ou simples). Para isto, como antes, calculamos o discriminante desta equação, e neste caso é dado por:

$$663552000a^3 + 1679616000ab^2 + 11197440000b^2 - 23619600b^4 = 0$$

As soluções para o discriminante nulo, numa vizinhança de $(0, 0)$, ficam dadas por:

$$b = -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{-525 + 3\sqrt{30625 + 135\sqrt[3]{25} - 30\sqrt[3]{175}a}}{9\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{175}}}$$

$$b = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{-525 + 3\sqrt{30625 + 135\sqrt[3]{25} - 30\sqrt[3]{175}a}}{9\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{175}}}$$

Para (α, β) ao longo destas soluções temos que G tem uma Cúspide e um Dove's Tail. Fora destas curvas temos duas regiões distintas, onde G ou, tem três Cúspides ou tem uma Cúspide. ■

4.3 Estabilidade Estrutural

Nesta secção estudaremos a estabilidade estrutural relativa à Σ_2 .

Dividimos o estudo em duas partes. Primeiro, trabalhamos com $\Sigma_2(a)$. Neste caso, usamos o caminho geométrico para definirmos o homeomorfismo (equivalência) entre os campos vetoriais, numa vizinhança de F , seguindo estratégia estabelecida em [21]. A seguir, usamos fortemente a teoria de singularidades de aplicações no estudo de $\Sigma_2(b)$.

4.3.1 Ponto Crítico Hiperbólico

Nesta secção construiremos o homeomorfismo necessário para assegurarmos a estabilidade estrutural em Σ_2 . Usaremos o caminho geométrico, e utilizaremos vários resultados e técnicas contidas em [19], [21] e [26]. E, provaremos a seguinte Proposição:

Proposição 4.36

Existem vizinhanças V de p em M e B de F em \mathcal{E}^r tais que:

- 1 (F, p) é C^∞ -equivalente à $(G, p_G) \in (B \times V)$ se e somente se $\xi(G) = 0$;

2 se $G_1, G_2 \in B$ e $\xi_2(G_1) \cdot \xi_2(G_2) > 0$ então $(G_1)_{/V}$ é C^0 -equivalente à $(G_2)_{/V}$, onde $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ é a submersão definida anteriormente (secção 4.1) para cada campo em Σ_2 .

A seguir definiremos uma estratificação de uma vizinhança de um ponto crítico $p \in S$, do campo vetorial F , a qual é essencial para a prova desta proposição. Usaremos a notação contida em [26].

Inicialmente, distinguimos alguns subconjuntos em V , e elaboramos a seguinte lista:

1 $S, L_G, I_G = \cup_{q \in L_G} (\varphi_t(q)), I_G \cap S$; $\varphi_t(q)$ é o fluxo de G por q ;

2 p_G e \bar{p}_G são distinguidos, bem como as trajetórias de G por eles;

Consideremos agora os casos dos campos vetoriais em Σ_2 . Seja então p_G do tipo:

3-Sela-Nó significa que temos autovalores $\lambda_1 = 0, \lambda_2, \lambda_3$ reais, distintos e não nulos e com os respectivos autoespaços, $T_i, i = 1, 2, 3$, transversais à S . Listamos:

3.1 W_{12} a variedade invariante bi-dimensional de G tangente ao espaço linear gerado por T_1 e T_2 ;

3.2 W_3 a variedade invariante unidimensional de G tangente à T_3 ;

4-Hopf significa que temos autovalores $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$ e λ_3 real, e não nulo e com os respectivos autoespaços, $T_i, i = 1, 2, 3$, transversais à S . Listamos:

4.1 W_{12} a variedade invariante bi-dimensional de G tangente ao espaço linear gerado por T_1 e T_2 ;

4.2 W_3 a variedade invariante unidimensional de G tangente à T_3 ;

5-Nó Degenerado significa que temos autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ reais, não nulos, posto $(DG - \lambda_1 Id)_{p_G} = 2$, e com os respectivos autoespaços, $T_i, i = 1, 2, 3$, transversais à S . Listamos:

5.1 W_{12} a variedade invariante bi-dimensional de G tangente ao espaço linear gerado por T_1 ;

5.2 W_3 a variedade invariante unidimensional de G tangente à T_3 ;

6-Hiperbolica Tangente 1 significa que temos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_3 \neq 2\lambda_3, \lambda_3 \neq 2\lambda_3, \lambda_1 \neq 2\lambda_2$ reais, distintos e não nulos, com os respectivos autoespaços, $T_i, i = 2, 3$, transversais à S e T_1 tangente à S . Listamos:

6.1 W_{12} a variedade invariante bi-dimensional de G tangente ao espaço linear gerado por T_1 e T_2 ;

6.2 W_3 a variedade invariante unidimensional de G tangente à T_3 ;

7-Hiperbolica Tangente 2 significa que temos autovalores $\lambda_{12} = a \pm ib$ e λ_3 , onde a, b, λ são reais, distintos e não nulos, com os respectivos autoespaços, $T_i, i = 1, 2$, transversais à S e T_3 com tangência quadrática com S . Listamos:

7.1 W_{12} a variedade invariante bi-dimensional de G tangente ao espaço linear gerado por T_1 e T_2 ;

7.2 W_3 a variedade invariante unidimensional de G tangente à T_3 ;

8-Foco Degenerado significa que temos autovalores $\lambda_{12} = a \pm ib, a, b \neq 0, \lambda_3 = a$ reais, com os respectivos autoespaços, $T_i, i = 1, 2, 3$, transversais à S e o Hessiano de $Gh/S(p_G)$ é não nulo. Listamos:

8.1 W_{12} a variedade invariante bi-dimensional de G tangente ao espaço linear gerado por T_1 e T_2 ;

8.2 W_3 a variedade invariante unidimensional de G tangente à T_3 ;

9-Foco Tangente significa que temos autovalores $\lambda_{12} = a \pm ib, a, b \neq 0, \lambda_3 \neq 0, \lambda_3 \neq a, \lambda_3 \neq 2\lambda_3, \lambda_3 \neq 2\lambda_3, \lambda_1 \neq 2\lambda_2$, com os respectivos autoespaços, $T_i, i = 1, 2$ com tangência quadrática com S , e T_3 transversal à S . Listamos:

7.1 W_{12} a variedade invariante bi-dimensional de G tangente ao espaço linear gerado por T_1 e T_2 ;

7.2 W_3 a variedade invariante unidimensional de G tangente à T_3 ;

10 a fronteira de V ;

11 incluímos as intersecções entre dois conjuntos distinguidos listados acima;

4.3.2 Estratificação de uma vizinhança de p_G

Denotemos, como em [21], por $E_0(G)$ a união de todos conjuntos distinguidos 0-dimensional definidos acima. Se $p_G = \bar{p}_G$ então, pelos Lemas 4.23 e 4.25, $E_0 \subset S$. Se $p_G \neq \bar{p}_G$, então temos que $p_G \in E_0(G)$ e $p_G \notin S$. Seguindo este caminho, definimos $E_1(G), E_2(G), E_3(G) = V$. Temos que considerar os seguintes casos:

1. caso p_G não seja uma sela, consideramos G transversal à ∂V ;
2. caso p_G seja uma sela, existe uma subvariedade uni-dimensional de ∂V , a qual é o conjunto de tangências externas entre G e ∂V . Esta subvariedade é incluída na lista de conjuntos distinguidos e está longe de L_G ;
3. caso p_G seja um foco tangente, tal que $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1$, temos que distinguir a curva fechada dada pela intersecção de W_{12} com ∂V ;
4. caso p_G seja um foco tangente, tal que $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$, temos que distinguir dois arcos distintos dados pela intersecção de W_{12} com ∂V ;

Provemos agora a proposicao 4.36, através da estratificação acima.

Prova:Proposição 4.36

Seja $p \in S$ um ponto crítico de F do tipo $\Sigma_2(a)$.

A prova seguirá o caminho geométrico. Para provarmos a suficiência procedemos como se segue:

1. Para os casos 3,4,5,6,7 usamos o homeomorfismo construído em [26] aplicado à variedade invariante bi-dimensional W_{12} ; assumimos, sem perda de generalidade, W_{12} é atratora, ou seja, λ_1 e λ_2 são negativos; observamos ainda que W_3 é transversal à S . Tratamos então, agora estes caso, como em [21], onde devemos considerar os casos onde λ_3 é positivo ou negativo;

2. analisamos o comportamento de $I_F \cap \partial V$ com respeito a intersecção entre ∂V e os variedades invariantes distinguidas de F ;
3. devido à definição de ponto crítico do tipo $\Sigma_2(a)$, este comportamento persiste para pequenas perturbações de F em \mathcal{X}_2^r ;
4. o homeomorfismo é primeiro definido sobre ∂V , e então estendido para o interior da vizinhança como uma aplicação estratificada. Do Lema 3.2, em [21], segue que qualquer trajetória passando por $q \in I_F \cap \partial V$ encontra L_F uma única vez.

Nos caso 3,4,5,6,7,8 o homeomorfismo é construído primeiro considerando o homeomorfismo em [26] aplicado à W_{12} . Observemos que W_{12} separa V em duas componentes conexas, e dependendo do sinal de λ_3 (positivo ou negativo), consideramos o homeomorfismo construído tal como em [21] (Proposição 3.6, pg 182), nos casos nó ($\lambda_3 < 0$) ou sela-nodal ($\lambda_3 > 0$). O homeomorfismo preserva ainda os elementos: $C = W_{12} \cap \partial V$, $q_3 = W_3 \cap \partial V$ e $U = I_F \cap \partial V$. No caso $\lambda_3 > 0$, U é formado por duas curvas U_1 e U_2 , e temos ainda a curva T , formada pelas tangências externas de F com ∂V . Veja a figura 4.1.

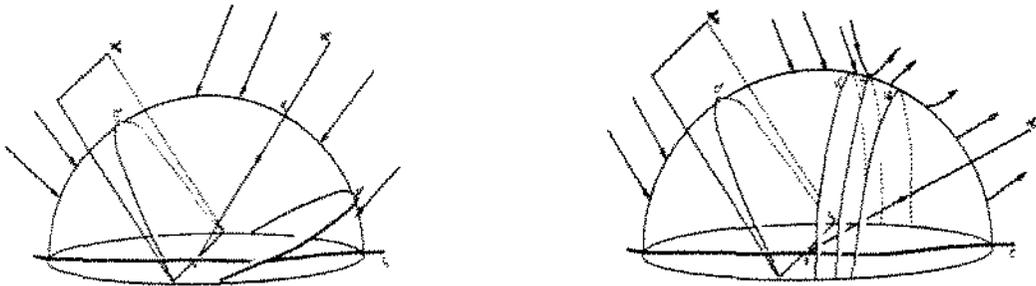


Figura 4.1: Homeomorfismo: Vizinhanças nos casos 3,4,5,6,7,8

No caso 9, devemos separar em dois tipos: quando $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$ e $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1$. No primeiro caso, devemos observar ainda que:

1. L_F é um ponto, e coincide com p_F ;
2. $W_{12} \cap \partial V$ é uma curva fechada C ;
3. F é transversal à ∂V ;
4. $q_3 = W_3 \cap \partial V$.

Devemos então exigir que C, q_3 sejam preservados pelo homeomorfismo. Veja a figura 4.2.

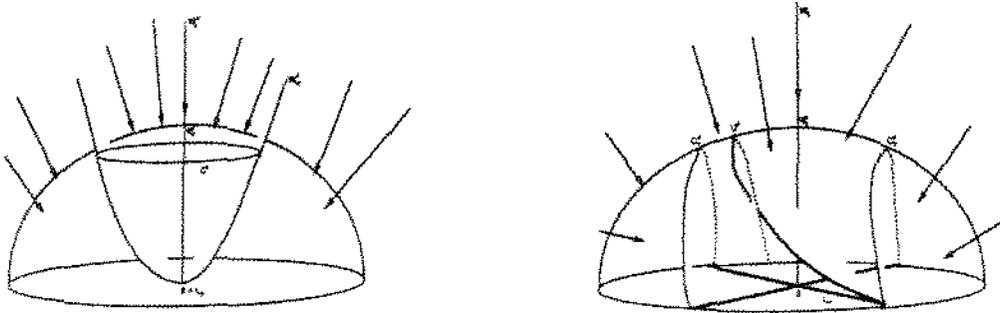


Figura 4.2: Homeomorfismo: Vizinhanças nos casos 9.1 e 9.2, respectivamente

Quando $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1$, devemos observar ainda que:

1. L_F é um par de retas, que se interceptam em p_F ;
2. $W_{12} \cap \partial V$ é um par de arcos C_1, C_2 ;
3. F é transversal à ∂V ;
4. $q_3 = W_3 \cap \partial V$.

Os Lemas 4.31 e 4.32, garantem a persistência destes elementos. Veja a figura 4.2.

Assim definimos o homeomorfismo em ∂V impondo que os elementos distinguidos de F sejam levados nos correspondentes distinguidos de G , e então estendemos para V , aplicando por exemplo, a técnica de comprimento de arco que preservam determinada proporção, respeitando as estratificações.

Prova:Parte 2

Sejam $G_1, G_2 \in B$, tais que $\xi_2(G_1)\xi_2(G_2) > 0$. Procederemos a construção da equivalência entre G_1 e G_2 como na parte 1.

Notemos que para qualquer $G \in B$ com $\xi(G) \neq 0$, tem também os seguintes conjuntos distinguidos: $\bar{p}_G, \mu_G = L_G \cap W$, onde W , é uma variedade invariante distinguida bi-dimensional de G ou ∂V , bem como as trajetórias de G passando através dele. Consideremos como antes, W_{12} atratora(autovalores negativos), temos ainda:

1. Se W_3 é atratora, então $U = I_G \cap \partial V$ é um intervalo fechado em ∂V com ponto final sobre L_G , transversal à variedade forte invariante bi-dimensional de F ;
2. se W_3 é repulsora, então $U = I_G \cap \partial V$ é composta de dois semi-intervalos $U_1 = [a_1, b_1), U_3 = [a_3, b_3)$ e um intervalo fechado $U_2 = [a_2, b_2]$ onde b_1, b_3 estão na variedade invariante uni-dimensional de G e a_1, a_2, a_3, b_2 , estão nas trajetórias de G passando opr $L_G \cap \partial V$. Devemos mencionar ainda que, G entra(ou sai) de V em U_1 e U_3 e sai(ou entra) de V em U_2 . Em adição as trajetórias de G passando através de \bar{p}_G e μ_G encontram ∂V no interior de U_2 .

Classificamos as trajetórias de G da seguinte forma:

1. as trajetórias de G as quais entram ou saem de V em tempo finito, e não encontram L_G ;
2. as trajetórias as quais tem uma única tangência externa com ∂V ;
3. as trajetórias as quais entram ou saem de V passando através de pontos distintos de μ_G ;

4. as trajetórias passando por U_1, U_2, U_3 ;
5. a classe composta por P_G

Agora seguimos a mesma linha da prova como na parte 1 para finalizarmos esta prova do item 2.

4.3.3 Singularidades Tangenciais

Consideremos agora coordenadas $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, numa vizinhança de $p \in S$ tal que $F = \frac{\partial}{\partial \xi_1}$ e possamos resolver $s(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ por $\xi_3 = \eta(\xi_1, \xi_2)$ com $\eta(0, 0) = 0$.

Fixemos $N = \{\xi_1 = 0\}$ sendo uma secção transversal à F em p . Definimos, agora a aplicação $\sigma_F : S, p \rightarrow N, p$ por:

$$\sigma_F(\xi_1, \xi_2, \eta(\xi_1, \xi_2)) = (0, \xi_2, \eta(\xi_1, \xi_2))$$

A aplicação σ_F é da mesma classe de diferenciabilidade de F e é chamada de projeção de S ao longo das órbitas de F sobre uma superfície transversal N (detalhes em [19]).

Nesta secção usaremos fortemente a teoria de singularidades de aplicações. Os seguintes resultados, são fundamentais.

Teorema 4.37 (V. I. Arnol'd, [2])

No espaço de hipersuperfícies suaves compactas em \mathbb{R}^3 , existe um conjunto aberto e denso formado por superfícies cujas projeções de qualquer ponto de observação e em qualquer direção é localmente equivalente as projeções de uma das 10 superfícies, da seguinte lista, em $(0, 0, 0)$, ao longo do eixo x :

1-Submersão $z = x$;

2-Dobra $z = x^2$;

3-Cúspide $z = x^3 + xy$;

4-Lips $z = x^3 + xy^2$;

5-Bec to Bec $z = x^3 - xy^2$;

6-Dove's Tail $z = x^4 + xy$;

7-Goose $z = x^3 + xy^3$;

8-Gull $z = x^4 + x^2y + xy^2$;

9-Butterfly $z = x^5 + x^3y \pm xy$

Estas projeções são distintas aos pares. As singularidades das projeções desta lista não são removíveis por pequenas perturbações da superfície.

Usamos, os tipos 2 e 3 na classificação das singularidades tangenciais de Codimensão 0(Capítulo 3), os tipos 4, 5 e 6 na classificação das singularidades tangenciais de Codimensão 1(Capítulo 4). Rieger em [16], demonstra que os tipos 7, 8 e 9 são de codimensão 2 neste espaço. Usamos estes tipos para classificarmos as singularidades tangenciais de Codimensão 2(em \mathcal{X}^r) em nosso trabalho. Isto é possível via sistema de coordenadas descrito acima.

O próximo resultado está demonstrado em [16], através dos Lemas 1.3.2 e 1.3.3.

Teorema 4.38 (J. H. Rieger, [16])

Goose $z = x^3 + xy^3 + \alpha xy + \beta x$;

Gull $z = x^4 + x^2y + xy^2 + \alpha xy + \beta x$;

Butterfly $z = x^5 + x^3y \pm xy + \alpha x^3 + \beta x^2$

são os desdobramentos universais de $z = x^3 + xy^3$, $z = x^4 + x^2y + xy^2$, $z = x^5 + x^3y \pm xy$, respectivamente.

Os próximos resultados seguem diretamente do Teorema 4.37 e do Teorema 4.38.

Proposição 4.39

O ponto $p \in S$ é uma singularidade tangencial de F do tipo $\Sigma_2(b)$ se, somente se σ_F é C^r -equivalente (no sentido usual de teoria de singularidades de aplicações) à uma das seguintes aplicações:

Goose $\sigma_{21} = (x^3 + xy^3, y);$

Gull $\sigma_{22} = (x^4 + x^2y + xy^2, y);$

Butterfly $\sigma_{23} = (x^5 + x^3y \pm xy, y)$

Prova:

Segue direto dos Teoremas 4.37 e 4.38. ■

Proposição 4.40

As formas normais do desdobramento de uma singularidade tangencial do campo vetorial F em $\Sigma_2(b)$, são dadas por:

Goose $F(x, y, z) = (1, 0, 0)$ e $h(x, y, z) = z - x^3 + xy^3 + \alpha xy + \beta x;$

Gull $F(x, y, z) = (1, 0, 0)$ e $h(x, y, z) = z - x^4 + x^2y + xy^2 + \alpha xy + \beta x;$

Butterfly $F(x, y, z) = (1, 0, 0)$ e $h(x, y, z) = z - x^5 + x^3y \pm xy + \alpha x^3 + \beta x^2$

Prova:

Segue direto dos Teoremas 4.37 e 4.38 e do uso do sistema de coordenadas descrito acima. ■

Através de uma mudança de coordenadas adequada, usando o sistema de coordenadas acima, e aplicando a proposição 4.40, temos o seguinte resultado.

Lema 4.41

As formas normais do desdobramento de uma singularidade tangencial do campo vetorial F em $\Sigma_2(b)$, são dadas por:

Goose

$$F_{\alpha,\beta}(u, v, w) = \begin{cases} \dot{u} = 1 \\ \dot{v} = 0 \\ \dot{w} = -3u^2 - v^3 + \alpha v + \beta \end{cases}$$

Gull

$$F_{\alpha,\beta}(u, v, w) = \begin{cases} \dot{u} = 1 \\ \dot{v} = 0 \\ \dot{w} = 4u^3 + 2uv + v^2 + \alpha v + \beta \end{cases}$$

Butterfly

$$F_{\alpha,\beta}(u, v, w) = \begin{cases} \dot{u} = 1 \\ \dot{v} = 0 \\ \dot{w} = 5u^4 + 3\epsilon u^2 v + v + \alpha u^2 + \beta u \end{cases}$$

Prova:

Fazemos agora a seguinte mudança de coordenadas:

$$u = x, v = y, w = h(x, y, z)$$

e o resultado segue através de um simples cálculo e da Proposição 4.40 ■

Observemos ainda que a estabilidade estrutural para o conjunto de campos vetoriais com singularidades tangenciais $\Sigma_2(b)$, segue diretamente do Teorema 4.37.

4.4 Diagramas de Bifurcação

Nesta secção, daremos todos os diagramas de bifurcação das S -singularidades de codimensão 2, indicando os tipos de singularidades tangenciais e os pontos críticos. Usaremos principalmente os Lemas contidos na secção 4.2. Lembremos que ao longo da linha de tangências, temos dobras. Caso ocorram, outro tipo de singularidades tangenciais, elas são isoladas. Assim, nos diagramas de bifurcação, faremos menção às singularidades tangenciais isoladas, que venham a ocorrer.

A partir dos diagramas de bifurcações para campos vetoriais com bordo, fica fácil construir os diagramas de bifurcações para os campos vetoriais reversíveis, observando as características intrínsecas destes últimos.

Observemos que para cada ponto crítico assimétrico que temos para o caso de campos vetoriais com bordo, os campos vetoriais reversíveis, por simetria, tem outro ponto crítico assimétrico e pela reversão do tempo, as variedades invariantes trocam o sinal, ou seja se determinada variedade é atratora, o outro ponto crítico tem a variedade invariante associada repulsora. Assim, por exemplo, se temos um ponto crítico atrator(nó), temos outro repulsor(nó).

Quando o contato da órbita do campo vetorial com bordo é tangente à S , pela observação 1.3, temos um ponto crítico para o campo vetorial reversível; se o contato se dá em uma dobra ou Dove's Tail, devemos observar se o contato é externo, temos um ponto crítico do tipo Centro, caso contrário seja interno, temos um ponto crítico do tipo Sela.

Denotemos por $G = F_{\alpha,\beta}$, com α, β fixos, um campo vetorial reversível do tipo $(3, 2)$. Então, temos os seguintes diagramas de bifurcação:

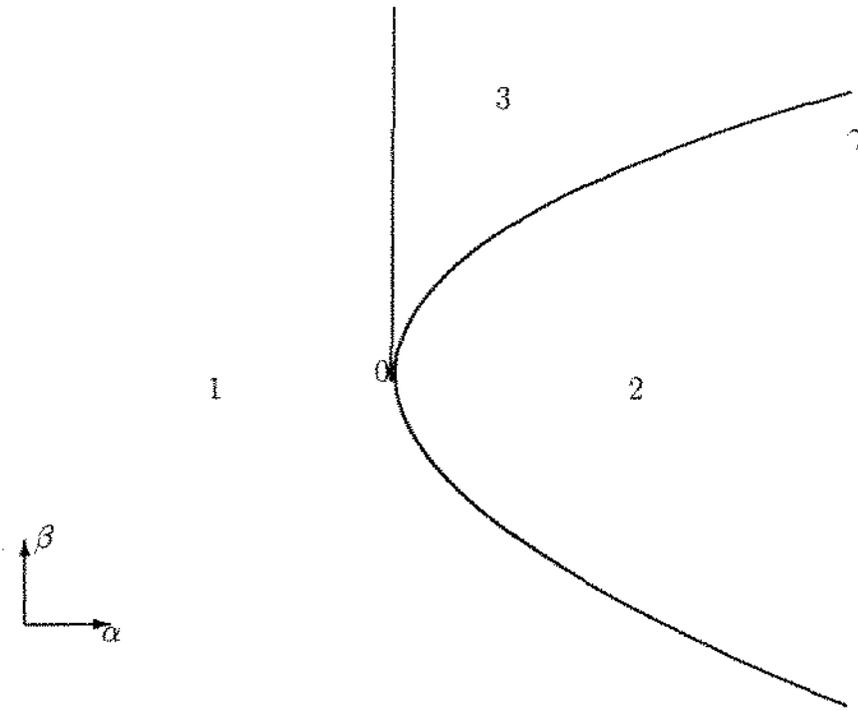


Figura 4.3: Ponto Crítico Sela-Nó

4.4.1 Sela-Nó

1. Para todo G , existe em L_G uma única cúspide;
2. Na região 1, G não tem pontos críticos;
3. Na região 2, G tem 2 pontos críticos assimétricos(sela ou nó);
4. Na região 3, G tem 4 pontos críticos assimétrico(sela e um nó);
5. Ao longo da semi-reta vertical, G tem dois pontos críticos do tipo Sela-Nó assimétrico;
6. Ao longo da *parábola* γ , G tem 1 ponto crítico simétrico(sela ou nó).

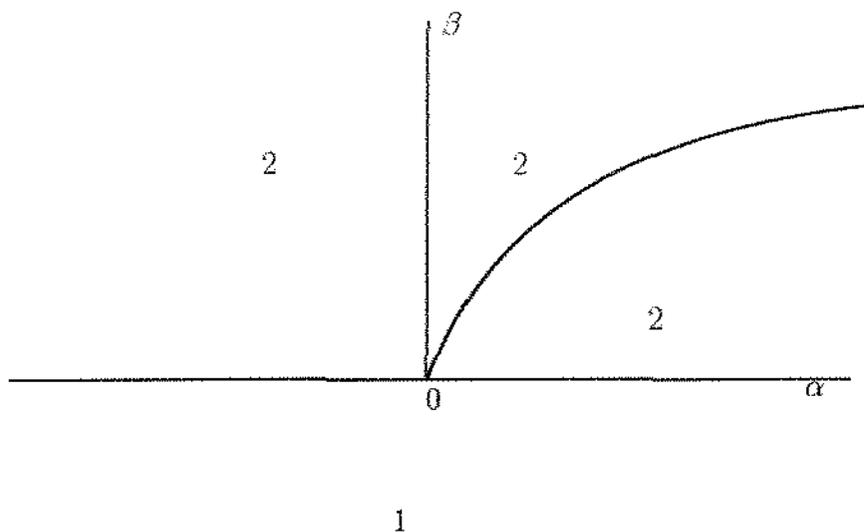


Figura 4.4: Ponto Crítico Hopf

4.4.2 Hopf

1. Para todo G , em L_G existem duas cúspides;
2. Na região 1, G não tem pontos críticos;
3. Na região 2, G tem 2 pontos críticos assimétricos(foco);
4. Ao longo da semi-reta vertical, G tem dois pontos críticos do tipo Hopf assimétrico;
5. Ao longo da reta horizontal, G tem um ponto crítico simétrico(foco);
6. Ao longo da *semi-parábola* γ , G tem dois pontos críticos assimétricos e um ponto crítico simétrico(sela ou centro) *ciclo limite tangente(quadrática) à S*).

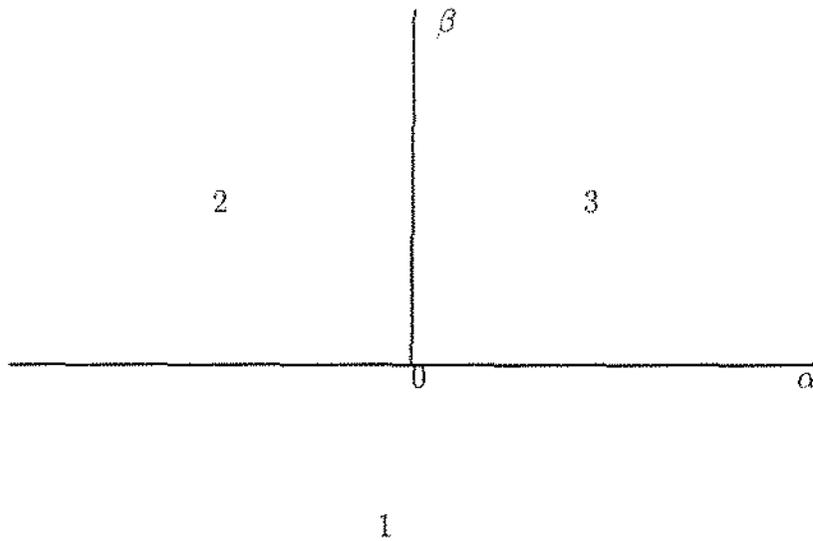


Figura 4.5: Ponto Crítico Nó Degenerado

4.4.3 Nó Degenerado

1. Para todo G , L_G apenas tem dobras;
2. Na região 1, G não tem pontos críticos;
3. Na região 2, G tem 2 pontos críticos assimétricos(foco(nó));
4. Na região 3, G tem 2 pontos críticos assimétricos(nó(foco));
5. Ao longo da semi-reta vertical, G tem dois pontos críticos do tipo Nó Degenerado assimétricos;
6. Ao longo da semi-reta horizontal esquerda(do zero), G tem um ponto crítico simétrico(foco(nó));
7. Ao longo da semi-reta horizontal direita(do zero), G tem um ponto crítico simétrico(nó(foco));

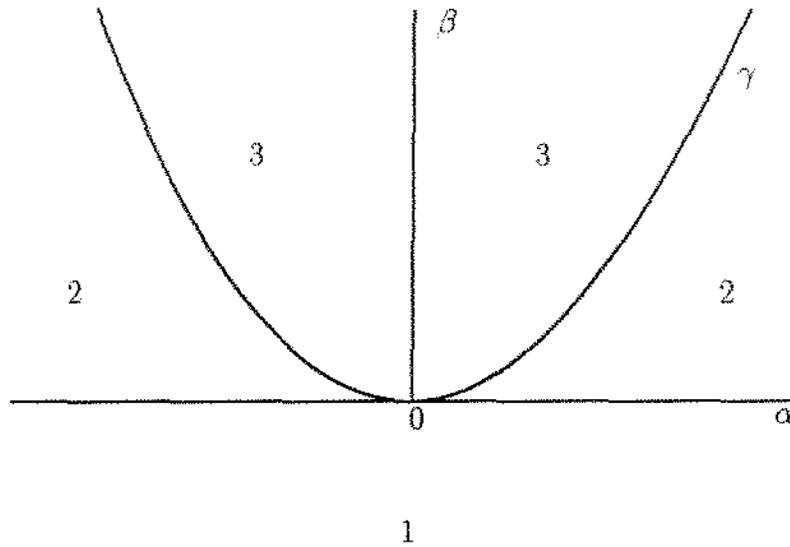


Figura 4.6: Ponto Crítico Hiperbólico Tangente $k_2 < 0$

4.4.4 Hiperbólico Tangente

Temos dois diagramas de bifurcação, dependendo do sinal de k_2 (ver Lema 4.30). Neste caso, o ponto crítico pode ser ou um Nó, ou uma Sela ou ainda um foco. Diremos então, apenas ponto crítico.

Consideremos inicialmente, $k_2 < 0$.

1. Na região 1, G não tem pontos críticos, e L_G tem duas Cúspides;
2. Na região 2, G tem 2 pontos críticos assimétricos, e L_G duas Cúspides;

3. Na região 3, G tem 2 pontos críticos assimétricos, e L_G , pontos críticos simétricos do tipo Sela ou Centro (*associada à Dobras*);
4. Ao longo da semi-reta vertical, G tem dois pontos críticos do tipo Hiperbólico Tangente assimétricos, e L_G , pontos críticos simétricos do tipo Sela ou Centro (*associada à Dobras*);
5. Ao longo da reta horizontal, G tem um ponto crítico simétrico, e L_G duas Cúspides;
6. Ao longo da *parábola* γ , G tem 2 pontos críticos assimétricos, e L_G um ponto crítico Sela ou Centro(*associada à Dove's Tail*).

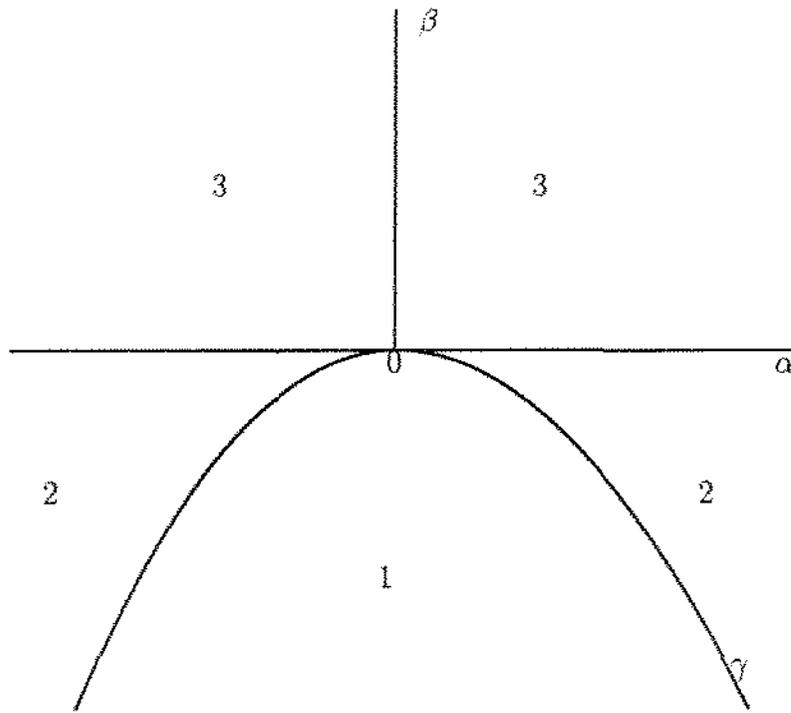


Figura 4.7: Ponto Crítico Hiperbólico tangente $k_2 > 0$

Consideremos agora, $k_2 > 0$.

1. Na região 1, G não tem pontos críticos, e L_G apenas pontos críticos simétricos do tipo Sela ou Centro (*associada à Dobras*);
2. Na região 2, G não tem pontos críticos, e L_G duas Cúspides;
3. Na região 3, G tem 2 pontos críticos assimétricos, e L_G duas Cúspides;
4. Ao longo da semi-reta vertical, G tem dois pontos críticos do tipo Hiperbólico Tangente assimétricos, e L_G duas Cúspides;
5. Ao longo da reta horizontal, G tem um ponto crítico simétrico, e L_G duas Cúspides;

6. Ao longo da *parábola* γ , G não tem pontos críticos, e L_G um ponto crítico distinguido do tipo Sela ou Centro(*associada à Dove's Tail*).

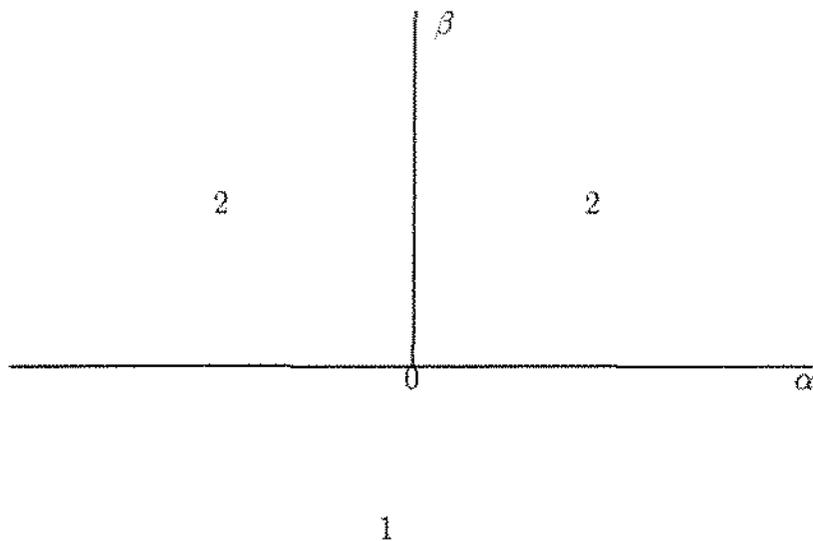


Figura 4.8: Ponto Crítico Foco Degenerado

4.4.5 Foco Degenerado

1. Para todo G , L_G tem duas Cúspides;
2. Na região 1, G não tem pontos críticos;
3. Na região 2, G tem 2 pontos críticos assimétricos(foco);
4. Ao longo da semi-reta vertical, G tem dois pontos críticos do tipo Foco Degenerado assimétricos;
5. Ao longo da horizontal, G tem um ponto crítico simétrico(foco), e L_G tem uma única Cúspide;

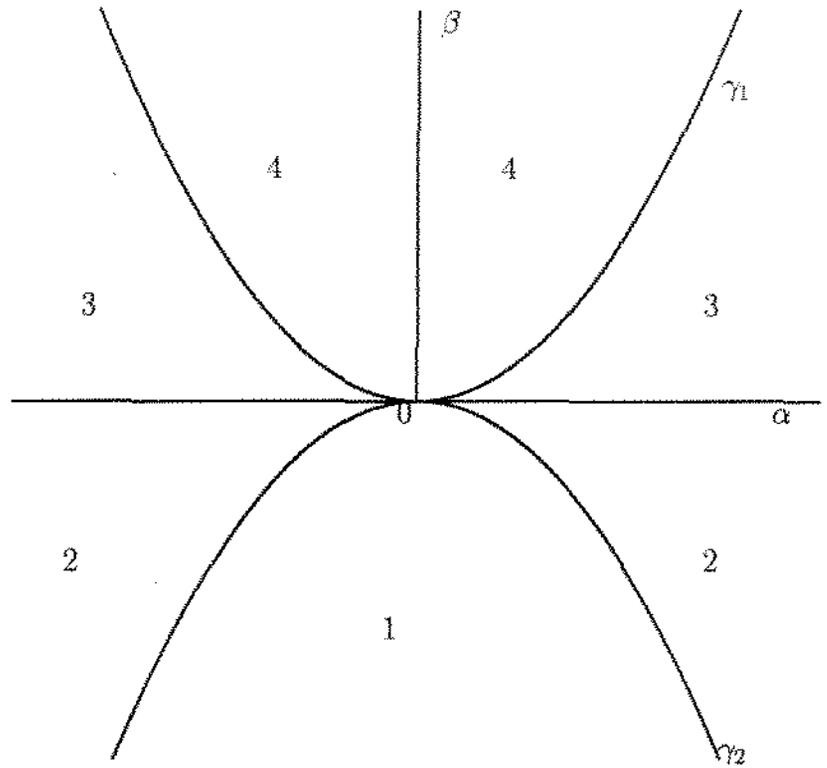


Figura 4.9: Ponto Crítico Foco Tangente 1

4.4.6 Foco Tangente 1

Neste caso temos que L_G pode ser: vazio, um único ponto, ou ainda, um *elipse*.

1. Na região 1, G não tem pontos críticos, e L_G tem somente pontos críticos do tipo Sela ou Centro (*associada à Dobras*);
2. Na região 2, G não tem pontos críticos, e L_G tem duas Cúspides;

3. Na região 3, G tem dois pontos críticos assimétricos(foco), e L_G tem duas Cúspides;
4. Na região 4, G tem dois pontos críticos assimétricos(foco), e L_G é vazio(G é transversal à S);
5. Ao longo da semi-reta vertical, G tem dois pontos críticos do tipo Foco Tangente assimétricos, e L_G é vazio(G é transversal à S);
6. Ao longo da reta horizontal, G tem um ponto crítico simétrico(foco), e L_G tem uma Cúspide;
7. Ao longo da curva γ_1 , L_G é um único ponto. Fora de γ_1 , se G está na região 4, então L_G é vazio; caso contrário, L_G é uma elipse;
8. Ao longo das curvas, γ_1 e γ_2 , L_G tem um ponto crítico distinguido do tipo Sela ou Centro(*associada à Dove's Tail*);

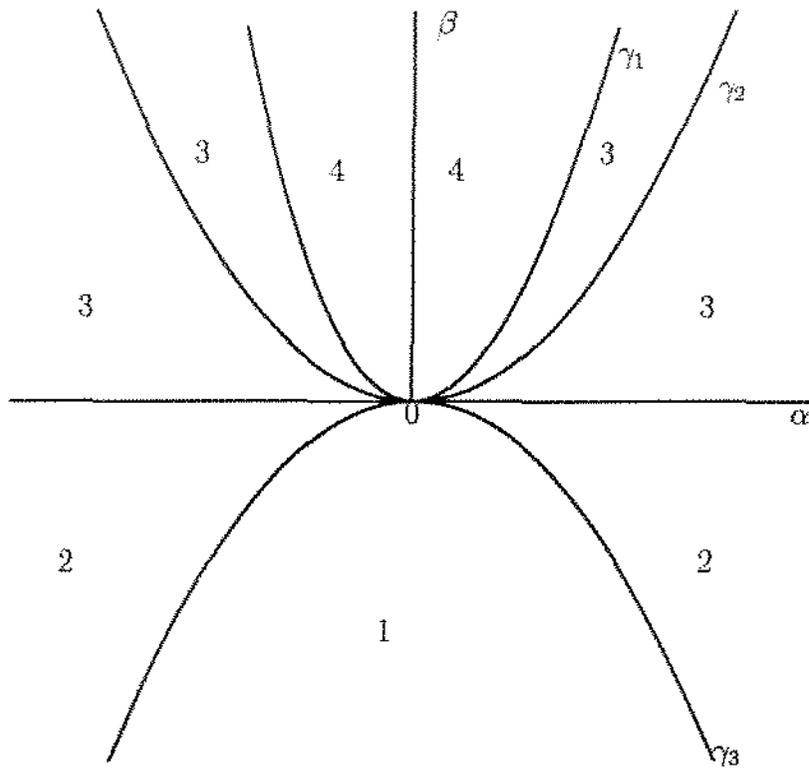


Figura 4.10: Ponto Crítico Foco Tangente 2

4.4.7 Foco Tangente 2

1. Na região 1, G não tem pontos críticos, e L_G tem duas Cúspides;
2. Na região 2, G não tem pontos críticos, e L_G tem quatro Cúspides;
3. Na região 3, G tem dois pontos críticos assimétricos(foco), e L_G tem quatro Cúspides;
4. Na região 4, G tem dois pontos críticos assimétricos(foco), e L_G tem duas Cúspides;

5. Ao longo da semi-reta vertical, G tem dois pontos críticos do tipo Foco Tangente assimétricos, e L_G tem duas Cúspides;
6. Ao longo da reta horizontal, G tem um ponto crítico simétrico(foco), e L_G tem três Cúspides;
7. Ao longo de γ_1 , L_G são duas retas se interceptando no 0. Fora de γ_1 , L_G são duas hipérbolas.
8. Ao longo de γ_2 , G tem dois pontos críticos assimétricos(foco), e L_G tem duas Cúspides e um ponto crítico simétrico distinguido do tipo Sela ou Centro(*associada à Dove's Tail*);
9. Ao longo de γ_3 , G não tem pontos críticos, e L_G tem duas Cúspides e um ponto crítico simétrico distinguido do tipo Sela ou Centro(*associada à Dove's Tail*);

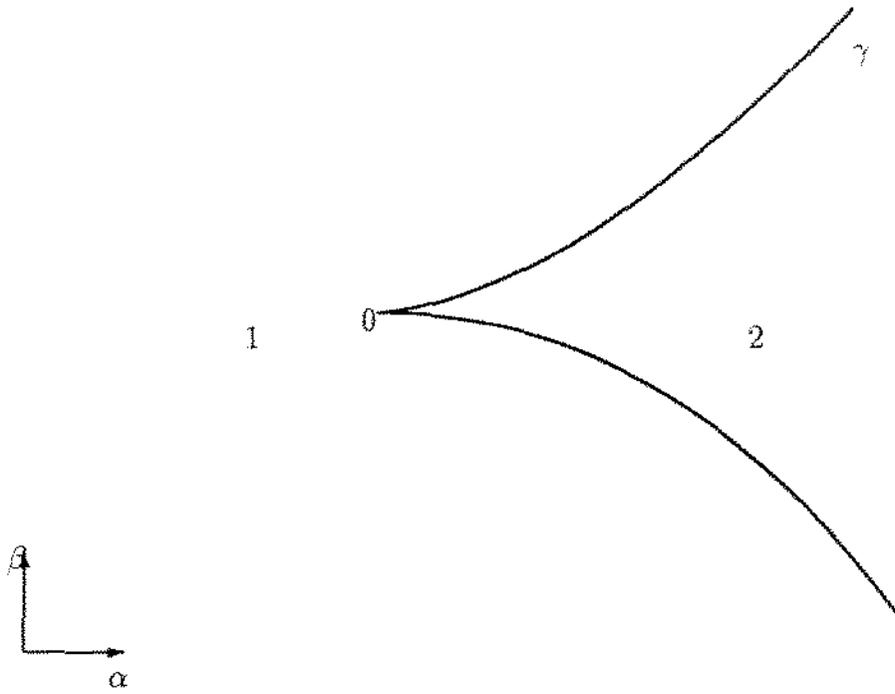


Figura 4.11: S -singularidade Goose

4.4.8 Goose

1. Na região 1, L_G tem uma Cúspide;
2. Na região 2, L_G tem três Cúspides;
3. Ao longo de γ , L_G tem duas Cúspides sendo uma associada (*Lips*);

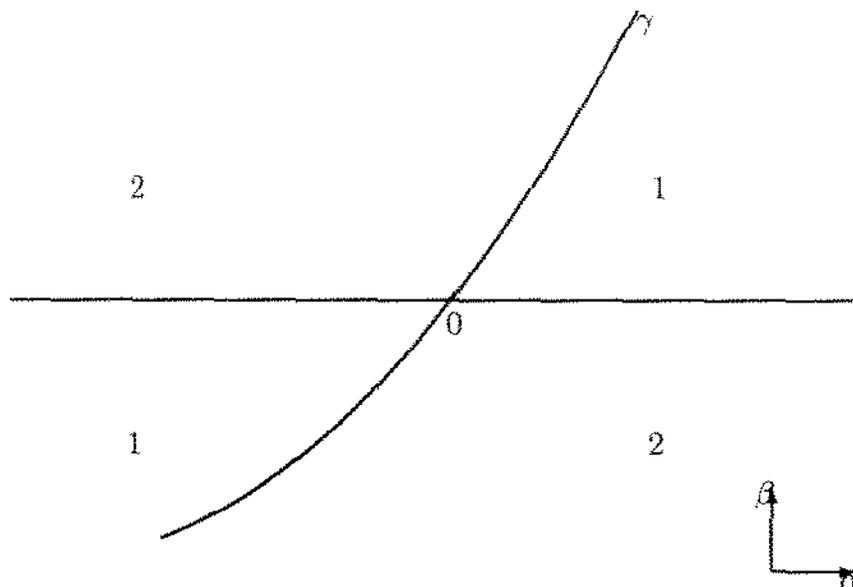


Figura 4.12: S -singularidade Gull

4.4.9 Gull

1. Na região 1, L_G tem quatro Cúspides;
2. Na região 2, L_G tem duas Cúspides;
3. Ao longo de γ , L_G tem duas Cúspides separadas por um ponto crítico simétrico distinguido do tipo Sela ou Centro (*associada à Dove's Tail*);
4. Ao longo da reta horizontal, L_G tem duas Cúspides e um ponto crítico simétrico distinguido do tipo Sela ou Centro (*associada à Dove's Tail*).

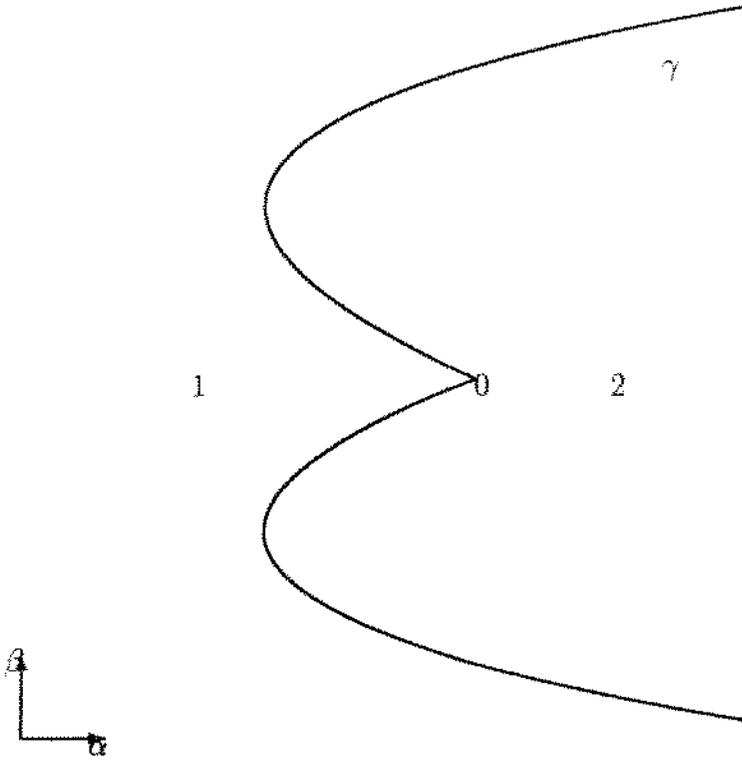


Figura 4.13: S -singularidade Butterfly

4.4.10 Butterfly

1. Na região 1, L_G tem três Cúspides;
2. Na região 2, L_G tem uma Cúspide;
3. Ao longo de γ , L_G tem uma Cúspide e um um ponto crítico simétrico distinguido do tipo Sela ou Centro(*associada à Dove's Tail*).

4.5 Prova do Teorema C

Denotemos $\Omega_2 = \Omega \setminus \nu_1$.

Em Ω_2 , definimos o subconjunto ν_2 da seguinte forma: " $X \in \nu_2$ desde que a origem seja uma singularidade de codimensão 2 do correspondente $F = F(X)$ ". Isto significa que $X \in \nu_2$ se, e somente se, $F = F(X) \in \Sigma_2$.

Segue da definição de ν_2 e da Proposição 4.3 que:

Lema 4.42

ν_2 é aberto e denso em Ω_2 . Mais, ν_2 é uma subvariedade de codimensão 2 de Ω .

O próximo resultado é uma consequência imediata da Proposição 4.3.

Proposição 4.43

1. $X \in \Omega_2$ é estruturalmente estável relativo à Ω_2 se, e somente se, $F(X)$ é estruturalmente estável relativo à \mathcal{E}_2^r ;
2. X é estruturalmente estável relativo à Ω_2 se, e somente se, $X \in \nu_2$;
3. as C^0 -formas normais de qualquer família à um parâmetro em Ω passando por $X_0 \in \nu_2$ e transversalmente à ν_2 são :

(2.1) L 2.1-Nó $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (axz, byz, \frac{1}{2}(y + cz^2 + \varepsilon(c - 2a)x^2 + \alpha u + \beta))$,
com $(a, b, c) = \delta(3, 2, 1)$, se $\varepsilon < 0$, $(a, b, c) = \delta(1, 2, 3)$, se $\varepsilon > 0$ e $\delta = \pm 1$;

(2.2) L 2.3-Nó $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (axz, byz, \frac{1}{2}(y + cz^2 + \varepsilon(c - 2a)x^2 + \alpha u + \beta))$,
com $(a, b, c) = \delta(2, 1, 3)$ e $\delta = \pm 1$;

(2.3) L 2.5-Nó $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (axz, byz, \frac{1}{2}(y + cz^2 + \varepsilon(c - 2a)x^2 + \alpha u + \beta))$,
com $(a, b, c) = \delta(1, 2, 3)$, se $\varepsilon < 0$, $(a, b, c) = \delta(3, 2, 1)$, se $\varepsilon > 0$ e $\delta = \pm 1$;

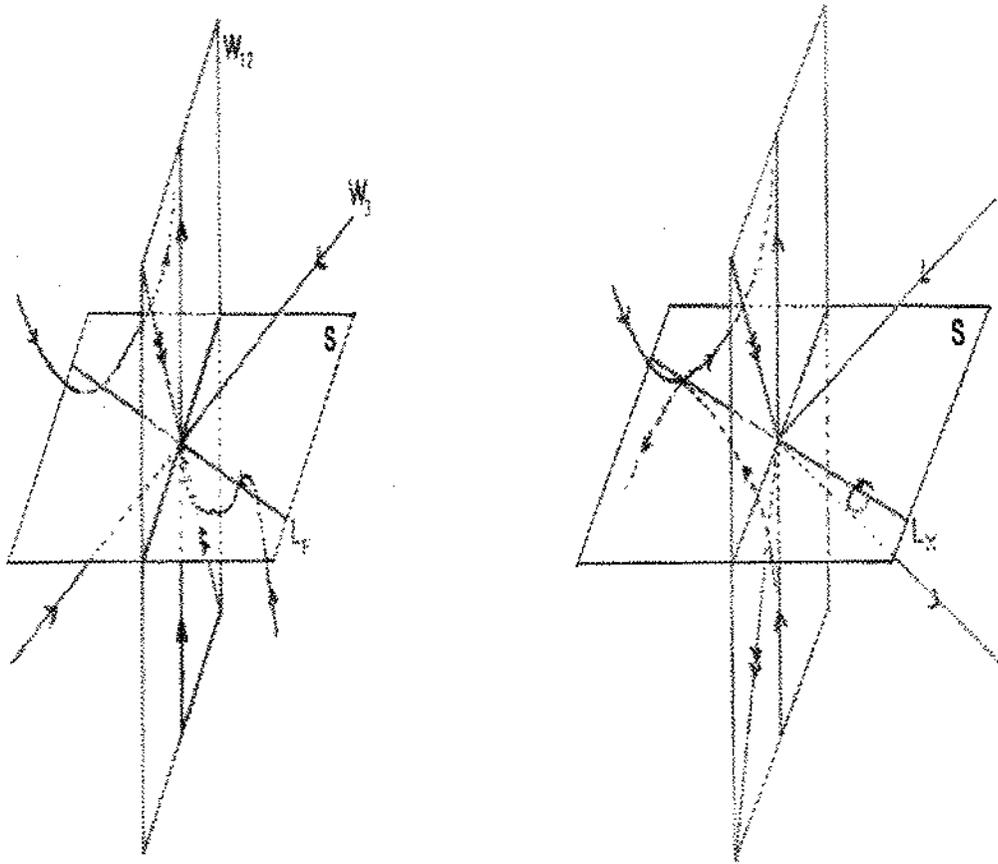
- (2.4) **L 2.0-Sela** $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (axz, byz, \frac{1}{2}(y + cz^2 + \varepsilon(c-2a)x^2 + \alpha u + \beta))$,
com $(a, b, c) = \delta(-2, -1, 1)$, se $\varepsilon < 0$, $(a, b, c) = \delta(-1, -2, 1)$, se $\varepsilon > 0$
e $\delta = \pm 1$;
- (2.5) **L 2.2-Sela** $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (axz, byz, \frac{1}{2}(y + cz^2 + \varepsilon(c-2a)x^2 + \alpha u + \beta))$,
com $(a, b, c) = \delta(-1, -2, 1)$, se $\varepsilon < 0$, $(a, b, c) = \delta(-2, -1, 1)$, se $\varepsilon > 0$
e $\delta = \pm 1$;
- (2.6) **Foco 2** $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (axz, (a^2 - 2ab - b^2)yz + 2abz^3 - 2abx^2z - 2ab\alpha xz, \frac{1}{2}(-2by + (a+b)z^2 - (a+b+2c)x^2 - \alpha(a+b+c)x + \beta))$, com
 $a, b, c \in \mathbb{R}$ distintos e não nulos;
- (2.7) **Nó Degenerado** $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (axz + \alpha yz, xz + ayz, \frac{1}{2}(x + y + cz^2 + \beta))$, com $a, c \in \mathbb{R}$ distintos e não nulos;
- (2.8) **Foco Degenerado** $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (axz + byz + \alpha xz, -bxz + ayz, \frac{1}{2}(x + y + az^2 + \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)xy + \beta))$, com $a, b \in \mathbb{R}$ não nulos e
 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \pm 1$;
- (2.8) **Foco Tangente 1** $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (axz + byz, -bxz + ayz, \frac{1}{2}(cz^2 + x^2 + y^2 + \alpha x + \beta)$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ não nulos e $c \neq a$;
- (2.9) **Foco Tangente 2** $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (axz + byz, -bxz + ayz, \frac{1}{2}(cz^2 + x^2 - y^2 + \alpha x + \beta)$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ não nulos e $c \neq a$;
- (2.10) **Goose** $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (z, 0, \frac{1}{2}(3x^2 + y^3 + \alpha y + \beta)$;
- (2.11) **Gull** $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (z, 0, \frac{1}{2}(4u^3 + 2xy - y^2 + \alpha y + \beta)$;
- (2.12) **Butterfly** $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (z, 0, \frac{1}{2}(5u^4 + 3\varepsilon x^2 y + y + \alpha x^2 + \beta x)$ com
 $\varepsilon = \pm 1$;

Prova do Teorema C

A prova segue da Proposição 4.43. ■

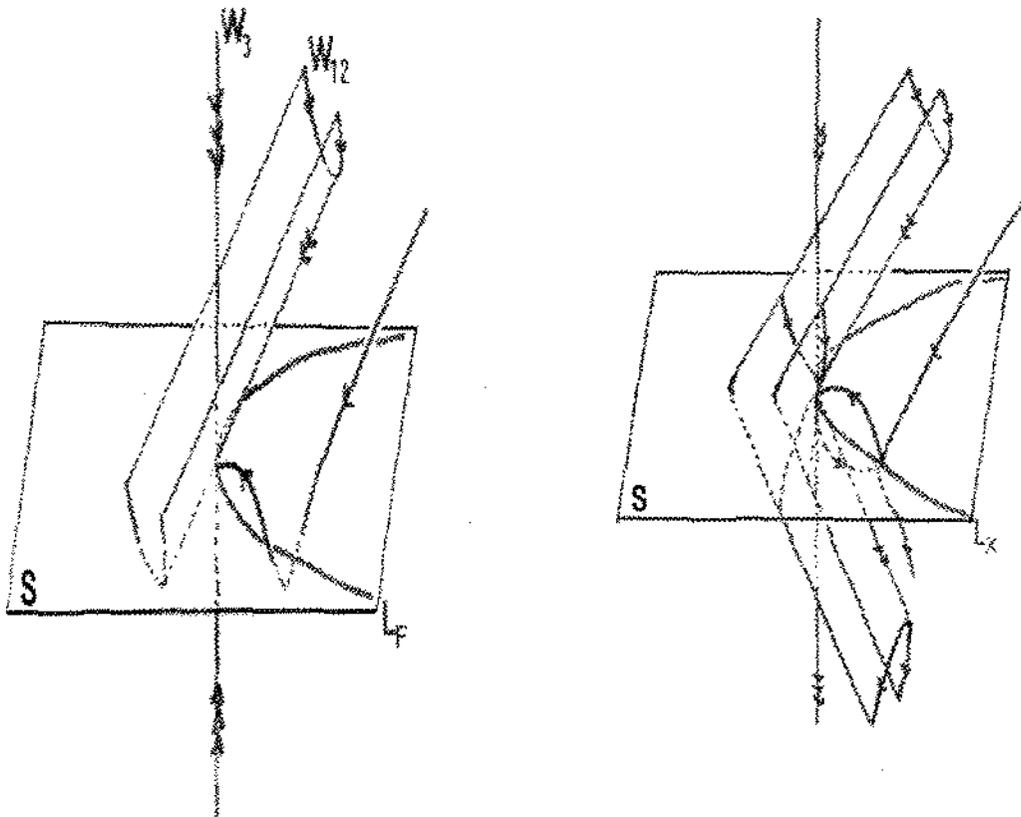
A seguir apresentamos figuras com o esboço do espaço de fase de campos vetoriais de codimensão 2. Em todas as figuras apresentamos os campos associados F e X , onde F é o campo vetorial tomando S como bordo, X é o campo vetorial reversível associado. Lembremos que quando a tangência

interna(para F) temos associado um ponto crítico do tipo sela(para X); e quando a tangência é externa(para F), temos um ponto crítico do tipo centro(para X).



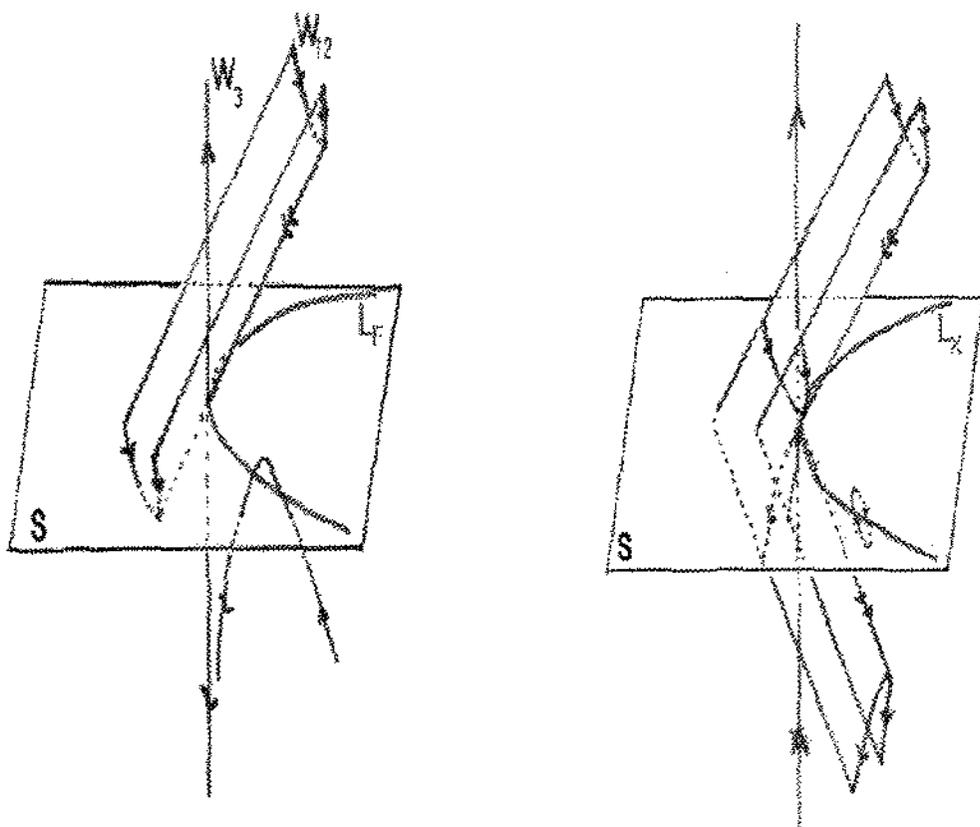
$$\frac{r}{\lambda_2} \quad \frac{r}{\lambda_3} \quad \frac{0}{\lambda_1}$$

Figura 4.14: Sela-Nó:Bordo \times Reversível



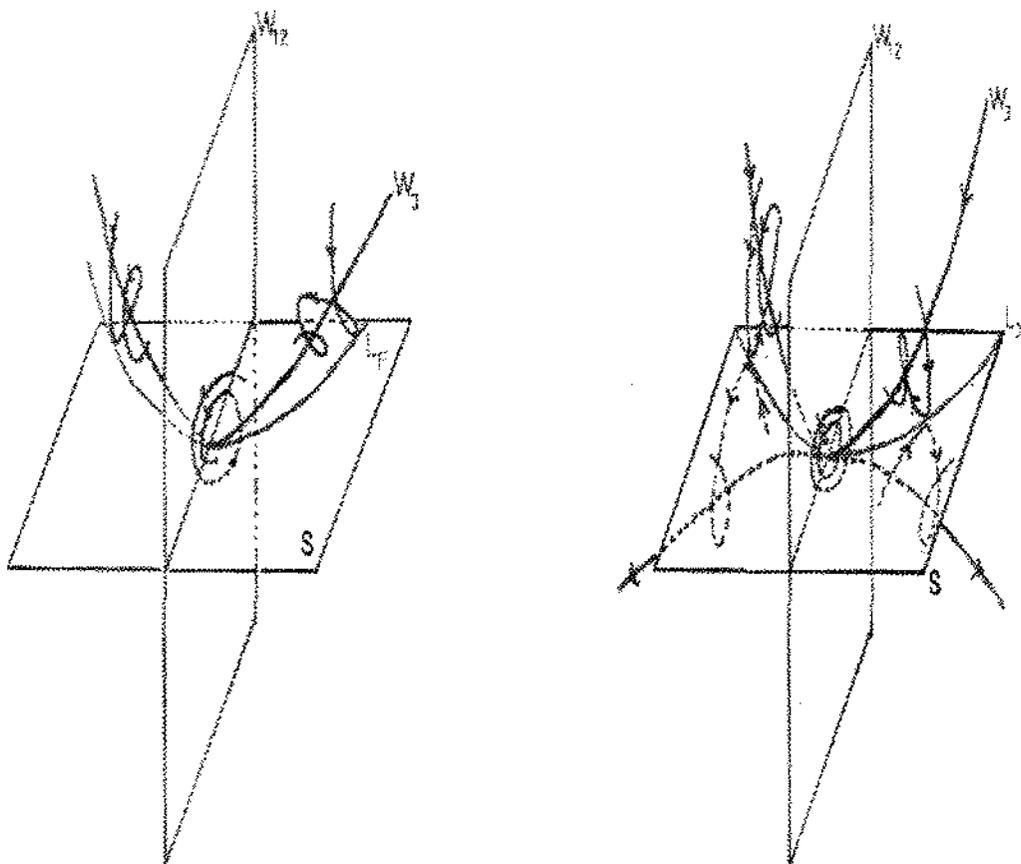
$$\frac{r \quad r \quad r \quad r}{\lambda_3 \quad \lambda_2 \quad \lambda_1 \quad 0}$$

Figura 4.15: Hiperbólico Tangente Nó:Bordo \times Reversível



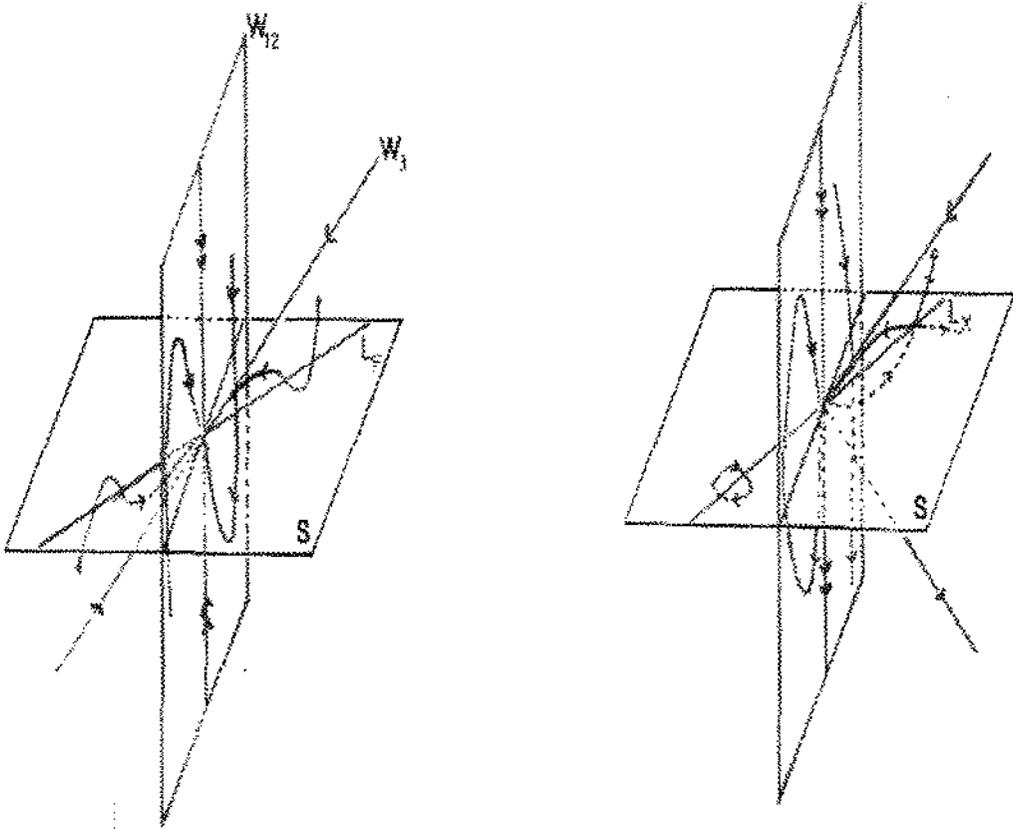
$$\frac{-\Gamma \quad \Gamma \quad \Gamma \quad \Gamma -}{\lambda_2 \quad \lambda_1 \quad 0 \quad \lambda_3}$$

Figura 4.16: Hiperbólico Tangente Sela:Bordo \times Reversível



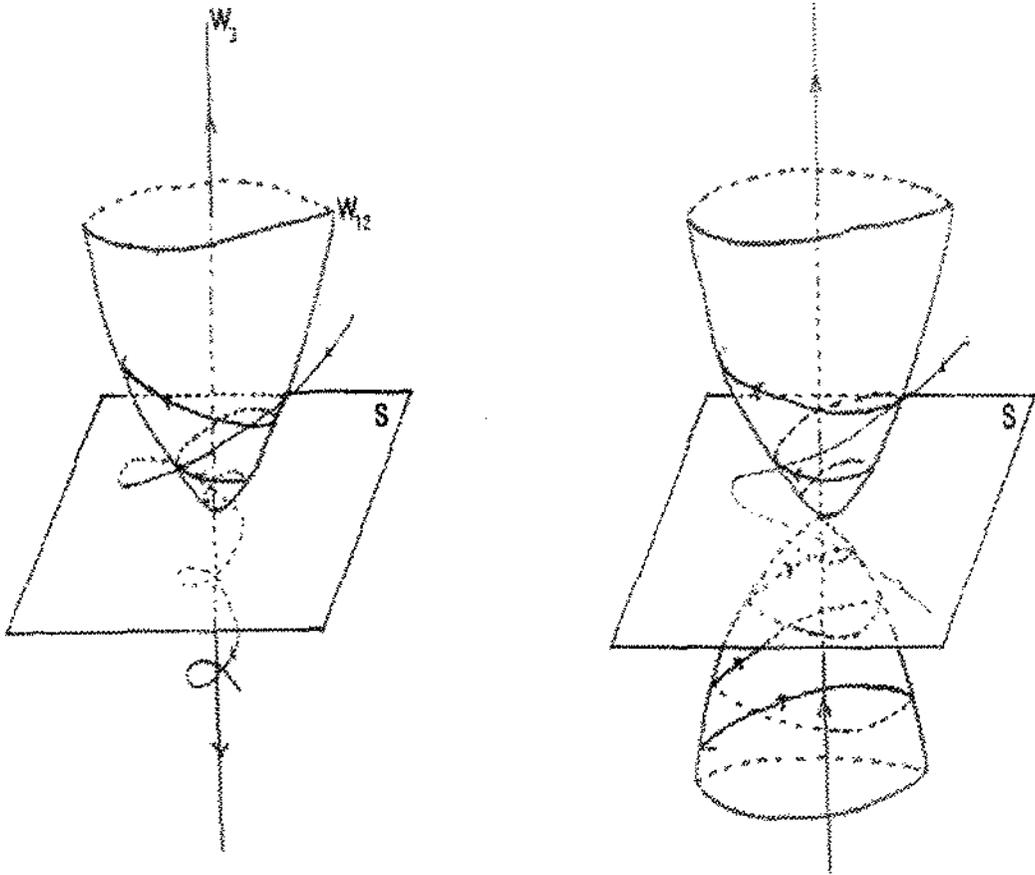
$$\frac{\lambda_1^r}{\lambda_2^r} \quad \frac{r}{\lambda_3} \quad \frac{r}{0}$$

Figura 4.17: Hiperbólico Tangente Foco:Bordo × Reversível



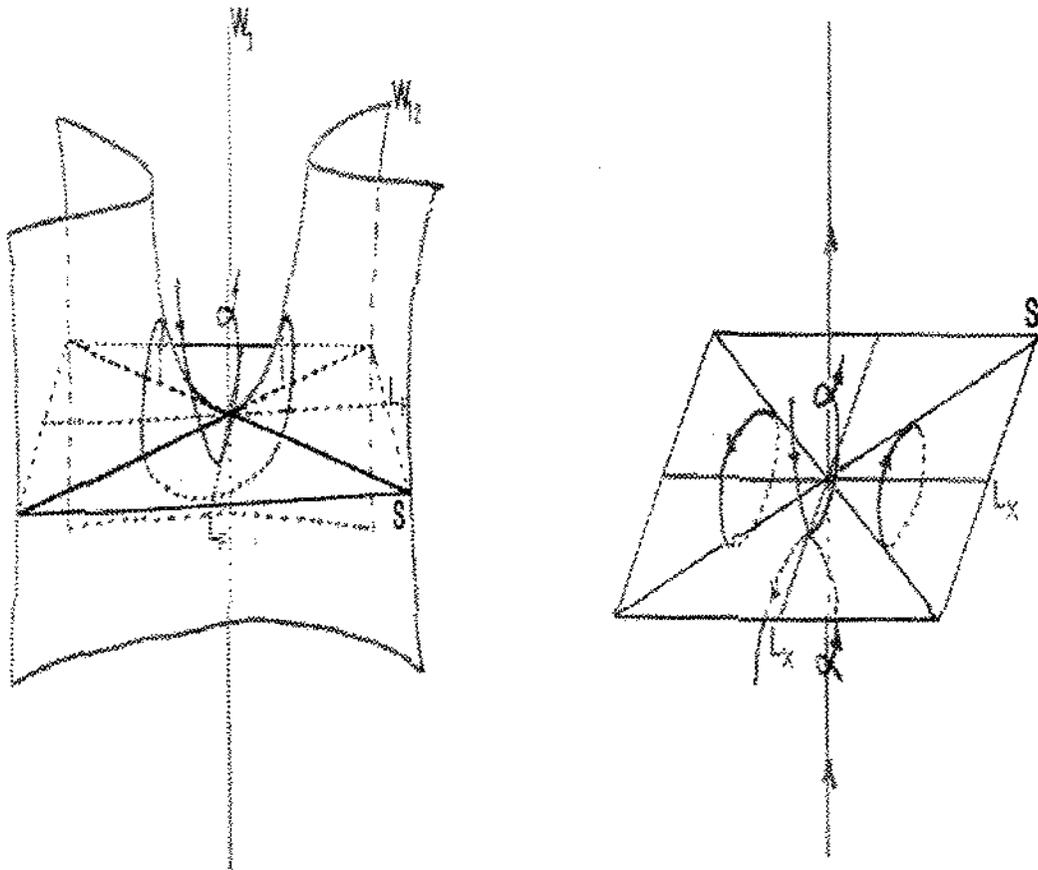
$$\frac{\Gamma \quad \Gamma \quad \Gamma}{\lambda_1 = \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad 0}$$

Figura 4.18: Nó Degenerado: Bordo \times Reversível



$$\frac{\lambda_1^r}{\lambda_2^r} \quad \frac{r}{0} \quad \frac{r}{\lambda_3}$$

Figura 4.19: Foco Tangente I.Bordo \times Reversível



$$\frac{\lambda_1^r}{\lambda_2^r} \quad \frac{r}{0} \quad \frac{r}{\lambda_3}$$

Figura 4.20: Foco Tangente II:Bordo \times Reversível

Bibliografia

- [1] R. Abraham. *Transversal Mappings and Flows*. Benjamin-New York, 1967.
- [2] V. I. Arnold. Indices of singular points of 1-forms on a manifold with boundary, convolution of invariants of reflection groups, and singular projection of smooth surfaces. *Russian Math. Surveys*, **34**(2):1–42, 1979.
- [3] V. I. Arnold. Singularities of systems of rays. *Russian Math. Surveys*, **38**(2):87–176, 1983.
- [4] V. I. Arnold. Reversible systems. *Nonlinear and Turbulence Processes in Physics*, **3**, 1984.
- [5] V.I. Arnold. *The Theory of Singularities and Its Applications*. Accademia Nazionale dei Lincei, Pisa-Italy, 1993.
- [6] G. D. Birkhoff. The restricted problem of three bodies. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **39**, 1915.
- [7] R. L. Devaney. Reversible diffeomorphisms and flows. *Trans. Am. Math. Soc*, **218**, 1976.
- [8] Martin Golubitsky and David G. Schaeffer. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*. Springer Verlag-NY, 1985.
- [9] J.S.W. Lamb. *Reversing Symmetries in Dynamical Systems*. PhD thesis, University of Amsterdam, Amsterdam, Holanda, 1994.
- [10] R. S. Mackay. *Renormalization in Area Preserving Maps*, volume **6**. Advanced Series in Nonlinear Dynamics-World Scientific, 1993.

- [11] J. C. R. Medrado and M. A. Teixeira. Symmetric singularities of reversible vector fields in dimension three. *Relatório de Pesquisa-IMECC-Unicamp*, **5**, 1997.
- [12] W Melo and J. Palis. *Geometric Theory of Dynamical Systems, an introduction*. Springer Verlag-NY, 1982.
- [13] D. Montgomery and L. Zippin. *Topological Transformation Groups*. Interscience, New York, 1955.
- [14] George Osipenko. The necessary conditions of the preservation of an invariant manifold of an autonomous system near an equilibrium point. *Z angew Math Phys*, **44**:451–468, 1993.
- [15] J.H. Rieger. Families of maps from the plane to the plane. *J. London Math. Soc.*, **36**(2):351–369, 1987.
- [16] J.H. Rieger. Versal topological stratification and the bifurcation geometry of map germs of the plane. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **107**:127–147, 1990.
- [17] J. A. G. Roberts and R. R. W. Quispel. Chaos and time reversal symmetry. order and chaos in reversible dynamical systems. *Physic Reports*, **216**(2,3), 1992.
- [18] M.B. Sevryuk. *Reversible Systems*, volume **1211**. Lecture Notes in Mathematics - Springer Verlag, 1986.
- [19] J. Sotomayor. Generic one-parameter of vector fields on two-dimensional manifolds. *I.H.E.S.*, **43**:5–46, 1974.
- [20] J. Sotomayor. Structural stability in manifolds with boundary. *Global Analysis and its Applications*, **3**:167–176, 1974.
- [21] J. Sotomayor and M. A. Teixeira. Vector fields near the boundary of 3-manifold. *Collection: Dynamical Systems, Valparaiso, Lecture Notes in Math.*, **1331**:169–195, 1986.
- [22] S. Sternberg. On the structure of a local homeomorphism. *Amer. J. Math*, **80**:623–631, 1958.

- [23] F. Takens. Forced oscillations and bifurcations. *Comm. Math. Inst. Univ. Utrecht*, **3**, 1974.
- [24] M. A. Teixeira. Generic bifurcation in manifolds with boundary. *Journal of Differential Equations*, **25**(1):65–89, 1977.
- [25] M. A. Teixeira. Local and simultaneous structural stability of certain diffeomorphisms. *Lecture Notes in Maths-Springer-Verlag*, 898:382–390, 1981.
- [26] M. A. Teixeira. Singularities of reversible vector fields. *Physica D*, in press:1–18, 1996.
- [27] A. Vanderbauwhede. Subharmonic branching in reversible systems. *SIAM*, **21**, 1990.
- [28] S. M. Vishik. Vector fields near the boundary of a manifold. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, **1**(27):21–28, 1972.
- [29] Jiazhong Yang. *Polynomial Normal Forms of Vector Fields on \mathbb{R}^3* . PhD thesis, Technion-Israel Institute of Technology, Haifa, Israel, 1996.