

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Física Gleb Wataghin

Dissertação de Mestrado

## **Instantons em espaços curvos**

**Autor**

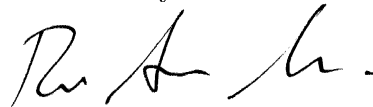
Gustavo Marques Tavares

**Orientador**

Ricardo Antonio Mosna

*Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação de Mestrado defendida pelo aluno Gustavo Marques Tavares e aprovada pela Comissão Julgadora.*

9 de junho de 2010



**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP**

T197i

Tavares, Gustavo Marques  
*Instantons em espaços curvos* / Gustavo Marques  
Tavares. -- Campinas, SP: [s.n.], 2010.

Orientador: Ricardo Antonio Mosna.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Gauge, Teorias de. 2. Yang-Mills, Teoria de.  
3. Instantons. I. Mosna, Ricardo Antonio. II. Universidade  
Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin".  
III. Título.

(vsv/ifgw)

- **Título em inglês:** Instantons in curved spaces
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
  1. Gauge theories
  2. Yang-Mills theory
  3. Instantons
- **Área de Concentração:** Física das Partículas Elementares e Campos
- **Titulação:** Mestre em Física
- **Banca Examinadora:**  
Prof. Ricardo Antonio Mosna  
Prof. Luiz Agostinho Ferreira  
Prof. Guillermo Gerardo Cabrera Oyarzun
- **Data da Defesa:** 13-04-2010
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física

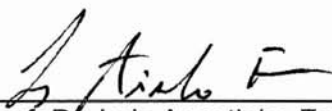
MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE **GUSTAVO MARQUES TAVARES - RA 023992** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN", DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 13 / 04 / 2010.

**COMISSÃO JULGADORA:**



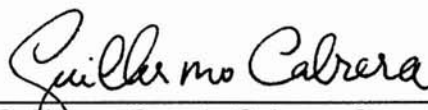
---

Prof. Dr. Ricardo Antônio Mosna - Presidente da Comissão Julgadora  
IMECC/UNICAMP



---

Prof. Dr. Luiz Agostinho Ferreira – IFSC/USP



---

Prof. Dr. Guillermo Gerado Cabrera Oyarzún - DFMC/IFGW/UNICAMP

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer à minha família em primeiro lugar. Sem todo apoio e carinho de vocês não teria chegado até aqui. Um agradecimento especial para minha mãe que, da sua maneira, sempre me deu todo incentivo e apoio para que eu seguisse o caminho que escolhi.

Agradeço ao meu orientador, professor Ricardo Mosna, por toda atenção e ajuda ao longo do desenvolvimento deste projeto. Foi realmente um privilégio trabalhar com você, e fico feliz em saber que iremos continuar amigos mesmo após terminado o vínculo deste projeto.

Gostaria de agradecer à minha namorada, Maira. Obrigado por estar comigo em todos os momentos deste percurso e por estar sempre ao meu lado quando precisei. Agradeço também pela ajuda com o xfigure.

Agradeço aos meus amigos, pois estes certamente tornaram estes anos muito mais agradáveis e divertidos. Este é sempre um momento problemático, pois não queria deixar nenhum amigo de fora dos agradecimentos. Agradeço principalmente aos amigos de quem estive mais próximo nestes últimos anos: André, Dadam, Eduardo, Gustavo, João, Juliana, Mariele, Meire e Tiago.

Por fim, agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), cujo apoio financeiro foi essencial para o desenvolvimento deste trabalho.

# Resumo

Neste trabalho estudamos os instantons da teoria de Yang-Mills nos espaços de Schwarzschild e de Reissner-Nordstrom com grupo de gauge  $SU(2)$ . Instantons são soluções clássicas da teoria de Yang-Mills definida em um espaço com métrica riemanniana (positiva-definida) e com ação finita.

Primeiramente revisamos a formulação geométrica da teoria de Yang-Mills em uma variedade 4-dimensional, identificando os campos de gauge com conexões em um fibrado principal. Em seguida apresentamos os principais resultados clássicos relacionados aos instantons no espaço plano.

Na segunda parte da dissertação realizamos um estudo sistemático das soluções da teoria de Yang-Mills nos espaços de Schwarzschild e de Reissner-Nordstrom euclidianos. Esta abordagem nos permitiu descobrir novas famílias de instantons neste contexto. Ainda, os resultados obtidos mostram que o número de famílias de instantons no espaço de Reissner-Nordstrom depende diretamente da carga elétrica que caracteriza esta geometria.

# Abstract

In this work we study instanton solutions of the Yang-Mills theory in Schwarzschild and Reissner-Nordstrom spaces with gauge group  $SU(2)$ . Instantons are solutions to the classical field equations of Yang-Mills theory defined in a space with Riemannian (positive definite) metric with finite action.

We begin with a review of the geometric setting of Yang-Mills theory on a four dimensional manifold, which relates the gauge fields to connections on a fiber bundle. We proceed by presenting the main results related to instantons in flat space.

In the second part of this thesis we perform a systematic study of the solutions of Yang-Mills theory in Euclidian Schwarzschild and Reissner-Nordstrom spaces. This approach led us to discover a new family of instantons defined in those backgrounds. Moreover, our results show that the number of instanton families in the Reissner-Nordstrom space depends directly on the electric charge which characterizes this geometry.

# Convenções

Durante esta dissertação trabalharemos no sistema de unidades naturais, no qual

$$\begin{aligned}c &= 1, \\ \hbar &= 1, \\ G &= 1,\end{aligned}$$

sendo  $c$  a velocidade da luz no vácuo,  $\hbar$  a constante de Planck dividida por  $2\pi$  e  $G$  a constante de Newton.

Também iremos adotar a convenção de Einstein para somatórias: sempre que um índice aparecer duas vezes em um mesmo termo a somatória sobre este índice deve ser subentendida. Por exemplo

$$x_k x^k = x_1 x^1 + x_2 x^2 + \dots + x_n x^n.$$

Finalmente, escrevemos as matrizes de Pauli da forma usual:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>iii</b>
<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Convenções</b>	<b>vi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Instantons no espaço plano</b>	<b>6</b>
2.1 A teoria de Yang-Mills . . . . .	6
2.2 Formulação geométrica da teoria de Yang-Mills . . . . .	8
2.3 Instantons em variedades riemannianas . . . . .	12
2.4 Instantons no espaço plano . . . . .	14
2.4.1 Configurações com ação finita . . . . .	15
2.4.2 Propriedades da ação . . . . .	19
2.4.3 Exemplos de soluções auto-duais . . . . .	20
2.5 A relação entre instantons em $\mathbb{R}^4$ e fibrados em $S^4$ . . . . .	23
<b>3 Instantons no espaço de Schwarzschild</b>	<b>28</b>
3.1 O espaço de Schwarzschild euclidiano . . . . .	28
3.2 O Ansatz . . . . .	30
3.3 As soluções . . . . .	33
3.3.1 Regularidade das soluções . . . . .	33
3.3.2 Soluções em série . . . . .	34



3.3.3	Ação finita . . . . .	36
3.3.4	Prova das propriedades (3.20) . . . . .	42
3.4	Expressão analítica para $\phi$ . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Instantons no espaço de Reissner-Nordstrom</b>	<b>48</b>
4.1	O espaço de Reissner-Nordstrom euclidiano . . . . .	48
4.2	O Ansatz . . . . .	50
4.3	As soluções . . . . .	51
4.3.1	Soluções em série . . . . .	52
4.4	Existência de soluções tipo monopolo . . . . .	55
4.4.1	Propriedades analíticas . . . . .	55
4.4.2	Resultados numéricos . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Conclusões e perspectivas futuras</b>	<b>67</b>
<b>A</b>	<b>Introdução a fibrados</b>	<b>69</b>
A.1	Fibrados Principais . . . . .	69
A.2	Conexões em Fibrados Principais . . . . .	74
A.3	As classes de Chern . . . . .	78
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>82</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A teoria de Yang-Mills foi introduzida por C. N. Yang e R. L. Mills [1] como uma generalização da teoria de Maxwell para grupos de simetria não-abelianos. Mais tarde, esta teoria desempenhou um papel central na formulação do modelo padrão das partículas elementares [2]. Além de ter se tornado fundamental para a construção de vários modelos em física, tanto na área de partículas elementares quanto em matéria condensada, a teoria de Yang-Mills foi um dos fatores responsáveis pela reaproximação entre a física e a matemática que ocorreu na segunda metade do século XX. Nesta dissertação estaremos interessados nas soluções das equações clássicas da teoria de Yang-Mills com grupo de gauge  $SU(2)$ , tanto em espaço plano quanto em espaços curvos associados a soluções das equações da relatividade geral.

As soluções das equações clássicas de uma dada teoria carregam informações importantes sobre a estrutura não-perturbativa da teoria quântica associada [3, 4, 5]. Em particular, soluções das equações de movimento euclidianas<sup>1</sup> com ação finita são ingredientes fundamentais em diversos cálculos semi-clássicos, tanto em mecânica quântica não-relativística quanto em teorias quânticas de campos, e fornecem resultados que não podem ser obtidos em nenhuma ordem da teoria de perturbação. Estas soluções clássicas de ação finita da teoria euclidiana são denominadas instantons.

O estudo de propriedades não-perturbativas via métodos semi-clássicos pode ser ilustrado por meio de um sistema quântico não-relativístico e unidimensional, descrito por uma la-

---

<sup>1</sup>A teoria euclidiana aparece devido a uma rotação de Wick na coordenada tempo.

grangiana da forma

$$L = \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x).$$

Podemos calcular a evolução temporal do sistema via formalismo de integrais funcionais [6],

$$\langle x_f, T/2 | x_i, -T/2 \rangle = \int d[x(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]},$$

onde a integral em  $d[x(t)]$  é calculada sobre todos os caminhos tais que  $x(-T/2) = x_i$  e  $x(T/2) = x_f$  e

$$S[x(t)] = \int_{-T/2}^{T/2} L[x(t')] dt'$$

é a ação do sistema. Por outro lado, também podemos calcular a evolução temporal expandindo  $\langle x_f, T/2 | x_i, -T/2 \rangle$  em uma base de auto-estados,  $|\psi_n\rangle$ , da hamiltoniana  $H$  e assim

$$\int d[x(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} = \sum_n \psi_n^*(x_f) \psi_n(x_i) e^{-iE_n T/\hbar},$$

onde  $E_n$  é a energia do estado  $|\psi_n\rangle$ . Fazendo a continuação analítica da expressão acima para tempos imaginários temos

$$\int d[x(t)] e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[x(t)]} = \sum_n \psi_n^*(x_f) \psi_n(x_i) e^{-E_n T/\hbar}, \quad (1.1)$$

sendo  $S_E$  a ação euclidiana, dada por

$$S_E = \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) \right] dt. \quad (1.2)$$

Vemos que no limite  $T \rightarrow \infty$  somente os estados de menor energia contribuem para a expressão do lado direito da eq. (1.1). Sendo assim, calculando o lado esquerdo desta equação, obtemos tanto as energias quanto as auto-funções associadas aos estados de mais baixa energia do sistema.

Uma forma não-perturbativa de calcular o lado esquerdo da eq. (1.1) é utilizar o método das inclinações mais acentuadas, mais conhecido como “*method of steepest descent*”. Tal método é uma aproximação que se torna adequada no limite  $\hbar \rightarrow 0$ , e por isso está associado a um tratamento semi-clássico da teoria. O método das inclinações mais acentuadas

consiste em expandir a ação euclidiana até ordem quadrática em torno dos seus extremos

$$S_E[x_0(t) + \eta(t)] \approx S_E[x_0(t)] + \int d\tau d\tau' \frac{\delta^2 S_E}{\delta\eta(\tau)\delta\eta(\tau')} [x_0(t)] \eta(\tau)\eta(\tau'),$$

sendo  $x_0(t)$  um extremo do funcional ação. Neste caso a integral funcional se torna gaussiana e podemos calculá-la diretamente. Os extremos da ação são exatamente as soluções das equações clássicas de movimento associadas ao sistema em questão, de onde vemos a relevância destas para o estudo da teoria quântica. É fácil notar que, nesta aproximação, não precisamos considerar as configurações cuja ação é infinita, pois a contribuição destas é nula. Concluímos assim que a expansão semi-clássica da ação deve ser feita precisamente em torno dos instantons da teoria.

Este procedimento pode ser generalizado para as teorias quânticas de campos, sendo o leitor remetido às referências [4, 5] para uma introdução aos cálculos instantônicos neste contexto (que estão fora do escopo desta dissertação). No caso da teoria de Yang-Mills pura (ou seja, sem a presença de outros campos), veremos que o espaço das configurações de ação finita se divide em componentes disjuntas e que, em cada componente, o mínimo da ação está associado à potenciais (anti)auto-duais<sup>2</sup>. É fácil mostrar que tais configurações satisfazem automaticamente as equações de campo e que, por serem mínimos da ação em cada componente, são a contribuição dominante na expansão semi-clássica da integral de trajetória [4]. Alguns efeitos quânticos importantes foram descobertos por meio de cálculos envolvendo instantons, como, por exemplo, a estrutura não-trivial do vácuo na teoria de Yang-Mills pura [7] ( $\theta$ -vácuo) e uma solução para o problema U(1) [8]. Apesar de na literatura padrão o termo instanton estar associado a qualquer solução das equações de movimento euclidianas com ação finita, nesta dissertação usaremos este termo somente para denotar potenciais (anti)auto-duais da equação de Yang-Mills com ação finita..

Nesta dissertação estaremos interessados nas soluções clássicas da teoria de Yang-Mills em geometrias associadas a soluções das equações de Einstein no vácuo. Mais especificamente, vamos nos concentrar no estudo de instantons nos espaços plano, de Schwarzschild e de Reissner-Nordstrom.

---

<sup>2</sup>Como veremos no capítulo 2, um potencial  $A_\mu$  é denominado auto-dual se o tensor de campo  $F_{\mu\nu}$  associado a este potencial satisfaz as equações de auto-dualidade:

$$F_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\lambda\rho}.$$

A dissertação está dividida em três capítulos principais e um apêndice. No capítulo 2 apresentamos uma revisão da teoria de Yang-Mills com grupo  $SU(2)$  em uma variedade (pseudo)riemanniana arbitrária de dimensão quatro. Em seguida mostramos que o tensor de energia-momento simétrico associado a potenciais (anti)auto-duais é nulo e, portanto, tais configurações não perturbam a geometria do espaço-tempo (de acordo com a teoria da relatividade geral). Sendo assim, espaços que são solução das equações de Einstein no vácuo são as variedades mais interessantes, sob um ponto de vista físico, para se estudar as soluções auto-duais da teoria de Yang-Mills. Ainda neste capítulo, iniciamos o estudo de soluções instantônicas no espaço plano e mostramos a relação entre estas soluções e a topologia deste espaço. Em particular, mostramos que todas as configurações de ação finita se dividem em classes e que dentro de cada classe os instantons são mínimos da ação. Também relacionamos a ação dos instantons neste espaço ao segundo número de Chern na esfera  $S^4$ , o que mostra, em particular, que a ação destas soluções no espaço plano é sempre um número inteiro.

No capítulo 3 apresentamos um estudo sistemático dos instantons no espaço de Schwarzschild euclidiano. Este estudo nos permite recuperar todas as soluções instantônicas já conhecidas nesta geometria [9, 10, 11] e também exibir uma nova família de instantons descoberta por nós durante o desenvolvimento deste projeto de mestrado [12]. As soluções desta nova família interpolam as soluções de Charap e Duff, que foram os primeiros instantons descobertos na geometria de Schwarzschild. Além disso, a ação varia continuamente entre os valores 1 e 2, o que caracteriza uma diferença marcante entre a estrutura da teoria de Yang-Mills no espaço de Schwarzschild e no espaço plano, pois como mencionamos acima, a ação das soluções instantônicas no espaço plano é sempre um número inteiro. Essa diferença ilustra o fato que os resultados obtidos no capítulo anterior dependem diretamente da topologia de  $\mathbb{R}^4$ , e, portanto, não são válidos para espaços com outras topologias, como no caso da geometria de Schwarzschild.

O capítulo 4 é dedicado à generalização do procedimento adotado no capítulo anterior para o espaço de Reissner-Nordstrom euclidiano. A métrica de Reissner-Nordstrom é uma solução das equações de Einstein que descreve um espaço tempo esfericamente simétrico em torno de um corpo de massa  $m$  e carga elétrica  $Q$ , sendo que o espaço de Schwarzschild é recuperado no limite de carga zero. Devido às semelhanças entre os espaços de Reissner-Nordstrom e de Schwarzschild, a maior parte dos argumentos utilizados no capítulo 3 pode ser adaptada sem dificuldades para o caso estudado no capítulo 4. Os resultados obtidos indicam que existem novas famílias de instantons no espaço de Reissner-Nordstrom, com

ação variando continuamente dentro de cada família. Também mostramos que o número de famílias depende diretamente da carga  $Q$ , sendo que este número diverge quando nos aproximarmos do caso extremo  $|Q| = m$  [13].

O apêndice contém uma breve introdução à teoria de fibrados principais e conexões. Esta linguagem é utilizada durante a dissertação, principalmente no capítulo 2, e é também utilizada com frequência em trabalhos mais recentes relacionados a teorias de gauge. Também apresentamos no apêndice, de forma resumida, as classes de Chern, que são utilizadas na identificação entre instantons no espaço plano e os  $SU(2)$ -fibrados principais sobre a esfera  $S^4$ . A maior parte do conteúdo original desta dissertação, capítulos 3 e 4, pode ser estudada por leitores que não possuem conhecimento sobre o conteúdo apresentado no apêndice.

## Capítulo 2

# Instantons no espaço plano

Neste capítulo iremos estudar instantons no espaço plano e a sua relação com a topologia deste espaço. Primeiramente iremos fazer uma breve revisão da teoria de Yang-Mills e apresentar a interpretação geométrica para o potencial de gauge desta teoria. Para isso usaremos alguns conceitos de geometria diferencial que são apresentados no apêndice. Em seguida iremos estudar alguns resultados gerais relacionados a instantons. Vamos mostrar que no espaço plano o espaço configurações de ação finita é dividido em componentes disjuntas que podem ser classificadas por uma certa carga topológica. Iremos mostrar que em uma dada componente as configurações de ação mínima são exatamente os instantons. Em seguida vamos apresentar as soluções de 1 instanton e também apresentar o método de Witten [14] para obter soluções multi-instantons. Por fim iremos estabelecer a relação entre instantons no espaço plano e fibrados sobre a esfera  $S^3$ .

### 2.1 A teoria de Yang-Mills

A teoria de Yang-Mills é uma teoria de gauge não-abeliana introduzida como uma generalização da teoria de Maxwell nos anos 50 [1] e hoje é parte fundamental na descrição das interações descritas pelo modelo padrão [2]. Na teoria de Yang-Mills a simetria local é dada por um grupo não-abeliano, em contraste com a teoria de Maxwell na qual o grupo de simetria é  $U(1)$ . O leitor é remetido às referências [15, 16] para uma ótima revisão da abordagem original (sem o uso de ferramentas modernas de geometria diferencial) desta teoria. Durante toda a dissertação vamos nos restringir à teoria de Yang-Mills com grupo de gauge  $SU(2)$ , porém os resultados da presente seção podem ser facilmente generalizados

para o grupo  $SU(N)$ .

A teoria de Yang-Mills no espaço plano é descrita por um potencial  $A_\mu(x)$  que toma valores na álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , que nesta dissertação será sempre  $\mathfrak{su}(2)$ . Uma das principais características das teorias de gauge é que existe uma classe de configurações que descrevem a mesma realidade física, e por isso não podem ser distinguidas. No caso de teorias de Yang-Mills isso se reflete na identificação de potenciais relacionados por uma transformação de gauge

$$\tilde{A}_\mu = U^{-1}A_\mu U + U^{-1}\partial_\mu U, \quad (2.1)$$

sendo  $U(x)$  uma função de  $\mathbb{R}^4$  em  $SU(2)$ . A partir do potencial  $A_\mu$  podemos definir o campo tensorial

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (2.2)$$

É fácil mostrar que se  $\tilde{A}$  e  $A$  estão relacionados por uma transformação de gauge dada por  $U(x)$  então

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = U^{-1}F_{\mu\nu}U. \quad (2.3)$$

Usando o tensor  $F_{\mu\nu}$  podemos definir a lagrangiana desta teoria,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi^2 g} \text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}), \quad (2.4)$$

onde  $g$  é a constante de acoplamento. Apesar de a constante de acoplamento ter papel fundamental na teoria quântica, ela não tem qualquer relevância para os aspectos clássicos da teoria<sup>1</sup>, e por isso vamos fixar  $g = 1$  daqui por diante. A ação associada a esta lagrangiana é

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}). \quad (2.5)$$

Usando a eq. (2.3) é fácil verificar que a lagrangiana, e consequentemente a ação, são invariantes por transformações de gauge. As equações de Euler-Lagrange obtidas a partir desta lagrangiana são

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + [A_\mu, F^{\mu\nu}] = 0. \quad (2.6)$$

Note que essas equações são o equivalente não-abeliano das equações de Maxwell não homogêneas no vácuo:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad \text{e} \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

---

<sup>1</sup>É imediato notar que um fator que multiplica a ação não altera as equações de movimento clássicas.



Por outro lado, podemos definir uma 1-forma  $A = A_\mu dx^\mu$ , e a partir da eq. (2.1) temos

$$\tilde{A} = U^{-1}AU + U^{-1}dU. \quad (2.7)$$

A relação acima, em conjunto com os resultados apresentados no apêndice, nos permite concluir que  $A$  define uma conexão no fibrado trivial  $\mathbb{R}^4 \times \text{SU}(2)$ , conforme ficará claro na próxima seção.

## 2.2 Formulação geométrica da teoria de Yang-Mills

Dada uma variedade  $M$  de dimensão 4 dotada de uma métrica (pseudo)-riemanniana  $g$ , podemos formular a teoria de Yang-Mills em  $M$  identificando o campo de gauge com uma conexão em um  $\text{SU}(2)$ -fibrado (não necessariamente trivial) sobre  $M$ , que denotaremos por  $E$ . Localmente essa conexão pode ser descrita por 1-formas  $\mathfrak{su}(2)$ -valorizadas  $A_i$ , definidas em abertos  $U_i \in M$  associados às trivializações locais do fibrado (ver apêndice). Note que o índice  $i$  identifica o domínio no qual a 1-forma  $A_i$  está definida e não deve ser confundido com a componente  $i$  de  $A$ . Para evitar possíveis confusões iremos omitir o índice  $i$  sempre que este não for necessário, porém não podemos esquecer que em geral  $A$  é definido apenas localmente. A partir desta conexão temos a forma local da curvatura

$$F = DA = dA + A \wedge A, \quad (2.8)$$

que em termos de coordenadas  $x^\mu$  de  $M$  pode ser escrita como  $F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$ , com

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu].$$

Se a interseção  $U_i \cap U_j \in M$  é não vazia, os potenciais  $A_i$  e  $A_j$  correspondentes a cada conjunto estão relacionados por

$$A_j = t_{ij}^{-1}A_i t_{ij} + t_{ij}^{-1}dt_{ij}, \quad (2.9)$$

onde  $t_{ij}(x)$  é a função de transição entre as trivializações  $(U_i, \phi_i)$  e  $(U_j, \phi_j)$  (ver apêndice). Em particular dada uma trivialização  $(U_i, \phi_i)$  e uma função  $h : U_i \rightarrow \text{SU}(2)$  podemos definir uma outra trivialização  $(U_i, L_{h^{-1}} \circ \phi_i)$ , sendo  $L_{h^{-1}}$  a multiplicação à esquerda por  $h^{-1}$  na parte associada a  $\text{SU}(2)$  do produto  $U_i \times \text{SU}(2)$ . A conexão local associada a esta

trivialização está definida no mesmo aberto  $U_i$  e pode ser escrita em termos da conexão  $A_i$  como

$$\tilde{A}_i = h^{-1}A_i h + h^{-1}dh.$$

Comparando essa expressão com a eq. (2.1) vemos que uma mudança de gauge é simplesmente a mudança na conexão induzida por uma troca da trivialização local no fibrado  $E$ .

Em cada vizinhança  $U_i$  vamos definir uma ação

$$S_i = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{U_i \in M} \text{tr}(F \wedge \star F), \quad (2.10)$$

sendo  $\star F$  o dual de Hodge da 2-forma  $F$ , e portanto também uma 2-forma. Podemos definir o dual de Hodge a partir da sua ação em uma base coordenada,

$$\star(dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}) = \frac{\sqrt{|g|}}{(n-k)!} \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k \nu_{k+1} \nu_{k+2} \dots \nu_n} dx^{\nu_{k+1}} \wedge dx^{\nu_{k+2}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_n}, \quad (2.11)$$

sendo  $n$  a dimensão da variedade,  $g = \det(g_{\mu\nu})$  o determinante da métrica e  $\epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$  o símbolo totalmente anti-simétrico definido por

$$\epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \begin{cases} +1 & \text{se } (\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n) \text{ é uma permutação par de } (1 2 \dots n), \\ -1 & \text{se } (\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n) \text{ é uma permutação ímpar de } (1 2 \dots n), \\ 0 & \text{em qualquer outro caso.} \end{cases}$$

Dessa forma, em termos das coordenadas  $x^\mu$  de  $M$ , temos

$$\star F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \star(dx^\mu \wedge dx^\nu) = \frac{\sqrt{|g|}}{4} F_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \epsilon_{\alpha\beta\rho\lambda} dx^\rho \wedge dx^\lambda. \quad (2.12)$$

Usando a expressão acima temos

$$\begin{aligned} \text{tr}(F \wedge \star F) &= \frac{\sqrt{|g|}}{8} \text{tr} \left( F_{\mu\nu} F_{\alpha_1 \beta_1} g^{\alpha_1 \alpha_2} g^{\beta_1 \beta_2} \epsilon_{\alpha_2 \beta_2 \rho \lambda} \right) dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\lambda \\ &= \frac{\sqrt{|g|}}{8} \text{tr} \left( F_{\mu\nu} F_{\alpha_1 \beta_1} g^{\alpha_1 \alpha_2} g^{\beta_1 \beta_2} \epsilon_{\alpha_2 \beta_2 \rho \lambda} \right) \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} g dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= \text{tr} \left[ F_{\mu\nu} F_{\alpha_1 \beta_1} g^{\alpha_1 \alpha_2} g^{\beta_1 \beta_2} 2(\delta_{\alpha_2}^\mu \delta_{\beta_2}^\nu - \delta_{\beta_2}^\mu \delta_{\alpha_2}^\nu) \right] dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \sqrt{|g|} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

Como  $F_j = t_{ij}^{-1} F_i t_{ij}$  em  $U_i \cap U_j$  (lembrando que  $i$  e  $j$  neste caso se referem às trivializações e não as coordenadas), temos que

$$\text{tr}(F_i \wedge \star F_i) = \text{tr}(F_j \wedge \star F_j)$$

na interseção. Sendo assim, a 4-forma  $\text{tr}(F \wedge \star F)$  está bem definida em todo  $M$ , mesmo se o fibrado  $E$  não é trivial, e vamos definir a ação da teoria de Yang-Mills na variedade  $M$  como

$$S[A] = -\frac{1}{8\pi^2} \int_M \text{tr}(F \wedge \star F) = -\frac{1}{16\pi^2} \int_M \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \sqrt{|g|} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \quad (2.13)$$

É fácil verificar que esta expressão recupera a eq. (2.5) quando  $M = \mathbb{R}^4$  com a métrica plana.

As equações de Yang-Mills são obtidas procurando potenciais que extremizam a ação (2.13). Um potencial  $A$  é extremo da ação se

$$\left. \frac{d}{dt} (S[A + t\delta A]) \right|_{t=0} = 0$$

para qualquer  $\delta A$  com suporte compacto em  $U_i^2$ . Usando a eq. (2.13) na equação acima temos:

$$\begin{aligned} \int_{U_i} \text{tr} \{ (\partial_\mu \delta A_\nu - [\delta A_\nu, A_\mu]) F^{\mu\nu} \} \sqrt{|g|} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 &= 0 \\ \int_{U_i} \text{tr} \left\{ \left( -\delta A_\nu^a \frac{\sigma^a}{2i} \partial_\mu - \epsilon^{abc} \delta A_\nu^a A_\mu^b \frac{\sigma^c}{2i} \right) F^{\mu\nu e} \frac{\sigma^e}{2i} \right\} \sqrt{|g|} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 &= 0 \\ \int_{U_i} \left( -\partial_\mu F^{\mu\nu a} - \frac{1}{\sqrt{|g|}} F^{\mu\nu a} \partial_\mu \sqrt{|g|} - \epsilon^{abc} A_\mu^b F^{\mu\nu c} \right) \delta A_\nu^a \sqrt{|g|} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 &= 0. \end{aligned}$$

E como essa equação deve ser válida para qualquer  $\delta A$  com suporte compacto em  $U_i$  temos a equação de Yang-Mills

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} + [A_\mu, F^{\mu\nu}] = \partial_\mu F^{\mu\nu} + \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda F^{\mu\nu} + [A_\mu, F^{\mu\nu}] = 0, \quad (2.14)$$

---

<sup>2</sup>Uma maneira mais formal e global de definir a ação e sua variação é fazer os cálculos no fibrado  $E$  e não na base  $M$  conforme descrito na referência [17]. Não iremos adotar este procedimento neste trabalho pois, além de introduzir complicações desnecessárias para os nossos objetivos, esta não é a abordagem usual para teoria de Yang-Mills na literatura da área.

onde usamos

$$\partial_\mu \sqrt{|g|} = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} g^{\lambda\nu} \partial_\mu g_{\lambda\nu} = \sqrt{|g|} \Gamma^\nu_{\nu\mu},$$

sendo  $\Gamma^\lambda_{\nu\mu}$  o símbolo de Christoffel associado à conexão de Levi-Civita. Vale notar que, para o caso  $M = \mathbb{R}^4$ , a expressão acima recupera as eqs. (2.6) quando escrita em coordenadas cartesianas. Dessa forma concluímos que as equações acima são a generalização não-abeliana das equações de Maxwell não-homogêneas no vácuo quando a teoria está definida em uma variedade (pseudo)riemanniana arbitrária.

Por outro lado, se  $\eta$  é uma p-forma  $\mathfrak{su}(2)$ -valorizada em  $U_i$ , definimos (ver apêndice) a derivada exterior covariante de  $\eta$  com relação à conexão  $A$  por

$$D\eta = d\eta + A \wedge \eta - \eta \wedge A = d\eta + [A, \eta]. \quad (2.15)$$

Usando esta definição e a eq. (2.12) podemos calcular  $\star D \star F$ . Para isso vamos primeiro calcular cada termo separadamente:

$$d(\star F) = \frac{1}{4} \partial_\mu \left( F^{\alpha\beta} \sqrt{|g|} \right) \epsilon_{\alpha\beta\rho\lambda} dx^\mu \wedge dx^\rho \wedge dx^\lambda = \sqrt{|g|} (\partial_\mu F^{\alpha\beta} + \Gamma^\nu_{\nu\mu} F^{\alpha\beta}) \epsilon_{\alpha\beta\rho\lambda} dx^\mu \wedge dx^\rho \wedge dx^\lambda,$$

e assim

$$\star d(\star F) = |g| \frac{1}{4} (\partial_\mu F^{\alpha\beta} + \Gamma^\nu_{\nu\mu} F^{\alpha\beta}) \epsilon_{\alpha\beta\rho\lambda} \epsilon^{\mu\rho\lambda\kappa} g_{\kappa\kappa'} dx^{\kappa'} = \text{sgn}(g) \left( \partial_\beta F^{\alpha\beta} + \Gamma^\nu_{\nu\beta} F^{\alpha\beta} \right) g_{\alpha\mu} dx^\mu. \quad (2.16)$$

Vamos agora calcular o segundo termo,

$$A \wedge \star F = \frac{\sqrt{|g|}}{4} A_\mu F^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta\rho\lambda} dx^\mu \wedge dx^\rho \wedge dx^\lambda,$$

e assim

$$\star (A \wedge \star F) = \frac{|g|}{4} A_\mu F^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta\rho\lambda} \epsilon^{\mu\rho\lambda\kappa} g_{\kappa\kappa'} dx^{\kappa'} = \text{sgn}(g) A_\mu F^{\nu\mu} g_{\nu\kappa} dx^\kappa.$$

É fácil ver que para calcularmos  $\star(\star F \wedge A)$  basta inverter  $A$  e  $F$  na expressão acima. Com estes resultados temos

$$\begin{aligned} \star D \star F &= \text{sgn}(g) \left( \partial_\beta F^{\alpha\beta} + \Gamma^\nu_{\nu\beta} F^{\alpha\beta} + [A_\beta, F^{\alpha\beta}] \right) g_{\alpha\mu} dx^\mu, \\ &= -\text{sgn}(g) (\nabla_\mu F^{\mu\nu} + [A_\mu, F^{\mu\nu}]) g_{\nu\lambda} dx^\lambda. \end{aligned}$$

Comparando a expressão acima com a eq. (2.14), e lembrando que a operação  $\star$  é um isomorfismo entre o espaço das  $k$ -formas e o espaço das  $(n-k)$ -formas, vemos que a equação de Yang-Mills é equivalente a

$$D \star F = 0. \quad (2.17)$$

A seguir veremos que essa forma da equação é bastante conveniente para o estudo de instantons.

### 2.3 Instantons em variedades riemannianas

Como pode ser visto a partir das eqs. (2.14), a equação de Yang-Mills é uma equação diferencial parcial (EDP) de segunda ordem não-linear em  $A$ , e por isso procurar soluções desta equação é uma tarefa altamente não trivial. No entanto, devido à identidade de Bianchi (ver apêndice) temos

$$DF = 0. \quad (2.18)$$

que, em coordenadas, correspondem ao equivalente não-abeliano das equações de Maxwell homogêneas:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \text{e} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

De acordo com as eqs. (2.17) e (2.18), se a curvatura  $F$  associada a um potencial  $A$  satisfaz  $\star F = kF$ , sendo  $k$  uma constante, então  $A$  é automaticamente uma solução das equações de Yang-Mills. A equação  $\star F = kF$  é de primeira ordem e seus termos não-lineares são apenas quadráticos, e portanto é bem mais simples que a equação de Yang-Mills.

Por outro lado, se  $\omega$  é uma  $p$ -forma temos (ver [18])

$$\star \star \omega = \text{sgn}(g)(-1)^{p(n-p)}\omega,$$

sendo  $n$  a dimensão da variedade. Como estamos interessados em variedades de dimensão 4, e  $F$  é uma 2-forma, temos

$$\star \star F = \text{sgn}(g)F. \quad (2.19)$$

Mas, se  $\star F = kF$ , vemos da relação acima que

$$k^2 = \text{sgn}(g),$$

e assim se  $M$  é riemanniana (todos os autovalores da métrica são positivos) temos  $k = \pm 1$ . Se  $M$  for lorentziana (um autovalor da métrica negativo e os outros positivos) temos  $k = \pm i$ . Como  $F$  toma valores na álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , o segundo caso só faz sentido se  $\mathfrak{g} = i\mathfrak{g}$ , o que não é verdade para grupos de Lie compactos<sup>3</sup>, e, em particular, não é válida para  $\mathfrak{su}(2)$ . Vamos a partir de agora nos restringir a variedades riemannianas, onde vamos buscar potenciais que satisfaçam

$$\star F = \pm F, \quad (2.20)$$

sendo que para o sinal  $(-)+$  o potencial  $A$  é denominado (anti)auto-dual.

O restante desta dissertação será dedicado a estudar soluções da eq. (2.20) com ação finita, que chamaremos de instantons. A relevância física deste tipo de solução, ao menos no caso plano, aparece ao usarmos o método do tempo imaginário para buscar resultados não-perturbativos em teorias quânticas<sup>4</sup>. Antes disso porém, vamos apresentar um resultado importante relacionado ao tensor energia-momento deste tipo de solução.

### Tensor energia-momento de soluções auto-duais

Sabemos que o tensor energia-momento simétrico de um campo cuja lagrangiana é  $\mathcal{L}$  pode ser calculado usando [19]

$$T_{\mu\nu} = 2g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} (\sqrt{g}\mathcal{L}) = -2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.21)$$

Substituindo  $\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi^2} \text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$  na expressão acima temos

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi^2} \left( F_{\mu\alpha}{}^a F_{\nu}{}^{\alpha a} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}{}^a F^{\alpha\beta a} \right). \quad (2.22)$$

Uma configuração (anti)auto-dual satisfaz

$$F_{\mu\nu} = \pm \frac{\sqrt{g}}{2} F^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu},$$

---

<sup>3</sup>Vale lembrar que as teorias de gauge de interesse físico estão, em geral, associadas a grupos de Lie compactos.

<sup>4</sup>As aplicações de instantons em teorias quânticas não serão consideradas nesta dissertação. O leitor é remetido às referências [4, 5] para alguns exemplos de cálculos quânticos envolvendo instantons.

e nesse caso é fácil mostrar que

$$F^{\mu\alpha a} F_{\nu\alpha}{}^a = \frac{1}{4} F^{\alpha\beta a} F_{\alpha\beta}{}^a \delta^\mu{}_\nu.$$

Substituindo essa relação na eq. (2.22) vemos que o tensor de energia-momento de uma configuração (anti)auto-dual é nulo.

De acordo com a relatividade geral, a presença de matéria e energia altera a geometria do espaço tempo, conforme descrito pelas equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.23)$$

onde  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci (ver [18, 19]) e  $R$  a curvatura escalar associados a métrica  $g_{\mu\nu}$ . Vemos que o lado esquerdo da equação acima está relacionado à geometria do espaço-tempo enquanto o lado direito está relacionado ao conteúdo de energia e momento. Como o tensor energia-momento de potenciais de Yang-Mills (anti)auto-duais é nulo, tais campos não alteram a geometria do espaço-tempo. Concluimos que, dada uma solução das equações de Einstein no vácuo  $g_{\mu\nu}$  e um potencial de Yang-Mills  $A_\mu$  (anti)auto-dual com relação a essa métrica, o par  $(g_{\mu\nu}, A_\mu)$  é automaticamente uma solução da teoria de Einstein-Yang-Mills. Sendo assim, variedades que são solução das equações euclidianas de Einstein no vácuo são as variedades mais interessantes, sob um ponto de vista físico, para se estudar soluções auto-duais da equação de Yang-Mills.

## 2.4 Instantons no espaço plano

A solução mais simples das equações euclidianas (métrica positiva) de Einstein no vácuo é o espaço plano. Como a maioria dos trabalhos em teorias quânticas de campo são em espaço plano (onde o processo de quantização é melhor compreendido), é natural que o primeiro trabalho sobre instantons tenha surgido neste contexto [22]. Nesta seção estaremos interessados em estudar as soluções da eq. (2.20) em  $\mathbb{R}^4$  com ação finita. Como  $\mathbb{R}^4$  é contrátil a um ponto, todo fibrado principal em  $\mathbb{R}^4$  será trivial (ver apêndice) e por isso os potenciais de gauge estão definidos globalmente.

### 2.4.1 Configurações com ação finita

Lembrando que a ação associada a um potencial  $A$  é dada por

$$S = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \text{tr}(F \wedge \star F) = \frac{1}{32\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} F_{\mu\nu} {}^a F^{\mu\nu a} d^4x,$$

vemos que, para que  $A$  tenha ação finita,  $F$  deve tender a zero mais rápido que  $r^{-2}$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ . No entanto, isso não requer necessariamente que  $A \rightarrow 0$ , pois dada uma função (diferenciável)  $h$  de  $\mathbb{R}^4$  em  $SU(2)$  e definindo  $A = h^{-1}dh$  temos

$$F = dA + A \wedge A = 0.$$

Portanto a condição de ação finita impõe que  $A \rightarrow h^{-1}dh + \mathcal{O}(r^{-2})$ , para alguma função  $h : \mathbb{R}^4 \rightarrow SU(2)$ , quando  $|x| \rightarrow \infty$ . Concluimos que cada configuração de ação finita define uma função,  $h^\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} h$ , da esfera no infinito,  $S^3$ , no grupo  $SU(2)$ .

Devemos lembrar que se  $x \in S^3$  então

$$g = x^0 I + ix^1 \sigma^1 + ix^2 \sigma^2 + ix^3 \sigma^3 \in SU(2),$$

sendo  $\sigma^i$  as matrizes de Pauli. Por outro lado, um elemento de  $SU(2)$  sempre pode ser escrito como

$$g = \begin{pmatrix} a + id & c + ib \\ -c + ib & a - id \end{pmatrix},$$

com  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ . Dessa forma vemos que  $SU(2) \simeq S^3$ .

Sendo assim,  $h^\infty$  pode ser classificado pelo terceiro grupo de homotopia de  $S^3$ ,  $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$  [18, 21]. Portanto podemos associar um inteiro  $k$ , relacionado à classe (ou grau do mapa) de  $h^\infty$  em  $\pi_3(S^3)$ , a cada configuração de ação finita  $A$ . Este número é denominado o *winding number* da configuração  $A$ . Como um exemplo, pode-se mostrar que

$$f_k : S^3 \longrightarrow SU(2); \quad f_k(x) = (x^0 I + ix^j \sigma^j)^k$$

está na classe  $k$  de  $\pi_3(S^3)$ . Para ver isso basta notar que  $f_0(x)$  é constante e consequentemente  $[f_0] = 0$  ( $f_0$  está na classe 0 de  $\pi_3(S^3)$ ) e também que  $f_1$  é a identidade (módulo a identificação entre  $S^3$  e  $SU(2)$ ) e assim  $[f_1] = 1$ . Usando a propriedade



$[f \cdot g] = [f] + [g]$  (ver [21]), onde  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ , temos

$$[f_k] = k[f_1],$$

o que mostra que  $f_k$  está na classe  $k$  de  $\pi_3(S^3)$ .

A discussão do último parágrafo mostra que o espaço das configurações de ação finita é formado por componentes disjuntas associadas às classes de equivalência das funções  $h^\infty$ . Vamos mostrar a seguir que se dois potenciais de gauge com ação finita,  $A$  e  $\tilde{A}$ , são relacionados por uma transformação de gauge  $\tilde{A} = g^{-1}Ag + g^{-1}dg$ , então eles estão na mesma componente. Ou seja, se  $A \rightarrow h^{-1}dh$  e, conseqüentemente,  $\tilde{A} \rightarrow (g \cdot h)^{-1}d(g \cdot h)$ , então as classes  $[g^\infty]$  e  $[(g \cdot h)^\infty]$  tem que coincidir. Note que  $h$  está definida apenas para pontos na esfera no infinito. Caso pudessemos estender  $h(x)$ , associada a um dado potencial  $A$ , para todo o  $\mathbb{R}^4$ , poderíamos fazer uma transformação de gauge em  $A$  com a função  $g(x) = h(x)^{-1}$ , e teríamos um potencial  $\tilde{A}$  com  $\tilde{A} \rightarrow 0$  no infinito. Neste caso,  $A$  estaria na mesma componente que a configuração trivial  $A = 0$ , e portanto a classe de  $h$  em  $\pi_3(S^3)$  deve, necessariamente, ser a trivial. Em particular, este raciocínio mostra (em conjunto com o resultado que iremos provar a seguir) que um mapa definido na esfera no infinito só pode ser estendido para todo o  $\mathbb{R}^4$  se ele for topologicamente trivial.

### Carga topológica

Podemos mostrar que dois potenciais relacionados por uma transformação de gauge estão na mesma componente provando que classe de equivalência associada a estes potenciais (em  $\pi_3(S^3)$ ) pode ser calculada usando a seguinte expressão invariante por transformações de gauge

$$Q = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \text{tr}(F \wedge F). \quad (2.24)$$

Chamaremos  $Q$  de carga topológica, sendo que esta carga é intimamente relacionada ao segundo número de Chern, como ficará claro na última seção deste capítulo. Para provar que  $Q$  definido pela expressão acima coincide com a componente de  $A$  (e conseqüentemente com a classe de  $h$ ) devemos primeiro notar que

$$d(\text{tr}(F \wedge F)) = \text{tr}(dF \wedge F + F \wedge dF) = \text{tr}(-[A, F] \wedge F - F \wedge [A, F]) = 0,$$

e assim a 4-forma  $\text{tr}(F \wedge F)$  é fechada<sup>5 6</sup>. Como  $\mathbb{R}^4$  é contrátil a um ponto temos que toda forma fechada é exata [18] e conseqüentemente  $F = dK$ , onde  $K$  é uma 3-forma em  $\mathbb{R}^4$ .

Um cálculo simples mostra que

$$K = \text{tr} \left( A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right)$$

satisfaz  $F = dK$ . Usando o teorema de Stokes temos

$$\int_{\mathbb{R}^4} \text{tr}(F \wedge F) = \int_{\mathbb{R}^4} dK = \int_{S^3_{(\infty)}} \text{tr} \left( A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right),$$

sendo  $S^3_{(\infty)}$  a esfera no infinito. Como  $dA = F - A \wedge A$  e como no infinito  $F = 0$ , temos

$$-\frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \text{tr}(F \wedge F) = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} \text{tr}(A \wedge A \wedge A) = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} \text{tr} (h^{-1} dh \wedge h^{-1} dh \wedge h^{-1} dh), \quad (2.25)$$

onde usamos que o comportamento assintótico do potencial é dado por  $A \rightarrow h^{-1} dh$ .

Vamos usar duas propriedades do funcional  $w(h)$  definido abaixo (sobre funções de  $S^3$  em  $SU(2)$ ), sendo que a prova destas propriedades será apresentada no fim da seção:

$$w(h) \equiv \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} \text{tr} (h^{-1} dh \wedge h^{-1} dh \wedge h^{-1} dh). \quad (2.26)$$

**propriedade 1:**  $w(h) = w(g)$  se  $h$  e  $h'$  estão associadas a mesma classe em  $\pi_3(S^3)$  (ou seja  $[h] = [g]$ ).

**propriedade 2:**  $w(h \cdot g) = w(h) + w(g)$ , sendo  $(h \cdot g)(x) = h(x) \cdot g(x)$  e a multiplicação é a usual do grupo  $SU(2)$ .

Como qualquer mapa  $h : S^3 \rightarrow SU(2)$  é homotópico a um  $f_k = (f_1)^k$  (para algum  $k$ ) as propriedades acima mostram que  $w(h) = w(f_k) = kw(f_1)$ . Sendo assim, se mostrarmos que  $w(f_1) = 1$  provamos que  $w(h) = [h]$ , ou seja, mostramos que  $w$  mede qual a classe da (ou grau da) aplicação  $h$ . Neste caso, comparando a expressão de  $w(h)$  com a eq. (2.25)

<sup>5</sup>Uma  $k$ -forma  $\omega$  é fechada se  $d\omega = 0$ . Se  $\omega = d\eta$  para uma  $(k-1)$ -forma  $\eta$  dizemos que  $\omega$  é exata. Note que toda forma exata é fechada mas nem toda forma fechada é exata [18].

<sup>6</sup>De fato toda 4-forma sobre uma variedade de dimensão 4 é fechada. No entanto, este cálculo mostra que tal resultado é verdade mesmo para variedades de dimensão mais alta.

concluimos que carga topológica  $Q$  indica a qual componente do espaço de configurações pertence o potencial  $A$ .

Para calcular a integral devemos primeiro notar que sob uma rotação  $R$  temos  $f_1(Rx) = Uf_1(x)V$ , sendo  $U$  e  $V$  matrizes em  $SU(2)$  independentes de  $x$  (tal resultado segue diretamente da identificação usual de  $SU(2) \times SU(2)$  com o recobrimento duplo de  $SO(4)$ , ver [20]). Sendo assim é fácil notar que o integrando da eq. (2.26) é invariante por rotações para  $h = f_1$  e portanto podemos calculá-lo apenas no polo norte  $x^0 = 1$  e  $x^i = 0$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} (f_1^{-1}df_1 \wedge f_1^{-1}df_1 \wedge f_1^{-1}df_1) \Big|_{x=x_N} &= -i \operatorname{tr}(\sigma^{j_1}\sigma^{j_2}\sigma^{j_3}) dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge dx^{j_3} \\ &= -i \epsilon^{j_1j_2j_3} \operatorname{tr}(\sigma^{j_1}\sigma^{j_2}\sigma^{j_3}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= 12 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

Identificamos a 3-forma  $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$  com o elemento de volume  $\omega$  de  $S^3$  em  $x_N$  e assim

$$k(f_1) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{S^3} \omega = 1.$$

A partir destes resultados concluimos que  $w(h)$  mede a classe de  $h$  em  $\pi_3(S^3)$  e portanto, de acordo com a eq. (2.25) a carga topológica  $Q(A)$  mede o inteiro correspondente a componente de  $A$  no espaço de configurações. Em particular, como a carga topológica é invariante por transformações de gauge, vemos que potenciais relacionados por uma transformação de gauge estão na mesma componente no espaço de configurações.

**Prova da propriedade 1:** Para provarmos a propriedade 1 devemos notar que  $h^{-1}dh$  é o pullback por  $h : S^3 \rightarrow SU(2)$  da forma de Maurer-Cartan (ver [18] por exemplo) em  $SU(2)$ , e portanto o integrando da eq. (2.26) é o pull-back por  $h$  de uma 3-forma  $\eta$  em  $SU(2)$ . Pode-se mostrar que se duas funções  $h$  e  $h'$  são homotópicas então  $h^*\eta$  e  $h'^*\eta$  estão na mesma classe da cohomologia de de Rham (ver [18] ou [21]) e assim

$$h^*\eta - h'^*\eta = d\theta,$$

para alguma 2-forma  $\theta$ . Como  $S^3$  não tem bordo a integral de  $d\theta$  em  $S^3$  é zero (pelo teorema de Stokes) e assim  $w(h) = w(h')$ .

**Prova da propriedade 2:** Para demonstrarmos a propriedade 2 devemos notar que, como o funcional  $w$  é invariante por homotopia, podemos sempre deformar  $h$  para  $h'$  tal que  $h'(x) = e$  para  $x$  no hemisfério sul de  $S^3$  e deformar  $g$  para  $g'$  tal que  $g' = e$  no hemisfério norte de  $S^3$ . Neste caso

$$\begin{aligned}
 w(h \cdot g) &= w(h' \cdot g'), \\
 &= \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3_{(+)}} \text{tr} (h'^{-1} dh' \wedge h'^{-1} dh' \wedge h'^{-1} dh') + \\
 &\quad + \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3_{(-)}} \text{tr} (g'^{-1} dg' \wedge g'^{-1} dg' \wedge g'^{-1} dg'), \\
 &= \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} \text{tr} (h'^{-1} dh' \wedge h'^{-1} dh' \wedge h'^{-1} dh') + \\
 &\quad + \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} \text{tr} (g'^{-1} dg' \wedge g'^{-1} dg' \wedge g'^{-1} dg'), \\
 \Rightarrow w(h \cdot g) &= w(h') + w(g') = w(h) + w(g),
 \end{aligned}$$

onde  $S^3_{(+)}$  e  $S^3_{(-)}$  são os hemisférios norte e sul de  $S^3$ .

### 2.4.2 Propriedades da ação

Nesta seção vamos apresentar algumas propriedades da ação. Começamos notando que

$$- \int d^4x \text{tr} [(F_{\mu\nu} \pm (\star F)_{\mu\nu}) (F^{\mu\nu} \pm (\star F)^{\mu\nu})] \geq 0, \quad (2.27)$$

pois dada uma 2-forma  $\mathfrak{su}(2)$ -valorizada  $B_{\mu\nu}$  temos

$$\text{tr}(B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}) = B_{\mu\nu}{}^a B^{\mu\nu}{}^b \text{tr} \left( \frac{\sigma^a}{2i} \frac{\sigma^b}{2i} \right) = -\frac{1}{2} B_{\mu\nu}{}^a B^{\mu\nu}{}^a < 0.$$

Podemos mostrar também que  $\text{tr}[F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] = \text{tr}[(\star F)_{\mu\nu} (\star F)^{\mu\nu}]$  e substituindo essa relação na equação acima temos

$$- \int d^4x \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \geq \mp \int d^4x \text{tr}[F_{\mu\nu} (\star F)^{\mu\nu}] \Rightarrow - \int \text{tr}(F \wedge \star F) \geq \mp \int \text{tr}(F \wedge F).$$

Comparando a expressão acima com as expressões para a ação (eq. (2.13)) e para carga topológica (eq. (2.24)) de um potencial  $A$  concluímos que

$$S \geq |Q|. \quad (2.28)$$

A relação acima estabelece um limite inferior para a ação em uma determinada componente do espaço de configurações. É fácil ver, a partir da eq. (2.27), que este limite é atingido exatamente para potenciais (anti)auto-duais. Sendo assim

$$S_{ins} = |Q|, \quad (2.29)$$

de onde concluímos que a ação associada a soluções instantônicas é sempre um inteiro. Além disso vemos das equações acima que as soluções instantônicas são um mínimo global da ação dentro de cada componente do espaço de configurações, e portanto devem ser a contribuição de maior relevância na aproximação semi-clássica da integral de trajetória para teoria de Yang-Mills [5].

### 2.4.3 Exemplos de soluções auto-duais

Na seção anterior estudamos algumas propriedades associadas a instantons em espaços planos. Nesta seção vamos exibir explicitamente uma solução auto-dual na classe 1, que está associada a configurações de 1 instanton. Em seguida faremos uma breve descrição do método introduzido em [14] para calcular soluções multi-instantons.

#### Solução de um instanton

Nesta seção vamos reproduzir o resultado de [22], onde uma solução de um instanton (denominada pseudo-partícula pelos autores) foi obtida pela primeira vez. Como estamos interessados em configurações na classe 1, vamos buscar soluções da eq. (2.20) da forma

$$A = f(r)h^{-1}dh, \quad (2.30)$$

com  $h(x) = (x^0 I + ix^i \sigma^i) / r$  e  $r = \sqrt{(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$ . Para que este potencial tenha ação finita e esteja bem definido na origem devemos impor  $f(r) \propto r^2$  quando  $r \rightarrow 0$  e  $f(r) \rightarrow 1$  quando  $r \rightarrow \infty$ .

A curvatura para um potencial dado pela eq. (2.30) é (note que não vamos distinguir índices superiores de inferiores nesta seção já que estamos tratando do espaço plano euclidiano)

$$\begin{aligned} F_{0i} &= i \left[ \frac{a'}{r} (x_0^2 \sigma_i - \epsilon_{ijk} x_0 x_j \sigma_k) + 2a \sigma_i + a^2 (-\epsilon_{ijk} x_0 x_j \sigma_k + x_i x_k \sigma_k - x_k x_k \sigma_i) \right], \\ F_{ij} &= i \left\{ \frac{a'}{r} (x_0 x_i \sigma_j - x_0 x_j \sigma_i - x_i \epsilon_{jkl} x_k \sigma_l + x_j \epsilon_{ikl} x_k \sigma_l) + 2a \epsilon_{ijk} \sigma_k + \right. \\ &\quad \left. - a^2 [x_0^2 \epsilon_{ijk} \sigma_k - x_0 (x_i \sigma_j - x_j \sigma_i) + \epsilon_{ijl} x_l x_k \sigma_k] \right\}, \end{aligned}$$

onde definimos  $a(r) = f(r)/r^2$  e a linha indica derivada em relação a  $r$ .

A relação  $F = \star F$  (ou  $F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ ) para um potencial dado pela eq. (2.30) se reduz a

$$a' = -ra^2.$$

As soluções desta equação que satisfazem as condições de contorno apropriadas (ver parágrafo acima) são da forma

$$a(r) = \frac{1}{r^2 + \lambda^2} \rightarrow f(r) = \frac{r^2}{r^2 + \lambda^2},$$

sendo  $\lambda$  uma constante que determina o “tamanho” do instanton. O potencial é dado por

$$A = \frac{r^2}{r^2 + \lambda^2} h^{-1} dh. \quad (2.31)$$

A ação desta configuração é dada por

$$S = -\frac{1}{8\pi^2} \int \text{tr}(F \wedge \star F) = -\frac{1}{8\pi^2} \int \text{tr}(F \wedge F) = w(h) = 1,$$

onde usamos explicitamente a relação entre  $w(h)$  e a classe de  $h$  em  $\pi_3(S^3)$ .

Podemos interpretar essa solução fisicamente como um instanton localizado (no espaço e no tempo) em torno de  $x = (0, 0, 0, 0)$  e de tamanho característico  $\lambda$ . Como a teoria é invariante por translações, podemos obter outras soluções localizadas em qualquer ponto  $x$  fazendo uma translação no potencial dado pela eq. (2.31).

### Método de Witten para soluções multi-instantons

O método mais geral para obter as soluções de multi-instantons em  $\mathbb{R}^4$  é a construção ADHM[23]. No entanto, nesta dissertação iremos apenas fazer uma breve descrição do método usado por Witten [14] para obter soluções multi-instantons, pois este será o ponto de partida para o estudo de instantons em espaços curvos que apresentaremos nos próximos capítulos. Witten buscou soluções (anti)auto-duais da equação de Yang-Mills a partir de um ansatz esfericamente simétrico

$$A = \frac{\sigma_a}{2i} \left[ \phi(\tau, r) \frac{x^a}{r} d\tau + \beta(\tau, r) \frac{x^a x^c}{r^2} dx^c + (\gamma(\tau, r) - 1) \epsilon_{abc} \frac{x^b}{r} d\left(\frac{x^c}{r}\right) + \alpha(\tau, r) d\left(\frac{x^a}{r}\right) \right], \quad (2.32)$$

sendo  $\tau = x^0$  e  $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$ . Note que uma configuração dada por este ansatz é caracterizada por quatro funções:  $\phi$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\alpha$ .

Sob uma transformação de gauge dada por  $U(x) = \exp\left(\frac{f(r, \tau)}{2i} x^k \sigma^k / r\right)$  a forma do ansatz não muda, porém as funções do ansatz se transformam como:

$$\tilde{\phi} = \phi + \partial_\tau f, \quad (2.33a)$$

$$\tilde{\beta} = \beta + \partial_r f, \quad (2.33b)$$

$$\tilde{\gamma} = \gamma \cos f - \alpha \sin f, \quad (2.33c)$$

$$\tilde{\alpha} = \gamma \sin f + \alpha \cos f. \quad (2.33d)$$

Esse tipo de transformação de gauge corresponde a uma simetria  $U(1)$  do problema e pode ser usada para simplificar sua solução.

As equações de auto-dualidade para um potencial dado pelo ansatz (2.32) são

$$\partial_\tau \alpha + \phi \gamma = \partial_r \gamma - \beta \alpha, \quad (2.34a)$$

$$\partial_r \alpha + \beta \gamma = -(\partial_\tau \gamma - \phi \alpha), \quad (2.34b)$$

$$r^2(\partial_\tau \beta - \partial_r \phi) = 1 - \gamma^2 - \alpha^2. \quad (2.34c)$$

A ação para um potencial dado pela eq. (2.32) é dada por

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{32\pi^2} \int d^3x \int dt F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{2} (\partial_t \gamma + \phi \alpha)^2 + \frac{1}{2} (\partial_r \gamma + \beta \alpha)^2 + \frac{1}{2} (\partial_t \alpha - \phi \gamma)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (\partial_r \alpha - \beta \gamma)^2 \frac{1}{4} r^2 (G_{01})^2 + \frac{1}{4} r^{-2} (1 - \gamma^2 - \alpha^2)^2 \right], \tag{2.35}
\end{aligned}$$

sendo  $G_{01} = \partial_0 \beta - \partial_r \phi$ .

Vemos que a ação é idêntica a de uma teoria de gauge abeliana com campo de Higgs em uma variedade de dimensão 2 dotada da métrica  $g^{\mu\nu} = r^2 \delta^{\mu\nu}$  (sendo que  $\mu = 0$  corresponde a  $t$  e  $\mu = 1$  a  $r$ ). Para tornar essa equivalência mais clara basta identificarmos

$$\begin{aligned}
\phi &\leftrightarrow B_0 \\
\beta &\leftrightarrow B_1 \\
\gamma + i\alpha &\leftrightarrow \Phi,
\end{aligned}$$

sendo  $B_\mu$  o campo de gauge e  $\Phi$  um campo de Higgs complexo. Nesta teoria as transformações dadas pelas eqs. (2.33) são exatamente as transformações de gauge.

Usando a teoria abeliana, Witten [14] relacionou as equações de campo deste sistema com a equação de Liouville em 2 dimensões

$$\nabla^2 f = e^{2f}.$$

Dessa forma Witten obteve soluções que descrevem qualquer número de instantons alinhados em uma reta.

## 2.5 A relação entre instantons em $\mathbb{R}^4$ e fibrados em $S^4$

Nesta seção vamos mostrar a relação entre os instantons em  $\mathbb{R}^4$  e SU(2)-fibrados sobre a esfera  $S^4$ . A partir dessa relação ficará claro a relação entre a carga topológica  $Q$  definida pela eq. (2.24) e a integral da segunda classe de Chern em  $S^4$  (ver apêndice para a definição das classes de Chern).

A esfera  $S^4$  não é contrátil a um ponto mas podemos definir dois hemisférios  $H_n$  e  $H_s$ , cada um contrátil a um ponto, tais que  $S^4 = H_n \cup H_s$ . Consideremos as coordenadas



polares de  $S^4$ :

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos \theta, \\ x_1 &= \sin \theta \sin \psi_1 \sin \psi_2 \cos \phi, \\ x_2 &= \sin \theta \sin \psi_1 \sin \psi_2 \sin \phi, \\ x_3 &= \sin \theta \sin \psi_1 \cos \psi_2, \\ x_4 &= \sin \theta \cos \psi_1, \end{aligned}$$

sendo que  $\theta$ ,  $\psi_1$  e  $\psi_2$  variam entre 0 e  $\pi$  e  $\phi$  varia entre 0 e  $2\pi$ . Definimos os hemisférios sul ( $H_s$ ) e norte ( $H_n$ ) como:

$$H_s = \left\{ x \in S^4 \mid \theta > \frac{\pi}{2} - \epsilon \right\},$$

e

$$H_n = \left\{ x \in S^4 \mid \theta < \frac{\pi}{2} + \epsilon \right\},$$

para um  $\epsilon$  positivo e suficientemente pequeno.

Estes hemisférios são subconjuntos abertos de  $S^4$  (e portanto subvariedades) e assim todo  $SU(2)$ -fibrado sobre a esfera induz um  $SU(2)$ -fibrado em cada hemisfério. Como  $H_n$  e  $H_s$  são contráteis a um ponto, os fibrados induzidos serão triviais. Qualquer impedimento para que o fibrado original (sobre  $S^4$ ) seja trivial está associada à forma como colamos os fibrados triviais sobre  $H_n$  e  $H_s$ , sendo que toda informação sobre a colagem está codificada na função de transição (ver apêndice para discussão sobre reconstrução de fibrados principais)

$$g_{ns} : H_n \cap H_s \rightarrow SU(2).$$

É fácil notar da própria definição dos hemisférios que

$$H_n \cap H_s \cong I \times S^3,$$

sendo  $I$  um intervalo aberto da reta e  $S^3$  o equador de  $S^4$ . Como o intervalo  $I$  é contrátil a um ponto vemos que esses mapas, e conseqüentemente os  $SU(2)$ -fibrados sobre  $S^4$ , são classificados pelo grupo  $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$ . Dessa forma podemos associar um inteiro  $k$  a cada fibrado.

Dado um  $SU(2)$ -fibrado  $E$  sobre  $S^4$  e uma conexão  $\omega$  (sendo  $\Omega$  a curvatura associada)

neste fibrado, temos que a segunda classe de Chern é uma 4-forma  $c_2(\Omega)$  definida na variedade base. Podemos escrever  $c_2(\Omega)$  em termos da forma local de curvatura como

$$c_2(\Omega) = \frac{1}{8\pi^2} \text{tr}(F \wedge F), \quad (2.36)$$

sendo  $F$  a forma local da curvatura da curvatura  $\Omega$ . Devido ao teorema de Chern-Weyl (ver apêndice) sabemos que se  $\omega$  e  $\omega'$  são duas conexões distintas sobre o fibrado  $E$ , então a diferença  $c_2(\Omega) - c_2(\Omega')$  é uma forma exata<sup>7</sup>. Assim, se calcularmos a integral de  $c_2$  em  $S^4$  o resultado depende apenas da estrutura do fibrado  $E$  e não da conexão utilizada. A integral de  $c_2$  na variedade base é denominada segundo número de Chern.

Como discutido no início desta seção, o fibrado  $E$  pode ser obtido colando dois  $SU(2)$ -fibrados triviais, um sobre  $H_n$  e outro sobre  $H_s$ . Sendo assim só precisamos definir os potenciais (formas locais da conexão) nestes dois abertos. Vamos denotar por  $A_n$  e  $A_s$  as 1-formas de conexão em  $H_n$  e  $H_s$ . Além disso, sabemos que  $\text{tr}(F \wedge F)$  é fechada, e portanto é exata em cada hemisfério (porém não em todo  $S^4$ ). De fato, temos (conforme discutido na seção anterior)

$$\text{tr}(F_s \wedge F_s) = dK_s = d \left[ \text{tr} \left( A_s \wedge dA_s + \frac{2}{3} A_s \wedge A_s \wedge A_s \right) \right],$$

com  $K_n$  dado por uma expressão análoga (obtida fazendo as substituições  $s \leftrightarrow n$  nos índices).

Para calcularmos a integral

$$\int_{S^4} c_2(\Omega),$$

podemos dividir  $S^4$  em duas metades separadas pelo plano  $\theta = \pi/2$ . E assim, no cálculo da integral, vamos usar a forma local  $A_n$  na semi-esfera superior,  $S^4_{(+)}$ , a forma local  $A_s$  e na semi-esfera inferior,  $S^4_{(-)}$ . Dessa forma:

$$\int_{S^4} c_2(\Omega) = - \int_{S^4_{(+)}} dK_n - \int_{S^4_{(-)}} dK_s = - \int_{S^3} K_n + \int_{S^3} K_s.$$

A segunda igualdade foi obtida usando o teorema de Stokes e levando em consideração a

<sup>7</sup>Ou seja, as formas  $c_2(\Omega)$  e  $c_2(\Omega')$  estão na mesma classe da cohomologia de de Rham de  $S^4$  [18].

diferença na orientação de cada fronteira. Temos então

$$\begin{aligned} \int_{S^4} c_2(\Omega) &= \frac{1}{8\pi^2} \left[ \int_{S^3} \text{tr} \left( F_n \wedge A_n - \frac{1}{3} A_n \wedge A_n \wedge A_n \right) + \right. \\ &\quad \left. - \int_{S^3} \text{tr} \left( F_s \wedge A_s - \frac{1}{3} A_s \wedge A_s \wedge A_s \right) \right]. \end{aligned}$$

No entanto, as duas formas locais de conexão estão relacionadas, no equador ( $S^3$ ), por

$$A_n(x) = g_{sn}^{-1} A_s g_{sn} + g_{sn}^{-1} dg_{sn},$$

e as formas locais de curvatura por

$$F_n(x) = g_{sn}^{-1} F_s g_{sn}.$$

Portanto

$$\int_{S^4} c_2(\Omega) = -\frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} \text{tr} \left( g_{sn}^{-1} dg_{sn} \wedge g_{sn}^{-1} dg_{sn} \wedge g_{sn}^{-1} dg_{sn} \right). \quad (2.37)$$

Comparando a expressão acima com a eq. (2.26) concluímos que o o segundo número de Chern em  $S^4$  é exatamente menos a classe (ou *winding number*) da função de transição do fibrado restrita ao equador. Neste sentido, esta integral classifica os tipos de  $SU(2)$  fibrados sobre  $S^4$ . Veremos que essa classificação de fibrados está diretamente relacionada aos instantons em  $\mathbb{R}^4$ .

Os resultados apresentados em [24] garantem que todo potencial (diferenciável) de Yang-Mills com ação finita em  $\mathbb{R}^4$  pode ser estendido de forma suave para a compactificação<sup>8</sup>  $\mathbb{R}^4 \cup \{\infty\} \cong S^4$ . Uma afirmação equivalente é: toda configuração de ação finita em  $\mathbb{R}^4$  da teoria de Yang-Mills pode ser obtida a partir de uma configuração em  $S^4$ .

Como para uma configuração suave o valor do integrando em um ponto não é relevante para o resultado da integração temos (fazendo as identificações necessárias)

$$Q = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \text{tr}(F \wedge F) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^4} \text{tr} F \wedge F.$$

Sendo assim, vemos que cada componente do espaço de configurações da teoria de Yang-

---

<sup>8</sup>A identificação entre a compactificação a um ponto de  $\mathbb{R}^n$  e a esfera  $S^n$  é um resultado padrão em topologia, ver por exemplo a referência [25].

Mills (que conforme visto na seção anterior são classificadas por  $Q$ ) está relacionada a uma classe de  $SU(2)$ -fibrados sobre  $S^4$ , que por sua vez são classificados pelo segundo número de Chern.

## Capítulo 3

# Instantons no espaço de Schwarzschild

Neste capítulo vamos estudar as soluções auto-duais de ação finita da teoria de Yang-Mills no espaço de Schwarzschild euclidiano e mostrar que algumas das propriedades estudadas no capítulo anterior deixam de ser válidas nesta geometria. No espaço de Schwarzschild euclidiano o tempo é compactificado e por isso podem existir configurações independentes do tempo com ação finita. A nossa abordagem nos permite recuperar todas as soluções auto-duais já conhecidas e também exibir uma nova família de instantons no espaço de Schwarzschild descobertos pelo autor desta dissertação e seu orientador [12].

### 3.1 O espaço de Schwarzschild euclidiano

A métrica de Schwarzschild é a mais conhecida (com exceção do espaço plano) solução das equações de Einstein. Ela descreve o espaço-tempo em torno de uma distribuição estática, esfericamente simétrica e não carregada de massa. Nas coordenadas de Schwarzschild,  $(t, r, \theta, \phi)$ , a métrica é dada por:

$$ds^2 = -H(r)dt^2 + H(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega, \quad (3.1)$$

com  $H(r) = (1 - \frac{2m}{r})$  e  $d\Omega$  a métrica usual em  $S^2$ .

Sabemos que a singularidade em  $r = 2m$  se deve apenas a uma escolha de coordenadas e que a única singularidade física desta métrica é  $r = 0$ . A extensão para a região  $r \leq 2m$

é obtida usando as coordenadas de Kruskal [19, 26], que são definidas implicitamente pelas equações:

$$\left(\frac{r}{2m} - 1\right) e^{r/2m} = X^2 - T^2, \quad (3.2a)$$

$$\frac{X + T}{X - T} = e^{t/2m}. \quad (3.2b)$$

Usando estas coordenadas a métrica é escrita como

$$ds^2 = \frac{32m^3 e^{-r/2m}}{r} (-dT^2 + dX^2) + r^2 d\Omega. \quad (3.3)$$

Para obtermos a métrica no caso euclidiano, fazemos uma rotação de Wick:  $t = i\tau$  em coordenadas de Schwarzschild e  $T = i\mathcal{T}$  em coordenadas de Kruskal. As equações para as coordenadas de Kruskal após a rotação são:

$$\left(\frac{r}{2m} - 1\right) e^{r/2m} = X^2 + \mathcal{T}^2, \quad (3.4a)$$

$$\frac{X + i\mathcal{T}}{X - i\mathcal{T}} = e^{2\arg(X+i\mathcal{T})} = e^{i\tau/2m}. \quad (3.4b)$$

Segue diretamente da primeira equação que as coordenadas de Kruskal, no caso euclidiano, só estão definidas para  $r \geq 2m$ . Dessa forma, a extensão da solução neste caso não pode ser feita para a região  $0 < r < 2m$ . Na segunda equação  $\arg(X + i\mathcal{T})$  varia de 0 a  $2\pi$ , que são identificados, e sendo assim  $\tau$  varia entre 0 e  $8\pi m$ , sendo que estes pontos conseqüentemente devem ser identificados. Ou seja, no caso euclidiano o tempo é uma coordenada periódica com período  $8\pi m$ .

Uma outra maneira de mostrar que o tempo é uma coordenada periódica é estudar o comportamento da métrica de Schwarzschild euclidiana próximo a  $r = 2m$  em coordenadas de Schwarzschild. A métrica é

$$ds^2 = H(r)d\tau^2 + H(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega.$$

Na região  $r \geq 2m$  vamos procurar coordenadas  $(\alpha, R)$  tais que  $Rd\alpha = H(r)^{1/2}d\tau$  e  $dR = H(r)^{-1/2}dr$ . Fazendo essa mudança de coordenadas os dois primeiros termos da métrica são reescritos como  $R^2 d\alpha^2 + dR^2$ , que coincide com a expressão da métrica do espaço plano 2 dimensional em coordenadas polares. Sendo assim, para que  $R = 0$  não represente uma singularidade cônica,  $\alpha$  deve ser periódica com período  $2\pi$ , que é exatamente o esperado de

uma coordenada angular em coordenadas polares. Vamos então encontrar  $R$  e  $\alpha$  na região em torno de  $r = 2m$ :

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{H(r)^{1/2}}{R} \approx \sqrt{H'(2m)(r-2m)}/R,$$

$$\frac{dR}{dr} = H(r)^{-1/2} \approx \frac{1}{\sqrt{H'(2m)}}(r-2m)^{-1/2}.$$

E assim temos

$$R \approx 2 \left( \frac{r-2m}{H'(2m)} \right)^{1/2} = \sqrt{8m(r-2m)}, \quad (3.5a)$$

$$\alpha \approx \frac{H'(2m)}{2} \tau = \frac{1}{4m} \tau, \quad (3.5b)$$

onde a linha indica derivada em relação a  $r$ .

Como  $\alpha$  é periódica, com período  $2\pi$ , temos que  $\tau$  também é periódica, com período  $8\pi m$ . Usando essas coordenadas fica claro que, topologicamente, o espaço de Schwarzschild euclidiano é  $\mathbb{R}^2 \times S^2$ , onde  $\mathbb{R}^2$  está relacionado às coordenadas  $(\tau, r)$ , ou  $(\alpha, R)$ , e  $S^2$  as coordenadas  $(\theta, \phi)$ . Como todo  $SU(2)$  fibrado sobre  $\mathbb{R}^2 \times S^2$  é trivial<sup>1</sup> podemos considerar um potencial de gauge definido globalmente ao estudarmos a teoria de Yang-Mills no espaço de Schwarzschild Euclidiano.

### 3.2 O Ansatz

Usando as coordenadas  $x^\mu = (\tau, r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$ , vamos buscar uma solução partindo do mesmo ansatz esfericamente simétrico que foi usado no caso plano (ver eq. (2.32)):

$$A = \frac{\sigma_a}{2i} \left[ \phi(\tau, r) \frac{x^a}{r} d\tau + \beta(\tau, r) \frac{x^a x^c}{r^2} dx^c + (\gamma(\tau, r) - 1) \epsilon_{abc} \frac{x^b}{r} d \left( \frac{x^c}{r} \right) + \alpha(\tau, r) d \left( \frac{x^a}{r} \right) \right]. \quad (3.6)$$

Este ansatz possui uma simetria  $U(1)$  análoga ao caso plano, e as eqs. (2.33) continuam válidas. Sendo assim podemos usar esta simetria e escolher um gauge em que  $\beta(\tau, r) = 0$ .

Em consequência da natureza polar das coordenadas  $(\tau, r)$ , devemos fazer algumas imposições sobre as funções  $\phi$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\alpha$  para que um potencial dado pela expressão acima

<sup>1</sup>Como  $\mathbb{R}^2 \times S^2$  pode ser deformado em  $S^2$  basta considerarmos os fibrados sobre  $S^2$  [27].

seja regular em todo o espaço de Schwarzschild. Todas as funções do ansatz devem ser periódicas em  $\tau$  (com período  $8\pi m$ ), e no limite  $r \rightarrow 2m$  devemos impor que  $\phi \rightarrow 0$  e que todas as outras funções se tornem independentes de  $\tau$ .

Uma consequência importante da diferença entre a topologia do espaço de Schwarzschild e do espaço plano (ambos euclidianos) é que no primeiro o tempo é compactificado e por isso podem existir configurações independentes do tempo com ação finita, o que é claramente impossível no espaço plano devido a integral no tempo divergir para este tipo de configuração. Vamos, por simplicidade, nos restringir a potenciais independentes do tempo, e neste caso as equações de auto-dualidade  $F = \star F$  se reduzem a:

$$\phi' = \frac{1}{r^2} (1 - \gamma^2 - \alpha^2), \quad (3.7a)$$

$$A_0 \gamma = -H(r)\gamma', \quad (3.7b)$$

$$A_0 \alpha = -H(r)\alpha'. \quad (3.7c)$$

De onde temos imediatamente que

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\alpha'}{\alpha},$$

e sendo assim  $\gamma(r) = c_1 \eta(r)$  e  $\alpha(r) = c_2 \eta(r)$ . Podemos usar então as eqs. (2.33) com  $f = cte$  para eliminar  $\gamma$ . Dessa forma temos uma expressão simplificada do ansatz:

$$A = \frac{\sigma_a}{2i} \left[ \phi(\tau, r) \frac{x^a}{r} d\tau - \epsilon_{abc} \frac{x^b}{r} d \left( \frac{x^c}{r} \right) + \alpha(\tau, r) d \left( \frac{x^a}{r} \right) \right]. \quad (3.8)$$

Fazendo uma transformação de gauge (singular) dada por

$$U = \exp(-i\varphi\sigma_3/2) \exp(-i\theta\sigma_2/2),$$

obtemos o ansatz usado em [11, 12]:

$$A = \alpha(r) d\theta \frac{\sigma_1}{2i} + \alpha(r) \sin \theta d\varphi \frac{\sigma_2}{2i} + (\cos \theta d\varphi + \phi(r) d\tau) \frac{\sigma_3}{2i}. \quad (3.9)$$

Para o potencial dado pela expressão acima as equações de auto-dualidade se reduzem



a

$$\alpha'(r) = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \alpha(r) \phi(r), \quad (3.10a)$$

$$\phi'(r) = \frac{1 - \alpha^2(r)}{r^2}. \quad (3.10b)$$

O mesmo resultado seria obtido substituindo  $\gamma = 0$  nas eqs. (3.7). Segue imediatamente das eqs. (3.10) que  $\phi$  deve satisfazer a equação diferencial ordinária (EDO) de segunda ordem

$$\frac{r}{2}(r - 2m)\frac{d^2\phi}{dr^2} + (r - 2m)\frac{d\phi}{dr} - \phi + r^2\frac{d\phi}{dr}\phi = 0, \quad (3.11)$$

e que  $\alpha$  é dado, em termos de  $\phi$ , por

$$\alpha^2(r) = 1 - r^2\phi'(r). \quad (3.12)$$

Devemos notar que a equação acima impõe uma restrição nas soluções da eq. (3.11), pois  $\alpha$  deve ser uma função real para que  $A$  tome valores em  $\mathfrak{su}(2)$ .

A densidade lagrangiana para um potencial auto-dual da forma (3.9) é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi^2} \text{tr}(F \wedge \star F) = \frac{1}{8\pi^2} \text{tr}(F \wedge F) = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{\partial}{\partial r} [(1 - \alpha^2)\phi] d\tau \wedge dr \wedge d\Omega, \quad (3.13)$$

e a ação euclidiana correspondente

$$S = -\frac{1}{8\pi^2} \int_M \text{tr}(F \wedge \star F) = 4m [(1 - \alpha^2)\phi] \Big|_{2m}^{\infty}. \quad (3.14)$$

Conforme veremos nas próximas seções, as soluções em que estaremos interessados satisfazem  $\alpha(2m) = \alpha(\infty) = 0$ <sup>2</sup>, ou então  $\alpha(2m) = \phi(\infty) = 0$  e, e em ambos os casos a eq. (3.14) pode ser reescrita como

$$S = 4m [\phi(\infty) - \phi(2m)]. \quad (3.15)$$

Podemos também, seguindo uma abordagem semelhante a de [28], definir um campo

---

<sup>2</sup>A expressão  $\alpha(\infty)$  consiste em um abuso de linguagem para  $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r)$ .

tensorial U(1) a partir do nosso potencial (ver também a discussão sobre cargas em [29, 30]):

$$f_{\mu\nu} = -i \operatorname{tr} [\sigma_3 (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)].$$

Substituindo a expressão para o potencial temos:

$$f^{0i} = \phi'(r) \frac{x^i}{r}, \quad (3.16a)$$

$$\star f^{0i} = \frac{x^i}{r^3}. \quad (3.16b)$$

Identificando esse campo tensorial com um campo eletromagnético, pois ambos estão associados ao mesmo grupo de gauge, temos que todas as configurações dadas pelo ansatz (3.9) têm carga magnética unitária (com a normalização de carga escolhida). De acordo com a eq. (3.16a) vemos que a existência e valor da carga elétrica destas configurações depende do comportamento assintótico de  $\phi(r)$ .

### 3.3 As soluções

#### 3.3.1 Regularidade das soluções

É imediato encontrar três soluções para as eqs. (3.10):

- i.  $\phi(r) = 0$ ,  $\alpha(r) = 1$ . Neste caso,  $S = 0$ .
- ii.  $\phi(r) = -\frac{m}{r^2}$ ,  $\alpha^2(r) = 1 - \frac{2m}{r}$ . Neste caso,  $S = 1$ .
- iii.  $\phi(r) = c - \frac{1}{r}$ , sendo  $c$  uma constante, e  $\alpha(r) = 0$ . Neste caso,  $S = 2$ .

A primeira solução descreve uma configuração trivial. As outras duas, quando reescritas na forma regular, dada pela eq.(3.6), correspondem aos instantons de Charap e Duff [10], e foram os primeiros instantons descobertos nesta geometria. Além disso, de acordo com as eqs. (3.16), estas soluções correspondem a um monopolo magnético e um dyon [32] respectivamente, conforme observado em [29]. É fácil notar que a terceira solução está definida numa direção fixa em  $\mathfrak{su}(2)$  e por isso corresponde a uma configuração abeliana [31].

De acordo com a seção anterior, a solução iii (para  $c \neq 1/2m$ ) e ii não são regulares, pois  $\phi(2m) \neq 0$  em ambos os casos. No entanto, a imposição  $\phi(r) \rightarrow 0$  para  $r \rightarrow 2m$  pode

ser relaxada, sem prejuízos ao procedimento descrito na seção anterior, se estivermos interessados em soluções com dependência temporal trivial<sup>3</sup>. Dada uma solução da eq.(3.11) com  $\phi(2m) = C \neq 0$ , podemos reescrever o potencial na sua forma regular, eq.(3.6), e usar uma transformação de gauge com  $U = \exp(iCt x^a \sigma_a / 2r)$  para obtermos uma configuração equivalente, porém com  $\tilde{\phi}(2m) = 0$ . No entanto, as novas funções  $\tilde{\gamma}(\tau, r) = \alpha(r) \sin(Ct)$  e  $\tilde{\alpha}(\tau, r) = \alpha(r) \cos(Ct)$  só terão período  $8\pi m$  se  $\phi(2m)$  satisfizer a relação

$$\phi(2m) = p/4m, \quad p \in \mathbb{Z}. \quad (3.17)$$

Concluimos assim que, soluções da eq. (3.11) que satisfaçam a relação acima estarão associadas a potenciais de gauge regulares desde que  $\alpha(2m) = 0$ . Ainda, uma rápida inspeção na solução abeliana mostra que esta é da forma

$$\phi(r) = \frac{p+2}{4m} - \frac{1}{r},$$

para qualquer  $p \in \mathbb{Z}$ . Sendo assim, dado  $p \in \mathbb{Z}$ , existe sempre ao menos uma solução que satisfaz  $\phi(2m) = p/4m$ .

### 3.3.2 Soluções em série

Vamos buscar uma solução da eq. (3.11) em torno de  $r = 2m$  na forma de uma série de potências

$$\phi(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (r - 2m)^k,$$

com  $a_0 = p/4m$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ , de acordo com a eq. (3.17). Substituindo a expressão em série na eq. (3.11) temos duas situações distintas:

**$p > 0$ :** todos os coeficientes podem ser determinados por uma relação de recorrência não-linear. Neste caso o método fornece uma única solução, que é a abeliana.

**$p \leq 0$ :** temos uma situação bem mais interessante. Os coeficientes  $a_k$  com  $k < -p + 1$  são determinados a partir da relação de recorrência, porém essa relação não fixa o valor de  $a_{-p+1}$ . Este coeficiente serve como um parâmetro livre a partir do qual todos

---

<sup>3</sup>Por trivial queremos dizer que consiste em uma rotação com velocidade angular constante no “plano” definido pelas funções  $\gamma$  e  $\alpha$ .

os coeficientes com  $k > -p + 1$  podem ser determinados. Temos dessa forma uma família de soluções parametrizadas pelo coeficiente  $a_{-p+1}$  para cada  $p \leq 0$ .

Apesar de o método da série de potências fornecer soluções da eq. (3.11), estas soluções são apenas locais (válidas apenas na vizinhança de  $r = 2m$ ). Estamos interessados em soluções globais,  $r \in [2m, \infty)$ , desta equação que satisfaçam  $\alpha^2(r) \geq 0$  e com ação finita. Temos fortes evidências numéricas de que, com exceção da solução abeliana, todas as soluções da eq. (3.11) com  $p \leq -2$  divergem para  $r \rightarrow \infty$  ou estão associadas a  $\alpha$  com valores imaginários em algum ponto<sup>4</sup>. É fácil verificar que as soluções com  $p = 0$  correspondem ao caso estudado em [11], no qual os autores, usando uma abordagem totalmente diferente da apresentada neste trabalho e que só vale para o caso  $p = 0$ , apresentam uma família de soluções auto-duais com ação variando de 0 a 2. Sendo assim, no restante deste capítulo vamos nos concentrar no estudo de soluções da família  $p = -1$ .

É fácil mostrar que as soluções com  $p = 0$  e  $p = -1$  têm comportamentos bastante distintos. Examinando o comportamento de  $\alpha(r)$  em torno de  $r = 2m$  vemos que, no primeiro caso  $\alpha(r) \approx c_1 + c_2(r - 2m)$  e no segundo  $\alpha(r) \approx c_3(r - 2m)^{1/2}$ , onde  $c_i$  são constantes que caracterizam as soluções dentro das respectivas famílias. Mais especificamente, pode-se mostrar que as soluções pertencentes às famílias  $p = 0$  e  $p = -1$  não são equivalentes de gauge, a não ser no caso das soluções abelianas (que são todas relacionadas por transformações de gauge). Para verificar isto basta substituir a expansão em série correspondente as soluções de cada família na expressão (3.13), que é invariante por transformações de gauge, e comparar os termos de ordem mais baixa na série de potências obtida.

### A família $p=-1$

Para  $a_0 = -1/4m$  segue diretamente da relação de recorrência que  $a_1 = \phi'(2m) = \frac{1}{4m^2}$ . Usando  $s = r - 2m$ , os primeiros termos da solução em série são dados por

$$\phi_\kappa(s + 2m) = -\frac{1}{4m} + \frac{s}{4m^2} + \frac{\kappa}{16m^3} s^2 - \frac{\kappa + 1}{16m^4} s^3 - \frac{\kappa^2 - 7\kappa - 10}{256m^5} s^4 + \mathcal{O}(s^5), \quad (3.18)$$

onde introduzimos o parâmetro adimensional  $\kappa$  dado por  $\kappa = 16m^3 a_2$ .

Pode-se mostrar, diretamente da relação de recorrência satisfeita por  $a_k$ , que:

---

<sup>4</sup>Os resultados que serão apresentados na seção 4.4 corroboram estas evidências.

1. para  $\kappa = -3$ , temos  $\phi_{-3}(r) = -\frac{m}{r^2}$ , que é a já mencionada solução de Charap e Duff com  $S = 1$ ;
2. para  $\kappa = -2$ , temos  $\phi_{-2}(r) = \frac{1}{4m} - \frac{1}{r}$ , que é a já mencionada solução de Charap e Duff com  $S = 2$ .

No entanto, conforme discutido anteriormente, o método da série de potências fornece apenas uma solução local. De acordo com os resultados que serão apresentados na seção 3.4 o raio de convergência para as soluções obtidas é, em geral, no máximo  $2m$ . Sendo assim esse método não é suficiente para calcular a ação associada a cada  $\phi_\kappa$ , e nem mesmo para determinar se a esta é finita. Para responder essas questões precisamos estudar as propriedades globais das soluções, conforme faremos a seguir. No fim deste capítulo também apresentaremos um método que permite expressar estas soluções como uma série em uma nova variável, mas neste caso com raio de convergência aparentemente infinito.

Apesar de suas limitações, podemos usar a solução obtida pelo método da série de potências para gerar valores  $\phi_\kappa(2m + \epsilon)$  e  $\phi'_\kappa(2m + \epsilon)$ , com  $\epsilon$  positivo e suficientemente pequeno, e integrar numericamente a eq.(3.11) a partir destes valores. Note que não podemos integrar numericamente a partir de  $r = 2m$  pois este não é um ponto regular da EDO. A figura 3.1 mostra algumas soluções obtidas desta forma. As curvas destacadas correspondem às soluções de Charap e Duff [10].

A figura 3.1 sugere que:

1. soluções com  $\kappa < -3$  (abaixo da curva destacada inferior) não são limitadas, e assim a ação associada não é finita (cf eq.(3.15));
2. soluções com  $-3 < \kappa < -2$  (entre as curvas destacadas) interpolam entre as soluções de Charap e Duff;
3. soluções com diferentes valores de  $\kappa$  não se intersectam.

Vamos provar que as soluções de interesse são exatamente as com  $\kappa \in (-3, -2)$ . Neste caso  $\phi_\kappa$  está associado a um potencial auto-dual regular, via eq. (3.6), com ação finita que interpola entre os instantons de Charap e Duff.

### 3.3.3 Ação finita

Para provarmos que existem soluções de ação finita na família  $p = -1$  começamos notando uma propriedade local de  $\phi_\kappa$  que segue diretamente da expansão em série (3.18):

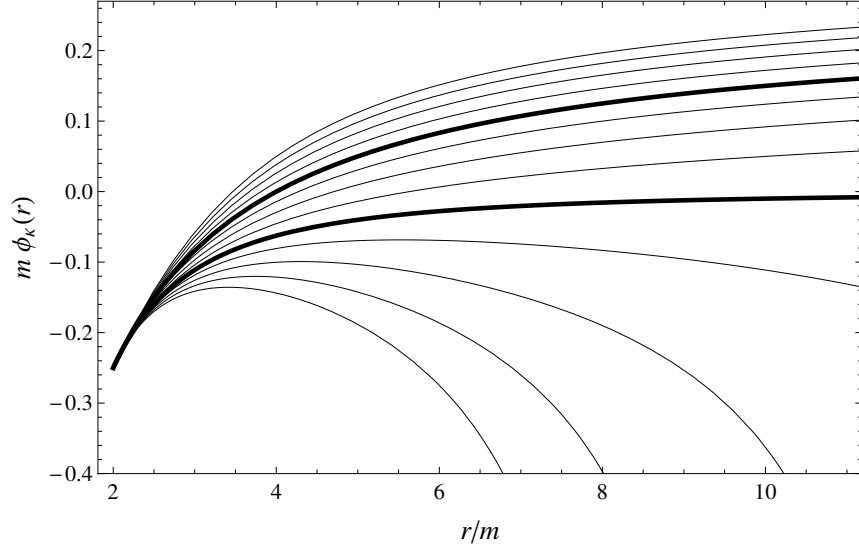


Figura 3.1: Gráficos de  $\phi_\kappa(r)$  para  $\kappa$  variando de  $-4$  (curva inferior) a  $-1$  (curva superior) em intervalos iguais. As curvas destacadas correspondem às soluções de Charap e Duff ( $\kappa = -3$  para a curva destacada inferior e  $\kappa = -2$  para a curva destacada superior).

para  $r - 2m \ll 1$  temos

$$\phi_{\kappa_1}(r) < \phi_{\kappa_2}(r), \quad (3.19a)$$

$$\phi'_{\kappa_1}(r) < \phi'_{\kappa_2}(r). \quad (3.19b)$$

Sendo assim, os gráficos de  $\phi_\kappa$  com valores distintos de  $\kappa$  não se cruzam para  $r$  suficientemente próximo de  $2m$ . Na verdade, um estudo mais detalhado da equação diferencial (3.11) nos dá um resultado muito mais forte, cuja prova será apresentada na próxima seção: se  $\kappa_1 < \kappa_2 \leq -2$  então

$$\phi_{\kappa_1}(r) < \phi_{\kappa_2}(r) \quad \forall r \in (2m, \infty), \quad (3.20a)$$

$$\phi'_{\kappa_1}(r) < \phi'_{\kappa_2}(r) \quad \forall r \in (2m, \infty). \quad (3.20b)$$

As equações acima mostram que, se  $\kappa \leq -2$ , gráficos correspondentes a  $\phi_\kappa(r)$  com valores de  $\kappa$  distintos não se cruzam. Note que isso não é verdade para soluções gerais da eq. (3.11), pois se trata de uma EDO de segunda ordem. Ainda, a eq. (3.20b) mostra

que  $\phi_\kappa(r) < 1/r^2$  se  $\kappa < -2$ , o que garante (vide eq. (3.12)) que  $\alpha_\kappa$  é real se  $\kappa < -2$ . Vamos usar as eqs (3.20) para estudar o comportamento assintótico de  $\phi$  e assim provar que existem soluções de ação finita na família  $p = -1$ .

### Expressão assintótica de $\phi_\kappa$

Escolhendo um valor fixo  $\kappa \in (-3, -2)$  e usando  $\kappa_1 = -3$  na eq.(3.20b) temos

$$2m/r^3 < \phi'_\kappa(r),$$

ou seja, a derivada de  $\phi_\kappa$  é sempre positiva e portanto  $\phi_\kappa(r)$  é uma função monótona crescente. Por outro lado, da eq. (3.20a) temos

$$\phi_{-3}(r) < \phi_\kappa(r) < \phi_{-2}(r), \quad (3.21)$$

e assim  $\phi_\kappa(r)$  é limitada. Como  $\phi_\kappa$  é uma função contínua, monótona e limitada, o limite

$$C_\kappa = \lim_{r \rightarrow \infty} \phi_\kappa(r) \quad (3.22)$$

existe. A desigualdade (3.21) restringe  $C_\kappa$  ao intervalo  $(0, 1/4m)$ , se  $\kappa \in (-3, -2)$ . Vamos agora usar o limite  $C_\kappa$  para estudar a forma assintótica da eq. (3.11) e assim obter a expressão assintótica das soluções  $\phi_\kappa$ .

Para  $\kappa \in (-3, -2)$  definimos

$$f_\kappa(r) = \phi_\kappa(r) - \left( C_\kappa - \frac{1}{r} \right), \quad (3.23)$$

e da eq. (3.22) segue imediatamente que  $f_\kappa(r) \rightarrow 0$  para  $r \rightarrow \infty$ . Substituindo  $\phi_\kappa$  em função de  $f_\kappa$  na eq.(3.11) obtemos

$$r(r-2m) \frac{d^2 f_\kappa}{dr^2} + 2[-2m + r^2(C_\kappa + f_\kappa)] \frac{df_\kappa}{dr} = 0.$$

Como  $f_\kappa \rightarrow 0$  para  $r$  suficientemente grande, temos a seguinte equação para a forma assintótica de  $f_\kappa$

$$\frac{d^2 f_\kappa^{(\infty)}}{dr^2} + 2C_\kappa \frac{df_\kappa^{(\infty)}}{dr} = 0.$$

A solução desta equação que se anula no infinito é

$$f_{\kappa}^{(\infty)}(r) = \lambda \frac{e^{-2C_{\kappa}r}}{2C_{\kappa}},$$

sendo  $\lambda$  uma constante de integração.

Podemos então usar a eq.(3.23) para determinar o comportamento assintótico de  $\phi_{\kappa}$

$$\phi_{\kappa}(r) \approx C_{\kappa} - \frac{1}{r} + \lambda \frac{e^{-2C_{\kappa}r}}{2C_{\kappa}} \quad (r \gg 1). \quad (3.24)$$

O comportamento assintótico de  $\alpha_{\kappa}$  é dado por

$$\alpha_{\kappa}^2(r) = 1 - r^2 \phi'_{\kappa}(r) \approx \lambda r^2 e^{-2C_{\kappa}r} \quad (r \gg 1).$$

Concluimos então que, para  $\kappa \in (-3, -2)$ ,  $\alpha_{\kappa} \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow \infty$  e podemos usar a eq. (3.15) para calcular a ação. Como  $C_{\kappa} \in (0, 1/4m)$  vemos que a ação está restrita a valores entre 1 e 2.

Vemos ainda, substituindo a expressão 3.24 na eq. (3.16), que todas as configurações com  $\kappa \in (-3, -2)$  tem carga elétrica unitária e, como também possuem carga magnética, correspondem a dyons.

A figura 3.2 mostra um subconjunto das soluções numéricas obtidas com  $\kappa$  variando de  $-3$  a  $-2$ . Pode-se observar que estas soluções são crescentes e não se intersectam, o que está de acordo com os resultados das eqs. (3.20). Também vemos que estas soluções interpolam entre as soluções de Charap e Duff.

**Observação:** Todos os resultados que nos permitiram concluir que as soluções apresentadas possuem ação finita podem ser adaptados para o caso  $p = 0$ , estudado em [11]. Para isso basta fazermos as substituições

$$\begin{aligned} \phi_{-3}(r) &\rightarrow 0, \\ \phi_{-2}(r) &\rightarrow \frac{1}{2m} - \frac{1}{r}, \end{aligned}$$

na eq. (3.21). Seguindo um procedimento análogo ao desenvolvido nesta seção mostraríamos que as soluções desta família interpolam entre as soluções  $\phi = 0$  e a abeliana, e que a ação associada a estas soluções varia de 0 a 2.



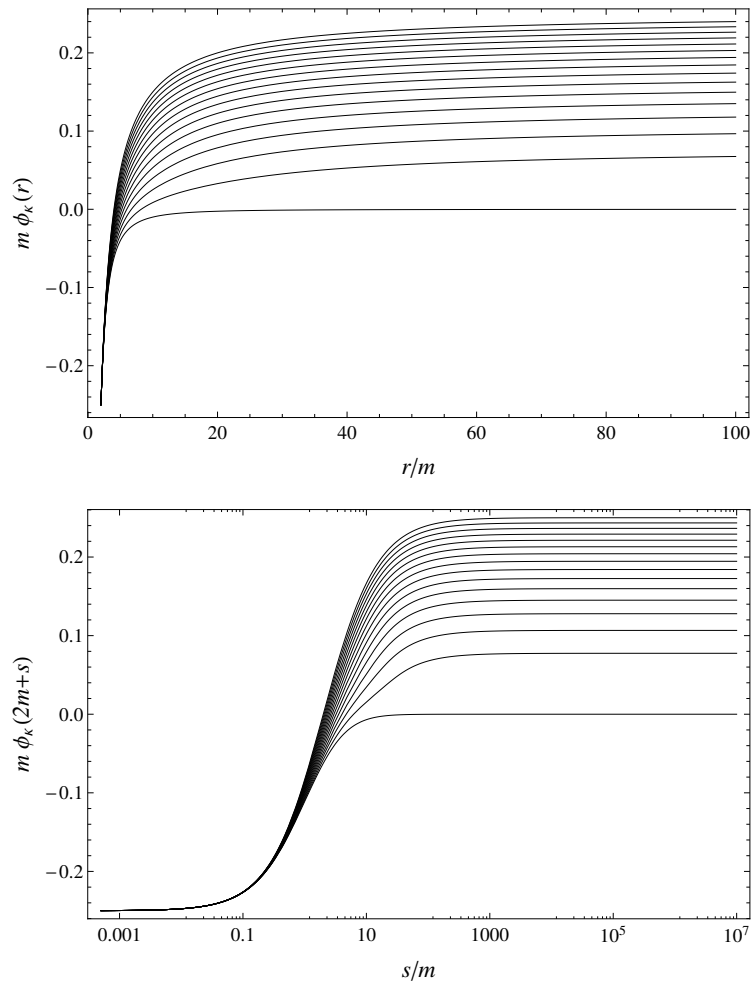


Figura 3.2: *Figura de cima:* Gráficos de  $\phi_\kappa(r)$  como função de  $r$  para  $\kappa$  variando uniformemente entre  $\kappa = -3$  (curva inferior) e  $\kappa = -2$  (curva superior). *Figura de baixo:* Gráficos semilog de  $\phi_\kappa(s + 2m)$  como função de  $s$  associados aos mesmos valores de  $\kappa$  da figura de cima.

**A ação da família  $p=-1$** 

Após esta observação voltamos agora a tratar apenas da família  $p = -1$ . Usando a eq. (3.20a) para  $R > 2m$  temos

$$\frac{m}{R^2} < \phi_\kappa(\infty) - \phi_\kappa(R) < \frac{1}{R},$$

e assim

$$\phi_\kappa(R) + \frac{m}{R^2} < \phi_\kappa(\infty) < \phi_\kappa(R) + \frac{1}{R}.$$

Essa expressão nos permite fazer estimativas com precisão arbitrariamente grande para a ação de soluções com  $\kappa \in (-3, -2)$  usando a eq. (3.15)

$$S_\kappa = 1 + 4m \phi_\kappa(\infty).$$

De fato, usando dados da figura 3.2 já obtemos estimativas com erro da ordem de  $10^{-6}$  para a ação destas soluções.

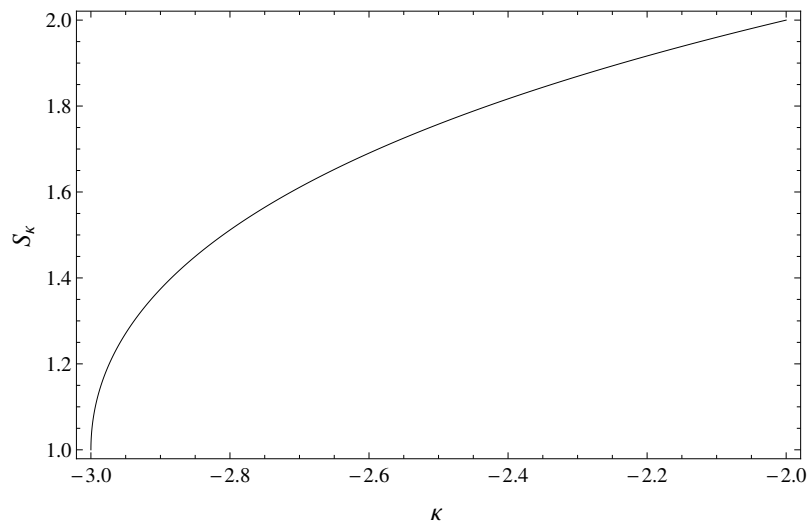


Figura 3.3: Ação  $S_\kappa$  (associada com  $\phi_\kappa$ ) como uma função de  $\kappa$ .

A figura 3.3 ilustra como a ação depende do parâmetro  $\kappa$ . Vemos da figura que a ação varia continuamente entre 1 (solução tipo monopolo) e 2 (solução abeliana). Notamos aqui uma grande diferença em relação ao caso plano no qual a ação só assume valores discretos.

Isso não deve ser surpresa uma vez que os argumentos que levaram a quantização da ação no caso plano dependem da topologia deste espaço que é diferente do caso tratado neste capítulo conforme discutido no fim da seção 3.1.

### 3.3.4 Prova das propriedades (3.20)

Vamos apresentar a demonstração de que as eqs. (3.20) são válidas para  $\kappa_1 < \kappa_2 \leq -2$ . Primeiro provamos que, se  $\kappa < -2$ , então:

$$\phi'_\kappa(r) < \frac{1}{r^2} = \phi'_{-2}(r) \quad \forall r \in (2m, \infty). \quad (3.26)$$

Podemos demonstrar essa relação diretamente do teorema de unicidade para EDOs. A eq. (3.19b) mostra que essa relação é válida para  $r - 2m \ll 1$ , e para que ela deixe de ser válida deve existir um ponto  $r_0 > 2m$  tal que  $\phi'_\kappa(r_0) = \frac{1}{r_0^2}$ . Definindo

$$g(r) = \left[ \phi_\kappa(r_0) + \frac{1}{r_0} \right] - \frac{1}{r},$$

temos que  $g(r)$  satisfaz o mesmo problema de valor inicial que  $\phi_\kappa(r)$ . Pelo teorema de unicidade de EDOs teríamos  $g(r) = \phi_\kappa(r)$ , e assim  $\kappa = -2$  (vide eq. (3.18)), o que contradiz nossa hipótese concluindo assim a demonstração.

Prosseguimos demonstrado que, se  $\kappa_1 < \kappa_2 \leq -2$ , então

$$\phi'_{\kappa_1}(r) < \phi'_{\kappa_2}(r) \quad \forall r \in (2m, \infty). \quad (3.27)$$

Conforme visto na seção anterior, essa relação vale para  $r - 2m \ll 1$  (ver eq. (3.19b)). Suponha que exista  $r \in (2m, \infty)$  tal que  $\phi'_{\kappa_1}(r) = \phi'_{\kappa_2}(r)$ , e seja  $r_0$  o menor valor de  $r$  tal que valha essa relação. Como  $\phi'_\kappa$  é contínuo, temos

$$\phi'_{\kappa_1}(r) < \phi'_{\kappa_2}(r) \quad \forall r \in (2m, r_0). \quad (3.28)$$

Integrando ambos os lados desta equação de  $2m$  até  $r$  obtemos

$$\phi_{\kappa_1}(r) < \phi_{\kappa_2}(r) \quad \forall r \in (2m, r_0], \quad (3.29)$$

onde usamos que  $\phi_\kappa(2m) = -1/4m$  para todo  $\kappa$ .

Por outro lado, a partir da eq. (3.11) temos

$$\frac{1}{2}(r_0 - 2m)(\phi''_{\kappa_2} - \phi''_{\kappa_1})(r_0) + r_0 \left( \phi'_{\kappa_1}(r_0) - \frac{1}{r_0^2} \right) (\phi_{\kappa_2} - \phi_{\kappa_1})(r_0) = 0, \quad (3.30)$$

pois estamos supondo que  $(\phi'_{\kappa_1} - \phi'_{\kappa_2})(r_0) = 0$ . Segue diretamente das eqs. (3.26) e (3.29) que  $(\phi''_{\kappa_2} - \phi''_{\kappa_1})(r_0) > 0$ , i.e.,  $\frac{d}{dr}(\phi'_{\kappa_2} - \phi'_{\kappa_1})(r_0) > 0$ . Sendo assim  $\phi'_{\kappa_2}(r_0 - \epsilon) < \phi'_{\kappa_1}(r_0 - \epsilon)$  para  $\epsilon$  positivo e suficientemente pequeno. Isso contradiz a eq. (3.29) e portanto não existe tal  $r_0$ . Provamos assim a relação. (3.27).

Por fim, integrando a eq. (3.27) de  $2m$  a  $r$  segue imediatamente que, para  $\kappa_1 < \kappa_2 \leq -2$ ,

$$\phi_{\kappa_1}(r) < \phi_{\kappa_2}(r) \quad \forall r \in (2m, \infty). \quad (3.31)$$

O que conclui a prova das eqs. (3.20).

### 3.4 Expressão analítica para $\phi$

Nas seções anteriores mostramos que existe uma nova família de instantons na teoria de Yang-Mills no espaço de Schwarzschild euclidiano que interpola as soluções de Charap e Duff. Entretanto, fora da região  $r \approx 2m$ , estes potenciais só foram obtidos numericamente. Nesta seção vamos utilizar o método do mapa conforme, introduzido em [33, 34], para escrever  $\phi_\kappa$  como uma série de potências, cujo raio de convergência é, ao menos de acordo com nossas investigações numéricas, infinito.

O método do mapa conforme se baseia no fato de que, se uma função existe e não apresenta singularidades no seu domínio, porém sua expansão em série de potências possui raio de convergência finito, isto está associado a singularidades na extensão analítica desta função para o plano complexo. No entanto, como no domínio da função não existem singularidades, deve haver um setor angular no plano complexo, contendo o domínio da função, no qual a continuação analítica da função não possui singularidades. Se fizermos uma mudança de coordenadas  $r \rightarrow \omega$ , de modo que este setor angular seja mapeado no disco unitário ( $\omega \leq 1$ ), nesta nova variável a função pode ser escrita como uma série de potências com raio de convergência 1 (o leitor é remetido a [33, 34] para uma explicação mais detalhada deste método).

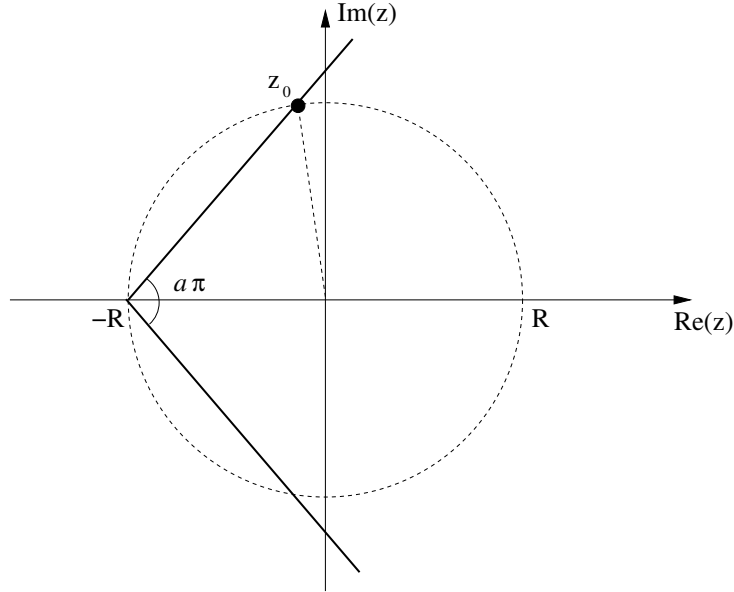


Figura 3.4: Figura ilustrando o método do mapa conforme. Na figura,  $z_0$  representa a primeira singularidade da continuação analítica da função de interesse para o plano complexo.

Em termos da variável transladada  $s = r - 2m$ , definimos a nova variável

$$s \rightarrow \omega = \frac{(1 + s/R)^{1/a} - 1}{(1 + s/R)^{1/a} + 1}, \quad (3.32)$$

onde  $R$  e  $a$ , cujos significados estão representado na figura 3.4, devem ser escolhidos de modo a evitar a primeira singularidade na continuação analítica de  $\phi(s)$ . Não existe um procedimento sistemático para determinar  $R$  e  $a$ , mas verificamos que a escolha  $R = m$  e  $a = 1$ , além de simplificar sensivelmente a equação para  $\phi$ , aparentemente fornece um raio de convergência infinito para a série de potências (evidências disso serão mostrada a seguir). Com esta escolha de  $R$  e  $a$  a transformação é simplesmente

$$\omega(r) = 1 - \frac{2m}{r}, \quad (3.33)$$

com inversa

$$r(\omega) = \frac{2m}{1 - \omega}. \quad (3.34)$$

Nas novas variáveis a eq. (3.11) é reescrita como

$$(\omega - 1)^2 \omega \frac{d^2 \psi}{d\omega^2} + 4m\psi \frac{d\psi}{d\omega} - 2\psi = 0, \quad (3.35)$$

onde  $\psi(\omega) = \phi(r(\omega))$ . É fácil mostrar que as soluções de Charap e Duff são polinômios em  $\omega$  de grau 1 (abeliana) e 2 (monopolo). Sendo assim, a nova família de soluções apresentada na seção anterior, nesta variável, interpola entre uma reta e uma parábola.

Vamos escrever as soluções da eq. (3.35) como uma série de potências em  $\omega$ . Conforme já discutido, estamos interessados em soluções que satisfazem  $\phi(2m) = \psi(0) = -\frac{1}{4m}$ . Dessa forma, se  $\psi(\omega) = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \omega^{n+\lambda}$ , temos  $\lambda = 0$  e  $b_0 = -\frac{1}{4}$ . Substituindo a solução em série na eq. (3.35) obtemos  $b_1 = \frac{1}{2}$ ,  $b_2$  fica indeterminado e  $b_3 = 0$ . A relação entre  $b_2$  e  $\kappa$  é facilmente obtida,  $b_2 = \frac{\kappa+2}{4}$ . Todos os outros coeficientes  $b_{n+1}$ , com  $n \geq 3$ , são determinados pela relação

$$b_{n+1} = \frac{2b_n [n(n-1) + 1] - b_{n-1}(n-1)(n-2) - 4 \sum_{q=0}^{n-1} (q+1)b_{n-q}b_{q+1}}{(n^2 - 1)}. \quad (3.36)$$

Após calcular os coeficientes  $b_n$ , podemos voltar para a antiga variável  $r$ :

$$\phi_{\kappa}(r) = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(\kappa)} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^n, \quad (3.37)$$

onde  $b_n^{(\kappa)}$  depende de  $\kappa$  por meio de  $b_2$ . Os primeiros termos da série (3.37) são:

$$\begin{aligned} \phi_{\kappa}(r) = & -\frac{1}{4m} + \frac{1}{2m} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) + \frac{\kappa+2}{4m} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2 - \frac{\kappa^2 + 5\kappa + 6}{16m} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^4 + \\ & -\frac{\kappa^2 + 5\kappa + 6}{15m} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^5 + \mathcal{O} \left[ \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^6 \right]. \end{aligned}$$

A figura 3.5 mostra uma solução típica obtida pelo método do mapa conforme. Vemos que a solução obtida por este método tem raio de convergência aparentemente infinito e é indistinguível da solução numérica, mesmo para valores de  $r$  da ordem de  $10^6$ . A figura também ilustra o fato de que o raio de convergência da série de potências em  $r$  é no máximo  $2m$ .

A figura 3.6 mostra o comportamento de  $b_n$  para um valor típico de  $\kappa \in (-3, -2)$ . Observamos na figura que  $|b_n| \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$  e dessa forma a sequência  $|b_n|$  é certamente

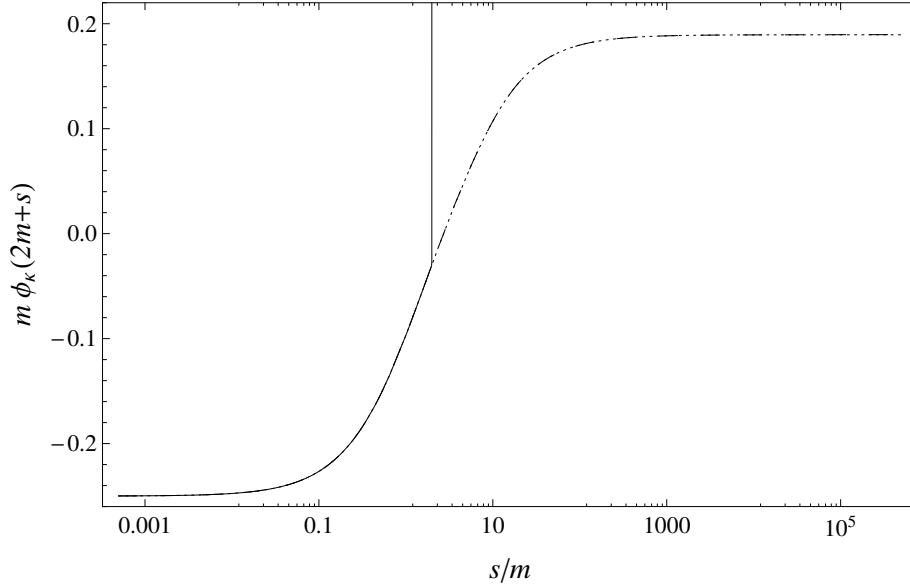


Figura 3.5: Gráficos da expressão em série obtida antes (linha contínua) e depois (linha pontilhada) de usarmos o método do mapa conforme. A linha tracejada corresponde à solução numérica apresentada na seção anterior. Notamos que a solução em série obtida com o método do mapa (truncada em  $n=30\,000$ ) é indistinguível da solução numérica para  $r$  variando de  $2m$  até valores da ordem de  $10^6$ . Para todas as curvas usamos  $\kappa = -2.5$ .

limitada por uma constante  $c > 0$ . Podemos usar este fato para provar (contanto que a condição  $|b_n| \rightarrow 0$  seja válida) que a série (3.37) é convergente para  $\omega = 1 - 2m/r < 1$ . Para isso podemos usar o teste da comparação com a expansão em série da função

$$f(\omega) = c(1 - \omega)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k.$$

Todos os coeficientes da série para  $\psi_\kappa(\omega)$  são menores em módulo do que os da série para  $f$ , e como a série para  $f(\omega)$  é absolutamente convergente, para  $|\omega| < 1$ , temos conseqüentemente que a série para  $\psi_\kappa(\omega)$  é absolutamente convergente, também para  $|\omega| < 1$ . Concluímos assim que, se  $|b_n| \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$  conforme o indicado pela figura 3.6, a série (3.37) é convergente para  $r \in [2m, \infty)$ .

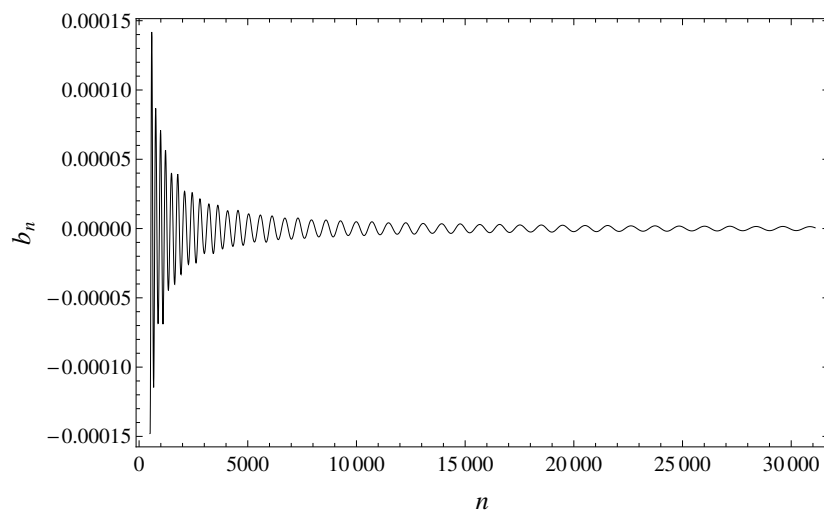


Figura 3.6: Gráfico dos coeficientes  $b_n$  como função de  $n$  para  $\kappa = -2.5$ .

Neste capítulo apresentamos um procedimento para o estudo sistemático de instantons no espaço de Schwarzschild euclidiano. A nossa abordagem reduziu o problema a buscar soluções de uma EDO não-linear e que deve obedecer algumas restrições para que esteja associada a um potencial de gauge em  $\mathfrak{su}(2)$  com ação finita. Estudando as soluções a partir do método da série de potências, vimos que estas se dividem naturalmente em famílias, e que apenas 2 famílias possuem soluções de ação finita<sup>5</sup>. Uma dessas famílias já havia sido descoberta em [11], usando um método totalmente diferente do adotado neste trabalho, e a outra foi recentemente apresentada por nós em [12]. Em ambos os casos o espectro da ação é contínuo, o que representa uma grande diferença comparada ao caso plano, no qual a ação é sempre um número inteiro. As soluções obtidas correspondem a dyons e interpolam a solução abeliana (que representa um dyon) e a solução monopolo de Charap e Duff. Note que esta última possui um caráter distinto das outras configurações na família, pois é a única que não possui carga elétrica. Além disso, veremos no próximo capítulo que a solução monopolo tem papel fundamental para existência de soluções de ação finita.

---

<sup>5</sup>Além da solução abeliana, presente em todas as famílias.



## Capítulo 4

# Instantons no espaço de Reissner-Nordstrom

Neste capítulo vamos estudar instantons no espaço de Reissner-Nordstrom euclidiano. Este espaço é a solução das equações de Einstein que descreve a geometria na região externa a um corpo esfericamente simétrico, estático e carregado eletricamente, sendo que recuperamos a geometria de Schwarzschild quando a carga elétrica deste corpo é zero. Devido às semelhanças entre as geometrias de Schwarzschild e Reissner-Nordstrom euclidianas, muitos dos resultados obtidos no capítulo anterior podem ser imediatamente generalizados para o caso estudado neste capítulo. Em particular, as soluções que iremos estudar se agrupam em famílias associadas a números inteiros não positivos, da mesma forma que no espaço de Schwarzschild. Vamos mostrar que, para que existam soluções de ação finita em uma determinada família  $p$ , basta que nessa família exista uma solução cujo comportamento assintótico seja  $\phi(r) \propto 1/r^2$ . Vamos chamar soluções com esse comportamento assintótico de tipo monopolo, pois veremos que essas soluções possuem somente carga magnética. Os resultados obtidos indicam que a carga do buraco negro tem um papel importante na estrutura das soluções instantônicas nesta geometria.

### 4.1 O espaço de Reissner-Nordstrom euclidiano

A métrica de Reissner-Nordstrom descreve o espaço-tempo em torno de um corpo estático e esfericamente simétrico com massa  $m$  e carga elétrica  $Q$  [26]. Em coordenadas

de Schwarzschild generalizadas a métrica é

$$ds^2 = -H(r)dt^2 + \frac{1}{H(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.1)$$

com

$$H(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}. \quad (4.2)$$

Note que para  $Q = 0$  recuperamos a métrica de Schwarzschild. Sabemos que se  $|Q| > m$  o sistema apresenta uma singularidade nua em  $r = 0$  (ver [19, 26]). Dessa forma temos que, de acordo com a conjectura do censor cósmico, as situações de interesse físico são as que satisfazem  $m \geq |Q|$  [19, 26]. Vemos das eqs. (4.1) e (4.2) que, para  $m > |Q|$ , a métrica possui 3 singularidades: os dois zeros de  $H(r)$ ,

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - Q^2}, \quad (4.3)$$

e  $r = 0$ . As singularidades em  $r = r_{\pm}$  estão apenas associadas ao sistema de coordenadas empregado e não estão relacionadas a uma singularidade física (do mesmo modo que a singularidade em  $r = 2m$  no caso de Schwarzschild). Quando  $m = |Q|$  os dois horizontes  $r_+$  e  $r_-$  coincidem e temos o caso extremo, que possui uma série de propriedades interessantes que o distinguem do caso não-extremo [19, 26], mas que não será abordado neste trabalho.

O espaço euclidiano é obtido a partir de uma rotação de Wick,  $\tau = it$ , e neste caso a métrica é

$$ds^2 = H(r)d\tau^2 + \frac{1}{H(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4.4)$$

Para o caso não-extremo, podemos repetir os passos que levaram às eqs. (3.5), e encontrar coordenadas  $(\alpha, R)$  nas quais os dois primeiros termos da métrica são transformados na métrica de  $\mathbb{R}^2$  em coordenadas polares. No caso euclidiano, a coordenada  $r$  está limitada ao intervalo  $[r_+, \infty)$ , diferente do caso lorentziano, onde podemos estender a métrica para toda região  $r \in (0, \infty)$ . Para  $r$  próximo de  $r_+$  podemos escrever as novas coordenadas  $(\alpha, R)$  como

$$R \approx 2 \left( \frac{r - r_+}{H'(r_+)} \right)^{1/2}, \quad (4.5a)$$

$$\alpha \approx \frac{H'(r_+)}{2} \tau. \quad (4.5b)$$

Segue imediatamente que a coordenada  $\tau$  é periódica, com período  $\beta = 4\pi/H'(r_+)$  e também que a topologia deste espaço é  $\mathbb{R}^2 \times S^2$ . Sendo assim, da mesma forma que no espaço de Schwarzschild, todo  $SU(2)$ -fibrado será trivial e por isso podemos novamente usar um único potencial de gauge definido em todo o espaço de Reissner-Nordstrom. O caso extremo difere significativamente do não-extremo pois sua topologia é  $\mathbb{R}^1 \times S^1 \times S^2$  [26] e assim, apesar de a coordenada tempo ser periódica, não há nenhuma restrição sobre o seu período. Como a topologia do caso extremo difere da do espaço de Schwarzschild euclidiano, a generalização da abordagem utilizada no capítulo anterior para este caso requer uma análise mais cuidadosa que está fora do escopo desta dissertação.

## 4.2 O Ansatz

Da mesma forma que no capítulo anterior, vamos buscar soluções adotando o ansatz

$$A = \alpha(r) d\theta \frac{\sigma_1}{2i} + \alpha(r) \sin \theta d\varphi \frac{\sigma_2}{2i} + (\cos \theta d\varphi + \phi(r) d\tau) \frac{\sigma_3}{2i}. \quad (4.6)$$

Apesar de um potencial desta forma ser singular, podemos usar, conforme discutido anteriormente, uma transformação de gauge para escrevê-lo em sua forma regular, eq. (3.6). Para isso as funções  $\phi$  e  $\alpha$  devem satisfazer as seguintes condições:

$$\phi(r_+) = \frac{2\pi p}{\beta} = \frac{H'(r_+)p}{2}, \quad p \in \mathbb{Z}, \text{ e} \quad (4.7a)$$

$$\alpha(r_+) = 0, \quad \text{se } p \neq 0. \quad (4.7b)$$

As equações de auto-dualidade para um potencial da forma (4.6) são

$$\alpha'(r) = -\frac{1}{H(r)} \alpha(r) \phi(r), \quad (4.8a)$$

$$\phi'(r) = \frac{1 - \alpha^2(r)}{r^2}. \quad (4.8b)$$

E, assim como no caso de Schwarzschild, podemos reescrever estas equações como

$$r^2 H(r) \frac{d^2 \phi}{dr^2} + 2r H(r) \frac{d\phi}{dr} - 2\phi + 2r^2 \frac{d\phi}{dr} \phi = 0, \quad (4.9)$$

e determinar  $\alpha$  em termos de  $\phi$  via

$$\alpha^2(r) = 1 - r^2 \phi'(r). \quad (4.10)$$

Para um potencial desta forma a ação é dada por

$$S = -\frac{1}{8\pi^2} \int_M \text{tr}(F \wedge \star F) = \frac{\beta}{2\pi} [(1 - \alpha^2)\phi] \Big|_{r_+}^{\infty}. \quad (4.11)$$

Conforme veremos, para as soluções em que estaremos interessados  $\alpha(r_+) = \alpha(\infty) = 0$  ou  $\alpha(r_+) = \phi(\infty) = 0$ , e assim

$$S = \frac{2}{H'(r_+)} [\phi(\infty) - \phi(r_+)]. \quad (4.12)$$

Da mesma forma que no capítulo anterior, podemos definir um campo de gauge U(1),

$$f_{\mu\nu} = -i \text{tr} [\sigma_3 (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)],$$

que identificaremos com um campo eletromagnético. Substituindo a eq. (4.6) nessa expressão temos

$$f^{0i} = \phi'(r) \frac{x^i}{r}, \quad (4.13a)$$

$$\star f^{0i} = \frac{x^i}{r^3}. \quad (4.13b)$$

Novamente concluímos que todas as configurações possuem carga magnética unitária e que a carga elétrica relativa a este campo abeliano depende do comportamento assintótico de  $\phi(r)$ .

### 4.3 As soluções

A solução abeliana,

$$\phi(r) = c - \frac{1}{r}, \quad (4.14a)$$

$$\alpha(r) = 0, \quad (4.14b)$$

encontrada no capítulo anterior para o espaço de Schwarzschild, também é solução da equação de auto-dualidade no espaço de Reissner-Nordstrom para qualquer valor da carga  $Q$ , como pode ser concluído diretamente das eqs. (4.8). Entretanto, para que esta solução corresponda a um potencial regular em todo o espaço, a escolha da constante  $c$  agora depende da carga por meio da relação

$$c = \frac{pH'(r_+)}{2} + \frac{1}{r_+}, \quad p \in \mathbb{Z}. \quad (4.15)$$

A ação associada a esta solução é

$$S_{ab} = 1 + \frac{m}{\sqrt{m^2 - Q^2}}, \quad (4.16)$$

e também depende da carga do buraco negro (porém independe de  $p$ ), conforme descrito pela equação acima e ilustrado na figura 4.1. Note que no limite  $|Q| \rightarrow m$  a ação da solução abeliana diverge, o que mostra, mais uma vez, a necessidade de um estudo separado do problema para o caso extremo. Veremos no restante deste capítulo que, conforme antecipado pelos resultados relacionados à solução abeliana, a carga elétrica que caracteriza a métrica de Reissner-Nordstrom tem um papel central na estrutura das soluções auto-duais de ação finita da teoria de Yang-Mills neste espaço.

### 4.3.1 Soluções em série

Vamos procurar soluções da eq. (4.9) que, em torno de  $r = r_+$ , possam ser escritas como uma série de potências

$$\phi(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (r - r_+)^k, \quad (4.17)$$

com  $a_0 = pH'(r_+)/2$  (ver eqs.(4.7)). Neste caso, assim como no espaço de Schwarzschild, temos duas situações distintas: para  $p > 0$  todos os coeficientes da série (4.17) podem ser determinados pela relação de recorrência obtida substituindo a expressão em série na eq. (4.9). Sendo assim, se  $p > 0$  obtemos apenas a solução abeliana. Para  $p \leq 0$  o coeficiente  $a_{-p+1}$  não é fixado pela relação de recorrência e serve como parâmetro livre, a partir do qual todos os outros coeficientes, com  $k > -p + 1$ , podem ser calculados. Este parâmetro livre dá origem a uma família de soluções (não necessariamente de ação finita), que denotaremos por família  $p$ . É fácil verificar, diretamente da relação de recorrência

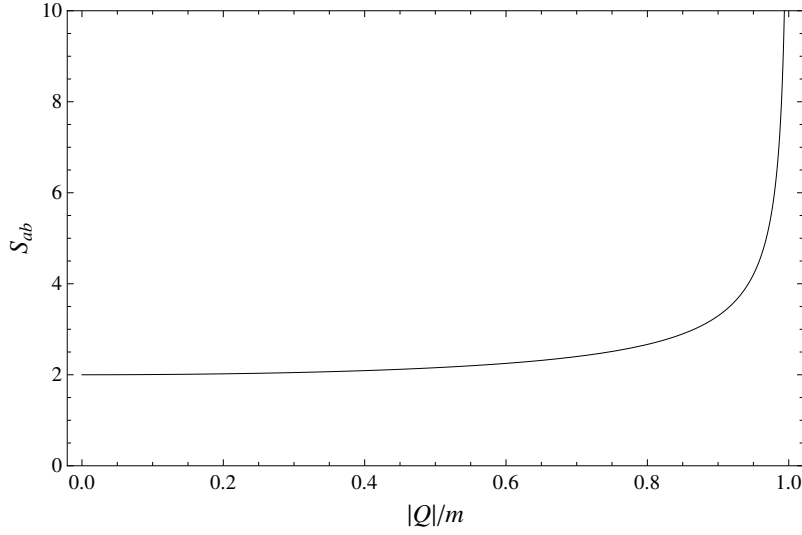


Figura 4.1: Ação da solução abeliana como uma função da carga  $Q$  do buraco negro de Reissner-Nordstrom.

satisfeita pelos coeficientes  $a_k$ , que se  $p < 0$  então  $\alpha(r_+) = 0$ , que é uma das condições necessárias para podermos calcular a ação usando a eq. (4.12).

Vemos que esta situação é análoga à descrita no capítulo anterior. De fato, definindo o parâmetro adimensional

$$\kappa = 2r_+^{-p+2} a_{-p+1}, \quad (4.18)$$

e sabendo que  $H(r) > 0$  para  $r \in (r_+, \infty)$ , podemos generalizar diretamente todos os argumentos utilizados na seção 3.3.4, e mostrar que, se  $\kappa_1 < \kappa_2 \leq \kappa_{ab}$  então

$$\phi_{\kappa_1}(r) < \phi_{\kappa_2}(r) \quad \forall r \in (r_+, \infty), \quad (4.19a)$$

$$\phi'_{\kappa_1}(r) < \phi'_{\kappa_2}(r) \quad \forall r \in (r_+, \infty). \quad (4.19b)$$

Onde  $\kappa_{ab} = 2(-1)^p$  é o valor do parâmetro associado à solução abeliana na família  $p$ . Em particular isso mostra que para que  $\alpha(r)$  seja sempre real devemos ter  $\kappa \leq \kappa_{ab}$ , ver eq. (4.10)

No espaço de Schwarzschild, o principal resultado usado para mostrar que a ação das soluções encontradas é finita foi a existência do limite  $C_\kappa$  (vide eq. (3.22))<sup>1</sup>. Uma rápida

<sup>1</sup>Apesar de, no espaço de Schwarzschild, termos estudado apenas a família  $p = -1$ , todos os argumen-

inspeção no capítulo anterior mostra que, para garantirmos a existência de  $C_\kappa$  naquele caso usamos explicitamente a solução abeliana e a solução tipo monopolo. Veremos que no espaço de Reissner-Nordstrom os análogos destas soluções também serão fundamentais para provar que o limite  $C_\kappa$  existe e assim garantir a existência de soluções com ação finita em uma determinada família  $p$ .

É fácil notar que as formas assintóticas das EDOs para  $\phi$  no espaço de Reissner-Nordstrom (eq. (4.9)) e no espaço de Schwarzschild (eq. (3.11)) são idênticas. Sendo assim, se pudermos garantir a existência de  $C_\kappa$ , com  $C_\kappa > 0$ , no espaço de Reissner-Nordstrom, podemos repetir os passos usados para obter a eq. (3.24) e mostrar que<sup>2</sup>

$$\phi_\kappa(r) \approx C_\kappa - \frac{1}{r} + \lambda \frac{e^{-2C_\kappa r}}{2C_\kappa}, \quad r \gg 1. \quad (4.20)$$

Neste caso concluímos imediatamente que a ação pode ser calculada usando a eq. (4.12) e também que a ação associada é finita. Dessa forma, temos que a existência de  $C_\kappa$ , com  $C_\kappa$  positivo, garante que o potencial de gauge associado a  $\phi_\kappa$  tem ação finita.

A eq. (4.19a) mostra que as soluções  $\phi_\kappa$  com  $\kappa < \kappa_{ab}$  são limitadas. Sendo assim, para garantirmos a existência de  $C_\kappa$  (com  $\kappa < \kappa_{ab}$ ) no espaço de Reissner-Nordstrom, é suficiente encontrarmos um análogo da solução tipo monopolo, que, assim como no capítulo anterior, servirá para mostrar que as soluções de interesse são crescentes (para  $r$  suficientemente grande). Portanto, se em uma família  $p$  existe uma solução, com  $\kappa_{mon} < \kappa_{ab}$ , cujo comportamento assintótico é

$$\phi_{\kappa_{mon}}(r) = -\frac{a}{r^2} + \mathcal{O}\left[\left(\frac{1}{r}\right)^3\right], \quad r \gg 1, \quad (4.21)$$

sendo  $a$  uma constante, garantimos a existência de uma subfamília, associada a  $\kappa \in (\kappa_{mon}, \kappa_{ab})$ , em que as soluções possuem ação finita usando o mesmo tipo de raciocínio empregado no capítulo anterior. Segue diretamente das eqs. (4.13) que configurações com o comportamento assintótico dado por (4.21) têm carga elétrica zero, e portanto são monopolos magnéticos (o que justifica empregar o termo tipo monopolo para denominar este tipo de solução).

A ação de uma solução da forma (4.21) em uma família  $p$  segue diretamente das 

---

tos utilizados para demonstrar a existência de uma subfamília de ação finita nesta geometria podem ser generalizados para o caso  $p = 0$ , conforme mencionado no fim da seção 3.3.3.

<sup>2</sup>Segue dessa equação que  $C_\kappa$  não pode ser negativo, pois neste caso  $\phi_\kappa$  divergiria quando  $r \rightarrow \infty$ , contrariando assim a própria existência de  $C_\kappa$ .

eqs. (4.11) e (4.21):

$$S_{mon} = -p, \quad (4.22)$$

ou seja, a ação deste tipo de solução é sempre inteira. Também é imediato provar, a partir da eq. (4.9) e da condição

$$\phi(r_+) = pH'(r_+)/2 \leq 0,$$

que  $a \geq 0$ . Este resultado será importante na próxima seção.

A discussão desta seção mostra que a tarefa de provar que em uma determinada família  $p$  existem configurações de ação finita fica reduzida a provar que existem soluções tipo monopolo (comportamento assintótico da forma (4.21)) nesta família. No restante deste capítulo vamos estudar, usando uma combinação de ferramentas analíticas e numéricas, condições que garantam a existência deste tipo de solução em uma determinada família  $p$ .

## 4.4 Existência de soluções tipo monopolo

Nesta seção vamos investigar sob quais condições uma solução tipo monopolo existe em determinada família  $p$ . Como vimos na seção anterior, a existência de tal solução garante a existência de uma subfamília de soluções (dentro da família  $p$ ) com ação finita. Vamos primeiramente exibir algumas propriedades analíticas das soluções da eq. (4.9) com as condições assintóticas características de soluções tipo monopolo. Em seguida, iremos apresentar resultados numéricos que, em conjunto com os resultados analíticos, nos permitem determinar as condições para existência deste tipo de solução.

### 4.4.1 Propriedades analíticas

Vamos começar exibindo algumas condições necessárias para a existência de soluções tipo monopolo em cada família, que mais tarde serão importantes para determinar quais famílias possuem soluções de ação finita. Desta forma, dada uma família  $p$  (devemos lembrar que  $p \leq 0$ ), vamos supor<sup>3</sup> que exista uma solução tipo monopolo,  $\phi_{\kappa_{mon}}(r)$ . Da eq. (4.21) temos

$$\phi'_{\kappa_{mon}}(r) = \frac{2a}{r^3} + \mathcal{O}(1/r^4), \quad \text{para } r \gg 1,$$

e assim, para  $r$  grande temos  $\phi'_{\kappa_{mon}}(r) < \phi'_{\kappa_{ab}}(r) = 1/r^2 + \mathcal{O}(1/r^3)$ , sendo  $\kappa_{ab}$  o parâmetro associado à solução abeliana. De acordo com a eq. (4.19b) sabemos que  $\phi'_{\kappa_1}(r) < \phi'_{\kappa_2}(r)$  se

---

<sup>3</sup>Na próxima seção vamos estabelecer numericamente a existência destas soluções.



$\kappa_1 < \kappa_2$ , e sendo assim concluímos que  $\kappa_{mon} < \kappa_{ab}$ .

Por outro lado, sabemos que, na família  $p$ , a solução abeliana é

$$\phi_{\kappa_{ab}}(r) = p \frac{H'(r_+)}{2} + \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r},$$

e que a condição  $\kappa_{mon} < \kappa_{ab}$  impõe, devido à eq. (4.19a),

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi_{\kappa_{ab}}(r) = p \frac{H'(r_+)}{2} + \frac{1}{r_+} > 0.$$

Portanto, para que exista uma solução tipo monopolo em uma família  $p$  a relação

$$-\frac{2}{r_+ H'(r_+)} = -S_{ab} < p \leq 0 \quad (4.23)$$

deve necessariamente ser satisfeita. Esse argumento corrobora a afirmação feita no capítulo anterior de que não existem soluções com ação finita (além da abeliana) para  $p \leq -2$  no espaço de Schwarzschild, pois  $S_{ab} = 2$  nesta geometria. Essa relação também fornece um limite superior para o número de famílias de instantons no espaço de Reissner-Nordstrom em função da carga elétrica associada a este espaço:

$$N \leq 1 + \left\lceil \frac{m}{\sqrt{m^2 - Q^2}} \right\rceil,$$

onde  $\lceil \cdot \rceil$  é a função teto (ou seja  $\lceil w \rceil$  é o menor inteiro maior que ou igual a  $w$ ).

Mostramos até aqui que, para que exista uma solução tipo monopolo em uma família  $p$ , a condição dada pela eq. (4.23) deve ser satisfeita. No restante desta seção vamos apresentar algumas propriedades analíticas de soluções da eq. (4.9) com o comportamento assintótico característico de monopolos que, em conjunto com os resultados numéricos que serão apresentados na próxima seção, indicam que a condição (4.23) é suficiente para garantir a existência de soluções tipo monopolo na família  $p$ .

Sendo assim, todas as famílias com  $p = 0, -1, \dots, p_{min}$ , sendo  $p_{min}$  o menor inteiro maior que  $-S_{ab}$ , possuem soluções auto-duais com ação finita. Dessa forma, o número de instantons no espaço de Reissner-Nordstrom é dado por

$$N = 1 + \left\lceil \frac{m}{\sqrt{m^2 - Q^2}} \right\rceil. \quad (4.24)$$

Vemos da expressão acima que o número de famílias depende da carga e que no limite de carga zero temos apenas duas soluções, o que está de acordo com o estudado no capítulo anterior, e que quando nos aproximamos do caso extremo o número de famílias cresce indefinidamente.

#### A equação em termos da variável $z = r_+/r$

Para estudarmos a existência de soluções tipo monopolo vamos trabalhar com a variável adimensional

$$z = \frac{r_+}{r}. \quad (4.25)$$

Essa variável está relacionada a  $\omega$ , que é obtida a partir do método do mapa conforme (ver seção 3.4), via

$$z = 1 - \omega.$$

Na variável  $z$  a condição para existência de uma solução tipo monopolo é (vide eq. (4.21))

$$\phi(r(z)) = \psi(z) = -\lambda z^2 + \mathcal{O}(z^3), \quad z \ll 1, \quad (4.26)$$

sendo que  $\psi$  deve ser solução da equação

$$(1-z)z^2 \left(1 - z \frac{r_-}{r_+}\right) \frac{d^2\psi}{dz^2} - 2r_+\psi \frac{d\psi}{dz} - 2\psi = 0. \quad (4.27)$$

Em termos da variável  $z$ , a condição de regularidade (4.7) é dada por  $\psi(1) = pH'(r_+)/2$ .

Vamos procurar soluções da equação acima, em torno de  $z = 0$ , na forma de uma série de potências. Para que as soluções satisfaçam a condição (4.26) elas devem ser da forma

$$\psi_\lambda(z) = -\lambda z^2 + \sum_{k=3}^{\infty} b_k z^k. \quad (4.28)$$

Neste caso, a existência de soluções do tipo monopolo fica reduzida a mostrar que existem valores de  $\lambda$  tais que uma solução da eq. (4.27) da forma acima satisfaz a condição  $\psi(1) = pH'(r_+)/2$ .

Podemos calcular os coeficientes  $b_k$  substituindo a eq. (4.28) na eq. (4.27). A relação

de recorrência obtida dessa forma é

$$b_3 = \frac{-\lambda \left(1 + \frac{r_-}{r_+}\right) + 2r_+ \lambda^2}{2},$$

e para  $b_k$  com  $k \geq 4$ :

$$b_k = \frac{\left(1 + \frac{r_-}{r_+}\right) (k-2)(k-1)b_{k-1} - \frac{r_-}{r_+} (k-3)(k-2)b_{k-2} + 2r_+ \sum_{q=2}^{k-1} q b_q b_{k-q+1}}{k(k-1) - 2}. \quad (4.29)$$

Sendo assim vemos que todos os coeficientes podem ser determinados pela relação de recorrência e portanto existe uma única solução da forma (4.28) associada a cada valor de  $\lambda$ . Note que para  $\lambda = 0$  temos  $\psi_0(z) = 0$ .

Por outro lado temos que, em termos da variável  $z$ , a solução abeliana é

$$\psi_{ab}(z) = c - \frac{z}{r_+}. \quad (4.30)$$

Para<sup>4</sup>  $c = 0$  podemos provar que

$$\psi_{ab}(z) = -\frac{z}{r_+} < \psi_\lambda(z), \quad \forall z \in (0, 1), \quad (4.31a)$$

$$\psi'_{ab}(z) = -\frac{1}{r_+} < \psi'_\lambda(z), \quad \forall z \in (0, 1). \quad (4.31b)$$

Também podemos mostrar que se  $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2$  então

$$\psi_{\lambda_1}(z) > \psi_{\lambda_2}(z), \quad \forall z \in (0, 1), \quad (4.32a)$$

$$\psi'_{\lambda_1}(z) > \psi'_{\lambda_2}(z), \quad \forall z \in (0, 1), \quad (4.32b)$$

As provas destes resultados estão no fim desta seção.

Para um valor fixo de  $z$  podemos pensar em  $\psi_\lambda(z)$  como uma função em  $\lambda$ . Os resultados acima mostram que  $\psi_\lambda(z)$  é monótona (decrecente) e limitada como função de  $\lambda$ , e portanto

---

<sup>4</sup>Note que neste caso  $\psi$  não está associada a um potencial regular, porém ainda é uma solução da eq. (4.27).

o limite<sup>5</sup>

$$\psi_\infty(z) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \psi_\lambda(z) \quad (4.33)$$

existe e define uma função na variável  $z$ . A eq. (4.31a) garante que  $0 < \psi_\infty(z) \leq \psi_{ab}(z)$  para  $z \neq 0$ . Segue da própria construção de  $\psi_\infty(z)$  que<sup>6</sup>, dado um valor  $x$  qualquer no intervalo  $(0, \psi_\infty(z))$ , existe um  $\lambda_x \in (0, \infty)$  tal que  $\psi_{\lambda_x}(z) = x$ . Ou seja, variando  $\lambda$  entre 0 e  $\infty$ , a curva  $\psi_\lambda(z)$  (com  $z$  fixo) cobre todo o intervalo  $(0, \psi_\infty(z))$ .

Para o caso particular  $z = 1$  esses argumentos mostram que qualquer valor  $x$  no intervalo  $(0, \psi_\infty(1))$  está associado a um  $\lambda_x$  tal que  $\psi_{\lambda_x}(1) = x$ . Dessa forma vemos que, dado  $p \in \mathbb{Z}$  tal que

$$\frac{2}{H'(r_+)} \psi_\infty(1) < p \leq 0,$$

existe um  $\lambda_p$  tal que  $\psi_{\lambda_p}(z)$  é solução da eq. (4.27) com

$$\psi_{\lambda_p}(1) = p \frac{H'(r_+)}{2}.$$

Concluimos que tal  $\psi_{\lambda_p}(z)$  é uma solução tipo monopolo associada a um potencial de gauge regular, o que garante (vide discussão da última seção) que a família  $p$  possui soluções de ação finita. Dessa forma, este resultado nos permite estabelecer quais famílias possuem soluções de ação finita (além da abeliana): uma família  $p$  possui ação finita se

$$\frac{2}{H'(r_+)} \psi_\infty(1) < p \leq 0.$$

Na próxima seção iremos apresentar resultados numéricos que, de fato, mostram que  $\psi_\infty(z) = \psi_{ab}(z)$ . Em conjunto com os resultados apresentados nos últimos parágrafos isto mostra que a condição da eq. (4.23),

$$-\frac{2}{r_+ H'(r_+)} = -1 - \frac{m}{\sqrt{m^2 - Q^2}} < p \leq 0,$$

é suficiente para garantir que existem soluções de ação finita na família  $p$ . Vamos apresentar também resultados numéricos que indicam que  $\psi_\lambda(z)$  é uma função contínua em  $\lambda$  (para  $z$

<sup>5</sup>Estamos ignorando aqui questões mais finas ligadas a continuidade de tal função, que seriam necessárias para tornar rigoroso este argumento. De qualquer forma isto não invalida nossa argumentação pois os resultados numéricos que serão apresentados na próxima seção indicam que  $\psi_\lambda(z)$  como função de  $\lambda$  é, de fato, contínua.

<sup>6</sup>Supondo novamente que  $\psi_\lambda(z)$  como função de  $\lambda$  é contínua.

fixo), que foi hipótese fundamental para os resultados obtidos nesta seção.

**Prova das eqs. (4.31) e (4.32)**

Segue diretamente da definição de  $\psi_\lambda(z)$  que para  $0 < z \ll 1$  vale:

$$\psi_{ab}(z) = -\frac{z}{r_+} < \psi_\lambda(z), \quad (4.34a)$$

$$\psi'_{ab}(z) = -\frac{1}{r_+} < \psi'_\lambda(z). \quad (4.34b)$$

Dado um  $\lambda$  fixo, para que a eq. (4.34b) deixe de ser válida deve existir  $z_0 \in (0, 1)$  tal que  $\psi'_\lambda(z_0) = \psi'_a(z_0)$ . Neste caso, temos imediatamente que  $f(z) = C - z/r_+$  é solução da eq. (4.27) com mesma condição inicial que  $\phi_\lambda(z)$ , escolhendo  $C = \psi_\lambda(z_0) + z/r_+$ , e, conseqüentemente  $\psi_\lambda(z) = C - z/r_+$  o que contradiz a eq. (4.28). Sendo assim

$$\psi'_a(z) < \psi'_\lambda(z), \quad \forall z \in (0, 1).$$

Integrando ambos os lados da equação acima

$$\psi_a(z) < \psi_\lambda(z), \quad \forall z \in (0, 1),$$

o que demonstra o resultado das eqs. (4.31).

Para provarmos o resultado das eqs. (4.32) devemos primeiro notar que se  $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2$  temos, para  $0 < z \ll 1$ :

$$\psi_{\lambda_1}(z) > \psi_{\lambda_2}(z), \quad (4.35a)$$

$$\psi'_{\lambda_1}(z) > \psi'_{\lambda_2}(z). \quad (4.35b)$$

Fixados  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , como  $\psi'_\lambda(z)$  é uma função contínua em  $z$ , para que a eq. (4.35b) deixe de ser válida deve existir pelo menos um  $z \in (0, 1)$  tal que

$$\phi'_{\lambda_1}(z) = \phi'_{\lambda_2}(z).$$

Se  $z_0$  é o menor  $z$  tal que a igualdade acima seja válida temos, para  $0 < z < z_0$ ,

$$\psi'_{\lambda_1}(z) > \psi'_{\lambda_2}(z).$$

Integrando a eq. (4.35b) em  $z$  de 0 a  $z_0$  temos

$$\psi_{\lambda_1}(z_0) > \psi_{\lambda_2}(z_0). \quad (4.36)$$

Agora, subtraindo as equações obtidas substituindo  $\psi_{\lambda_1}(z)$  e  $\psi_{\lambda_2}(z)$  na EDO (4.27) obtemos

$$z_0^2(1 - z_0) \left(1 - z \frac{r_-}{r_+}\right) [\psi''_{\lambda_1}(z_0) - \psi''_{\lambda_2}(z_0)] = 2[\psi_{\lambda_1}(z_0) - \psi_{\lambda_2}(z_0)] [\psi'_{\lambda_1}(z_0)r_+ + 1].$$

E usando os resultados das eqs. (4.31b) e (4.36) na equação acima concluímos que

$$\psi''_{\lambda_1}(z_0) - \psi''_{\lambda_2}(z_0) > 0.$$

Como  $\psi'_{\lambda_1}(z_0) = \psi'_{\lambda_2}(z_0)$ , o resultado acima garante que

$$\psi'_{\lambda_1}(z_0 - \epsilon) < \psi'_{\lambda_2}(z_0 - \epsilon),$$

para  $\epsilon$  positivo e suficientemente pequeno. Isto contradiz a hipótese

$$\psi'_{\lambda_1}(z) > \psi'_{\lambda_2}(z),$$

e assim concluímos que não existe  $z \in (0, 1)$  tal que  $\psi'_{\lambda_1}(z) = \psi'_{\lambda_2}(z)$ . Isto demonstra o resultado (4.32b),

$$\psi'_{\lambda_1}(z) > \psi'_{\lambda_2}(z), \quad \forall z \in (0, 1).$$

Integrando esta equação de 0 a  $z \in (0, 1)$  provamos a eq. (4.32a),

$$\psi_{\lambda_1}(z) > \psi_{\lambda_2}(z), \quad \forall z \in (0, 1),$$

o que conclui a demonstração das eqs. (4.32).

#### 4.4.2 Resultados numéricos

Iniciamos a investigação numérica do problema estudando o raio de convergência das soluções em série dadas pela eq. (4.28) e com os coeficientes calculados via eq. (4.29). Nota-se claramente da figura 4.2 que o raio de convergência da série é, em geral, menor que 1. Dessa forma, não podemos usar o método de série de potências para estudar o comportamento das soluções  $\psi_\lambda(z)$  em todo o intervalo  $z \in (0, 1)$ . No entanto, para  $z$

suficientemente pequeno a expansão em série é válida, e podemos usar a série de potências para gerar pares  $(\psi_\lambda(\epsilon), \psi'_\lambda(\epsilon))$ , com  $\epsilon$  positivo e suficientemente pequeno. Estes valores podem ser usados como condições iniciais para integrarmos numericamente a eq. (4.27) (analogamente ao que fizemos no capítulo anterior). Este é o procedimento que usamos para estudar como as soluções  $\psi_\lambda(z)$  dependem do parâmetro  $\lambda$ .

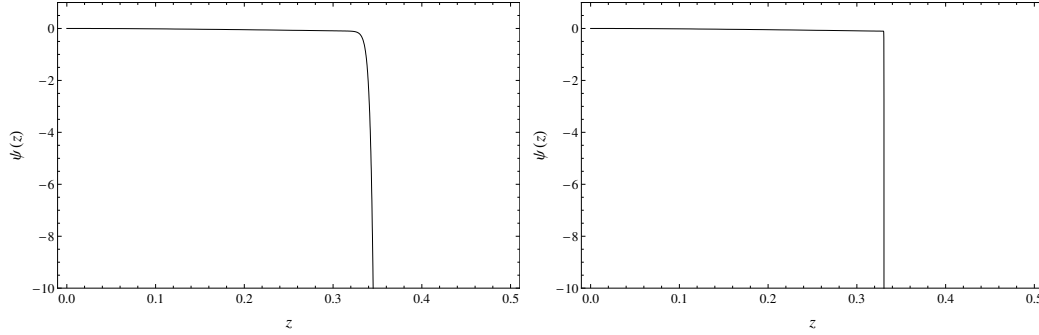


Figura 4.2: Figura da esquerda: gráfico da função obtida truncando a série de  $\psi_\lambda(z)$  em  $k = 10^2$ . Figura da direita: gráfico da função obtida truncando a série de  $\psi_\lambda(z)$  em  $k = 10^4$ . Para construir os gráficos das duas figuras escolhemos  $\lambda = 2$ , fixamos a carga do espaço de Reissner-Nordstrom em  $Q = m/2$  e trabalhamos em unidades tais que  $m = 1$ .

O primeiro ponto que precisamos investigar é se, dado um valor fixo de  $z$ , a função  $\psi_\lambda(z)$  é contínua na variável  $\lambda$ . Para responder esta questão, fixamos  $z$  e variamos  $\lambda$  em intervalos dados por um  $\Delta\lambda \ll 1$ . O gráfico da figura 4.3 ilustra os resultados obtidos no caso  $Q = m/2$ . Podemos observar um comportamento bastante regular de  $\psi_\lambda$  ao variarmos  $\lambda$  e, portanto, os resultados numéricos indicam que, de fato,  $\psi_\lambda(z)$  varia continuamente com  $\lambda$ . Dessa forma, estes resultados corroboram a argumentação que nos permitiu concluir que o limite  $\psi_\infty(z)$  existe<sup>7</sup>.

Em seguida queremos estudar como se comporta a solução limite  $\psi_\infty(z)$ . Para isso estudamos numericamente as funções  $\psi_\lambda(z)$  para valores crescentes de  $\lambda$ .

O resultado da figura 4.4 indica que as curvas associadas a  $\psi_\lambda(z)$  se aproximam da curva associada à solução abeliana quanto mais aumentamos  $\lambda$ . Para um resultado mais preciso, fixamos  $z$ , o que equivale a fazer um corte vertical na figura 4.4, e construímos um gráfico de  $\psi_\lambda(z_0)$  por  $\lambda$ . O resultado obtido está representado na figura 4.5.

<sup>7</sup>Note que não estamos afirmando que os argumentos numéricos apresentados provam a continuidade da função  $\psi_\lambda(z)$  como função de  $\lambda$ , que seria o resultado necessário para uma demonstração formal da

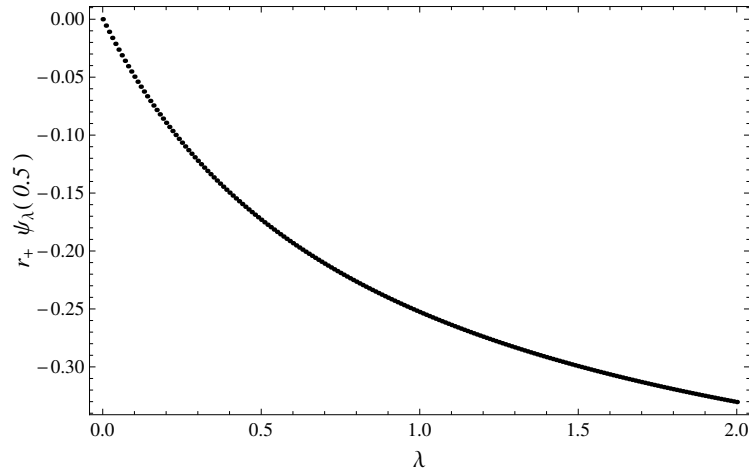


Figura 4.3: Gráfico que ilustra o comportamento de  $\psi_\lambda(1/2)$  para valores de  $\lambda$  variando entre 0 e 2 em intervalos dados por  $\Delta\lambda = 0,01$ . Para construir o gráfico fixamos a carga do espaço de Reissner-Nordstrom em  $Q = m/2$  e trabalhamos em unidades tais que  $m = 1$ .

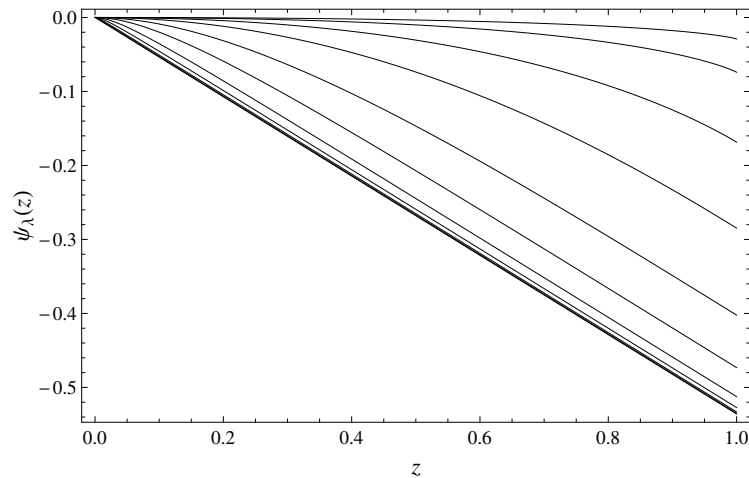


Figura 4.4: Gráficos de  $\psi_\lambda(z)$  para valores crescentes de  $\lambda$ . A curva destacada é referente ao gráfico de  $\psi_{ab}(z) = -z/r_+$ . Para construir o gráfico fixamos a carga do espaço de Reissner-Nordstrom em  $Q = m/2$  e trabalhamos em unidades tais que  $m = 1$ .



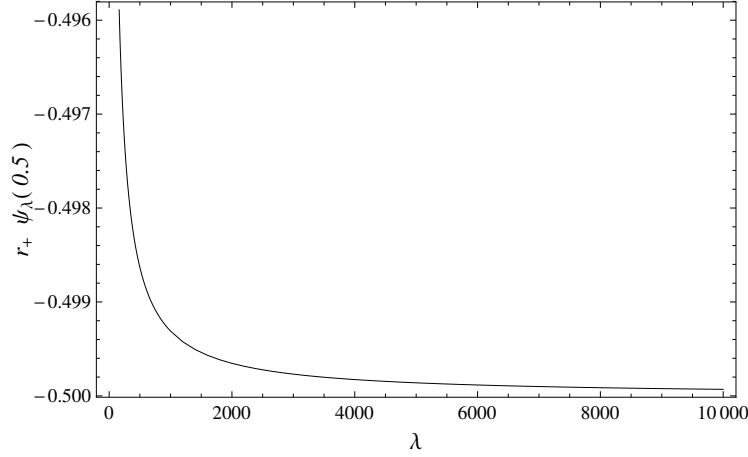


Figura 4.5: Gráfico de  $r_+ \psi_\lambda(1/2)$  por  $\lambda$ . Para construir o gráfico fixamos a carga do espaço de Reissner-Nordstrom em  $Q = m/2$  e trabalhamos em unidades tais que  $m = 1$ .

Analisando a figura 4.5 vemos que  $\psi_\lambda(1/2)$  se aproxima assintoticamente de  $-\frac{1}{2r_+}$ , que é exatamente o valor de  $\psi_{ab}$  em  $z = 1/2$ . Este resultado indica que no limite  $\lambda \rightarrow \infty$  devemos ter  $\psi_\lambda(z) \rightarrow \psi_{ab}(z)$ , conforme já indicavam os resultados apresentados na figura 4.4. Isso nos permite concluir que

$$\psi_\infty(z) = \psi_{ab}(z) = -\frac{z}{r_+}.$$

Recordando a discussão apresentada na seção anterior, concluímos, a partir dos resultados numéricos apresentados nesta seção, que quando  $\lambda$  varia no intervalo  $[0, \infty)$ , a curva  $\psi_\lambda(1)$  varia no intervalo  $[0, -1/r_+)$ . Devemos lembrar também que se  $\psi_\lambda(z)$  satisfaz a condição

$$\psi(1) = p H'(r_+)/2, \quad p \in \mathbb{Z},$$

então esta função está associada a um potencial auto-dual tipo monopolo na família  $p$ . Combinando estes resultados vemos que se  $p$  satisfaz a condição

$$p > \frac{2}{H'(r_+)} \psi_{ab}(1) = -1 - \frac{m}{\sqrt{m^2 - Q^2}},$$

então existe uma solução tipo monopolo na família  $p$ , o que garante (vide discussão das existências de  $\psi_\infty$ ).

seções anteriores) a existência de soluções de ação finita nesta família.

Podemos resumir as conclusões do último parágrafo na seguinte sentença: a condição

$$p > \frac{2}{H'(r_+)} \psi_{ab}(1) = -1 - \frac{m}{\sqrt{m^2 - Q^2}}$$

é suficiente para garantir a existência de soluções de ação finita em uma determinada família  $p$ . A discussão no início da seção anterior mostra que a condição acima é também necessária para existência de soluções de ação finita. Sendo assim, temos que o número de famílias de instantons no espaço de Reissner-Nordstrom depende diretamente da carga elétrica que caracteriza este espaço, por meio da relação

$$N = 1 + \left\lceil \frac{m}{\sqrt{m^2 - Q^2}} \right\rceil.$$

A figura 4.6 ilustra as famílias de instantons para o caso  $Q = m9/10$ . Os resultados apresentados neste capítulo mostram que para este valor da carga elétrica existem 4 famílias com soluções de ação finita. Em cada uma dessas famílias, os potenciais auto-duais de ação finita são limitados pelas soluções abeliana e tipo monopolo. As famílias de instantons correspondem às regiões hachuradas na figura 4.6.

Neste capítulo estudamos os instantons no espaço de Reissner-Nordstrom usando uma abordagem análoga a introduzida no capítulo anterior para o caso de Schwarzschild. Procuramos soluções das equações de auto-dualidade adotando o ansatz (4.6), e vimos que, da mesma forma que no capítulo anterior, as soluções se dividem em famílias associadas a números inteiros  $p$ . Em mostramos que para garantir a existência de soluções com ação finita em uma dada família basta mostrar que nesta família existe uma solução com comportamento assintótico dado por  $\phi(r) \rightarrow -a/r^2$ , que denominamos tipo monopolo. Na última seção estabelecemos as condições necessárias para a existência de soluções tipo monopolo em uma família  $p$ . Em particular, mostramos que se

$$-1 - \frac{m}{\sqrt{m^2 - Q^2}} < p \leq 0,$$

então existe uma solução tipo monopolo na família  $p$ . Este resultado nos permite expressar o número de famílias de instantons (obtidos via ansatz (4.6)) no espaço de Reissner-

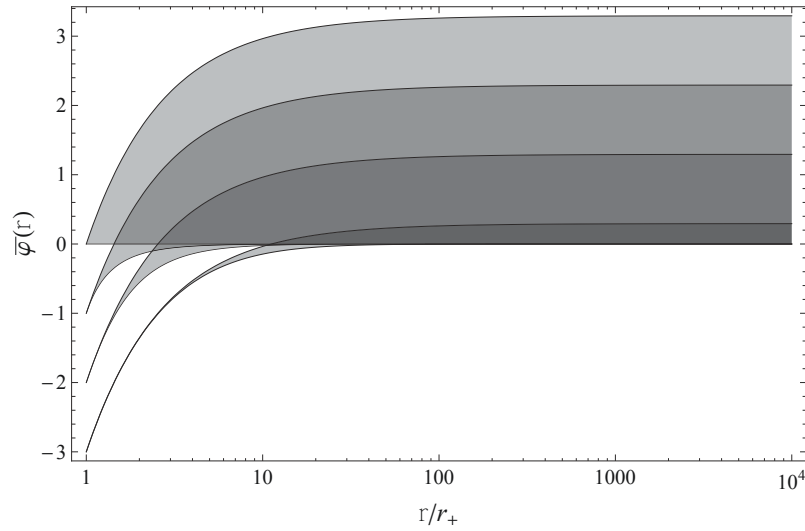


Figura 4.6: Figura ilustrativa representado as 4 famílias de instantons para o caso  $Q = m9/10$ . Note que voltamos a trabalhar com a coordenada  $r$  e normalizamos as curvas de forma que  $\bar{\varphi}(r_+) = p$  em cada família.

Nordstrom em função da carga elétrica que caracteriza este espaço:

$$N = 1 + \left[ \frac{m}{\sqrt{m^2 - Q^2}} \right].$$

Os resultados apresentados neste capítulo mostram que a carga elétrica do espaço de Reissner-Nordstrom tem grande relevância para a estrutura das soluções instantônicas neste espaço.

## Capítulo 5

# Conclusões e perspectivas futuras

Nesta dissertação revisamos resultados clássicos associados aos instantons no espaço plano e investigamos novas soluções instantônicas nos espaços de Schwarzschild e Reissner-Nordstrom euclidianos. Buscamos soluções adotando um ansatz independente do tempo originalmente introduzido por Witten [14] para o caso plano e generalizado para as geometrias de interesse. Tanto no espaço de Schwarzschild quanto no de Reissner-Nordstrom, por questões ligadas à topologia destes espaços e à regularidade dos potenciais de gauge, vimos que as soluções das equações de auto-dualidade se dividem em famílias associadas a números inteiros e não positivos  $p$ .

No espaço de Schwarzschild identificamos as soluções da família  $p = 0$  com os instantons que foram exibidos em [11] por um método diferente do utilizado nesta dissertação. Uma investigação numérica, mais tarde corroborada pelos resultados relacionados ao espaço de Reissner-Nordstrom, mostrou que as famílias com  $p \leq -2$  não possuem soluções com ação finita (com exceção da abeliana, presente em todas as famílias). Em seguida, estudando propriedades das soluções pertencentes à família  $p = -1$ , descobrimos uma nova família de instantons no espaço de Schwarzschild [12]. As soluções desta família interpolam os instantons de Charap e Duff [10] com ações 1 e 2. Em particular, a ação associada às novas soluções varia continuamente entre os valores 1 e 2, em contraste com os instantons no espaço plano, onde a ação só assume valores inteiros. Este resultado ilustra como certas propriedades clássicas dos instantons em  $\mathbb{R}^4$  são fortemente dependentes da topologia deste espaço, não permanecendo válidas quando estudamos as equações de auto-dualidade em variedades com outras topologias.

Nossa investigação das soluções no espaço de Reissner-Nordstrom mostrou que existem

soluções com ação finita em uma família  $p$  se e somente se  $p$  satisfaz a relação

$$-1 - \frac{m}{\sqrt{m^2 - Q^2}} < p \leq 0,$$

sendo que a ação dentro destas famílias varia de  $S = |p|$  a  $S = 1 + m/\sqrt{m^2 - Q^2}$ . Em particular, isso mostra que no caso de Schwarzschild (que é obtido no limite  $Q \rightarrow 0$ ) só as famílias  $p = 0$  e  $p = -1$  têm soluções de ação finita. Além disso, concluímos que o número de famílias de instantons no espaço de Reissner-Nordstrom com carga elétrica  $Q$  é dado por<sup>1</sup>

$$N = 1 + \left\lceil \frac{m}{\sqrt{m^2 - Q^2}} \right\rceil.$$

Desta forma concluímos que a estrutura das soluções instantônicas no espaço de Reissner-Nordstrom depende diretamente da carga elétrica  $Q$  que caracteriza este espaço, e que quando nos aproximamos do caso extremo ( $|Q| = m$ ) este número diverge.

A seguir listamos alguns pontos que não foram abordados nesta dissertação e consideramos temas interessantes para investigações futuras:

- o estudo de soluções auto-duais mais gerais nos espaços de Schwarzschild e Reissner-Nordstrom. Em particular, potenciais que não possuam tantas simetrias quanto o usado nesta dissertação, ou com dependência temporal não-trivial.
- a generalização da abordagem adotada no capítulo 4 para o estudo de instantons no espaço de Reissner-Nordstrom extremo (com  $|Q| = m$ ).
- as possíveis aplicações destas soluções para o estudo de processos quânticos no contexto de teorias de campo definidas sobre espaços curvos (porém não-dinâmicos).

Além dos pontos levantados acima, julgamos que uma investigação formal dos resultados numéricos apresentados no capítulo 4 também seria interessante.

---

<sup>1</sup>Sendo  $\lceil \cdot \rceil$  a função teto, definida como:  $\lceil w \rceil$  é o menor inteiro maior ou igual a  $w$ .

# Apêndice A

## Introdução a fibrados

O objetivo deste apêndice é introduzir alguns conceitos matemáticos que foram usados na dissertação. Vamos primeiramente fazer uma introdução à teoria de conexões em fibrados principais. Em seguida iremos introduzir a teoria de fibrados associados e conexões nestes fibrados, e por fim faremos uma breve introdução à teoria de classes características, dando enfoque às classes de Chern.

Para compreensão do material apresentado neste capítulo é necessário conhecimento prévio de conceitos básicos em geometria diferencial e grupos de Lie. O leitor que não estiver familiarizado com alguns dos conceitos usados durante este apêndice é remetido ao capítulo zero de [17] ou ao quinto capítulo de [18].

### A.1 Fibrados Principais

Um fibrado principal consiste de

1. Uma variedade<sup>1</sup>  $E$ , chamada de espaço total.
2. Uma variedade  $M$ , chamada de espaço base.
3. Um grupo de Lie  $G$ , com uma ação livre em  $E$  à direita. Dados  $p \in E$  e  $g \in G$  vamos denotar por  $pg$  a ação de  $G$  em  $E$ .
4. Uma sobrejeção  $\pi : E \rightarrow M$  tal que, dados  $x \in M$  e  $p \in E$ , com  $\pi(p) = x$ , temos  $\pi^{-1}(x) = pG$ . Ou seja, a imagem inversa de  $x$  por  $\pi$  é a órbita de  $p$  pela ação de  $G$ .

---

<sup>1</sup>Todas as variedades e aplicações que iremos considerar neste trabalho são diferenciáveis ( $C^\infty$ ).

Chamamos  $\pi$  de projeção e  $\pi^{-1}(x)$  de fibra sobre  $x$ .

5. Uma cobertura de  $M$  por abertos  $U_i$  e de difeomorfismos

$$T_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times G$$

da forma  $T_i(p) = (\pi(p), s_i(p))$ , sendo que as funções

$$s_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow G$$

satisfazem  $s(pg) = s(p)g$ . As aplicações  $T_i$  são chamadas trivializações locais.

Para economizar notação, vamos resumir as condições acima dizendo que  $\pi : E \longrightarrow M$  é um fibrado principal com grupo  $G$ . Algumas vezes também vamos denotar um fibrado principal por  $E(M, G)$ . Durante toda a dissertação vamos considerar que  $G$  é um grupo de matrizes, pois além de este ser o caso na maioria das teorias de interesse físico, também torna a apresentação da teoria de conexões em fibrados consideravelmente mais simples. Para uma exposição da teoria de fibrados para grupos de Lie arbitrários (não necessariamente de matrizes) o leitor é remetido à referência [17].

Em um fibrado principal,  $\pi : E \longrightarrow M$ , dados dois abertos  $U_i$  e  $U_j$  da cobertura<sup>2</sup> de  $M$ , com  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , podemos definir a função de transição

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow G$$

da seguinte forma. Dado  $p \in E$  com  $\pi(p) = m$  definimos:

$$g_{ij}(x) = s_i(p)s_j(p)^{-1}.$$

Como  $s_i(pg)s_j(pg)^{-1} = s_i(p)g(s_j(p)g)^{-1} = s_u(p)s_v(p)^{-1}$ , vemos que  $g_{ij}$  não depende da escolha de  $p \in \pi^{-1}(x)$ , e por isso está bem definida como função em  $U_i \cap U_j$ .

Uma seção local em um fibrado  $\pi : E \longrightarrow M$  é uma aplicação diferenciável de um aberto  $U \subset M$  em  $E$ :

$$\sigma : U \longrightarrow E$$

---

<sup>2</sup>Daqui por diante vamos omitir o fato dos abertos fazerem parte da cobertura de  $M$  quando isto ficar claro pelo contexto.

tal que  $\pi \circ \sigma$  é a identidade em  $U$ .

Existe uma correspondência natural entre trivializações e seções locais. Basta notarmos que, dada uma trivialização local

$$T_u : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$$

podemos definir uma seção local  $\sigma_u : U \longrightarrow E$  a partir de

$$\sigma_u(m) = T_u^{-1}(m, e).$$

Por outro lado, dada uma seção local  $\sigma_u : U \longrightarrow E$  podemos definir uma trivialização local a partir de sua inversa:

$$T_u^{-1}(m, g) = \sigma_u(m)g.$$

É fácil notar que  $T_u^{-1} : U \times G \longrightarrow \pi^{-1}(U)$  é de fato inversível, e portanto define uma trivialização local.

Um fibrado principal é trivial se existe uma trivialização local  $T_u$  com  $U = M$ . Devido a essa identificação entre seções e trivializações locais, temos que o fibrado é trivial se e somente se ele admite uma seção global.

### Reconstruindo fibrados a partir das funções de transição

Também podemos reconstruir um fibrado a partir de funções de transição definidas na variedade base. Para isso, se temos:

- uma variedade  $M$ ,
- uma cobertura de  $M$  por abertos  $U_i$  (ou seja  $\bigcup_i U_i = M$ ),
- um grupo de Lie  $G$ ,
- um conjunto de funções  $t_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow G$  satisfazendo:
  - i.  $t_{ii}(x) = e$ , onde  $e$  é a identidade em  $G$ ;
  - ii.  $t_{ij}(x) = [t_{ji}(x)]^{-1}$ ;
  - iii.  $t_{ik}(x) \cdot t_{kj}(x) = t_{ij}(x)$ ,



definimos a união

$$\mathcal{E} = \left( \bigcup_i U_i \times G \right).$$

Ainda, dados  $(x, g) \in U_i \times G$  e  $(y, h) \in U_j \times G$  introduzimos a relação de equivalência

$$(x, g) \sim (y, h) \Leftrightarrow x = y \text{ e } h = t_{ij}(x) \cdot g.$$

Neste caso é fácil mostrar que  $E = \mathcal{E} / \sim$  é um  $G$ -fibrado sobre  $M$  com projeção  $\pi([x, g]) = x$ . Definimos as trivializações locais  $T_i^{-1} : U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$  como  $T_i(x, g) = [(x, g)]$ , sendo  $[(x, g)]$  a classe de equivalência que contém  $(x, g)$ . Essa abordagem mostra que toda a informação sobre o fibrado está codificada em suas funções de transição.

### Fibrados equivalentes

Dados dois fibrados  $\pi : E \rightarrow M$  e  $\pi' : E' \rightarrow N$ , o primeiro com grupo  $G$  e o segundo com grupo  $G'$ , uma aplicação  $f : E \rightarrow E'$  é denominada morfismo de fibrados (em inglês *bundle map*) se leva uma fibra de  $E$  em uma fibra de  $E'$ . Ou seja, um mapa  $f$  é um morfismo de fibrados se dados  $p_1, p_2 \in \pi^{-1}(x)$  então  $f(p_1), f(p_2) \in \pi'^{-1}(y)$  para  $x \in M$  e algum  $y \in N$ . Neste caso  $f$  induz um mapa entre as variedades base

$$\tilde{f} : M \rightarrow N,$$

sendo  $\tilde{f}(x) = \pi'(f(p))$ , para qualquer  $p \in \pi^{-1}(x)$ . Note que  $\tilde{f}$  só está bem definida se  $f$  for um morfismo de fibrados.

Dizemos que dois fibrados  $\pi : E \rightarrow M$  e  $\pi' : E' \rightarrow M$  sobre a mesma base e com mesma fibra são equivalentes se existe um morfismo de fibrados  $f : E \rightarrow E'$  tal que o mapa induzido  $\tilde{f} : M \rightarrow M$  é a identidade.

### Fibrados induzidos

Dado um  $G$ -fibrado principal  $\pi : E \rightarrow N$  e uma função  $f : M \rightarrow N$  podemos definir o fibrado induzido (em inglês *pullback bundle*)  $f^*E$ , que é um  $G$ -fibrado sobre  $M$ . Definimos o fibrado induzido como

$$f^*E \equiv \{(x, p) \in M \times E \mid f(x) = \pi(p)\}$$

sendo que a projeção,  $\pi' : f^*E \rightarrow M$ , é definida trivialmente por  $\pi'(x, p) = x$ . Se  $(U_i, \phi_i)$  são as trivializações locais de  $E$  temos que  $f^{-1}(U_i)$  é uma cobertura de  $M$  e podemos definir trivializações locais nesta cobertura de forma que as funções de transição

$$t_{ij}^* : f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(U_j) \rightarrow G$$

satisfaçam  $t_{ij}^*(x) = t_{ij}(f(x))$ . Assim, podemos pensar em  $f^*E$  como sendo o fibrado obtido colando, sobre cada ponto  $x \in M$ , a fibra  $G_{f(x)}$ .

Um teorema importante relacionado a fibrados induzidos, cuja prova pode ser encontrada na referência [27], é o seguinte

**Teorema:** Dado um  $G$ -fibrado principal  $\pi : E \rightarrow N$  e dois mapas homotópicos  $f$  e  $g$  de uma variedade  $M$  em  $N$ , os fibrados induzidos  $f^*E$  e  $g^*E$  são equivalentes.

Um corolário que segue diretamente (ver [18]) do resultado acima é: se uma variedade  $M$  é contrátil a um ponto<sup>3</sup> então todo fibrado sobre  $M$  é trivial.

Podemos mostrar, usando o teorema acima, um resultado um pouco mais geral. Seja  $N$  um retrato de deformação<sup>4</sup> de  $M$  e seja  $H : [0, 1] \times M \rightarrow M$  a deformação de  $M$  em  $N$ . Definindo  $f(x) = H(0, x)$  e  $g(x) = H(1, x)$ , funções de  $M$  em  $M$ , o teorema acima garante que, se  $E$  é um  $G$ -fibrado qualquer sobre  $M$ , então  $f^*E$  e  $g^*E$  são equivalentes. Também devemos notar que como  $N \in M$ , temos que  $\pi^{-1}(N)$  é um  $G$ -fibrado sobre  $N$ . Agora, sabemos que  $f$  é a identidade em  $M$ , e portanto  $f^*E = E$ . Sendo assim,  $g^*E$  é equivalente a  $E$ . Mas sabemos que  $g(x) \in N$ , e portanto  $g^*E$  só depende do fibrado  $\pi^{-1}(N)$  sobre  $N$ . Neste sentido, todo fibrado sobre  $M$  é “equivalente” a um fibrado sobre  $N$ , onde por “equivalente” queremos dizer que ele é induzido por um fibrado na deformação retrátil  $N$ .

---

<sup>3</sup>Dizemos que uma variedade  $M$  é contrátil a um ponto se nesta variedade a aplicação identidade,  $f(x) = x$ , é homotópica a um mapa constante,  $g(x) = x_0$ .

<sup>4</sup>Dizemos que uma variedade  $N$  é um retrato de deformação da variedade  $M$  se existe uma função contínua  $H : [0, 1] \times M \rightarrow M$  que satisfaz:

$$\begin{aligned} H(0, x) &= x, \quad \forall x \in M, \\ H(t, x) &= x, \quad \forall x \in N, \\ H(1, x) &\in N, \quad \forall x \in M. \end{aligned}$$

## A.2 Conexões em Fibrados Principais

Antes de definirmos uma conexão em um fibrado principal precisamos da definição de uma forma  $\mathfrak{g}$ -valorizada.

**Definição:** Dada uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , uma  $n$ -forma,  $\omega$ ,  $\mathfrak{g}$ -valorizada é uma aplicação linear:

$$\omega : V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathfrak{g}$$

totalmente antissimétrica nos seus argumentos. Dada uma base  $T_j$  de  $\mathfrak{g}$ , podemos sempre decompor  $\omega = \sum_{j=1}^d \omega^j T_j$ , sendo  $d = \dim \mathfrak{g}$  e  $\omega^j$  1-formas usuais ( $\mathbb{R}$ -valorizadas). Vamos denotar o espaço dos campos de  $k$ -formas  $\mathfrak{g}$ -valorizadas em  $E$  por  $\Lambda^k(P, \mathfrak{g})$ .

Podemos definir uma conexão em um fibrado principal,  $\pi : E \longrightarrow M$ , com grupo  $G$  e álgebra de Lie associada  $\mathfrak{g}$ , de três maneiras equivalentes.

**Definição 1:** Uma conexão é uma decomposição do espaço tangente em cada ponto  $p \in E$  em:

$$T_p E = V_p \oplus H_p,$$

sendo  $V_p = \ker(\pi_*|_{T_p P})$ . Ou seja, dado um vetor  $X \in T_p E$ , existe uma decomposição única  $X = Y + X^H$ , com  $Y \in V_p$  e  $X^H \in H_p$ . Também impomos que  $R_{g^*}(H_p) = H_{pg}$  e que  $H_p$  depende de forma suave de  $p$ . Denominamos  $H_p$  de espaço horizontal.

**Definição 2:** Uma conexão é uma 1-forma  $\mathfrak{g}$ -valorizada definida em  $E$ , tal que as propriedades abaixo são satisfeitas:

- a. Dado  $A \in \mathfrak{g}$  definimos o campo vetorial  $A^\#$  como:

$$A_p^\# = \left. \frac{d}{dt} (p\gamma(t)) \right|_{t=0},$$

sendo  $\gamma(t) \in G$  e  $\dot{\gamma}(0) = A$ . Exigimos então que  $\omega(A^\#) = A$ .<sup>5</sup>

- b. Para  $g \in G$ , temos a representação adjunta  $\text{Ad}_g : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$  (ver [18, 17]). Exigimos que:

$$\omega_{pg}(R_{g^*}X) = \text{Ad}_{g^{-1}}[\omega_p(X)],$$

---

<sup>5</sup>Uma escolha natural é  $\gamma(t) = \exp(tA)$ .

ou seja,  $R_g^* \omega = \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega$ .

**Definição 3:** Uma conexão associa a cada trivialização local

$$T_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times G$$

uma 1-forma  $\mathfrak{g}$ -valorizada  $\omega_u$  em  $U$ . Esta é denominada forma local da conexão. Se  $T_j$  é uma outra trivialização local e  $g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow G$  é a função de transição de  $T_j$  para  $T_i$  exigimos que as conexões satisfaçam:

$$\omega_j(Y_x) = L_{g_{ij}(x)}^{-1}(g_{ij*}(Y_x)) + \text{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}}(\omega_i(Y_x)). \quad (\text{A.1})$$

Se  $G$  é um grupo de matrizes essa relação pode ser reescrita da forma:

$$\omega_i = g_{ij}^{-1} \omega_u g_{ij} + g_{ij}^{-1} dg_{ij}.$$

A forma local de conexão é associada (em física) a uma escolha de gauge, e a troca de  $\omega_i$  por  $\omega_j$  é denominada uma mudança de gauge. Essa identificação é discutida no capítulo 2 dessa dissertação.

A equivalência das três definições está demonstrada nas referências [17, 18]. As demonstrações em si são diretas porém longas e por isso não serão feitas neste apêndice. No entanto é importante entender qual a relação entre as três definições de conexão.

Dada uma 1-forma como na definição 2 podemos recuperar facilmente as definições 1 e 3. Para recuperar a definição 1, basta definirmos  $H_p = \ker(\omega_p)$ ,  $A = \omega(X) \in \mathfrak{g}$ ,  $Y = A^\#$  e  $X^H = X - Y$ . Para a definição 3, é só tomarmos  $\omega_i = \sigma_i^* \omega$ , sendo  $\sigma_i$  a seção local associada à trivialização  $T_i$ .

Dado um produto  $\alpha : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ , podemos definir um produto exterior (cunha) associado para as formas  $\mathfrak{g}$ -valorizadas. Em termos da decomposição em uma base esse produto é:

$$\omega \wedge_\alpha \eta = \left( \sum_a \omega^a T_a \right) \wedge_\alpha \left( \sum_b \eta^b T_b \right) = \sum_{a,b} \omega^a \wedge \eta^b \alpha(T_a, T_b).$$

O caso mais usual é quando  $\alpha$  é o colchete da álgebra de Lie. Neste caso vamos escrever:

$$\omega \wedge_{[\cdot]} \eta = [\omega, \eta].$$

Outro caso que ocorre com frequência é, no caso de grupos de matrizes, usarmos a multiplicação usual de matrizes como produto. Neste caso vamos omitir o subscrito  $\alpha$ .

Também podemos definir a derivada exterior de campos de k-formas  $\mathfrak{g}$ -valorizadas a partir da derivada exterior de formas usuais. Se  $\omega \in \Lambda^k(P, \mathfrak{g})$  definimos:

$$d\omega = d\left(\sum_a \omega^a T_a\right) = \sum_a (d\omega^a) T_a \in \Lambda^{k+1}(P, \mathfrak{g}).$$

**Definição:** Dada  $\eta \in \Lambda^k(P, \mathfrak{g})$ , definimos  $\eta^H \in \Lambda^k(P, \mathfrak{g})$  como:

$$\eta^H(X_1, \dots, X_k) = \eta(X_1^H, \dots, X_k^H).$$

### Curvatura

**Definição:** A derivada exterior covariante de uma k-forma,  $\eta \in \Lambda^k(P, \mathfrak{g})$ , é definida como:

$$D^\omega \eta \equiv (d\eta)^H.$$

Deve-se notar que a derivada exterior está relacionada à conexão  $\omega$ . Quando estiver claro do contexto qual a conexão utilizada vamos denotar a derivada covariante somente por  $D\eta$ .

**Definição:** A curvatura,  $\Omega \in \Lambda^2(P, \mathfrak{g})$ , é a derivada covariante da conexão:

$$\Omega = D\omega.$$

É fácil verificar que a curvatura satisfaz [17]

$$R_g^* \Omega = Ad_g \Omega.$$

Uma forma prática de se obter a curvatura de uma dada conexão  $\omega$  é via a equação de

estrutura [18, 17]:

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]. \quad (\text{A.2})$$

Aplicando a equação acima a dois campos vetoriais  $X_1$  e  $X_2$  temos:

$$\Omega(X_1, X_2) = d\omega(X_1, X_2) + [\omega(X_1), \omega(X_2)].$$

Essa expressão é ainda mais simples no caso de  $G$  ser um grupo de matrizes. Neste caso podemos reescrever a equação como:

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega.$$

Assim como no caso da conexão, também podemos definir a forma local de curvatura:

$$\Omega_i = \sigma_i^* \Omega.$$

E devido às propriedades do pullback, podemos reescrever a equação de estrutura para essa forma local como:

$$\Omega_i = d\omega_i + \frac{1}{2}[\omega_i, \omega_i].$$

Uma propriedade importante da forma local de curvatura é que formas associadas a diferentes trivializações locais se relacionam de uma maneira bem mais simples do que as formas de conexão. É fácil mostrar que [17]:

$$\Omega_j = Ad_{g_{ij}(x)^{-1}} \Omega_i.$$

### Identidade de Bianchi

Escrevendo a curvatura via a equação de estrutura (A.2) é fácil provar a identidade de Bianchi

$$D\Omega = 0. \quad (\text{A.3})$$

**Prova:** Usando a equação de estrutura vemos que

$$d\Omega = d(d\omega + [\omega, \omega]) = d[\omega, \omega].$$

É fácil mostrar, decompondo  $\omega$  em uma base  $T_a$  da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , que

$$d[\omega, \omega] = [d\omega, \omega] - [\omega, d\omega],$$

e portanto

$$D\Omega(X_1, X_2, X_3) = (d\Omega)^H = [d\omega, \omega]^H - [\omega, d\omega]^H = 0,$$

pois  $\omega(X) = 0$  para qualquer campo horizontal  $X$ .

A identidade de Bianchi tem grande relevância para o estudo de soluções auto-duais da equação de Yang-Mills, conforme vimos ao longo do desenvolvimento desta dissertação.

### A.3 As classes de Chern

Nesta seção vamos fazer uma breve introdução às classes características visando apresentar as classes de Chern em um fibrado principal.

#### Polinômios $G$ -invariantes

Dado um grupo de Lie  $G$  com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , um mapa  $k$ -linear simétrico

$$P : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \tag{A.4}$$

é denominado  $G$ -invariante se, para todo  $g \in G$  e  $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathfrak{g}$ ,

$$S(\text{Ad}_g A_1, \text{Ad}_g A_2, \dots, \text{Ad}_g A_k) = S(A_1, A_2, \dots, A_k),$$

sendo  $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$  a representação adjunta de  $G$  (ver [17, 18]). Assim,  $\text{Ad}_g$  é um operador linear inversível em  $\mathfrak{g}$ .

Vamos denotar o espaço dos mapas  $k$ -lineares simétricos e  $G$ -invariantes por  $I^k(G)$ . Uma aplicação  $S \in I^k(G)$  induz uma aplicação  $S : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $P(A) = S(A, A, \dots, A)$ . Vamos chamar  $P$  de um polinômio  $G$ -invariante. Note que um polinômio  $G$ -invariante de grau  $k$  é uma função homogênea de grau  $k$  da álgebra  $\mathfrak{g}$  em  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) que satisfaz

$$P(\text{Ad}_g A) = P(A),$$

para qualquer elemento  $g \in G$ . Por outro lado, dado  $P$ , um polinômio  $G$ -invariante de grau  $k$ , obtemos um elemento de  $\tilde{P} \in I^k(G)$  da seguinte forma: expandimos  $P(t_1 A_1 + t_2 A_2 +$

$\dots t_k A_k$ ) como um polinômio nos  $t_i$  e identificamos  $\tilde{P}(A_1, A_2, \dots, A_k)$  com o coeficiente do termo  $t_1 t_2 \dots t_k$  multiplicado por  $1/k!$ . Denominamos  $\tilde{P}$  de polarização de  $P$ . É imediato notar que

$$P(A) = \tilde{P}(A, A, \dots, A),$$

e portanto não vamos distinguir  $P$  e  $\tilde{P}$  daqui por diante.

Dada uma variedade  $M$  e formas  $\mathfrak{g}$ -valorizadas  $\eta_i \in \Lambda^{q_i}(M, \mathfrak{g})$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , podemos escrever  $\eta_i = \sum_a \eta_i^a T_a$ , onde  $\{T_a\}$  é uma base de  $\mathfrak{g}$  e dado  $P \in I^k(G)$ . Definimos:

$$P(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k) \equiv \sum_{a_1, a_2, \dots, a_k} \eta_1^{a_1} \wedge \eta_2^{a_2} \dots \eta_k^{a_k} P(T_{a_1}, T_{a_2}, \dots, T_{a_k}). \quad (\text{A.5})$$

### Teorema de Chern-Weyl

Seja  $E(M, G)$  um fibrado principal e  $\omega$  uma conexão em  $E$ . Usando uma trivialização local podemos escrever a forma local da conexão,  $A$ , e da curvatura,  $F = dA + A \wedge A$ . É fácil verificar que, dado  $P \in I^{2k}(G)$ , a  $2k$ -forma  $P(F)$  está bem definida na variedade base  $M$ . Podemos agora enunciar o teorema de Chern-Weyl:

#### Teorema de Chern-Weyl:

Dado um fibrado principal  $E(M, G)$ , um polinômio  $G$ -invariante  $P$  e  $\omega$  e  $\omega'$  conexões em  $E$ , temos:

- i.  $dP(F) = 0$ ;
- ii. Se  $\Omega$  e  $\Omega'$  são as curvaturas associadas as conexões  $\omega$  e  $\omega'$ , e denotando suas formas locais respectivamente por  $F$  e  $F'$ , então

$$P(F) - P(F') = d\theta,$$

para algum  $\theta \in \Lambda^{2k-1}(M, \mathfrak{g})$ . Ou seja, a classe dos polinômios  $P(F)$  na cohomologia de de Rham não depende da conexão usada, mas somente da estrutura do fibrado  $E(M, G)$ .

A classe de  $P(F)$  na cohomologia de de Rham é denominada classe característica. Vamos agora estudar um exemplo de classe característica que aparece naturalmente no estudo de instantons: as classes de Chern.



### As classes de Chern

Vamos considerar  $G$ -fibrados principais nos quais o grupo  $G$  é um subgrupo de  $GL(m, \mathbb{C})$ , ou seja, os elementos de  $G$  são matrizes complexas  $m \times m$  e inversíveis. Os elementos da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  associada são matrizes complexas  $m \times m$ . Definimos polinômios invariantes  $c_j \in I^j(G)$  usando a relação

$$\det \left( \lambda I - \frac{1}{2\pi i} A \right) = \sum_{k=0}^m c_k(A) \lambda^{m-k}.$$

É fácil notar que se as matrizes em  $G$  são unitárias, os elementos da álgebra de Lie são anti-hermitianos e portanto  $c_j(A)$  é real. Estamos interessados no caso particular  $G = \text{SU}(N)$ . Neste caso, como  $A \in \mathfrak{g}$  é anti-hermitiano, temos que  $\frac{1}{2\pi i} A$  é hermitiano e portanto pode ser diagonalizado por um elemento  $g \in \text{SU}(N)$ , ou seja,

$$\det \left( \lambda I - \frac{1}{2\pi i} A \right) = \det \left( \lambda I - g^{-1} \frac{1}{2\pi i} A g \right) = \det (\lambda I + D),$$

onde  $D = \text{diag}(D_1, \dots, D_m)$ . Vemos assim que

$$\begin{aligned} \det \left( \lambda I - \frac{1}{2\pi i} A \right) &= (\lambda + D_1)(\lambda + D_2) \dots (\lambda + D_m) \\ &= \lambda^m + \lambda^{m-1} (D_1 + D_2 + \dots + D_m) + \\ &\quad + \lambda^{m-2} (D_1 D_2 + D_1 D_3 + \dots + D_{m-1} D_m) + \dots \end{aligned}$$

Como os polinômios  $c_j(A)$  são  $G$ -invariantes concluímos que

$$\begin{aligned} c_1(A) &= -\frac{1}{2\pi i} \text{tr } A, \\ c_2(A) &= -\frac{1}{8\pi^2} [(\text{tr } A)^2 - \text{tr}(A^2)], \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ c_m(A) &= \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^m \det A. \end{aligned}$$

De acordo com o que foi discutido no início desta seção estes polinômios definem classes

características no  $G$ -fibrado principal, que são as classes na cohomologia de de Rham das  $2j$ -formas  $c_j(\Omega)$ . Denominamos  $c_j(\Omega)$  de a  $j$ -ésima classe de Chern. Em um fibrado  $E(M, G)$ ,  $c_j(\Omega)$  é uma  $2j$ -forma definida na base  $M$  e, dada uma subvariedade compacta  $N \in M$  de dimensão  $2j \leq \dim M$ , podemos integrar  $c_j(\Omega)$  em  $N$ . Se a variedade  $N$  não tem bordo vemos que a integral de  $c_j(\Omega)$  não depende da conexão  $\omega$  e o resultado da integral é sempre um número inteiro [35]. Denominamos este inteiro de  $j$ -ésimo número de Chern.

Durante a dissertação estivemos interessados na segunda classe de Chern,  $c_2(\Omega)$ . Em particular, como as matrizes de  $\mathfrak{su}(N)$  são anti-hermitianas temos

$$c_2(\Omega) = \frac{1}{8\pi^2} \text{tr}(\Omega \wedge \Omega). \quad (\text{A.6})$$

Dado um  $SU(N)$ -fibrado sobre uma variedade compacta  $M$  de dimensão quatro podemos definir o segundo número de Chern como

$$\int_M c_2(\omega) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \text{tr}(\Omega \wedge \Omega). \quad (\text{A.7})$$

No capítulo 4 mostramos a relação entre este número e a carga topológica dos instantons em  $\mathbb{R}^4$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] C. N. Yang e R. L. Mills, “Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance”, Phys. Rev. **96**, 191 (1954).
- [2] K. Huang, “Quarks, leptons and gauge fields”, World Scientific, 1982.
- [3] R. Jackiw, “Quantum meaning of classical field theory”, Rev. Mod. Phys. **49**, 681 (1977).
- [4] S. D. Coleman, “Uses of instantons” in Aspects of symmetry: selected Erice lectures, Cambridge University Press, 1988.
- [5] R. Rajaraman, “Solitons and instantons”, North Holland, 1989.
- [6] R. P. Feynman, A. R. Hibbs, “Quantum mechanics and path integrals”, McGraw-Hill Companies, 1965.
- [7] R. Jackiw and C. Rebbi, “Vacuum periodicity in a Yang-Mills quantum theory”, Phys. Rev. Lett. **37**, 172 (1976).
- [8] G. 't Hooft, “How instantons solve the U(1) problem”, Phys. Rept. **142** 357 (1986).
- [9] J. M. Charap and M. J. Duff, “Gravitational Effects On Yang-Mills Topology”, Phys. Lett. B **69**, 445 (1977).
- [10] J. M. Charap e M. J. Duff, “Space-time topology and a new class of Yang-Mills instanton”, Phys. Lett. B **71**, 219 (1977).
- [11] Y. Brihaye e E. Radu, “On  $d = 4$  Yang-Mills instantons in a spherically symmetric background”, Europhys. Lett. **75**, 730 (2006), arXiv:hep-th/0605111v2.

- [12] R. A. Mosna e G. M. Tavares, “New self-dual solutions of SU(2) Yang-Mills theory in Euclidean Schwarzschild space”, *Phys. Rev. D* **80**, 105006 (2009), arXiv:math-ph/0909.5145v2.
- [13] R. A. Mosna e G. M. Tavares, “On self-dual solutions of SU(2) Yang-Mills theory in Euclidean Reissner-Nordstrom space”, *Em preparação*.
- [14] E. Witten, “Some exact multipseudoparticle solutions of classical Yang-Mills theory”, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 121 (1977).
- [15] E. S. Abers and B. W. Lee, “Gauge theories”, *Phys. Rept.* **9**, 1 (1973).
- [16] L. D. Faddeev and A. A. Slavnov, “Gauge fields. Introduction to quantum theory”, *Front. Phys.* **83**, 1 (1990).
- [17] D. Bleeker, “Gauge Theories and Variational Principles”, Addison-Wesley, 1981.
- [18] M. Nakahara, “Geometry, Topology and Physics”, IOP, 2003.
- [19] R. M. Wald, “General Relativity”, University of Chicago Press (1984).
- [20] J. Stillwell, “Naive Lie theory”, Springer, 2009.
- [21] G. E. Bredon, “Topology and geometry”, Springer-Verlag GMT 139 (1993).
- [22] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz and Yu. S. Tyupkin, “Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations”, *Phys. Lett. B* **59**, 85 (1975).
- [23] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, V. G. Drinfeld and Yu. I. Manin, “Construction of instantons”, *Phys. Lett. A* **65**, 185 (1978).
- [24] K. K. Uhlenbeck, “Removable singularities in Yang-Mills fields”, *Comm. Math. Phys.* **83**, 11 (1982).
- [25] J. Munkres, “Topology”, Prentice Hall, 2a edição, 2000.
- [26] T. Ortin, “Gravity and Strings”, Cambridge University Press (2004).
- [27] N. Steenrod, “The topology of fiber bundles”, Princeton University Press (1970).
- [28] L. F. Abbott e S. Deser, “Charge definition in non-abelian gauge theories”, *Phys. Lett. B* **116**, 259 (1982).

- [29] B. Tekin, “Yang-Mills solutions on Euclidean Schwarzschild space”, *Phys. Rev. D* **65**, 084035 (2002), arXiv:hep-th/0201050v2.
- [30] G. 't Hooft, “Magnetic monopoles in unified gauge theories,” *Nucl. Phys. B* **79**, 276 (1974).
- [31] G. Etesi e T. Hausel, “Geometric interpretation of Schwarzschild instantons”, *J. Geom. Phys.* **37**, 126 (2001), arXiv:hep-th/0003239v2.
- [32] B. Julia e A. Zee, “Poles with both magnetic and electric charges in nonabelian gauge theory,” *Phys. Rev. D* **11**, 2227 (1975).
- [33] C. Bervillier, B. Boisseau and H. Giacomini, “Analytical approximation schemes for solving exact renormalization group equations II. Conformal mappings”, *Nucl. Phys. B* **801**, 296 (2008), arXiv:hep-th/0802.1970v2.
- [34] C. Bervillier, “Conformal mappings versus other power series methods for solving ordinary differential equations: illustration on anharmonic oscillators”, arXiv:math-ph/0812.2262v1.
- [35] M. Gockeler, T. Schucker, “Differential geometry, gauge theories, and gravity”, Cambridge University Press (1987).