

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
MARÇO DE 1979

Imp. p. 29.2.79

ANÁLISE E IMPLEMENTAÇÃO DE ALGORITMOS,
DE CONTROLE HIERÁRQUICO DE SISTEMAS DINÂMICOS

por: Fernando Antonio Campos Gomide
Orientador: Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura
Orientador: Prof. Dr. Manuel de Jesus Mendes

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia - FEC -
UNICAMP como parte dos requisitos exigidos para
obtenção do título de MESTRE EM CIÊNCIAS.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Aos meus pais Ari (in memoriam) e Maria de Lourdes
e aos meus irmãos.

Agradecimentos

aos meus orientadores Bottura e Mendes, exprimo toda minha amizade, encorajamento e o reconhecimento pela eficácia com que me conduziram neste trabalho,

ao Prof. Mammana e aos colegas do LED, pelo apoio,

aos amigos Alfeu, Cury, Gimeno, Jaime, Márcio e Wagner por todos os momentos,

aos colegas da "Província de Minas", Rob, Elefante, Zê, João e Dudu pela convivência,

ã Niura pela paciência no trabalho de datilografia e a dedicação na composição deste trabalho,

ã Dôris pelos desenhos,

e a todos que colaboraram.

Este trabalho contou com o apoio financeiro das entidades:

CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO E TECNOLÓGICO - CNPq
CAPES - COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DO PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR

RESUMO

Neste trabalho são analisados e implementados algoritmos de otimização e controle hierárquico de sistemas dinâmicos discretos.

Dentre os tipos de algoritmos de controle hierárquico são discutidos os seguintes: Decomposição Espacial com Coordenação por Predição de Interação, Decomposição Espacial com Coordenação pelo Coestado e Decomposição Paramétrica com Coordenação pelo Critério.

Utilizando exemplos de sistemas reguladores lineares estacionários, com critério quadrático separável, sem restrições nas variáveis de estado e de controle, as propriedades de convergência dos algoritmos são analisadas.

Para a avaliação dos algoritmos implementados, compara-se as soluções obtidas pela utilização dos algoritmos de controle hierárquico com a solução ótima obtida sem decomposição multinível quanto aos requisitos computacionais: tempo de processamento e memorização.

Finalmente, faz-se uma aplicação prática de um dos algoritmos a um sistema de transporte metroviário, onde o sistema apresenta atraso de transporte, critério não linear e não quadrático com restrições nas variáveis de estado e controle.

INDICE

Introdução	1.1
Capítulo 1 - Otimização e Controle de Sistemas Dinâmicos Discretos por Decomposição e Coordenação	1.1
1.1 - Introdução	1.1
1.2 - Noções de Decomposição e Coordenação	1.1
1.3 - Formulação do Problema de Otimização Dinâmica	1.5
1.4 - Formulação Hierárquica do Problema de Otimização Dinâmica	1.20
1.5 - Resumo	1.33
Capítulo 2 - Métodos de Decomposição e Coordenação em Estruturas com Dois Níveis	2.1
2.1 - Introdução	2.1
2.2 - O Método Conceitual - Construção de Estruturas com Dois Níveis	2.1
2.3 - Método Decomposição Espacial - Coordenação por Predição de Interação	2.4
2.4 - Método Decomposição Paramétrica - Coordenação pelo Critério	2.18
2.5 - Método Decomposição Espacial - Coordenação pelo Coestado	2.26
2.6 - Características dos Métodos	2.34
2.7 - Resumo	2.35

Capítulo 3 - Aspectos Computacionais e Simulação dos Métodos	3.1
3.1 - Introdução	3.1
3.2 - Aspectos Computacionais	3.2
3.3 - Sistemas Simulados	3.3
3.4 - Estudos de Simulação	3.8
3.5 - Comparação dos Algoritmos	3.27
3.6 - Resumo	3.33
Capítulo 4 - Otimização Hierárquica de um Sistema Metroviário	4.1
4.1 - Introdução	4.1
4.2 - O Modelo do Sistema e o Problema de Controle	4.2
4.3 - O Método Decomposição Paramétrica - Coordenação pelo Critério com Atraso	4.7
4.4 - Aplicação do Método ao Sistema do Metrô	4.11
4.5 - Resultados	4.15
Conclusão	0.1
Apendice A - Sumário do Algoritmo para a Implementação do Regula- dor Linear Quadrático Global	A.1
Apendice B - Solução dos Subproblemas do Nível Inferior para o Mé- todo Decomposição Espacial - Coordenação por Predição de Interação	B.1
Apendice C - Sumário do Algoritmo "Golden-Section" para Busca Uni- dimensional	C.1
Apendice D - Determinação da Região de Convergência do Algoritmo Decomposição Espacial - Coordenação pelo Coestado em Função do Passo α_v	D.1
Referências Bibliográficas	R.1

INTRODUÇÃO

Os sistemas de grande porte e seu controle descentralizado ou hierarquizado vem sendo objeto de um estudo intensivo, tanto sob o ponto de vista teórico, como de aplicações. A motivação é decorrente da crescente complexidade dos sistemas construídos pelo homem e a necessidade de estabelecer estratégias para o seu controle coordenado, devido às limitações cada vez maiores nos recursos disponíveis para sua construção.

Uma classe de estruturas para o controle ótimo destes sistemas, desenvolvida pela utilização dos conceitos de decomposição e coordenação, possibilitou o estabelecimento de métodos multiníveis para a regulação de tais sistemas [1,15]. Nestes métodos, um problema global, definido a partir do sistema como um todo, é decomposto em subsistemas que selecionam suas funções de controle independentemente, pela ação dos controladores locais num nível inferior. Para que as atuações independentes dos controladores sejam coerentes com o objetivo do sistema global, um controlador num nível superior é construído e sua função é coordenar os controladores do nível inferior, pela manipulação dos modelos individuais, dos seus objetivos ou de ambos.

Em geral, a classe de sistemas considerados neste trabalho pode ser representada como um conjunto de subsistemas interconectados, onde a cada subsistema está associado seus vetores de estado, de controle e saída. Os vetores de estado e controle do sistema global são obtidos, agrupando os vetores locais.

Teoricamente, problemas de otimização e controle de sistemas dinâmicos de dimensão grande podem ser resolvidos utilizando-se técnicas clássicas de otimização e de controle. Na prática, à medida que a dimensão do problema cresce, devido ao grande número de variáveis, estes problemas são cada vez mais difíceis de serem resolvidos e as vezes sua solução é impossível devido à quantidade de memória utilizada pelo computador ou por causa de instabilidade numé-

rica dos algoritmos.

Diferentes métodos podem ser utilizados para o estudo de sistemas de grande porte, como por exemplo, métodos de decomposição em programação matemática ou os métodos de controle hierárquico. Os métodos de programação matemática, contudo, são importantes sob o aspecto de cálculo enquanto que os métodos hierárquicos são importantes não só como uma alternativa de contornar as dificuldades de cálculos, mas também como função de controle, pois permitem ou facilitam a síntese da estrutura e do algoritmo de controle [22].

Dentre os sistemas multiníveis estudados, o sistema com dois níveis, com uma unidade de controle no segundo nível é particularmente importante devido a sua simplicidade e a possibilidade de se construir sistemas mais complexos a partir deste caso particular.

Nos limitaremos ao estudo de tais estruturas com somente uma decomposição horizontal no nível inferior, porque a função do controle que vamos considerar (otimização) é um nível da hierarquia das funções de controle possíveis.

A organização deste trabalho se resume ao seguinte esquema: no capítulo 1 são estabelecidos os conceitos de decomposição e coordenação, a formulação do problema de otimização dinâmica na forma global e hierárquica. No capítulo seguinte são apresentados os métodos e os respectivos algoritmos para implementação em computador digital. No capítulo 3 são feitas aplicações ao problema do regulador linear quadrático, estado final livre, clássico. Características de convergência dos algoritmos devido a variações nos parâmetros do problema e ao grau de acoplamento entre subsistemas, para os métodos que utilizam a decomposição espacial, são estabelecidas neste capítulo, onde também são comparados os diversos algoritmos. No capítulo 4 aplica-se um dos algoritmos para otimização hierárquica de um sistema metroviário.

CAPÍTULO 1 - OTIMIZAÇÃO E CONTROLE DE SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS POR DECOMPOSIÇÃO E COORDENAÇÃO

1.1 - Introdução

Neste capítulo são apresentados os principais conceitos utilizados durante o desenvolvimento deste trabalho. São formulados o problema na sua forma global (centralizada) e o problema na sua forma hierárquica (descentralizada).

1.2 - Noções de Decomposição e Coordenação

Os procedimentos clássicos para o controle do comportamento de sistemas, possuem uma característica básica: a pressuposição de centralização, ou seja, todas as informações disponíveis sobre o sistema (modelo, resposta do sistema) e os cálculos baseados nestas informações são centralizados num único lugar. Estes procedimentos definem um tipo de estrutura denominada de NÍVEL ÚNICO - ÚNICO OBJETIVO, cujo diagrama funcional está representado na figura 1.1.

Um sistema de controle hierárquico é um sistema com vários níveis, composto de unidades de comando dispostas segundo uma estrutura piramidal.

Duas noções fundamentais são a base de elaboração de sistemas de controle a vários níveis: DECOMPOSIÇÃO, que consiste na divisão horizontal e vertical da função de controle e COORDENAÇÃO, que permite que o objetivo global da função de controle seja atingido.

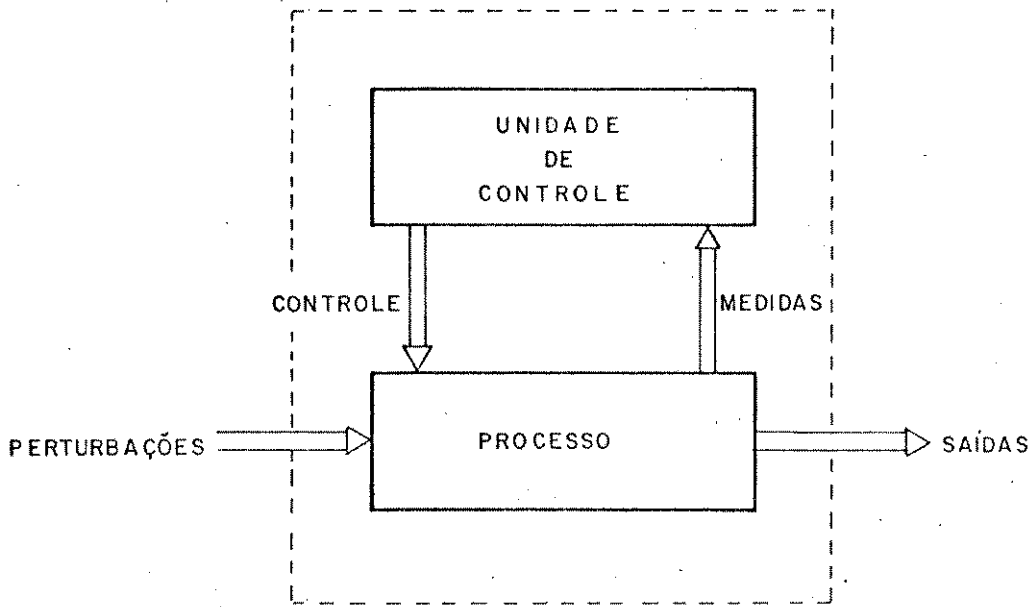


Fig. 1.1 - Estrutura com ÚNICO NÍVEL - ÚNICO OBJETIVO.

Decomposição por Divisão Vertical |1|

A unidade de controle é dividida em unidades elementares, segundo uma hierarquia das funções de controle em diferentes níveis. A coordenação é assegurada por uma troca de informações no sentido descendente e de medidas no sentido ascendente, conforme mostra a figura 1.2.

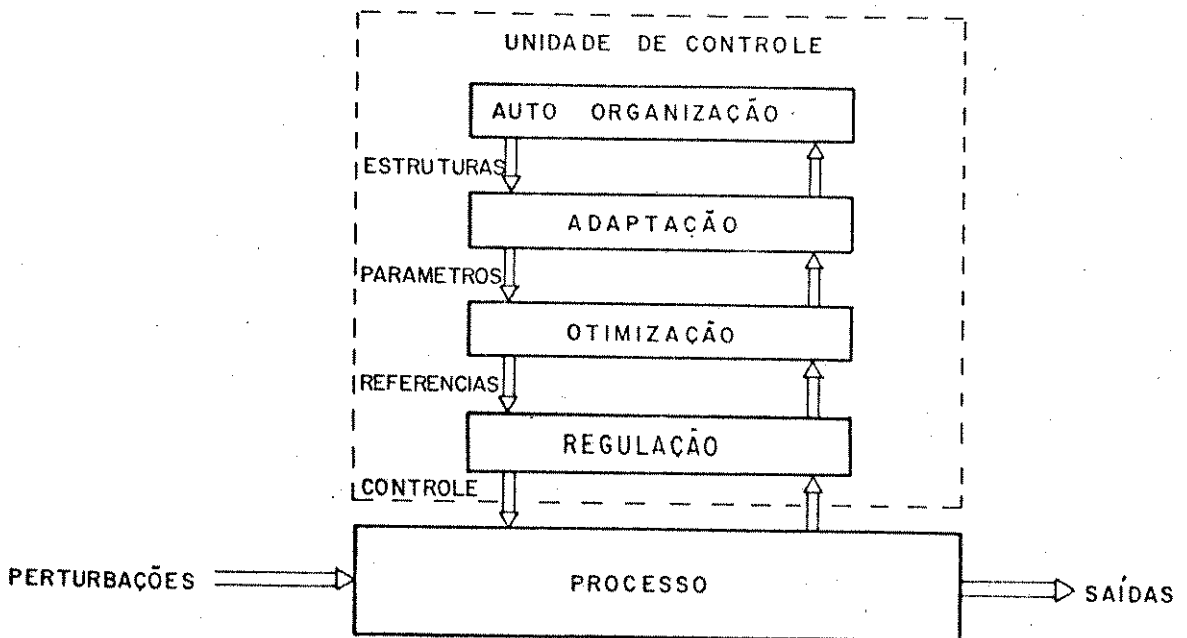


Fig. 1.2 - Divisão vertical: níveis funcionais de controle.

Decomposição por Divisão Horizontal | 2 |

O processo ou o sistema é decomposto em um grupo de subsistemas de sacoplados de dimensão reduzida, que são tratados independentemente, obtendo assim uma divisão da tarefa de cálculo a executar.

A natureza deste procedimento é puramente algorítmica devido a problemas de convergência e memória dos métodos de cálculo e da possibilidade da utilização de sistemas multiprocessadores que permitem a execução de programas em paralelo, certamente conveniente a este tipo de decomposição.

Os subproblemas contêm parâmetros que levam em consideração as interações entre os subsistemas. Estes parâmetros são manipulados por um outro subsistema chamado de coordenador, de maneira tal que as soluções locais dos subproblemas satisfaçam o objetivo global. Usualmente, os subsistemas locais constituem o nível inferior enquanto que o coordenador é colocado no nível superior, obtendo assim uma estrutura com dois níveis, conforme mostra a figura 1.3.

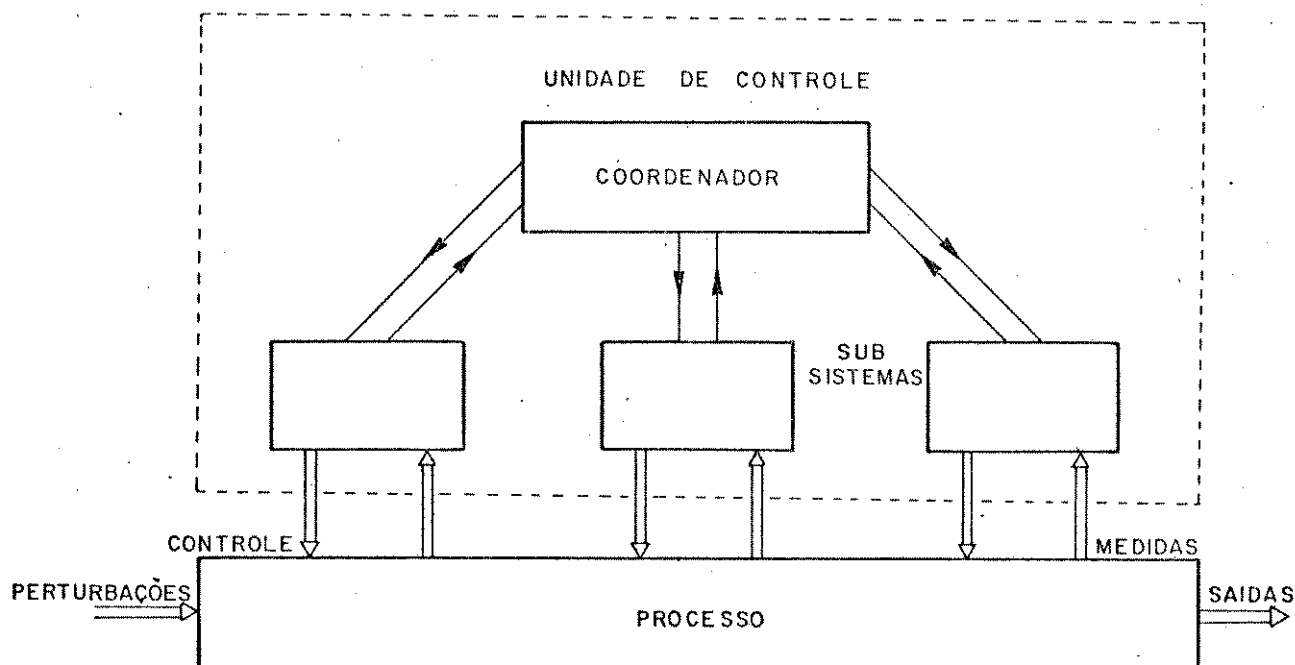


Fig. 1.3 - Estrutura com dois níveis.

Esta estrutura com dois níveis é básica na geração de outras estruturas com vários níveis (figura 1.4), sendo portanto de interesse particular neste trabalho.

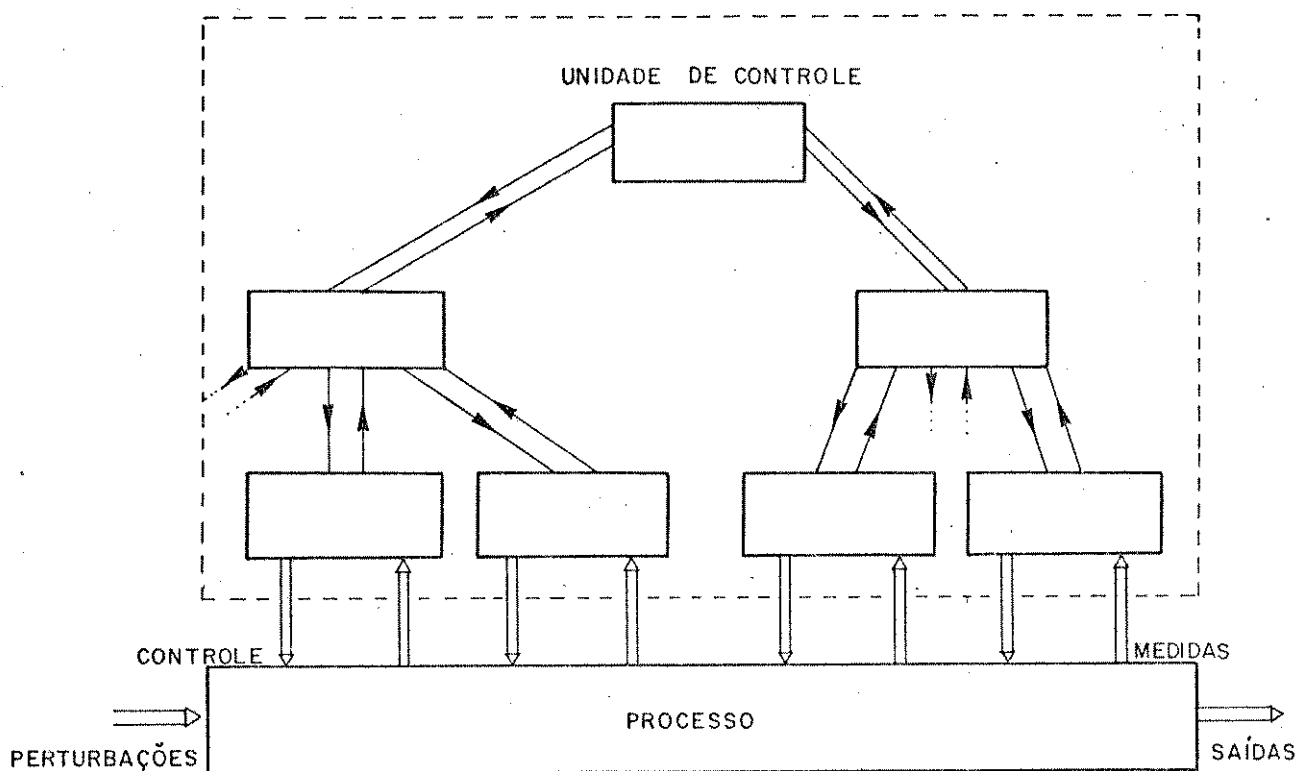


Fig. 1.4 - Estrutura com vários níveis.

Estruturas Hierárquicas Compostas [2]

Em muitos sistemas de grande porte, é possível decompor o sistema original usando mais do que um método de decomposição de acordo com as características e requerimentos do sistema. Isto resultará em decompor o sistema original em um sistema de "estrutura hierárquica composta", onde diferentes métodos podem ser realizados em um sistema.

Os procedimentos de decomposição são:

a. **DECOMPOSIÇÃO POR PRIORIDADE** - Implementada em sistemas que possuem diferentes relações de prioridade entre seus subsistemas. Nestes sistemas, a estrutura do sistema é decomposta de acordo com a prioridade de ação de seus elementos.

b. **DECOMPOSIÇÃO ESPACIAL** - Neste caso é possível fazermos uma partição no sistema original horizontalmente. O sistema então é composto de subsistemas acoplados de acordo com suas características espaciais particulares.

Os subsistemas são desacoplados pela introdução de variáveis de coordenação e podem ser tratados independentemente.

c. DECOMPOSIÇÃO TEMPORAL - A decomposição temporal pode ser implementada em sistemas que possuam características de comportamento no tempo diferentes entre seus elementos. Outra estrutura hierárquica pode então ser construída onde as unidades dos níveis superiores são caracterizados pela variações lentas e as unidades do nível inferior pelas variações rápidas.

d. DECOMPOSIÇÃO PARAMÉTRICA - O sistema original é decomposto no parâmetro que determina a evolução dinâmica do sistema.

Neste trabalho serão consideradas estruturas com decomposição espacial e estruturas com decomposição paramétrica porque se apresentam potencialmente mais promissoras na literatura [3,10].

1.3 - Formulação do Problema de Otimização Dinâmica

Apresentação do Problema

Equações do Sistema

Consideremos um sistema que satisfaça a equação às diferenças:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{g}[\underline{x}(k), \underline{u}(k)] \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.1)$$

onde

$$\underline{x} = \text{COL} [x_1, x_2, \dots, x_n] \in E^n$$

é o vetor de estado.

$$\underline{u} = \text{COL} [u_1, u_2, \dots, u_m] \in U \subset E^m$$

é o vetor de controle, e

$$\underline{g} = \text{COL} |g_1, \dots, g_n|$$

$$\underline{g}: E^n \times U \rightarrow E^n$$

$$g_i \in C^1 \text{ em } E^n \times U \quad i = 1, \dots, n$$

onde C^1 é a classe das funções contínuas com primeiras derivadas contínuas.

U é definido de maneira tal que:

a. $\forall \underline{u} \in U$, existe ao menos um $\delta \underline{u} \in E^m$, $\delta \underline{u} \neq 0$, e uma constante $\zeta_1(\underline{u}, \delta \underline{u}) > 0$ tal que $(\underline{u} + \zeta \delta \underline{u}) \in U$, $\forall \zeta$, com $0 \leq \zeta \leq \zeta_1(\underline{u}, \delta \underline{u})$.

b. Para $\underline{u} \in U$ dado, seja o conjunto de todos $\delta \underline{u}$ que possuem a propriedade (a) representado por $\Lambda(\underline{u})$, um conjunto convexo.

Por hipótese $\underline{x}(0)$ é dado. Então se a sequência de controle

$$|\underline{u}(0, k-1)| \triangleq |\underline{u}(0), \dots, \underline{u}(k-1)|$$

é dada, a trajetória

$$|\underline{x}(0, k)| \triangleq |\underline{x}(0), \dots, \underline{x}(k)|$$

pode ser computada.

Condições Iniciais

Desde que a equação às diferenças (1.1) não dependa de k , será suposto que o tempo inicial é sempre em $k = 0$ e que o valor inicial do estado é sempre dado como $\underline{x}(0)$.

Condições Terminais

ESTÁGIO: será sempre suposto que o número de estágios sobre o qual o sistema é operado, é fixo em K .

ESTADO: existem duas possibilidades que serão consideradas como condições terminais do estado.

a. Suponha-se que um conjunto convexo fechado $S \subset E^n$ é dado. É requerido que no estágio final K , o estado esteja em S , isto é, $\underline{x}(K) \in S$. Esta definição permite que S seja um ponto em E^n , um subconjunto do E^n ou todo o E^n . Se S for um subconjunto convexo fechado de E^n , possuindo mais de um ponto, será suposto que cada ponto da sua superfície de contorno possua um único plano tangente.

b. Também é possível que S seja uma variedade linear $(n-l)$ dimensional descritas pelas l equações:

$$S = \{ \underline{x} / h_i(\underline{x}) = 0 ; \quad i = 1, 2, \dots, l < n \}$$

Por hipótese, $h_i(\underline{x})$ possui derivadas parciais contínuas com respeito a x_i , $\nabla_{\underline{x}} h_i \neq 0 \quad \forall \underline{x} \in S, \quad i = 1, \dots, l$.

Funcional de Custo

Suponha-se que o custo de transição de estado $\underline{x}(k)$ para o estado $\underline{x}(k+1)$, causado pelo controle $\underline{u}(k)$ seja dado por $f_0 | \underline{x}(k), \underline{u}(k) |$. Seja $J_0(k)$ o custo de operação do sistema do passo zero até k . Então $J_0(k)$ é a solução da equação às diferenças

$$J_0(k+1) = J_0(k) + f_0 | \underline{x}(k), \underline{u}(k) | = f | \underline{x}(k), \underline{u}(k) | \quad (1.2)$$

com $J_0(0) = 0$.

Supõe-se que $f_0 \in C^1$ em $E^n \times U$.

A equação (1.2) podem também ser expressa na forma:

$$J|\underline{x}(k), \underline{u}(k)| = \sum_{j=0}^k f_0|\underline{x}(j), \underline{u}(j)| \quad (1.3)$$

mas neste ítem será adotada a equação (1.2) por simplicidade de notação.

Equações do Sistema Extendidas

Por conveniência, a equação do sistema será estendida para incluir a variável de custo, definindo os vetores:

$$\underline{\tilde{x}}(k) \triangleq \text{COL} | J_0(k), \underline{x}(k) |$$

$$\underline{\tilde{f}}(k) \triangleq \text{COL} | f, \underline{g} |$$

Então a equação do sistema fica

$$\underline{\tilde{x}}(k+1) = \underline{\tilde{f}}|\underline{x}(k), \underline{u}(k)| \quad (1.4)$$

Dados $\underline{\tilde{x}}(0)$ e $|\underline{u}(0, K-1)|$, pode-se determinar $|\underline{\tilde{x}}(0, K)|$ e $J_0(K)$ representará o custo total de operação do sistema sobre o intervalo $[0, K]$. O problema de otimização consiste em extremizar (1.2) sujeito a restrições (1.1), às condições iniciais e terminais.

Formulação do Problema Global pelo Princípio do Máximo

O problema de otimização dinâmica para o sistema em consideração pode ser formulado do seguinte modo [4]:

Dado um número inteiro positivo K e o estado inicial $\underline{\tilde{x}}(0)$ para o sistema descrito por (1.4), determinar a sequência de vetores de controle $|\underline{u}(0, K-1)|$ tal que $\underline{u}(i) \in U, i = 0, \dots, K-1, \underline{x}(K) \in S$ e $J_0(K)$ seja minimizado.

A sequência $|\underline{u}^*(0, K-1)|$ que minimiza $J_0(K)$ e satisfaz as condições de contorno do problema é chamada de controle ótimo para o problema e a trajetória correspondente $|\underline{\tilde{x}}^*(0, K)|$ é chamada de trajetória ótima.

Condições Necessárias

O SISTEMA ADJUNTO: Vamos definir a matriz $(n+1) \times (n+1)$

$$F(k) \triangleq \begin{array}{c} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}} \\ \hline \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \underline{u}} \end{array} \left| \begin{array}{c} \underline{x}(k) \\ \underline{u}(k) \end{array} \right. \quad (1.5)$$

e a matriz $(n+1) \times m$

$$B(k) \triangleq \begin{array}{c} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \underline{u}} \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{c} \underline{x}(k) \\ \underline{u}(k) \end{array} \right. \quad (1.6)$$

As variáveis adjuntas são definidas de modo a satisfazer a equação às diferenças:

$$\underline{\tilde{p}}(k) = F^T(k) \underline{\tilde{p}}(k+1) \quad (1.7)$$

$$\underline{\tilde{p}}(k) = \text{COL} | p_0(k), p_1(k), \dots, p_n(k) |$$

Desde que a equação do sistema adjunto seja homogênea, o que precisamos para gerar as trajetórias do sistema adjunto é o conhecimento de $\underline{\tilde{p}}(K)$.
Notar que

$$\frac{\partial f_i | \underline{x}(k), \underline{u}(k) |}{\partial J_0(k)} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Consequentemente, p_0 é constante $\forall k$. T denota transposição.

O HAMILTONIANO: Definido como:

$$H | \underline{\tilde{p}}(k+1), \underline{x}(k), \underline{u}(k) | \stackrel{\Delta}{=} \langle \underline{\tilde{p}}(k+1), \underline{\tilde{f}} | \underline{x}(k), \underline{u}(k) | \rangle \quad (1.8)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota produto escalar.

Podemos observar que a equação do sistema (1.4) e do sistema adjunto (1.7) podem ser escritas em termos do Hamiltoniano:

$$\underline{\tilde{x}}(k+1) = \frac{\partial H}{\partial \underline{\tilde{p}}(k+1)} \quad (1.9)$$

$$\underline{\tilde{p}}(k) = \left(\frac{\partial H}{\partial \underline{\tilde{x}}(k)} \right)^T \quad (1.10)$$

As condições necessárias para que o controle $|\underline{u}^*(0, K-1)|$ seja ótimo são estabelecidas pelas seguintes proposições:

Proposição 1: Se $|\underline{u}^*(0, K-1)|$ é um controle ótimo para o problema de otimização dinâmica e $|\underline{\tilde{x}}^*(0, K)|$ é a trajetória ótima correspondente, então existe uma função $\underline{\tilde{p}}^*(k)$, $k = 0, \dots, K$ satisfazendo (1.7) tal que:

a. $H | \underline{\tilde{p}}^*(k+1), \underline{x}^*(k), \underline{u}^*(k) | = \langle \underline{\tilde{p}}^*(k+1), \underline{\tilde{f}} | \underline{x}^*(k), \underline{u}^*(k) | \rangle$ é um máximo local ou estacionário com respeito a $\underline{u}^*(k) \in U$, em cada estágio $0 \leq k \leq K$.

b. $p_0^*(K) \leq 0$

Esta proposição é básica e é válida independentemente das condições terminais. Em um número grande de casos, existe um único máximo local ou

um ponto estacionário para $H[\tilde{p}(k+1), \underline{x}(k), \underline{u}(k)]$. Então usando a condição (a) da proposição I, $\underline{u}(k)$ pode ser encontrado em termos de $\underline{x}(k)$ e $\tilde{p}(k+1)$. O controle pode ser eliminado das equações do sistema (1.4) e do sistema adjunto (1.7). O conhecimento das $(n+1)$ condições de contorno $\tilde{p}(K)$ e do estado $\underline{x}(0)$ fornece-nos a solução. O vetor $\tilde{p}(K)$ dependerá da forma do conjunto de restrições. Para cada tipo de restrição terminal são estabelecidas as condições de transversalidade.

Sem perda de generalidade, será explorado o caso onde o estado final é livre, ou seja $\underline{x}(K) \in S$, onde $S \equiv E^n$.

Proposição II: Consideremos o problema de otimização dinâmica quando o conjunto $S \equiv E^n$. Então as condições necessárias para que $|\underline{u}^*(0, K-1)|$ seja um controle ótimo são:

a. As condições da proposição I.

b. $\underline{p}_i^*(K) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$

A prova da proposição I e conseqüentemente da proposição II, para cada tipo de restrição terminal é dada em [4].

Podemos resumir as condições de otimalidade para o problema pelo conjunto de equações:

$$\text{EQUAÇÃO DO SISTEMA} \quad \tilde{\underline{x}}(k+1) = \frac{\partial H}{\partial \tilde{\underline{p}}(k+1)} \quad (1.11)$$

$$\text{EQUAÇÃO ADJUNTA} \quad \tilde{\underline{p}}(k) = \left(\frac{\partial H}{\partial \tilde{\underline{x}}(k)} \right)^T \quad (1.12)$$

$$H[\tilde{\underline{p}}^*(k+1), \underline{x}^*(k), \underline{u}^*(k)] \geq H[\tilde{\underline{p}}^*(k+1), \underline{x}^*(k), \underline{u}(k)] \quad (1.13)$$

$$\text{CONDIÇÃO DE TRANSVERSALIDADE} \quad \underline{p}_i(K) = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (1.14)$$

$$\underline{x}_i(0) = \underline{x}_{i0}$$

Formulação do Problema Global por Dualidade [5,7]

De uma maneira geral, o problema global pode ser equacionado do seguinte modo:

$$\text{MIN}_{\underline{x}(k), \underline{u}(k)} J[\underline{x}(k), \underline{u}(k)] \quad (1.15)$$

sujeito a

$$\underline{x}(k+1) = \underline{g}[\underline{x}(k), \underline{u}(k)] \quad (1.16)$$

$$\underline{R}[\underline{x}(k), \underline{u}(k)] \leq \underline{c}(k) \quad (1.17)$$

onde

$$\underline{x}(k) \in E^n$$

$$\underline{u}(k) \in U \subset E^m$$

$$\underline{g}: E^n \times U \rightarrow E^n$$

$$\underline{R}: E^n \times U \rightarrow E^r$$

$$\underline{c}(k) \in E^r \text{ é um vetor constante dado.}$$

Por hipótese, $J[\underline{x}(k), \underline{u}(k)]$ e $\underline{g}[\underline{x}(k), \underline{u}(k)]$ são contínuas em Ω ,
onde

$$\Omega = \{\underline{x}(k), \underline{u}(k) / \underline{R}[\underline{x}(k), \underline{u}(k)] \leq \underline{c}(k); \underline{x}(k) \in E^n, \underline{u}(k) \in U \subset E^m\}$$

é um subconjunto compacto do E^n .

Aqui as restrições foram divididas em dois grupos que são formados pelas equações (1.16) e (1.17).

O problema global na forma definida pela equações (1.15), (1.16) e (1.17) será chamado de problema primal.

Supondo que a solução ótima para o problema primal existe, o problema dual de (1.15), (1.16) e (1.17) com relação à restrição (1.16) é definido por:

$$\underset{\underline{\lambda}(k)}{\text{MAX}} D[\underline{\lambda}(k)] \quad (1.18)$$

onde $\underline{\lambda}(k) \in E^n$ é chamada de variável dual.

A função dual

$$D: E^n \rightarrow E$$

é definida por:

$$D[\underline{\lambda}(k)] = \underset{\underline{x}(k), \underline{u}(k)}{\text{MIN}} \{L[\underline{x}(k), \underline{u}(k), \underline{\lambda}(k)] \mid \underline{x}(k), \underline{u}(k) \in \Omega\} \quad (1.19)$$

e a função Lagrangiana

$$L: E^n \times E^m \times E^n \rightarrow E$$

é definida por

$$L[\underline{x}(k), \underline{u}(k), \underline{\lambda}(k)] = J[\underline{x}(k), \underline{u}(k)] + \underline{\lambda}^T(k) \{g[\underline{x}(k), \underline{u}(k)] - \underline{x}(k+1)\} \quad (1.20)$$

Então, se o valor da função dual e seu gradiente, para cada trajetória da variável dual fixada $\underline{\lambda}(k) = \underline{\lambda}^*(k)$, podem ser obtidas, o problema dual pode ser resolvido por alguma técnica tipo gradiente. Para obtermos o valor da função dual para $\underline{\lambda}(k) = \underline{\lambda}^*(k)$ fixados, é necessário resolver o problema de minimização da função Lagrangiana, ou:

$$\min_{\underline{x}(k), \underline{u}(k)} L | \cdot | = \min_{\underline{x}(k), \underline{u}(k)} \{ J | \underline{x}(k), \underline{u}(k) | + \underline{\lambda}^{*T}(k) \{ \underline{g} | \underline{x}(k), \underline{u}(k) | - \underline{x}(k+1) \} \} \quad (1.21)$$

sujeito a

$$\underline{R} | \underline{x}(k), \underline{u}(k) | \leq \underline{c}(k) \quad (1.22)$$

$$\underline{x}(k) \in E^n$$

$$\underline{u}(k) \in U \subset E^m$$

Supondo que a solução de (1.21) e (1.22) existe e é obtida unicamente como sendo $\underline{x}^*(k)$, $\underline{u}^*(k)$, então das equações (1.19) e (1.20)

$$D | \underline{\lambda}^*(k) | = L | \underline{x}^*(k), \underline{u}^*(k), \underline{\lambda}^*(k) | \quad (1.23)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla D | \underline{\lambda}(k) | \\ \underline{\lambda}(k) = \underline{\lambda}^*(k) \end{aligned} \right| = \underline{g} | \underline{x}^*(k), \underline{u}^*(k) | - \underline{x}(k+1) \quad (1.24)$$

Portanto, se um procedimento eficiente para resolver (1.21) e (1.22) existe, o problema dual é facilmente resolvido. Se a restrição de desigualdade (1.17) não existe, o problema é irrestrito, ficando numa forma mais simples de ser resolvido.

Das equações (1.15), (1.16), (1.17) e (1.18), (1.19), podemos chamar o problema dual de minimax desde que possa ser escrito como

$$\max_{\underline{\lambda}(k)} \min_{\underline{x}(k), \underline{u}(k)} \{ L | \underline{x}(k), \underline{u}(k), \underline{\lambda}(k) | / \underline{x}(k), \underline{u}(k) \in \Omega \} \quad (1.25)$$

Pelo teorema do limite inferior [7],

$$D | \underline{\lambda}(k) | \leq J | \underline{x}(k), \underline{u}(k) | \quad (1.26)$$

$\forall \underline{x}(k), \underline{u}(k)$ factíveis e $\forall \underline{\lambda}(k) \in E^n$.

A igualdade (1.26) ocorre se e somente se um ponto de sela para o Lagrangiano existe [7]. Desde que [7]:

$$\min_{\underline{x}(k), \underline{u}(k)} J[\underline{x}(k), \underline{u}(k)] = \min_{\underline{x}(k), \underline{u}(k)} \max_{\underline{\lambda}(k)} L[\underline{x}(k), \underline{u}(k), \underline{\lambda}(k)] \quad (1.27)$$

Os problemas primal e dual podem ser formulados como:

PRIMAL

$$\min_{\underline{x}(k), \underline{u}(k)} \max_{\underline{\lambda}(k)} \{L[\underline{x}(k), \underline{u}(k), \underline{\lambda}(k)] / \underline{x}(k), \underline{u}(k) \in \Omega\} \quad (1.28)$$

DUAL

$$\max_{\underline{\lambda}(k)} \min_{\underline{x}(k), \underline{u}(k)} \{L[\underline{x}(k), \underline{u}(k), \underline{\lambda}(k)] / \underline{x}(k), \underline{u}(k) \in \Omega\} \quad (1.29)$$

É evidente que o dual do dual é o primal e que a igualdade dos valores ótimos das funções primal e dual é equivalente a:

$$\min_{\underline{x}, \underline{u}} \max_{\underline{\lambda}} \{L[\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}] / \underline{x}, \underline{u} \in \Omega\} = \max_{\underline{\lambda}} \min_{\underline{x}, \underline{u}} \{L[\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}] / \underline{x}, \underline{u} \in \Omega\} \quad (1.30)$$

onde o índice k foi omitido por simplicidade de notação. Todavia MINMAX=MAXMIN se e somente se um ponto de sela existe: $[\underline{x}^*(k), \underline{u}^*(k), \underline{\lambda}^*(k)]$ é um ponto de sela restrito para $L[\underline{x}(k), \underline{u}(k), \underline{\lambda}^*(k)]$ se e somente se $\underline{x}^*(k), \underline{u}^*(k)$ são soluções para o problema primal, $\underline{\lambda}^*(k)$ é solução para o problema dual [7] e

$$J[\underline{x}^*(k), \underline{u}^*(k)] = D[\underline{\lambda}^*(k)] \quad (1.31)$$

A observação das equações (1.25), (1.27), (1.30) e (1.31) sugere uma metodologia de cálculo com dois níveis para a solução do problema de otimização dinâmica. Podemos, portanto, escolher um valor inicial de $\underline{\lambda}(k)$ e resolver

o problema do Lagrangiano descrito por (1.21) e (1.22). Construímos a função dual e escolhemos novo $\underline{\lambda}(k)$ de maneira tal que $D[\underline{\lambda}(k)]$ seja aumentada e com o novo $\underline{\lambda}(k)$ resolvemos novamente o problema do Lagrangiano. Este procedimento é repetido até que $D[\underline{\lambda}(k)]$ seja maximizada. Esquemáticamente, a figura 1.5 representa esta metodologia de cálculo.

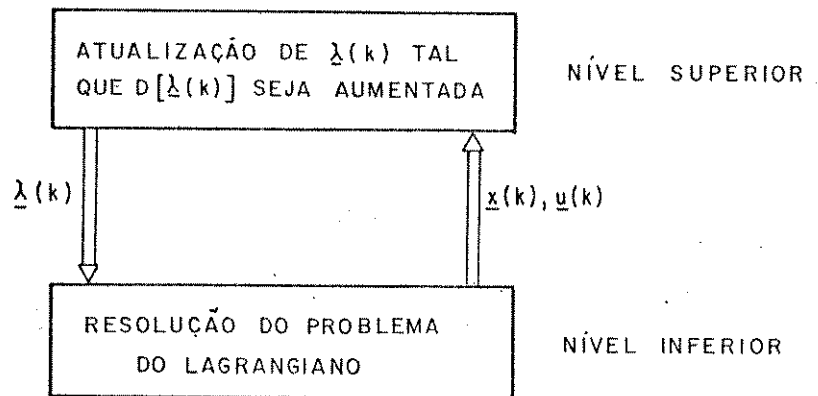


Fig. 1.5 - Estrutura com dois níveis para solução do problema dual.

Este método de otimização dual possui a propriedade de que a função dual é côncava independentemente de qualquer condição de convexidade sobre o funcional de custo e a equação do sistema [5,7]. Portanto as iterações para a maximização da função dual convergem para a solução ótima global se a solução ótima para o problema de minimização do Lagrangiano, equações (1.21) e (1.22), é única para cada $\underline{\lambda}(k) = \underline{\lambda}^*(k)$ [7].

O valor da função dual é sempre um limite inferior para o valor do funcional de custo. Se existe $\underline{x}^*(k)$, $\underline{u}^*(k)$ e $\underline{\lambda}^*(k)$ factíveis tais que

$$D[\underline{\lambda}^*(k)] = J[\underline{x}^*(k), \underline{u}^*(k)]$$

então $\underline{x}^*(k)$, $\underline{u}^*(k)$ e $\underline{\lambda}^*(k)$ são soluções ótimas para os problemas primal e dual respectivamente e

$$D[\underline{\lambda}(k)] \leq D[\underline{\lambda}^*(k)] = J[\underline{x}^*(k), \underline{u}^*(k)] \leq J[\underline{x}(k), \underline{u}(k)] \quad (1.32)$$

Estas propriedades permitem concluir que problemas não convexos podem ser resolvidos pelo método de otimização dual. Porém existem casos onde $D|\underline{\lambda}^*(k)| < J|\underline{x}^*(k), \underline{u}^*(k)|$, ou seja, possa existir um "gap" de dualidade [7], para $\underline{x}^*(k)$, $\underline{u}^*(k)$ e $\underline{\lambda}^*(k)$ ótimos. No entanto podemos encontrar um limite inferior para o problema original pela resolução do problema dual. Neste caso, não podemos obter uma relação "forte" de dualidade como a equação (1.32).

Formulação do Problema Global pelos Gradientes Generalizados [6]

Desde que restrições de desigualdades nas variáveis de estado e de controle possam ser colocadas na forma

$$\underline{a}(k) \leq \underline{x}(i) \leq \underline{b}(k) \quad i = 1, \dots, K \quad (1.33)$$

$$\underline{c}(k) \leq \underline{u}(j) \leq \underline{d}(k) \quad j = 0, \dots, K-1 \quad (1.34)$$

o problema de otimização dinâmica pode ser formulado como:

$$\underset{\underline{u}(k)}{\text{MIN}} J|\underline{x}(k), \underline{u}(k)| = \phi|\underline{x}(K)| + \sum_{k=0}^{K-1} f|\underline{x}(k), \underline{u}(k)| \quad (1.35)$$

sujeito a

$$\underline{x}(k+1) = \underline{g}|\underline{x}(k), \underline{u}(k)| \quad (1.36)$$

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (1.37)$$

onde $\phi|\underline{x}(K)|$ representa o custo terminal.

A teoria clássica do cálculo de variações pode ser utilizada na solução deste problema para a computação dos gradientes generalizados como são chamados por MEHA, DAVIS [6].

Então, adicionando as restrições (1.36) e (1.37) a $J|.$, utilizando os multiplicadores de Lagrange $\underline{\lambda}(k+1)$ obtemos:

$$L|\cdot| = \phi|\underline{x}(K)| + \sum_{k=0}^{K-1} \{f|\underline{x}(k), \underline{u}(k)| + \underline{\lambda}^T(k+1) | -\underline{x}(k+1) + \underline{g}|\underline{x}(k), \underline{u}(k)| \} \quad (1.38)$$

ou

$$L|\cdot| = \phi|\underline{x}(K)| + \sum_{k=0}^{K-1} \{H|\underline{x}(k), \underline{u}(k)| - \underline{\lambda}^T(k+1)\underline{x}(k+1)\} \quad (1.39)$$

onde

$$H|\cdot| = f|\underline{x}(k), \underline{u}(k)| + \underline{\lambda}^T(k+1) \underline{g}|\underline{x}(k), \underline{u}(k)|$$

é o Hamiltoniano do sistema.

Considerando variações infinitesimais em $\underline{x}(k), \underline{u}(k)$:

$$\delta L|\cdot| = \left\langle \frac{\partial \phi|\underline{x}(K)|}{\partial \underline{x}(K)}, \delta \underline{x}(K) \right\rangle + \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ \left\langle \frac{\partial H}{\partial \underline{x}(k)}, \delta \underline{x}(k) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial H}{\partial \underline{u}(k)}, \delta \underline{u}(k) \right\rangle - \right. \\ \left. - \left\langle \underline{\lambda}^T(k+1), \delta \underline{x}(k+1) \right\rangle \right\} \quad (1.40)$$

desde que $\delta \underline{x}(0) = 0$ obtemos

$$\delta L|\cdot| = \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ \left\langle \left| \frac{\partial H}{\partial \underline{x}(k)} - \underline{\lambda}^T(k) \right|, \delta \underline{x}(k) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial H}{\partial \underline{u}(k)}, \delta \underline{u}(k) \right\rangle \right\} + \\ + \left\langle \left| \frac{\partial \phi|\underline{x}(K)|}{\partial \underline{x}(K)} - \underline{\lambda}^T(K) \right|, \delta \underline{x}(K) \right\rangle \quad (1.41)$$

Definindo

$$\underline{g}_1(k) = \left(\frac{\partial \phi | \underline{x}(k) |}{\partial \underline{x}(k)} \right)^T - \underline{\lambda}(k) \quad (1.42)$$

$$\underline{g}_2(k) = \left(\frac{\partial H | \cdot |}{\partial \underline{x}(k)} \right)^T - \underline{\lambda}(k) \quad (1.43)$$

$$\underline{g}_3(k) = \left(\frac{\partial H | \cdot |}{\partial \underline{u}(k)} \right)^T \quad (1.44)$$

$$k = 0, \dots, K-1$$

a equação (1.41) pode ser reescrita como

$$\delta L | \cdot | = \langle \underline{g}_1, \delta \underline{x}(k) \rangle + \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ \langle \underline{g}_2(k), \delta \underline{x}(k) \rangle + \langle \underline{g}_3(k), \delta \underline{u}(k) \rangle \right\} \quad (1.45)$$

Se fizermos $\underline{g}_2(k) = 0$, $k = 0, \dots, K$, então $\underline{g}_3(k)$ representa o gradiente de $L | \cdot |$ com respeito a $\underline{u}(k)$; se fazemos $\underline{g}_3(k) = 0$, então $\underline{g}_2(k)$ representa o gradiente de $L | \cdot |$ com respeito a $\underline{x}(k)$. Em outras palavras, o gradiente generalizado com respeito a qualquer conjunto de variáveis independentes pode ser obtido igualando a zero o gradiente com respeito às variáveis dependentes. Portanto, o cálculo de gradientes generalizados envolve a solução de (1.42), (1.43) e (1.44) e as condições de otimalidade para o problema de otimização podem ser obtidas igualando a zero as equações (1.42), (1.43) e (1.44).

É interessante notar que se o conjunto das trajetórias ótimas obtidas, $\underline{x}^*(k), \underline{u}^*(k), \underline{\lambda}^*(k+1)$ representam um ponto de seta do Lagrangiano, então a seguinte relação é válida:

$$L | \underline{x}^*(k), \underline{u}^*(k), \underline{\lambda}^*(k) | \leq L | \underline{x}^*(k), \underline{u}^*(k), \underline{\lambda}^*(k) | \leq L | \underline{x}(k), \underline{u}(k), \underline{\lambda}^*(k) | \quad (1.46)$$

Pelo teorema de dualidade de Lagrange, a relação (1.46) pode ser expressa como

$$\max_{\underline{\lambda}} \min_{\underline{x}, \underline{u}} L(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}) = \min_{\underline{u}} J(\underline{x}, \underline{u}) \quad (1.47)$$

Obtemos, portanto, uma similaridade entre o caso dos gradientes e o método dual. Podemos então resolver o problema de otimização com uma estrutura de cálculo com dois níveis, semelhante à representada na figura 1.5. No entanto, esta relação foi estabelecida simplesmente para mostrar a similaridade sendo que nesta estrutura a dois níveis, a metodologia que utiliza os gradientes generalizados depende de como se arranja as equações de otimalidade entre os dois níveis, sem a aplicação direta da relação (1.47) [8].

A estrutura de cálculo com dois níveis, pode ser representada genericamente como na figura 1.6.

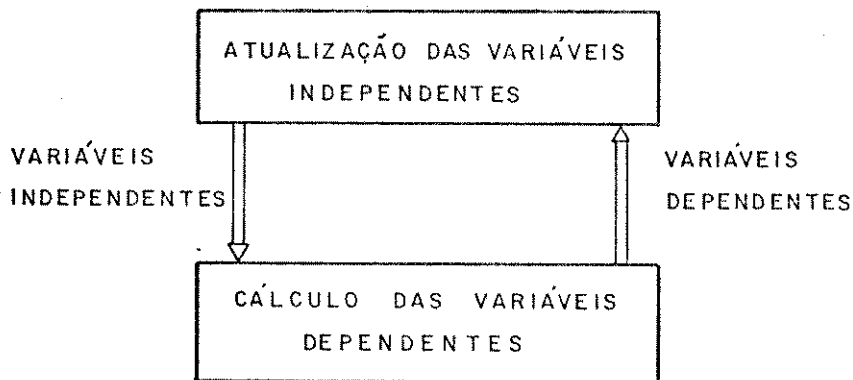


Fig. 1.6 - Estrutura com dois níveis para o método dos gradientes generalizados.

1.4 - Formulação Hierárquica do Problema de Otimização Dinâmica

Embora problemas de otimização dinâmica discretos possam ser resolvidos por Programação Dinâmica e suas extensões, sua desvantagem é que seus requerimentos de memória rápida, mesmo para problemas de dimensão pequena, são enormes. Este fato é chamado de "crescimento da dimensão" [9]. Por outro la-

do, várias técnicas tipo gradiente existem para a minimização de uma função de várias variáveis e podem ser aplicados no caso. Para tratar as restrições nas variáveis de estado e de controle, algum tipo de função de penalização deve ser aplicada para transformar o problema original em outro sem restrições. Todavia, métodos de penalização sofrem consideravelmente do problema de condicionamento, quando a penalização torna-se muito grande [9], criando vários problemas de utilização das técnicas além do que o sistema cria, simplesmente por ser grande.

Nesta seção, o sistema global será representado por meio de N subsistemas interconectados. Para isto, serão adicionadas variáveis suplementares de interconecção, que são variáveis internas do sistema global. Mesmo que a estrutura do sistema global não evidencie uma divisão física em subsistemas interconectados, é possível uma decomposição puramente matemática nas equações do modelo. A razão deste procedimento é evitar dificuldades computacionais criadas pela dimensão dos sistemas, como o armazenamento de matrizes grandes.

Essencialmente, a idéia é de converter um problema que requer uma grande quantidade de armazenamento rápido em outro que requer pouca quantidade de armazenamento rápido.

Definição de Sistemas Interconectados

Sistemas Interconectados Espacialmente

Consideremos o sistema descrito pela equação (1.1). Este sistema é decomposto em N subsistemas de dimensão n_i e pode ser representado pela figura 1.7

$$n = \sum_{i=1}^N n_i$$

Cada subsistema pode ser descrito pela equação às diferenças:

$$\underline{x}_i(k+1) = \underline{g}_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k), \underline{z}_i(k) | \quad k = 0, \dots, K \quad (1.48)$$

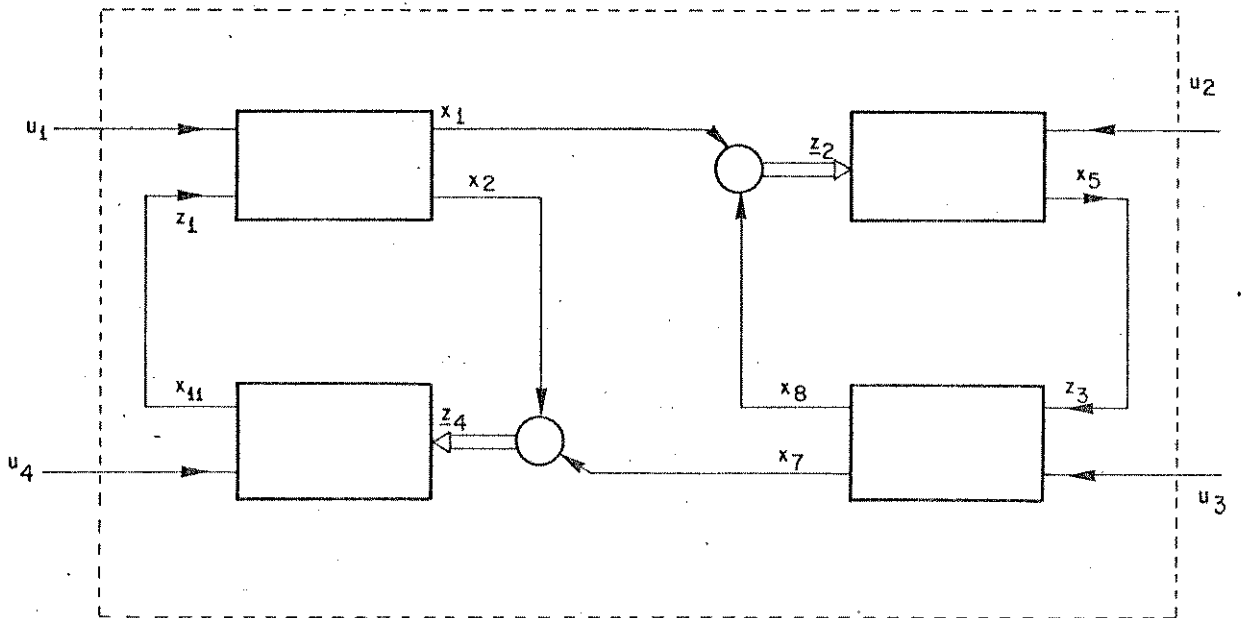


Fig. 1.7 - Sistema representado como um conjunto de subsistemas interconectados.

e seu acoplamento com os outros subsistemas pela relação de interconexão:

$$\underline{z}_i(k) = \sum_{j \neq i}^N g_{ij} | \underline{x}_j(k), \underline{u}_j(k) | \quad k = 0, \dots, K \quad (1.49)$$

A figura 1.8 mostra esquematicamente o i -ésimo subsistema.

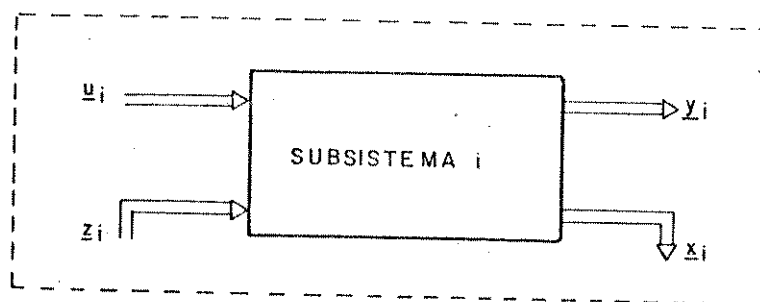


Fig. 1.8 - Esquema do i -ésimo subsistema.

onde:

\underline{u}_i : componentes do controle global \underline{u} relativo ao subsistema i .

\underline{x}_i : componentes do estado do subsistema i que são entradas para os outros subsistemas.

\underline{z}_i : entradas intermediárias devido aos outros subsistemas.

\underline{y}_i : saída do sistema global devido ao subsistema i .

$$\underline{x}_i = \text{COL} | x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{n_i} | \in E^{n_i}$$

$$\underline{u}_i = \text{COL} | u_i^1, u_i^2, \dots, u_i^{m_i} | \in E^{m_i}$$

são, respectivamente, os vetores de estado e de controle do subsistema i .

$$\underline{g}_i: E^{n_i} \times E^{m_i} \rightarrow E^{n_i}$$

$$\underline{g}_{ij}: E^{n_j} \times E^{m_j} \rightarrow E^{\ell}$$

são funções continuamente diferenciáveis.

Por hipótese, $U \equiv E^m$ e $S \equiv E^n$, significando que as variáveis de estado e controle não estão sujeitas a restrições específicas.

O funcional de custo, admitido a partir desta seção, dado na forma da equação (1.3) será suposto como sendo aditivamente separável, isto é, para cada subsistema nós associamos uma parte do funcional. Então (1.3) pode ser reescrita na forma:

$$J | \underline{x}(k), \underline{u}(k) | = \sum_{i=1}^N J_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k) | \quad (1.50)$$

onde

$$J_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k) | = \sum_{k=0}^{K-1} f_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k) | \quad (1.51)$$

Sistemas Interconectados Parametricamente

O sistema é decomposto no parâmetro k que determina sua evolução dinâmica. Os cálculos são efetuados independentemente em cada estágio. Portanto cada estágio pode ser representado por um subsistema.

A relação de interconexão é dada pela equação (1.1) e o funcional de custo é idêntico ao dado por (1.3). Esquemáticamente, a figura 1.9 mostra este procedimento.

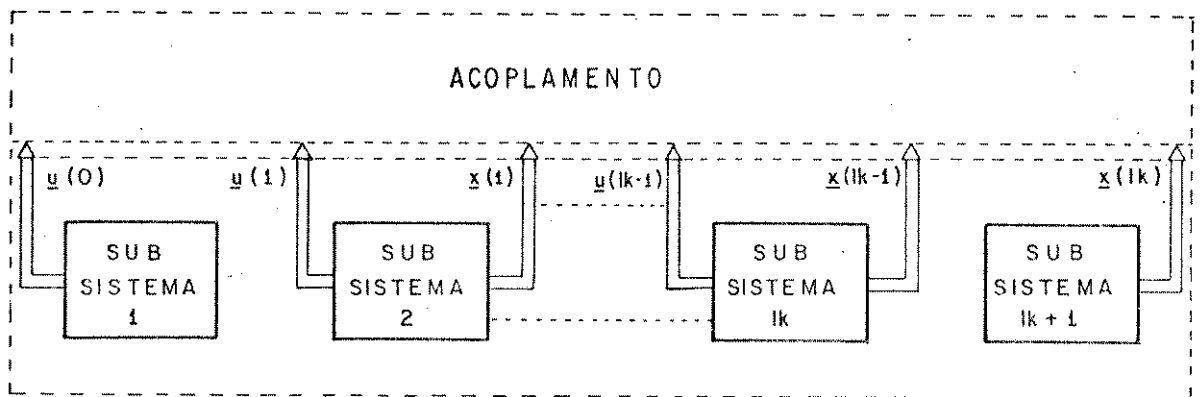


Fig. 1.9 - Esquema de subsistemas interconectados parametricamente.

Nova Formulação do Problema Global

Forma Primal-Dual - Decomposição Espacial

Seja o problema de otimização dinâmica descrito no ítem 1.3, juntamente com as hipóteses de que $S \in E^n$, $U \in E^m$ e o funcional de custo aditivamente separável. O problema pode ser posto na seguinte forma:

$$\min_{\underline{u}(k)} J[\underline{x}(k), \underline{u}(k)] = \min_{\underline{u}(k)} \sum_{i=1}^N J_i[\underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k)] \quad (1.52)$$

sujeito a

$$\underline{x}_i(k+1) = \underline{g}_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k), \underline{z}_i(k) | \quad (1.53)$$

$$\underline{z}_i(k) = \sum_{i \neq j}^N \underline{g}_{ij} | \underline{x}_j(k), \underline{u}_j(k) | \quad (1.54)$$

$$\underline{x}_i(0) = \underline{x}_{i0} \quad (1.55)$$

O Lagrangiano para este problema é

$$\begin{aligned} L | \underline{x}(k), \underline{u}_i(k), \underline{\beta}_i(k), \underline{z}_i(k) | &= \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} \left(f_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k) | + \right. \right. \\ &+ \left. \underline{\beta}_i^T(k) | \underline{z}_i(k) - \sum_{i \neq j}^N \underline{g}_{ij} | \underline{x}_j(k), \underline{u}_j(k) | \right) + \\ &\left. + \left. \underline{\lambda}_i^T(k+1) | -\underline{x}_i(k+1) + \underline{g}_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k), \underline{z}_i(k) | \right) \right\} \quad (1.56) \end{aligned}$$

onde $\underline{\beta}_i(k)$ são parâmetros de Lagrange e $\underline{\lambda}_i(k+1)$ são as variáveis adjuntas (coestados) do sistema. Para que possamos decompor o Lagrangiano em sublagrangianos é necessário fazer a separação do termo:

$$\sum_{i=1}^N \underline{\beta}_i^T(k) \sum_{i \neq j}^N \underline{g}_{ij} | \underline{x}_j(k), \underline{u}_j(k) | = \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j}^N \underline{\beta}_j^T(k) \underline{g}_{ji} | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k) | \quad (1.57)$$

pois é uma função das variáveis dos subsistemas j . Isto pode ser realizado pela introdução de um nível superior de coordenação que impõe o valor de certas variáveis do primeiro nível, onde são tratados como constantes. O tipo de decomposição de coordenação obtido depende da natureza destas variáveis ou da relação destas variáveis com a variável de coordenação. No entanto, é de interesse particular neste trabalho, o caso onde tanto a variável dual $\underline{\beta}(k)$ como a variável pri-

mal $\underline{z}(k)$ são parâmetros de coordenação (método primal-dual, método mixto).

Utilizando a relação (1.57), (1.56) pode ser reescrita como:

$$L|\cdot| = \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} \left(f_i | \underline{x}(k), \underline{u}(k) | + \underline{\beta}_i^T(k) \underline{z}_i(k) - \sum_{j \neq i} \underline{\beta}_j^T(k) \underline{g}_{ji} | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k) | + \right. \right. \\ \left. \left. + \underline{\lambda}_i(k+1) | -\underline{x}_i(k+1) + \underline{g}_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k), \underline{z}_i(k) | \right) \right\} \quad (1.58)$$

ou

$$L|\cdot| = \sum_{i=1}^N L_i|\cdot|$$

onde

$$L_i|\cdot| = \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ f_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k) | + \underline{\beta}_i^T(k) \underline{z}_i(k) + \sum_{i \neq j} \underline{\beta}_j^T(k) \underline{g}_{ji} | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k) | + \right. \\ \left. + \underline{\lambda}_i^T(k+1) | -\underline{x}_i(k+1) + \underline{g}_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k), \underline{z}_i(k) | \right\} \quad (1.59)$$

Como $\underline{\beta}(k)$ e $\underline{z}(k)$ são fixados pelo coordenador, o Lagrangiano é aditivamente separável e podemos associar para cada subsistema i o i -ésimo sublagrangiano. Portanto o procedimento descrito no ítem 1.3.3 e ilustrado na figura 1.5 pode ser aplicado neste caso com a vantagem de que ao invés de resolvermos o problema do Lagrangiano global, resolvemos cada subproblema do Lagrangiano independentemente, que são mais fáceis de serem resolvidos pois são de dimensão reduzida.

Conseqüentemente, a função dual será:

$$D|\underline{\beta}(k)| = \underset{\substack{\underline{x}_i, \underline{u}_i \\ i=1, \dots, N}}{\text{MIN}} L|\underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k), \underline{\beta}(k), \underline{z}_i(k)| \quad (1.60)$$

e o problema dual

$$\underset{\underline{\beta}(k)}{\text{MAX}} D|\underline{\beta}(k)| \quad (1.61)$$

Os subproblemas do Lagrangiano são, portanto:

$$\underset{\underline{x}_i, \underline{u}_i}{\text{MIN}} \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} f_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k) | + \underline{\beta}_i^T(k) \underline{z}_i(k) + \sum_{i \neq j}^N \underline{\beta}_j^T(k) \underline{g}_{ji} | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k) | \right\} \quad (1.62)$$

sujeito a

$$\underline{x}_i(k+1) = \underline{g}_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k), \underline{z}_i(k) | \quad (1.63)$$

$$\underline{x}_i(0) = \underline{x}_{i0} \quad (1.64)$$

$$i = 1, \dots, N$$

Podemos ver pela equação (1.62) que a função objetivo ou o funcional de custo associado ao i -ésimo subproblema é sensivelmente modificada. Então trata-se de um método de coordenação pelo critério. Por outro lado, desde que as variáveis de interconexão são fixadas, indiretamente as variáveis de estado e controle também são fixadas. Portanto, trata-se também de um método de coordenação pelo modelo, daí então, a razão para o nome de método MIXTO [14].

O problema básico para o estabelecimento das condições de coordenabilidade é como modificar os problemas do nível inferior de maneira tal que o sistema seja coordenável [17]. Este método é um exemplo típico destas modificações.

As equações de otimalidade para a solução dos subproblemas do nível inferior podem ser obtidas pela aplicação do princípio do máximo, técnicas como a programação dinâmica ou ainda combinação de várias técnicas dependendo da natureza de cada subproblema [19].

Forma Dual - Decomposição Paramétrica

Seja o problema

$$\underset{\underline{u}}{\text{MIN}} J[\underline{x}(k), \underline{u}(k)] = \phi[\underline{x}(K)] + \sum_{k=0}^{K-1} f[\underline{x}(k), \underline{u}(k)] \quad (1.65)$$

sujeito a

$$\underline{x}(k+1) = \underline{g}[\underline{x}(k), \underline{u}(k)] \quad (1.66)$$

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (1.67)$$

Este problema pode ser resolvido de uma maneira idêntica à do ítem 1.3.3 e ilustrada na figura 1.5. Então, o Lagrangiano é:

$$\begin{aligned} L[\underline{x}(k), \underline{u}(k), \underline{\lambda}(k)] = & \phi[\underline{x}(K)] + \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ f[\underline{x}(k), \underline{u}(k)] - \right. \\ & \left. - \underline{\lambda}^T(k) [\underline{x}(k+1) - \underline{g}[\underline{x}(k), \underline{u}(k)]] \right\} \quad (1.68) \end{aligned}$$

Consequentemente a função dual será:

$$D[\underline{\lambda}(k)] = \underset{\underline{x}, \underline{u}}{\text{MIN}} L[\underline{x}(k), \underline{u}(k), \underline{\lambda}(k)]$$

Reescrevendo o Lagrangiano obtemos

$$\begin{aligned} L[\cdot] = & \phi[\underline{x}(K)] - \underline{\lambda}^T(K-1) \underline{x}(K) + \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ f[\underline{x}(k), \underline{u}(k)] - \right. \\ & \left. - \underline{\lambda}^T(k-1) \underline{x}(k) + \underline{\lambda}^T(k) \underline{g}[\underline{x}(k), \underline{u}(k)] \right\} \quad (1.69) \end{aligned}$$

Definindo o Hamiltoniano por

$$H[\underline{x}(k), \underline{u}(k), \underline{\lambda}(k)] = f[\underline{x}(k), \underline{u}(k)] + \underline{\lambda}^T(k) \underline{g}[\underline{x}(k), \underline{u}(k)] \quad (1.70)$$

o Lagrangiano pode ser escrito, utilizando o Hamiltoniano

$$\begin{aligned} L[\cdot] = & \sum_{k=0}^{K-1} \{H[\underline{x}(k), \underline{u}(k), \underline{\lambda}(k)] - \underline{\lambda}^T(k-1) \underline{x}(k)\} + \\ & + \phi[\underline{x}(K)] - \underline{\lambda}^T(K-1) \underline{x}(K) \end{aligned} \quad (1.71)$$

Podemos observar, pela equação (1.71), que as variáveis do sistema estão relacionadas sempre no mesmo estágio k , $k = 0, \dots, K$. Podemos então definir $K+1$ subsistemas, uma vez que as variáveis duais são os parâmetros de coordenação e portanto fixadas pelo nível superior, permitindo com isto, a decomposição do Lagrangiano, pois está agora na forma separável aditiva.

Os problemas associados a cada subsistema se definem como, para $\underline{\lambda}(k) = \underline{\lambda}^*(k)$ fixado pelo coordenador.

a) Para $k = 0$

$$\underset{\underline{u}(0)}{\text{MIN}} H[\underline{x}(0), \underline{u}(0), \underline{\lambda}^*(k)]$$

sujeito a

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_0$$

b) Para $k = 1, 2, \dots, K-1$

$$\underset{\underline{x}(k), \underline{u}(k)}{\text{MIN}} \{H[\underline{x}(k), \underline{u}(k), \underline{\lambda}^*(k)] - \underline{\lambda}^{*T}(k-1) \underline{x}(k)\}$$

c) Para $k = K$

$$\min_{\underline{x}(K)} \{ \phi | \underline{x}(K) | - \underline{\lambda}^{*T}(k-1) \underline{x}(K) \}$$

onde

$$\underline{\lambda}(-1) = 0$$

$$\underline{\lambda}(k) = 0, \quad k \geq K$$

Forma dos Gradientes Generalizados - Decomposição Espacial

Seja o problema na seguinte forma

$$\min_{\underline{u}} J | \underline{x}(k), \underline{u}(k) | = \sum_{i=1}^N \{ \phi_i | \underline{x}_i(k) | + \sum_{k=0}^{K-1} f_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k) | \} \quad (1.72)$$

sujeito a

$$\underline{x}_i(k+1) = \underline{g}_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k), \underline{z}_i(k) | \quad (1.73)$$

$$\underline{z}_i(k) = \sum_{i \neq j}^N \underline{g}_{i,j} | \underline{x}_j(k), \underline{u}_j(k) | \quad (1.74)$$

$$\underline{x}_i(0) = \underline{x}_{i0} \quad (1.75)$$

O Lagrangiano para este caso se escreve:

$$\begin{aligned}
L | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k), \underline{\beta}(k), \underline{z}_i(k) | &= \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} \{ f_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k) | + \underline{\beta}_i^T(k) \underline{z}_i(k) - \right. \\
&- \sum_{j \neq i}^N \underline{\beta}_j^T(k) \underline{g}_{ji} | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k) | + \underline{\lambda}_i^T(k+1) | -\underline{x}_i(k+1) + \underline{g}_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k), \underline{z}_i(k) | \} \left. \right\}
\end{aligned} \tag{1.76}$$

Podemos então obter os gradientes generalizados considerando variações infinitesimais nas variáveis $\underline{x}_i(k)$, $\underline{u}_i(k)$, $\underline{\beta}_i(k)$ e $\underline{z}_i(k)$. A variação resultante no Lagrangiano é:

$$\begin{aligned}
\delta L | \cdot | &= \sum_{i=1}^N \left\{ \left\langle \frac{\partial \phi_i | \underline{x}_i(k) |}{\partial \underline{x}_i(k)} - \underline{\lambda}_i^T(k) \right|, \delta \underline{x}_i(k) \right\rangle + \\
&+ \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial \underline{x}_i(k)} - \underline{\lambda}_i(k) \right|, \delta \underline{x}_i(k) \right\rangle + \\
&+ \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial \underline{u}_i(k)}, \delta \underline{u}_i(k) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial \underline{z}_i(k)}, \delta \underline{z}_i(k) \right\rangle \left. \right\} \\
&+ \sum_{k=0}^{K-1} \left\langle \frac{\partial H}{\partial \underline{\beta}_i(k)}, \delta \underline{\beta}_i(k) \right\rangle
\end{aligned} \tag{1.77}$$

Portanto os gradientes generalizados são:

$$\underline{g}_i | \underline{x}_i(k) | = \left(\frac{\partial \phi_i | \underline{x}_i(k) |}{\partial \underline{x}_i(k)} \right)^T - \underline{\lambda}_i(k) \tag{1.78}$$

$$\underline{g}_2 | \underline{x}_i(k) | = \left(\frac{\partial H_i}{\partial \underline{x}_i(k)} \right)^T - \underline{\lambda}_i(k) \quad (1.79)$$

$$\underline{g}_3 | \underline{u}_i(k) | = \left(\frac{\partial H_i}{\partial \underline{u}_i(k)} \right)^T \quad (1.80)$$

$$\underline{g}_4 | \underline{\beta}_i(k) | = \left(\frac{\partial H}{\partial \underline{\beta}_i(k)} \right)^T \quad (1.81)$$

$$\underline{g}_5 | \underline{z}_i(k) | = \left(\frac{\partial H_i}{\partial \underline{z}_i(k)} \right)^T \quad (1.82)$$

$$k = 0, \dots, K$$

onde

$$H_i = f_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k) | + \underline{\beta}_i^T(k) \underline{z}_i(k) - \sum_{j \neq i}^N \underline{\beta}_j^T(k) \underline{g}_{ji} | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k) | - \underline{\lambda}_i^T(k+1) \underline{g}_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k), \underline{z}_i(k) | \quad (1.83)$$

$$H = \sum_{i=1}^N H_i \quad (1.84)$$

A solução ótima é obtida igualando as equações (1.78) a (1.82) a zero e resolvidas simultaneamente com a equação (1.73). Estas representam as condições necessárias de otimalidade.

A distribuição do conjunto de equações (1.78) a (1.82) junto com (1.45) e (1.46) entre os níveis superior e inferior nos permite determinar vários esquemas de coordenação (inclusive o método descrito anteriormente, o método do mixto). Para isto basta definir as variáveis dependentes (variáveis do nível inferior) e independentes (variáveis do nível superior) [12]. O caso onde a va-

riável adjunta ou coestado é variável independente será estudado com detalhes nos capítulos seguintes.

1.5 - Resumo

Foram definidos neste capítulo termos-chave como decomposição, coordenação. Um problema chamado de problema global foi apresentado em várias formas. No capítulo seguinte veremos que, se certos parâmetros forem fixados pelo nível coordenador, podemos a seguir determinar subproblemas de otimização independentes, relacionados com cada subsistema, devido à propriedade aditiva do Lagrangiano e por métodos iterativos atingir a solução do problema global, a partir dos cálculos descentralizados.

Obtêm-se-ão assim formas factíveis de solução de problemas complexos, onde a memória rápida de cálculo ou o tempo de computação do problema global são muito grandes.

CAPÍTULO 2 - MÉTODOS DE DECOMPOSIÇÃO E COORDENAÇÃO EM ESTRUTURAS COM DOIS NÍVEIS

2.1 - Introdução

A teoria dos sistemas hierárquicos multiníveis tem sido utilizada na elaboração de técnicas para a solução de problemas de otimização dinâmica. Estas técnicas possuem características diferentes e vários graus de potencialidade e aplicabilidade.

O objetivo deste capítulo é apresentar três métodos, os respectivos algoritmos para implementação prática e suas características.

Os métodos são aplicados no problema do regulador linear quadrático, pois neste caso resultados mais explícitos podem ser obtidos.

2.2 - O Método Conceitual - Construção de Estruturas com Dois Níveis

Seja um sistema dinâmico descrito pela equação às diferenças:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{g} | \underline{x}(k), \underline{u}(k) | \quad (2.1)$$

que, por hipótese, é constituído de um conjunto de N subsistemas isolados

$$\underline{x}_i(k+1) = \underline{g}_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k), \underline{z}_i(k) | \quad (2.2)$$

interconectados pela relação

$$\underline{z}_i(k) = \sum_{j \neq i}^N \underline{g}_{ij} | \underline{x}_j(k), \underline{u}_j(k) | \quad (2.3)$$

onde

$$\underline{x}(k) \in E^n, \quad \underline{x}_i(k) \in E^{n_i}$$

$$\underline{u}(k) \in E^m, \quad \underline{u}_i(k) \in E^{m_i}$$

$$\underline{x}(k) = \text{COL} | \underline{x}_1(k), \dots, \underline{x}_N(k) |$$

$$\underline{u}(k) = \text{COL} | \underline{u}_1(k), \dots, \underline{u}_N(k) |$$

O problema de otimização é determinar a seqüência de vetores de controle $\underline{u}(k)$ tal que $\underline{u}(k)$ minimize um funcional de custo ou critério

$$J | \underline{x}(k), \underline{u}(k) | = \sum_{k=0}^{K-1} f | \underline{x}(k), \underline{u}(k) | \quad (2.4)$$

Assumindo que o funcional de custo seja aditivamente separável, o problema global pode ser reformulado, como vimos no capítulo anterior, permitindo que o problema original seja reescrito como:

$$\begin{array}{l} \text{MIN} \\ \underline{u}_i(k) \\ i=1, \dots, N \end{array} \sum_{i=1}^N J_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k) | \quad (2.5)$$

sujeito a

$$\underline{x}_i(k+1) = \underline{g}_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k), \underline{z}_i(k) | \quad (2.6)$$

$$\underline{z}_i(k) = \sum_{j \neq i}^N \underline{g}_{ij} | \underline{x}_j(k), \underline{u}_j(k) | \quad (2.7)$$

$$\underline{x}_i(0) = \underline{x}_{i0} \quad (2.8)$$

ou, o problema global é transformado num conjunto de subproblemas pela introdu-

ção da relação de interconexão (2.7). O fato de que o problema global não é uma coleção de subproblemas independentes é refletido pela restrição de interconexão. Este procedimento constitui o primeiro passo na construção de estruturas com dois níveis.

O passo seguinte consiste na decomposição do problema global na forma descrita pelas equações (2.5) a (2.8) em uma família de N subproblemas independentes parametrizados, de estrutura mais simples e de dimensão reduzida.

Seja $\underline{\alpha} = \text{COL}[\underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_N]$ os parâmetros e os subproblemas $P_1[\underline{\alpha}_1], \dots, P_N[\underline{\alpha}_N]$. A decomposição deve ser tal que gere uma família de subproblemas, onde o problema global está contido, no sentido de que existe um parâmetro $\underline{\alpha}^*$ para o qual a solução de $P_1[\underline{\alpha}_1^*], \dots, P_N[\underline{\alpha}_N^*]$ nos fornece a solução do problema global. Este é o conceito de coordenabilidade, como definido por TAKAHARA e MESAROVIC em [17].

Como o parâmetro $\underline{\alpha}^*$, que é a variável de coordenação, é inicialmente desconhecido, todos os métodos que serão discutidos propõem um procedimento iterativo para a sua obtenção, que de uma maneira geral podem ser representados pelo algoritmo conceitual seguinte (ver figura 2.1).

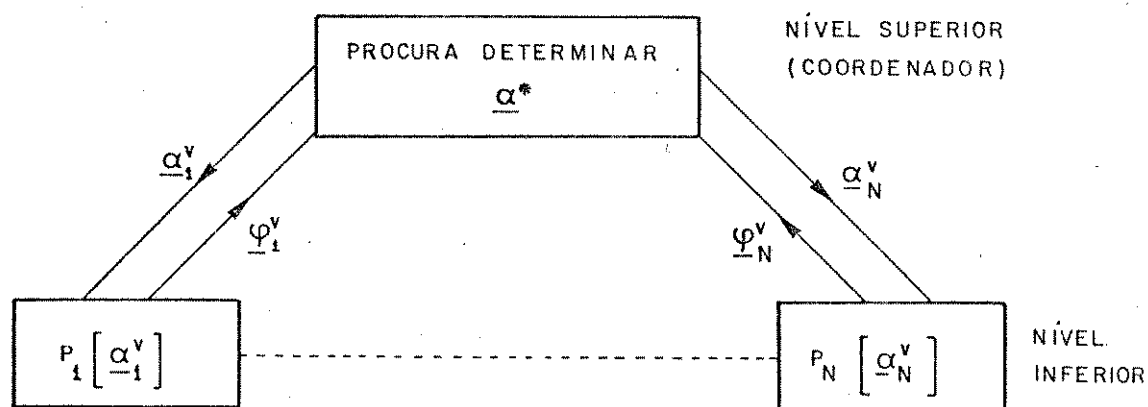


Fig. 2.1 - Estrutura com dois níveis.

- Passo I - O nível superior ou coordenador envia o conjunto de parâmetros $\underline{\alpha}_i^v$, $i = 1, \dots, N$ aos subsistemas que compõe o nível inferior (v é o passo de iteração).
- Passo II - No nível inferior, a família de subproblemas $P_i | \underline{\alpha}_i^v |$ é resolvida independentemente pelos subsistemas.
- Passo III - Os subsistemas enviam ao coordenador alguma função $\underline{\psi}_i^v$ de suas soluções, $i = 1, \dots, N$.
- Passo IV - Se os valores de $\underline{\alpha}^*$ foram obtidos, pare. A solução ótima para o problema foi obtida. Caso contrário ir para o passo V.
- Passo V - O coordenador calcula um novo valor para $\underline{\alpha}^{v+1}$ baseados nos valores de $\underline{\psi}_i^v$ e $\underline{\alpha}_i^v$, $i = 1, \dots, N$. Ir para o passo I.

2.3 - Método Decomposição Espacial - Coordenação por Predição de Interação [11]

Seja o problema de otimização na forma primal-dual, como descrito no capítulo I. O Lagrangiano para o problema é dado pela equação

$$\begin{aligned}
 L | \underline{x}(k), \underline{u}_i(k), \underline{\beta}_i(k), \underline{z}_i(k) | = & \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} \left(f_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k) | + \right. \right. \\
 & + \underline{\beta}_i^T(k) | \underline{z}_i(k) - \sum_{j \neq i} \underline{g}_{ij} | \underline{x}_j(k), \underline{u}_j(k) | + \\
 & \left. \left. + \underline{\lambda}_i^T(k+1) | -\underline{x}_i(k+1) + \underline{g}_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k), \underline{z}_i(k) | \right) \right\} \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

que pode ser reescrito como

$$L = \sum_{i=1}^N L_i | \cdot |$$

onde

$$\begin{aligned}
L_i | \cdot | = & \sum_{k=0}^{K-1} \left(f_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k) | + \underline{\beta}_i^T(k) \cdot \underline{z}_i(k) - \right. \\
& - \sum_{j \neq i}^N \underline{\beta}_j^T(k) \underline{g}_{ji} | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k) | + \\
& \left. + \underline{\lambda}_i^T(k+1) | -\underline{x}_i(k+1) + \underline{g}_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k), \underline{z}_i(k) | \right) \quad (2.10)
\end{aligned}$$

os subproblemas do Lagrangiano são:

$$\begin{aligned}
& \min_{\underline{u}_i(k), \underline{x}_i(k)} \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ f_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k) | + \underline{\beta}_i^T(k) \underline{z}_i(k) - \right. \\
& \left. - \sum_{j \neq i}^N \underline{\beta}_j^T(k) \underline{g}_{ji} | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k) | \right\} \quad (2.11)
\end{aligned}$$

sujeito a

$$\underline{x}_i(k+1) = \underline{g}_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k), \underline{z}_i(k) | \quad (2.12)$$

$$\underline{x}_i(0) = \underline{x}_{i0} \quad (2.13)$$

$$i = 1, \dots, N$$

e o problema dual

$$\max_{\underline{\beta}(k)} D | \underline{\beta}(k) | \quad (2.14)$$

O problema global foi decomposto em uma família de N subproblemas independentes. A razão é que desde que a relação de interconexão (2.17) proporciona o único acoplamento entre os subsistemas e já foi incluída no Lagrangiano, a propriedade de separabilidade aditiva, para trajetórias de $\underline{\beta}_i(k), \underline{z}_i(k)$, que são os parâmetros de coordenação, fornecidos pelo coordenador, justifica a validade da decomposição. O nível inferior resolve os subproblemas do Lagrangiano dados por (2.11) a (2.13) enquanto que o coordenador resolve o problema de maximização de função dual, dado por (2.14), possibilitando uma divisão de carga computacional entre os dois níveis.

Solução dos Subproblemas de Otimização Independentes

As condições de otimalidade para os subproblemas definidos por (2.11) a (2.13) são obtidas pela aplicação do princípio do máximo.

Definindo o Hamiltoniano:

$$H_i | \cdot | = f_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k) | + \underline{\beta}_i^T(k) \underline{z}_i(k) - \sum_{j \neq i}^N \underline{\beta}_j^T(k) \underline{g}_{ji} | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k) | + \\ + \underline{\lambda}_i^T(k+1) | \underline{g}_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k), \underline{z}_i(k) | \quad (2.15)$$

as condições necessárias de primeira ordem, que são as equações a serem resolvidas pelos subsistemas do nível inferior são:

$$\frac{\partial H_i}{\partial \underline{\lambda}_i(k+1)} = \underline{x}_i(k+1) = \underline{g}_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k), \underline{z}_i(k) | \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial \underline{x}_i(k)} = \underline{\lambda}_i(k) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \underline{x}_i(k)} \right)^T - \sum_{j \neq i}^N \left(\frac{\partial \underline{g}_{ji} | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k) |}{\partial \underline{x}_i(k)} \right)^T \underline{\beta}_j(k) + \\ + \left(\frac{\partial \underline{g}_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k), \underline{z}_i(k) |}{\partial \underline{x}_i(k)} \right)^T \underline{\lambda}_i(k+1) \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_i}{\partial \underline{u}_i(k)} = 0 \rightarrow & \left(\frac{\partial f_i}{\partial \underline{u}_i(k)} \right)^T + \left(\frac{\partial g_i | \cdot |}{\partial \underline{u}_i(k)} \right)^T \underline{\lambda}_i(k+1) - \\ & - \sum_{j \neq i}^N \left(\frac{\partial g_{ji} | \cdot |}{\partial \underline{u}_i(k)} \right)^T \underline{\beta}_j(k) = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

com as condições de contorno

$$\begin{aligned} \underline{x}_i(0) &= \underline{x}_{i0} \\ \underline{\lambda}_i(k) &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

A determinação das trajetórias ótimas $\underline{x}_i^*(k)$, $\underline{u}_i^*(k)$ e $\underline{\lambda}_i^*(k+1)$ provém da solução do T.P.B.V.P., descrito pelas equações (2.16) a (2.19).

Solução do Problema de Coordenação

Uma vez obtidas as soluções ótimas para os subproblemas no nível inferior, o problema torna-se um melhoramento de $\underline{z}_i(k)$ e $\underline{\beta}_i(k)$ de maneira tal que a função dual seja maximizada.

As condições necessárias de primeira ordem para a maximização são:

$$\frac{\partial L | \cdot |}{\partial \underline{z}_i(k)} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial L | \cdot |}{\partial \underline{\beta}_i(k)} = 0 \quad (2.20)$$

de onde obtemos:

$$\underline{\beta}_i(k) = - \left(\frac{\partial g_i | \cdot |}{\partial \underline{z}_i(k)} \right)^T \underline{\lambda}_i(k+1) \quad (2.21)$$

$$\underline{z}_i(k) = \sum_{j \neq i}^N g_{ij} | \underline{x}_j(k), \underline{u}_j(k) | \quad (2.22)$$

equações que nos fornecem uma relação explícita das variáveis ou parâmetros de coordenação em função das variáveis do nível inferior.

A regra de coordenação, usando o princípio de predição de interação é do passo de iteração v para $v+1$

$$\begin{bmatrix} \underline{\beta}_i(k) \\ \underline{z}_i(k) \end{bmatrix}^{v+1} = \begin{bmatrix} - \left(\frac{\partial g_i}{\partial \underline{z}_i(k)} \right)^T \underline{\lambda}_i(k+1) \\ \sum_{j \neq i}^N g_{ij} | \underline{x}_j(k), \underline{u}_j(k) | \end{bmatrix}^v \quad (2.23)$$

$$i = 1, \dots, N$$

$$k = 0, \dots, K$$

Os valores de $\underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k), \underline{\lambda}_i(k+1)$ que são obtidos das minimizações independentes parametrizados em $\underline{z}_i(k)$ e $\underline{\beta}_i(k)$, são substituídos nas equações (2.21) e (2.22) para obtenção de $\underline{z}_i(k)$ e $\underline{\beta}_i(k)$, $i = 1, \dots, N$, os quais são usados subsequentemente como uma nova predição de $\underline{z}_i(k)$ e $\underline{\beta}_i(k)$. Este método foi proposto primeiramente por TAKAHARA [3,11] que provou sua convergência.

A figura 2.2 representa a estrutura com dois níveis para este método e a troca de informações entre nível superior e inferior.

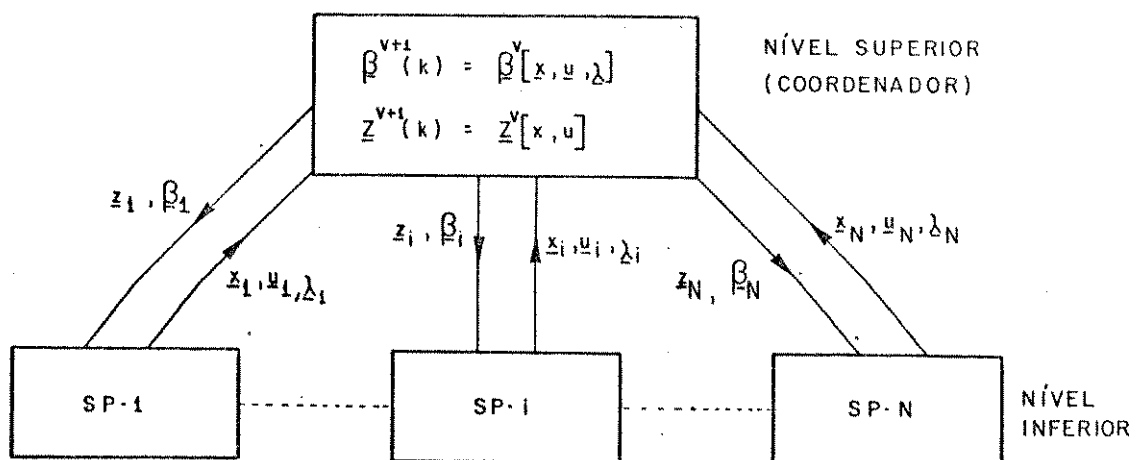


Fig. 2.2 - Estrutura hierárquica para o método de coordenação por predição de interação

Podemos construir um algoritmo que represente este procedimento na implementação em computador digital do seguinte modo:

ALGORITMO I: FORMA GERAL

Passo I - $v \leftarrow 1$

Passo II - Escolher valores iniciais

$$\underline{z}_i(k) \quad k = 0, \dots, K$$

$$\underline{\beta}_i(k) \quad i = 1, \dots, N$$

e enviar para os subsistemas do nível inferior.

Passo III - Resolver os N subproblemas de otimização independentes para $\underline{z}_i(k)$ e $\underline{\beta}_i(k)$ fixados pelo nível superior pela solução do T.P.B.V.P., equações (2.16) a (2.19) e obter as soluções ótimas

$$\underline{x}_i^{*v}(k), \underline{u}_i^{*v}(k), \underline{\lambda}_i^{*v}(k) \quad k = 0, \dots, K$$

$$i = 1, \dots, N$$

e enviar para o nível superior.

Passo IV - Testar se

$$\| \underline{z}_i^{v+1}(k) - \underline{z}_i^v(k) \| < \epsilon \quad k = 0, \dots, K-1$$

$$\| \underline{\beta}_i^{v+1}(k) - \underline{\beta}_i^v(k) \| < \epsilon \quad i = 1, \dots, N$$

onde ϵ é um número positivo suficientemente pequeno e $\| \cdot \|$ representa norma euclidiana.

SIM \rightarrow FIM

NÃO \rightarrow ir para o passo V

Passo V - Fazer uma nova predição dos parâmetros de coordenação de acordo com a equação (2.23).

Passo VI - $v = v+1$

ir para o passo III.

Aplicação ao Problema do Regulador Linear Quadrático

Os sistemas reguladores lineares quadráticos constituem uma classe importante de problemas envolvidos em controle ótimo e são discutidos intensivamente na literatura, como por exemplo em [18,19]. Para esta classe de problemas, o T.P.B.V.P. pode ser resolvido analiticamente e os resultados tornam-se transparentes.

O desenvolvimento e aplicação deste método de coordenação por predição de interação ao problema linear-quadrático está originalmente descrito em [11] para sistemas contínuos. Aqui é feita uma extensão a sistemas discretos.

O problema do regulador linear quadrático pode ser formulado do seguinte modo^(*)

$$\underset{\underline{u}(k)}{\text{MIN}} \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{2} (\| \underline{x}(k) \|_Q^2 + \| \underline{u}(k) \|_R^2) \quad (2.24)$$

sujeito a

$$\underline{x}(k+1) = A\underline{x}(k) + B\underline{u}(k) \quad (2.25)$$

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (2.26)$$

Procedendo como na seção 2.2 e admitindo suas hipóteses, o problema definido por (2.24) a (2.26) pode ser reescrito como:

(*) $\| \underline{v} \|_Q^2$ denota a forma quadrática $\underline{v}^T Q \underline{v}$

$$\min_{\substack{\underline{u}_i(k) \\ i=1, \dots, N}} \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{2} (\| \underline{x}_i(k) \|^2_{Q_i} + \| \underline{u}_i(k) \|^2_{R_i}) \right\} \quad (2.27)$$

sujeito à

$$\underline{x}_i(k+1) = A_{i,i} \underline{x}_i(k) + B_{i,i} \underline{u}_i(k) + \underline{z}_i(k) \quad (2.28)$$

$$\underline{z}_i(k) = \sum_{j \neq i}^N A_{i,j} \underline{x}_j(k) \quad (2.29)$$

$$\underline{x}_i(0) = \underline{x}_{i0} \quad (2.30)$$

onde Q_i são matrizes reais simétricas, semidefinidas-positivas; R_i são matrizes reais simétricas definidas positivas, que são respectivamente, as matrizes de ponderação do estado e controle.

Vamos admitir, sem perda de generalidade, que o acoplamento entre os subsistemas é devido à equação (2.29).

Procedendo como anteriormente e de acordo com o capítulo I, o Lagrangiano para este problema é

$$\begin{aligned} L | \underline{x}(k), \underline{u}_i(k), \underline{\beta}_i(k), \underline{z}_i(k) | &= \sum_{i=1}^{K-1} \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} \left(\frac{1}{2} (\| \underline{x}_i(k) \|^2_{Q_i} + \| \underline{u}_i(k) \|^2_{R_i}) + \right. \right. \\ &+ \underline{\beta}_i^T(k) | \underline{z}_i(k) - \sum_{j \neq i}^N A_{i,j} \underline{x}_j(k) | + \\ &\left. \left. + \underline{\lambda}_i^T(k+1) | -\underline{x}_i(k+1) + A_{i,i} \underline{x}_i(k) + B_{i,i} \underline{u}_i(k) + \underline{z}_i(k) | \right) \right\} \quad (2.31) \end{aligned}$$

utilizando a relação (1.57):

$$\begin{aligned}
L|\underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k), \underline{\beta}(k), \underline{z}_i(k)| &= \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} \left(\frac{1}{2} (\|\underline{x}_i(k)\|_{Q_i}^2 + \|\underline{u}_i(k)\|_{R_i}^2 + \right. \right. \\
&+ \underline{\beta}_i^T(k) \underline{z}_i(k) - \sum_{j \neq i}^N \underline{\beta}_j^T(k) A_{ji} \underline{x}_i(k) + \\
&\left. \left. + \underline{\lambda}_i^T(k+1) [-\underline{x}_i(k+1) + A_{ii} \underline{x}_i(k) + B_{ii} \underline{u}_i(k) + \underline{z}_i(k)] \right) \right\} \quad (2.32)
\end{aligned}$$

ou

$$L|\cdot| = \sum_{i=1}^N L_i|\cdot|$$

os subproblemas são definidos de acordo com as equações (2.11) a (2.13) ou

$$\begin{aligned}
\text{MIN}_{\underline{x}_i, \underline{u}_i} \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ \frac{1}{2} (\|\underline{x}_i(k)\|_{Q_i}^2 + \|\underline{u}_i(k)\|_{R_i}^2) + \underline{\beta}_i^T(k) \underline{z}_i(k) - \right. \\
\left. - \sum_{j \neq i}^N \underline{\beta}_j^T(k) A_{ji} \underline{x}_i(k) \right\} \quad (2.33)
\end{aligned}$$

sujeito a

$$\underline{x}_i(k+1) = A_{ii} \underline{x}_i(k) + B_{ii} \underline{u}_i(k) + \underline{z}_i(k) \quad (2.34)$$

$$\underline{x}_i(0) = \underline{x}_{i0} \quad (2.35)$$

O Hamiltoniano para o subsistema i é:

$$\begin{aligned}
H_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k), \underline{\beta}(k), \underline{z}_i(k) | &= \frac{1}{2} (\| \underline{x}_i(k) \|_{Q_i}^2 + \| \underline{u}_i(k) \|_{R_i}^2) + \\
&+ \underline{\beta}_i^T(k) \underline{z}_i(k) - \sum_{j \neq i}^N \underline{\beta}_j^T(k) A_{ji} \underline{x}_i(k) + \\
&+ \underline{\lambda}_i^T(k+1) | A_{ii} \underline{x}_i(k) + B_{ii} \underline{u}_i(k) + \underline{z}_i(k) |
\end{aligned} \tag{2.36}$$

As condições de otimalidade para o primeiro nível são:

$$\frac{\partial H_i}{\partial \underline{\lambda}_i(k+1)} = \underline{x}_i(k+1) = A_{ii} \underline{x}_i(k) + B_{ii} \underline{u}_i(k) + \underline{z}_i(k) \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial \underline{x}_i(k)} = \underline{\lambda}_i(k) = Q_i \underline{x}_i(k) + A_{ii}^T \underline{\lambda}_i(k+1) - \sum_{j \neq i}^N A_{ji}^T \underline{\beta}_j(k) \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial \underline{u}_i(k)} = 0 \rightarrow R_i \underline{u}_i(k) + B_{ii}^T \underline{\lambda}_i(k+1) = 0 \tag{2.39}$$

com as condições de contorno

$$\underline{\lambda}_i(K) = 0 \quad \text{e} \quad \underline{x}_i(0) = \underline{x}_{i0} \tag{2.40}$$

A solução do T.P.B.V.P., equações (2.37) a (2.39) está desenvolvendo com detalhes no apêndice B, de onde obtemos a lei de controle que minimiza (2.27) na forma:

$$\begin{aligned}
\underline{u}_i(k) &= V_i(k+1) A_{ii} \underline{x}_i(k) + V_i(k+1) E \underline{d}_i(k+1) - \\
&- V_i(k+1) \underline{z}_i(k) - R_i^{-1} B_{ii}^T \underline{\lambda}_i(k+1)
\end{aligned} \tag{2.41}$$

onde:

$$P_i(k) = Q_i + A_{ii}^T H_i(k+1) A_{ii} \quad (2.42)$$

$$\underline{d}_i(k) = -A_{ii}^T H_i(k+1) E \underline{d}_i(k+1) + A_{ii}^T H_i(k+1) \underline{z}_i(k) + A_{ii}^T \underline{d}_i(k+1) - \underline{\alpha}_i(k) \quad (2.43)$$

$$V_i(k+1) = [R_i + B_{ii}^T P_i(k+1) B_{ii}]^{-1} B_{ii}^T P_i(k+1)$$

$$H_i(k+1) = [P_i(k+1) - P_i(k+1) B_{ii} V_i(k+1)] A_{ii}$$

$$\underline{\alpha}_i(k) = \sum_{j \neq i}^N A_{ji}^T \underline{\beta}_j(k) \quad (2.44)$$

$$E = B_{ii} R_i^{-1} B_{ii}^T$$

$$P_i(K) = 0 \quad \underline{d}_i(K) = 0$$

A equação (2.41) pode ser escrita compactamente:

$$\underline{u}_i(k) = -G_i \underline{x}_i(k) - \underline{b}_i$$

$$G_i = V_i(k+1) A_{ii} \quad (2.45)$$

$$\underline{b}_i = [R_i^{-1} B_{ii}^T - V_i(k+1) E] \underline{d}_i(k+1) - V_i(k+1) \underline{z}_i(k)$$

A matriz de ganho G_i pode ser obtida independentemente para cada subsistema, uma vez que não depende de condição inicial $\underline{x}(0)$. Para isto é necessário resolver a equação (2.42) que é a equação tipo Riccati discreta. Dada a condição final $P_i(K) = 0$, a solução é obtida no sentido $K \rightarrow 0$, ou no sentido inverso do estágio discreto. Portanto, o primeiro termo fornece uma realimentação parcial do estado.

Para determinarmos a segunda parcela da lei de controle é preciso

resolver a equação vetorial de dimensão n_i dada por (2.43), que não é independente de $\underline{x}(0)$, devido a variável de interconexão \underline{z}_i , que depende das variáveis de estado dos outros subsistemas. Esta segunda parcela pode ser interpretada como uma compensação em malha aberta.

A tarefa do coordenador consiste na aplicação das condições (2.20) à equação (2.38) e são:

$$\underline{\beta}_i(k) + \underline{\lambda}_i(k+1) = 0$$

$$\underline{z}_i(k) - \sum_{j \neq i}^N A_{ij} \underline{x}_j(k) = 0 \quad (2.46)$$

$$i = 1, \dots, N$$

ou

$$\begin{bmatrix} \underline{\beta}_i(k) \\ \underline{z}_i(k) \end{bmatrix}^{v+1} = \begin{bmatrix} -\underline{\lambda}_i(k+1) \\ \sum_{j \neq i}^N A_{ij} \underline{x}_j(k) \end{bmatrix}^v \quad (2.47)$$

que é a regra de coordenação.

O algoritmo 1 pode ser aplicado ao caso do seguinte modo:

ALGORITMO 1: PROBLEMA DO REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO

Passo I - $v \leftarrow 1$

Passo II - Escolher valores iniciais

$$\underline{z}_i^v(k), \quad \underline{\beta}_i^v(k)$$

$$k = 0, \dots, K$$

$$i = 1, \dots, N$$

e enviar para os subsistemas.

Passo III - Para cada subsistema i , $i = 1, \dots, N$

- Resolver a equação de Riccati (2.42).
- Resolver a equação do compensador (2.43).
- Calcular as trajetórias ótimas do controle e estado de acordo com o seguinte esquema, desde que $\underline{x}_i(0)$ é conhecido:

$$\underline{x}_i(0) \rightarrow \underline{u}_i(0) \rightarrow \underline{x}_i(1) \rightarrow \dots \rightarrow \underline{x}_i(K-1) \rightarrow \underline{u}_i(K-1) \rightarrow \underline{x}_i(K)$$

utilizando as equações (2.41) e (2.34).

- Calcular a trajetória ótima do coestado pela equação (B.3) do apêndice B.

Enviar as trajetórias para o nível superior.

Passo IV - Testar se

$$\eta = \begin{cases} \left\| \underline{z}_i^{v+1}(k) - \underline{z}_i^v(k) \right\| \\ \left\| \underline{\beta}_i^{v+1}(k) - \underline{\beta}_i^v(k) \right\| \end{cases} < \epsilon' \quad \begin{matrix} k = 0, \dots, K \\ i = 1, \dots, N \end{matrix}$$

SIM \rightarrow FIM

NÃO \rightarrow ir para o passo V

Passo V - Fazer uma nova predição dos parâmetros de coordenação utilizando a equação (2.47).

Passo IV - $v \leftarrow v+1$

Ir para o passo III.

O diagrama de blocos da figura 2.3 ilustra este procedimento.

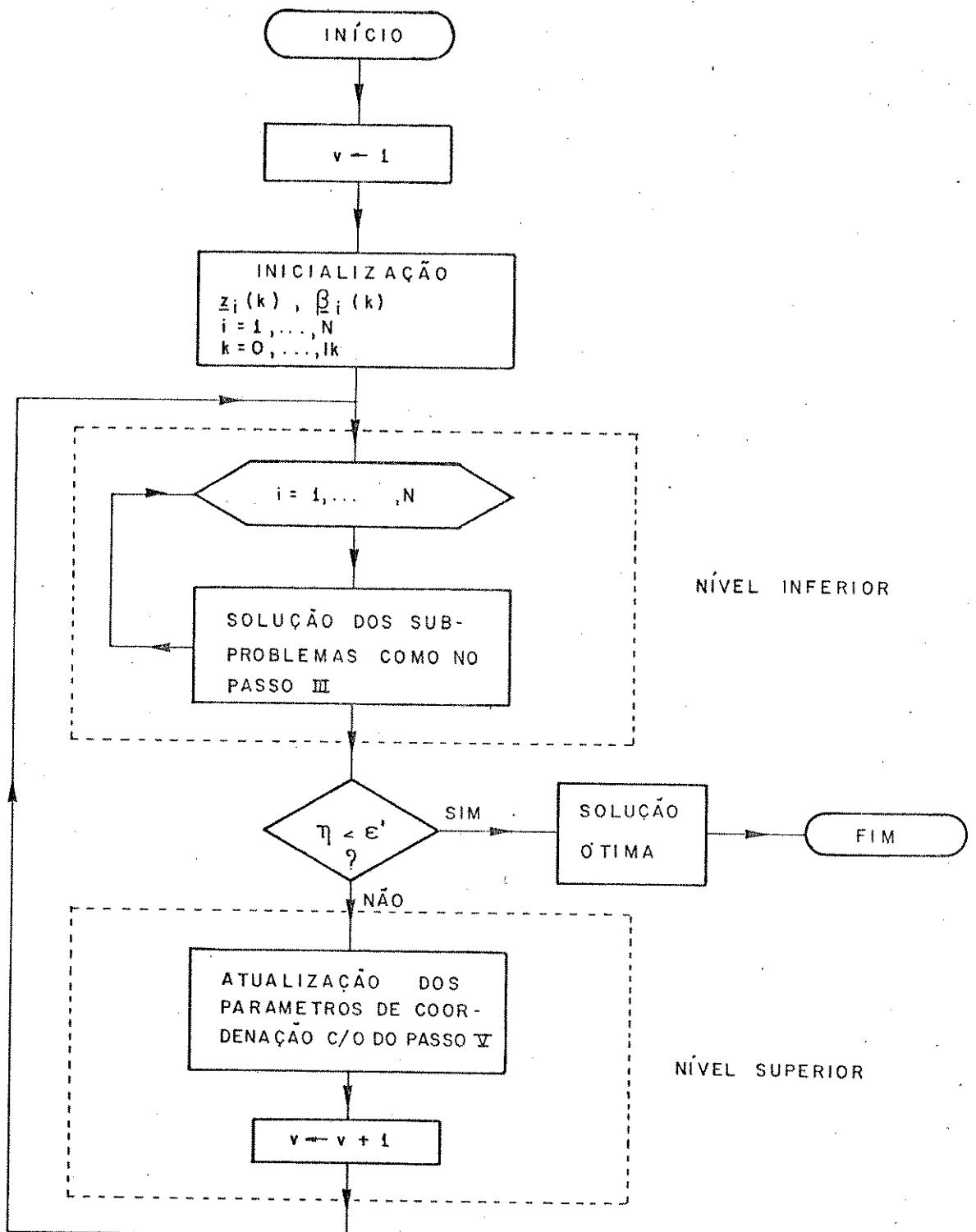


Fig. 2.3 - Diagrama de blocos para o método decomposição espacial - coordenação por predição de interação.

2.4 - Método Decomposição Paramétrica - Coordenação pelo Critério [9]

Vamos considerar o problema de otimização dinâmica na forma dual, como no capítulo 1. O Lagrangiano é:

$$L[\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}] = \phi[\underline{x}(K)] + \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ f[\underline{x}(k), \underline{u}(k)] - \underline{\lambda}^T(k) [\underline{x}(k+1) - \underline{g}[\underline{x}(k), \underline{u}(k)]] \right\} \quad (2.48)$$

a função dual

$$D[\underline{\lambda}(k)] = \min_{\underline{x}(k), \underline{u}(k)} L[\underline{x}(k), \underline{u}(k), \underline{\lambda}(k)] \quad (2.49)$$

$\underline{\lambda}(k)$ é o vetor multiplicador de Lagrange. O Lagrangiano pode ser reescrito como:

$$L[.] = \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ H[\underline{x}(k), \underline{u}(k), \underline{\lambda}(k)] - \underline{\lambda}^T(k-1) \underline{x}(k) \right\} + \phi[\underline{x}(K)] - \underline{\lambda}^T(K-1) \underline{x}(K) \quad (2.50)$$

onde $H[.]$ é o Hamiltoniano definido pela equação (1.70).

Admitindo as hipóteses da seção 2.2, para valores $\underline{\lambda}(k)$ fixados pelo nível superior, o Lagrangiano é aditivamente separável no estágio k e podemos então definir $K+1$ problemas de otimização independentes a serem resolvidas pelo nível inferior.

Solução dos Subproblemas de Otimização Independentes

Os $K+1$ problemas de otimização parametrizados em $\underline{\lambda}(k)$ são:

para $k = 0$

$$\underset{\underline{u}(0)}{\text{MIN}} H[\underline{x}(0), \underline{u}(0), \underline{\lambda}(k)] \quad (2.51)$$

sujeito a $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$

para $k = 1, \dots, K-1$

$$\underset{\underline{x}(k), \underline{u}(k)}{\text{MIN}} \{H[\underline{x}(k), \underline{u}(k), \underline{\lambda}(k)] - \underline{\lambda}^T(k-1)\underline{x}(k)\} \quad (2.52)$$

para $k = K$

$$\underset{\underline{x}(K)}{\text{MIN}} \{\phi[\underline{x}(K)] - \underline{\lambda}^T(K-1)\underline{x}(K)\} \quad (2.53)$$

com $\underline{\lambda}(-1) = 0$

$$\underline{\lambda}(k) = 0, \quad k \geq K$$

Os procedimentos computacionais para a solução dos subproblemas (2.51) a (2.53) são os métodos tipo gradiente, como por exemplo o método de FLETCHER-POWELL ou outros, como descritos, por exemplo, em [20].

No caso geral, onde estão presentes restrições de desigualdade e igualdade, TAMURA [9] sugere vários métodos, que podem ser classificados de acordo com as não linearidades da equação do modelo, do funcional de custo e das restrições. Sendo as equações do modelo, do funcional e das restrições não lineares, os métodos de penalização são os mais adequados. Quando as equações do modelo, do funcional e da restrição de igualdade são não lineares e as restrições de desigualdade são lineares, métodos como gradiente projetado, direções factíveis ou modificação do método de FLETCHER-POWELL são convenientes.

Quando o funcional de custo é quadrática, a do modelo linear e as restrições de desigualdade são do tipo saturação ou não existem, podemos obter soluções analíticas, como no exemplo do regulador linear-quadrático.

Solução do Problema de Coordenação

As equações (2.51) a (2.53) fornecem as soluções para os subproblemas do nível inferior e permite calcular o valor da função dual $D[\underline{\lambda}(k)]$, para $\underline{\lambda}^*(k)$ fixado pelo nível superior, possibilitando encontrar a trajetória $\underline{\lambda}^{**}(k)$ que maximiza a função dual.

Supondo que a solução dos $K+1$ subproblemas exista e é obtida unicamente como sendo

$$\underline{x}^*(k) = \text{COL} [\underline{x}^*(1), \dots, \underline{x}^*(K)]$$

$$\underline{u}^*(k) = \text{COL} [\underline{u}^*(0), \dots, \underline{u}^*(K-1)]$$

das equações (2.48) e (2.49), o valor da função dual é

$$D[\underline{\lambda}^*(k)] = L[\underline{x}^*(k), \underline{u}^*(k), \underline{\lambda}^*(k)]$$

ou

$$D[\underline{\lambda}^*(k)] = \phi[\underline{x}^*(k)] + \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ f[\underline{x}^*(k), \underline{u}^*(k)] - \underline{\lambda}^{*T}(k) [\underline{x}^*(k+1) - \underline{g}[\underline{x}^*(k), \underline{u}^*(k)]] \right\}$$

e o vetor gradiente pode ser obtido facilmente

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\underline{\lambda}(k)} D[\underline{\lambda}^*(k)] \\ \underline{\lambda}(k) = \underline{\lambda}^*(k) \end{aligned} \right| = -\underline{x}^*(k+1) + \underline{g}[\underline{x}^*(k), \underline{u}^*(k)] \quad (2.55)$$

Obtidas as informações a respeito do valor da função dual e do gradiente para cada valor de $\underline{\lambda} = \underline{\lambda}^*$ fixado, a solução do problema dual pode ser obtida numericamente por técnicas tipo gradiente, como por exemplo, o método gradiente conjugado de FLETCHER-REEVES [20, 21]. Como o problema dual é irrestrito, a condição para que a solução ótima seja encontrada é que $\nabla D[\underline{\lambda}(k)] = 0$

ou que

$$\underline{x}(k+1) = \underline{g}[\underline{x}(k), \underline{u}(k)] \quad (2.56)$$

o que significa que a equação dinâmica do sistema seja satisfeita. O problema dual traduz o fato de que o coordenador modifica as soluções dos subproblemas do nível inferior iterativamente de modo a satisfazer a relação de interconexão entre os estágios K , que é a equação (2.56). O erro de interconexão é representado pelo vetor gradiente.

É interessante notar que a equação (2.56) representa para este método o que a relação (2.7) representa para o caso com decomposição espacial.

A figura 2.4 mostra esquematicamente a estrutura com dois níveis e a troca de informações entre coordenador e nível inferior.

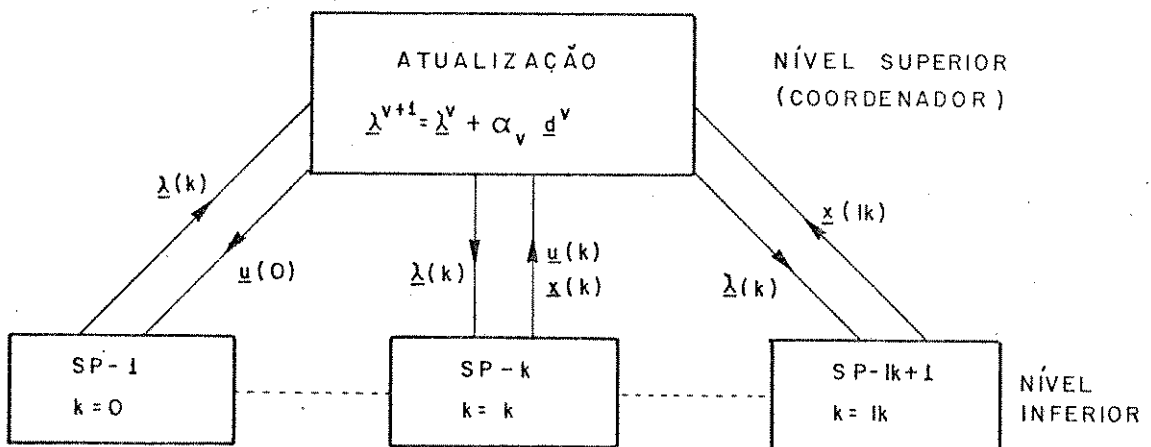


Fig. 2.4 - Estrutura hierárquica para o método de decomposição paramétrica, coordenação pelo critério.

O procedimento para a maximização da função dual, utilizando o método gradiente conjugado pode ser resumido pelo algoritmo seguinte:

ALGORITMO 2: FORMA GERAL

Passo I - $v \leftarrow 1$

Passo II - Escolher valores iniciais arbitrários

$$\underline{\lambda}^v(k) \quad , \quad k = 0, \dots, K-1$$

e enviar para os subsistemas do nível inferior.

Passo III - Resolver os $K+1$ subproblemas de otimização independentes para $\underline{\lambda}^v(k)$ fixados pelo nível superior e obter as soluções ótimas.

$$\underline{x}^v(k) \quad , \quad k = 1, \dots, K \quad \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0$$

$$\underline{u}^v(k) \quad , \quad k = 0, \dots, K-1$$

e enviar para o nível superior.

Passo IV - Utilizando a equação (2.55), calcular o vetor erro de interconexão

$$\underline{e}^v | \underline{\lambda}^v | = \nabla_{\underline{\lambda}} D | \underline{\lambda}(k) | \Big|_{\underline{\lambda} = \underline{\lambda}^v}$$

$n \times K$ dimensional

$$\underline{e}^v | \underline{\lambda}^v | = \nabla D | \underline{\lambda}(k) | \Big|_{\underline{\lambda} = \underline{\lambda}^v} = \begin{bmatrix} \nabla_{\underline{\lambda}(0)} D | \underline{\lambda}(k) | \Big|_{\underline{\lambda} = \underline{\lambda}^v} \\ \nabla_{\underline{\lambda}(1)} D | \underline{\lambda}(k) | \Big|_{\underline{\lambda} = \underline{\lambda}^v} \\ \vdots \\ \nabla_{\underline{\lambda}(K-1)} D | \underline{\lambda}(k) | \Big|_{\underline{\lambda} = \underline{\lambda}^v} \end{bmatrix}$$

Passo V - Testar se

$$a) \eta_1 = \| \underline{e}^v | \underline{\lambda}^v | \|^2 < \epsilon_1$$

SIM $\rightarrow \underline{\lambda}^v(k)$ é a solução ótima para o problema dual.

$$b) \eta_2 = \| J | \underline{x}^v(k), \underline{u}^v(k) | - D | \underline{\lambda}^v | \|^2 < \epsilon_2$$

SIM $\rightarrow \underline{x}^v(k), \underline{u}^v(k)$ são soluções ótimas para o problema primal.

Se $\| \underline{e}^v | \underline{\lambda}^v | \|^2 \geq \epsilon_1$ ir para o passo VI.

ϵ_1 e ϵ_2 são números positivos suficientemente pequenos.

Passo VI - Atualizar os multiplicadores $\underline{\lambda}$ de acordo com

$$\underline{\lambda}^{v+1} = \underline{\lambda}^v + \alpha_v \underline{d}^v \quad \text{onde}$$

$$\underline{d}^v = \underline{e}^v | \underline{\lambda}^v | + \beta_{v-1} \underline{d}^{v-1}, \quad \underline{d}^1 = \underline{e} | \underline{\lambda}^1 |$$

$$\beta_{v-1} = \frac{\underline{e}^v | \underline{\lambda}^v |, \underline{e}^v | \underline{\lambda}^v |}{\underline{e}^{v-1} | \underline{\lambda}^{v-1} |, \underline{e}^{v-1} | \underline{\lambda}^{v-1} |}$$

$\alpha_v > 0$ é o passo a ser dado na direção \underline{d}^v e é tal que $D | \underline{\lambda}^v + \alpha_v \underline{d}^v |$ seja maximizada em cada iteração.

Passo VII - $v + v+1$

Ir para o passo III.

Aplicação ao Problema do Regulador Linear-Quadrático

O problema:

$$\min_{\underline{u}(k)} \left\{ \|\underline{x}(K)\|_Q^2 + \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{2} (\|\underline{x}(k)\|_Q^2 + \|\underline{u}(k)\|_R^2) \right\}$$

sujeito a

$$\underline{x}(k+1) = A\underline{x}(k) + B\underline{u}(k)$$

$$\underline{x}(0) = \underline{x}$$

onde Q e R são matrizes positivas definidas.

O Lagrangiano para o problema é:

$$\begin{aligned} L[\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}] = & \sum_{k=0}^{K-1} \{H[\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}] - \underline{\lambda}^T(k-1)\underline{x}(k)\} + \\ & + \|\underline{x}(K)\|_Q^2 - \underline{\lambda}^T(K-1)\underline{x}(K) \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$H[\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}] = \frac{1}{2} (\|\underline{x}(k)\|_Q^2 + \|\underline{u}(k)\|_R^2) + \underline{\lambda}^T(k) [A\underline{x}(k) + B\underline{u}(k)] \quad (2.59)$$

$$\underline{\lambda}(K) = 0 ; \quad \underline{\lambda}(k) = 0, \quad k \geq K$$

As equações de otimalidade para os K-1 subproblemas são, desde que $\underline{\lambda}$ é fixado:

para $k=0$

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{u}(0)} = 0 \rightarrow \underline{u}(0) = -R^{-1}B^T \underline{\lambda}(0) \quad (2.60)$$

para $k = 1, \dots, K-1$

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{u}(k)} = 0 \rightarrow \underline{u}(k) = -R^{-1} B^T \underline{\lambda}(k) \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{x}(k)} - \underline{\lambda}(k-1) = 0 \rightarrow \underline{x}(k) = -Q^{-1} [A^T \underline{\lambda}(k) - \underline{\lambda}(k-1)] \quad (2.62)$$

para $k = K$

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{x}(K)} = 0 \rightarrow \underline{x}(K) = Q^{-1} \underline{\lambda}(K-1) \quad (2.63)$$

A condição de primeira ordem para o nível superior é:

$$\frac{\partial L[\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}]}{\partial \underline{\lambda}(k)} = 0 \rightarrow -\underline{x}(k+1) + A\underline{x}(k) + B\underline{u}(k) = 0 \quad (2.64)$$

condição a ser satisfeita durante o processo iterativo. O vetor gradiente \bar{e} , de (2.55):

$$\underline{\nabla}_{\underline{\lambda}} D[\underline{\lambda}(k)] = -\underline{x}(k+1) + A\underline{x}(k) + B\underline{u}(k) \quad (2.65)$$

O diagrama de blocos da figura 2.5 mostra esquematicamente o procedimento para aplicação do algoritmo 2 ao problema do regulador.

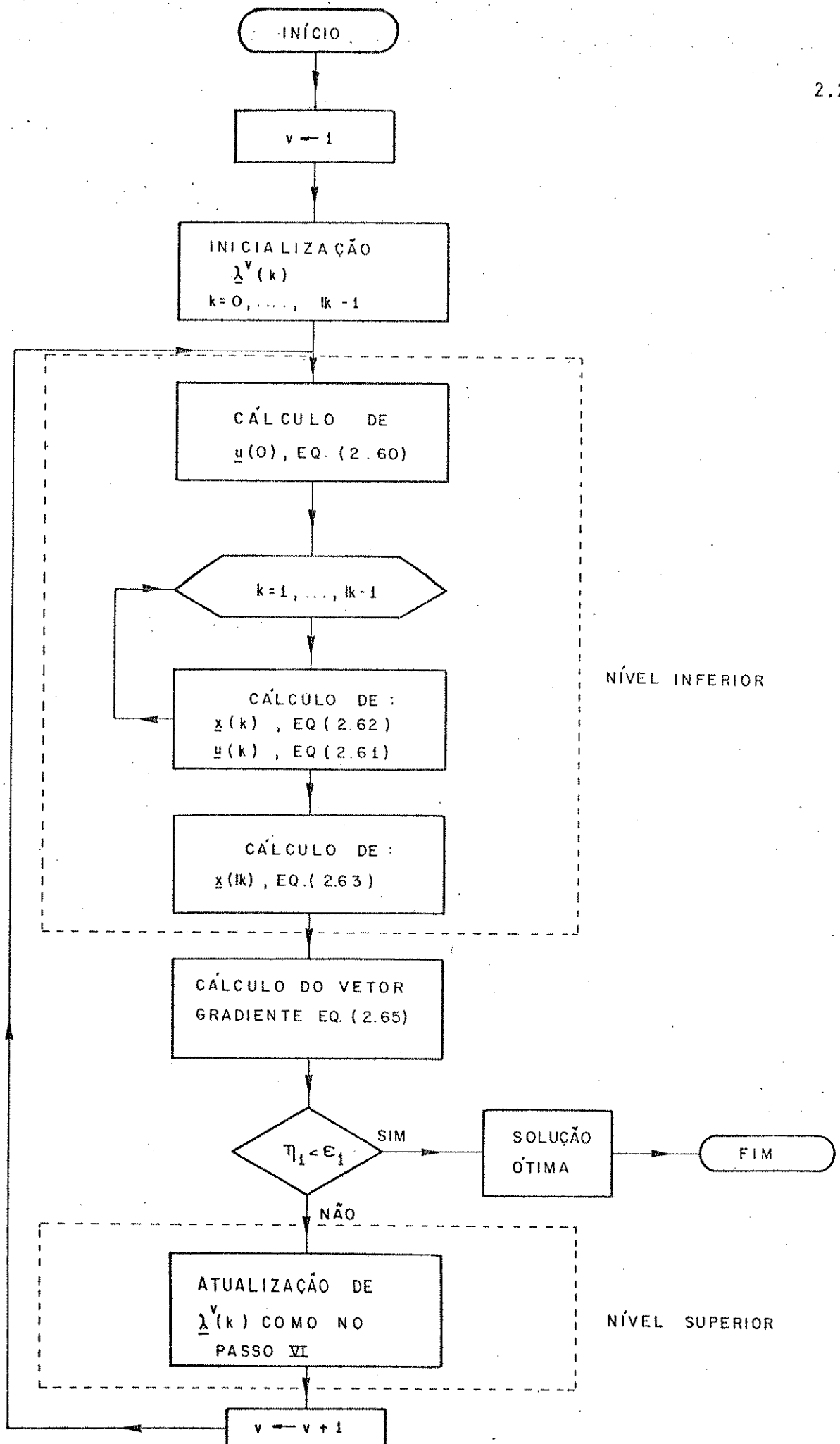


Fig. 2.5 - Diagrama de blocos para o método decomposição paramétrica - coordenação pelo critério.

2.5 - Método Decomposição Espacial - Coordenação pelo Coestado [12]

A formulação hierárquica do problema global na forma dos gradientes generalizados possibilitou a unificação dos métodos que utilizam estruturas com dois níveis para sua solução e foi desenvolvida por MAHMOUD e outros em [12] para sistema discretos e por MAHMOUD [10] no caso de sistemas contínuos. A relação entre os métodos na forma dos gradientes generalizados e os métodos baseados no teorema da dualidade de Lagrange é discutida por MAHMOUD em [16]. A idéia básica deste procedimento é que não existe nenhuma restrição sobre o conjunto de variáveis que serão manipulados pelo nível inferior e superior. Uma vez definidas as variáveis dependentes e independentes, podemos construir uma estrutura com dois níveis que pode ser implementada praticamente [12].

Seja o problema de otimização na forma dos gradientes generalizados, capítulo 1. O método de coordenação pelo coestado se caracteriza pela definição dos seguintes grupos de variáveis:

variável independente: $\underline{\lambda}_i(k)$

variáveis dependentes: $\underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k), \underline{\beta}_i(k), \underline{z}_i(k)$

Das equações (1.78) a (1.82), os gradientes generalizados são:

$$\underline{g}_1 | \underline{x}_i(k) | = \left(\frac{\partial \phi_i | \underline{x}_i(k) |}{\partial \underline{x}_i(k)} \right)^T - \underline{\lambda}_i(k) \quad (2.66)$$

$$\underline{g}_2 | \underline{x}_i(k) | = \left(\frac{\partial H_i}{\partial \underline{x}_i(k)} \right)^T - \underline{\lambda}_i(k) \quad (2.67)$$

$$\underline{g}_3 | \underline{u}_i(k) | = \left(\frac{\partial H_i}{\partial \underline{u}_i(k)} \right)^T \quad (2.68)$$

$$\underline{g}_4 | \underline{\beta}_i(k) | = \left(\frac{\partial H}{\partial \underline{\beta}_i(k)} \right)^T \quad (2.69)$$

$$\underline{g}_i | \underline{z}_i(k) | = \left(\frac{\partial H_i}{\partial \underline{z}_i(k)} \right)^T \quad (2.70)$$

$$k = 0, \dots, K$$

As equações (2.68) a (2.70) e (2.7) representam os subproblemas do nível inferior enquanto que as equações (2.66) e (2.67) serão satisfeitas pelo nível superior durante o processo iterativo.

Solução dos Subproblemas de Otimização Independentes

O sistema de equações a serem resolvidos pelo nível inferior é obtido diretamente das equações (2.68) a (2.70) e (2.7) e são:

$$\underline{x}_i(k+1) = \underline{g}_i | \underline{x}_i(k), \underline{u}_i(k), \underline{z}_i(k) | \quad (2.71)$$

$$\underline{x}_i(0) = \underline{x}_{i0} \quad (2.72)$$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial \underline{u}_i(k)} \right)^T + \left(\frac{\partial \underline{g}_i}{\partial \underline{u}_i(k)} \right)^T \underline{\lambda}_i(k+1) - \sum_{j \neq i}^N \left(\frac{\partial \underline{g}_{ji}}{\partial \underline{u}_i(k)} \right)^T \underline{\beta}_j(k) = 0 \quad (2.73)$$

$$\underline{z}_i(k) = \sum_{j \neq i}^N \underline{g}_{ij} | \underline{x}_j(k), \underline{u}_j(k) | \quad (2.74)$$

$$\underline{\beta}_i(k) + \left(\frac{\partial \underline{g}_i}{\partial \underline{z}_i(k)} \right)^T \underline{\lambda}_i(k+1) = 0 \quad (2.75)$$

$$i = 1, \dots, N$$

$$k = 0, \dots, K-1$$

Uma vez que $\underline{\lambda}_i(k)$ é fixado, podemos calcular os multiplicadores de Lagrange pela equação (2.75) e utilizando (2.73) calculamos a sequência dos vetores de controle $\underline{u}_i(k)$.

Solução do Problema de Coordenação

O processo de coordenação envolve a manipulação do coestado iterativamente de maneira a anular as equações (2.66), (2.67). Duas propriedades constituem a base para a estratégia de coordenação:

a) A informação transmitida pelo nível coordenador aos subsistemas é a trajetória do coestado enquanto que a informação que recebe do nível inferior é o valor da derivada do Hamiltoniano com respeito às variáveis de estado do sistema, que é função do coestado [12].

b) O coestado sempre tende a aumentar o valor do Lagrangiano [12].

O problema então é reduzido em determinar um valor ótimo para $\underline{\lambda}_i(k)$ tal que

$$\underline{\lambda}_i^*(k) = \psi | \underline{\lambda}_i^*(k) | \quad (2.76)$$

$$\psi | \underline{\lambda}_i(k) | = \frac{\partial H_i}{\partial \underline{x}_i(k)} \quad i = 1, \dots, N$$

A relação (2.76) é usada iterativamente como uma direção de busca. O passo a ser dado nesta direção deve ser escolhido de modo a sempre aumentar o Lagrangiano até que o valor ótimo seja atingido. O procedimento computacional é resumido pelo algoritmo seguinte:

ALGORITMO 3: FORMA GERAL

Passo I - $v \leftarrow 1$

Passo II - Escolher valores iniciais

$$\begin{aligned} \underline{\lambda}_i^v(k) & \quad i = 1, \dots, N \\ & \quad k = 0, \dots, K-1 \end{aligned}$$

e enviar para os subsistemas do nível inferior.

Passo III - Resolver os N subproblemas de otimização independentes para $\underline{\lambda}_i^v$ fixados pelo nível superior utilizando as equações (2.71) a (2.75) e obter as soluções ótimas.

$$\begin{aligned} \underline{x}_i^v(k), \underline{\beta}_i^v(k), \underline{z}_i^v(k) & \quad k = 0, \dots, K \\ \underline{u}_i^v(k) & \quad k = 0, \dots, K-1 \\ i & = 1, \dots, N \end{aligned}$$

e enviar para o nível superior.

Passo IV - Calcular as quantidades

$$\begin{aligned} \text{a) } \psi|\underline{\lambda}_i^v(k)| & = \left(\frac{\partial H_i}{\partial \underline{x}_i(k)} \right)^v \\ \text{b) } G|\underline{\lambda}_i^v(k)| & \triangleq L|\underline{x}_i^v(k), \underline{u}_i^v(k), \underline{\lambda}_i^v(k)| \\ i & = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Passo V - Calcular a variação relativa de $G|\underline{\lambda}_i^v(k)|$ com respeito a pequenas variações em $\underline{\lambda}_i^v(k)$ e determinar o passo α^v que corresponde a um certo aumento percentual em $G|\underline{\lambda}_i^v(k)|$.

Passo VI - Testar se

$$\eta = \|\underline{\lambda}_i^{v+1}(k) - \underline{\lambda}_i^v(k)\| < \epsilon$$

onde $\epsilon > 0$ é um número suficientemente pequeno.

$$i = 1, \dots, N$$

SIM \rightarrow FIM

NÃO \rightarrow ir para o passo VII

Passo VII - Atualizar o coestado de acordo com

$$\underline{\lambda}^{v+1}(k) = \underline{\lambda}^v(k) + \alpha^v \left[\underline{\lambda}^v(k) - \left(\frac{\partial H}{\partial \underline{x}(k)} \right)^v \right] \quad (2.77)$$

$$k = 0, \dots, K$$

Passo VIII- $v \leftarrow v+1$

Ir para o passo III.

A figura 2.6 representa a estrutura hierárquica para o método e a troca de informação entre os níveis superior e inferior.

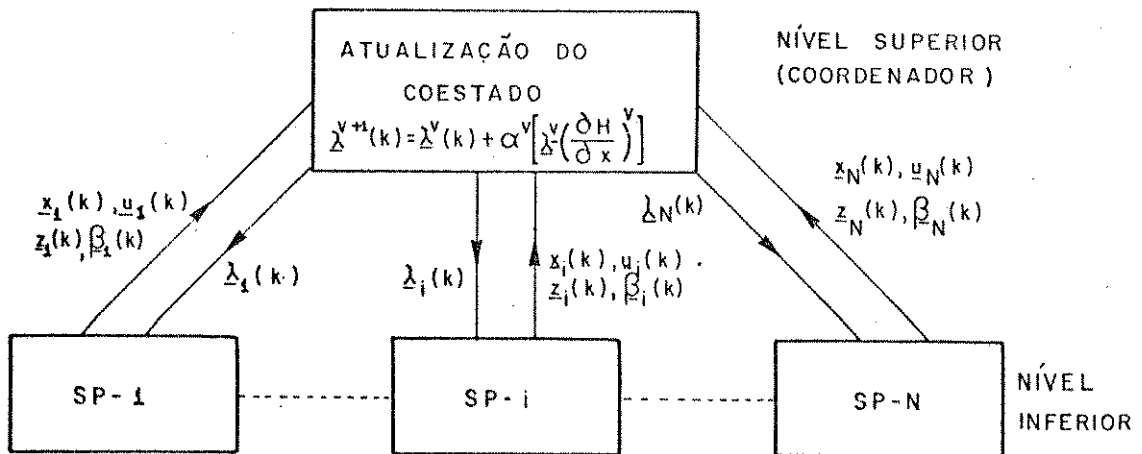


Fig. 2.6 - Estrutura hierárquica para o método coordenação pelo coestado.

Aplicação ao Problema do Regulador Linear Quadrático

Seja o problema do regulador formado pelas equações (2.24) a (2.26) e reescrita na forma das equações (2.27) a (2.30). O Lagrangiano para o problema é:

$$\begin{aligned}
 L|\underline{x}, \underline{u}_i, \underline{\beta}_i, \underline{z}_i| &= \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} \left(\frac{1}{2} (\|\underline{x}_i(k)\|_{Q_i}^2 + \|\underline{u}_i(k)\|_{R_i}^2) + \right. \right. \\
 &+ \underline{\beta}_i^T(k) |\underline{z}_i(k) - \sum_{j \neq i}^N A_{ij} \underline{x}_j(k) + \underline{\lambda}_i^T(k+1) [-\underline{x}_i(k+1) + A_{ii} \underline{x}_i(k) + \\
 &\left. \left. + B_{ii} \underline{u}_i(k) + \underline{z}_i(k) \right] \right\} \quad (2.78)
 \end{aligned}$$

Reescrevendo o Lagrangiano:

$$L|\underline{x}_i, \underline{u}_i, \underline{\beta}_i, \underline{z}_i| = \sum_{i=1}^N L_i|\underline{x}_i, \underline{u}_i, \underline{\beta}_i, \underline{z}_i| \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned}
 L_i|\cdot| &= \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ \frac{1}{2} (\|\underline{x}_i(k)\|_{Q_i}^2 + \|\underline{u}_i(k)\|_{R_i}^2) + \underline{\beta}_i^T(k) \underline{z}_i(k) - \right. \\
 &- \sum_{j \neq i}^N \underline{\beta}_j^T(k) A_{ji} \underline{x}_j(k) + \underline{\lambda}_i^T(k+1) |A_{ii} \underline{x}_i(k) + B_{ii} \underline{u}_i(k) + \underline{z}_i(k)| - \\
 &\left. - \underline{\lambda}_i^T(k+1) \underline{x}_i(k+1) \right\} \quad (2.80)
 \end{aligned}$$

Definindo o Hamiltoniano relativo ao i -ésimo subsistema:

$$\begin{aligned}
 H_i|\cdot| &= \frac{1}{2} (\|\underline{x}_i(k)\|_{Q_i}^2 + \|\underline{u}_i(k)\|_{R_i}^2) + \underline{\beta}_i^T(k) \underline{z}_i(k) - \\
 &- \sum_{j \neq i}^N \underline{\beta}_j^T(k) A_{ji} \underline{x}_j(k) + \underline{\lambda}_i^T(k+1) |A_{ii} \underline{x}_i(k) + B_{ii} \underline{u}_i(k) + \underline{z}_i(k)| \quad (2.81)
 \end{aligned}$$

A equação (2.80) pode ser reescrita, utilizando (2.81):

$$L_i | \cdot | = \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ H_i | \cdot | - \underline{\lambda}_i^T(k+1) \underline{x}_i(k+1) \right\} \quad (2.82)$$

As equações para o nível inferior são, de (2.71) a (2.75):

$$\underline{x}_i(k+1) = A_{ii} \underline{x}_i(k) + B_{ii} \underline{u}_i(k) + \underline{z}_i(k) \quad (2.83)$$

$$\underline{x}_i(0) = \underline{x}_{i0} \quad (2.84)$$

$$R_{ii} \underline{u}_i(k) + B_{ii}^T \underline{\lambda}_i(k+1) = 0 \rightarrow \underline{u}_i(k) = -R_{ii}^{-1} B_{ii}^T \underline{\lambda}_i(k+1) \quad (2.85)$$

$$\underline{z}_i(k) = \sum_{j \neq i}^N A_{ij} \underline{x}_j(k) \quad (2.86)$$

$$\underline{\beta}_i(k) + \underline{\lambda}_i(k+1) = 0 \rightarrow \underline{\beta}_i(k) = -\underline{\lambda}_i(k+1) \quad (2.87)$$

$$i = 1, \dots, N$$

$$k = 0, \dots, K-1$$

Os valores de \underline{x}_i , \underline{u}_i , \underline{z}_i e $\underline{\beta}_i$ são enviados para o nível superior onde é calculada a quantidade:

$$\psi | \underline{\lambda}_i(k) | = Q_{ii} \underline{x}_i(k) + A_{ii}^T \underline{\lambda}_i(k+1) - \sum_{j \neq i}^N A_{ji}^T \underline{\beta}_j(k)$$

Procedemos então como nos passos IV-b, V a VII do algoritmo 3.

O diagrama da figura 2.7 indica as etapas para a implementação prática.

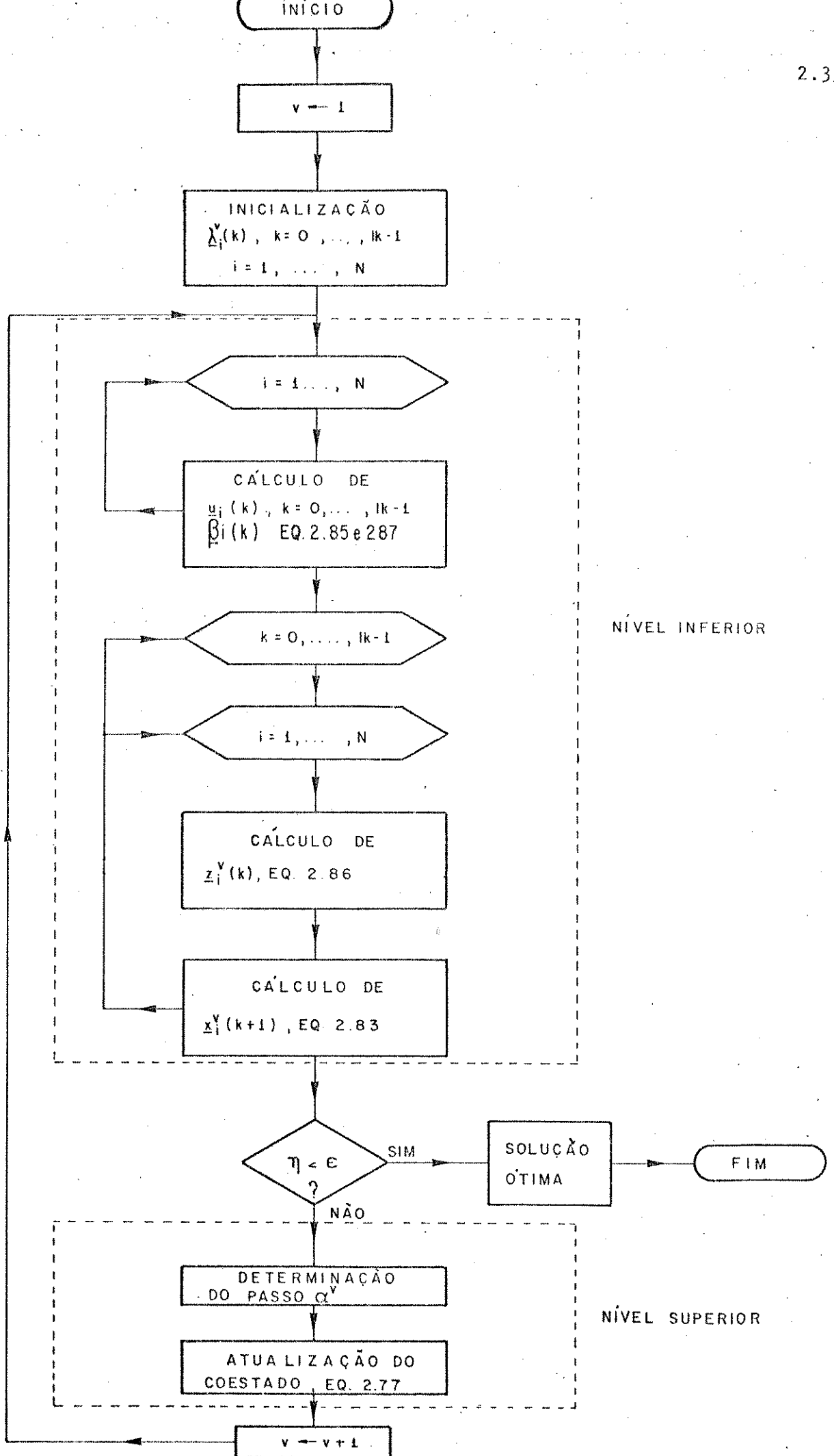


Fig. 2.7 - Diagrama de blocos para o método decomposição espacial - coordenação pelo coestado.

2.6 - Características dos Métodos

As características dos métodos apresentados podem ser estabelecidas em termos de complexidade dos problemas do nível inferior e o problema de coordenação e o tipo de solução por eles oferecidos. Em síntese, estas características podem ser classificadas como segue.

Método Coordenação por Predição de Interação

1. Necessidade de resolver o T.P.B.V.P., o que pode causar dificuldades computacionais.
2. A solução ótima obtida só é factível após a convergência do método.
3. A coordenação é simples pois envolve simples multiplicações, embora tenha a dimensão aumentada.
4. Para subsistemas fracamente interconectados a matriz de realimentação do estado obtida pelo cálculo descentralizado aproxima-se da obtida pelo cálculo centralizado, porque a influência da compensação em malha aberta, que depende do acoplamento, é pequena.

Método Coordenação pelo Critério

1. Não é necessário resolver o T.P.B.V.P., o que é uma grande vantagem.
2. Pode tratar problemas com atraso nas variáveis de estado e de controle sem a necessidade de aumentar a dimensão do problema, como no procedimento clássico para a solução de tais problemas.
3. Problemas com restrições de desigualdade podem ser resolvidos com mais facilidade, pois problemas de dimensão reduzida são manipulados pelo nível inferior.
4. O processo de coordenação é simples, embora seja necessário realizar uma busca unidimensional para determinar o passo α_v a ser dado, o que envolve uma grande quantidade de cálculo.

5. A solução só é factível quando converge, pois a restrição de interconexão só é satisfeita quando ocorre a convergência.

Método de Coordenação pelo Coestado

1. Não é necessário resolver o T.P.B.V.P.
2. As variáveis de interconexão são atualizadas a cada iteração por igualdade.
3. As soluções intermediárias são factíveis, pois a restrição de interconexão são satisfeitas em todas as iterações.
4. A coordenação é simples, embora a determinação do passo possa criar problemas, mesmo não sendo realizada a busca unidimensional.
5. É importante notar que existe troca de informação entre os subsistemas do nível inferior, uma vez que a relação de interconexão é satisfeita a cada iteração.

2.7 - Resumo

O procedimento para a construção de estruturas de cálculo hierárquico com dois níveis para a solução do problema de otimização dinâmica foi estabelecido.

Os algoritmos foram apresentados de maneira a possibilitar sua implementação prática.

A caracterização dos métodos é útil quando na seleção do algoritmo conveniente para a solução de um problema prático.

Com excessão do método de coordenação pelo coestado, onde existe troca de informação entre os subsistemas, os subproblemas do nível inferior são resolvidos independentemente.

Uma característica que é comum a todos os três métodos, é que as leis de controle são obtidas em malha aberta.

CAPÍTULO 3 - ASPECTOS COMPUTACIONAIS E SIMULAÇÃO DOS MÉTODOS

3.1 - Introdução

Os algoritmos descritos no capítulo 2 foram implementados para a solução do problema do regulador linear quadrático.

Características dos algoritmos sob o aspecto de programação e eficiência (tempo de processamento, utilização de memória) são estabelecidas.

As soluções obtidas pelos métodos descentralizados são comparadas com a solução obtida pelo problema global, nos termos da eficiência computacional.

3.2 - Aspectos Computacionais

Esquemas de controle hierárquico de sistemas dinâmicos apresentam uma série de vantagens computacionais em termos de hardware e software, por exemplo: descentralização e alocação dos requerimentos computacionais entre os subsistemas; redução do esforço de programação, da utilização de memória e tempo de processamento (embora não seja evidente para sistemas reguladores lineares quadráticos); possibilidade de solucionar problemas de dimensão grande, utilizando um sistema de computação limitado.

A decomposição do problema original em subproblemas de dimensão reduzida implica na simplificação do problema de programação, pois permite o tratamento explícito e separado de cada subproblema; evita multiplicação de rotinas no caso onde um procedimento comum pode ser utilizado na solução dos subproblemas. Um exemplo do último caso são os sistemas reguladores lineares quadráticos, para os quais uma subrotina é escrita com parâmetros de entrada e saída ge

rais, permitindo o tratamento de dados particulares de cada subsistema.

Por outro lado, uma outra simplificação é obtida no decréscimo do número de equações que são resolvidas pelo problema decomposto. Por exemplo, considerando o sistema regulador linear quadrático de ordem n , o número de equações às diferenças não lineares de primeira ordem, decorrentes da equação matricial de Riccati, são [19]:

$$NE_g = \frac{n(n+1)}{2} \quad (3.1)$$

Para o sistema decomposto em N subsistemas de ordem n_i ,

$$n = \sum_{i=1}^N n_i$$

o número de equações é

$$NE_d = \sum_{i=1}^N \frac{n_i(n_i + 1)}{2} \quad (3.2)$$

Vamos fazer algumas aproximações das equações (3.1) e (3.2) sob as seguintes hipóteses:

- 1 - n e n_i são bem maiores do que a unidade.
- 2 - $n = N \times n_i$, o que é desejável, pois há uma divisão equitativa da tarefa do cálculo entre subsistemas [8].

Então, as equações (3.1) e (3.2) podem ser aproximadas por:

$$NE_g \approx \frac{n^2}{2} \quad (3.3)$$

$$NE_d \approx N \times \frac{n_i^2}{2} \quad (3.4)$$

ou

$$NE_d \approx \frac{1}{N} \left(\frac{n^2}{2} \right)$$

o que implica

$$NE_d \approx \frac{1}{N} NE_g$$

Portanto, a redução do número de equações é da ordem de $1/N$.

O método mixto desfruta desta vantagem com relação ao problema global enquanto que métodos como decomposição paramétrica e espacial com coordenação pelo coestado simplesmente não resolvem estas equações.

Em aplicações OFF-LINE, um tratamento mais rigoroso de sistemas complexos pode ser inviável, devido a limitações do sistema de computação a ser utilizado. A decomposição hierárquica nos proporciona uma maneira de evitar tal situação, pois podemos proceder em passos múltiplos até obtermos a solução da seguinte maneira: os subproblemas resultantes podem ser processados um de cada vez em cada passo e suas soluções são armazenados para uso do coordenador e do próximo passo. Assim, os requerimentos de memória podem ser controlados e reduzidos, evidentemente com prejuízo no tempo de processamento.

3.3 - Sistemas Simulados

Neste capítulo, 4 exemplos foram utilizados para as experiências com os métodos, no estudo de simulação. Nestes exemplos, está evidenciada a maneira pela qual foi feita a decomposição do sistema global.

Os dados numéricos são os descritos a seguir:

0.8	0.2	0.022	0.3	0.1	0.04
0.2	0.5	0.11	0.05	0.3	0.21
0.022	0.089	-0.25	0.25	0.012	0.30
0.30	0.05	0.25	-0.25	0.13	0.06
0.091	0.30	0.012	0.045	-0.60	0.35
0.04	0.31	0.30	0.06	0.35	-0.35

Matriz Dinâmica A

1.0		
1.0		
	1.0	
	1.0	
		-1.0
		1.0

Matriz Controle B

Exemplo 1: $n = 6$, $m = 3$, $n_i = 2$, $m_i = 1$, $N = 3$

0.8	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1
0.2	0.5	0.1	0.1	0.1	0.1
0.1	0.1	0.25	-0.25	0.1	0.1
0.1	0.1	0.012	0.045	0.1	0.1
0.1	0.1	0.1	0.1	-0.60	0.35
0.1	0.1	0.1	0.1	0.35	-0.35

Matriz Dinâmica A

1.0		
1.0		
	1.0	
	1.0	
		-1.0
		1.0

Matriz Controle B

Exemplo 2: $n = 6$, $m = 3$, $n_i = 2$, $m_i = 1$, $N = 3$

0.50	0.23	0.011		0.033	0.0312	-0.0142	0.021		0.052
-0.23	0.40	0.021	0.052	0.012	0.0172	0.08		0.10	0.081
	0.021	0.027	0.30	0.0911		-0.0661	0.021		0.018
0.0521		-0.30	-0.32	0.015		0.053		0.0425	
0.033	0.0337		0.015	0.30	0.25		0.035	0.071	0.08
0.002	0.025	0.0311		-0.25	0.34		0.0416	0.012	0.05
-0.016	0.08		0.053	0.0338		0.45	0.18	0.028	
0.0193		0.021		0.035	0.0427	-0.18	-0.20		0.80
0.0105	0.10	0.0364		0.0117	0.012	0.028		0.60	0.23
	0.0098	0.018	0.032	0.08	0.05	0.0317	0.08	-0.23	0.50

Matriz Dinâmica A

Exemplo 3: $n = 10$, $m = 5$, $n_i = 2$, $m_i = 1$, $N = 5$

1.0									
-1.0									
						-2.0			
						1.0			
					1.0				
						-2.0			
							2.0		
								-2.0	
									-2.0
									1.0

Matriz Controle B

0.30	-0.0062																								
-0.587	-0.45	0.0546		0.0339	0.0164	0.0254	-0.0103	-0.0169	-0.030	-0.0898	-0.0786														
	-0.563		-0.0062																						
0.099	-0.8772	0.32	0.060	0.0876	0.0417	0.0167	0.0095	-0.0125	-0.044	-0.059															
			-0.335	-0.0062																					
0.0668	0.6641		-0.725	0.5511	-0.0388	0.0269	0.0026	-0.0066	-0.0293	-0.0734	-0.072														
					0.4410	-0.0062																			
0.0532	0.1129		0.0448		-0.8246	-0.230	0.0166	0.0072	-0.019	-0.0478	-0.064														
					0.250	-0.0062																			
0.072	0.0537		0.0374	0.369	-0.7790	-0.5120	-0.0162	-0.0004	-0.0081	-0.0590	-0.056														
0.0123	0.0122		0.0105	0.0075	0.072	-0.5230	-0.0525																		
						-0.6230	-0.610	-0.0121	-0.0058	-0.0570	-0.062														
0.0443	0.0638		0.0356	0.0474	0.0344	0.0736		0.610	-0.0062																
								-0.5534	0.5530	0.0450	-0.275														
									0.5530	-0.0062															
0.0517	0.0467	-0.0019		0.0004	-0.0024	0.0026	0.0078	-0.0043	-0.5580	0.3450	-0.4200	0.0536													
										0.3450	-0.0062														
										-0.6820	0.2300	-0.0025													
0.0095	0.0087		0.006	0.005	0.0113	0.0099	0.0033	0.01	-0.0063	-0.688	0.320														

Matriz Dinámica A

Exemplo 4: $n = 20$, $m = 10$, $n_i = 2$, $m_i = 1$, $N = 10$

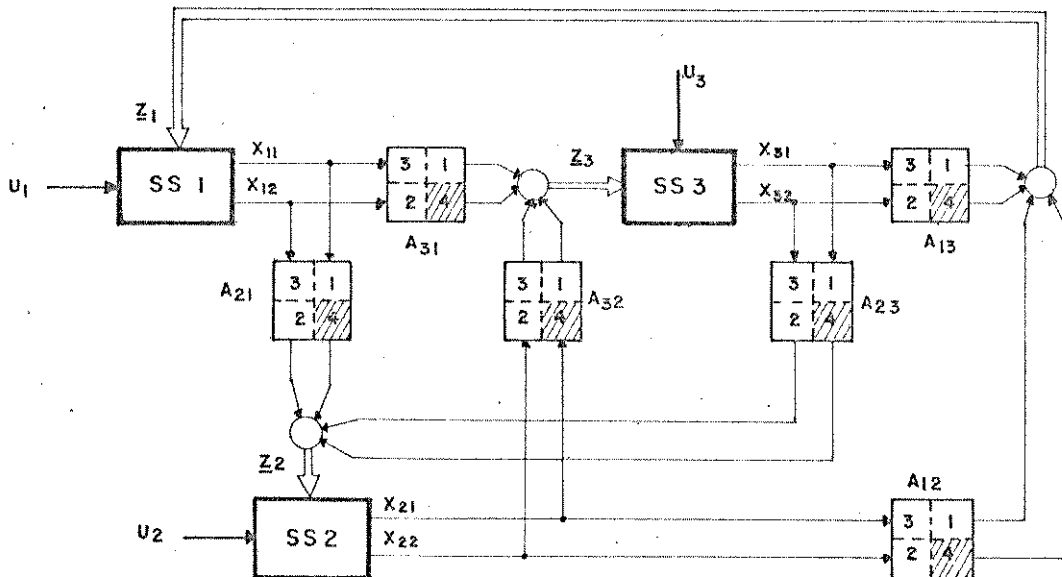
1.0									
0.5									
	0.5								
	-1.0								
		1.0							
		-0.5							
			0.5						
			-1.0						
				1.0					
				1.0					
					-1.0				
					1.0				
						0.5			
						-1.0			
							0.5		
							-0.5		
								1.0	
								1.0	
									0.5
									-0.5

Matriz Controle B

3.4 - Estudos de Simulação

Os algoritmos foram implementados na linguagem FORTRAN-IV em um computador PDP-10 do Centro de Computação da UNICAMP.

Para valores diferentes de $\underline{x}(0)$, K , Q e R , o problema do regulador foi resolvido decompondo espacialmente o sistema de ordem 10, conforme exemplo 3. Para diferentes interconexões entre subsistemas, os sistemas de ordem 6, exemplos 1 e 2, foram utilizados. A figura 3.1 mostra como estas interconexões são feitas em cada caso.



$\gamma = 1$ Elementos de $A_{ij} |1,2,3,4| \neq 0$

$\gamma = 0.75$ Elementos de $A_{ij} |1| = 0$, $A_{ij} |2,3,4| \neq 0$

$\gamma = 0.50$ Elementos de $A_{ij} |1,2| = 0$, $A_{ij} |3,4| \neq 0$

$\gamma = 0.25$ Elementos de $A_{ij} |1,2,3| = 0$, $A_{ij} |4| \neq 0$

Fig. 3.1 - Interconexões entre os subsistemas.

$\gamma = \text{número de interconexões} / \text{número máximo de interconexões}$

Para diferentes valores de $\underline{x}(0)$, K , Q e R , o problema foi resolvido decompondo parametricamente o sistema de ordem 10, exemplo 3.

Como anteriormente:

- N = nº de subsistemas
- n_i = ordem do i -ésimo subsistema
- m_i = nº de entradas do i -ésimo subsistema
- n = ordem do sistema global
- m = nº de entradas do sistema global

A matriz de ponderação do estado Q e do controle R são matrizes diagonais.

Resultados para o Método Decomposição Espacial, Coordenação por Predição de Interação (Método Mixto)

As tabelas 1, 2 e 3 mostram os valores de $\underline{x}(0)$, K , Q e R utilizados e os tempos de cálculo^(*) (tempo de C.P.U.) necessários para a convergência dos testes.

O critério de convergência é $\eta \leq 10^{-8}$ para todos os casos.

O algoritmo foi inicializado com:

$$\underline{z}_i(k) = 0$$

$$\underline{\beta}_i(k) = 0$$

$$k = 0, \dots, K$$

$$i = 1, \dots, N$$

(*) A notação para os tempos é m:s.cs onde m = minutos, s = segundos e cs = centésimos de segundo.

Q \ R	0.005	0.01	1.00	1.00	100.0
0.1	23.06	16.68	15.93	14.49	13.95
1.0	oscila	oscila	17.95	16.35	16.34
10.0	oscila	oscila	17.11	17.03	16.19
100.0	diverge*	oscila	17.93	17.91	17.04

Tabela 1: Método Mixto K = 9

$$\underline{x}(0) = [2-2 \ 2-2 \ 2-2 \ 2-2 \ 2-2]$$

$$\eta < 10^{-8} \quad \text{convergência}$$

$$10^{-8} \leq \eta \leq 10^{-2} \quad \text{oscilação}$$

$$\eta > 10^{-2} \quad \text{divergência, } v > 200$$

* Neste caso K = 150

Condição Inicial	Horizonte Otimização	Tempo C.P U.
$\underline{x}(0)$	5	6.45
$\underline{x}(0)$	10	16.13
$\underline{x}(0)$	20	38.25
$\underline{x}(0)$	30	1:01.07
$\underline{x}(0)$	40	1:20.31
$\underline{x}(0)$	50	1:39.56
$\underline{x}_1(0)$	9	13.73
$\underline{x}(0)$	9	13.95
$\underline{x}_2(0)$	9	15.25

Tabela 2: Método Mixto Q = 0.1 , R = 100.0

$$\underline{x}(0) = [2-2 \ 2-2 \ 2-2 \ 2-2 \ 2-2]$$

$$\underline{x}_1(0) = [0 \ 2-0.2 \ 0.2-0.2 \ 0.2-0.2 \ 0.2-0.2 \ 0.2-0.2]$$

$$\underline{x}_2(0) = [20-20 \ 20-20 \ 20-20 \ 20-20 \ 20-20]$$

Interconexão \ γ	1	0.75	0.50	0.25
Arbitrária	13.70	7.65	6.15	6.09
Iguais	8.82	6.98	5.43	5.05

Tabela 3: Método Mixto $K = 9$, $Q = 0.1$, $R = 50.0$

$$\underline{x}(0) = [1-1 \ 1-1 \ 1-1]$$

A partir destes resultados podemos concluir que:

1. Para $\underline{x}(0)$ e K fixados, a convergência do algoritmo é mais rápida se R é grande e Q é pequena.

Na figura 3.2 está plotado o erro de interconexão normado, $\| \underline{e}(k) \|$, onde:

$$\underline{e}_i(k) = \underline{z}_i(k) - \sum_{i \neq j}^N A_{ij} \underline{x}_j(k) \quad \begin{array}{l} k = 0, \dots, K \\ i = 1, \dots, N \end{array}$$

em função das iterações,

2. O algoritmo oscila se $\underline{x}(0)$ e K são fixados, Q é grande e R é pequena (figura 3.3).
3. Para $\underline{x}(0)$, Q , R e K fixos, a convergência é mais rápida se o grau de interconexão entre os subsistema é pequeno.

As figuras 3.4 e 3.5 correspondem aos casos onde as interconexões (elementos de A_{ij}) são arbitrárias, exemplo 1 e onde as interconexões são iguais, exemplo 2, respectivamente.

4. O algoritmo diverge, dentro do critério estabelecido, se Q é suficientemente grande, R suficientemente pequena e o horizonte K grande.

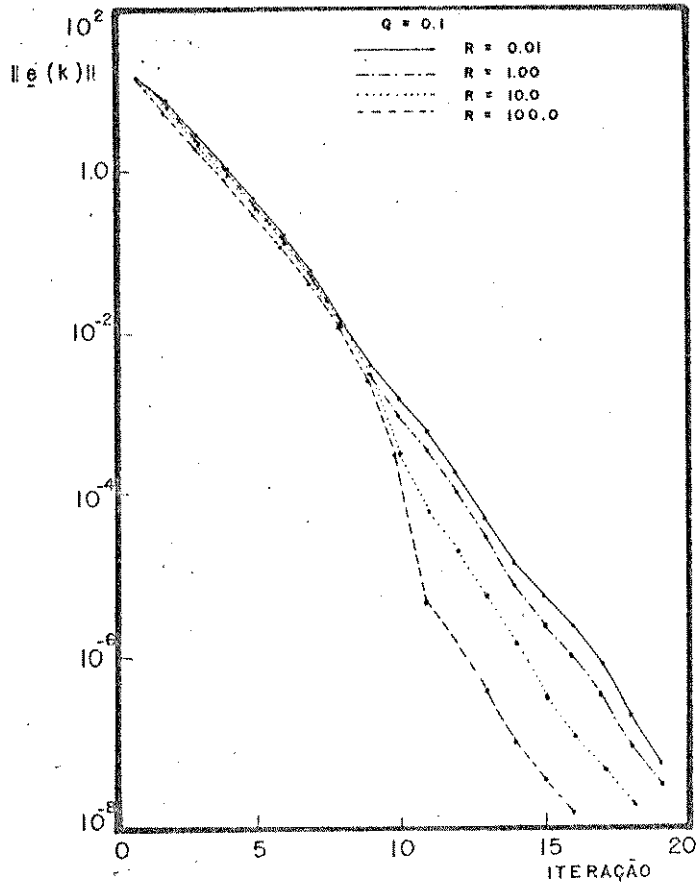


Figura 3.2

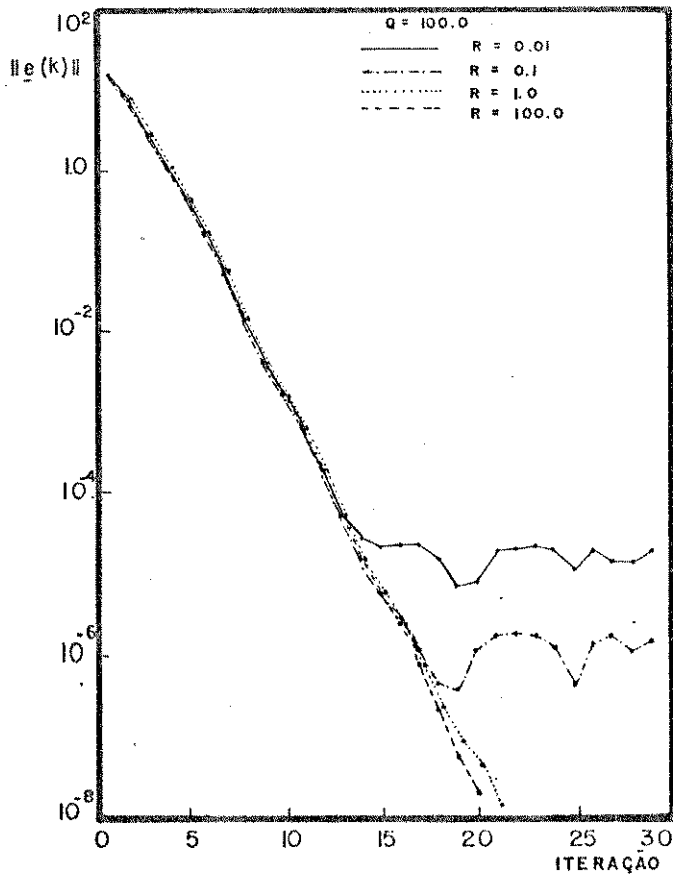


Figura 3.3

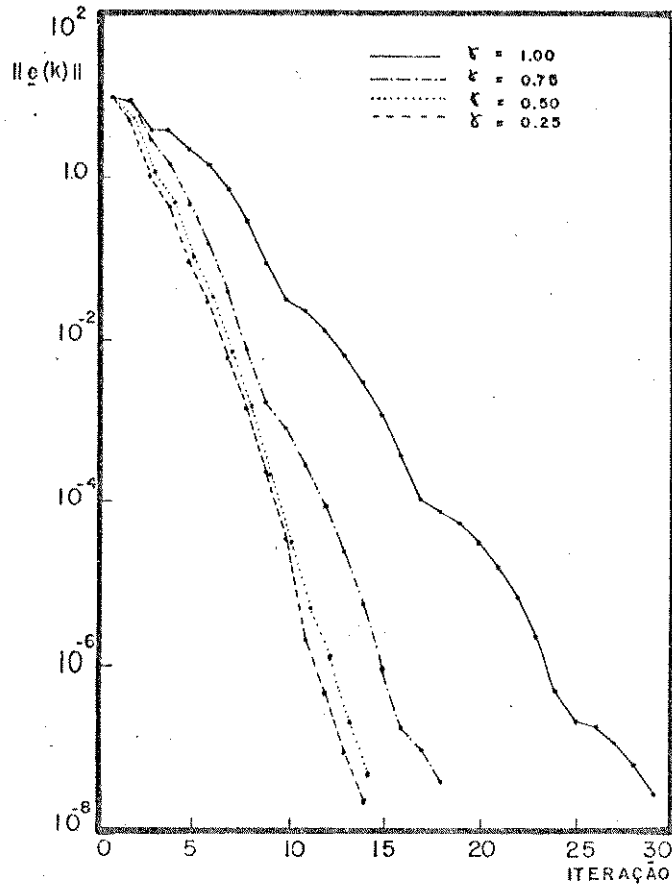


Figura 3.4

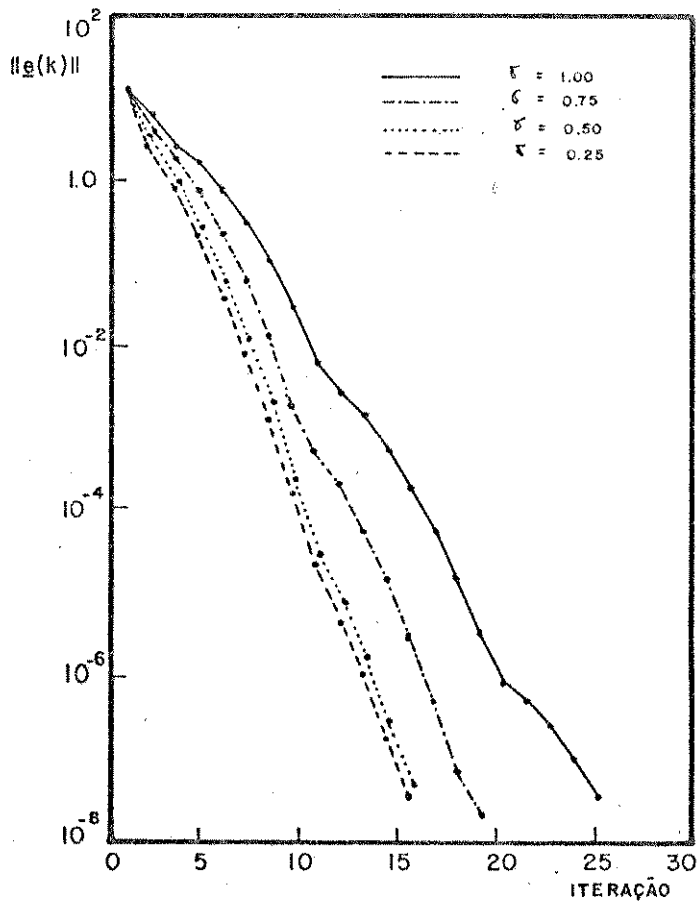


Figura 3.5

5. Para Q, R, K fixos, a convergência é mais rápida se a condição inicial é próxima de zero.

6. Para $Q, K, \underline{x}(0)$ fixos, a convergência é mais rápida se o horizonte K é pequeno.

As figuras 3.6 e 3.7 mostram as trajetórias ótimas, componentes x_1 e x_4 , do vetor de estado e as figuras 3.8 e 3.9 as trajetórias ótimas, componentes u_2 e u_5 , do vetor de controle, obtidas para $Q = 0.1$, $R = 10.0$, $K = 15$ e $\underline{x}(0) = [2-2 \ 2-2 \ 2-2 \ 2-2 \ 2-2]$.

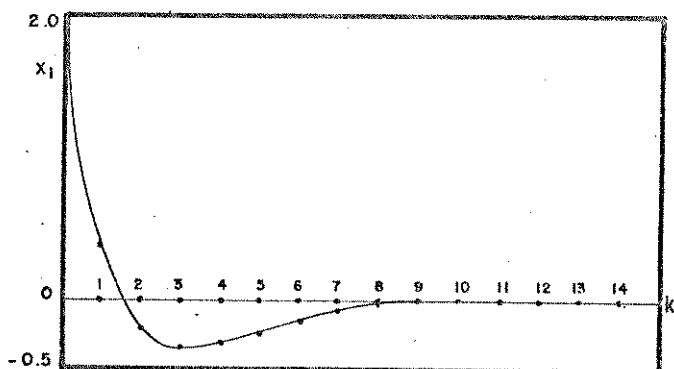


Figura 3.6

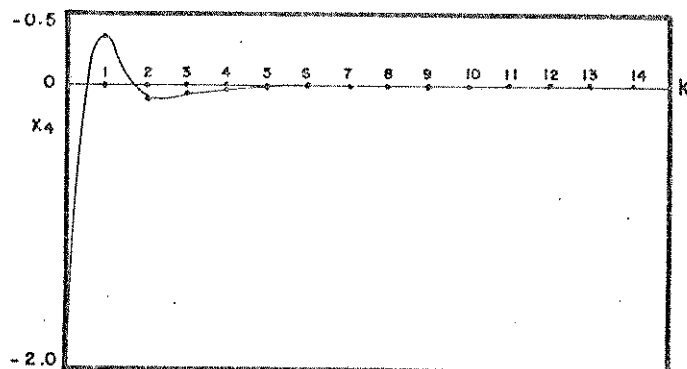


Figura 3.7

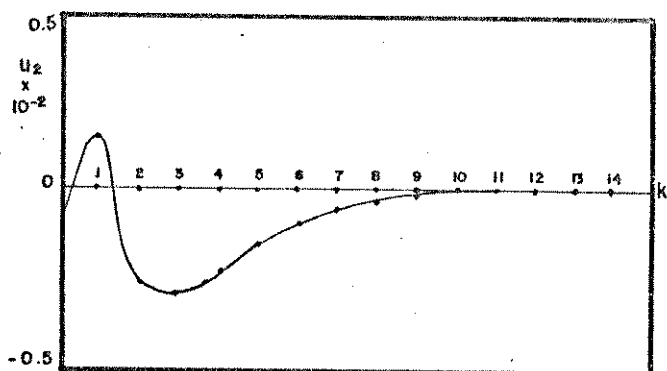


Figura 3.8

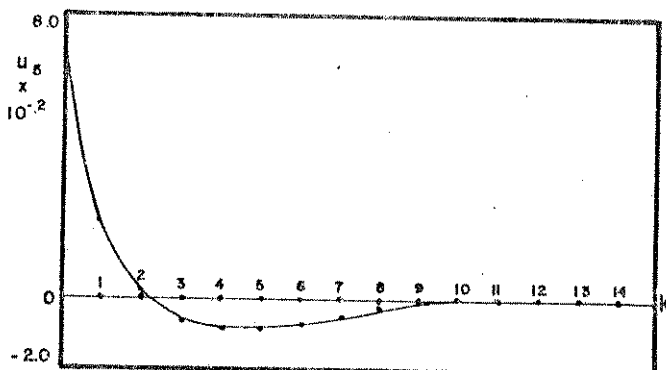


Figura 3.9

A figura 3.10 mostra os valores da função dual e do critério para o caso onde $Q = 0.1$, $R = 50.0$, $K = 15$ e $\underline{x}(0)$ como no caso anterior, obtidos inicializando o algoritmo com $\underline{\beta}(k) = 2.0$ e $\underline{z}(k) = 0$, $k = 0, \dots, K$. Na figura 3.11 os dados são os mesmos, mas a inicialização foi feita com $\underline{\beta}(k) = 2.0$ e $\underline{z}(k) = 2.0$, $k = 0, \dots, K$.

A inicialização não influi quanto à convergência ou não do algoritmo, mas pode fazer com que a função dual cresça ou diminua com o decorrer das iterações, devido ao fato de que no nível superior, as condições para extremização da função dual são

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{\beta}(k)} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial \underline{z}(k)} = 0$$

o que corresponde a uma maximização com relação a $\underline{\beta}(k)$ e a uma minimização com relação a $\underline{z}(k)$ simultaneamente. Todavia quanto "melhor" a inicialização, mais rápida a convergência.

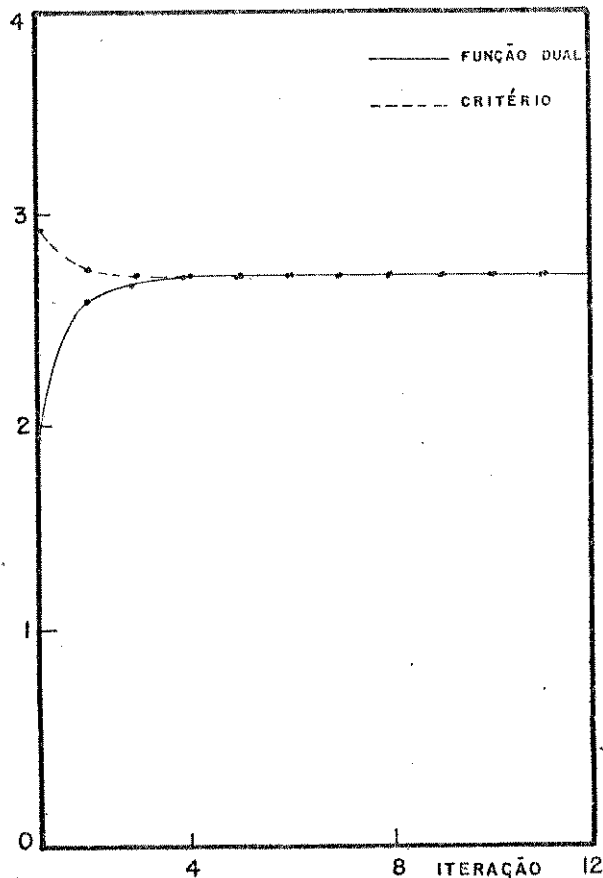


Figura 3.10

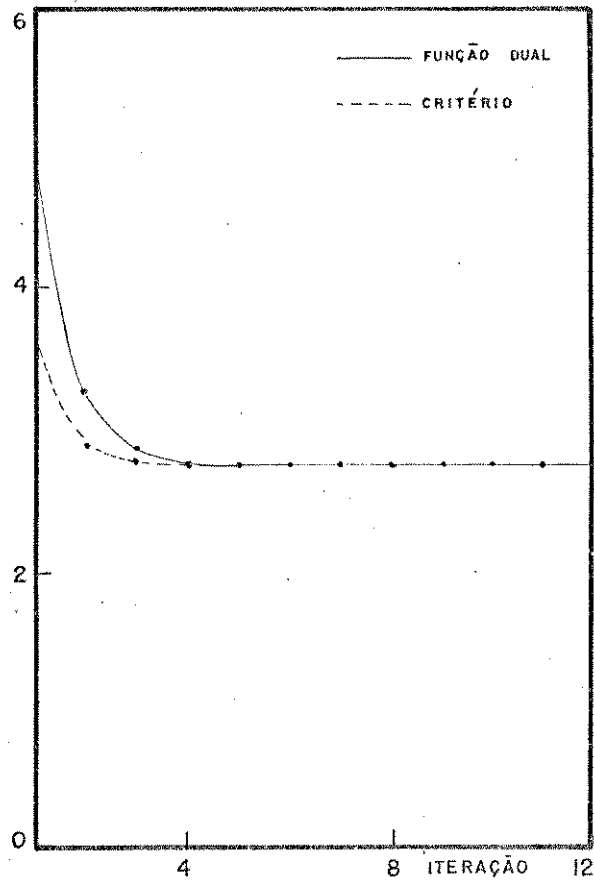


Figura 3.11

Resultados para o Método Decomposição Paramétrica Coordenação pelo Critério (TAMURA)

Os resultados dos testes estão contidos nas tabelas 4 e 5, para diferentes valores de $\underline{x}(0)$, K , Q e R .

Neste caso, o critério de convergência é $\eta_1 < 10^{-3}$ para todas as simulações.

O algoritmo foi inicializado com $\underline{\lambda}(k) = 0$, $k = 0, \dots, K$.

Q \ R	0.1	0.5	1.0	5.0	10.0
0.1	1:23.26	1:11.41	1:06.75	1:12.99	1:16.50
0.5	2:20.15	1:45.66	1:39.50	1:26.04	1:44.83
1.0	3:24.76	2:43.45	2:04.58	1:37.04	1:36.00
5.0	4:34.51	4:04.57	3:43.33	2:48.29	2:14.48

Tabela 4: Método TAMURA K = 9

$$\underline{x}(0) = |2-2 \ 2-2 \ 2-2 \ 2-2 \ 2-2|$$

Condição Inicial	Horizonte Otimização	Tempo C.P.U.
$\underline{x}(0)$	5	47.25
$\underline{x}(0)$	10	1:17.93
$\underline{x}(0)$	20	3:04.00
$\underline{x}(0)$	30	4:19.65
$\underline{x}(0)$	40	5:04.69
$\underline{x}(0)$	50	7:05.23
$\underline{x}_1(0)$	9	36.42
$\underline{x}(0)$	9	1:06.75
$\underline{x}_2(0)$	9	1:53.69

Tabela 5: Método TAMURA Q = 0.1 , R = 1.0

$$\underline{x}(0) = |2-2 \ 2-2 \ 2-2 \ 2-2 \ 2-2|$$

$$\underline{x}_1(0) = |0.2-0.2 \ 0.2-0.2 \ 0.2-0.2 \ 0.2-0.2 \ 0.2-0.2|$$

$$\underline{x}_2(0) = |20-20 \ 20-20 \ 20-20 \ 20-20 \ 20-20|$$

Destes resultados concluímos o seguinte:

1. Para $\underline{x}(0)$ e K fixos, o algoritmo converge mais rapidamente se R é suficientemente grande e Q suficientemente pequena.

Na figura 3.12 está plotado o erro de interconexão normado, $\|\underline{e}(k)\|$, onde:

$$\underline{e}(k) = -\underline{x}(k+1) + A\underline{x}(k) + B\underline{u}(k) \quad k = 0, \dots, K$$

em função das iterações.

2. Para $Q, R, \underline{x}(0)$ fixos, a convergência é mais rápida se o horizonte de otimização é pequeno.
3. Para Q, R, K fixos, a convergência é mais rápida se a condição inicial é próxima de zero.

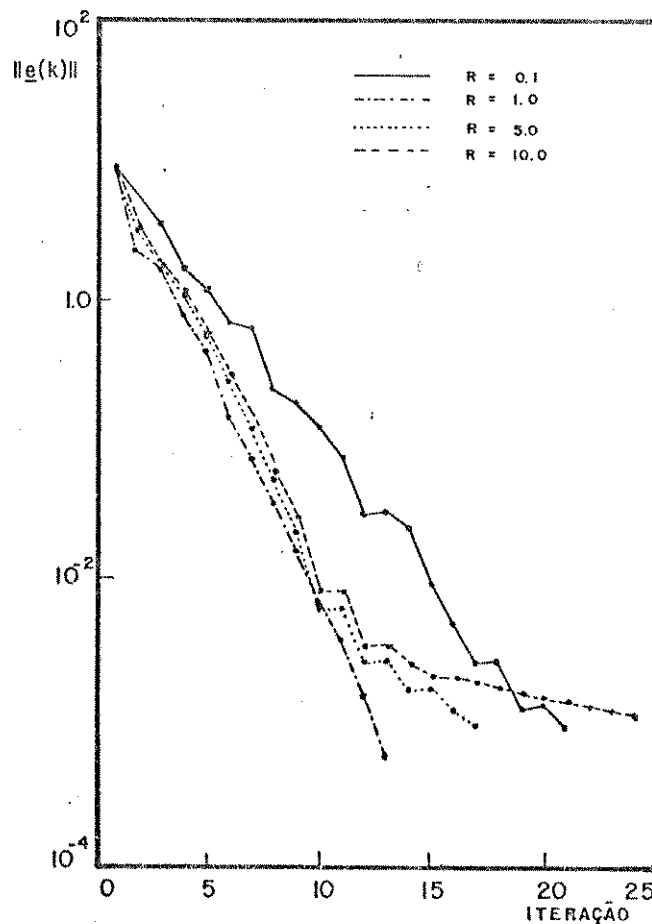


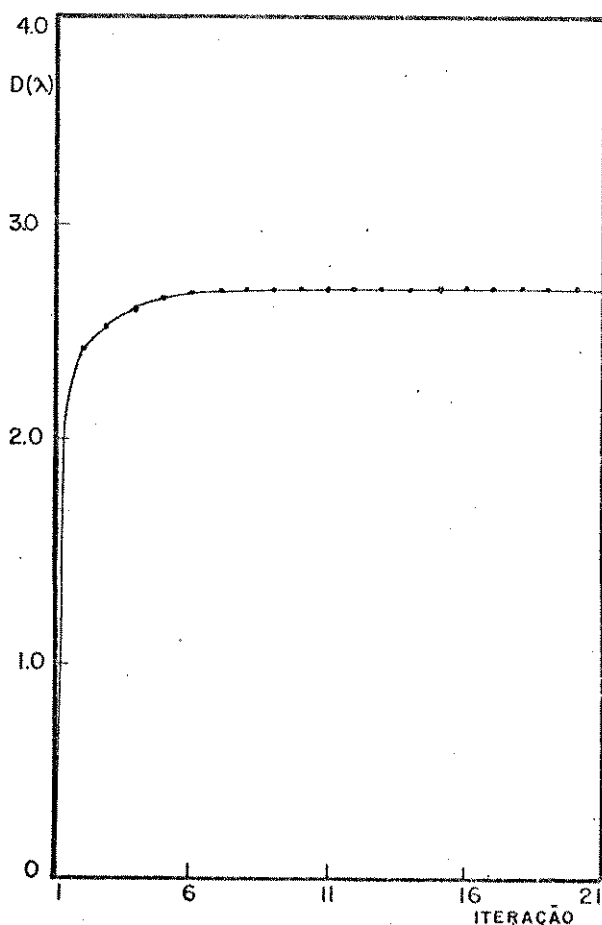
Figura 3.12

Comentários

1. O algoritmo é mais lento se na busca unidimensional, o intervalo que contém o ponto de máximo da função dual for muito pequeno, embora o número de iterações seja menor. Se o intervalo não for suficientemente pequeno o número de iterações aumenta, mas o tempo de processamento pode ou não diminuir pois se o número de iterações for muito grande, erros de arredondamento podem deteriorar a conjugação entre as direções se um método de direções conjugadas for usado. No caso é conveniente reinicializar o algoritmo a cada $n+1$ iterações, utilizando o último valor de $\lambda^V(k)$ como uma nova inicialização.

2. As experiências feitas com este método mostraram que em certos casos a convergência é mais rápida se o passo a ser dado na direção de crescimento da função dual é constante, porque não é necessário ir várias vezes ao nível inferior para a determinação do passo ótimo, como na busca unidimensional. Por outro lado, dependendo dos parâmetros K , $\underline{x}(0)$, Q , R , o algoritmo pode divergir.

A figura 3.13 mostra a convergência da função dual para os valores de $Q = 0.1$, $R = 10.0$ e $\underline{x}(0) = [2-2 \ 2-2 \ 2-2 \ 2-2 \ 2-2]$.



As figuras 3.14 e 3.15 mostram as trajetórias ótimas do estado, com componentes x_1 e x_4 e as figuras 3.16 e 3.17 mostram as trajetórias ótimas do controle, componentes u_2 e u_5 .

Observe a semelhança com as trajetórias obtidas pelo método mixto.

O algoritmo utilizado para a determinação do passo ótimo (busca unidimensional) é um Golden-Section e está descrito no apêndice C.

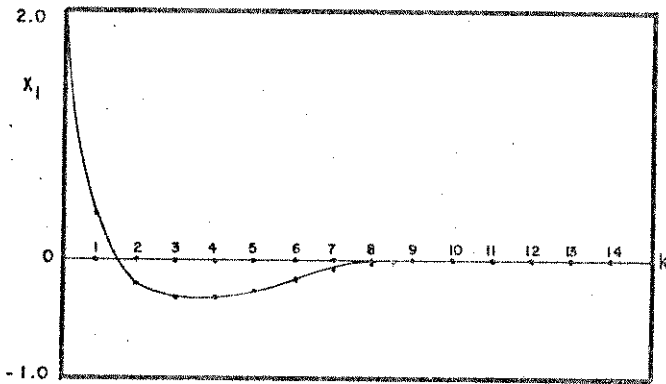


Figura 3.14

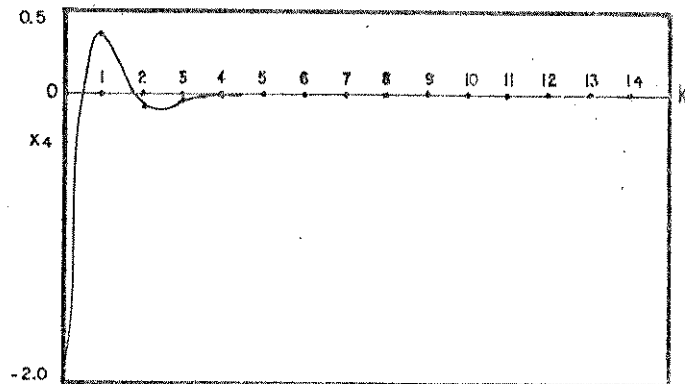


Figura 3.15

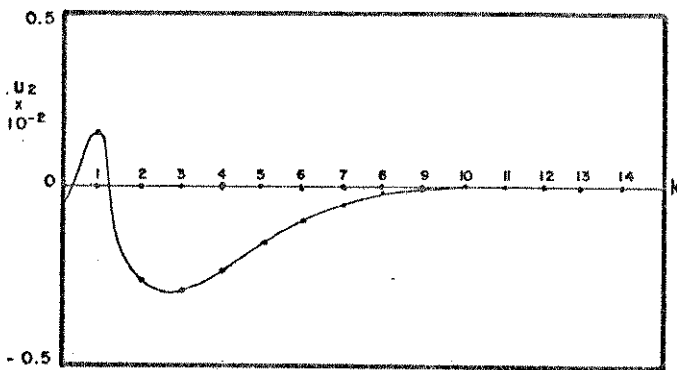


Figura 3.16

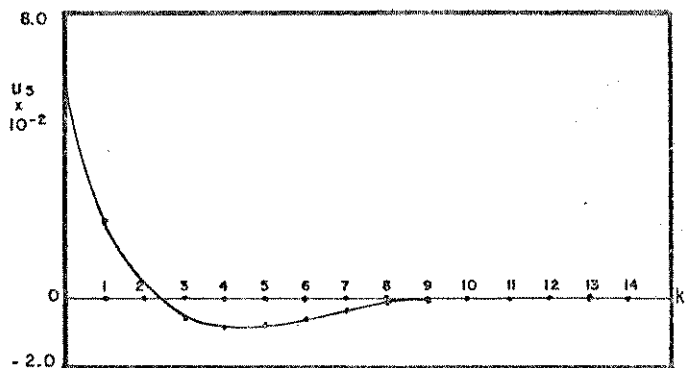


Figura 3.17

Resultados para o Método Decomposição Espacial Coordenação pelo Coestado

Nas tabelas 6, 7 e 8 estão os resultados dos tempos de C.P.U. necessários para a convergência do algoritmo, para diferentes valores dos parâmetros do problema, $\underline{x}(0)$, Q,R e K.

O critério de convergência utilizado é $\eta < 10^{-3}$ sendo que o algoritmo foi inicializado com o valor $\underline{\lambda}(k) = 0, k = 0, \dots, K$ em todos os casos.

Na construção da tabela 8, o critério de convergência adotado é de 10^{-4} .

Q \ R	0.1	1.0	5.0	10.0	100.0
0.1	1:30.84	17.14	8.26	8.25	8.50
0.5	10:55.03	1:34.96	24.30	13.05	10.75
1.0	-	5:46.87	47.65	26.47	10.41
5.0	-	-	8:18.00	2:38.36	17.28

Tabela 6: Método Coestado K = 9

$$\underline{x}(0) = |2-2 \ 2-2 \ 2-2 \ 2-2 \ 2-2|$$

Interconexão \ Y	1.00	0.75	0.50	0.25
Arbitrária	7.28	7.17	7.02	6.59
Iguais	6.45	6.56	6.69	6.63

Tabela 7: Método Coestado Q = 0.1 , R = 10.0 , K = 9

$$\underline{x}(0) = |1-1 \ 1-1 \ 1-1|$$

Condição Inicial	Horizonte Otimização	Tempo C.P.U.
$\underline{x}(0)$	5	5.34
$\underline{x}(0)$	10	11.71
$\underline{x}(0)$	20	22.19
$\underline{x}(0)$	30	33.40
$\underline{x}(0)$	40	44.26
$\underline{x}(0)$	50	Estaciona
$\underline{x}_1(0)$	9	6.06
$\underline{x}(0)$	9	10.35
$\underline{x}_2(0)$	9	12.52

Tabela 8: Método Coestado $Q = 0.1$, $R = 10.0$

$$\underline{x}(0) = |2-2 \ 2-2 \ 2-2 \ 2-2 \ 2-2|$$

$$\underline{x}_1(0) = |0.2-0.2 \ 0.2-0.2 \ 0.2-0.2 \ 0.2-0.2 \ 0.2-0.2|$$

$$\underline{x}_2(0) = |20-20 \ 20-20 \ 20-20 \ 20-20 \ 20-20|$$

Então, podemos concluir que:

1. A convergência é mais rápida para as matrizes Q pequenas e R grande, para $\underline{x}(0)$ e K fixados. A figura 3.18 mostra a evolução do erro normado de coordenação $\|\underline{e}(k)\| = \eta$.
2. Se Q , R , $\underline{x}(0)$ são fixos, o algoritmo converge mais rapidamente se o horizonte de otimização é pequeno.
3. O algoritmo pode estacionar para valores grandes do horizonte de otimização, fixados Q , R , $\underline{x}(0)$ (figura 3.19).

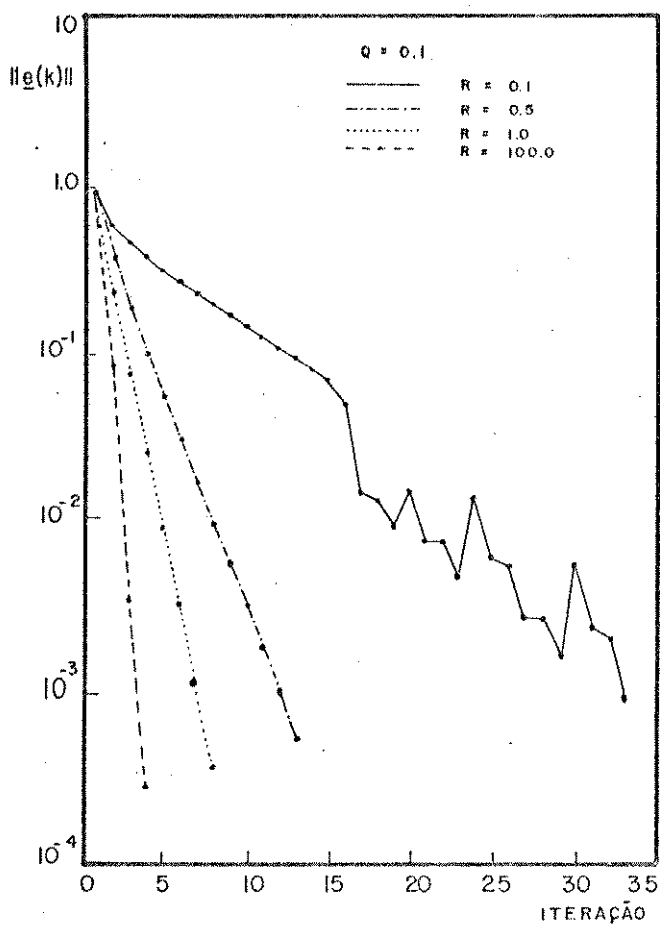


Figura 3.18

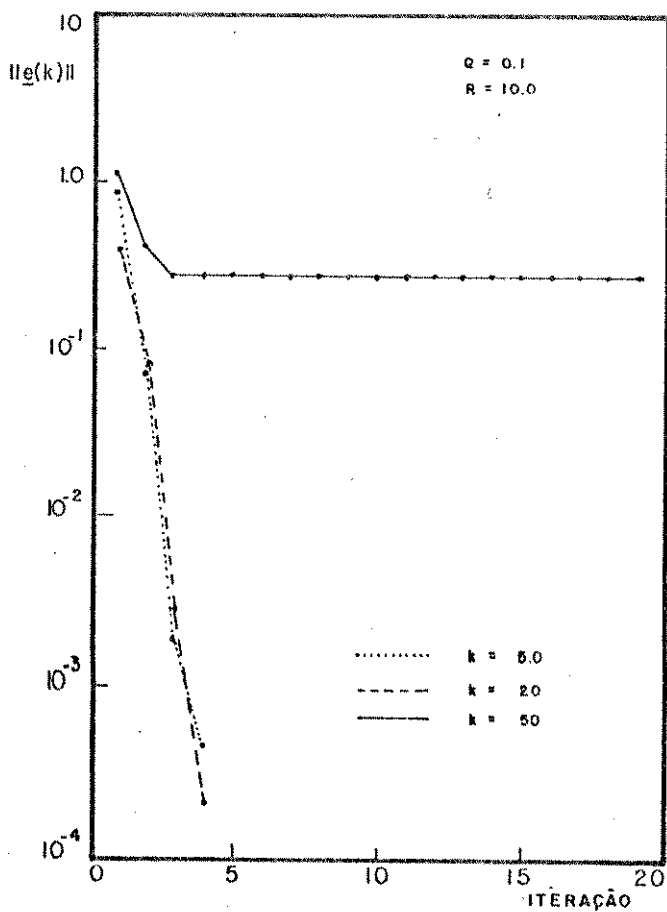


Figura 3.19

4. Para Q, R, K fixos, a convergência é mais rápida se a condição inicial está próxima de zero.
5. Para $Q, R, \underline{x}(0)$ e K fixados, a rapidez de convergência não depende do grau de acoplamento, γ .

Comentários

1. Uma das condições para a convergência deste algoritmo é que o passo α^v a ser dado na direção do gradiente a cada iteração v satisfaça (apêndice D)

$$\alpha^v < \frac{2 \|\underline{\lambda}^v(k)\|}{\|\underline{\lambda}^v(k) - \psi(\underline{\lambda}^v(k))\|}$$

o que é computacionalmente simples de ser satisfeita. Contudo não é uma condição necessária, mas suficiente [24], pois pode existir um α^v que não seja conveniente e satisfaça a relação acima. Portanto, esta condição não garante a convergência de uma maneira tão forte como diz o autor em [12].

2. COHEN em [25] faz alguns comentários a respeito do artigo [12] onde MAHMOUD desenvolve este método. Embora alguns sejam de natureza técnica, a consequência dos comentários é que todos os algoritmos estão numa forma completamente inadequada. No caso específico do algoritmo que utiliza a coordenação pelo coestado, uma das equações que é resolvida no nível inferior é

$$\underline{g}_i | \underline{\beta}_i(k) | = \left(\frac{\partial H_i}{\partial \underline{\beta}_i} \right)^T = 0 \quad (3.5)$$

expressão que para o caso linear quadrático, de acordo com [12], é

$$\underline{z}_i(k) = \sum_{j \neq i}^N A_{ji} \underline{x}_j(k) \quad (3.6)$$

o que é uma incoerência, além do mais

significando que não há interações entre os subsistemas e, portanto, contradizendo a hipótese de que o sistema global é formado por um conjunto de subsistemas interconectados e, por outro lado, que as soluções obtidas durante as iterações são factíveis. O algoritmo implementado desta maneira diverge. Contudo, se a cada iteração calcularmos as interconexões de acordo com a equação (2.86), decorrente da equação (1.81) que é a expressão correta, com um esquema de coordenação como o da equação (2.77), o algoritmo converge para solução ótima global, como mostrado pelos resultados das simulações.

A figura 3.20 mostra a evolução do custo com o decorrer das iterações.

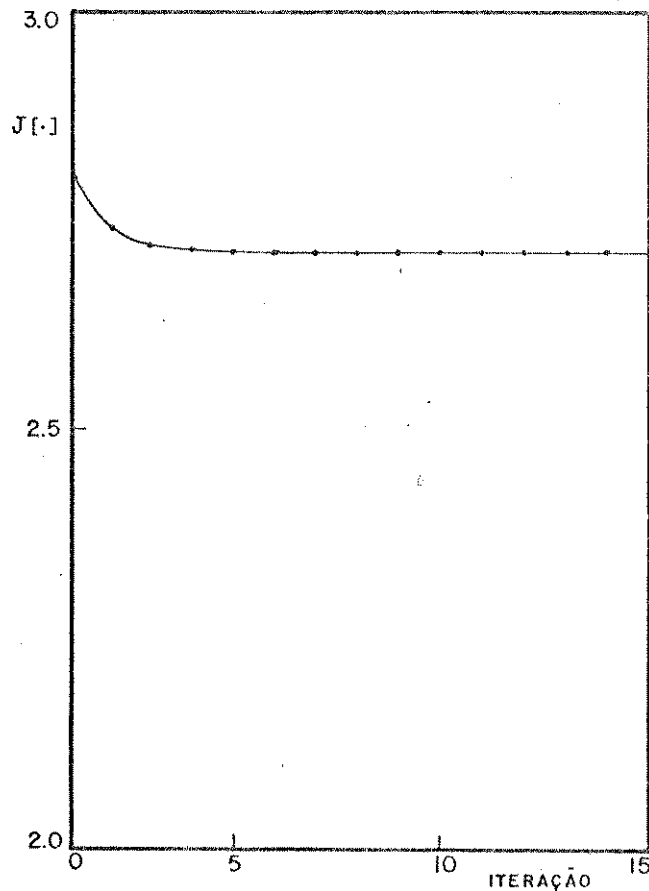


Figura 3.20

As figuras 3.21 e 3.22 mostram as trajetórias ótimas do estado, com componentes x_1 e x_4 , e as figuras 3.23 e 3.24 mostram as trajetórias ótimas do controle, componentes u_2 e u_5 .

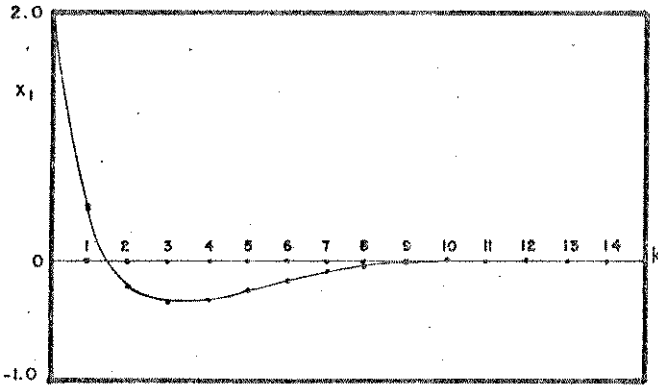


Figura 3.21

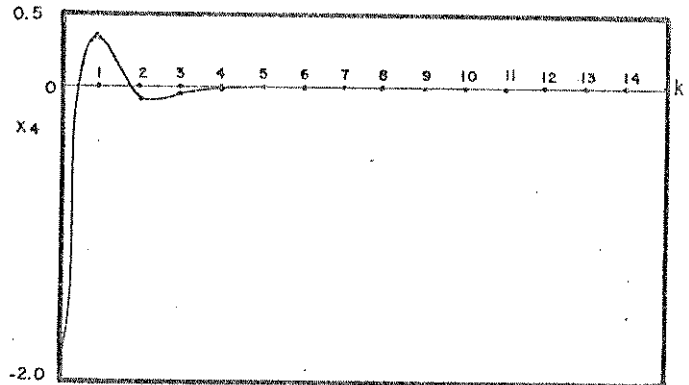


Figura 3.22

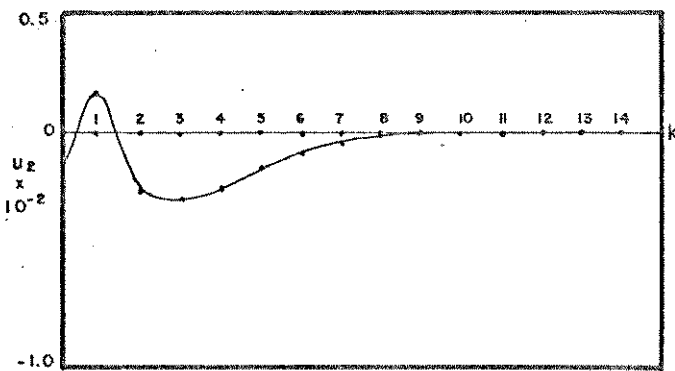


Figura 3.23

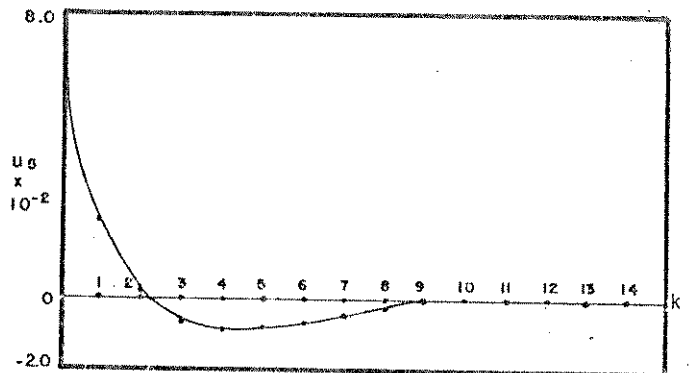


Figura 3.24

3.5 - Comparação dos Algoritmos

O sistema de ordem 20 com 10 entradas, exemplo 4, foi simulado para os três métodos e o método global clássico para três valores distintos da matriz de ponderação do controle, sendo que foram fixados $Q = 0.1$, $K = 15$ e a condição inicial $\underline{x}(0) = [0.5 \ -0.5 \ 0.3 \ -0.2 \ 0.8 \ -0.4 \ 0.5 \ -0.1 \ 0.25 \ -0.25 \ 0.35 \ -0.2 \ 0.1 \ -0.34 \ 0.5 \ -0.1 \ 0.5 \ -0.45 \ 0.5 \ -0.6]$.

As variáveis de coordenação foram inicializadas em zero e o critério de convergência adotado foi de 10^{-3} para todos os casos.

A tabela 9 mostra os resultados dos tempos de processamento (tempo de C.P.U.), a memória total utilizada pelos programas, o custo e o número de iterações para obtermos a convergência.

Em síntese, a tabela 9 mostra que:

1. Sob o ponto de vista de tempo de processamento, o método mixto é o mais eficiente pois a coordenação é rápida e simples, devido a ausência da realização da busca unidimensional e a dimensão reduzida dos subproblemas.

A grande inconveniência para os outros dois métodos obviamente é a necessidade de ser realizada a busca unidimensional, o que envolve uma grande quantidade de cálculos.

A figura 3.25 mostra a evolução dos erros normados das variáveis de coordenação durante o processo iterativo, para o caso onde $Q = 0.1$, $R = 1.0$.

2. Com relação à utilização de memória, o método coestado é o mais eficiente, pois não precisa armazenar as matrizes de realimentação e sua atualização em cada passo de iteração não depende da direção anterior como no método do TAMURA.

Método	Tempo de C.P.U.			Memória (K)	Custo			Nº Iterações			
	R = 0.1	R = 1.0	R = 10.0		R = 0.1	R = 1.0	R = 10.0	R = 0.1	R = 1.0	R = 10.0	
Global	26.52	28.98	29.62	38	0.2725	0.2877	0.2932	-	-	-	
Mixto	23.65	15.68	15.55	25	0.2762	0.2878	0.2933	5	4	4	
Coestado	3:15.16	49.43	26.70	18	0.2135	0.2334	0.2400	25	5	3	
Tamura 1	9:50.31	9:25.00	11:07.55	20	0.2724	0.2876	0.2932	15	14	15	
Tamura 2	42.02	44.47	47.34	19.5	0.2726	0.2882	0.2931	17	15	16	

Tabela 9: Comparação entre os métodos.

Tamura 1: Com busca unidimensional

Tamura 2: Com passo fixo e igual a 0.05.

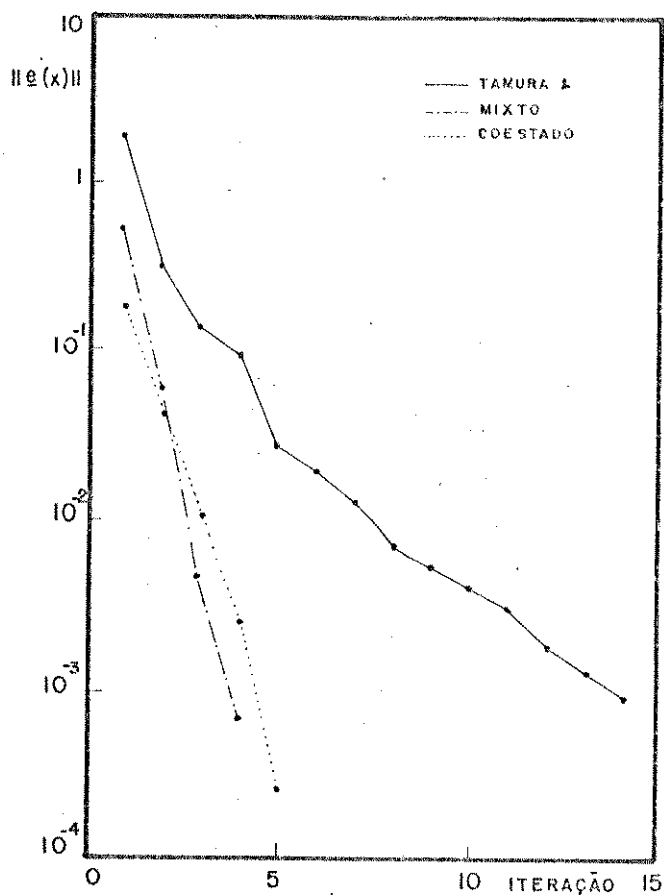


Figura 3.25

Qualitativamente, a utilização de memória pelos métodos pode ser comparada pelas trajetórias armazenadas ou

1. Regulador Global

$\frac{n(n+1)}{2}$	Trajetoórias de Riccati
n	Trajetoórias de \underline{x}
m	Trajetoórias de \underline{u}

2. Método Mixto

$\frac{n_i(n_i + 1)}{2}$	x N	Trajetoórias de Riccati
n		Trajetoórias do compensador
n		Trajetoórias de \underline{x}
m		Trajetoórias de \underline{u}
2n		Trajetoórias de coordenação

3. Método Tamura (Gradiente Conjugado)

n	Trajetoórias de \underline{x}
m	Trajetoórias de \underline{u}
n	Trajetoórias da direção da iteração anterior.
n	Trajetoórias de $\underline{\lambda}$

4. Método Coestado

n	Trajetoórias de $\underline{\lambda}$
n	Trajetoórias de \underline{x}
m	Trajetoórias de \underline{u}

As figuras 3.26 a 3.33 mostram as trajetórias ótimas do estado, com componentes x_2 e x_3 , para o método global, método mixto, método Tamura e o método coestado.

As figura 3.34 a 3.41 mostram as trajetórias ótimas do controle, componentes u_1 e u_3 , para os quatro métodos.

Podemos observar que as trajetórias ótimas obtidas são semelhantes.

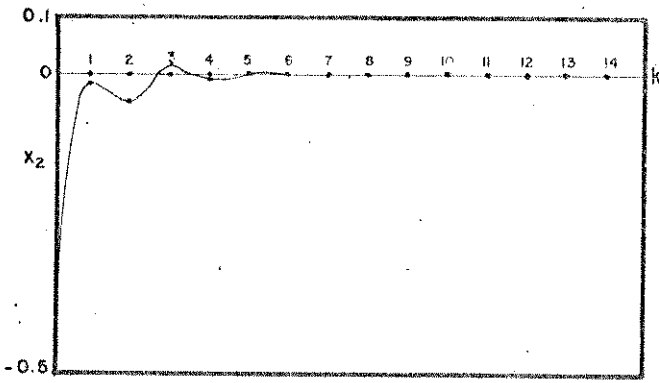


Figura 3.26

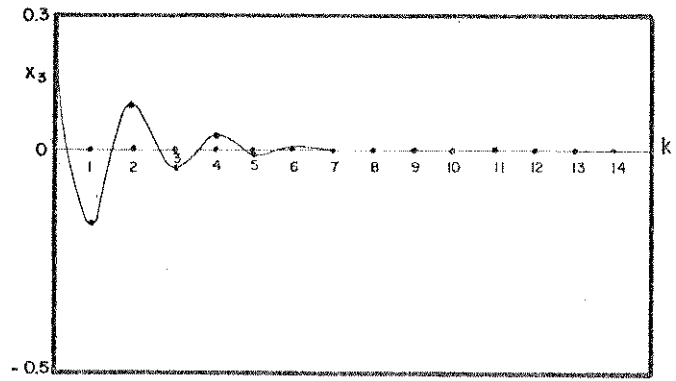


Figura 3.27

Método Global

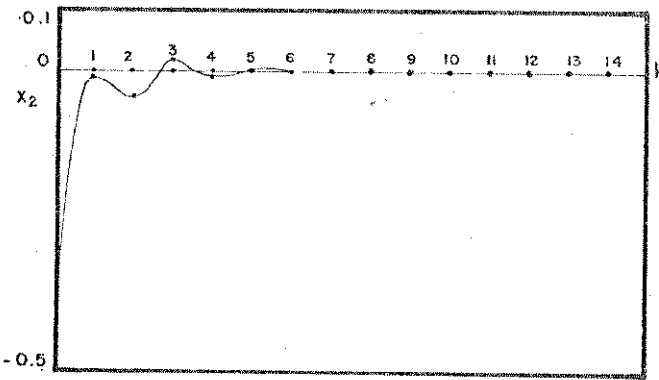


Figura 3.28

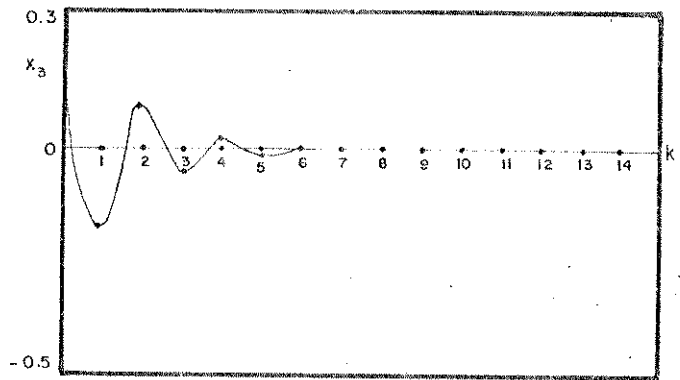


Figura 3.29

Método Mixto

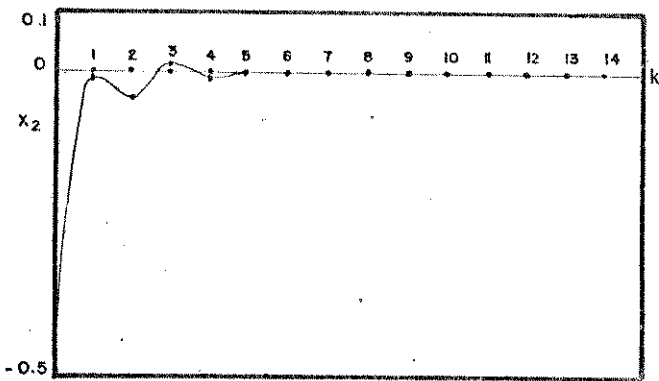


Figura 3.30

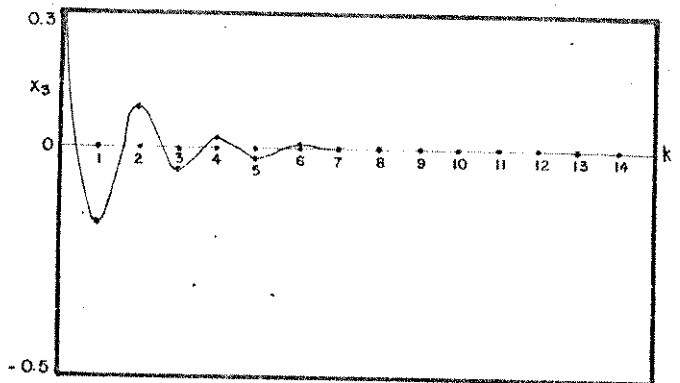


Figura 3.31

Método Tamura

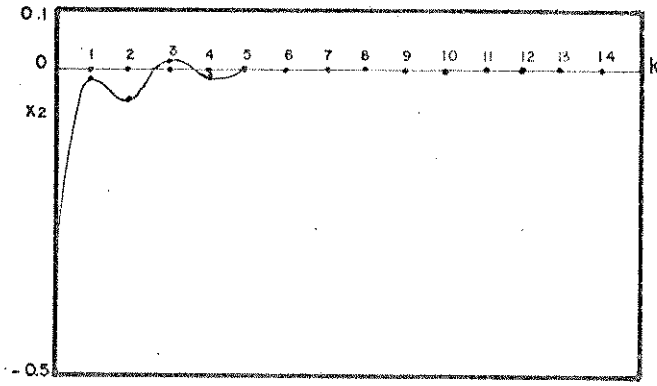


Figura 3.32

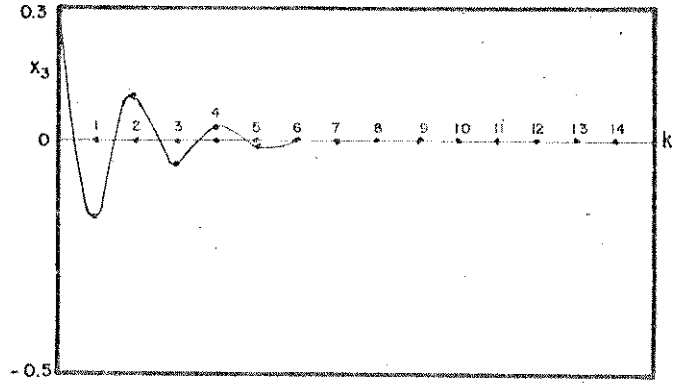


Figura 3.33

Método Coestado

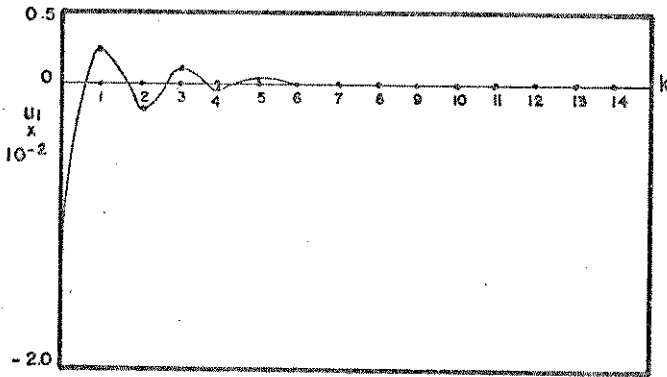


Figura 3.34

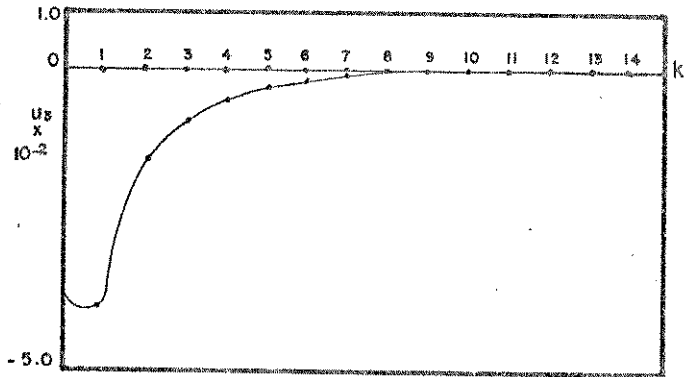


Figura 3.35

Método Global

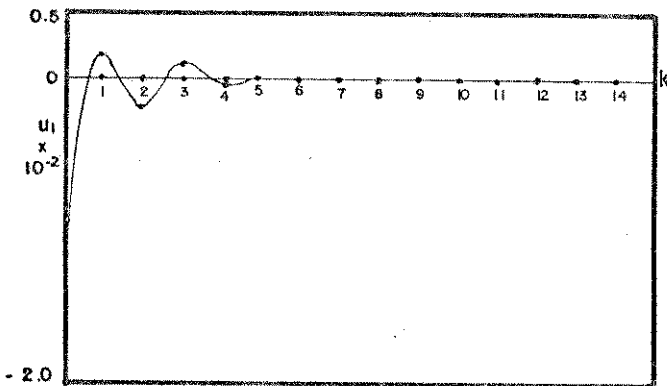


Figura 3.36

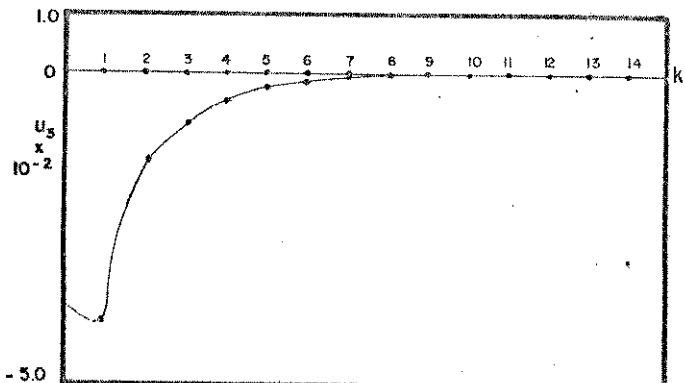


Figura 3.37

Método Mixto

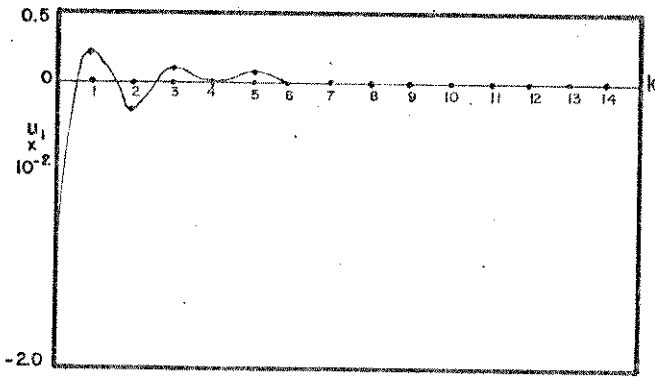


Figura 3.38

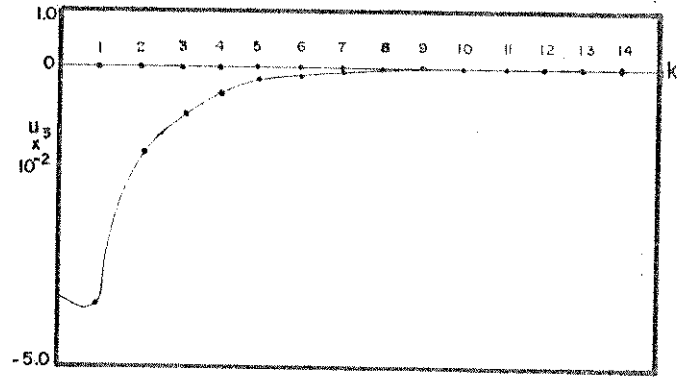


Figura 3.39

Método Tamura

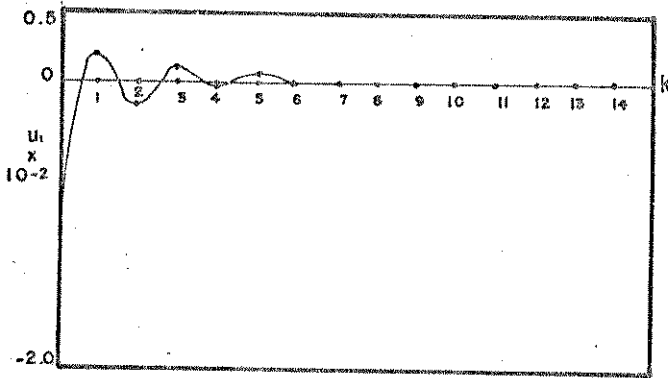


Figura 3.40

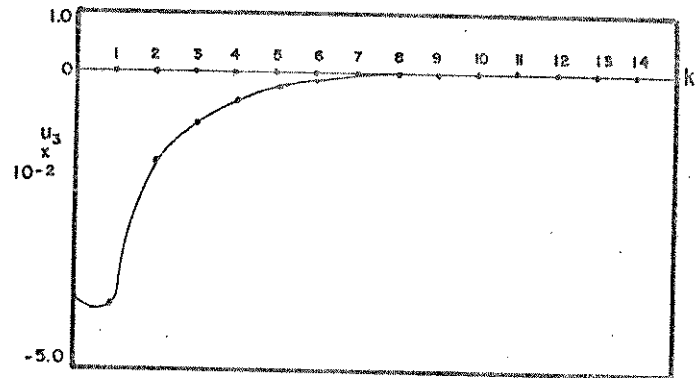


Figura 3.41

Método Coestado

3.6 - Resumo

Neste capítulo foram feitas algumas experiências com os três métodos hierárquicos e comparou-se a eficiência computacional com o método global.

Cinco conclusões essenciais resultam dos testes:

1. Verificou-se que os algoritmos são sensíveis, quanto ao tempo de processamento, a variações nos parâmetros Q , R , K e $\underline{x}(0)$.
2. A vantagem em termos de tempo de processamento para os métodos hierárquicos cresce com a dimensão do problema. Nos exemplos 1, 2 e 3, o tempo de C.P.U. necessário para a solução pelo método global foi sempre menor. No exemplo 4, o Método Misto e o Coestado, ponderado convenientemente, foram mais rápidos.

3. A vantagem dos métodos hierárquicos sobre o método global, em termos de utilização de memória cresce com a dimensão do problema.

4. A inicialização arbitrária dos algoritmos não provocou a divergência dos mesmos, mas a uma melhor inicialização corresponde um tempo de processamento menor.

5. As trajetórias ótimas obtidas pelos métodos hierárquicos são próximas das obtidas pelo método global, sendo que o método mixto apresenta soluções com pequenas diferenças quando o sistema é fortemente acoplado.

CAPÍTULO 4 - OTIMIZAÇÃO HIERÁRQUICA DE UM SISTEMA METROVIÁRIO

4.1 - Intródução

Nos capítulos anteriores, procurou-se estabelecer técnicas analíticas e computacionais para a solução do problema de otimização dinâmica de grande dimensão. Foram apresentados métodos que permitem determinar a solução do problema global pela solução de subproblemas de dimensão reduzida coordenados.

Foi dada uma ênfase maior à classe dos reguladores lineares quadráticos estacionários, com estado final livre e sem restrições nas variáveis de estado e controle. Embora esta classe de problemas esteja associada a várias situações reais, normalmente o problema real apresenta restrições nas variáveis de estado e de controle, devido às limitações físicas do sistema; funcionais não quadráticas devido a certos objetivos específicos a serem atingidos e outros fatores.

O propósito deste capítulo é, objetivando uma aplicação a um sistema de transporte metroviário, implementar um dos algoritmos apresentados, demonstrando com isto, a aplicabilidade de esquemas de controle hierarquizado em situações práticas.

A descrição do sistema e do problema de controle, numa forma sucinta, e da seleção do método adequado para resolvê-lo, são os temas dos itens seguintes.

O modelamento do sistema, bem como o estabelecimento do critério e o tratamento do problema numa forma detalhada está descrito por J.E. CURY em [26].

4.2 - O Modelo do Sistema e o Problema de Controle

De acordo com J.E. CURY [26], o comportamento de um sistema metroviário pode ser representado pela equação às diferenças seguinte:

$$\underline{y}(k+1) = A(k)\underline{y}(k) + B(k)\underline{u}(k) - \sum_{j=1}^{k-1} D(k-j,k)\underline{y}(k-j) + \underline{d}(k) \quad (4.1)$$

onde

$$\underline{y}(k) \triangleq \left[\underline{x}^T(k) \mid \underline{p}^T(k) \right]^T \in E^{2n}$$

$$A(k) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline \alpha(k) & 0 \end{array} \right] \quad 2n \times 2n$$

$$B(k) \triangleq \left[\begin{array}{c} L \\ \hline 0 \end{array} \right] \quad 2n \times 2n$$

$$D(k-j,k) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \alpha_1(k-j,k) & 0 \end{array} \right] \quad 2n \times 2n$$

$\underline{d}(k) : \left[\underline{c}^T(k) \mid 0 \right]^T$, onde $\underline{c}(k)$ é um vetor constante conhecido.

$\alpha(k)$, $\alpha_1(k-j,k)$: matriz $n \times n$, cujos elementos são parâmetros do sistema conhecidos.

I: matriz identidade $n \times n$

uma vez que, conhecendo-se a distribuição física dos trens ao longo da via e seu carregamento, o estado do sistema fica determinado.

$\underline{x}(k)$ representa o intervalo de tempo entre trens ("headway") numa mesma plataforma k . Portanto determina o espaçamento e a consequente distribuição física dos trens ao longo da via.

$\underline{p}(k)$ representa o número de passageiros dentro dos trens, quando

estes chegam à plataforma k.

$\underline{u}(k)$ é o vetor de controle, que são os tempos de parada dos trens na plataforma k, somado aos tempos de percurso destes da plataforma k até a seguinte.

Portanto, a cada trem i, numa plataforma k, está associado seu "headway" $x_i(k)$ e seu carregamento $p_i(k)$. Então, a equação (4.1) está associado um conjunto de n trens.

Note que (4.1) é uma equação linear à diferenças com atraso distribuído na variável de estado x.

Na operação de um sistema metroviário, é conveniente que se estabeleça um programa de horários de despacho dos trens, de maneira tal que fatores como o tempo de espera de passageiros numa plataforma, o número de trens em circulação na via sejam minimizados, ao mesmo tempo em que o carregamento dos trens seja consistente com certo nível de conforto especificado, e que o controle seja feito de maneira tal que utilizem níveis convenientes, com objetivo de dar maior flexibilidade à movimentação dos trens, quando existir a possibilidade de uma perturbação. Portanto, no estabelecimento do critério a ser otimizado, devemos levar em consideração estes objetivos.

Pode ser mostrado, que o número total de passageiros por segundo, de espera numa plataforma k, para um conjunto de n trens, está relacionado com a variável "headway" pela equação:

$$PT = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \alpha_i(k) x_i^2(k) \quad (4.2)$$

que é o primeiro termo que deve estar presente no critério, pois quanto menor o intervalo entre os trens, menor é a espera.

Por outro lado, quanto menor o "headway", maior o número de trens na via. Como nosso objetivo é diminuir este número de trens, é necessário que no critério esteja presente um termo na forma

$$NT = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i(k)} \quad (4.3)$$

pois quanto maior o "headway", menor o número de trens e conseqüentemente, me -

nor o valor do termo (4.3). Portanto os dois primeiros termos representam um compromisso entre o tempo de espera e o número de trens.

Uma vez que o nível de conforto é especificado, podemos considerá-lo como um valor de referência para o número de passageiros dentro do trem. Então um terceiro termo deve ser adicionado, representando o desvio entre o carregamento real e o especificado. Este termo é o quadrático e dado pela equação:

$$DP = \|\underline{p}(k) - \underline{p}^r(k)\|_{P(k)}^2 \quad (4.4)$$

onde

$\underline{p}^r(k)$: carregamento de passageiros desejado na plataforma k.

$P(k)$: matriz de ponderação de passageiros.

Por último, um quarto termo correspondente ao desvio entre o controle real e o de referência especificado. É um termo quadrático e dado pela equação:

$$DC = \|\underline{u}(k) - \underline{u}^r(k)\|_{R(k)}^2 \quad (4.5)$$

onde

$\underline{u}^r(k)$: controle de referência.

$R(k)$: matriz de ponderação do controle.

O critério global a ser otimizado pode então ser escrito como:

$$J(.) = \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} Q_i(k) \alpha_{i(k+1)} x_i^2(k+1) + \frac{\gamma_i(k+1)}{x_i(k+1)} \right) + \frac{1}{2} \|\underline{p}(k+1) - \underline{p}^r(k+1)\|_{P(k+1)}^2 + \frac{1}{2} \|\underline{u}(k) - \underline{u}^r(k)\|_{R(k)} \right\} \quad (4.6)$$

onde $Q_i(k)$, $\gamma_i(k)$ são fatores de ponderação do estado $x_i(k)$.

Por razões de segurança e de operação do sistema, o intervalo entre trens não pode ser menor que um valor mínimo especificado e nem maior do que um valor máximo especificado. Portanto, no nosso problema estão presentes restrições na forma:

$$\underline{x}_{\min}(k) \leq \underline{x}(k) \leq \underline{x}_{\max}(k) \quad (4.7)$$

onde

$$x_{i,\min}(k) = 130$$

$$x_{i,\max}(k) = 300$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$k = 0, \dots, K$$

Estes valores são especificados pela Companhia do Metrô.

Como as capacidades dos trens são limitadas, existem restrições na variável passageiros na forma:

$$\underline{p}_{\min}(k) \leq \underline{p}(k) \leq \underline{p}_{\max}(k) \quad (4.8)$$

onde

$$\underline{p}_{\max}(k) = 1700$$

$$\underline{p}_{\min}(k) = 0$$

$$k = 0, \dots, K$$

As restrições na variável de controle são impostas pelos tempos máximo e mínimo de parada nas plataformas e de percurso entre plataformas.

Considerou-se o tempo de parada mínimo como sendo 15 e como tempo de parada máximo, 60. Os valores de $u_{PL3}(k)$ e $u_{PL6}(k)$ são conhecidos e são dados em [26]. Neste caso, ao contrário dos anteriores, as restrições dependem da plataforma. Portanto:

$$\underline{u}_{\min}(k) \leq \underline{u}(k) \leq \underline{u}_{\max}(k) \quad (4.9)$$

onde:

$$u_{i,\min}(k) = 15 + u_{i,PL3}(k)$$

$$u_{i,\max}(k) = 60 + u_{i,PL6}(k)$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$k = 0, \dots, K-1$$

O problema de controle pode agora ser formulado para caso em estudo como sendo:

$$\underset{\underline{u}}{\text{MIN}} \quad J[\underline{x}, \underline{p}, \underline{u}]$$

sujeito a (4.1), (4.7), (4.8) e (4.9).

$$\underline{x}(0) = 0 \tag{4.10}$$

$$\underline{p}(0) = 0 \tag{4.11}$$

A natureza do problema permite concluir que um método adequado para sua solução deve permitir a presença de atrasos, restrições de igualdade e desigualdade, critérios não lineares e além do mais, que a dimensão do mesmo seja grande.

O método decomposição paramétrica, coordenação pelo critério é um método apropriado para o tratamento deste problema porque permite a presença de tais características como veremos a seguir.

A priori, os métodos que utilizam decomposição espacial, como descritos nos capítulos anteriores, também poderiam ser utilizados, desde que seja determinado o modelo de primeira ordem equivalente ao modelo com atraso, e seja utilizado um método conveniente para a solução dos subproblemas. Contudo, esta opção constituiu um outro problema a ser analisado posteriormente.

Por outro lado, um outro método candidato seria a Programação Dinâmica, mas sabemos que para problemas de grande dimensão ele não é aplicável, devido aos requerimentos de memória rápida para sua utilização.

4.3 - O Método Decomposição Paramétrica, Coordenação pelo Critério, com Atraso [9]

Seja um sistema descrito pela equação às diferenças de ordem $\theta + 1$

$$\underline{x}(k+1) = \sum_{j=0}^{\theta} \underline{g}_j | \underline{x}(k-j), \underline{u}(k-j), k-j | \quad (4.12)$$

$$k = 0, \dots, K-1$$

e, por hipótese:

$$\underline{x}(k) = \underline{x}_k \quad k = -\theta, -\theta+1, \dots, -1, 0 \quad (4.13)$$

$$\underline{u}(k) = \underline{u}_k \quad k = -\theta, -\theta+1, \dots, -1, 0 \quad (4.14)$$

O critério a ser minimizado é dado por:

$$J | \cdot | = \phi | \underline{x}(K) | + \sum_{k=0}^{K-1} f | \underline{x}(k), \underline{u}(k), k | \quad (4.15)$$

sujeito às restrições nas variáveis de estado e de controle

$$h_k | \underline{x}(k), \underline{u}(k) | = 0 \quad k = 0, \dots, K-1 \quad (4.16)$$

$$h_K | \underline{x}(K) | \leq 0 \quad (4.17)$$

O problema dual ao descrito por (4.12) a (4.17) com relação a (4.12), que pode ser visto como uma restrição de igualdade é:

$$\text{MAX}_{\underline{\lambda}} D | \underline{\lambda}(k) | \quad (4.18)$$

com

$$D | \underline{\lambda}(k) | = \text{MIN}_{\underline{x}, \underline{u}} \{ L | \underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda} | \text{ sujeito a (4.16), (4.17)} \} \quad (4.19)$$

onde $L|\cdot|$ é o Lagrangiano

$$L|\cdot| = \phi|\underline{x}(k)| + \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ f|\underline{x}(k), \underline{u}(k), k| - \underline{\lambda}^T(k) |\underline{x}(k+1) - \sum_{j=0}^{\theta} \underline{g}_j |\underline{x}(k-j), \underline{u}(k-j), k-j| \right\} \quad (4.20)$$

que após manipulações pode ser reescrito como:

$$L|\cdot| = \phi|\underline{x}(K)| - \underline{\lambda}^T(K-1)\underline{x}(K) + \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ f|\underline{x}(k), \underline{u}(k), k| - \underline{\lambda}^T(k-1)\underline{x}(k) + \sum_{j=0}^{\theta} \underline{\lambda}^T(k+j) \underline{g}_j |\underline{x}(k), \underline{u}(k), k| \right\} + c(\underline{\lambda}) \quad (4.21)$$

$$e, \quad c(\underline{\lambda}) = \underline{\lambda}^T(0) |\underline{g}_1 \underline{x}(-1), \underline{u}(-1), -1| + \underline{\lambda}^T(k) |\underline{g}_2 \underline{x}(-2), \underline{u}(-2), -2| + \dots + \dots + \underline{\lambda}^T(\theta-1) |\underline{g}_\theta \underline{x}(-1), \underline{u}(-1), -1|$$

$$\underline{\lambda}(-1) = 0 \quad e \quad \underline{\lambda}(k) = 0 \quad k \geq K$$

Definindo o Hamiltoniano como sendo:

$$H|\cdot| = f|\underline{x}(k), \underline{u}(k), k| + \sum_{j=0}^{\theta} \underline{\lambda}^T(k+j) \underline{g}_j |\underline{x}(k), \underline{u}(k), k| \quad (4.22)$$

o Lagrangiano é escrito como:

$$L|\cdot| = \phi|\underline{x}(k)| + \underline{\lambda}^T(K-1)\underline{x}(k) + \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ H|\underline{x}(k), \underline{u}(k), \underline{\lambda}(k)| - \underline{\lambda}^T(k-1)\underline{x}(k) \right\} + c(p)$$

Para valores de $\underline{\lambda}(k) = \underline{\lambda}^*(k)$ fixados, precisamos resolver

$$\underset{\underline{x}, \underline{u}}{\text{MIN}} L|\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}^*| \quad (4.23)$$

sujeito a

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (4.24)$$

$$h_k | \underline{x}(k), \underline{u}(k) | \leq 0 \quad k = 0, \dots, K-1 \quad (4.25)$$

$$h_k | \underline{x}(K) | \leq 0 \quad (4.26)$$

com a finalidade de calcularmos o valor da função dual. Como vimos nos capítulos 1 e 2, este problema de minimização pode ser decomposto nos seguintes $(K+1)$ subproblemas independentes:

Para $k = 0$

$$\underset{\underline{u}(0)}{\text{MIN}} H | \underline{x}(0), \underline{u}(0), \underline{\lambda}^*, 0 |$$

sujeito a

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_0$$

$$h_0 | \underline{x}(0), \underline{u}(0) | \leq 0$$

Para $k = 1, 2, \dots, K-1$

$$\underset{\underline{x}(k), \underline{u}(k)}{\text{MIN}} \{ H | \underline{x}(k), \underline{u}(k), \underline{\lambda}^*, k | - \underline{\lambda}^{*T} (k-1) \underline{x}(k) \}$$

sujeito a

$$h_k | \underline{x}(k), \underline{u}(k) | \leq 0$$

Para $k = K$

$$\underset{\underline{x}(K)}{\text{MIN}} \{ \phi | \underline{x}(K) - \underline{\lambda}^{*T} (K-1) \underline{x}(K) \}$$

sujeito a

$$h_K | \underline{x}(K) | \leq 0$$

Então, com as soluções $\underline{x}^*, \underline{u}^*$ dos subproblemas, podemos calcular o valor da função dual por

$$D(\underline{\lambda}^*) = L(\underline{x}^*, \underline{u}^*, \underline{\lambda}^*)$$

e da equação (4.20), obtemos o gradiente da função dual por

$$\left. \frac{\partial D(\underline{\lambda})}{\partial \underline{\lambda}} \right|_{\underline{\lambda}=\underline{\lambda}^*} = -\underline{x}^{*(k+1)} + \sum_{j=0}^{\theta} \underline{q}_j | \underline{x}^{*(k-j)}, \underline{u}^{*(k-j)}, k-j |$$

$$k = 0, 1, \dots, K-1$$

Com estas informações o problema dual é resolvido numericamente por alguma técnica tipo gradiente, como vimos anteriormente.

As propriedades mais significativas deste método são [9]:

- Atrasos no sistema podem ser facilmente tratados pela solução do problema dual.
- A solução ótima pode ser obtida sem redução da equação de ordem $\theta + 1$ a uma equação convencional de primeira ordem de grande dimensão.
- Restrições no estado e controle são fáceis de serem tratadas, comparando com outros métodos, desde que os subproblemas são de dimensão reduzida.

Estas propriedades justificam a escolha deste método para a solução do problema de controle descrito no ítem anterior.

O algoritmo para maximização da função dual, utilizando o método gradiente conjugado é o mesmo algoritmo 2, forma geral, do capítulo 2.

Note que, para o caso onde $\theta = 0$ e as restrições (4.16) e (4.17) estão ausentes, o problema é idêntico ao descrito no segundo capítulo.

4.4 - Aplicação do Método ao Sistema do Metrô

Para o caso em estudo, o problema de otimização é, das equações (4.1), (4.6), (4.7), (4.8), (4.9), (4.10) e (4.11)

$$\underset{\underline{x}, \underline{p}, \underline{u}}{\text{MIN}} \sum_{k=0}^{K-1} f[\underline{x}(k+1), \underline{p}(k+1), \underline{u}(k)] \quad (4.27)$$

sujeito a

$$\underline{x}(k+1) = \underline{x}(k) + L \underline{u}(k) + \underline{c}(k) \quad (4.28)$$

$$\underline{p}(k+1) = \underline{p}(k) + \alpha \underline{x}(k) - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_1(k-j, k) \underline{x}(k-j) \quad (4.29)$$

$$\underline{x}_{\min}(k) \leq \underline{x}(k) \leq \underline{x}_{\max}(k) \quad (4.30)$$

$$\underline{p}_{\min}(k) \leq \underline{p}(k) \leq \underline{p}_{\max}(k) \quad (4.31)$$

$$\underline{u}_{\min}(k) \leq \underline{u}(k) \leq \underline{u}_{\max}(k) \quad (4.32)$$

$$\underline{x}(0) = 0 \quad (4.33)$$

$$\underline{p}(0) = 0 \quad (4.34)$$

onde

$$f[\cdot] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} Q_i(k) \alpha_i(k+1) x_i^2(k+1) + \frac{\gamma_i}{x_i(k+1)} \right) + \\ + \frac{1}{2} \|\underline{p}(k+1) - \underline{p}^r(k+1)\|_{P(k)}^2 + \frac{1}{2} \|\underline{u}(k) - \underline{u}^r(k)\|_{R(k)}^2$$

P e R são matrizes definidas positivas.

Então o Lagrangiano é:

$$L|\cdot| = \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ f|\underline{x}(k+1), \underline{p}(k+1), \underline{u}(k)| - \underline{\lambda}_1^T(k) |\underline{x}(k+1) - \underline{x}(k) - L\underline{u}(k) - \underline{c}(k)| - \right. \\ \left. - \underline{\lambda}_2^T(k) |\underline{p}(k+1) - \underline{p}(k) - \alpha\underline{x}(k) + \sum_{j=1}^{K-1} \alpha_1(k-j, k) \underline{x}(k-j)| \right\} \quad (4.35)$$

que pode ser reescrito após manipulações, como:

$$L|\cdot| = \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ f|\underline{x}(k+1), \underline{p}(k+1), \underline{u}(k)| + \underline{\lambda}_1^T(k+1) \underline{x}(k+1) + \underline{\lambda}_1^T(k) L\underline{u}(k) - \right. \\ \left. - \underline{\lambda}_1^T(k) \underline{c}(k) + \underline{\lambda}_2^T(k+1) \underline{p}(k+1) + \underline{\lambda}_2^T(k+1) \alpha(k+1) \underline{x}(k+1) - \right. \\ \left. - \sum_{j=k+2}^{K-1} \underline{\lambda}_2^T(k) \alpha_1(k+1, j) \underline{x}(k+1) - \underline{\lambda}_1^T(k) \underline{x}(k+1) - \underline{\lambda}_2^T(k) \underline{p}(k+1) \right\} \quad (4.36)$$

com $\underline{\lambda}_1(k) = \underline{\lambda}_2(k) = 0$, $k \geq K$, e os K subproblemas do nível inferior são, consequentemente:

$$\underset{\underline{x}, \underline{p}, \underline{u}}{\text{MIN}} L|\underline{x}(k+1), \underline{p}(k+1), \underline{u}(k), \underline{\lambda}_1^*(k), \underline{\lambda}_2^*(k)| \quad k = 0, \dots, K-1$$

sujeito às equações (4.30) a (4.34).

Considerando as condições de otimalidade de primeira ordem

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{p}(k+1)} = 0 \quad \text{ou,}$$

$$\underline{p}(k+1) = \underline{p}^r(k+1) - \underline{P}^{-1}(k+1) |\underline{\lambda}_2^*(k) - \underline{\lambda}_2^*(k+1)| \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{u}(k)} = 0 \quad \text{ou,}$$

$$\underline{u}(k) = \underline{u}^r(k) - R^{-1}(k) [L^T \underline{\lambda}_1^*(k)] \quad (4.38)$$

e finalmente, para $i = 1, \dots, n$.

$$\frac{\partial L}{\partial x_i(k+1)} = 0 \quad \text{ou,}$$

$$x_i^3(k+1) + G(k+1)x_i^2(k+1) + F(k+1) = 0 \quad (4.39)$$

onde

$$G(k+1) = \frac{1}{Q_i \alpha_i(k+1)} \left\{ \lambda_{1,i}^*(k+1) + \lambda_{2,i}^* \alpha_i(k+1) - \sum_{j=k+2}^{K-1} \lambda_{2,i}^*(k) \alpha_{1,i}(k+1,j) - \lambda_{1,i}^*(k) \right\}$$

$$F(k+1) = \frac{-\gamma_i(k+1)}{Q_i(k+1)\alpha_i(k+1)}$$

Para a solução da equação (4.39), é necessário a consideração de algumas condições para garantir que as soluções sejam reais (ver [26]).

P e R são matrizes diagonais, portanto, o problema de minimização do Lagrangiano é um conjunto de $3n$ problemas de minimização independentes. Considerando agora as restrições (4.30) a (4.32) as soluções ótimas são obtidas de:

$$\underline{p}^*(k+1) = S1 | \underline{p}(k+1) |$$

$$\underline{u}^*(k) = S2 | \underline{u}(k) |$$

$$\underline{x}^*(k+1) = S3 | \underline{x}(k+1) |$$

onde, para $i = 1, \dots, n$.

$$s_{1,i}|\cdot| = \begin{cases} p_{\max,i}(k+1) & \text{se } p_i(k+1) > p_{\max,i}(k+1) \\ p_i(k+1) & \text{se } p_{\min,i}(k+1) \leq p_i(k+1) \leq p_{\max,i}(k+1) \\ p_{\min,i}(k+1) & \text{se } p_i(k+1) < p_{\min,i}(k+1) \end{cases}$$

$$s_{2,i}|\cdot| = \begin{cases} u_{\max,i}(k) & \text{se } u_i(k) > u_{\max,i}(k) \\ u_i(k) & \text{se } u_{\min,i}(k) \leq u_i(k) \leq u_{\max,i}(k) \\ u_{\min,i}(k) & \text{se } u_i(k) < u_{\min,i}(k) \end{cases}$$

$$s_{3,i}|\cdot| = \begin{cases} x_{\max,i}(k+1) & \text{se } x_i(k+1) > x_{\max,i}(k+1) \\ x_i(k+1) & \text{se } x_{\min,i}(k+1) \leq x_i(k+1) \leq x_{\max,i}(k+1) \\ x_{\min,i}(k+1) & \text{se } x_i(k+1) < x_{\min,i}(k+1) \end{cases}$$

O valor da função dual é então:

$$D[\underline{\lambda}^*] = L[\underline{x}^*, \underline{p}^*, \underline{u}^*, \underline{\lambda}_1^*, \underline{\lambda}_2^*]$$

$$\underline{\lambda}^* = [\underline{\lambda}_1^{*T}, \underline{\lambda}_2^{*T}]^T$$

e

$$\nabla_{\underline{\lambda}_1}(k) D[\underline{\lambda}^*] \Big|_{\underline{\lambda}_1 = \underline{\lambda}_1^*} = -\underline{x}^*(k+1) + \underline{x}^*(k) + L\underline{u}^*(k) + \underline{c}(k)$$

$$\nabla_{\underline{\lambda}_2}(k) D[\underline{\lambda}^*] \Big|_{\underline{\lambda}_2 = \underline{\lambda}_2^*} = -\underline{p}^*(k+1) + \underline{p}^*(k) + \alpha(k)\underline{x}^*(k) - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_1(k-j, k)\underline{x}^*(k-j)$$

$$k = 0, 1, \dots, K-1$$

4.5 - Resultados

O problema foi resolvido, para um conjunto de 15 trens ($n = 15$) para

$$Q_i(k) = 10.0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad k = 1, \dots, K$$

$$P(k) = 1.0, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$R(k) = 1.0, \quad k = 1, 2, \dots, K-1$$

$$R(0) = 0.1$$

$$K = 37$$

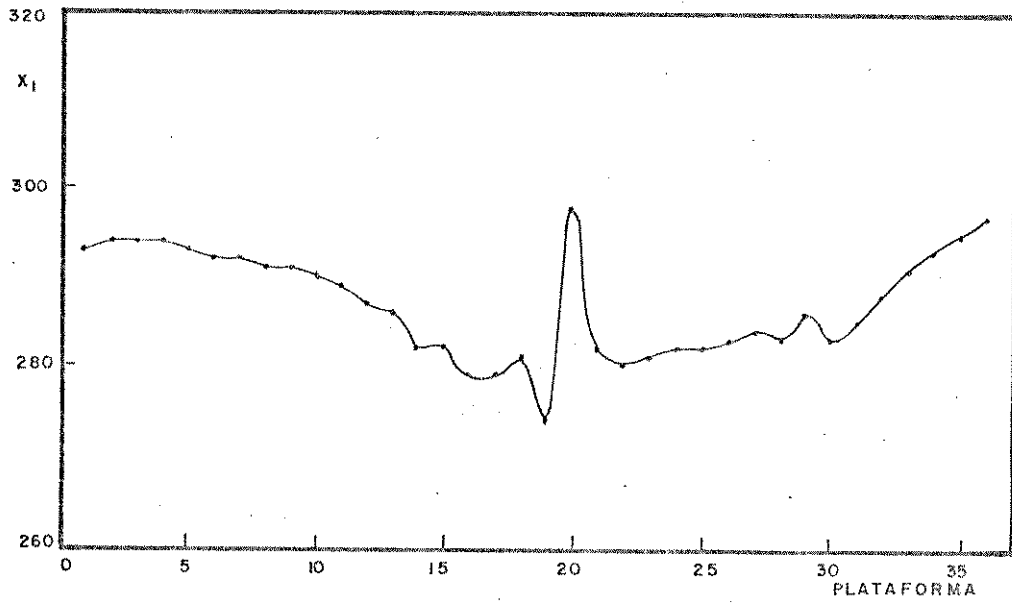
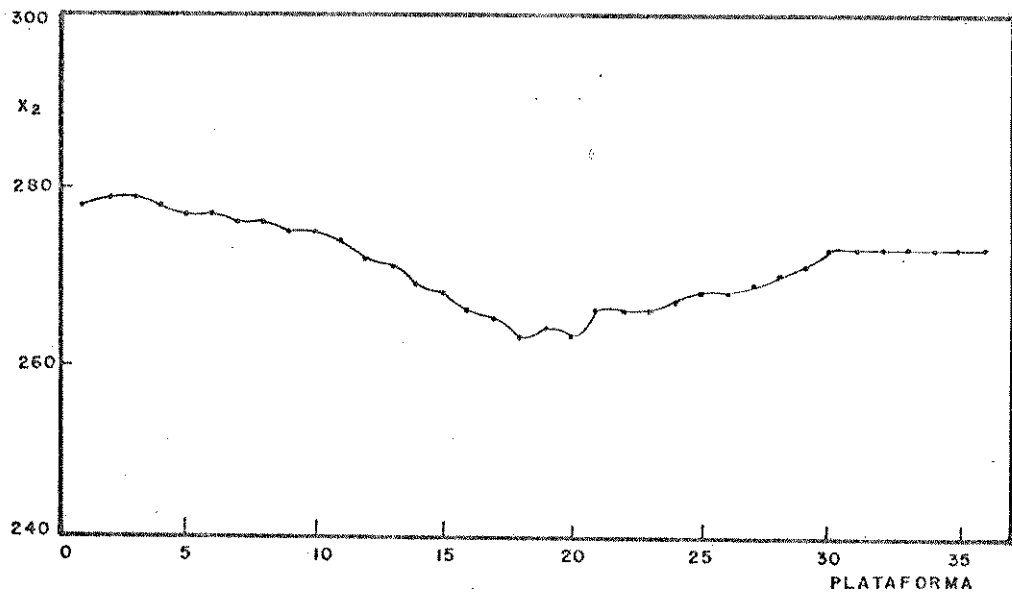
implementando o algoritmo 2, forma geral, capítulo 2, com uma estrutura de cálculo semelhante à mostrada na figura 2.4.

A convergência foi obtida após 96 iterações com uma média de 3.3 segundos por iteração.

O critério de convergência adotado foi tal que o módulo dos elementos do vetor $\nabla_{\lambda_1} D[\underline{\lambda}]$ fossem menores do que 2.0 e o módulo dos elementos do vetor $\nabla_{\lambda_2} D[\underline{\lambda}]$ fossem menores do que 10.0.

A memória total utilizada foi de 45K e os valores obtidos para o critério e a função dual foram 1.25237×10^8 e 1.25352×10^8 , respectivamente.

As figuras (4.1) a (4.6) mostram as trajetórias ótimas obtidas para os dois primeiros trens.

*Figura 4.1**Figura 4.2*

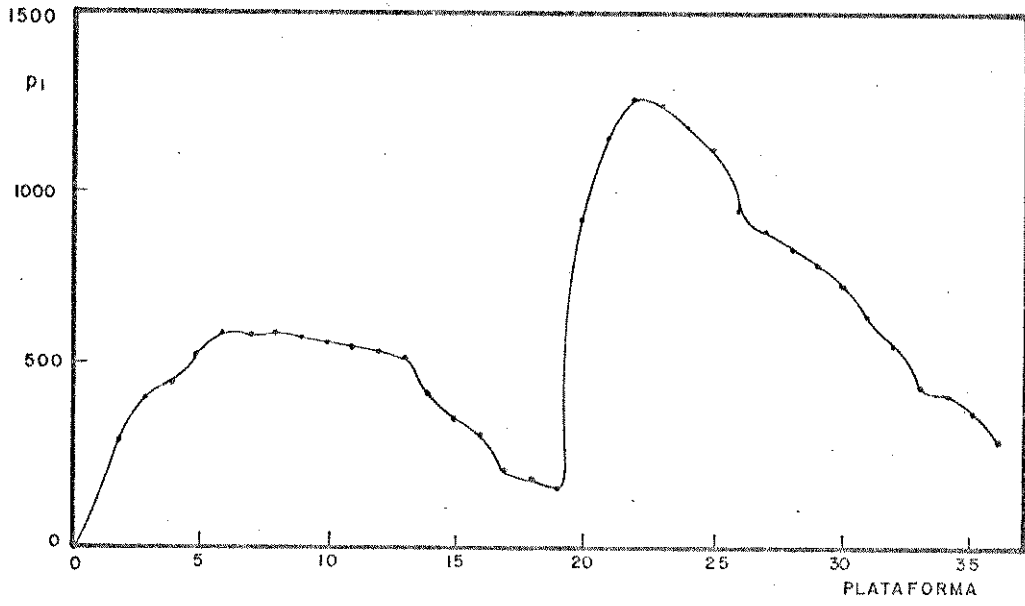


Figura 4.3

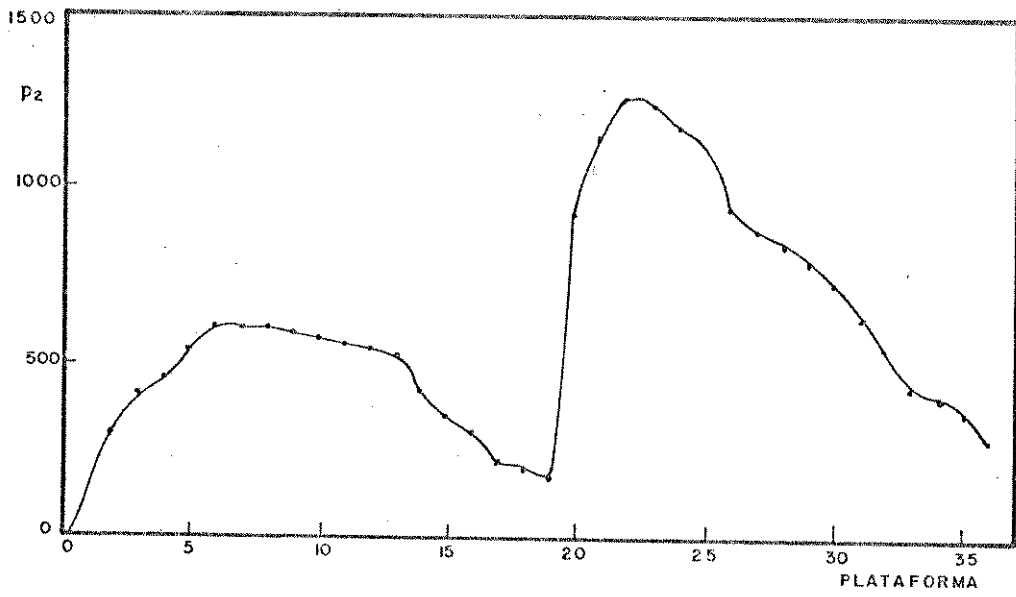
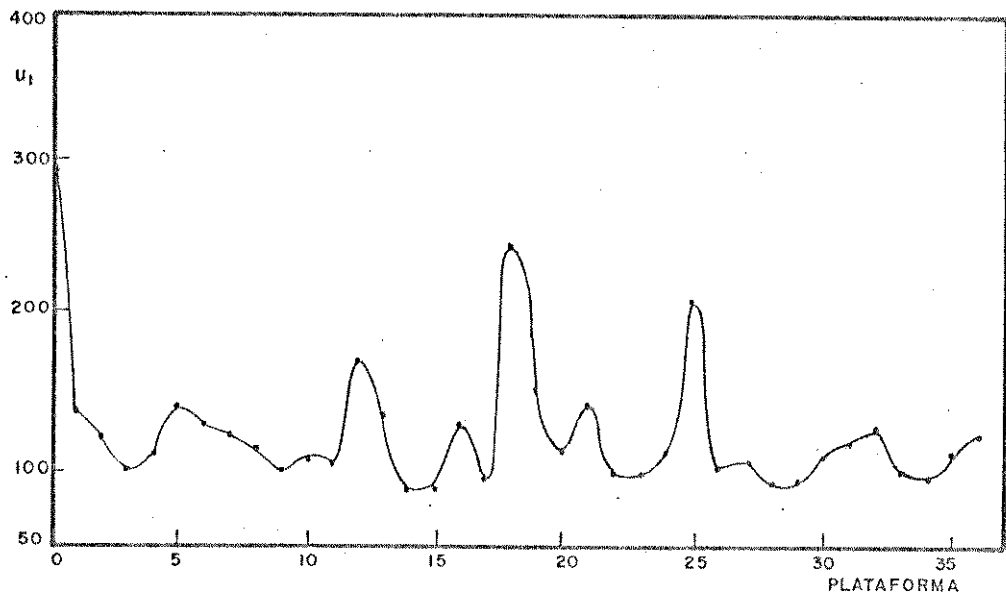
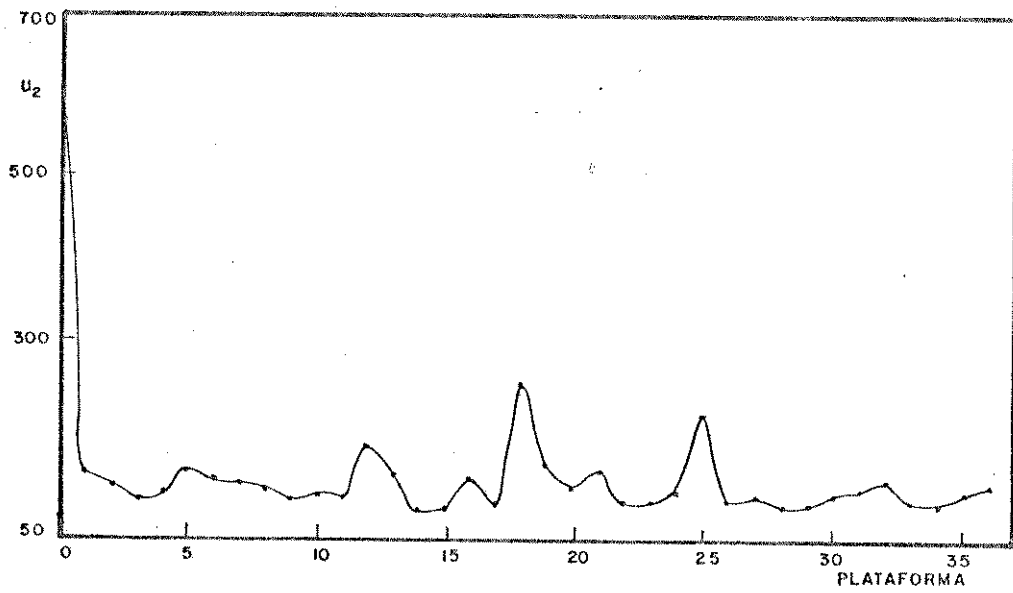


Figura 4.4

*Figura 4.5**Figura 4.6*

CONCLUSÃO

A análise e a implementação dos algoritmos para a determinação do controle ótimo de sistemas dinâmicos de grande dimensão, utilizando-se de métodos de decomposição-coordenação, mostraram que a otimização por cálculo hierárquico é útil e às vezes mais eficaz que o cálculo global, sob o ponto de vista de utilização de memória e tempo de computação.

Considerando um problema de transporte metroviário, foi mostrado também que problemas de otimização complexos podem ser resolvidos pela utilização de algum destes algoritmos. Neste caso prático, o método devido a TAMURA [9] mostrou ser o mais conveniente.

Como existe atualmente uma tendência para a utilização de decisões descentralizadas, computação distribuída e controle hierárquico, questões como transmissão de informações, o valor destas informações, confiabilidade e estabilidade da estruturas, interface entre computadores, dentre outras, são temas para possíveis estudos futuros.

APENDICE A - SUMÁRIO DO ALGORITMO PARA A IMPLEMENTAÇÃO DO REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO GLOBAL [27]

Problema

$$\underset{\underline{u}(k)}{\text{MIN}} \quad \|\underline{x}(K)\|_H^2 + \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{2} (\|\underline{u}(k)\|_R^2 + \|\underline{x}(k)\|_Q^2)$$

S.a: $\underline{x}(k+1) = A\underline{x}(k) + B\underline{u}(k)$

Algoritmo

Passo I - $P(K) \leftarrow H$

Passo II - $k \leftarrow K-1$

Passo III - Calcular $W(k)$, $Y(k)$ e $Z(k)$ a partir das equações

$$W(k) = Q + A^T P(k+1)A$$

$$Y(k) = B^T P(k+1)A$$

$$Z(k) = R + B^T P(k+1)B$$

Passo IV - Calcule a matriz $D(k)$ com

$$D(k) = Z^{-1}(k)Y(k)$$

e armazene na memória.

Passo V - Calcule $P(k)$, onde

$$P(k) = W(k) - Y^T(k) Z(k) Y(k)$$

Passo VI - Testar se $k = 0$

SIM \rightarrow ir para o passo VII

NÃO \rightarrow fazer $k \leftarrow k-1$

Ir para o passo III

Passo VII - Determine a trajetória ótima do controle a partir de

$$\underline{u}(k) = -D(k)\underline{x}(k)$$

$$k = 0, \dots, K$$

Para custo terminal nulo, $H = 0 \rightarrow P(K) = 0$.

APENDICE B - SOLUÇÃO DOS SUBPROBLEMAS DO NÍVEL INFERIOR PARA O MÉTODO DECOMPOSIÇÃO ESPACIAL - COORDENAÇÃO POR PREDIÇÃO DE INTERAÇÃO

Da equação (2.36), o Hamiltoniano para o i -ésimo subsistema é:

$$H_i[\cdot] = \frac{1}{2} (\| \underline{x}_i(k) \|_{Q_i}^2 + \| \underline{u}_i(k) \|_{R_i}^2 + \underline{\beta}_i^T(k) \underline{z}_i(k) - \sum_{j \neq i}^N \underline{\beta}_j^T(k) A_{ji} \underline{x}_i(k) \quad (B.1)$$

Das equações (2.37) a (2.40)

$$\underline{x}_i(k+1) = A_{ii} \underline{x}_i(k) + B_{ii} \underline{u}_i(k) + \underline{z}_i(k) \quad (B.2)$$

$$\underline{\lambda}_i(k) = Q_i \underline{x}_i(k) + A_{ii}^T \underline{\lambda}_i(k+1) - \sum_{j \neq i}^N A_{ji}^T \underline{\beta}_j(k) \quad (B.3)$$

$$\underline{u}_i(k) = -R_i^{-1} B_{ii}^T \underline{\lambda}_i(k+1) \quad (B.4)$$

$$\text{com } \underline{\lambda}_i(K) = 0, \quad \underline{x}_i(0) = \underline{x}_{i0} \quad (B.5)$$

Substituindo (B.4) em (B.2):

$$\underline{x}_i(k+1) = A_{ii} \underline{x}_i(k) - B_{ii} R_i^{-1} B_{ii}^T \underline{\lambda}_i(k+1) + \underline{z}_i(k) \quad (B.6)$$

Seja:

$$\underline{\lambda}_i(k+1) = P_i(k+1)\underline{x}_i(k+1) + \underline{d}_i(k+1) \quad (\text{B.7})$$

Substituindo (B.7) em (B.6):

$$\underline{x}_i(k+1) = F_i(k+1)A_{ii}\underline{x}_i(k) - G_i(k+1) + F_i(k+1)\underline{z}_i(k) \quad (\text{B.8})$$

onde

$$F_i(k+1) = [I_n + B_{ii}R_i^{-1}B_{ii}^T P_i(k+1)]^{-1}$$

$$G_i(k+1) = F_i(k+1)B_{ii}R_i^{-1}B_{ii}^T \underline{d}_i(k+1)$$

Das equações (B.3), (B.7) e (B.8) podemos escrever que

$$\begin{aligned} P_i(k)\underline{x}_i(k) + \underline{d}_i(k) = Q_i \underline{x}_i(k) + A_{ii}^T \{ P_i(k+1) [F_i(k+1)A_{ii}\underline{x}_i(k) - G_i(k+1) + \\ + F_i(k+1)\underline{z}_i(k)] + \underline{d}_i(k+1) \} - \underline{\alpha}_i(k) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\text{com } \underline{\alpha}_i(k) = \sum_{j \neq i}^N A_{ji}^T \underline{\beta}_j(k)$$

Reescrevendo a equação (B.9) obtemos:

$$\begin{aligned} P_i(k)\underline{x}_i(k) + \underline{d}_i(k) = [Q_i + A_{ii}^T P_i(k+1) F_i(k+1) A_{ii}] \underline{x}_i(k) - A_{ii}^T P_i(k+1) G_i(k+1) + \\ + A_{ii}^T P_i(k+1) F_i(k+1) \underline{z}_i(k) - A_{ii}^T \underline{d}_i(k+1) - \underline{\alpha}_i(k) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

para que a igualdade seja satisfeita devemos ter:

$$P_i(k) = Q_i + A_{ii}^T P_i(k+1) F_i(k+1) A_{ii} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} \underline{d}_i(k) = -A_{ii}^T P_i(k+1) G_i(k+1) + A_{ii}^T P_i(k+1) F_i(k+1) \underline{z}_i(k) + \\ + A_{ii}^T \underline{d}_i(k+1) - \underline{\alpha}_i(k) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Seja a identidade seguinte:

$$\text{Identidade 1: } (I_n + SW^T)^{-1} = I_n - S(I_m + W^T S)^{-1} W^T$$

onde

I_n = matriz identidade $n \times n$

I_m = matriz identidade $m \times m$

S = matriz $n \times m$

T = matriz $n \times m$

Fazendo

$$S = B_{ii}$$

$$W^T = R_i^{-1} B_{ii}^T P_i(k+1)$$

então

$$\begin{aligned} F_i(k+1) &= [I_{n_i} + B_{ii} R_i^{-1} B_{ii}^T P_i(k+1)]^{-1} = \\ &= I_{n_i} - B_{ii} [I_{m_i} + R_i^{-1} B_{ii}^T P_i(k+1) B_{ii}]^{-1} R_i^{-1} B_{ii}^T P_i(k+1) \end{aligned}$$

$$F_i(k+1) = I_{n_i} - B_{ii} [R_i (I_{m_i} + R_i^{-1} B_{ii}^T P_i(k+1) B_{ii})]^{-1} B_{ii}^T P_i(k+1)$$

ou, finalmente

$$F_i(k+1) = I_{n_i} - B_{ii} [R_i + B_{ii}^T P_i(k+1) B_{ii}]^{-1} B_{ii}^T P_i(k+1) \quad (B.13)$$

o que significa, ao invés de invertermos uma matriz $n_i \times n_i$, invertemos uma matriz $m_i \times m_i$.

Então, a equação (B.11) pode ser reescrita, utilizando de (B.13):

$$P_i(k) = Q_i + A_{ii}^T [P_i(k+1) - P_i(k+1) B_{ii} (R_i + B_{ii}^T P_i(k+1) B_{ii})^{-1} B_{ii}^T P_i(k+1)] A_{ii} \quad (B.14)$$

e a equação (B.12):

$$\begin{aligned} \underline{d}_i(k) = & \left[A_{ii}^T - A_{ii}^T P_i(k+1) F_i(k+1) B_{ii}^{-1} R_i^{-1} B_{ii}^T \right] \underline{d}_i(k+1) + \\ & + A_{ii}^T P_i(k+1) F_i(k+1) \underline{z}_i(k) - \underline{\alpha}_i(k) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

A lei de controle pode ser determinada a partir das equações (B.4) (B.7), (B.8):

$$\begin{aligned} \underline{u}_i(k) = & -R_i^{-1} C_i(k+1) A_{ii} \underline{x}_i(k) + \left[R_i^{-1} C_i(k+1) B_{ii}^{-1} R_i^{-1} B_{ii}^T - R_i^{-1} B_{ii}^T \right] \underline{d}_i(k+1) - \\ & - R_i^{-1} C_i(k+1) \underline{z}_i(k) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

com

$$C_i(k+1) = \left[I_{n_i} - B_{ii}^T P_i(k+1) B_{ii} (R_i + B_{ii}^T P_i(k+1) B_{ii})^{-1} B_{ii}^T P_i(k+1) \right]$$

Consideremos a seguinte identidade:

$$\underline{\text{Identidade 2:}} \quad I - W(S + W)^{-1} = S(S + W)^{-1}$$

Fazendo

$$W = B_{ii}^T P_i(k+1) B_{ii}$$

$$S = R_i$$

e substituindo em (B.16)

$$\begin{aligned} \underline{u}_i(k) = & -V_i(k+1) A_{ii} \underline{x}_i(k) + \left[V_i(k+1) E - R_i^{-1} B_{ii}^T \right] \underline{d}_i(k+1) - \\ & - V_i(k+1) \underline{z}_i(k) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

com:

$$V_i(k+1) = [R_i + B_{ii}^T P_i(k+1) B_{ii}]^{-1} B_{ii}^T P_i(k+1)$$

$$E = B_{ii} R_i^{-1} B_{ii}^T$$

e conseqüentemente

$$P_i(k) = Q_i + A_{ii}^T H_i(k+1) A_{ii} \quad (B.18)$$

e

$$\underline{d}_i(k) = [A_{ii}^T - A_{ii}^T H_i(k+1) E] \underline{d}_i(k+1) + A_{ii}^T H_i(k+1) \underline{z}_i(k) \quad (B.19)$$

com

$$H_i(k+1) = P_i(k+1) - P_i(k+1) B_{ii} V_i(k+1)$$

Finalmente, a trajetória de $\underline{u}(k)$ pode ser determinada resolvendo-se as equações (B.18) e (B.19) no sentido inverso do estágio discreto, e utilizando-se, da equação (B.2) para a determinação da trajetória de estado, uma vez que de (B.5):

$$P_i(K) = 0 \quad , \quad \underline{d}_i(K) = 0 \quad , \quad \underline{x}_i(0) = \underline{x}_{i0}$$

Problema:

$$\text{MIN } \theta(\mu)$$

$$\underline{\mu}$$

Comentários:

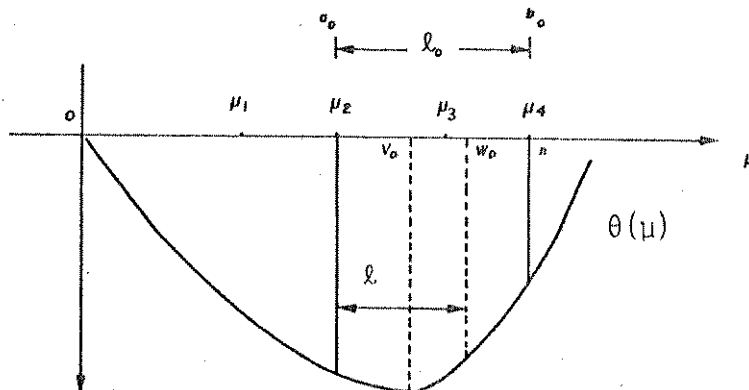
1. $\epsilon > 0$ e $\rho > 0$ são fornecidos.

$$F_1 = (3 - \sqrt{5})/2 \approx 0.38$$

$$F_2 = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0.62$$

2. Os primeiros seis passos determina um intervalo $[a_0, b_0]$ que contém o ponto de mínimo $\bar{\mu}$. Os passos seguintes reduz o comprimento do intervalo a um valor estabelecido ϵ .

3. Para o problema de maximização, basta minimizar $-\theta(\mu)$.



Passo I - Calcule $\theta(\rho)$, $\theta(0)$

Passo II - Testar se $\theta(\rho) \geq \theta(0)$

SIM \rightarrow Fazer $a_0 = 0$, $b_0 = \rho$

Ir para o passo VII.

NÃO \rightarrow Ir para o passo III.

Passo III - $i \leftarrow 1$

$\mu_1 \leftarrow \rho$

Passo IV - $\mu_{i+1} \leftarrow \mu_i + \rho$

Passo V - Calcular $\theta(\mu_{i+1})$

Passo VI - Testar se $\theta(\mu_{i+1}) \geq \theta(\mu_i)$

SIM \rightarrow Fazer $a_0 = \mu_{i-1}$, $b_0 = \mu_{i+1}$

Ir para o passo VII.

NÃO $\rightarrow i \leftarrow i+1$

Ir para o passo IV.

Passo VII - $j \leftarrow 0$

Passo VIII - $l_j \leftarrow (b_j - a_j)$

Passo IX - Testar se $l_j \leq \epsilon$

SIM \rightarrow Ir para o passo XII.

NÃO \rightarrow Ir para o passo X.

Passo X - $v_j \leftarrow a_j + F_1 l_j$

$w_j \leftarrow a_j + F_2 l_j$

Passo XI - Testar se $\theta(v_j) < \theta(w_j)$

SIM $\rightarrow a_{j+1} \leftarrow a_j$, $b_{j+1} \leftarrow w_j$

$j \leftarrow j+1$

Ir para o passo VIII.

NÃO $\rightarrow a_{j+1} \leftarrow v_j$, $b_{j+1} \leftarrow b_j$

$j \leftarrow j+1$

Ir para o passo VIII.

Passo XII - Determine

$$\bar{\mu} = (a_j + b_j)/2$$

e pare.

APENDICE D - DETERMINAÇÃO DA REGIÃO DE CONVERGÊNCIA DO ALGORITMO DECOMPOSIÇÃO ESPACIAL - COORDENAÇÃO PELO COESTADO EM FUNÇÃO DO PASSO α_v

O algoritmo de coordenação é, da equação (2.77):

$$\underline{\lambda}^{v+1}(k) = \underline{\lambda}^v(k) + \alpha_v |\underline{\lambda}^v(k) - \psi(\underline{\lambda}^v)| \quad (D.1)$$

Definindo a função de LIAPUNOV:

$$V^v = \|\underline{\lambda}^v\|^2 \quad (D.2)$$

vamos obter

$$\Delta V = V^{v+1} - V^v$$

Da equação (D.1)

$$\|\underline{\lambda}^{v+1}\|^2 = \|\underline{\lambda}^v + \alpha_v |\underline{\lambda}^v - \psi(\underline{\lambda}^v)|\|^2$$

ou

$$\|\underline{\lambda}^{v+1}\|^2 \leq \|\underline{\lambda}^v\|^2 + \alpha_v^2 \|\underline{\lambda}^v - \psi(\underline{\lambda}^v)\|^2 + 2\alpha_v \|\underline{\lambda}^v\| \|\underline{\lambda}^v - \psi(\underline{\lambda}^v)\|$$

portanto

$$\|\underline{\lambda}^{v+1}\|^2 - \|\underline{\lambda}^v\|^2 \leq \alpha_v \{2\|\underline{\lambda}^v\| \|\underline{\lambda}^v - \psi(\underline{\lambda}^v)\| + \alpha_v \|\underline{\lambda}^v - \psi(\underline{\lambda}^v)\|^2\}$$

Para que a sequência seja estável $\Delta V = \|\underline{\lambda}^{v+1}\|^2 - \|\underline{\lambda}^v\|^2 < 0$, ou

$$\alpha_v \{ 2 \|\underline{\lambda}^v\| \|\underline{\lambda} - \psi(\underline{\lambda}^v)\| + \alpha_v \|\underline{\lambda}^v - \psi(\underline{\lambda}^v)\|^2 \} < 0$$

implicando que

$$\alpha_v < - \frac{2 \|\underline{\lambda}^v\| \|\underline{\lambda} - \psi(\underline{\lambda}^v)\|}{\|\underline{\lambda}^v - \psi(\underline{\lambda}^v)\|^2}$$

ou

$$\alpha_v < - \frac{2 \|\underline{\lambda}^v\|}{\|\underline{\lambda}^v - \psi(\underline{\lambda}^v)\|^2} \quad (D.3)$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- | 1 | - MESAROVIC, M.D.; MACKO, D.; TAKAHARA, Y. Theory of Hierarchical, Multilevel, Systems New York, Academic Press, 1970.
- | 2 | - ARAFEH, S.A.; SAGE, A.P. "Multilevel Discrete Time System Identification in Large Scale Systems" Int. J. Systems Sci., 1974, vol. 5, nº 8, 753-791.
- | 3 | - SINGH, M.G.; DREW, S.A.W.; COALES, J.F. "Comparisons of Practical Hierarchical Control Methods for Interconnected Dynamical Systems" Automatica, vol. 11, p.p. 331-350, Pergamon Press, 1975.
- | 4 | - CANON, M.D.; CULLUM, C.D.; POLAK, E. Theory of Optimal Control and Mathematical Programming New York, McGraw Hill, 1970.
- | 5 | - LUENBERGER, D.G. Optimization by Vector Space Methods Wiley, 1969.
- | 6 | - MEHRA, R.K.; DAVIS, R.E. "A Generalized Gradient Method For Optimal Control Problems with Inequality Constraints and Singular Arcs" IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-17, nº 1, 1972.
- | 7 | - LASDON, L.S. Optimization Theory for Large Systems New York, 1970.
- | 8 | - MAHMOUD, M.S. "Optimal Control of Constrained Problems by the Costate Coordination Structure" Automatica, vol. 14, p.p. 31-40, Pergamon Press, 1978.
- | 9 | - TAMURA, H. "Decentralized Optimization for Distributed-Lag Models of Discrete Systems" Automatica, vol. 11, p.p. 593-602, Pergamon Press 1975.
- | 10 | - MAHMOUD, M.S. "A Class of Optimization Techniques for Linear State-Regulators" Int. J. Systems Sci., 1977, vol. 8, nº 5, 513-537.

- [11] - SINGH, M.G.; HASSAN, M.F.; TITLI, A. "Multilevel Feedback Control for Interconnected Dynamical Systems using the Prediction Principle" IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, vol. SMC-6, n° 4, April 1976.
- [12] - MAHMOUD, M.S.; VOGT, W.G.; MICKLE, M.H. "Multilevel Control and Optimization using Generalized Gradients Technique" Int. J. Control, vol. 25, n° 4, 1977.
- [13] - HAIMES, Y.Y. "Hierarchical Modeling of Regional Total Water Resources Systems" Automatica, vol. 11, p.p. 25-36, Pergamon Press, 1975.
- [14] - TITLI, A. Contribution à L'étude des Structures de Command Hiérarchisées en Vue de L'optimisation de Processus Complexes Tese de Doutorado de Estado, Universidade Paul Sabatier, Toulouse, França, 1972.
- [15] - WISMER, D.A. (Editor) Optimization Methods for Large Scale Systems with Application McGraw Hill, N.Y., 1971.
- [16] - MAHMOUD, M.S. "Multilevel Systems Control and Applications; A Survey" IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, vol. SMC-7, n° 3, 1977.
- [17] - MESAROVIC, M.D.; TAKAHARA, Y. "Coordinability of Dynamical Systems" IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-14, n° 6, 1969.
- [18] - KIRK, D.E. Optimal Control Theory, an Introduction Prentice Hall, Inc. N.J., 1970.
- [19] - SAGE, A.P. Optimum Systems Control Prentice Hall, N.J., 1967.
- [20] - AOKI, M. Introduction to Optimization Techniques McMillan, 1971.
- [21] - LUENBERGER, D.G. Introduction to Linear and Nonlinear Programming Addison, Wesley, 1973.
- [22] - HASSAN, M.F. Optimisation et Command Hierarchisées des Systèmes Dynamiques Interconnectés Tese de Doutorado de Estado, Universidade Paul Sabatier, Toulouse, França, 1978.
- [23] - BERNHARD, P. Commande Optimale, Décentralisation et Jeux Dynamiques Dunod Automatique, Paris, 1976.
- [24] - NETUSHIL, A. Theory of Automatic Control MIR Publishers, 1973.
- [25] - COHEN, G. "Comments on the Paper: Multilevel Control and Optimization using Generalized Gradients Technique" Int. J. Control, vol. 27, n° 2, 1978.

- [26] - CURY, J.E. Metodologia para Geração Automática de Programa Horário Otimizado para Linha Metroviária de São Paulo Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia de Campinas, Depto. de Engenharia Elétrica, UNICAMP, 1979.
- [27] - DYER, P.; McREYNOLDS, S.R. The Computation and Theory of Optimal Control Academic Press, 1970.
- [28] - POLAK, E. Computational Methods in Optimization: A Unified Approach Academic Press, N.Y., 1971.