

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE EDUCAÇÃO FÍSICA

METODOLOGIA PARA DESCRIÇÃO DA ORIENTAÇÃO DO CORPO HUMANO

LUCIANO ALLEGRETTI MERCADANTE

orientador: Prof. Dr. RENÉ BREZIKOFER

CAMPINAS

1994

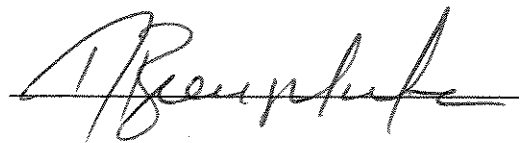
UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

LUCIANO ALLEGRETTI MERCADANTE

METODOLOGIA PARA DESCRIÇÃO DA ORIENTAÇÃO DO CORPO HUMANO

Dissertação apresentada como exigência final para obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO FÍSICA na área de concentração em Ciências do Esporte da UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS. Trabalho realizado sob orientação do Prof. Dr. René Brenzikofer.

Campinas, 03/08/1994



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE EDUCAÇÃO FÍSICA

CAMPINAS - SP

1994

COMISSÃO JULGADORA

Prof. Dr. Euclýdes Custódio Lima Filho

Euclýdes Lima Filho

Prof. Dr. Carlos Alberto Ribeiro

Carlos Alberto Ribeiro

Prof. Dr. René Brenzikofer

René Brenzikofer

Esta investigação foi conduzida no Laboratório de Instrumentação para Biomecânica da Faculdade de Educação Física, da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.

Meus agradecimentos ao Prof. Dr. René Brenzikofer pela orientação segura e pela forma como conduziu este trabalho.

Meus agradecimentos ao René, pela nossa amizade, muito obrigado.

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Euclides Custódio Lima Filho pelas importantes sugestões, pelos ensinamentos, e pelo envolvimento sempre alegre, amigo e bem humorado.

Ao Prof. Dr. Carlos Alberto Ribeiro pelas importantes sugestões, e por ter aceito participar deste trabalho em situação para mim tão difícil.

Ao Prof. Dr. João Frederico Meyer pelas importantes sugestões e pela sua disposição eterna.

Aos colegas e amigos do grupo, Sérgio, Ricardo, Mauro, Renata e Cláudio, pelas participações e presença constante durante o trabalho.

À Profa Roseli Golfetti, ao Prof. Dr. Lourenço Gallo Jr, e aos colegas Mônica, Jaqueline, Mário, Jairo, Vera, Fabiana, Patrícia, Catai e Barreto, pelas horas de convívio.

Aos funcionários Elaíde Fernandes Paladini, Regina Helena de Camargo Ferraro e Carlos Aparecido Zamai, pela paciência.

Aos funcionários da Biblioteca da FEF, na pessoa de Dulce Leocádio Inês dos Santos Augusto, pelas colaborações.

À Faculdade de Educação Física, na pessoa do seu Diretor Prof. Dr. Ademir Gebara.

Ao Prof. Dr. João Batista Freire e as funcionárias Lúgia e Tânia.

Ao meu cunhado Rodnei pela boa vontade.

À minha irmã Fábria pelos serviços prestados na área fotográfica.

À minha mãe Nara pelas orações a mim dedicadas durante este trabalho.

Dedico este trabalho e todo o meu amor à minha esposa Carla, e aos meus filhos Ana Paula e Tiago, pelo incentivo e compreensão.



## RESUMO

### METODOLOGIA PARA DESCRIÇÃO DA ORIENTAÇÃO DO CORPO HUMANO

mestrando: LUCIANO ALLEGRETTI MERCADANTE - FEF - UNICAMP

orientador: Prof. Dr. RENÉ BRENZIKOFER - IFGW - UNICAMP

A metodologia proposta neste trabalho apresenta uma solução para a definição da orientação do corpo humano, tanto em situação estática quanto durante o movimento, utilizando o conceito de elipsóide de inércia tal como é apresentado na Mecânica Clássica.

Representamos o corpo por um objeto simples e único que conserve suas principais propriedades mecânicas, através de um elipsóide homogêneo equivalente, onde os critérios dessa equivalência baseiam-se: na posição do centro de massa do corpo coincidente com o centro do elipsóide, na mesma orientação espacial dos eixos principais centrais de inércia dos dois corpos, além de valores iguais dos momentos de inércia. Portanto os dois corpos, humano e elipsóide equivalente, apresentam o mesmo elipsóide central de inércia, que é calculado neste trabalho.

A posição do centro de massa e os três eixos principais centrais de inércia são determinados pela distribuição de massa do corpo humano a partir da localização, orientação e parâmetros inerciais dos segmentos desse corpo, considerando-o como sendo formado por um conjunto de segmentos rígidos articulados entre si.

Apresentamos uma revisão de elementos da teoria: centro de massa, momento de inércia e elipsóide de inércia.

Realizamos uma aplicação bidimensional a partir de filmagem com câmera VHS e processamento computacional, objetivando ilustrar e verificar a aplicabilidade dessa teoria ao corpo humano. Nesse exemplo um sujeito realiza um salto em distância sem corrida, com os pés em ligeiro afastamento lateral. O movimento escolhido apresenta características de simetria em relação ao plano sagital, o que nos permitiu realizar essa aplicação bidimensional. O corpo humano em movimento passou a ser representado pelas suas elipses centrais de inércia, as quais mudam de forma conforme variam as posições relativas dos segmentos do sujeito durante o salto. A localização desse corpo é definida pela posição do seu centro de massa, que coincide com o centro da elipse, e sua orientação definida pela inclinação em relação a vertical do seu eixo principal central de inércia maior.

Os parâmetros inerciais dos segmentos foram obtidos pelo modelo antropométrico proposto por Zatsiorsky & Seluyanov (1983).

Este trabalho foi desenvolvido no Laboratório de Instrumentação para Biomecânica da Faculdade de Educação Física da Universidade Estadual de Campinas (LIB - FEF - UNICAMP).

## ABSTRACT

### METHODOLOGY FOR DESCRIPTION OF THE ORIENTATION OF THE HUMAN BODY

Master's thesis: LUCIANO ALLEGRETTI MERCADANTE - FEF - UNICAMP

Advisor: Prof. Dr. RENÉ BRENZIKOFER - IFGW - UNICAMP

This work presents a solution for the human body orientation in static and dynamic situations using the ellipsoid of inertia concept in the same way it is presented by Classical Mechanics.

The human body is represented by a simple and unique object that conserves the main mechanical properties of this body, its equivalent homogeneous ellipsoid, in such a way that the equivalence criterion is based on: 1) the position of the center of mass of the body which is coincident with the center of the ellipsoid; 2) the same spatial orientation of the main central axes of the two bodies and, 3) the same values of the inertial moments. Therefore the human body and the equivalent ellipsoid presented the same inertial central ellipsoid that is calculated in this work.

The position of the center of mass and of the three main inertial axes are calculated by the mass distribution in the human body taking in to account the position, orientation and inertial parameters of the segments of this body. These calculations were performed considering the human body as a set of rigid segments jointed among themselves.

A review of the basic theory is presented: the center of mass, the moment of inertia and the ellipsoid of inertia.

A bidimensional model is compared with a VHS shooting of a broad jump without running. The images were processed by a computer in order to verify the accuracy of the model when applied to the human body case. The movement chosen is symmetrical related to the sagittal plane with the allowed use of the bidimensional model. In this case the human body was represented by its central ellipsis of inertia. The ellipsis changed shape as the relative positions of the segments of the body changed during the jump. The position of the body is defined by the position of the center of mass that is coincident with the center of the ellipse and by its orientation. The orientation of the body is defined by the inclination of the main inertial central axe related to the vertical position.

The inertial parameters of the segments were calculated using the anthropometric model proposed by Zatsiorsky & Seluyanov (1983).

This work was carried out in the "Laboratório de Instrumentação para Biomecânica da Faculdade de Educação Física da Universidade Estadual de Campinas" (LIB - FEF - UNICAMP).

## SUMÁRIO

	página
1 - INTRODUÇÃO.....	1
2 - O PROBLEMA.....	6
3 - OBJETIVO.....	14
4 - MODELO TEÓRICO.....	15
4.1 - CENTRO DE MASSA.....	15
4.2 - MOMENTO DE INÉRCIA.....	16
4.3 - ELIPSÓIDE DE INÉRCIA.....	18
5 - ESCOLHA DO MOVIMENTO.....	24
6 - ESCOLHA DO MODELO ANTROPOMÉTRICO DO CORPO.....	26
6.1 - O MODELO ESCOLHIDO.....	30
7 - OBTENÇÃO DOS DADOS.....	34
7.1 - FILMAGEM.....	34
7.2 - DIGITALIZAÇÃO.....	36
7.3 - PROCESSO DE MEDIÇÃO.....	36
8 - TRATAMENTO DA IMAGEM.....	38
8.1 - MUDANÇA DO SISTEMA DE REFERÊNCIA.....	38
8.2 - CORREÇÃO DE PERSPECTIVA.....	42
9 - TRATAMENTO DOS DADOS.....	44
9.1 - LOCALIZAÇÃO DO CENTRO DE MASSA DO CORPO.....	45

	página
9.2 - ORIENTAÇÃO DO SEGMENTO E SEUS MOMENTOS DE INÉRCIA.	48
9.3 - MOMENTO DE INÉRCIA DO CORPO EM RELAÇÃO A EIXOS QUAISQUER QUE PASSAM PELO CENTRO DE MASSA.....	52
9.4 - DETERMINAÇÃO DOS EIXOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA E DEFINIÇÃO DA ELIPSE CENTRAL DO CORPO.....	55
10 - APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS.....	57
11 - ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	62
12 - CONCLUSÃO.....	73
13 - BIBLIOGRAFIA UTILIZADA.....	75
14 - ANEXOS.....	77

## 1 - INTRODUÇÃO

A Educação Física estuda o corpo humano em movimento. Na Física, a Mecânica estuda também o movimento de corpos. Podemos visualizar a Biomecânica como sendo uma área de intersecção entre a Educação Física e a Mecânica, pois seu interesse em descrever e interpretar com precisão movimentos do corpo humano faz com que ela utilize teorias da Mecânica para aplicação em movimentos do corpo humano. Basicamente a Biomecânica é uma ciência interdisciplinar e, em particular como veremos adiante, os conhecimentos desenvolvidos na Geometria também apresentam contribuições interessantes.

Segundo SYMON (1982), "A Mecânica pode ser dividida em Cinemática, Dinâmica e Estática. A Cinemática estuda a descrição dos possíveis movimentos de corpos materiais, sem considerar suas causas. A Dinâmica é o estudo das leis que determinam, entre todos os possíveis movimentos, aquele que ocorrerá realmente em cada caso específico. Em Dinâmica introduz-se o conceito de força. O problema central da Dinâmica é determinar para qualquer sistema físico, os movimentos que ocorrerão sob ação de uma dada força".

Na maioria dos estudos do movimento do corpo humano o problema é inverso. Procura-se conhecer as forças exercidas pelo aparelho motor e a estrutura para realização de um dado movimento.

Na Biomecânica, a aplicação das teorias da Mecânica, apresentou inúmeros problemas, muitos desses bastante complexos em função das características próprias do corpo humano. Um dos problemas a ser solucionado é a descrição da posição do corpo humano durante um movimento.

Descrever os movimentos do corpo humano pela Mecânica consiste basicamente em conhecer a relação entre as forças que atuam no corpo e a evolução no tempo da distribuição espacial das massas das partículas que o compõem.

SYMON (1982) diz que se pode descrever a posição de uma partícula especificando um ponto no espaço, através de três coordenadas de um sistema de referência. Diz também que "Para descrever a posição de um corpo rígido no espaço, são necessárias seis coordenadas... Existem muitas maneiras para se escolher seis coordenadas através das quais é possível especificar a posição de um corpo no espaço. Três delas são ordinariamente usadas na localização de um ponto do corpo. As três restantes determinam a orientação do corpo".



Sabemos que o corpo humano não é rígido e ainda formado de diversas partes articuladas. A complexidade desse corpo e dos seus movimentos nos leva a fazer algumas simplificações. Para isso criamos modelos físicos, adotando representações que conservem as propriedades mecânicas mais relevantes do corpo real.

A escolha dessas representações do corpo humano deve ser baseada nos objetivos que o pesquisador pretende alcançar. A Biomecânica tem trabalhado utilizando modelos físicos criados a partir de um conjunto de segmentos rígidos articulados entre si. Alguns elementos contribuem para que essa aproximação seja aceitável, como a relativa rigidez óssea e a estrutura esquelética do corpo.

Podem ser feitas várias formas de representação do modelo físico do corpo humano. Pode-se representar o corpo humano pelo seu centro de massa. Contudo esse tipo de representação apenas fornece-nos a localização do corpo sem definir sua orientação, perdendo assim suas características ligadas à rotação.

Uma vez criado um modelo físico modelo, podemos aplicar a teoria desenvolvida para movimentação de corpos rígidos articulados, aos movimentos do corpo humano. Obviamente sabemos que esse modelo será sempre uma aproximação da realidade.

Na Mecânica são propostas duas soluções para descrever a rotação de corpos rígidos. Uma através dos tensores de inércia, e outra utilizando uma representação geométrica: o elipsóide de inércia.

Segundo MARION (1970), o movimento de um corpo rígido depende da estrutura desse corpo somente em função de três parâmetros, que são os momentos principais de inércia. Desse modo, dois corpos quaisquer de mesma massa, sob o efeito das mesmas forças e que tenham os mesmos momentos principais, movimentar-se-ão exatamente da mesma maneira, independente do fato de que eles possam ter formas geométricas completamente diferentes. A forma geométrica mais simples que um corpo, tendo três momentos principais de inércia, pode assumir é de um elipsóide homogêneo. Portanto, o movimento de qualquer corpo rígido pode ser representado pelo movimento de um elipsóide equivalente. O tratamento da Dinâmica dos corpos rígidos a partir deste ponto de vista, foi proposto por POINSOT em 1834. A construção de POINSOT é algumas vezes usada para descrever o movimento de um corpo rígido de uma maneira geométrica.

Neste trabalho propomos uma representação do corpo humano que, além de descrever sua localização, também descreve sua orientação, baseada na solução que utiliza o elipsóide de inércia. Desenvolvemos uma metodologia que representa o corpo por um elipsóide homogêneo equivalente, objeto simples e único, que apresenta propriedades mecânicas para translação e para rotação idênticas as do corpo representado. Esse elipsóide homogêneo equivalente é criado a partir dos momentos principais de inércia do corpo humano a ser representado.

SYMON (1982) define corpo rígido como sendo "um sistema de partículas em que todas as distâncias existentes entre elas são constantes". Estando ou não em movimento, é certo que o corpo humano não é rígido. O nosso modelo o considera formado de segmentos rígidos onde uns se movimentam em relação aos outros. O corpo como um todo se deforma durante as atividades físicas. Assim, necessariamente o elipsóide equivalente também se deformará a medida que o corpo muda de forma. O elipsóide será um a cada instante do movimento.

Na metodologia ora em desenvolvimento, o corpo será representado pelo seu elipsóide de inércia; sua posição ficará descrita pela localização de seu centro de massa, e sua orientação definida pela inclinação no espaço dos seus eixos principais centrais de inércia. Contudo, a aplicação bidimensional que apresentamos neste trabalho, baseada num movimento simétrico com características bidimensionais, é o primeiro passo para resolver o problema mais complexo da orientação tridimensional, permitindo verificar a aplicabilidade desta metodologia ao corpo humano.

## 2 - O PROBLEMA

Nosso objetivo inicial foi buscar informações acerca do equilíbrio do corpo humano durante movimentos, e utilizar ferramentas da Mecânica para definir parâmetros que colaborassem na compreensão do que caracterizamos como equilíbrio dinâmico. Pelas dificuldades encontradas entendemos ser necessário inicialmente descrever a movimentação do corpo definindo sua posição, de forma que a descrição da orientação possa ser definida em função do tempo, pois o corpo apresenta deformações, isto é, sua distribuição de massa não é constante durante o movimento. A partir desta descrição, poderemos associar parâmetros quantitativos as situações de equilíbrio dinâmico do corpo humano.

Consideramos como equilíbrio dinâmico as situações existentes entre o equilíbrio estático e as situações que são limiares à perda do controle para continuidade ou finalização de um movimento. Essa caracterização foi por nós proposta em função da falta de definições na literatura pesquisada e dos movimentos em equilíbrio que o corpo humano pode realizar.

Encontramos na literatura definições diferentes e raramente satisfatórias sobre equilíbrio do corpo humano.

LEHMKUHL & SMITH (1989) afirmam que "no estado de equilíbrio, a soma das forças que agem sobre um corpo é igual a zero". HAY (1981) diz que "quando um corpo está em repouso, isto é, não está nem transladando, nem rodando, diz-se que está em um estado de equilíbrio". As definições acima não se referem aos movimentos com equilíbrio e são contraditórias, uma vez que a primeira delas permite apenas movimentos uniformes, e a segunda não permite movimento nenhum.

LAWS, apud HALLIDAY & RESNIK (1991), afirma que "um corpo humano está em equilíbrio quando, sob a influência da gravidade e de outras forças, não acelera a partir de uma posição estática". Essa definição trata diretamente de equilíbrio do corpo humano, mas também não se refere aos movimentos com equilíbrio.

HAY & REID (1985) disseram que "Quando a soma das forças e a soma dos momentos que agem sobre um corpo são ambas iguais a zero, diz-se que um corpo está em equilíbrio. Esta situação aparece freqüentemente quando um corpo está estacionário, o qual é tido como estado de equilíbrio estático. Quando um corpo está se movendo com velocidades linear e angulares constantes - que apenas podem ocorrer se a soma das forças e a soma dos torques que atuam sobre ele forem iguais a zero - é dito que o corpo está em equilíbrio dinâmico". Nessa definição apenas o movimento uniforme é definido como equilíbrio dinâmico. Não encontramos definições acerca da situação por nós caracterizada como equilíbrio dinâmico e por isso propusemos uma caracterização; contudo, alguns trabalhos tratam dela.

AMBLARD, ASSAIANTE & MARCHAND (1989) apresentaram um estudo sobre o controle do equilíbrio do corpo humano na locomoção, e referem-se a equilíbrio dinâmico durante a marcha. LE BOULCH (1984) cita marchar em equilíbrio como sendo uma forma de equilíbrio dinâmico, referindo-se ao desenvolvimento motor de uma criança de três anos, e as atividades práticas por ela executadas. STRANDBERG & LANSHAMMAR (1983) estudaram a biomecânica das situações de queda, através de simulações nas quais ocorre a perda do controle para continuidade ou finalização do movimento.

RASCH & BURKE (1977) disseram que "A marcha tem sido definida como uma série de catástrofes evitadas por muito pouco. Este é o processo do equilíbrio dinâmico. No equilíbrio dinâmico, diferente do equilíbrio estável, a situação se modifica constantemente, e existem relativamente poucas posições momentâneas, ou nenhuma, em que se cumpram as condições do equilíbrio estável".

Os trabalhos acima citados referem-se ao equilíbrio estático, ou aos movimentos uniformes, ou são qualitativos. De modo geral eles só tratam de translação, não aparecendo as rotações do corpo. Percebemos que é difícil definir o conceito de equilíbrio dinâmico sem falar em rotação. Verificamos que a dificuldade inicial em definir variáveis para caracterizar quantitativamente esse equilíbrio dinâmico, reside na descrição da orientação do corpo como um todo, em função das posições assumidas pelos seus diversos segmentos durante os deslocamentos.

Portanto, optamos por aplicar ao corpo humano, conceitos desenvolvidos na Mecânica que levassem em conta a distribuição da massa, definindo localização e orientação de um objeto simples que representasse o movimento do corpo como um todo, porém, que mantenha suas propriedades mecânicas.

Para caracterizar o problema, iniciaremos mostrando um esquema representativo de um corpo humano que realiza um salto ornamental chamado "um e meio mortal com duplo parafuso", conforme figura 1.

FIGURA 1

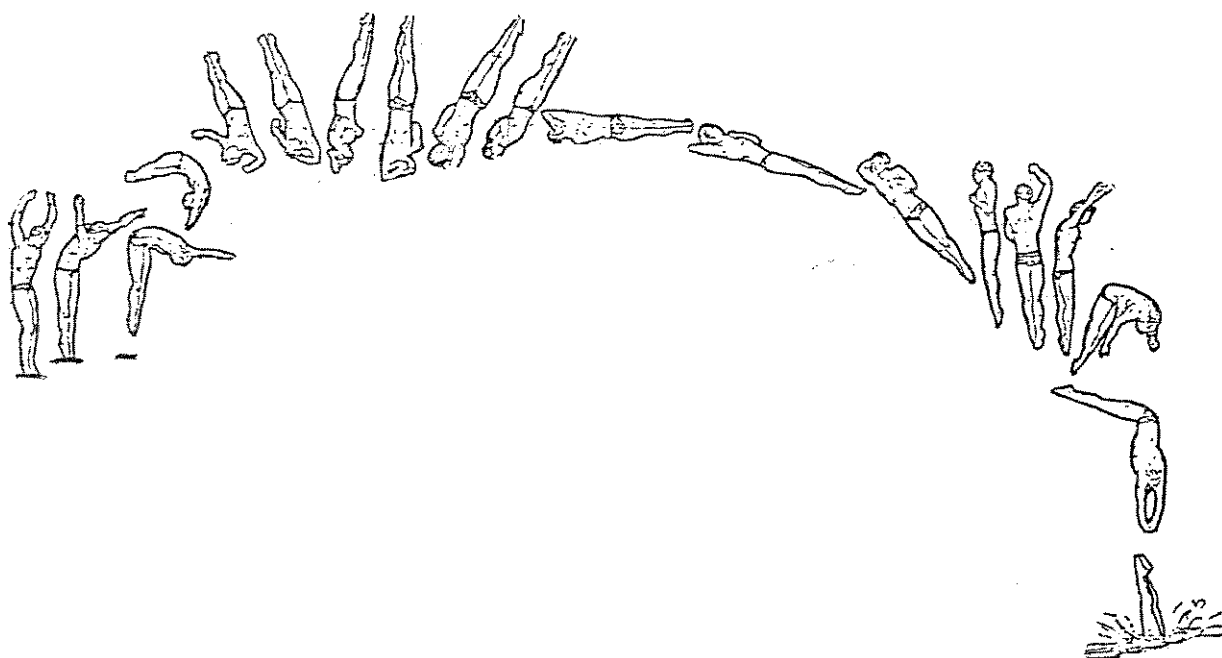
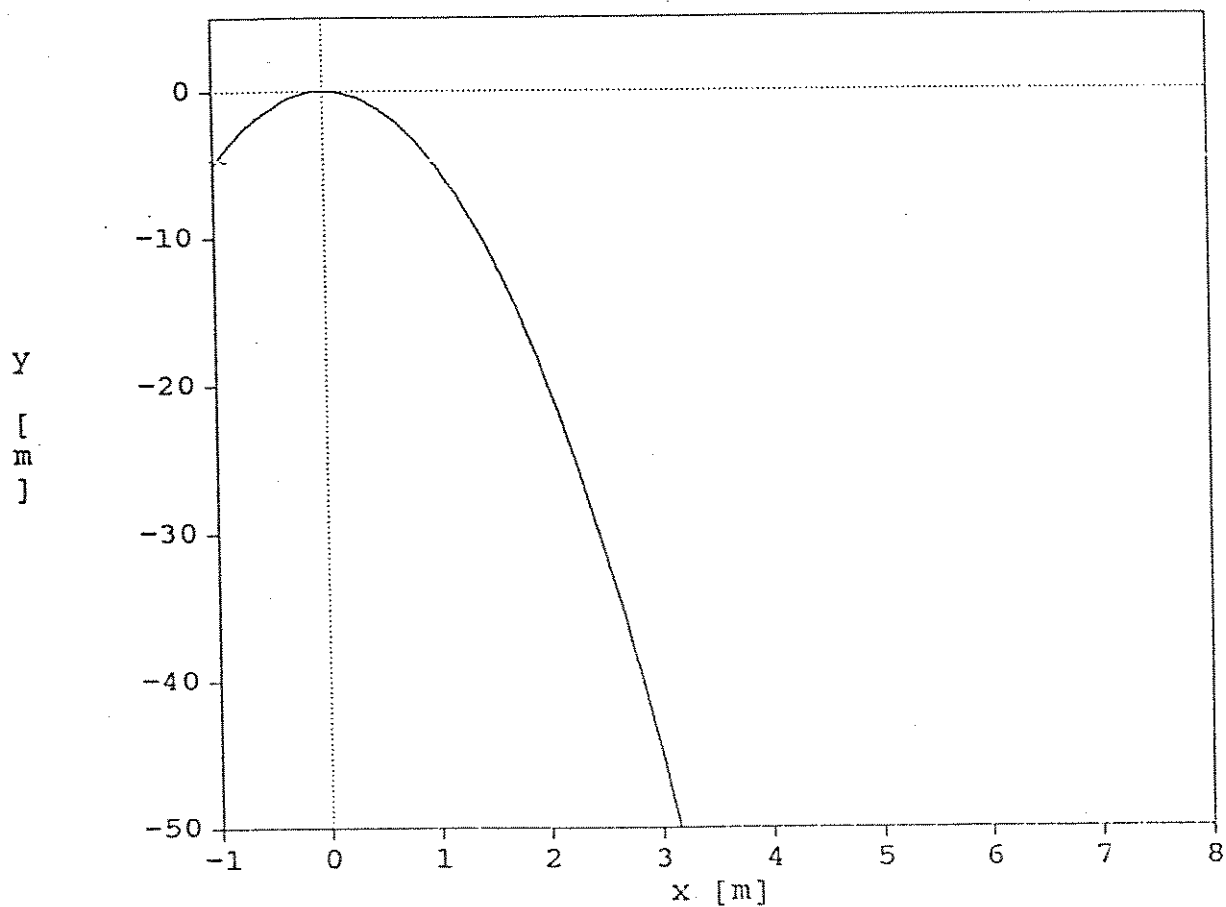


Figura do Scientific American (1986)

A trajetória do centro de massa, que é parabólica e está representada na figura 2, apresenta um objeto simples e único que descreve a translação desse corpo no plano vertical, não havendo informações sobre as rotações realizadas. Portanto, uma representação desse tipo fornece poucas informações úteis para compreendermos todos os movimentos realizados pelo sujeito.

FIGURA 2





Nosso interesse é compreender como foi realizado o "um e meio mortal com duplo parafuso" do salto executado. Essas informações não se encontram numa representação do tipo movimentação do centro de massa.

Procuramos uma representação que também apresente a orientação em função do tempo, e assim as rotações realizadas. Olhando-se o fenômeno vemos que o corpo humano se deforma e, portanto, apresenta variação na distribuição da sua massa. Interessa-nos determinar parâmetros ligados a essa variação da distribuição de massa que poderão ser utilizados para descrever as rotações. Para isso, definiremos a orientação do corpo durante o movimento.

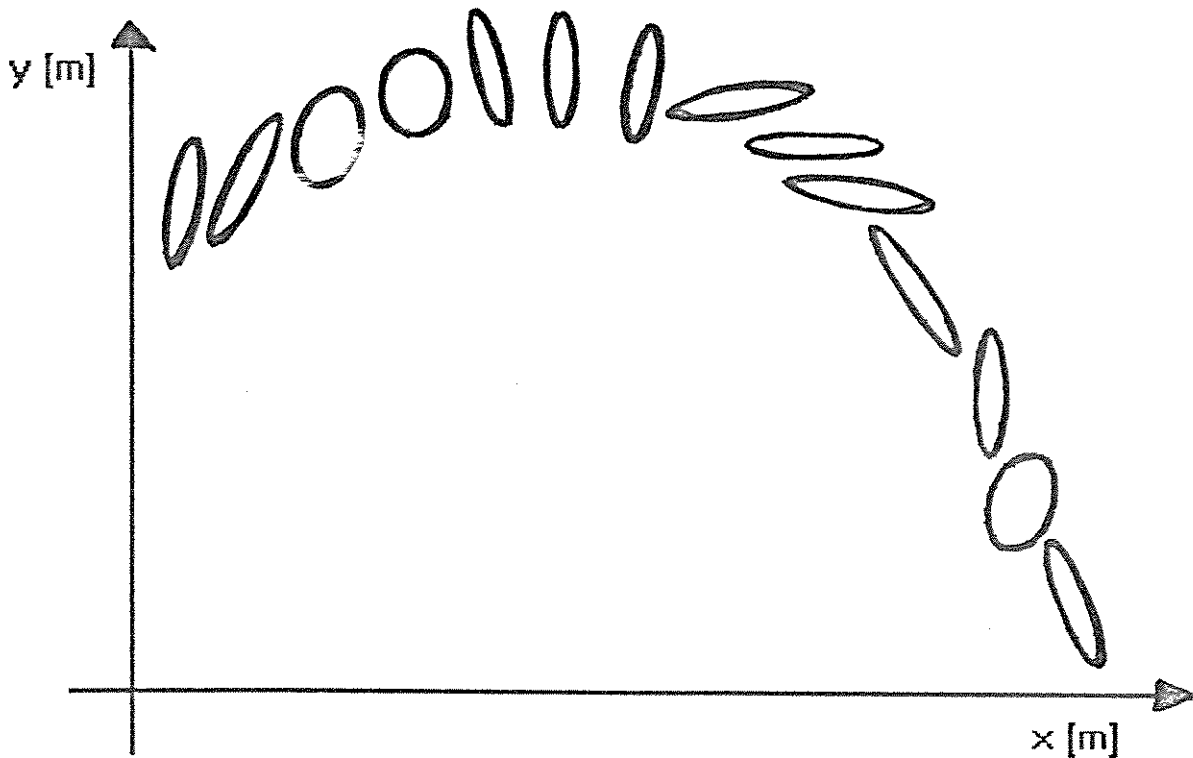
Um método utilizado em Biomecânica para definir essa orientação, consiste em escolher um sistema de eixos ortogonais, definir pontos ou segmentos no corpo caracterizando suas posições zero ou iniciais, e determinar ângulos de rotação desses pontos ou segmentos em função da posição zero ou inicial e da sua posição durante um movimento. No entanto, em se tratando de orientar o corpo humano como um todo, a escolha de pontos ou segmentos torna-se difícil. Em particular, dependendo da escolha, estes ângulos de rotação além de numerosos podem não trazer nenhuma informação útil para a mecânica do movimento.

GERVAIS & MARINO (1983) utilizaram um método a partir da teoria de tensor de inércia de um corpo rígido, para determinar a posição angular relativa do corpo humano durante um movimento. Definem uma posição zero em função de eixos coordenados, e três pontos de referência no corpo humano, trocanter maior direito e os centros de massa superior e inferior desse corpo. A posição angular relativa é determinada em função da posição zero e dos pontos de referência durante o movimento. Assim, quando consideram somente três pontos, os autores representam o corpo todo como rígido, não levando em consideração as variações na distribuição da massa durante o movimento.

Para ilustrar mostramos na figura 3 um desenho esquemático do salto "um e meio mortal com duplo parafuso" através de uma representação usando elipses de inércia, ainda aqui desenhadas à mão. Neste trabalho, essas elipses bidimensionais deverão ser calculadas para ganharem todo o significado físico procurado.

Podemos imaginar que, pela representação do salto ornamental através das elipses de inércia, estarão caracterizadas as variações da distribuição da massa do corpo pela variação das dimensões das elipses, e também a rotação em torno do seu centro de massa pelas inclinações dos eixos principais dessas elipses em relação ao eixo vertical. Assim, além da trajetória do centro de massa do corpo poderemos representar as rotações do corpo em torno do centro de massa, e a sua orientação em função do tempo.

FIGURA 3



Dessa forma pretendemos descrever a posição do corpo humano no espaço localizando o centro de massa desse corpo e orientando-o pelos eixos principais centrais de inércia. Neste trabalho apresentamos a metodologia e a realização de uma aplicação bidimensional, descrevendo o corpo humano em movimento durante um salto.

### 3 - OBJETIVO

Desenvolver uma metodologia para representar o corpo humano e seu movimento por um objeto simples e único: o elipsóide central de inércia.

Definir sua posição pela localização do seu centro de massa, e sua orientação pela inclinação em relação ao eixo vertical, dos seus eixos principais centrais de inércia.

Caracterizar a distribuição da massa do corpo pela forma do seu elipsóide representativo.

Nessa fase inicial de desenvolvimento, criamos procedimentos para movimentos que possam ser considerados bidimensionais.

## 4 - MODELO TEÓRICO

Veremos aqui que pela Mecânica é útil definir um elipsóide representativo de um corpo, pois este apresenta propriedades geométricas interessantes para a Biomecânica. Pretendemos apresentar didaticamente as teorias utilizadas, ligadas à Mecânica e à Geometria, através dos conceitos de centro de massa, momento de inércia e elipsóide de inércia. Convencionamos usar **negrito** para designar vetores.

### 4.1 - CENTRO DE MASSA

Segundo SYMON (1982), "O centro de massa de um sistema de partículas move-se como uma única partícula cuja massa é a massa total do sistema, submetida a uma força igual à força externa total que age sobre o sistema".

O centro de massa de um sistema é o ponto definido pelo vetor-posição "**r**", que satisfaz à relação:

$$\mathbf{r} = \frac{1}{m} \sum m_i \mathbf{r}_i \quad (1)$$

onde " $m_i$ " e " $r_i$ " representam respectivamente a massa e o vetor-posição da partícula " $i$ ", e " $m$ " representa a massa total do sistema.

Decompondo os vetores-posição em componentes cartesianas, obtemos as três equações escalares seguintes, que são usadas para determinar as coordenadas " $x$ ", " $y$ " e " $z$ " do centro de massa de um corpo.

$$x = \frac{1}{m} \sum m_i * x_i \quad ; \quad y = \frac{1}{m} \sum m_i * y_i \quad ; \quad z = \frac{1}{m} \sum m_i * z_i \quad (2)$$

#### 4.2 - MOMENTO DE INÉRCIA

A primeira lei de NEWTON, segundo SYMON (1982), diz que "todo corpo permanece em estado de repouso ou de movimento uniforme, em linha reta, a menos que seja obrigado a mudá-lo por forças aplicadas sobre ele". Isso significa que um corpo oferece resistência a qualquer mudança no seu estado de movimento. Essa resistência é chamada de inércia. A massa representa a medida da inércia para os movimentos de translação.

Um movimento de rotação em torno de um eixo fixo qualquer depende da posição desse eixo em torno do qual o corpo gira. A Mecânica faz uma analogia entre os conceitos ligados à translação e aos ligados à rotação. Assim como na translação, na rotação em torno de um eixo fixo o corpo também oferece uma resistência às mudanças no estado de movimento. A medida dessa inércia depende do eixo "w" de rotação, e é chamada de momento de inércia, representado por " $I_w$ ", é dada por:

$$I_w = \sum m_i * r_i^2 \quad (3)$$

onde " $m_i$ " representa a massa da partícula "i", e " $r_i$ " a distância mínima dessa partícula até o eixo "w".

Suponha-se que determinemos o momento de inércia " $I_w$ " de um corpo, em relação a um eixo "w" qualquer que passa pelo seu centro de massa. Pretendemos determinar o momento de inércia desse mesmo corpo em relação a outro eixo, "w'", paralelo a "w". Pelo teorema dos eixos paralelos, definido na maioria dos livros de Mecânica, teremos " $I_{w'}$ " dado pela equação:

$$I_{w'} = I_w + m * d_{ww'}^2 \quad (4)$$

onde " $I_w$ " é o momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro de massa do corpo, " $m$ " é a massa do corpo, e " $d_{ww'}$ " é a distância entre os eixos paralelos " $w$ " e " $w'$ ".

#### 4.3 - ELIPSÓIDE DE INÉRCIA

Suponha-se que foram definidos um grande número de eixos " $w_n$ " que passam pelo centro de massa de um corpo, escolhidos de tal maneira que possibilitem "varrer" todo o espaço tridimensional.

Suponha-se também que calculamos o valor do momento de inércia do corpo em relação a todos os eixos " $w$ ". É interessante calcular o valor de  $K_n = 1/(I_{w_n})^{1/2}$ , e localizarmos em cada eixo, dois pontos " $Q_n$ ", de modo que a distância entre o centro de massa e esse ponto seja dada por " $K_n$ ".

O lugar geométrico dos pontos " $Q_n$ " assim obtidos forma uma superfície. Demonstra-se na Mecânica que essa superfície é sempre um elipsoide, cuja equação geral é dada por:

$$I_x * x^2 + I_y * y^2 + I_z * z^2 - 2xy * P_{xy} - 2yz * P_{yz} - 2zx * P_{zx} = 1 \quad \text{B}$$



eixos coordenados, e os parâmetros "P" são chamados de produtos de inércia. Demonstra-se que essa superfície é sempre um elipsóide, por serem os valores dos momentos e dos produtos de inércia sempre positivos e finitos.

Em geometria o elipsóide é uma superfície fechada no espaço tridimensional, cuja equação geral é dada por:

$$m_{11}x^2 + m_{22}y^2 + m_{33}z^2 + 2m_{12}xy + 2m_{23}yz + 2m_{31}zx + 2m_{14}x + 2m_{24}y + 2m_{34}z + m_{44} = 0 \quad (6)$$

onde os coeficientes "m" são elementos da chamada matriz invariante da superfície.

Podemos notar uma semelhança entre os termos quadráticos e lineares das equações 5 e 6, dadas pela Mecânica e pela Geometria.

Esses elipsóides tem propriedades das quais selecionamos aquelas que ajudarão a resolver o problema da orientação do corpo humano no espaço. As demonstrações dessas propriedades podem ser encontradas nos livros de geometria espacial e projetiva.

1- Todas as projeções paralelas de um elipsóide em planos, definem áreas elípticas limitadas por elipses no plano de projeção. Essa propriedade permite preparar a metodologia geral iniciando com uma aplicação bidimensional.

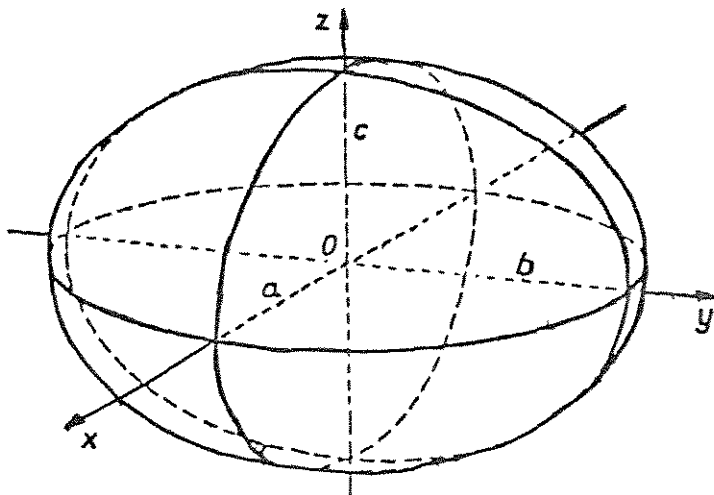
2- Definem-se três eixos para o elipsóide, que são eixos de simetria, chamados eixos principais. Dois deles "apontam" do centro do elipsóide para os pontos da superfície mais e menos distantes, e o terceiro é perpendicular aos dois anteriores. Estes três eixos definem um triedro ortogonal.

No caso do centro do elipsóide coincidir com a origem do sistema de referência, e as direções dos eixos principais do elipsóide coincidirem com os eixos "x", "y" e "z" do sistema de referência, a equação geral fica mais simples, do tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (7)$$

onde "a", "b" e "c" são segmentos orientados do centro do elipsóide para a sua superfície, na direção dos eixos "x", "y" e "z" principais do elipsóide, conforme figura 4.

FIGURA 4



Voltando ao elipsóide de inércia, equacionado pela Mecânica, ele apresenta as mesmas propriedades citadas. Em particular, quando a origem do sistema de referência coincide com o centro de massa do corpo, ele é chamado de central. Quando, além disso, os eixos coordenados do referencial escolhido coincidem com os eixos principais do elipsóide, esses eixos são chamados de eixos principais centrais de inércia e, neste caso, a equação (5) é dada por:

$$I_x * x^2 + I_y * y^2 + I_z * z^2 = 1 \quad (8)$$

Comparando as equações 7 e 8, observamos que elas são equivalentes se:

$$a = \frac{1}{\sqrt{I_x}} \quad ; \quad b = \frac{1}{\sqrt{I_y}} \quad ; \quad c = \frac{1}{\sqrt{I_z}} \quad (9)$$

onde fica claro para que definimos o ponto "Q" nesse capítulo.

Pela Geometria, podemos definir o elipsóide também pelas suas equações paramétricas, dadas por:

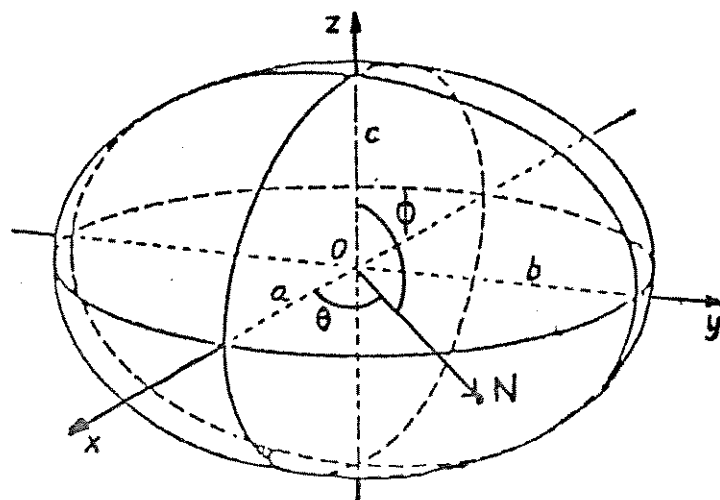
$$x = \frac{1}{\sqrt{I_x}} * \cos \theta * \sin \Phi \quad (10)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{I_y}} * \sin \theta * \cos \Phi \quad (11)$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{I_z}} * \cos \Phi \quad (12)$$

onde " $\theta$ " e " $\Phi$ " são parâmetros que determinam dois ângulos, um ângulo que varia de 0 a  $\pi$  radianos e outro que varia de 0 a  $2\pi$  radianos a partir dos eixos coordenados definindo assim todo o elipsóide, conforme figura 5.

FIGURA 5



Assim, poderemos aproveitar das propriedades definidas pela Geometria e pela Mecânica nesse nosso problema biomecânico, e o corpo humano em movimento pode ser representado pelo movimento dos seus elipsóides de inércia, utilizando a metodologia apresentada a seguir.

## 5 - ESCOLHA DO MOVIMENTO

Para este trabalho inicial em duas dimensões, escolhemos um sujeito realizando um salto em distância sem corrida, com os pés em pequeno afastamento lateral. A figura 6 apresenta 12 das 109 imagens registradas a fim de ilustrar o referido salto.

A escolha do salto foi feita baseada em critérios técnicos abaixo, que facilitaram o desenvolvimento da nossa metodologia ainda bidimensional, sendo:

- Simetria do corpo em relação ao plano sagital e, por isso, os pares de membros realizam os mesmos movimentos simultaneamente, permitindo a aproximação bidimensional.

- As rotações relevantes tanto dos segmentos quanto do corpo todo são realizadas em torno de eixos com direção transversal.

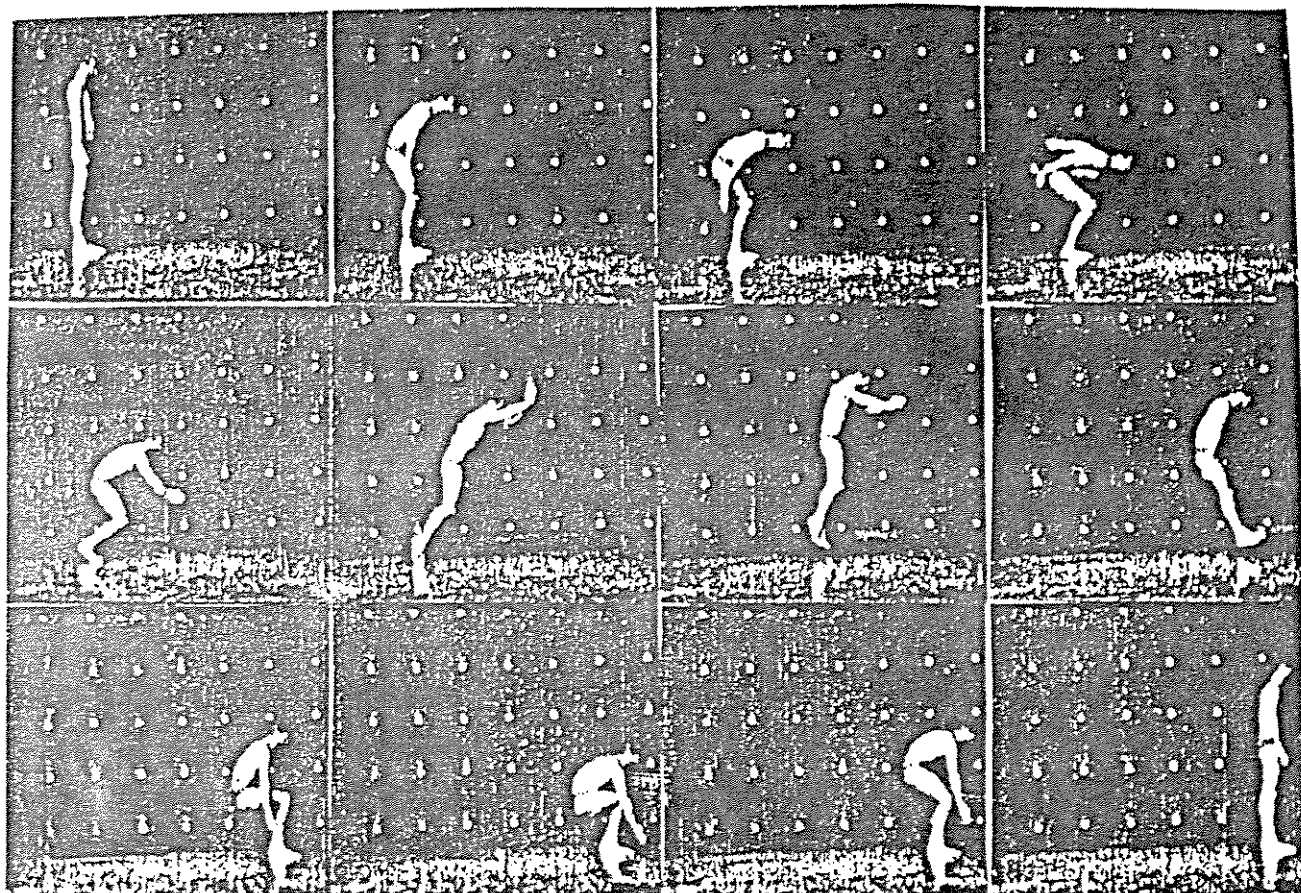
- Início e fim do movimento bem definidos por uma mesma posição em pé, em equilíbrio estático.

- Os princípios mecânicos envolvidos são simples, pois temos apenas duas forças externas agindo no sistema, que são a força peso e a força de reação do solo, desprezando-se a resistência do ar.

- Fase aérea relativamente bem definida, que permitirá verificar se é parabólica a trajetória do centro de massa do corpo, pois este estará em queda livre.

- Curta duração com tempo de realização entre três a quatro segundos, o que limita o número de imagens a serem analisadas.

FIGURA 6



A figura acima corresponde as imagens 1, 26, 30, 38, 48, 52, 58, 64, 70, 77, 91 e 109, colocadas em sequência, de cima para baixo e da esquerda para a direita.

## 6 - ESCOLHA DO MODELO ANTROPOMÉTRICO DO CORPO HUMANO

A definição do modelo antropométrico do corpo humano a ser usado em um trabalho deve ser feita em função dos objetivos a serem alcançados. O interesse futuro deste trabalho é estudar o corpo humano num espaço real, isto é, tridimensional.

Quando se cria um modelo antropométrico do corpo humano, considerando-o como uma estrutura de segmentos rígidos articulados entre si, deve-se também determinar os parâmetros inerciais dos segmentos desse corpo, parâmetros esses que dependem exclusivamente da distribuição da massa e, portanto, variam de sujeito para sujeito. Esses dados são indispensáveis para determinação de variáveis dinâmicas a partir da Cinemática do movimento do corpo. Um trabalho completo sobre um modelo deve apresentar os valores da massa, da posição do centro de massa e dos momentos principais de inércia de cada um dos segmentos definidos.

MERCADANTE & BRENIKOFER (1992) fizeram uma ampla busca na literatura disponível, que possibilitou catalogar e classificar 63 trabalhos sobre métodos de obtenção dos parâmetros inerciais do corpo humano. Em virtude da problemática envolvida, cabe aqui uma explanação sobre esses problemas.



Percebemos que não há nenhum método disponível que possa ser aplicado diretamente no sujeito de interesse da pesquisa para a obtenção dos parâmetros inerciais individuais completos.

A classificação proposta por MERCADANTE & BREZIKOFER (1992), evidência cinco tipos de métodos de obtenção desses parâmetros inerciais:

- Métodos de proporção: precursores em relacionar medidas do corpo humano, apresentam relações de comprimento entre os segmentos e o corpo todo.

- Métodos de imersão: baseados no volume de líquido deslocado durante a imersão de um segmento, apresentam dados de volume e massa dos segmentos.

- Métodos dinâmicos: baseados em medidas diretas de variáveis dinâmicas e cinemáticas, apresentam em sua maioria dados de momentos principais de inércia. Alguns métodos são aplicáveis apenas em cadáveres, outros utilizam equipamentos ou metodologias complexas. Podem apresentar dados em função da média obtida entre os sujeitos estudados ou através de equações de regressão, linear ou polinomial. Essas equações procuram ajustar os parâmetros obtidos pela média ao sujeito que será analisado pelo pesquisador.

- Métodos geométricos: baseados num modelo do corpo humano composto por sólidos de geometria conhecida, consideram constantes as densidades dos segmentos, utilizam medidas diretas feitas no sujeito de interesse do pesquisador, e determinam matematicamente os valores de massa, posição do centro de massa e momentos principais de inércia dos sólidos geométricos do modelo.

HATZE (1980) propôs um modelo geométrico de 17 segmentos, onde considera as diferenças entre os sexos, as flutuações de forma dos segmentos individualmente, a densidade variável ao longo do eixo longitudinal, as variações subcutâneas de gordura e os estados de obesidade e sedentarismo, os quais chama de anormais. Calcula matematicamente os parâmetros inerciais a partir de 242 medidas diretas obtidas no sujeito de interesse do pesquisador. Entretanto, no trabalho não descreve satisfatoriamente como podemos obter essas 242 medidas, nem como considerou a densidade variável.

Métodos de irradiação: são invasivos e utilizam aparelhos sofisticados baseados na absorção de irradiação pelo segmento. Apresentam equações de regressão linear ou múltipla obtidas a partir da média dos sujeitos estudados, e fornecem dados completos dos parâmetros inerciais. Apenas dois trabalhos apresentaram dados completos.

ZATSIORSKY & SELUYANOV (1983) propuseram um modelo de 16 segmentos e utilizaram radiação de raios gamma em 100 voluntários. Mediram a absorção desses raios pelos tecidos, determinaram a distribuição da massa e a densidade dos segmentos. Consideraram a distribuição de Hidrogênio pelo corpo como homogênea, em função de este elemento apresentar uma absorção de raios Gamma atípica em relação aos outros. A partir dos dados obtidos apresentaram equações de regressão múltipla para obtenção dos valores de massa, posição do centro de massa e momentos principais de inércia, em função apenas da altura e do peso, ou de 32 medidas diretas do sujeito de interesse da pesquisa.

Existem dificuldades gerais para todos os métodos. Os modelos antropométricos mais simples dividem o corpo em 10 partes, outros em até 18 partes. Para definir a movimentação geral dessas partes, são associados de 60 a 150 graus de liberdade, sendo, portanto, necessário resolver um sistema de 60 a 150 equações. A inacessibilidade aos tecidos internos, dificulta o conhecimento da distribuição da massa desses tecidos com densidade variável, e também impede acesso ao centro de rotação instantâneo das articulações, pois sua posição relativa pode variar durante o movimento.

## 6.1 - O MODELO ESCOLHIDO

O modelo proposto por ZATSIORSKY & SELUYANOV (1983) é utilizado em nosso trabalho. Consiste em 16 segmentos rígidos articulados conforme figura 7.

FIGURA 7

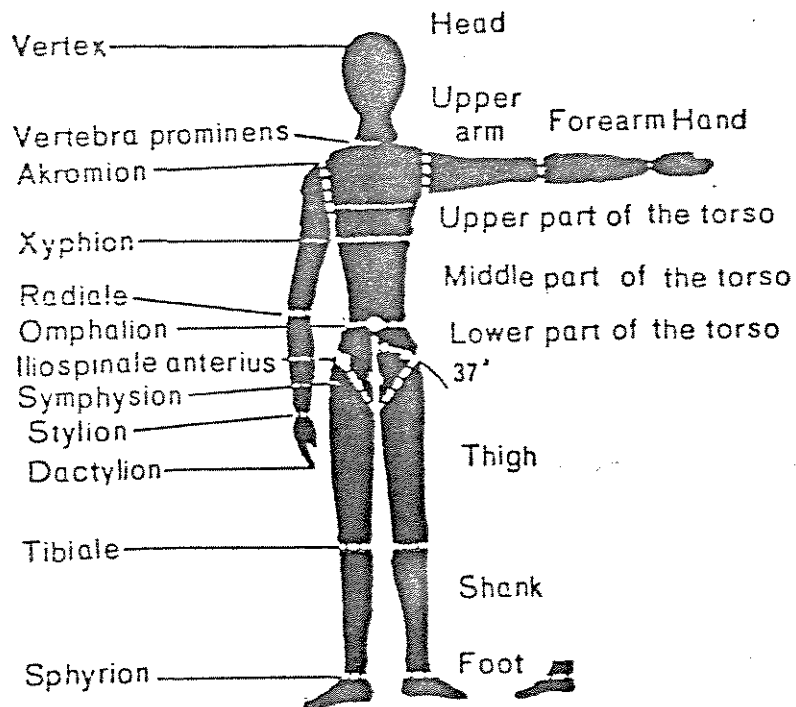


Figura de ZATSIORSKY & SELUYANOV (1983).

Os 100 sujeitos do trabalho apresentado por ZATSIORSKY & SELUYANOV (1983) apresentaram uma média de peso e altura respectivamente de 73,0 Kg e 174,1 cm, com desvios padrões de 9,1 Kg e 6,2 cm. O nosso sujeito apresentou peso corporal de 80,0 Kg e altura de 178,0 cm, portanto dentro da faixa apresentada nesse modelo. Os valores de peso e altura foram aplicados nas "equações de regressão múltipla", assim chamadas pelos autores e que são equações lineares de primeiro grau em função de duas variáveis, nos fornecendo os seguintes parâmetros inerciais, conforme tabela 1 abaixo.

TABELA 1

segmento i	$MS_i$ (Kg)	$PCM_i$ (%)	$I_{Ai}$ (Kg.m <sup>2</sup> )	$I_{Li}$ (Kg.m <sup>2</sup> )	$I_{Ti}$ (Kg.m <sup>2</sup> )
cabeça	5.21	50.02	286.06	213.69	310.34
tronco superior	12.71	50.66	1956.94	1666.96	811.06
tronco médio	13.25	45.02	1511.64	1427.80	975.00
tronco inferior	9.02	35.41	769.90	700.93	622.32
braço	1.27	57.26	72.52	14.48	67.43
ante-braço	502.18	55.02	143.24	43.80	129.05
mão	0.48	63.09	14.75	6.01	9.74
coxa	11.50	45.49	2291.58	484.66	2296.32
perna	3.46	40.47	442.34	73.62	428.59
pé	1.09	55.85	49.83	11.70	45.32

onde:

"i" representa o número do segmento.

"MS<sub>i</sub>" representa a massa do segmento i.

"PCM<sub>i</sub>" representa a fração da posição do centro de massa em função do comprimento do segmento i.

"I<sub>A</sub>" representa o momento de inércia do segmento i em relação ao seu eixo ântero-posterior.

"I<sub>L</sub>" representa o momento de inércia do segmento i em relação ao seu eixo longitudinal.

"I<sub>T</sub>" representa o momento de inércia do segmento i em relação ao seu eixo transversal.

No modelo utilizado para o cálculo destes parâmetros inerciais dos segmentos do corpo do nosso sujeito, os pés, diferente dos outros segmentos, não apresentam o eixo longitudinal coincidente com o eixo vertical escolhido para o cálculo da inclinação, e sim coincidente com o eixo horizontal.

Para localizar o segmento nas imagens foi necessário definir 14 pontos que caracterizaram os 16 segmentos em duas dimensões, a partir do modelo proposto, (ver figura 7).

- 1 - Ponto inicial da cabeça.
- 2 - Ponto final da cabeça e inicial do tronco superior.
- 3 - Ponto final do tronco superior e inicial do tronco médio.
- 4 - Ponto final do tronco médio e inicial do tronco inferior.
- 5 - Ponto final do tronco inferior.
- 6 - Ponto inicial dos braços.
- 7 - Ponto final dos braços e inicial dos antebraços.
- 8 - Ponto final dos antebraços e inicial das mãos.
- 9 - Ponto final das mãos.
- 10 - Ponto inicial das coxas.
- 11 - Ponto final das coxas e inicial das pernas.
- 12 - Ponto final das pernas.
- 13 - Ponto inicial dos pés.
- 14 - Ponto final dos pés.

Esses 14 pontos terão suas coordenadas medidas em cada uma das 109 imagens disponíveis neste trabalho, e serão reprojctadas para obtermos as coordenadas no espaço real.

## 7 - OBTENÇÃO DOS DADOS

A obtenção dos dados iniciou-se com o registro em uma câmera, de um salto em distância sem corrida, realizado com os pés em ligeiro afastamento lateral, descrito no capítulo 5. Posteriormente foi feita a digitalização dos quadros obtidos na filmagem, formando uma seqüência de arquivos de imagens digitais. Essa seqüência de imagens é importada para a tela de uma estação de trabalho, onde são realizadas marcações manuais dos pontos de interesse.

### 7.1 - FILMAGEM

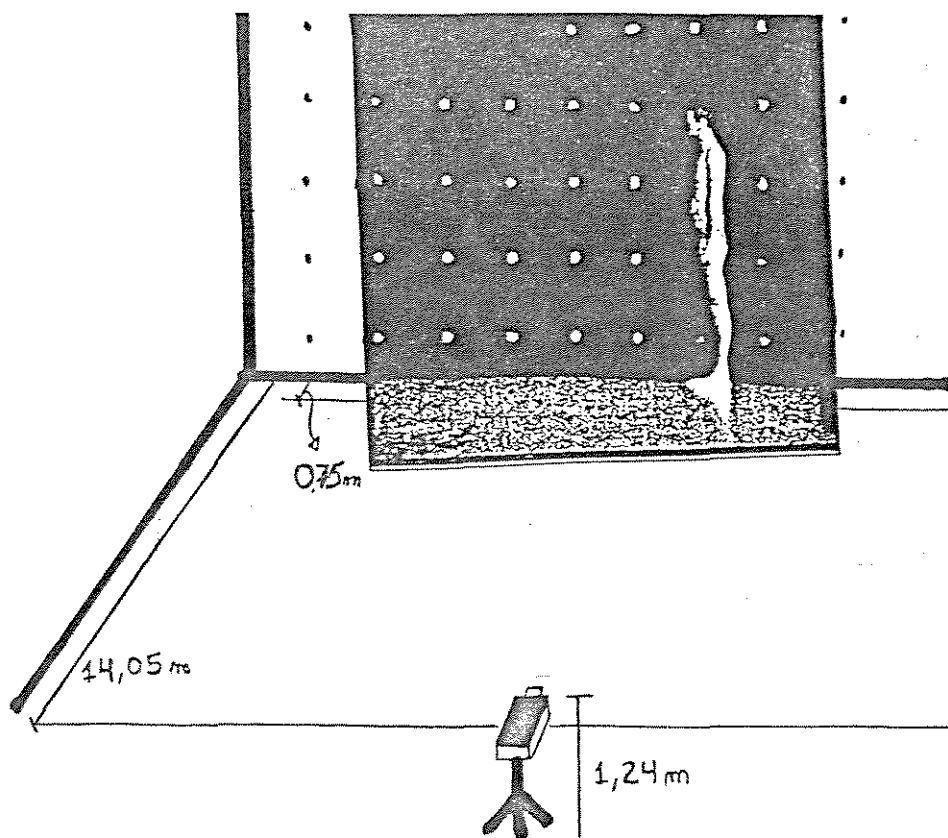
A filmagem foi realizada em 13 de janeiro de 1992 no cenário do Laboratório de Instrumentação para Biomecânica localizado no ginásio de esportes da Faculdade de Educação Física da Universidade Estadual de Campinas. O cenário consiste em um espaço com fundo negro onde foram colocadas marcas de referência dispostas regularmente com localizações conhecidas.

Utilizamos uma câmera VHS marca Sharp modelo VL-L170, um tripé marca "first tripod", uma fita TDK e iluminação complementar.



A câmera teve seu ajuste de branco e de foco determinados automaticamente com o sujeito parado no centro do cenário, e bloqueados durante a realização do salto. O "shutter", que controla a abertura da câmera, foi ajustado para 1/500 segundos para garantirmos melhor nitidez nas imagens. A câmera foi colocada sobre o tripé num eixo perpendicular à parede de referência, ficando o seu centro ótico a uma altura de 1,24 metros do solo, e a uma distância de 14,05 metros do fundo do cenário. O sujeito realizou o salto com deslocamento paralelo ao fundo e perpendicular ao eixo ótico, estando o plano lateral visto na imagem a 0,75 metros desse fundo. A figura 8 mostra um esquema do local da filmagem.

FIGURA 8



## 7.2 - DIGITALIZAÇÃO

Para a operação de digitalização das imagens obtidas, foi usado um conversor analógico-digital marca **IMAGEWISE**, modelo **DT01-KIT**, fornecido pela **CIRCUIT CELLAR Inc.**, montado no nosso laboratório. Basicamente, o conversor utiliza apenas as linhas ímpares, num mínimo de 244, e para cada uma delas fornece 256 pixels com 64 tonalidades diferentes de cinza. Suas especificações completas estão detalhadas em CIARCIA (1987).

Através da conversão obtivemos 109 imagens digitais do registro completo do nosso salto, uma a cada 1/30 segundos do movimento real.

## 7.3 - PROCESSO DE MEDIÇÃO

Uma vez digitalizadas, as 109 imagens foram convertidas do padrão DOS para o padrão UNIX, a fim de serem armazenadas na estação de trabalho gráfica **SUN SPARCstation 1+**, dos Laboratórios da FEF-UNICAMP. Essa conversão foi feita pelo software "**MTOOLS**", de domínio público.

Na estação de trabalho utilizamos o programa "PIXEL" desenvolvido por MUÑOZ & BREZIKOFER (1992). O programa lê os arquivos e projeta as imagens uma a uma numa janela própria da estação. Para marcação dos pontos iniciais e finais dos segmentos, posiciona-se o cursor controlado por "mouse" no local estimado visualmente pelo operador, e pressiona-se uma tecla do "mouse", ficando registradas as coordenadas do local. Obtivemos assim, as coordenadas desses pontos iniciais e finais no sistema de referência em linhas e colunas da tela da estação de trabalho, que chamaremos de sistema tela. A origem do sistema tela localiza-se no canto superior esquerdo da tela do computador.

Para cada uma das 109 imagens, foram registradas duas coordenadas no sistema tela, de cada um dos 14 pontos necessários para caracterizar o modelo antropométrico escolhido. Registramos também, três marcas de referência do cenário com objetivo de definir um referencial ortogonal tendo sua origem junto ao centro da imagem. O tratamento destes resultados numéricos iniciais é objeto do próximo capítulo.

## 8 - TRATAMENTO DA IMAGEM

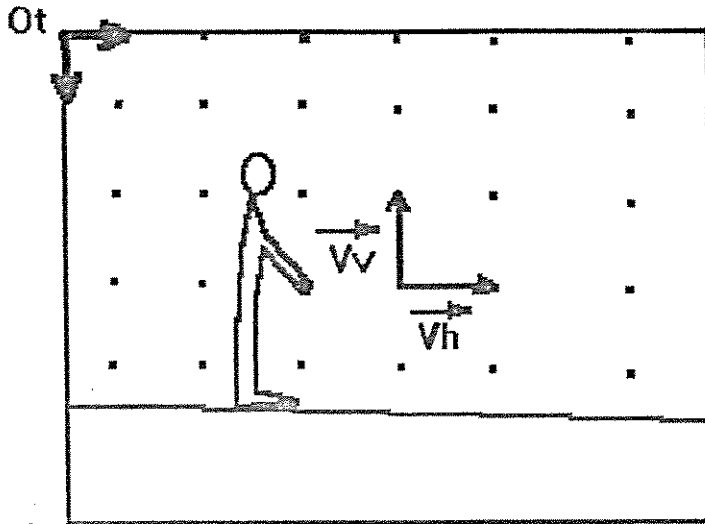
Nesse capítulo vamos descrever os tratamentos realizados nas imagens registradas. Já dispomos das coordenadas de tela de 14 pontos anatômicos e de três marcas de referência obtidas a partir das medições. Os pontos anatômicos representam os pontos iniciais e finais dos segmentos em cada uma das imagens.

Definimos um novo sistema de referência ligado à cena presente na imagem, com origem em uma das marcas de referência. Deslocamos a origem do sistema, corrigimos a inclinação em relação ao eixo vertical encontrada na câmera, e transformamos as coordenadas de pixel para metros. Realizaremos ainda as correções do efeito de perspectiva aplicadas às coordenadas dos pontos anatômicos medidos, uma vez que estão mais perto da câmera que o plano do novo sistema de referência.

### 8.1 - MUDANÇA DO SISTEMA DE REFERÊNCIA

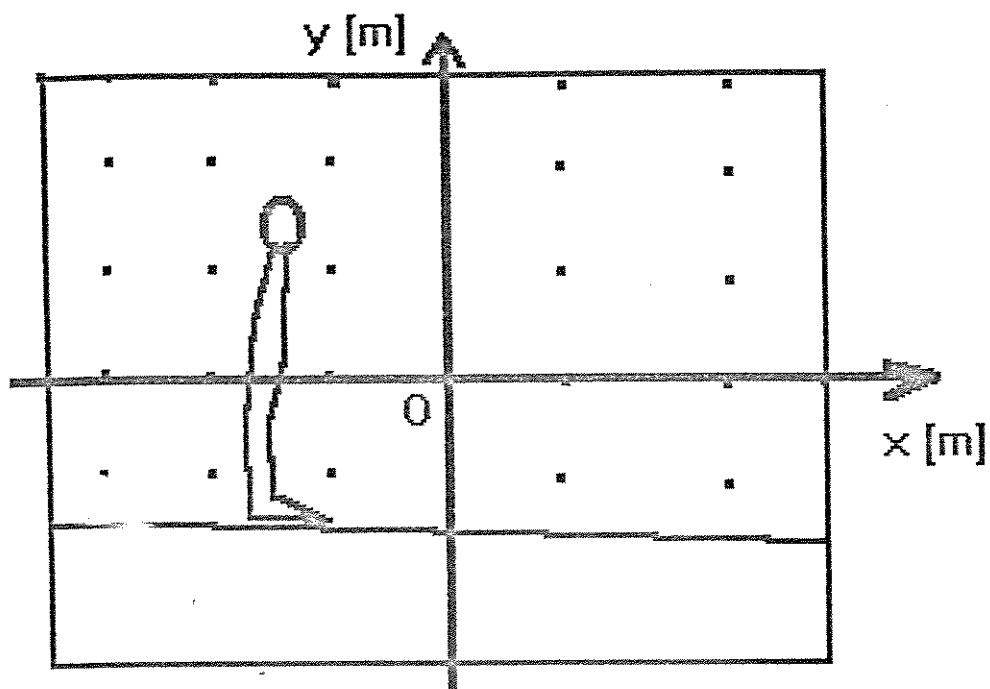
Em todas as imagens foram contruídos dois vetores de referência, um horizontal e outro vertical, utilizando as três marcas de referência conforme figura 9.

FIGURA 9



Escolhemos a nova origem como sendo o ponto coincidente com a marca de referência mais central da cena, para onde a câmera foi apontada. Subtraímos das coordenadas dos pontos de interesse no sistema tela, as coordenadas da nova origem já medidas na imagem. Uma vez que as marcas de referência foram alinhadas utilizando um fio de prumo, consideramos os vetores verticais de referência como paralelos à direção da força gravitacional, e adotamos sua direção para definir o eixo vertical do sistema de referência utilizado. O sentido dos eixos coordenados estão identificados na figura 10.

FIGURA 10



Encontramos um ângulo de inclinação das imagens, de 2.14 graus, baseado no histograma dos ângulos detectados entre os vetores verticais de referência de cada imagem e o eixo coordenado  $y$  do sistema tela. A rotação das imagens foi feita pelo ângulo de inclinação encontrado, utilizando as seguintes relações:

$$x_1 = x_{t1} * \cos \theta + y_{t1} * \sin \theta \quad (13)$$

$$y_1 = - x_{t1} * \sin \theta + y_{t1} * \cos \theta \quad (14)$$

onde " $\theta$ " é o ângulo de rotação entre os sistemas de coordenadas, " $x_{t1}$ " e " $y_{t1}$ " são as coordenadas obtidas no processo de medição, e " $x_1$ " e " $y_1$ " são as novas coordenadas dos mesmos pontos.

Para transformarmos as unidades das coordenadas de interesse de pixel para metros, determinamos um fator de conversão vertical e outro horizontal. As marcas de referência do fundo do cenário, foram feitas a uma distância vertical e horizontal de 0,5 metros entre cada uma delas, valor esse que representa o módulo dos vetores de referência em metros.

Utilizando a média dos módulos dos vetores de referência na unidade pixel do sistema tela, obtivemos os seguintes fatores de conversão:

Fator de conversão horizontal,  $F_x = 0,0147$  metro/pixel

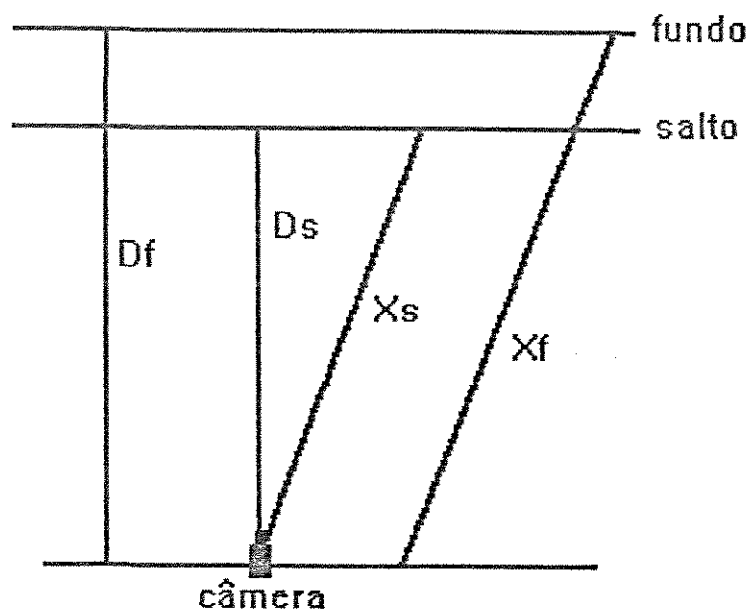
Fator de conversão vertical,  $F_y = 0,0122$  metro/pixel

Pudemos obter as coordenadas dos pontos de interesse na unidade metros do novo sistema de referência, multiplicando os valores das coordenadas no sistema tela, pelos fatores de conversão.

## 8.2 - CORREÇÃO DE PERSPECTIVA

A figura 11 mostra a planta do local onde foi realizada a filmagem.

FIGURA 11



onde " $D_s$ " representa a distância da câmara ao plano lateral do sujeito que está mais próximo dela, " $D_f$ " a distância da câmara ao fundo, " $X_s$ " a distância horizontal medida na direção do salto, e " $X_f$ " a distância horizontal medida no fundo.



Por semelhança de triângulos, obtivemos um fator de correção de perspectiva horizontal e vertical,  $F_{cp} = 0.9466$ .

## 9 - TRATAMENTO DOS DADOS

Como foi apresentado (ver tabela 1), tivemos os valores dos parâmetros inerciais do nosso sujeito para cada um dos segmentos representados, a partir do modelo antropométrico escolhido inicialmente. Utilizando as coordenadas em metros dos pontos iniciais e finais de cada segmento em cada imagem, iniciamos os processos de cálculo que descreveremos neste capítulo. Serão descritos os processos para uma imagem, sabendo que o programa desenvolvido em nosso trabalho os executa para todas elas. Resumindo, vamos então:

- Localizar o centro de massa de cada segmento e, a partir deles, o centro de massa do corpo.
- Detectar a orientação de cada segmento e determinar o momento de inércia deles em relação a qualquer eixo que passe pelo seu centro de massa.
- Determinar o momento de inércia de cada segmento em relação a 360 eixos de "varredura" a partir do eixo vertical, que passam pelo centro de massa do corpo, e determinar os momentos de inércia desse corpo em relação a esses 360 eixos.
- Determinar pelos valores máximos e mínimos, quais desses 360 eixos são os eixos principais da elipse central de inércia, e assim definir a elipse central de inércia do corpo.

A seguir detalharemos como foi feita cada uma dessas etapas descritas acima. Utilizaremos algumas convenções de notação que estão descritas abaixo:

$i$  = Índice de cada segmento do corpo.

$S_i$  = Vetor que representa cada segmento "i" do corpo.

$SI_i$  = Ponto inicial do segmento "i".

$SF_i$  = Ponto final do segmento "i".

$CMS_i$  = Vetor que localiza o centro de massa do segmento "i".

CMC = Ponto que representa o centro de massa do corpo.

CMC = Vetor que localiza o centro de massa do corpo.

MC = Massa do corpo.

$\theta_i$  = ângulo de inclinação do segmento "i" em relação ao eixo vertical.

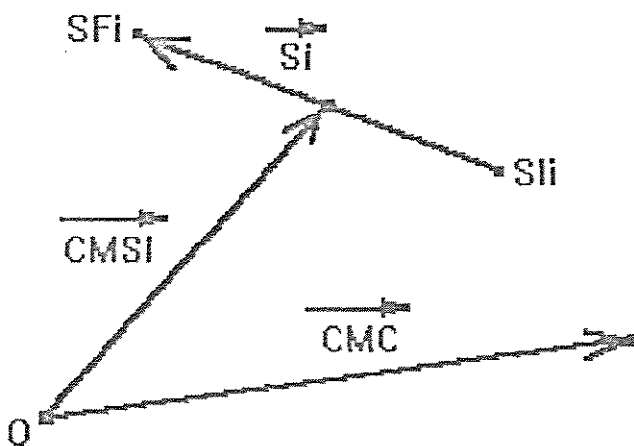
$IS_{iw}$  = Momento de inércia do segmento "i", em relação a um eixo "w" qualquer que passe pelo seu centro de massa.

## 9.1 - LOCALIZAÇÃO DO CENTRO DE MASSA DO CORPO

Para cada uma das 16 partes do modelo antropométrico, definimos um vetor segmento, representado por " $S_i$ ", determinado pelos pontos inicial e final deste segmento, chamados respectivamente " $SI_i$ " e " $SF_i$ ".

Consideramos que o centro de massa do segmento, localizado pelo vetor posição " $CMS_i$ ", encontra-se ao longo do vetor " $S_i$ ", em uma posição conhecida a partir do modelo adotado. Também a partir do modelo conhecemos a massa desse segmento. A figura 12 mostra um segmento "i" numa posição qualquer, e o centro de massa "CMC" do corpo.

FIGURA 12



As coordenadas do vetor " $S_i$ " são dadas por:

$$S_{ix} = SF_{ix} - SI_{ix} \quad (15)$$

$$S_{iy} = SF_{iy} - SI_{iy} \quad (16)$$

Então, conforme ZATSIORSKY & SELUYANOV (1983), as coordenadas do centro de massa do segmento "i", representado pelo vetor posição " $CMS_i$ " são dadas por:

$$CMS_{ix} = SI_{ix} + S_{ix} * PCM_i \quad (17)$$

$$CMS_{iy} = SI_{iy} + S_{iy} * PCM_i \quad (18)$$

onde cada valor " $PCM_i$ " foi dado na tabela 1.

As coordenadas do vetor posição " $CMC$ ", calculadas a partir das equações (1) e (2), são dadas por:

$$CMC_x = \left(\frac{1}{MC}\right) * \sum (MS_i * CMS_{ix}) \quad (19)$$

$$CMC_y = \left(\frac{1}{MC}\right) * \sum (MS_i * CMS_{iy}) \quad (20)$$

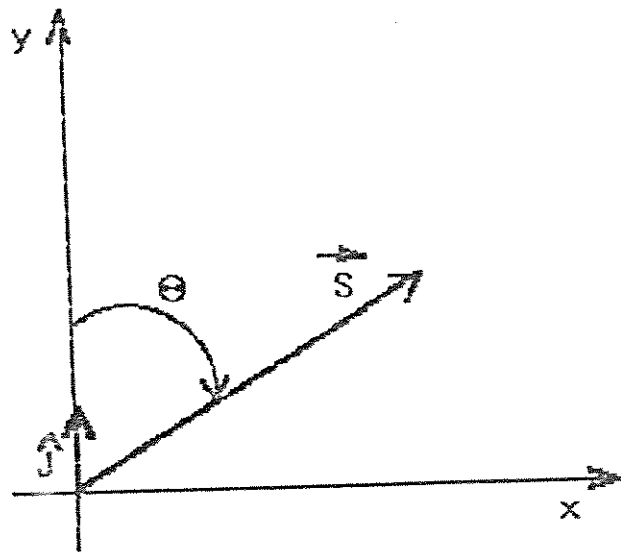
sendo " $MS_i$ " a massa de cada segmento dada na tabela 1, e " $MC$ " a massa total do corpo.

Assim, o centro de massa representará a localização deste corpo durante o movimento.

## 9.2 - ORIENTAÇÃO DO SEGMENTO E SEUS MOMENTOS DE INÉRCIA

Para definir a orientação do segmento no plano, basta definirmos o ângulo de inclinação do vetor " $S$ " em relação ao versor " $j$ " que define a direção do eixo vertical de um sistema de referência, conforme a figura 13.

FIGURA 13



Chamamos de inclinação do vetor " $S$ ", o ângulo " $\theta$ ", definido a partir do versor " $j$ " até esse vetor " $S$ ", no sentido horário.

Para calcular o ângulo de inclinação, determinamos o produto escalar e o produto vetorial entre os vetores " $j$ " e " $S$ ".

O produto escalar entre os vetores "j" e "S", lembrando que o módulo de um versor é sempre unitário, é dado por:

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{s} = |\mathbf{s}| \cdot \cos \alpha \quad (21)$$

onde " $\alpha$ " é um ângulo entre os vetores "S" e "j".

O mesmo produto escalar pode ser dado também por:

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{s} = 0 \cdot S_x + 1 \cdot S_y \quad (22)$$

Igualando-se as duas equações acima teremos o ângulo " $\alpha$ " como sendo dado por:

$$\alpha = \arccos \left( \frac{S_y}{|\mathbf{s}|} \right) \quad (23)$$

Obtivemos assim dois ângulos que chamaremos de " $\alpha_1$ " e " $\alpha_2$ ".

Para sabermos se  $\theta = \alpha_1$  ou  $\theta = \alpha_2$ , fizemos o produto vetorial entre os dois mesmos vetores, que nos fornece um vetor perpendicular a "j" e a "S", dado por:

$$\mathbf{j} \times \mathbf{s} = |\mathbf{s}| \cdot \sin \beta \cdot \mathbf{k} \quad (24)$$

onde " $\beta$ " representa um ângulo entre os vetores "S" e "j", e "k" o versor que define a direção do vetor encontrado no produto vetorial.

O mesmo produto vetorial é dado também por:

$$s_x \hat{j} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ s_x & s_y & 0 \end{vmatrix} = -s_x * \hat{k} \quad (25)$$

Igualando-se as duas equações acima obtivemos o ângulo " $\beta$ " como sendo dado por:

$$\beta = \arcsin \left( -\frac{s_x}{|s|} \right) \quad (26)$$

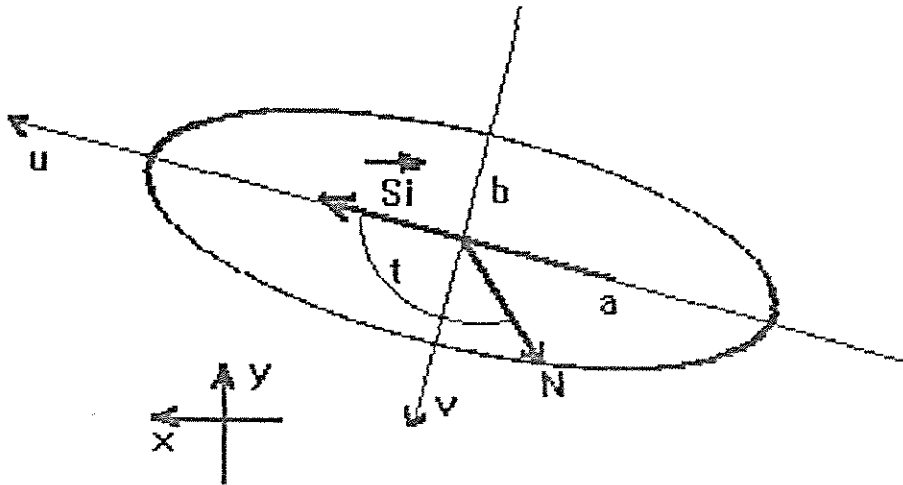
Obtendo-se assim também dois ângulos que chamaremos de " $\beta_1$ " e " $\beta_2$ ". Se  $\alpha_1 = \beta_1$  ou  $\alpha_1 = \beta_2$ , então sabemos que  $\theta = \alpha_1$ . Se  $\alpha_2 = \beta_1$  ou  $\alpha_2 = \beta_2$ , então sabemos que  $\theta = \alpha_2$ . Isto porque apenas o ângulo procurado aparecerá igual tanto no produto escalar quanto no produto vetorial.

A orientação do segmento no plano é dada pelo ângulo " $\theta_1$ ", inclinação do vetor " $s_1$ ". Teremos então um ângulo " $\theta_1$ " para cada segmento, podendo obter no plano, sua elipse central de inércia que é projeção do elipsóide tridimensional definido pelos momentos principais de inércia tabelados (ver propriedades do elipsóide, p.21). Essa elipse está localizada pela posição do centro de massa do segmento, e orientada pelo ângulo de inclinação " $\theta_1$ ", em relação ao eixo vertical.



Cada segmento é representado por sua elipse de inércia, conforme figura 14.

FIGURA 14



Sendo o sistema de referência "uv", definido como tendo origem no centro de massa do segmento "i", podemos definir essa elipse pelas equações paramétricas em função dos momentos principais centrais de inércia, dados pela tabela 1. Das equações (9), (10) e (11) obtemos:

$$u = \frac{1}{\sqrt{I_u}} * \cos t \quad ; \quad v = \frac{1}{\sqrt{I_v}} * \sin t \quad (27)$$

onde "t" é o ângulo formado pelo eixo maior da elipse e o vetor posição de um ponto "N" qualquer da elipse. Os momentos "I<sub>u</sub>" e "I<sub>v</sub>" são respectivamente dados por "I<sub>L1</sub>" e "I<sub>A1</sub>" da tabela 1.

As coordenadas "u" e "v" do ponto "N" de interseção de um eixo qualquer "w" e da elipse de inércia são dadas por:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{II_1}} * \cos \theta_1 \quad ; \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{IA_1}} * \sin \theta_1 \quad (28)$$

O valor do momento de inércia do segmento em relação a um eixo "w" qualquer, chamado "IS<sub>iw</sub>", é determinado a partir do módulo do vetor posição do ponto "N", no sistema de referência "uv" (ver p.53).

### 9.3 - MOMENTO DE INÉRCIA DO CORPO EM RELAÇÃO A EIXOS QUAISQUER QUE PASSAM PELO CENTRO DE MASSA

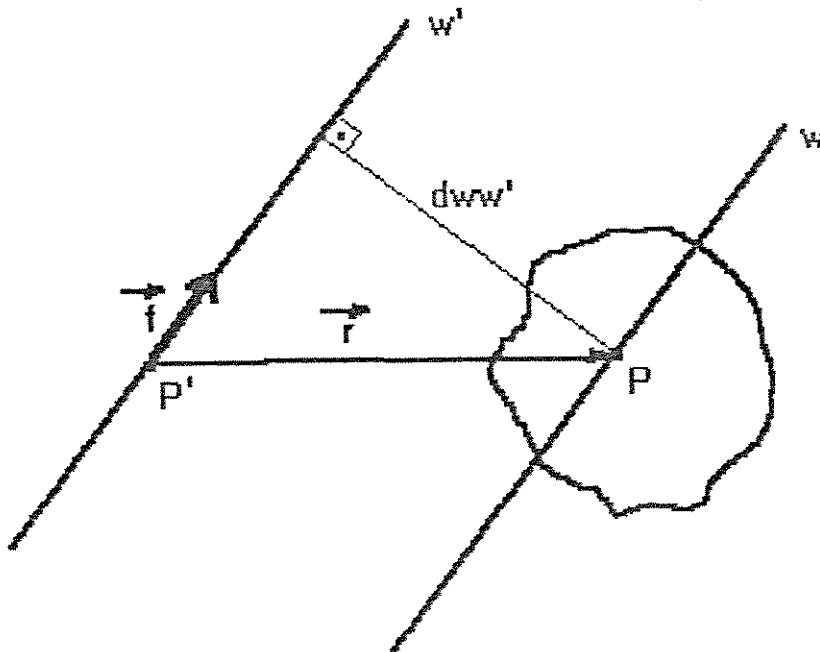
O momento de inércia do corpo em relação a um eixo "w'" qualquer que passe pelo centro de massa desse corpo, chamado "IC<sub>w</sub>", é dado pela soma dos momentos de inércia dos segmentos em relação a este eixo "w'", dado pela equação (4), na forma:

$$I_{C_{w'}} = \sum I_{S_{iw}} + MS_i * d_{iw'}^2 \quad (29)$$

onde a distância " $d_{iw'}$ " entre os eixos paralelos " $w$ " e " $w'$ " e " $MS_i$ " é a massa do segmento " $i$ ".

Queremos determinar a menor distância " $d_{iw'}$ " entre dois eixos paralelos entre si. A figura 15 mostra um corpo, seu centro de massa, um eixo " $w$ " qualquer e um eixo " $w'$ ", paralelo a " $w$ ", que passa por um ponto " $P$ ".

FIGURA 15



Definimos um vetor "r" que localiza um ponto "P" qualquer do eixo "w'" a partir do outro ponto "P" do eixo "w", e um versor "f" na direção dos eixos "w" e "w'". A distância "d<sub>ww'</sub>" entre os dois eixos é dada por:

$$d_{ww'} = | z \times \hat{z} | \quad (30)$$

Sabendo calcular "IC<sub>w</sub>" para qualquer eixo, podemos formar um conjunto de eixos que "varre" o plano no sentido anti-horário a partir do eixo vertical. Os eixos são definidos por versores "w" que variam de grau em grau no nosso caso.

Obtivemos então, 360 eixos "w" que passam pelo centro de massa do corpo, e definidos pelos versores "w<sub>k</sub>". Calculamos os valores dos momentos de inércia do corpo todo para cada um desses 360 eixos. É claro que a partir de 180 graus estaremos calculando momentos já conhecidos, uma vez que a elipse é uma superfície simétrica em relação aos eixos que passam pelo centro de massa. Portanto, os 360 momento calculados devem ser iguais dois a dois, quando w<sub>k</sub> = - w<sub>k</sub>.

As coordenadas de cada versor "w" das 360 direções, são dadas por:

$$w_{xz} = \sin \mu \quad ; \quad w_{zy} = \cos \mu \quad (31)$$

onde " $\mu$ " é o ângulo formado por " $w_k$ " e o eixo vertical.

#### 9.4 - DETERMINAÇÃO DOS EIXOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA E DEFINIÇÃO DA ELIPSE CENTRAL DO CORPO

Consideremos o eixo principal de inércia maior como sendo o eixo " $w_k$ " para o qual obtemos o menor valor de momento de inércia, e o eixo principal de inércia menor como sendo o eixo " $w_k$ " para o qual obtemos o maior valor de momento de inércia, baseando-nos nas propriedades geométricas da elipse (ver p.26). A inclinação do eixo maior é obtida pelo ângulo  $\mu$  do versor  $w$  que define esse eixo, e representa a orientação do corpo nessa imagem. Tendo os dois momentos principais de inércia da elipse, as inclinações desses eixos principais, e a localização do centro de massa do corpo, as elipses foram definidas pelas equações paramétricas abaixo:

$$x = \left( \frac{1}{\sqrt{I_{maior}}} * \cos t * \cos \lambda + \frac{1}{\sqrt{I_{menor}}} * \sin t * \sin \lambda \right) + CMC_x \quad (32)$$

$$y = \left( - \frac{1}{\sqrt{I_{maior}}} * \cos t * \sin \lambda + \frac{1}{\sqrt{I_{menor}}} * \sin t * \cos \lambda \right) + CMC_y \quad (33)$$

onde " $\lambda$ " é o ângulo de inclinação do eixo maior da elipse em relação ao eixo vertical, sentido horário,  $I_{\text{maior}}$  o valor máximo de momento de inércia encontrado e  $I_{\text{menor}}$  o valor mínimo.

## 10 - APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Mostraremos aqui representações gráficas da localização, da orientação e das elipses de inércia do corpo humano durante o movimento analisado.

A localização do corpo representada pelo seu centro de massa, é apresentada no gráfico 1 da posição vertical "y" em função da posição horizontal "x". Como já foi dito, esse gráfico descreve apenas a translação do corpo não apresentando informações quanto as rotações realizadas.

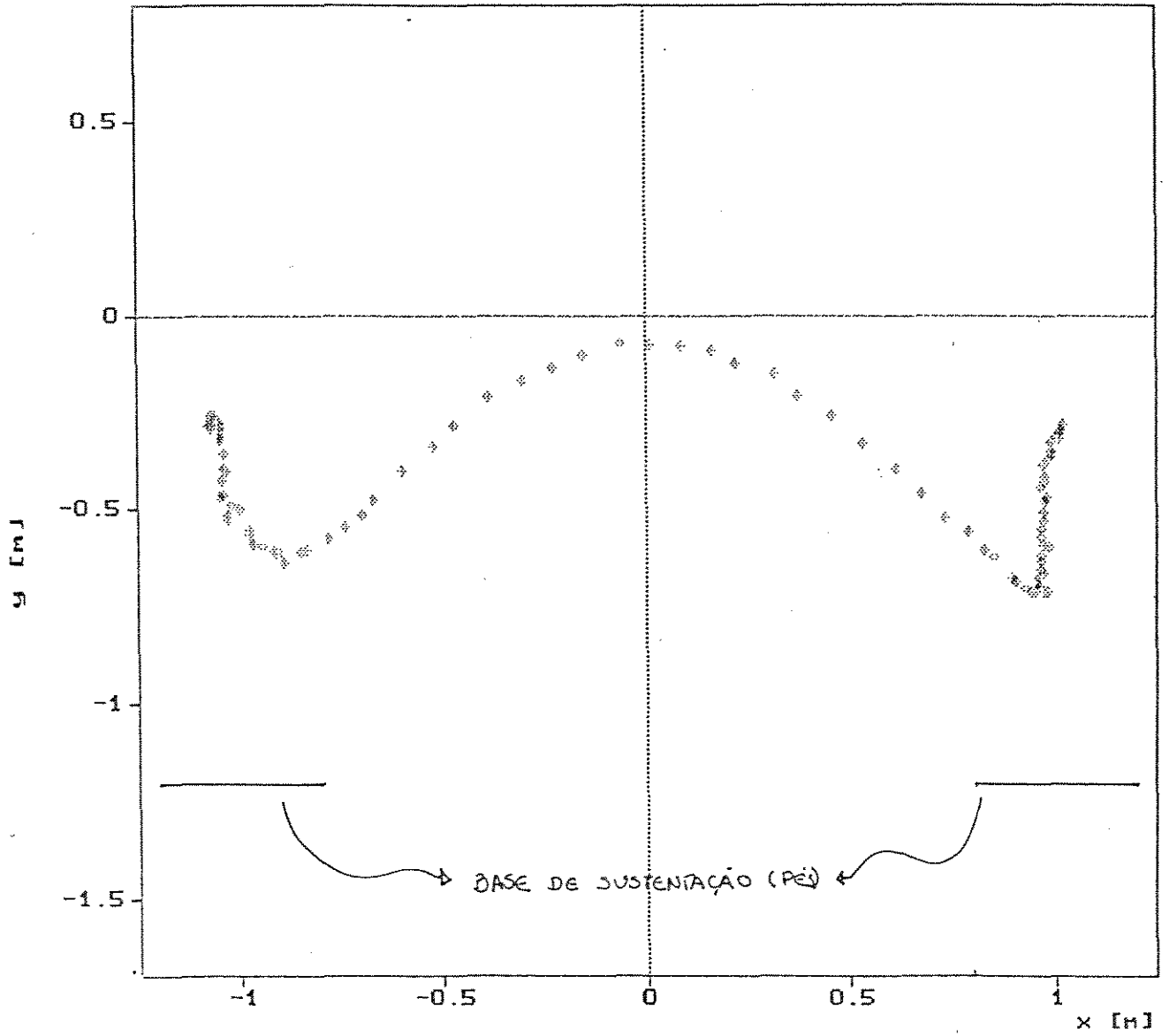
A orientação do corpo, representada pelo ângulo " $\lambda$ " de inclinação do eixo principal maior da elipse de inércia em relação ao eixo vertical, é apresentada no gráfico 2, em função do tempo. Lembramos que o sentido de medição de " $\lambda$ " é horário. Por esse gráfico, podemos quantificar a orientação geral do corpo e, em particular, visualizar os sentidos das rotações realizadas pelo corpo durante o movimento, em torno do eixo transversal que passa pelo seu centro de massa, através do aumento ou diminuição dos valores de " $\lambda$ " ao longo do movimento.

A representação do corpo durante o movimento feita por algumas das suas elipses de inércia e pelas posições dos centros de todas as elipses, posições essas que coincidem com as posições dos centros de massa do corpo, é apresentada no gráfico 3. As equações paramétricas das elipses centrais de inércia de todas as imagens estão no anexo 1. Vemos nesse gráfico tanto a translação quanto as rotações do corpo em torno do eixo transversal descritas, podendo ainda associar as formas das elipses com as formas assumidas pelo corpo durante o movimento. Caso colocássemos todas as 109 elipses num mesmo gráfico tornaríamos difícil sua visualização. Portanto, para análise dos resultados no próximo capítulo, dividimos o salto em três fases.



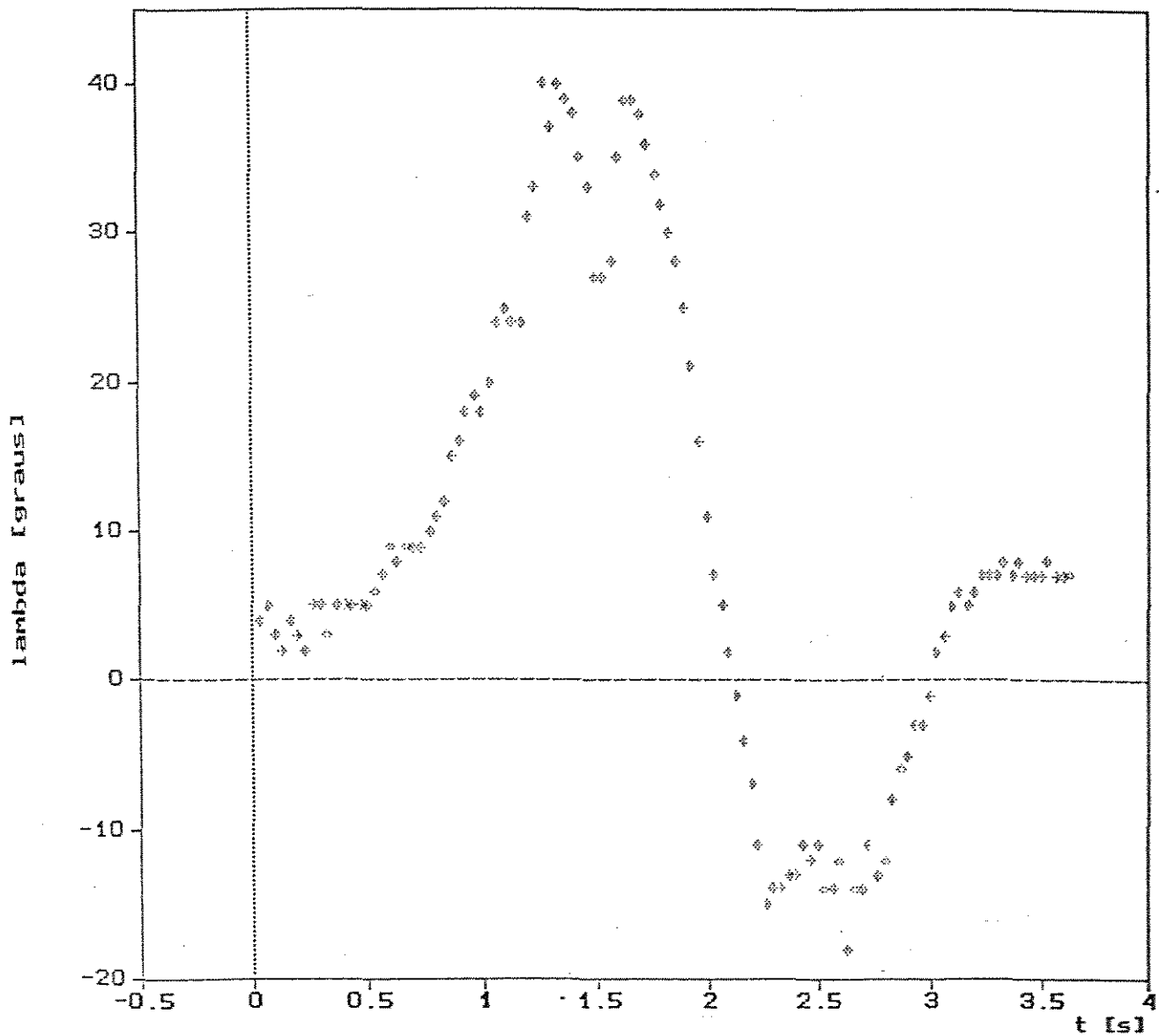
# GRÁFICO 1

POSICAO DOS CENTROS DE MASSA DO CORPO



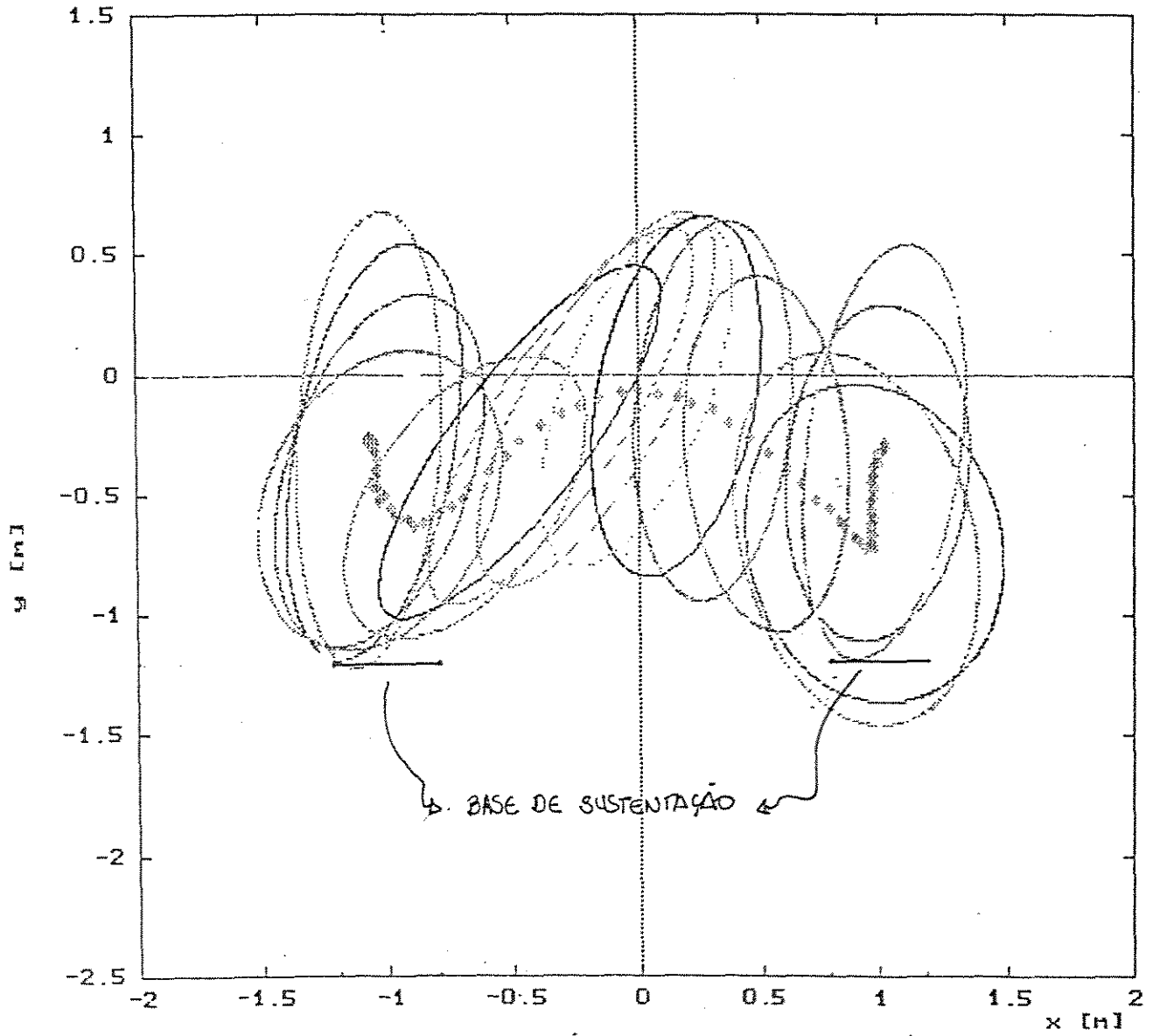
## GRÁFICO 2

### ORIENTACAO DO CORPO



### GRÁFICO 3

#### ELIPSES DE INERCIA DO CORPO



## 11 - ANÁLISE DOS RESULTADOS

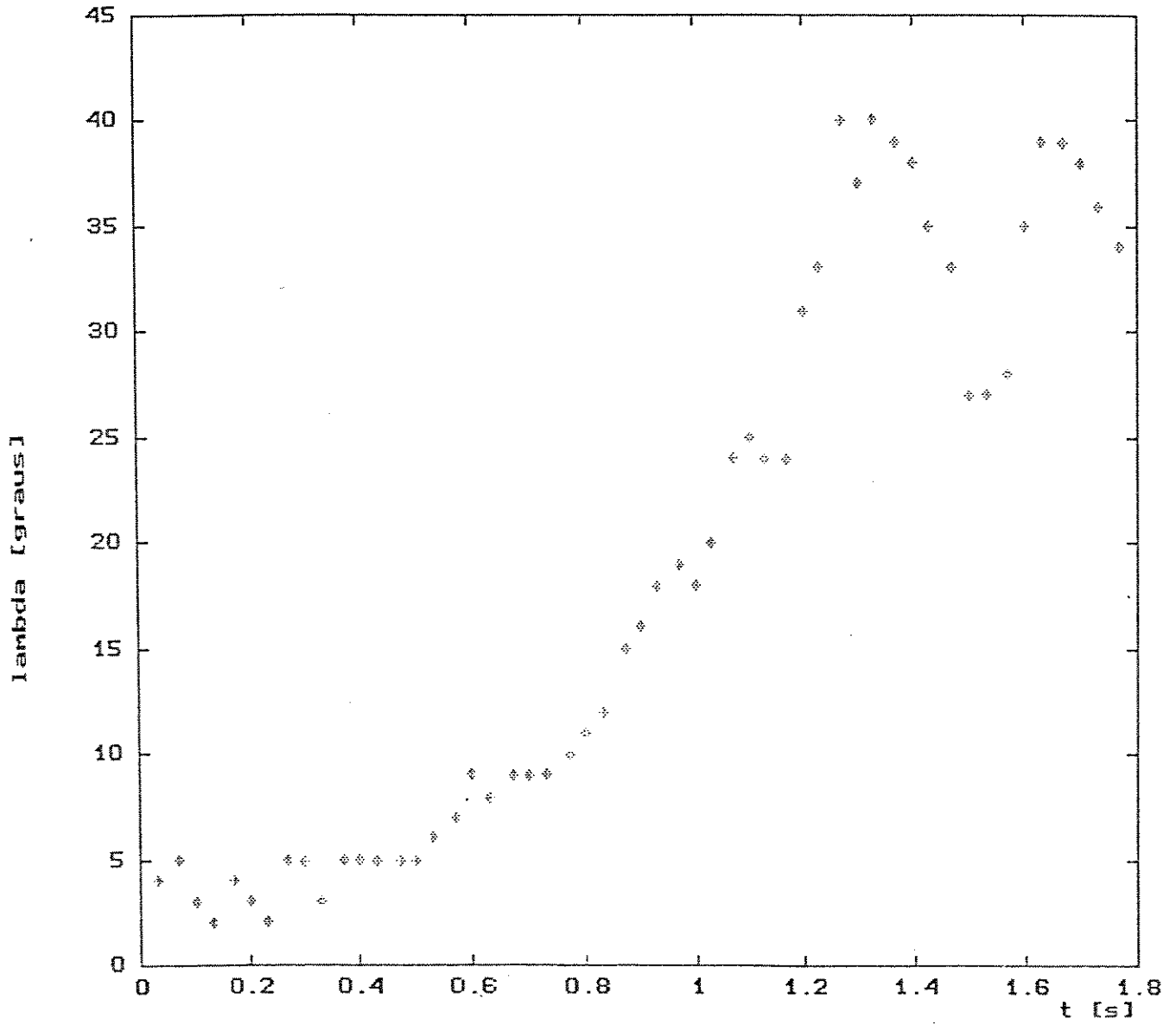
Nessa análise, apresentamos os gráficos de representação pelas elipses de inércia e da orientação do corpo em função do tempo para cada uma das fases, e utilizamos também as imagens do salto (ver exemplo na página 25), através das quais relacionamos o fenômeno estudado com os resultados obtidos.

**Fase inicial** - Do início do movimento até a perda de contacto do corpo com o solo. Da imagem 1 até a imagem 53.

O gráfico 4 apresenta a orientação do corpo nesta fase em função do tempo, e o gráfico 5 a representação do movimento pelas elipses de inércia no plano.

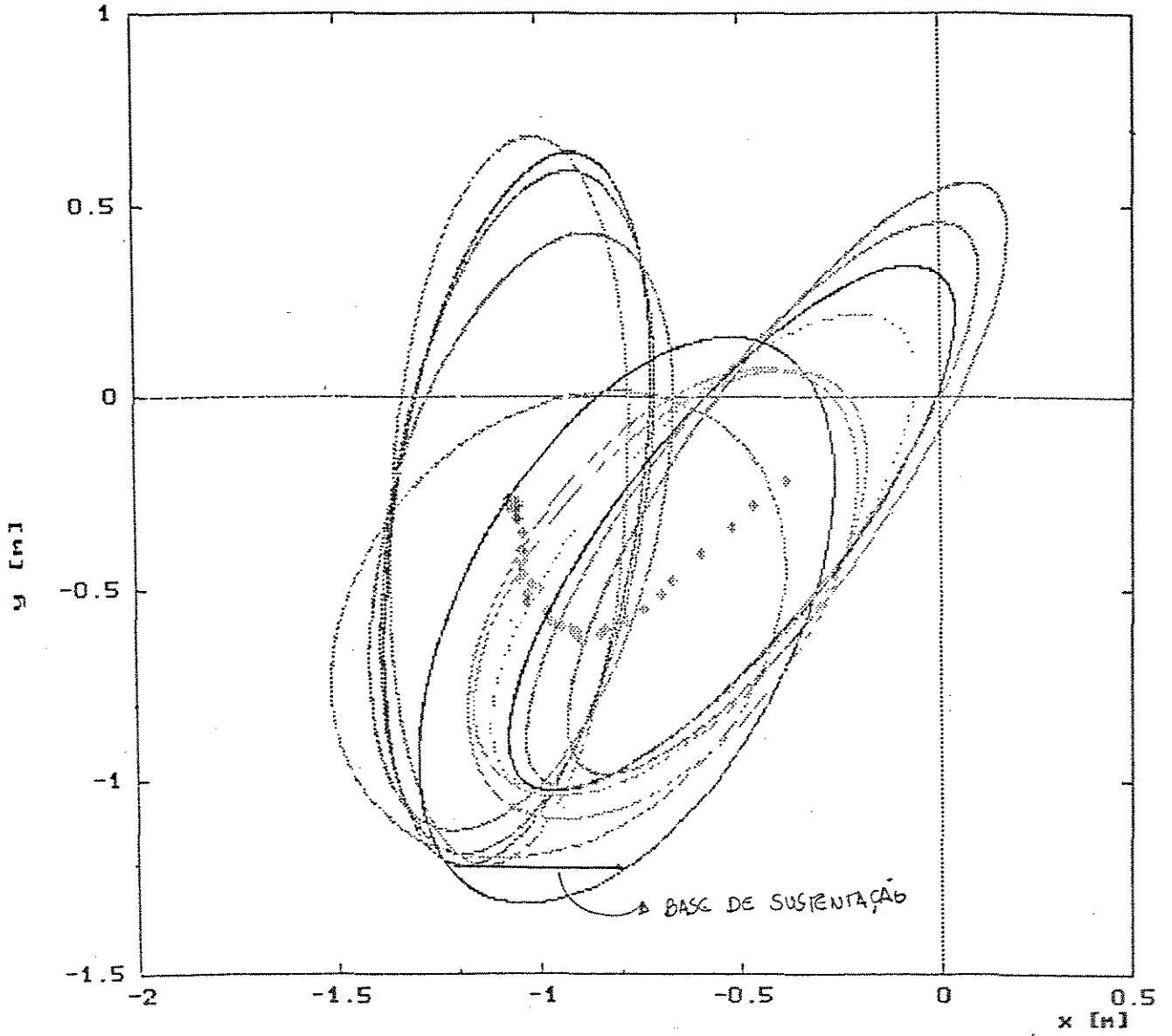
GRÁFICO 4

ORIENTACAO DO CORPO - FASE INICIAL



# GRÁFICO 5

## ELIPSES DE INERCIA DO CORPO - FASE INICIAL



Na posição estática inicial, mesmo não havendo rotação, o corpo apresenta uma inclinação positiva, sentido horário, em virtude da posição assumida pela cabeça do sujeito.

Na imagem 16, o tronco inicia uma inclinação para frente, e os joelhos começam a flexionar. Essa flexão e essa inclinação reduzem a base de sustentação e iniciam uma rotação do corpo no sentido horário até a imagem 40, e deslocamento para baixo e para frente do centro de massa do corpo até a imagem 43, onde encontramos o valor mínimo para sua a posição vertical. As elipses de inércia, alongadas inicialmente na direção longitudinal do corpo, vão apresentando formas cada vez mais próximas de uma circunferência, isto é, os valores dos eixos principais são cada vez mais próximos. Na imagem 40 o corpo está com o tronco inclinado para frente, joelhos flexionados e membros superiores estendidos para trás e para cima. A elipse de inércia dessa imagem tem sua forma próxima a de uma circunferência. Os membros superiores iniciam rotação no sentido anti-horário, coincidindo com o sentido de rotação do corpo a partir dessa imagem. As posições vertical e horizontal do centro de massa assumem valores cada vez mais elevados.

Na imagem 45 inicia a extensão dos joelhos, e as elipses de inércia começam novamente a alongar-se na direção longitudinal do corpo. A rotação do corpo volta a ser horária até a imagem 49.

Na imagem 51 o corpo inicia a rotação anti-horária que apresentará durante toda a fase aérea. Na imagem 53 os joelhos estão estendidos, o tronco ereto, membros superiores estendidos acima da cabeça, sua elipse de inércia apresenta-se bastante alongada na direção longitudinal do do corpo, e é o último contacto com o solo antes da fase aérea.

**Fase aérea** - O corpo não apresenta contacto com o solo. Da imagem 54 até a imagem 65.

O gráfico 6 apresenta a orientação do corpo nesta fase, e o gráfico 7 a representação do movimento pelas elipses de inércia.



GRÁFICO 6

ORIENTACAO DO CORPO - FASE AEREA

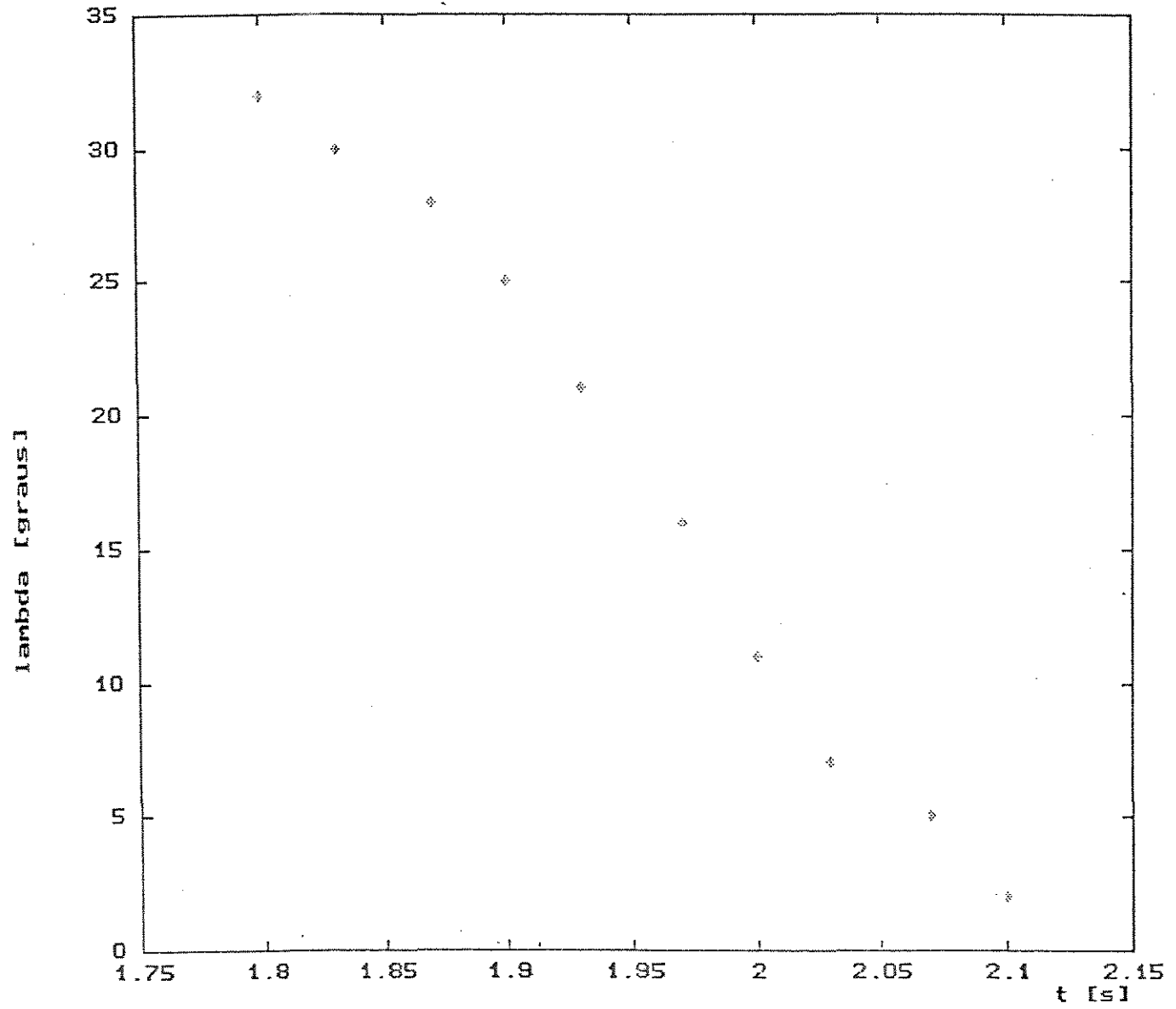
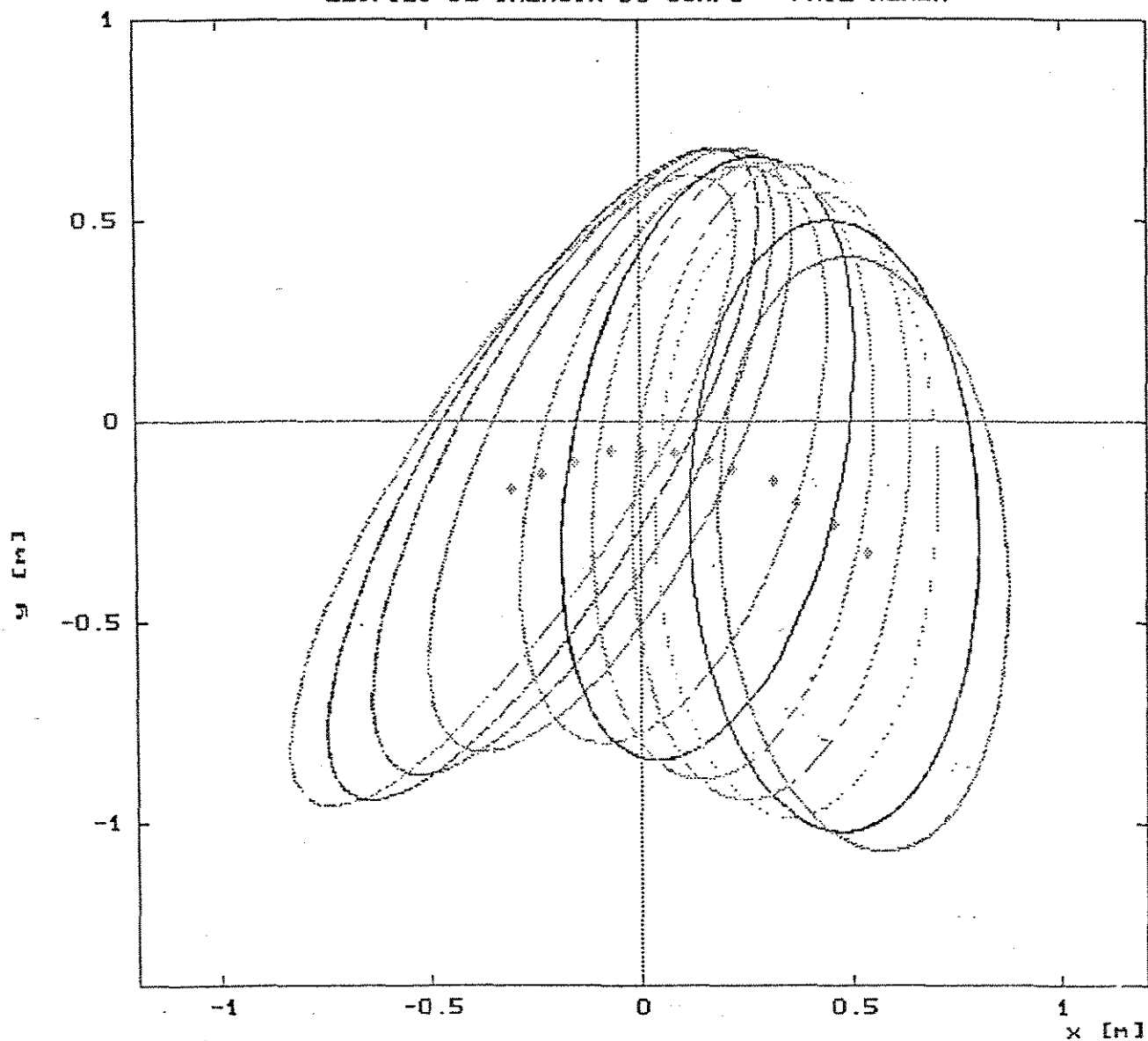


GRÁFICO 7

ELIPSES DE INERCIA DO CORPO - FASE AEREA



Na fase aérea o corpo está em queda livre. A posição do centro de massa descreve uma parábola. A inclinação do corpo é sempre decrescente, portanto sua rotação em torno do eixo transversal é sempre anti-horária. As elipses de inércia vão assumindo formas cada vez menos alongadas em função da posição dos membros superiores e de início da inclinação do tronco para frente.

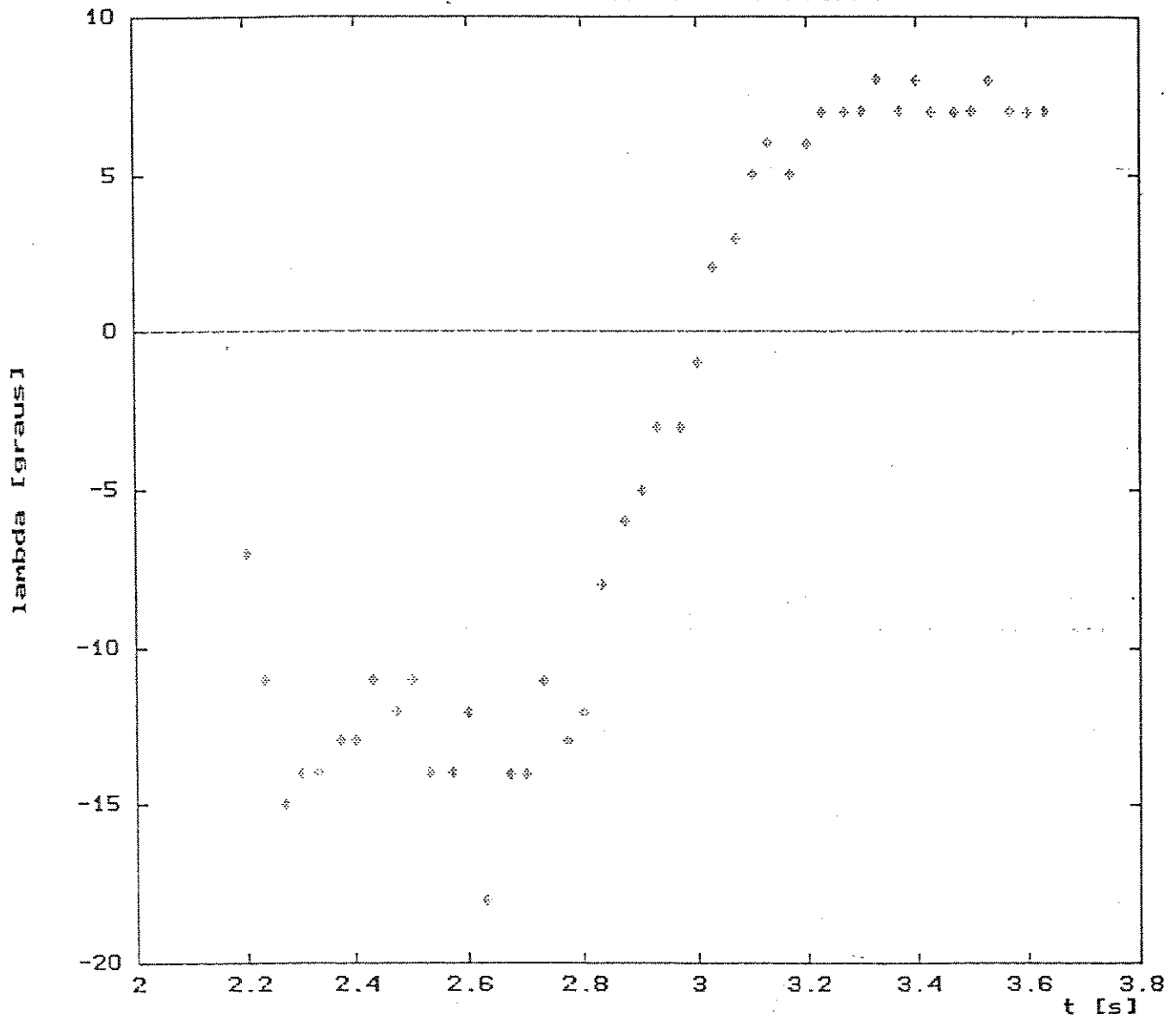
Por ser parabólica a trajetória do centro de massa do corpo durante essa fase, pudemos calcular o valor da aceleração da gravidade a fim de colaborar na verificação da aplicabilidade deste método. Encontramos o valor de  $g = 10.4 \text{ m/s}^2$  utilizando os 12 pontos da fase aérea, quando o valor esperado seria de  $9.8 \text{ m/s}^2$ , portanto apresentando uma diferença de aproximadamente 6%.

**Fase final** - Da retomada do contacto do corpo com o solo até o final do movimento. Da imagem 66 até a imagem 109.

O gráfico 8 apresenta a inclinação do corpo nesta fase, e o gráfico 9 a representação do movimento pelas elipses de inércia.

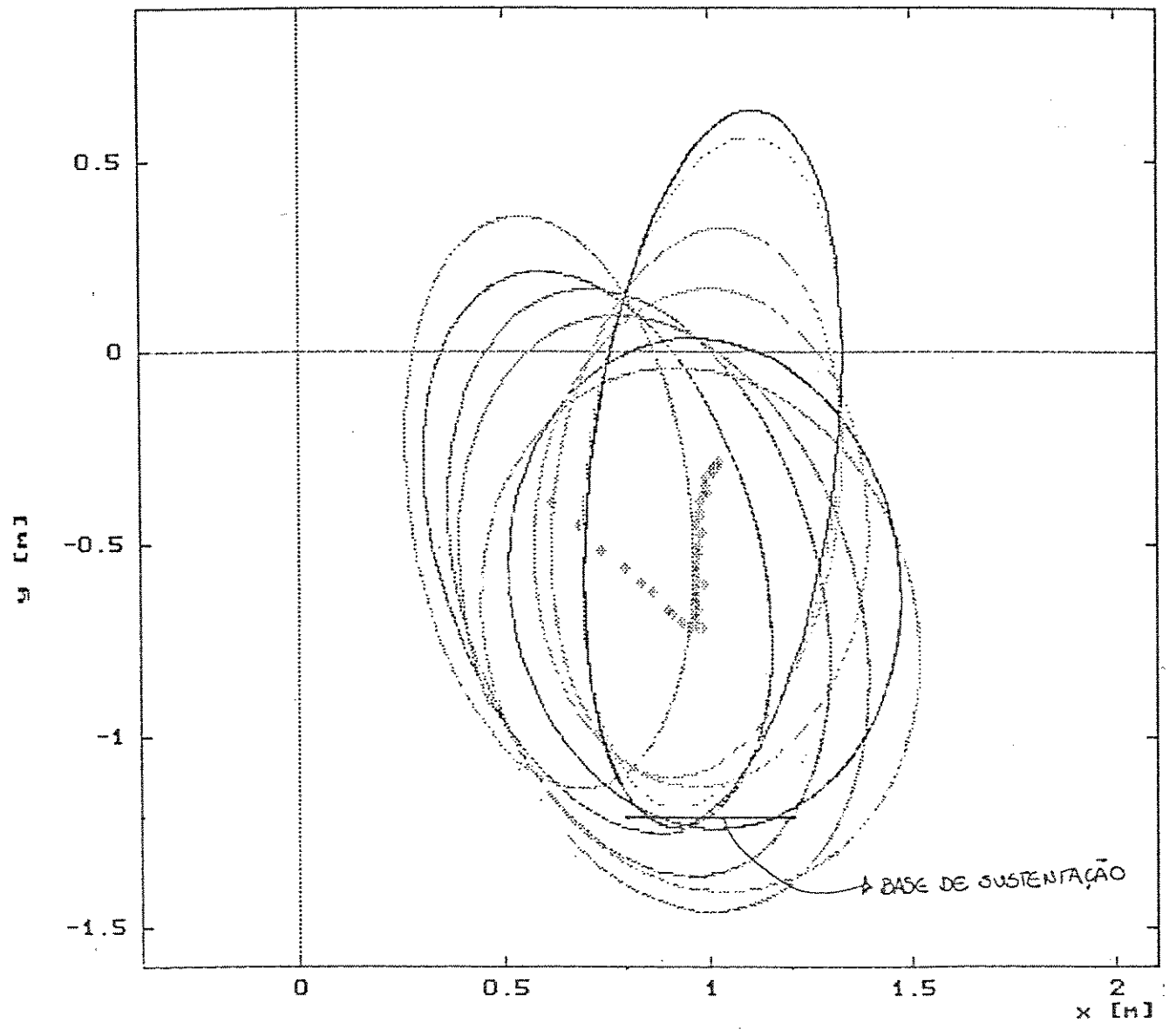
GRÁFICO 8

ORIENTACAO DO CORPO - FASE FINAL



# GRÁFICO 9

## ELIPSES DE INERCIA DO CORPO - FASE FINAL



Após o corpo retomar o contacto com o solo, os joelhos estão flexionando até a imagem 76, onde iniciam extensão, e o tronco ainda inclinado para traz inicia inclinação para frente até a imagem 78, onde também passa a extender-se. A rotação anti-horária do corpo permanece até a imagem 68, quando torna-se horária por pouco tempo, pois entre as imagens 73 e 83 os valores da inclinação do corpo variam de forma irregular. Os torques envolvidos são produzidos pela força de reação do solo no sujeito. A posição vertical do centro de massa assume os menores valores entre as imagens 75 e 78, quando passa a crescer até o fim do movimento. A elipse de inércia mais próxima de uma circunferência encontra-se na imagem 81, e sua forma torna-se cada vez mais alongada até o final do movimento.

Da da imagem 83 até a 94 a rotação do corpo volta a ter sentido horário, assumindo após valores próximos aos iniciais.

Da imagem 95 até a 109 o corpo já equilibrado vai assumindo novamente a posição erecta.

## 12 - CONCLUSÃO

A metodologia aqui desenvolvida mostrou-nos resultados satisfatórios e estimulantes. Verificamos ser possível representar o corpo humano como um todo durante um movimento, através de um objeto simples e único: um elipsóide equivalente. Com isso, acreditamos poder no futuro analisar diretamente o movimento do elipsóide central de inércia tridimensional, o que representa uma drástica redução no número de variáveis a serem analisadas em relação ao sujeito, ou a um modelo do mesmo formado por vários segmentos.

A aplicação apresentada levou-nos das imagens do corpo em movimento a uma representação bidimensional através das suas elipses centrais de inércia, com localização e orientação definidas. A metodologia proposta é aplicável ao corpo humano desde que se tenha um modelo antropométrico confiável. O modelo escolhido, desenvolvido por ZATSYORSKY & SELUYANOV (1983), é utilizado a partir de duas medidas simples, porém, refere-se a uma determinada faixa de peso e altura. Fora desta faixa, apresentada na página 31, os momentos de inércia não são confiáveis podendo assumir valores negativos.

Utilizamos materiais e equipamentos simples; câmera de vídeo comum VHS, tripé, local próprio de filmagem e uma estação de trabalho. Todos os programas computacionais envolvidos foram desenvolvidos no Laboratório de Instrumentação para Biomecânica da FEF-UNICAMP, ou são de domínio público. Por esses motivos, esta metodologia pode ser facilmente implementada.

A elipse ou o elipsóide são objetos simples com propriedades definidas tanto pela Mecânica quanto pela Geometria, propriedades essas que serão aproveitadas nas análises biomecânicas futuras, como por exemplo as análises apresentadas no capítulo anterior. Para tanto, o próximo passo será de transformar esta metodologia bidimensional em tridimensional. Também pretendemos implementar uma análise dos erros envolvidos.

Essa metodologia pode ser aplicada ao corpo humano em qualquer movimento, podendo assim obter parâmetros para comparar, analisar ou padronizar diferentes performances de um mesmo sujeito ou de vários sujeitos diferentes.



### 13 - BIBLIOGRAFIA UTILIZADA

- AMBLARD, B., ASSAIANTE, C., MARCHAND, A. R. Discrete Visual Samples May Control Locomotor Equilibrium and Foot Positioning in Man. *Journal of Motor Behavior*. v.21, 1989. p.72-91.
- BRONSTEIN, I. N., SEMENDIAEV, K. A. *Aide-Mémoire de Mathématiques*. Paris, Editions Eyrolles, 1963. 935p.
- CIARCIA, S. A. Build a Gray-scale Video Digitizer. Part 2: Digitizer/Transmitter. *BYTE*, June, 1987. p.129-138.
- GERVAIS, P., MARINO, G. W. A Procedure for Determining Angular Positional Data Relative to the Principal Axes of the Human Body. *J. Biomechanics*, v.16, 1983. p.109-113.
- HATZE, H. A Matemathical Model for the Computational Determination of Parameter Value of Anthropomorphic Segments. *J. Biomechanics*, v.13, 1980. p.833-843.
- HAY, J. G. *Biomecânica das Técnicas Desportivas*. 2.ed. Rio de Janeiro, Guanabara Koogan, 1981, 571p.
- HAY, J. G., REID, J. G. *Bases Anatômicas e Mecânicas do Movimento Humano*. Rio de Janeiro, Prentice -Hall, 1985. 281p.
- LAWS, K. In HALLIDAY, D., RESNICK, R. *Fundamentos da Física I*. Livros Técnicos e Científicos, 1991, p. 264-267.
- LE BOÛLCH, J. *O Desenvolvimento Psicomotor: do Nascimento aos 6 anos*. 2. ed. Porto Alegre, Artes Médicas, 1984. 220p.

- LEHMKUHL, L. D., SMITH, L. K. **Cinesiologia Clínica de Brunnstrom**. 4.ed. São Paulo, Manole, 1989. 466p.
- MARION, J. B. **Classical Dynamics of Particles and Systems**. 2.ed. New York, Academic Press, 1970. 563p.
- MERCADANTE, L. A., BREZIKOFER, R. **À Procura dos Parâmetros Inerciais do Corpo Humano**. In IV Congresso Nacional de Biomecânica. São Paulo, 1992.
- RASCH, P.J., BURKE, R. K. **Cinesiologia e Anatomia Aplicada**. 5.ed. Rio de Janeiro, Guanabara Koogan, 1977. 571p.
- STRANDBERG, L., LANSHAMMAR, H. In KOBAYASHI, K., MATSUI, H. **On the Biomechanics of Slipping Accidents**. Biomechanics VIII-B. Nagoya, Japan, Human Kynetics, 1983. pp.397-402.
- SYMON, K. R. **Mecânica**. 4.ed. Rio de Janeiro: Editora Campos Ltda. 1982. 685p.
- ZATSIORSKY, V. M., SELUYONOV, V. In KOBAYASHI, K., MATSUI, H. **The Mass and Inertial Characteristics of the Main Segments of the Human Body**. Biomechanics VIII-B. Nagoya, Japan, Human Kynetics, 1983. p.1153-1159.

## 14 - ANEXO 1

A seguir apresentamos os resultados numéricos da posição do centro de massa, da orientação do corpo, os valores de  $1/(I)^{1/2}$  para ambos os eixos principais centrais de inércia, através das equações paramétricas em função de "t" das elipses de inércia correspondentes de cada uma das imagens, na forma abaixo onde:

$1/(I_{\max})^{1/2}$  sendo I máximo [Kg.m<sup>2</sup>]

$\lambda$  [rad] inclinação do eixo principal maior

$$x = ( K_{\max} * \cos t * \cos \lambda + K_{\min} * \sin t * \sin \lambda ) + \text{CMC}_x$$

$1/(I_{\min})^{1/2}$  sendo I mínimo [Kg.m<sup>2</sup>]

coordenada x do centro de massa [m]

$1/(I_{\max})^{1/2}$  sendo I máximo [Kg.m<sup>2</sup>]

$\lambda$  [rad] inclinação do eixo principal maior

$$y = ( - K_{\max} * \cos t * \sin \lambda + K_{\min} * \sin t * \cos \lambda ) + \text{CMC}_y$$

$1/(I_{\min})^{1/2}$  sendo I mínimo [Kg.m<sup>2</sup>]

coordenada y do centro de massa [m]

IMAGEM 1

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.07)+0.24*\sin(t)*\sin(0.07))+(-1.07)$$

$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.07)+0.24*\sin(t)*\cos(0.07))+(-0.27)$$

IMAGEM 2

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.09)+0.23*\sin(t)*\sin(0.09))+(-1.08)$$

$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.09)+0.23*\sin(t)*\cos(0.09))+(-0.28)$$

IMAGEM 3

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.05)+0.24*\sin(t)*\sin(0.05))+(-1.07)$$

$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.05)+0.24*\sin(t)*\cos(0.05))+(-0.28)$$

IMAGEM 4

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.03)+0.24*\sin(t)*\sin(0.03))+(-1.06)$$

$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.03)+0.24*\sin(t)*\cos(0.03))+(-0.27)$$

IMAGEM 5

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.07)+0.24*\sin(t)*\sin(0.07))+(-1.07)$$

$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.07)+0.24*\sin(t)*\cos(0.07))+(-0.28)$$

IMAGEM 6

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.05)+0.24*\sin(t)*\sin(0.05))+(-1.07)$$

$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.05)+0.24*\sin(t)*\cos(0.05))+(-0.27)$$

IMAGEM 7

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.03)+0.24*\sin(t)*\sin(0.03))+(-1.07)$$

$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.03)+0.24*\sin(t)*\cos(0.03))+(-0.27)$$

IMAGEM 8

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.09)+0.24*\sin(t)*\sin(0.09))+(-1.07)$$

$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.09)+0.24*\sin(t)*\cos(0.09))+(-0.26)$$

IMAGE 9

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.09)+0.23*\sin(t)*\sin(0.09))+(-1.07)$$
$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.09)+0.23*\sin(t)*\cos(0.09))+(-0.27)$$

IMAGE 10

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.05)+0.24*\sin(t)*\sin(0.05))+(-1.07)$$
$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.05)+0.24*\sin(t)*\cos(0.05))+(-0.28)$$

IMAGE 11

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.09)+0.24*\sin(t)*\sin(0.09))+(-1.06)$$
$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.09)+0.24*\sin(t)*\cos(0.09))+(-0.26)$$

IMAGE 12

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.09)+0.23*\sin(t)*\sin(0.09))+(-1.07)$$
$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.09)+0.23*\sin(t)*\cos(0.09))+(-0.29)$$

IMAGE 13

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.09)+0.24*\sin(t)*\sin(0.09))+(-1.06)$$
$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.09)+0.24*\sin(t)*\cos(0.09))+(-0.27)$$

IMAGE 14

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.09)+0.24*\sin(t)*\sin(0.09))+(-1.07)$$
$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.09)+0.24*\sin(t)*\cos(0.09))+(-0.27)$$

IMAGE 15

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.09)+0.23*\sin(t)*\sin(0.09))+(-1.07)$$
$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.09)+0.23*\sin(t)*\cos(0.09))+(-0.27)$$

IMAGE 16

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.10)+0.23*\sin(t)*\sin(0.10))+(-1.06)$$
$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.10)+0.23*\sin(t)*\cos(0.10))+(-0.27)$$

IMAGEM 17

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.12)+0.24*\sin(t)*\sin(0.12))+(-1.06)$$

$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.12)+0.24*\sin(t)*\cos(0.12))+(-0.28)$$

IMAGEM 18

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.16)+0.24*\sin(t)*\sin(0.16))+(-1.06)$$

$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.16)+0.24*\sin(t)*\cos(0.16))+(-0.27)$$

IMAGEM 19

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.14)+0.23*\sin(t)*\sin(0.14))+(-1.05)$$

$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.14)+0.23*\sin(t)*\cos(0.14))+(-0.27)$$

IMAGEM 20

$$x = (0.08*\cos(t)*\cos(0.16)+0.24*\sin(t)*\sin(0.16))+(-1.05)$$

$$y = (-0.08*\cos(t)*\sin(0.16)+0.24*\sin(t)*\cos(0.16))+(-0.29)$$

IMAGEM 21

$$x = (0.08*\cos(t)*\cos(0.16)+0.23*\sin(t)*\sin(0.16))+(-1.05)$$

$$y = (-0.08*\cos(t)*\sin(0.16)+0.23*\sin(t)*\cos(0.16))+(-0.28)$$

IMAGEM 22

$$x = (0.08*\cos(t)*\cos(0.16)+0.23*\sin(t)*\sin(0.16))+(-1.05)$$

$$y = (-0.08*\cos(t)*\sin(0.16)+0.23*\sin(t)*\cos(0.16))+(-0.29)$$

IMAGEM 23

$$x = (0.08*\cos(t)*\cos(0.17)+0.22*\sin(t)*\sin(0.17))+(-1.05)$$

$$y = (-0.08*\cos(t)*\sin(0.17)+0.22*\sin(t)*\cos(0.17))+(-0.30)$$

IMAGEM 24

$$x = (0.08*\cos(t)*\cos(0.19)+0.22*\sin(t)*\sin(0.19))+(-1.05)$$

$$y = (-0.08*\cos(t)*\sin(0.19)+0.22*\sin(t)*\cos(0.19))+(-0.32)$$

IMAGEM 25

$$x = (0.08*\cos(t)*\cos(0.21)+0.21*\sin(t)*\sin(0.21))+(-1.05)$$

$$y = (-0.08*\cos(t)*\sin(0.21)+0.21*\sin(t)*\cos(0.21))+(-0.31)$$

IMAGEM 26

$$x = (0.08*\cos(t)*\cos(0.26)+0.20*\sin(t)*\sin(0.26))+(-1.04)$$

$$y = (-0.08*\cos(t)*\sin(0.26)+0.20*\sin(t)*\cos(0.26))+(-0.35)$$

IMAGEM 27

$$x = (0.09*\cos(t)*\cos(0.28)+0.19*\sin(t)*\sin(0.28))+(-1.04)$$

$$y = (-0.09*\cos(t)*\sin(0.28)+0.19*\sin(t)*\cos(0.28))+(-0.40)$$

IMAGEM 28

$$x = (0.09*\cos(t)*\cos(0.31)+0.19*\sin(t)*\sin(0.31))+(-1.03)$$

$$y = (-0.09*\cos(t)*\sin(0.31)+0.19*\sin(t)*\cos(0.31))+(-0.40)$$

IMAGEM 29

$$x = (0.10*\cos(t)*\cos(0.33)+0.18*\sin(t)*\sin(0.33))+(-1.04)$$

$$y = (-0.10*\cos(t)*\sin(0.33)+0.18*\sin(t)*\cos(0.33))+(-0.43)$$

IMAGEM 30

$$x = (0.10*\cos(t)*\cos(0.31)+0.18*\sin(t)*\sin(0.31))+(-1.04)$$

$$y = (-0.10*\cos(t)*\sin(0.31)+0.18*\sin(t)*\cos(0.31))+(-0.46)$$

IMAGEM 31

$$x = (0.10*\cos(t)*\cos(0.35)+0.17*\sin(t)*\sin(0.35))+(-1.05)$$

$$y = (-0.10*\cos(t)*\sin(0.35)+0.17*\sin(t)*\cos(0.35))+(-0.47)$$

IMAGEM 32

$$x = (0.11*\cos(t)*\cos(0.42)+0.18*\sin(t)*\sin(0.42))+(-1.02)$$

$$y = (-0.11*\cos(t)*\sin(0.42)+0.18*\sin(t)*\cos(0.42))+(-0.49)$$

IMAGEM 33

$$x = (0.11*\cos(t)*\cos(0.44)+0.17*\sin(t)*\sin(0.44))+(-1.00)$$

$$y = (-0.11*\cos(t)*\sin(0.44)+0.17*\sin(t)*\cos(0.44))+(-0.50)$$

IMAGEM 34

$$x = (0.11*\cos(t)*\cos(0.42)+0.16*\sin(t)*\sin(0.42))+(-1.03)$$

$$y = (-0.11*\cos(t)*\sin(0.42)+0.16*\sin(t)*\cos(0.42))+(-0.52)$$

IMAGEM 35

$$x = (0.12*\cos(t)*\cos(0.42)+0.15*\sin(t)*\sin(0.42))+(-1.03)$$

$$y = (-0.12*\cos(t)*\sin(0.42)+0.15*\sin(t)*\cos(0.42))+(-0.53)$$

IMAGEM 36

$$x = (0.11*\cos(t)*\cos(0.54)+0.16*\sin(t)*\sin(0.54))+(-0.98)$$

$$y = (-0.11*\cos(t)*\sin(0.54)+0.16*\sin(t)*\cos(0.54))+(-0.55)$$

IMAGEM 37

$$x = (0.12*\cos(t)*\cos(0.58)+0.16*\sin(t)*\sin(0.58))+(-0.98)$$

$$y = (-0.12*\cos(t)*\sin(0.58)+0.16*\sin(t)*\cos(0.58))+(-0.56)$$

IMAGEM 38

$$x = (0.12*\cos(t)*\cos(0.70)+0.16*\sin(t)*\sin(0.70))+(-0.97)$$

$$y = (-0.12*\cos(t)*\sin(0.70)+0.16*\sin(t)*\cos(0.70))+(-0.59)$$

IMAGEM 39

$$x = (0.12*\cos(t)*\cos(0.65)+0.16*\sin(t)*\sin(0.65))+(-0.95)$$

$$y = (-0.12*\cos(t)*\sin(0.65)+0.16*\sin(t)*\cos(0.65))+(-0.59)$$

IMAGEM 40

$$x = (0.12*\cos(t)*\cos(0.70)+0.17*\sin(t)*\sin(0.70))+(-0.92)$$

$$y = (-0.12*\cos(t)*\sin(0.70)+0.17*\sin(t)*\cos(0.70))+(-0.61)$$



IMAGEM 41

$$x = (0.12*\cos(t)*\cos(0.68)+0.17*\sin(t)*\sin(0.68))+(-0.91)$$

$$y = (-0.12*\cos(t)*\sin(0.68)+0.17*\sin(t)*\cos(0.68))+(-0.61)$$

IMAGEM 42

$$x = (0.12*\cos(t)*\cos(0.66)+0.17*\sin(t)*\sin(0.66))+(-0.91)$$

$$y = (-0.12*\cos(t)*\sin(0.66)+0.17*\sin(t)*\cos(0.66))+(-0.62)$$

IMAGEM 43

$$x = (0.12*\cos(t)*\cos(0.61)+0.18*\sin(t)*\sin(0.61))+(-0.89)$$

$$y = (-0.12*\cos(t)*\sin(0.61)+0.18*\sin(t)*\cos(0.61))+(-0.63)$$

IMAGEM 44

$$x = (0.11*\cos(t)*\cos(0.58)+0.20*\sin(t)*\sin(0.58))+(-0.85)$$

$$y = (-0.11*\cos(t)*\sin(0.58)+0.20*\sin(t)*\cos(0.58))+(-0.61)$$

IMAGEM 45

$$x = (0.11*\cos(t)*\cos(0.47)+0.21*\sin(t)*\sin(0.47))+(-0.83)$$

$$y = (-0.11*\cos(t)*\sin(0.47)+0.21*\sin(t)*\cos(0.47))+(-0.60)$$

IMAGEM 46

$$x = (0.10*\cos(t)*\cos(0.47)+0.20*\sin(t)*\sin(0.47))+(-0.78)$$

$$y = (-0.10*\cos(t)*\sin(0.47)+0.20*\sin(t)*\cos(0.47))+(-0.58)$$

IMAGEM 47

$$x = (0.10*\cos(t)*\cos(0.49)+0.18*\sin(t)*\sin(0.49))+(-0.74)$$

$$y = (-0.10*\cos(t)*\sin(0.49)+0.18*\sin(t)*\cos(0.49))+(-0.55)$$

IMAGEM 48

$$x = (0.09*\cos(t)*\cos(0.61)+0.17*\sin(t)*\sin(0.61))+(-0.69)$$

$$y = (-0.09*\cos(t)*\sin(0.61)+0.17*\sin(t)*\cos(0.61))+(-0.51)$$

IMAGE 49

$$x = (0.08*\cos(t)*\cos(0.68)+0.16*\sin(t)*\sin(0.68))+(-0.67)$$
$$y = (-0.08*\cos(t)*\sin(0.68)+0.16*\sin(t)*\cos(0.68))+(-0.48)$$

IMAGE 50

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.68)+0.19*\sin(t)*\sin(0.68))+(-0.59)$$
$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.68)+0.19*\sin(t)*\cos(0.68))+(-0.40)$$

IMAGE 51

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.66)+0.21*\sin(t)*\sin(0.66))+(-0.52)$$
$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.66)+0.21*\sin(t)*\cos(0.66))+(-0.34)$$

IMAGE 52

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.63)+0.22*\sin(t)*\sin(0.63))+(-0.47)$$
$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.63)+0.22*\sin(t)*\cos(0.63))+(-0.28)$$

IMAGE 53

$$x = (0.06*\cos(t)*\cos(0.59)+0.23*\sin(t)*\sin(0.59))+(-0.38)$$
$$y = (-0.06*\cos(t)*\sin(0.59)+0.23*\sin(t)*\cos(0.59))+(-0.21)$$

IMAGE 54

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.56)+0.23*\sin(t)*\sin(0.56))+(-0.30)$$
$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.56)+0.23*\sin(t)*\cos(0.56))+(-0.17)$$

IMAGE 55

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.52)+0.23*\sin(t)*\sin(0.52))+(-0.23)$$
$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.52)+0.23*\sin(t)*\cos(0.52))+(-0.13)$$

IMAGE 56

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.49)+0.22*\sin(t)*\sin(0.49))+(-0.16)$$
$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.49)+0.22*\sin(t)*\cos(0.49))+(-0.10)$$

IMAGEM 57

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.44)+0.21*\sin(t)*\sin(0.44))+(-0.07)$$

$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.44)+0.21*\sin(t)*\cos(0.44))+(-0.07)$$

IMAGEM 58

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.37)+0.19*\sin(t)*\sin(0.37))+(-0.07)$$

$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.37)+0.19*\sin(t)*\cos(0.37))+(-0.07)$$

IMAGEM 59

$$x = (0.08*\cos(t)*\cos(0.28)+0.19*\sin(t)*\sin(0.28))+(-0.08)$$

$$y = (-0.08*\cos(t)*\sin(0.28)+0.19*\sin(t)*\cos(0.28))+(-0.08)$$

IMAGEM 60

$$x = (0.08*\cos(t)*\cos(0.19)+0.19*\sin(t)*\sin(0.19))+(-0.08)$$

$$y = (-0.08*\cos(t)*\sin(0.19)+0.19*\sin(t)*\cos(0.19))+(-0.09)$$

IMAGEM 61

$$x = (0.08*\cos(t)*\cos(0.12)+0.19*\sin(t)*\sin(0.12))+(-0.08)$$

$$y = (-0.08*\cos(t)*\sin(0.12)+0.19*\sin(t)*\cos(0.12))+(-0.12)$$

IMAGEM 62

$$x = (0.08*\cos(t)*\cos(0.09)+0.20*\sin(t)*\sin(0.09))+(-0.08)$$

$$y = (-0.08*\cos(t)*\sin(0.09)+0.20*\sin(t)*\cos(0.09))+(-0.15)$$

IMAGEM 63

$$x = (0.08*\cos(t)*\cos(0.03)+0.20*\sin(t)*\sin(0.03))+(-0.08)$$

$$y = (-0.08*\cos(t)*\sin(0.03)+0.20*\sin(t)*\cos(0.03))+(-0.20)$$

IMAGEM 64

$$x = (0.08*\cos(t)*\cos(3.12)+0.19*\sin(t)*\sin(3.12))+(-0.08)$$

$$y = (-0.08*\cos(t)*\sin(3.12)+0.19*\sin(t)*\cos(3.12))+(-0.26)$$

IMAGEM 65

$$x = (0.09*\cos(t)*\cos(3.07)+0.19*\sin(t)*\sin(3.07))+0.53)$$

$$y = (-0.09*\cos(t)*\sin(3.07)+0.19*\sin(t)*\cos(3.07))+(-0.33)$$

IMAGEM 66

$$x = (0.09*\cos(t)*\cos(3.02)+0.19*\sin(t)*\sin(3.02))+0.61)$$

$$y = (-0.09*\cos(t)*\sin(3.02)+0.19*\sin(t)*\cos(3.02))+(-0.39)$$

IMAGEM 67

$$x = (0.09*\cos(t)*\cos(2.95)+0.19*\sin(t)*\sin(2.95))+0.68)$$

$$y = (-0.09*\cos(t)*\sin(2.95)+0.19*\sin(t)*\cos(2.95))+(-0.45)$$

IMAGEM 68

$$x = (0.10*\cos(t)*\cos(2.88)+0.19*\sin(t)*\sin(2.88))+0.73)$$

$$y = (-0.10*\cos(t)*\sin(2.88)+0.19*\sin(t)*\cos(2.88))+(-0.52)$$

IMAGEM 69

$$x = (0.10*\cos(t)*\cos(2.90)+0.20*\sin(t)*\sin(2.90))+0.79)$$

$$y = (-0.10*\cos(t)*\sin(2.90)+0.20*\sin(t)*\cos(2.90))+(-0.56)$$

IMAGEM 70

$$x = (0.11*\cos(t)*\cos(2.90)+0.20*\sin(t)*\sin(2.90))+0.83)$$

$$y = (-0.11*\cos(t)*\sin(2.90)+0.20*\sin(t)*\cos(2.90))+(-0.60)$$

IMAGEM 71

$$x = (0.12*\cos(t)*\cos(2.91)+0.20*\sin(t)*\sin(2.91))+0.86)$$

$$y = (-0.12*\cos(t)*\sin(2.91)+0.20*\sin(t)*\cos(2.91))+(-0.62)$$

IMAGEM 72

$$x = (0.12*\cos(t)*\cos(2.91)+0.20*\sin(t)*\sin(2.91))+0.89)$$

$$y = (-0.12*\cos(t)*\sin(2.91)+0.20*\sin(t)*\cos(2.91))+(-0.68)$$

IMAGE 73

$$x = (0.13 \cdot \cos(t) \cdot \cos(2.95) + 0.19 \cdot \sin(t) \cdot \sin(2.95)) + (0.90)$$
$$y = (-0.13 \cdot \cos(t) \cdot \sin(2.95) + 0.19 \cdot \sin(t) \cdot \cos(2.95)) + (-0.68)$$

IMAGE 74

$$x = (0.13 \cdot \cos(t) \cdot \cos(2.93) + 0.19 \cdot \sin(t) \cdot \sin(2.93)) + (0.93)$$
$$y = (-0.13 \cdot \cos(t) \cdot \sin(2.93) + 0.19 \cdot \sin(t) \cdot \cos(2.93)) + (-0.70)$$

IMAGE 75

$$x = (0.13 \cdot \cos(t) \cdot \cos(2.95) + 0.18 \cdot \sin(t) \cdot \sin(2.95)) + (0.94)$$
$$y = (-0.13 \cdot \cos(t) \cdot \sin(2.95) + 0.18 \cdot \sin(t) \cdot \cos(2.95)) + (-0.72)$$

IMAGE 76

$$x = (0.13 \cdot \cos(t) \cdot \cos(2.90) + 0.18 \cdot \sin(t) \cdot \sin(2.90)) + (0.95)$$
$$y = (-0.13 \cdot \cos(t) \cdot \sin(2.90) + 0.18 \cdot \sin(t) \cdot \cos(2.90)) + (-0.71)$$

IMAGE 77

$$x = (0.13 \cdot \cos(t) \cdot \cos(2.90) + 0.17 \cdot \sin(t) \cdot \sin(2.90)) + (0.97)$$
$$y = (-0.13 \cdot \cos(t) \cdot \sin(2.90) + 0.17 \cdot \sin(t) \cdot \cos(2.90)) + (-0.71)$$

IMAGE 78

$$x = (0.13 \cdot \cos(t) \cdot \cos(2.93) + 0.17 \cdot \sin(t) \cdot \sin(2.93)) + (0.98)$$
$$y = (-0.13 \cdot \cos(t) \cdot \sin(2.93) + 0.17 \cdot \sin(t) \cdot \cos(2.93)) + (-0.72)$$

IMAGE 79

$$x = (0.13 \cdot \cos(t) \cdot \cos(2.83) + 0.17 \cdot \sin(t) \cdot \sin(2.83)) + (0.96)$$
$$y = (-0.13 \cdot \cos(t) \cdot \sin(2.83) + 0.17 \cdot \sin(t) \cdot \cos(2.83)) + (-0.69)$$

IMAGE 80

$$x = (0.13 \cdot \cos(t) \cdot \cos(2.90) + 0.17 \cdot \sin(t) \cdot \sin(2.90)) + (0.96)$$
$$y = (-0.13 \cdot \cos(t) \cdot \sin(2.90) + 0.17 \cdot \sin(t) \cdot \cos(2.90)) + (-0.70)$$

IMAGEM 81

$$x = (0.13*\cos(t)*\cos(2.90)+0.16*\sin(t)*\sin(2.90))+0.96)$$

$$y = (-0.13*\cos(t)*\sin(2.90)+0.16*\sin(t)*\cos(2.90))+(-0.68)$$

IMAGEM 82

$$x = (0.13*\cos(t)*\cos(2.95)+0.16*\sin(t)*\sin(2.95))+0.97)$$

$$y = (-0.13*\cos(t)*\sin(2.95)+0.16*\sin(t)*\cos(2.95))+(-0.67)$$

IMAGEM 83

$$x = (0.13*\cos(t)*\cos(2.91)+0.16*\sin(t)*\sin(2.91))+0.97)$$

$$y = (-0.13*\cos(t)*\sin(2.91)+0.16*\sin(t)*\cos(2.91))+(-0.65)$$

IMAGEM 84

$$x = (0.12*\cos(t)*\cos(2.93)+0.16*\sin(t)*\sin(2.93))+0.97)$$

$$y = (-0.12*\cos(t)*\sin(2.93)+0.16*\sin(t)*\cos(2.93))+(-0.64)$$

IMAGEM 85

$$x = (0.12*\cos(t)*\cos(3.00)+0.16*\sin(t)*\sin(3.00))+0.97)$$

$$y = (-0.12*\cos(t)*\sin(3.00)+0.16*\sin(t)*\cos(3.00))+(-0.62)$$

IMAGEM 86

$$x = (0.12*\cos(t)*\cos(3.04)+0.16*\sin(t)*\sin(3.04))+0.99)$$

$$y = (-0.12*\cos(t)*\sin(3.04)+0.16*\sin(t)*\cos(3.04))+(-0.60)$$

IMAGEM 87

$$x = (0.11*\cos(t)*\cos(3.05)+0.16*\sin(t)*\sin(3.05))+0.97)$$

$$y = (-0.11*\cos(t)*\sin(3.05)+0.16*\sin(t)*\cos(3.05))+(-0.59)$$

IMAGEM 88

$$x = (0.11*\cos(t)*\cos(3.09)+0.16*\sin(t)*\sin(3.09))+0.97)$$

$$y = (-0.11*\cos(t)*\sin(3.09)+0.16*\sin(t)*\cos(3.09))+(-0.57)$$

IMAGEM 89

$$x = (0.11*\cos(t)*\cos(3.09)+0.16*\sin(t)*\sin(3.09))+(0.97)$$

$$y = (-0.11*\cos(t)*\sin(3.09)+0.16*\sin(t)*\cos(3.09))+(-0.55)$$

IMAGEM 90

$$x = (0.11*\cos(t)*\cos(3.12)+0.16*\sin(t)*\sin(3.12))+(0.97)$$

$$y = (-0.11*\cos(t)*\sin(3.12)+0.16*\sin(t)*\cos(3.12))+(-0.53)$$

IMAGEM 91

$$x = (0.11*\cos(t)*\cos(0.03)+0.16*\sin(t)*\sin(0.03))+(0.97)$$

$$y = (-0.11*\cos(t)*\sin(0.03)+0.16*\sin(t)*\cos(0.03))+(-0.51)$$

IMAGEM 92

$$x = (0.10*\cos(t)*\cos(0.05)+0.16*\sin(t)*\sin(0.05))+(0.98)$$

$$y = (-0.10*\cos(t)*\sin(0.05)+0.16*\sin(t)*\cos(0.05))+(-0.48)$$

IMAGEM 93

$$x = (0.10*\cos(t)*\cos(0.09)+0.16*\sin(t)*\sin(0.09))+(0.98)$$

$$y = (-0.10*\cos(t)*\sin(0.09)+0.16*\sin(t)*\cos(0.09))+(-0.47)$$

IMAGEM 94

$$x = (0.10*\cos(t)*\cos(0.10)+0.17*\sin(t)*\sin(0.10))+(0.97)$$

$$y = (-0.10*\cos(t)*\sin(0.10)+0.17*\sin(t)*\cos(0.10))+(-0.44)$$

IMAGEM 95

$$x = (0.09*\cos(t)*\cos(0.09)+0.17*\sin(t)*\sin(0.09))+(0.98)$$

$$y = (-0.09*\cos(t)*\sin(0.09)+0.17*\sin(t)*\cos(0.09))+(-0.43)$$

IMAGEM 96

$$x = (0.09*\cos(t)*\cos(0.10)+0.17*\sin(t)*\sin(0.10))+(0.98)$$

$$y = (-0.09*\cos(t)*\sin(0.10)+0.17*\sin(t)*\cos(0.10))+(-0.41)$$

IMAGE 97

$$x = (0.09*\cos(t)*\cos(0.12)+0.18*\sin(t)*\sin(0.12))+0.97$$

$$y = (-0.09*\cos(t)*\sin(0.12)+0.18*\sin(t)*\cos(0.12))+(-0.39)$$

IMAGE 98

$$x = (0.09*\cos(t)*\cos(0.12)+0.19*\sin(t)*\sin(0.12))+1.00$$

$$y = (-0.09*\cos(t)*\sin(0.12)+0.19*\sin(t)*\cos(0.12))+(-0.36)$$

IMAGE 99

$$x = (0.09*\cos(t)*\cos(0.12)+0.19*\sin(t)*\sin(0.12))+0.99$$

$$y = (-0.09*\cos(t)*\sin(0.12)+0.19*\sin(t)*\cos(0.12))+(-0.37)$$

IMAGE 100

$$x = (0.08*\cos(t)*\cos(0.14)+0.20*\sin(t)*\sin(0.14))+0.99$$

$$y = (-0.08*\cos(t)*\sin(0.14)+0.20*\sin(t)*\cos(0.14))+(-0.35)$$

IMAGE 101

$$x = (0.08*\cos(t)*\cos(0.12)+0.21*\sin(t)*\sin(0.12))+0.99$$

$$y = (-0.08*\cos(t)*\sin(0.12)+0.21*\sin(t)*\cos(0.12))+(-0.33)$$

IMAGE 102

$$x = (0.08*\cos(t)*\cos(0.14)+0.22*\sin(t)*\sin(0.14))+1.01$$

$$y = (-0.08*\cos(t)*\sin(0.14)+0.22*\sin(t)*\cos(0.14))+(-0.32)$$

IMAGE 103

$$x = (0.08*\cos(t)*\cos(0.12)+0.22*\sin(t)*\sin(0.12))+1.01$$

$$y = (-0.08*\cos(t)*\sin(0.12)+0.22*\sin(t)*\cos(0.12))+(-0.31)$$

IMAGE 104

$$x = (0.08*\cos(t)*\cos(0.12)+0.22*\sin(t)*\sin(0.12))+1.01$$

$$y = (-0.08*\cos(t)*\sin(0.12)+0.22*\sin(t)*\cos(0.12))+(-0.30)$$



IMAGEM 105

$$x = (0.08*\cos(t)*\cos(0.12)+0.23*\sin(t)*\sin(0.12))+1.01$$

$$y = (-0.08*\cos(t)*\sin(0.12)+0.23*\sin(t)*\cos(0.12))+(-0.31)$$

IMAGEM 106

$$x = (0.08*\cos(t)*\cos(0.14)+0.23*\sin(t)*\sin(0.14))+1.01$$

$$y = (-0.08*\cos(t)*\sin(0.14)+0.23*\sin(t)*\cos(0.14))+(-0.30)$$

IMAGEM 107

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.12)+0.23*\sin(t)*\sin(0.12))+1.02$$

$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.12)+0.23*\sin(t)*\cos(0.12))+(-0.28)$$

IMAGEM 108

$$x = (0.08*\cos(t)*\cos(0.12)+0.23*\sin(t)*\sin(0.12))+1.02$$

$$y = (-0.08*\cos(t)*\sin(0.12)+0.23*\sin(t)*\cos(0.12))+(-0.30)$$

IMAGEM 109

$$x = (0.07*\cos(t)*\cos(0.12)+0.23*\sin(t)*\sin(0.12))+1.01$$

$$y = (-0.07*\cos(t)*\sin(0.12)+0.23*\sin(t)*\cos(0.12))+(-0.30)$$