



UNICAMP

# Governo do Estado de São Paulo Universidade Estadual de Campinas

FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS

## MODELOS MATEMÁTICOS REDUZIDOS PARA SISTEMAS MECÂNICOS CONTÍNUOS

*Este exemplar corresponde à  
edição final de tese defendida  
por Ilmarinen Lauri Lauri e aprovada  
em 21/03/88.*

ILICAÇÃO

*[Handwritten signature]*  
Lauri Lauri Lauri

13100 - CAMPINAS - S.P

BRASIL

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

MODELOS MATEMÁTICOS REDUZIDOS PARA  
SISTEMAS MECÂNICOS CONTÍNUOS

ILMAR FERREIRA SANTOS

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia  
de Campinas - UNICAMP, como parte dos requi-  
sitos exigidos para obtenção do título de  
MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

Campinas, 17 de março de 1988

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

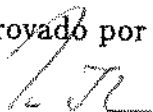
Tese de: Mestrado

Título da Tese: MODELOS MATEMÁTICOS REDUZIDOS  
PARA SISTEMAS MECÂNICOS CONTÍNUOS

Autor: Ilmar Ferreira Santos

Orientador: Prof.Dr.Hans Ingo Weber

Aprovado por



---

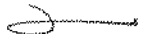
Prof.Dr. Hans Ingo Weber, presidente



---

Prof.Dr. Luiz Bevilacqua

*Assinado*



---

Prof.Dr. Fernando Iguti



---

Prof.Dr. Douglas Eduardo Zampieri

Campinas, 17 de março de 1988

# Dedicatória

"Prosseguir,  
Às duras penas, ou às duras dúvidas  
Mas, prosseguir.  
O ato de prosseguir já é o próprio ato de discernir,  
Já é o próprio ato de solidificar algo.  
Prosseguindo, o caminho será desbravado,  
As dúvidas vão se dissipando,  
Como o nascer de um novo dia que  
Clareia o céu,  
Superando as nuvens escuras.  
Não existe ato sem efeito,  
Tudo tem o seu porquê  
Prosseguindo, o porquê surgirá...  
Fatalmente, sob os cuidados da verdade "

    Ao meu pai ,  
um modelo de bom ânimo, boa vontade e alegria constante.  
    A minha mãe ,  
um modelo de força, renúncia e dedicação.  
    Ao meu orientador,  
pela amizade e pelo estímulo.

# Agradecimentos

Ao prof. Hans Ingo Weber pela orientação,  
pelo estímulo e interesse constantes e  
pela amizade demonstrada ao longo de todo este tempo.

Ao amigo Marco Lúcio Bittencourt pela ajuda na  
utilização do editor Latex, pelo companheirismo  
e pela amizade sincera.

À FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa  
do Estado de São Paulo pelo apoio financeiro.

Aos amigos do GEPRON pelo constante apoio.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>MODELOS MATEMÁTICOS DISCRETOS</b>	<b>11</b>
1.1	Introdução	11
1.2	Transformação Linear de Coordenadas	11
1.3	Ortonormalização dos Modos Naturais	12
1.4	Energia Potencial e Energia Cinética	13
<b>2</b>	<b>MODELOS MATEMÁTICOS CONTÍNUOS</b>	<b>15</b>
2.1	Introdução	15
2.2	Equação e Condições de Contorno	15
2.3	Ortogonalidade dos Modos Naturais	17
2.4	Energia Cinética e Energia Potencial	17
<b>3</b>	<b>MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO</b>	<b>19</b>
3.1	Introdução	19
3.2	Obtenção da Matriz de Normalização	19
3.3	Exemplo de Aplicação do Método de Identificação	21
3.4	Variando o Número de Graus de Liberdade dos Modelos	24
3.5	Variando a Posição das Coordenadas	26
<b>4</b>	<b>RESPOSTA FORÇADA DOS MODELOS MATEMÁTICOS</b>	<b>27</b>
4.1	Introdução	27
4.2	Resposta Excitada dos Modelos Discretos	27
4.3	Resposta do Modelo Identificado	29
4.4	Resposta Excitada dos Modelos Contínuos	30
4.5	Resposta do Modelo Contínuo Estudado	33
4.6	Resultados Teóricos do Método de Identificação	34
<b>5</b>	<b>RECONSTITUIÇÃO EXPERIMENTAL DA LINHA ELÁSTICA</b>	<b>37</b>
5.1	Introdução	37
5.2	Spline Cúbica e Linha Elástica	37
5.3	Cálculo da Energia de Deformação	41
5.4	Programa Computacional	42
5.5	Resultados	42
5.6	Conclusões	44

<b>6 IDENTIFICAÇÃO TEÓRICO/EXPERIMENTAL</b>	<b>45</b>
6.1 Introdução	45
6.2 Viga Contínua Engastada/Livre	45
6.3 Resposta Excitada da Viga Contínua	47
6.3.1 Comportamento Estático	47
6.3.2 Comportamento Dinâmico	49
6.4 Cálculo dos Elementos da Matriz de Normalização	49
6.5 Comportamento Estático e Dinâmico dos Modelos Discretos	53
6.6 Modelo Físico Real	58
6.7 Processo Experimental de Análise Modal	58
6.7.1 Frequências Naturais	58
6.7.2 Modos de Vibração	58
6.8 Identificação Experimental	60
6.9 Conclusões	62
<b>7 MODELOS MATEMÁTICOS EM DINÂMICA DE CORPOS RÍGIDOS</b>	<b>67</b>
7.1 Introdução	67
7.2 Viga Contínua Apoiada em Elementos Elásticos	68
7.3 Equacionamento do Modelo Rígido	73
7.4 Identificação das Características dos Apoios	75
7.5 Simulação Analógica do Modelo Rígido	77
7.6 Conclusões	81
<b>8 ACOPLAMENTO DO MODELO RÍGIDO E DO MODELO FLEXÍVEL</b>	<b>83</b>
8.1 Introdução	83
8.2 Análise Modal em Sistemas Mecânicos Amortecidos	84
8.3 Ortogonalidade dos Modos de Vibração	86
8.4 Balanço Energético	88
8.5 Exemplo de Aplicação	93
8.5.1 Dados	93
8.5.2 Montagem das Matrizes $[M^*]$ e $[U^*]$	94
8.5.3 Identificação de $[M^*]$ e $[K^*]$	97
8.5.4 Resultados	97
8.6 Conclusões	98
<b>9 EIXOS FLEXÍVEIS SUPOSTADOS POR MANCAIS MAGNÉTICOS</b>	<b>99</b>
9.1 Introdução	99
9.2 Mancais com Amortecimento Desprezível	99
9.3 Mancais com Amortecimento Não Desprezível	100
9.4 Conclusões	100

# RESUMO

As máquinas rotativas constituem um tipo particular de sistema mecânico onde elementos aparentemente simples - os eixos - são suportados por mancais e submetidos a uma grande variedade de efeitos dinâmicos.

A partir do momento que o eixo está construído, seus parâmetros modais podem ser obtidos experimentalmente. Estas informações, aliadas às características geométricas do eixo e às propriedades dos mancais, permitem a construção de modelos que reproduzam as frequências e os modos do sistema real. O número total de graus de liberdade é uma função da existência de excitações externas e da distribuição modal do eixo.

O método aqui proposto, utiliza-se das informações modais obtidas através de qualquer tipo de instrumentação e renormaliza os modos de forma que o modelo matemático discreto tenha a mesma energia elástica do sistema real, para cada modo natural.

Imagine que existam 3 sensores ao longo do eixo. O modelo discreto deve reproduzir, nestas três posições, o comportamento do sistema real, em frequência e em deslocamento. Neste trabalho ilustra-se o fato em questão para um sistema não excitado e para um sistema submetido a uma varredura senoidal. Os erros e desvios do modelo construído em relação ao sistema real são pequenos e podem ser explicados pelas simplificações feitas.



# ABSTRACT

Rotating machinery is a very particular kind of mechanical system where apparently simple elements - the shafts - are supported on several bearing and subjected to a huge variety of dynamical effects.

When the shaft is constructed it can be modal analysed before mounting it into the machine. This experimental information and the geometrical characteristics of the shaft added to the properties of the bearing allow a modelling that will reproduce frequencies and modes from the real system. The total amount of degrees of freedom to be considered will be a function of the existing excitations and the modal distribution of the shaft.

The proposed method uses the modal information gotten by any kind of instrumentation and re-normalizes the modes in a way that the discretized system has the same stored elastic energy as the real system, for that mode.

Imagine that there are 3 sensors along the shaft. The discrete model shall reproduce at these 3 positions the behavior of real system in frequency and displacement. This thesis shows that fact, for a non-excited system and for a system that is subjected to an harmonic swept force. The deviations from the exact result are very small and can be explained from the simplifications that are done.

# INTRODUÇÃO

A construção de modelos matemáticos para sistemas mecânicos como hidrogenadores, ultracentrifugas, veículos, robos etc, com o objetivo de se analisar e/ou prever o comportamento dinâmico dessas estruturas, é de fundamental importância em várias áreas da Engenharia.

Existem várias técnicas de modelamento para estruturas, baseadas em formas contínuas e/ou discretas de distribuição de massa e rigidez. Para os modelos matemáticos contínuos trabalha-se com equações diferenciais parciais e dependendo das características físicas dos sistemas mecânicos, essas equações dificilmente encontram soluções analíticas, a menos que se adotem hipóteses para simplificação dessas equações. Uma outra opção é trabalhar com modelos matemáticos discretos baseados em equações diferenciais ordinárias. Mas, algumas vezes, erros sérios são cometidos decorrentes das hipóteses adotadas em ambas as formas de modelamento. Por exemplo, no modelamento contínuo de muitos sistemas mecânicos utilizando-se a teoria de viga [1], tem-se a energia cinética de rotação dos elementos de viga comparável à energia cinética de translação nos modos de vibração mais altos. Como essa energia de rotação é geralmente negligenciada para que se consiga obter soluções analíticas para as equações diferenciais parciais, os modos mais altos tornam-se inválidos.

Nas várias técnicas utilizadas para a construção de modelos discretos como o Método das Matrizes de Transferência [2], o Método dos Superelementos [3], o Método dos Elementos Finitos [4], parte-se do conhecimento das características geométricas da estrutura e das características do material da mesma para chegar-se ao modelo matemático discreto. Porém, só se consegue boa precisão para as frequências e os modos naturais, quando se aumenta o número de graus de liberdade desses modelos. Mesmo com as várias técnicas de condensação estática e dinâmica já desenvolvidas [5,6,7], ainda se trabalha com um número de graus de liberdade acima do número de graus que realmente se tem interesse, pois essas técnicas de condensação são exatas somente para a análise estática e aproximadas para a análise dinâmica.

A partir do momento que os sistemas mecânicos deixam de existir somente nas plantas e nos papéis e passam a existir fisicamente, outras formas de construção de modelos matemáticos aparecem baseadas em **Técnicas de Identificação e Medições Experimentais**.

Neste contexto, esclarece-se que o objetivo deste trabalho é a obtenção de **modelos matemáticos discretos** para sistemas mecânicos já construídos, particularmente sistemas mecânicos contínuos suportados por elementos elásticos, como eixos de turbinas, rotores flexíveis de ultracentrifugas montados sobre mancais magnéticos e vários outros tipos de máquinas que possam ser modeladas pela teoria de viga. Deseja-se, também, que tais modelos representem o comportamento dinâmico dessas máquinas de uma forma precisa e que utilizem para isto, um **número reduzido de graus de liberdade**. Enfatizando esses pontos durante todo o trabalho, direciona-se a aplicação desses modelos matemáticos reduzidos, obtidos a partir de medições experimentais, na área de Engenharia de Controle.

Os dados experimentais para a construção desses modelos são obtidas em duas fases.

Na primeira fase, esses sistemas mecânicos como, por exemplo, o eixo de uma ultracentrífuga, estão desmontados, o que torna possível a obtenção de informações sobre as frequências naturais e os modos de flexão do sistema "livre-livre", ou seja, fora da sua carcaça ou estrutura suporte. Na segunda fase, esses sistemas mecânicos já estão montados dentro das suas carcaças sobre suspensões elásticas. Assim, uma vez que se tem acesso aos pontos onde esses sistemas se encontram apoiados, obtêm-se sinais de deslocamento através de sensores e chega-se a informações sobre a rigidez e o nível de amortecimento dessas suspensões.

Desta forma, divide-se este trabalho em três etapas:

- Na *primeira etapa*, composta pelos capítulos de 1 a 6, busca-se obter modelos matemáticos que descrevam o **comportamento flexível** desses sistemas mecânicos. Para isto, parte-se do conhecimento de alguns aspectos do comportamento dinâmico desses sistemas possíveis de serem obtidos experimentalmente, como os modos de vibrar e as frequências naturais e de algumas características físicas e identifica-se, através de balanços energéticos, as matrizes de massa e rigidez para o modelo

$$[M_f]\{\ddot{y}(t)\} + [K_f]\{y(t)\} = \{0\}$$

onde

$[M_f]$  é a matriz de massa condensada,

$[K_f]$  é a matriz de rigidez condensada,

$\{y(t)\}$  é o vetor com as coordenadas de deslocamento linear e

$\{\ddot{y}(t)\}$  é o vetor com as coordenadas de aceleração linear dos pontos discretizados.

- Na *segunda etapa*, composta pelo capítulo 7, procura-se descrever o **comportamento de corpo rígido** desses sistemas mecânicos suspensos por elementos elásticos onde as suspensões se caracterizam por terem constantes elásticas baixas e níveis de amortecimento subcríticos elevados. Baseado na dinâmica de corpos rígidos e na medição de dados experimentais, ajusta-se valores de amortecimento e rigidez para os elementos que compõem as suspensões desses sistemas mecânicos, e identifica-se o modelo

$$[M_R]\{\ddot{y}(t)\} + [C_R]\{\dot{y}(t)\} + [K_R]\{y(t)\} = \{0\}$$

onde

$[M_R]$  é a matriz de massa do modelo rígido,

$[C_R]$  é a matriz de amortecimento viscoso do modelo rígido e

$[K_R]$  é a matriz de rigidez do modelo rígido.

- Na *terceira e última etapa*, composta pelos capítulos 8 e 9, motivado pelo fato desses sistemas mecânicos operarem em faixas de velocidades variadas e atravessarem tanto as frequências naturais de corpo rígido como as frequências naturais de flexão, procura-se acoplar esses dois efeitos em um único modelo matemático

$$[M]_{glob}\{\ddot{y}(t)\} + [C]_{glob}\{\dot{y}(t)\} + [K]_{glob}\{y(t)\} = \{0\}$$

onde

$\{M\}_{gl,d}$  é a matriz de massa do modelo global,

$\{C\}_{gl,d}$  é a matriz de amortecimento global e

$\{K\}_{gl,d}$  é a matriz de rigidez do modelo global.

No final da primeira etapa, realiza-se procedimentos experimentais com o objetivo de verificação do método de identificação proposto para modelar o comportamento flexível das máquinas em questão.

No final da segunda etapa, realiza-se simulações em computador analógico para verificar a viabilidade da aplicação do método de identificação proposto para modelar o comportamento de corpo rígido desses sistemas mecânicos.

No final da terceira etapa, com o intuito de verificar a precisão dos modelos matemáticos reduzidos, responsáveis pelo modelamento tanto do comportamento de corpo rígido quanto o comportamento flexível, compara-se a resposta desses modelos com a resposta desses mesmos sistemas mecânicos modelados por elementos finitos.

# Capítulo 1

## MODELOS MATEMÁTICOS DISCRETOS

### 1.1 Introdução

Faz-se, aqui, um breve estudo sobre as propriedades dos modelos matemáticos discretos utilizados para se descrever o comportamento flexional de sistemas mecânicos com amortecimento estrutural desprezível. Visa-se com isto, introduzir conceitos como os de transformação linear de coordenadas, coordenadas modais ou principais, ortogonalidade e normalização modal e mostrar como se expressar a energia cinética máxima e a energia potencial máxima desses sistemas nas coordenadas modais.

### 1.2 Transformação Linear de Coordenadas

Considerando-se o sistema de equações diferenciais homogêneas

$$[M]\{\ddot{y}(t)\} + [K]\{y(t)\} = \{0\} \quad (1.1)$$

onde  $[M]$  e  $[K]$  são as matrizes de massa e rigidez respectivamente, de ordem  $n$ , diz-se que as equações de movimento estão desacopladas inercialmente, se  $[M]$  for diagonal. Se  $[M]$  tiver elementos fora da diagonal principal, o sistema de equações está acoplado inercialmente. Diz-se, também, que as equações estão desacopladas elasticamente se  $[K]$  for diagonal e acopladas elasticamente se  $[K]$  tiver elementos fora da diagonal principal.

É importante ressaltar que o acoplamento e desacoplamento não é uma propriedade intrínseca do sistema físico e sim, resultado do tipo de coordenada utilizada para descrever o movimento do sistema, como pode ser visto em [8], e que a transformação de coordenadas não modifica a natureza do sistema físico. [1]

Dada a matriz de transformação de coordenadas  $[U]$ , pode-se escrever que

$$\{y(t)\} = [U]\{\eta(t)\} \quad (1.2)$$

ou seja,  $[U]$  é um operador linear responsável pela transformação do vetor  $\{\eta(t)\}$  no vetor  $\{y(t)\}$ .

Considerando-se  $[U]$  constante, escreve-se que

$$\{\bar{y}(t)\} = [U]\{\bar{\eta}(t)\} \quad (1.3)$$

Substituindo-se as equações (1.2) e (1.3) em (1.1) e multiplicando-a por  $[U]^T$ , fica-se com

$$[U]^T[M][U]\{\bar{\eta}(t)\} + [U]^T[K][U]\{\eta(t)\} = \{0\} \quad (1.4)$$

ou,

$$[M]\{\bar{\eta}(t)\} + [K]\{\eta(t)\} = \{0\} \quad (1.5)$$

onde as matrizes  $[M]$  e  $[K]$  são dadas por

$$[M] = [U]^T[M][U] \quad (1.6)$$

$$[K] = [U]^T[K][U] \quad (1.7)$$

É possível encontrar uma matriz de transformação de coordenadas  $[U]$  que diagonalize  $[M]$  e  $[K]$  simultaneamente, ou seja, uma matriz que desacople as equações de movimento do sistema tanto elasticamente como inercialmente. Esta matriz é chamada de matriz modal e é formada pelos vetores modais. Estes vetores representam os modos naturais de vibrar do sistema físico. As coordenadas  $\eta_j(t)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) são chamadas de coordenadas naturais ou principais ou modais.

Considerando-se como solução para a equação (1.1) um movimento harmônico com frequência  $w$ , chega-se a equação

$$-w^2[M]\{U\} + [K]\{U\} = \{0\} \quad (1.8)$$

Para que  $\{U\}$  seja diferente de zero, é necessário que o determinante da matriz  $[K] - w^2[M]$  seja nulo. Obtém-se com isto,  $n$  raízes  $w_1^2, w_2^2, \dots, w_n^2$ , ou  $w_r^2$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ), que são chamadas de frequências naturais do sistema.

Associado a cada frequência  $w_r$  existe um vetor  $\{U^{(r)}\}$  composto por elementos reais  $u_i^{(r)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Este vetor  $\{U^{(r)}\}$  é a solução do problema de autovalor dado pela equação

$$[K]\{U^{(r)}\} = w_r^2[M]\{U^{(r)}\}, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (1.9)$$

Os autovetores  $\{U^{(r)}\}$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) representam matematicamente, a forma física de vibrar do sistema mecânico. Uma vez estabelecido o sistema de coordenadas em que se deseja descrever o comportamento do sistema mecânico, verifica-se que a relação entre qualquer dois elementos  $u_i^{(r)}$  e  $u_j^{(r)}$  é constante.

Observando-se que a equação (1.8) é homogênea, pode-se afirmar que se  $\{U^{(r)}\}$  é uma solução para (1.8),  $\alpha_r\{U^{(r)}\}$  também é outra solução, onde  $\alpha_r$  é uma constante arbitrária.

### 1.3 Ortonormalização dos Modos Naturais

Se um dos elementos do autovetor  $\{U^{(r)}\}$  assume um certo valor, como a relação entre os elementos de um mesmo vetor é constante, ajusta-se, automaticamente, todos os outros elementos. Este processo de ajuste dos elementos do vetor modal em amplitude é chamado de normalização e resulta em modos normais de vibração.

Destaca-se, também, que para os modos flexionais, têm-se todas as frequências naturais diferentes de zero e para cada frequência natural associa-se uma forma de vibrar. Assim, pode-se escolher um critério de normalização de modo que

$$\{U^{(r)}\}^T [M] \{U^{(r)}\} = 1, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (1.10)$$

com a vantagem de

$$\{U^{(r)}\}^T [K] \{U^{(r)}\} = w_r^2, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (1.11)$$

Sendo as matrizes  $[M]$  e  $[K]$  simétricas, pode-se escrever

$$\{U^{(s)}\}^T [M] \{U^{(r)}\} = \{0\}, \quad r \neq s \quad (1.12)$$

e

$$\{U^{(s)}\}^T [K] \{U^{(r)}\} = \{0\}, \quad r \neq s \quad (1.13)$$

e observar a ortogonalidade dos modos normais ou vetores modais em relação a matriz de massa  $[M]$  e em relação a matriz de rigidez  $[K]$ .

Os vetores modais podem ser convenientemente arranjados numa matriz quadrada de ordem  $n$ , chamada de matriz modal, da seguinte forma:

$$[U] = [\{U^{(1)}\} \{U^{(2)}\} \dots \{U^{(n)}\}] \quad (1.14)$$

onde  $[U]$  é a matriz de transformação de coordenadas expressa em (1.2). Assim,

$$[K][U] = [M][U][w^2] \quad (1.15)$$

onde  $[w^2]$  é a matriz diagonal composta pelas frequências naturais ao quadrado.

Se os modos naturais forem normalizados de acordo com a equação (1.10), pode-se escrever que

$$[M] = [U]^T [M] [U] = [I] \quad (1.16)$$

e

$$[K] = [U]^T [K] [U] = [w^2] \quad (1.17)$$

Deve-se ressaltar aqui, que parte do processo de identificação para a obtenção de  $[M]$  e  $[K]$  baseia-se, fundamentalmente, nas equações (1.16) e (1.17). [9]

## 1.4 Energia Potencial e Energia Cinética

A representação matemática da energia potencial elástica máxima armazenada em cada modo natural  $r$  do sistema mecânico é dada na forma quadrática por

$$E_{p(r)} = \frac{1}{2} \{U^{(r)}\}^T [K] \{U^{(r)}\}, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (1.18)$$

Denotando-se por  $\{\dot{U}_i\}$  a velocidade dos pontos discretizados, a energia cinética em cada modo natural é representada também na forma quadrática por

$$E_{c(r)} = \frac{1}{2} \{\dot{U}^{(r)}\}^T [M] \{\dot{U}^{(r)}\}, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (1.19)$$

Considerando o movimento harmônico e na frequência natural  $\omega_r$ , a energia cinética máxima em cada modo pode ser escrita como

$$E_{c(r)} = \frac{1}{2} \omega_r^2 \{U^{(r)}\}^T [M] \{U^{(r)}\}, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (1.20)$$



## Capítulo 2

# MODELOS MATEMÁTICOS CONTÍNUOS

### 2.1 Introdução

Faz-se, aqui, uma apresentação rápida da equação diferencial parcial para vigas contínuas, juntamente com as suas condições de contorno. Ressalta-se que essa equação é apresentada na sua forma mais simples [1], pois, vários efeitos são negligenciados. Em [10] encontra-se esta equação na sua forma mais geral, onde os efeitos de cisalhamento e rotação são levados em consideração.

Aborda-se, também, conceitos de normalização e ortogonalidade entre os modos de flexão contínuos e apresenta-se as equações da energia potencial e energia cinética para vigas.

### 2.2 Equação e Condições de Contorno

A equação diferencial homogênea para vibrações transversais livres em vigas, é dada por

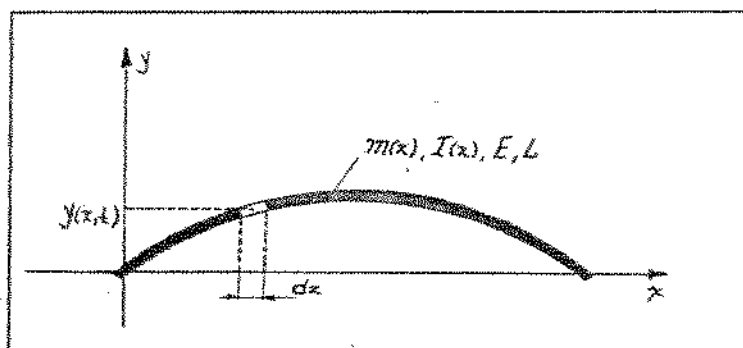


Figura 2.1: Viga Contínua em Flexão

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right] = m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

onde

- $L$  é o comprimento da viga,
- $E$  é o módulo de elasticidade do material,
- $I(x)$  é o momento de inércia de área e
- $m(x)$  é a massa distribuída.

Para completar a formulação do problema são necessárias quatro condições de contorno que podem ser obtidas das características físicas do sistema mecânico contínuo. Por exemplo, para uma viga

- (a) engastada em  $x = L$

$$y(L, t) = 0 \quad (2.2)$$

$$\left[ \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right]_{(x=L)} = 0 \quad (2.3)$$

- (b) apoiada em  $x = L$

$$y(L, t) = 0 \quad (2.4)$$

$$EI(x) \left[ \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right]_{(x=L)} = 0 \quad (2.5)$$

- (c) livre em  $x = L$

$$EI(x) \left[ \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right]_{(x=L)} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right]_{(x=L)} = 0 \quad (2.7)$$

Sendo  $y(x, t)$  na equação (2.1) separável no tempo e no espaço

$$y(x, t) = Y(x)F(t) \quad (2.8)$$

e, considerando-se  $F(t)$  uma função harmônica de frequência  $\omega$ , é possível escrever que

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] + \omega^2 m(x) Y(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.9)$$

onde  $Y(x)$  é uma função que precisa satisfazer as condições de contorno assumidas.

Resolvendo-se a equação (2.9), obtém-se infinitos valores discretos para  $\omega^2$ , ou seja,  $\omega_r$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) que são as frequências naturais do sistema. Para cada frequência natural existe uma correspondente autofunção, ou modo natural  $Y_r(x)$  ( $r = 1, 2, \dots$ ).

## 2.3 Ortogonalidade dos Modos Naturais

As frequências naturais  $\omega_r$  e os modos naturais  $Y_r(x)$  desses sistemas mecânicos dependem das suas condições de apoio e das suas características geométricas (condições de contorno e valores dos parâmetros físicos de distribuição de massa, área da secção transversal da viga, módulo de elasticidade do material etc.)

Da mesma forma que as equações para os modelos discretos, a equação (2.9) para modelos contínuos também é homogênea. Logo, se  $Y_r(x)$  é solução para a equação (2.9) e representa um dos modos naturais de vibrar do modelo contínuo,  $\phi_r Y_r(x)$  também é solução para (2.9), sendo  $\phi_r$  uma constante qualquer que depende do critério de normalização adotado. Por exemplo, uma forma de normalização usual é dada por

$$\int_0^L m(x) |Y_r(x)|^2 dx = 1 \quad r = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

A existência da ortogonalidade entre os modos naturais em sistemas contínuos é descrita por

$$\int_0^L m(x) Y_r(x) Y_s(x) dx = 0, \quad r \neq s \quad (2.11)$$

Se existirem certos pontos do sistema contínuo ( $L_1, L_2, \dots, L_p$ ) com massas concentradas ( $m_1, m_2, \dots, m_p$ ), a ortogonalidade e a normalização dos modos naturais serão dadas por

$$\int_0^L m(x) Y_r(x) Y_s(x) dx + \sum_{i=1}^p m_i Y_r(L_i) Y_s(L_i) = 0, \quad r \neq s \quad (2.12)$$

$$\int_0^L m(x) |Y_r(x)|^2 dx + \sum_{i=1}^p m_i |Y_r(L_i)|^2 = 1, \quad r = s = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

## 2.4 Energia Cinética e Energia Potencial

A energia cinética no modo natural  $r$  do modelo contínuo é dada por

$$E_{c(r)} = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) \left[ \frac{\partial y_r(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx, \quad r = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Para a energia potencial armazenada pela linha elástica em cada modo natural  $r$ , tem-se [1]

$$E_{p(r)} = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left[ \frac{\partial^2 y_r(x, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx, \quad r = 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

onde  $EI(x)$  é definido como rigidez de flexão.

É interessante destacar que através da relação entre a energia armazenada na linha elástica e a energia presente no modelo discreto será possível realizar a generalização do processo de identificação no capítulo 3, para qualquer que seja a normalização adotada para os autovetores modais.

## Capítulo 3

# MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO

### 3.1 Introdução

Quando se tem as matrizes de massa  $[M_f]$  e rigidez  $[K_f]$  já montadas e deseja-se visualizar a forma de cada modo natural de vibrar associado a cada frequência natural  $\omega_r$  do modelo discreto, o critério adotado para a normalização dos autovetores não é de grande importância. Observa-se vários critérios de normalização de autovetores em [11]. No entanto, quando se trabalha com o problema inverso, partindo-se dos autovetores e autovalores para se chegar nas matrizes de massa  $[M_f]$  e rigidez  $[K_f]$ , o critério de normalização adotado para os autovetores é de fundamental importância. Para cada critério de normalização utilizado chega-se a uma matriz de massa  $[M_f]$  e a uma matriz de rigidez  $[K_f]$  diferentes.

O processo de identificação aqui apresentado, baseia-se no conhecimento dos parâmetros modais do sistema mecânico, ou seja, dos autovetores e autovalores. Esses parâmetros podem ser obtidos experimentalmente e, no processo experimental, desconhece-se o critério de normalização adotado. Ressalta-se, também, que a normalização é definida em função da matriz de massa  $[M_f]$  (ver equação 1.16) e esta matriz é desconhecida!

Uma vez que se tem como objetivo chegar a um modelo matemático único, independente do critério de normalização utilizado para os autovetores, desenvolve-se o método de identificação que tem como fundamento o balanço energético entre os modelos discretos e os modelos contínuos.

No final deste capítulo, baseado no método de identificação apresentado, constróem-se modelos matemáticos discretos para uma viga biapoiada. Destaca-se que esta viga poderia representar um rotor de Laval apoiado sobre mancais rígidos.

### 3.2 Obtenção da Matriz de Normalização

Como foi visto no capítulo 2, um sistema mecânico contínuo (aqui representado por uma viga) tem infinitos graus de liberdade. No entanto, o que se deseja neste instante, é descrever o comportamento dinâmico desses sistemas através de modelos matemáticos discreto com um número limitado de graus de liberdade, ou seja,

$$[M_f]\{\ddot{y}(t)\} + [K_f]\{y(t)\} = \{0\} \quad (3.1)$$

onde

$[M_f]$  é a matriz de massa condensada de ordem  $n \times n$ ,

$[K_f]$  é a matriz de rigidez condensada de ordem  $n \times n$ ,

$\{y(t)\}$  é o vetor com as coordenadas de deslocamento linear dos pontos discretizados de ordem  $n$  e

$\{\ddot{y}(t)\}$  é o vetor com as coordenadas de aceleração linear dos pontos discretizados de ordem  $n$ .

Passando-se das coordenadas lineares para as coordenadas modais, pode-se escrever de acordo com as equações (1.16) e (1.17) que

$$[U]^T[M_f][U] = [M] \quad (3.2)$$

e

$$[U]^T[K_f][U] = [K] \quad (3.3)$$

Reescrevendo-se a equação (3.1) nas coordenadas modais, de acordo com a equação (1.5), tem-se

$$[M]\{\ddot{\eta}(t)\} + [K]\{\eta(t)\} = \{0\} \quad (3.4)$$

ou

$$[U]^T[M_f][U]\{\ddot{\eta}(t)\} + [U]^T[K_f][U]\{\eta(t)\} = \{0\} \quad (3.5)$$

Sabendo-se que a solução da equação (3.5) é uma superposição de movimentos harmônicos nas  $n$  frequências naturais do sistema mecânico  $\omega_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ), pode-se escrever que

$$-\omega_r^2 [U]^T[M_f][U] + [U]^T[K_f][U] = [0] \quad (3.6)$$

e afirmar que os elementos da matriz diagonal  $[M]$  correspondem ao dobro da energia cinética máxima de cada modo  $r$  (ver a equação (1.20)) e os elementos da matriz diagonal  $[K]$  ao dobro da energia potencial máxima de cada modo (ver equação (1.18)).

Igualando-se a energia de deformação da linha elástica em cada modo  $r$ , equação (2.15), com a energia presente no modelo discreto, tem-se que

$$\omega_r^2 [M] = \left[ \int_0^L EI(x) \left[ \frac{d^2 Y_r(x)}{dx^2} \right]^2 dx \right] \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (3.7)$$

As matrizes  $[\omega_r^2]$ ,  $[U]$  e as equações da linha elástica  $Y_r(x)$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) podem ser obtidas através do processo experimental de análise modal. O módulo de elasticidade do material e o momento de inércia de área  $I(x)$  são características da peça ou do eixo ou do sistema mecânico em questão, e também podem ser obtidos experimentalmente. Assim, torna-se possível encontrar a matriz de normalização  $[M]$

$$[M] = \begin{bmatrix} w_1^{-2} \int_0^L EI(x) \left[ \frac{d^2 Y_1(x)}{dx^2} \right]^2 dx & & & \\ & \ddots & & \\ & & w_2^{-2} \int_0^L EI(x) \left[ \frac{d^2 Y_2(x)}{dx^2} \right]^2 dx & \\ & & & \ddots \\ & & & & w_n^{-2} \int_0^L EI(x) \left[ \frac{d^2 Y_n(x)}{dx^2} \right]^2 dx \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Identificam-se, em seguida, as matrizes de massa e de rigidez para o modelo, através das equações (3.2) e (3.3), ou seja,

$$[M_f] = ([U]^T)^{-1} [M] [U]^{-1} \quad (3.9)$$

$$[K_f] = ([U]^T)^{-1} [w^2] [M] [U]^{-1} \quad (3.10)$$

Dependendo dos sistemas mecânicos com os quais se deseja trabalhar, muitas vezes é mais conveniente obter experimentalmente a função de distribuição de massa  $m(x)$  ao longo do seu comprimento  $L$  que a função do momento de inércia de área  $I(x)$ . Pensando-se assim, pode-se igualar a energia cinética máxima do modelo contínuo com a energia cinética máxima do modelo discreto e escrever que

$$[w^2] [M] = \left[ w_r^2 \int_0^L m(x) |Y_r(x)|^2 dx \right] \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (3.11)$$

ou

$$[M] = \begin{bmatrix} \int_0^L m(x) |Y_1(x)|^2 dx & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \int_0^L m(x) |Y_2(x)|^2 dx & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \int_0^L m(x) |Y_n(x)|^2 dx \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Desta forma, conhecendo-se experimentalmente a função de distribuição de massa  $m(x)$  ao longo de  $L$  e reconstituindo-se a equação da linha elástica através da análise modal experimental, pode-se identificar as matrizes  $[M_f]$  e  $[K_f]$  através das equações (3.9) e (3.10).

Deve-se destacar que as únicas propriedades conhecidas de  $[M_f]$  e  $[K_f]$  é que são matrizes simétricas, e como, inicialmente considera-se apenas os modos de flexão, sem considerar os modos de corpo livre, pode-se afirmar também, que  $[M_f]$  e  $[K_f]$  são matrizes positivo-definidas.

### 3.3 Exemplo de Aplicação do Método de Identificação

Para descrever o comportamento não excitado da viga biapoiada mostrada na figura 3.1.(a), faz-se uso da equação diferencial (2.1) e das condições de contorno (2.4) e (2.5) aplicadas nas extremidades da mesma ( $x = 0$  e  $x = L$ ). Considerando-se  $I(x) = I$  e  $m(x) = m$  constantes, escreve-se a equação (2.1) da seguinte forma

$$\frac{d^4 Y(x)}{dx^4} - \beta^4 Y(x) = 0 \quad (3.13)$$

onde

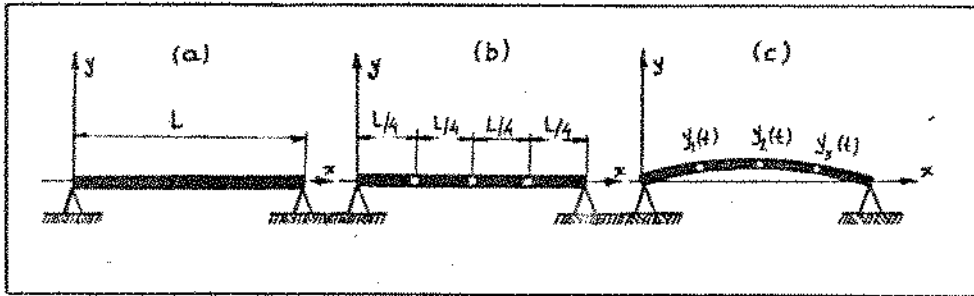


Figura 3.1: Viga contínua e discretizada biapoçada

$$\beta^4 = \frac{w^2 m}{EI} \quad (3.14)$$

Supondo-se como solução para a equação (3.13) a equação

$$Y(x) = \alpha \sin \beta x + \alpha' \cos \beta x + \alpha'' \sinh \beta x + \alpha''' \cosh \beta x \quad (3.15)$$

e utilizando-se as condições de contorno mencionadas, chega-se que

$$\alpha' = \alpha'' = \alpha''' = 0 \quad (3.16)$$

e

$$\sin \beta L = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = \frac{\pi r}{L}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

Assim, a forma da linha elástica para a viga biapoçada, em cada modo natural  $r$ , é dada por

$$Y_r(x) = \alpha_r \sin \left( \frac{\pi r x}{L} \right), \quad r = 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

onde  $\alpha_r$  é uma constante qualquer.

As frequências naturais para a viga em questão, são obtidas através das equações (3.14) e (3.17)

Destaca-se que as equações (3.17) e (3.18) obtidas analiticamente, poderiam ser obtidas experimentalmente através de uma análise modal.

Com o auxílio da equação (3.18), constrói-se os vetores modais para as coordenadas  $x = L/4$ ,  $x = L/2$  e  $x = 3L/4$  mostradas na figura 3.1.(b)

$$\begin{aligned} \cdot \{U^{(1)}\}^T &= \alpha_1 \{\sqrt{2}/2; 1; \sqrt{2}/2\} \\ \cdot \{U^{(2)}\}^T &= \alpha_2 \{1; 0; -1\} \\ \cdot \{U^{(3)}\}^T &= \alpha_3 \{\sqrt{2}/2; -1; \sqrt{2}/2\} \end{aligned}$$

Com a utilização das constantes  $\alpha_r$  escreve-se a equação (3.18) da forma mais geral, e direciona-se esta análise para o caso onde  $Y(x)$  é interpolada experimentalmente e desconhece-se o critério de normalização utilizado no processo de análise modal. Obtém-se desta maneira, a matriz modal

$$[U] = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ \sqrt{2}/2 & -1 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Constrói-se  $[w^2]$  com as três primeiras frequências naturais do sistema mecânico contínuo e obtém-se

$$[w^2] = \frac{\pi^4 EI}{mL^4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Para a obtenção da energia de deformação máxima armazenada em cada modo natural  $r$ , basta integrar a equação (2.15)

$$2E_p r = \int_0^L EI(x) \left[ \frac{d^2 Y_r(x)}{dx^2} \right]^2 dx = \alpha_r^2 \frac{EI \pi^4 r^4}{2L^3} \quad (3.21)$$

Constrói-se, desta forma, a matriz de normalização de acordo com a equação (3.8)

$$[M] = \frac{mL}{2} \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Uma vez obtida a matriz  $[M]$ , identifica-se  $[M_f]$  e  $[K_f]$  de acordo com as equações (3.9) e (3.10)

$$[M_f] = \frac{mL}{16} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$[K_f] = \frac{\pi^4 EI}{16L^3} \begin{bmatrix} 114 & -80\sqrt{2} & 50 \\ -80\sqrt{2} & 164 & -80\sqrt{2} \\ 50 & -80\sqrt{2} & 114 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Observa-se, através das equações (3.23) e (3.24) que as matrizes  $[M_f]$  e  $[K_f]$  não dependem das constantes  $\alpha_r$  ( $r = 1, 2, 3$ ). Logo, pode-se afirmar que o processo de identificação condicionado através do balanço energético entre os modelos contínuos e discretos, torna-se independente de qualquer critério de normalização adotado para a matriz modal  $[U]$ .

Assim, o sistema de equações que representa o movimento da viga biapojada, discretizada em três pontos (figura 3.1.(c)) é

$$\frac{mL}{16} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{y}_1(t) \\ \tilde{y}_2(t) \\ \tilde{y}_3(t) \end{Bmatrix} + \frac{\pi^4 EI}{16L^3} \begin{bmatrix} 114 & -80\sqrt{2} & 50 \\ -80\sqrt{2} & 164 & -80\sqrt{2} \\ 50 & -80\sqrt{2} & 114 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

Conclui-se pela característica da matriz simétrica e não diagonal  $[K_f]$ , que no sistema de coordenadas escolhido  $\{y(t)\}$ , as equações do movimento estão acopladas elasticamente. Pela característica diagonal da matriz de massa  $[M_f]$ , conclui-se que as equações de movimento estão desacopladas inercialmente.



Calculando-se as raízes do polinômio característico

$$P(w'^2) = (28,5 - w'^2)^2(41,0 - w'^2) - 156,25(41,0 - w'^2) - 1600(28,5 - w'^2) + 20000 = 0$$

chega-se aos seguintes resultados para as frequências naturais do modelo discreto:

$$\begin{aligned} \cdot w'_1 &= 1,00\pi^2\{EI/mL^4\}^{1/2} \\ \cdot w'_2 &= 4,00\pi^2\{EI/mL^4\}^{1/2} \\ \cdot w'_3 &= 9,00\pi^2\{EI/mL^4\}^{1/2} \end{aligned}$$

Estas frequências coincidem exatamente com as três primeiras frequências do modelo contínuo.

Calculando-se os autovetores do modelo discreto, chega-se que

$$\begin{aligned} \cdot \{U^{(1)}\}^T &= \alpha_1\{\sqrt{2}/2; 1; \sqrt{2}/2\} \\ \cdot \{U^{(2)}\}^T &= \alpha_2\{1; 0; -1\} \\ \cdot \{U^{(3)}\}^T &= \alpha_3\{\sqrt{2}/2; -1; \sqrt{2}/2\} \end{aligned}$$

Comparando-se os valores de  $\{U^{(1)}\}$ ,  $\{U^{(2)}\}$  e  $\{U^{(3)}\}$  do modelo discreto com os valores de  $\{U^{(1)}\}$ ,  $\{U^{(2)}\}$  e  $\{U^{(3)}\}$  obtidos do modelo contínuo discretizado, observa-se que com um modelo de três graus de liberdade consegue-se ajustar os três primeiros modos e as três primeiras frequências naturais dos sistemas mecânicos contínuos.

### 3.4 Variando o Número de Graus de Liberdade dos Modelos

Utilizando-se o mesmo procedimento do item 3.3 para o exemplo da viga biapoada, torna-se possível observar o que ocorre com as matrizes de massa  $\{M_f\}$  e rigidez  $\{K_f\}$  quando se aumenta o número de graus de liberdade dos modelos discretos

$$\{M_f\}\{\ddot{y}(t)\} + \{K_f\}\{y(t)\} = \{0\}$$

\* 1 G.L. - elemento de massa = 0,500mL (50% massa total)

$$M_f(1,1) = 0,500mL \quad K_f(1,1) = 48,704EI/mL^3$$

\* 2 G.L. - elemento de massa = 0,333mL (66% massa total)

$$M_f(1,1) = 0,333mL \quad K_f(1,1) = 275,99EI/mL^3$$

$$M_f(1,2) = 0,000mL \quad K_f(1,2) = -243,52EI/mL^3$$

$$M_f(2,2) = 0,333mL \quad K_f(2,2) = 275,99EI/mL^3$$

\* 3 G.L. - elemento de massa = 0,250mL (75% massa total)

(ver equação 3.25)

\* 4 G.L. - elemento de massa = 0,200mL (80% da massa total)

$$M_f(1,1) = 0,200mL \quad K_f(1,1) = 1375EI/mL^3$$

$$M_f(1,2) = 0,000mL \quad K_f(1,2) = -1394EI/mL^3$$

$$M_f(1,3) = 0,000mL \quad K_f(1,3) = 697EI/mL^3$$

$$M_f(1,4) = 0,000mL \quad K_f(1,4) = -228EI/mL^3$$

$$M_f(2,2) = 0,200mL \quad K_f(2,2) = 2072EI/mL^3$$

$$M_f(2,3) = 0,000mL \quad K_f(2,3) = -1622EI/mL^3$$

$$M_f(2,4) = 0,000mL \quad K_f(2,4) = 697EI/mL^3$$

$$M_f(3,3) = 0,200mL \quad K_f(3,3) = 2072EI/mL^3$$

$$M_f(3,4) = 0,000mL \quad K_f(3,4) = -1394EI/mL^3$$

$$M_f(4,4) = 0,200mL \quad K_f(4,4) = 1375EI/mL^3$$

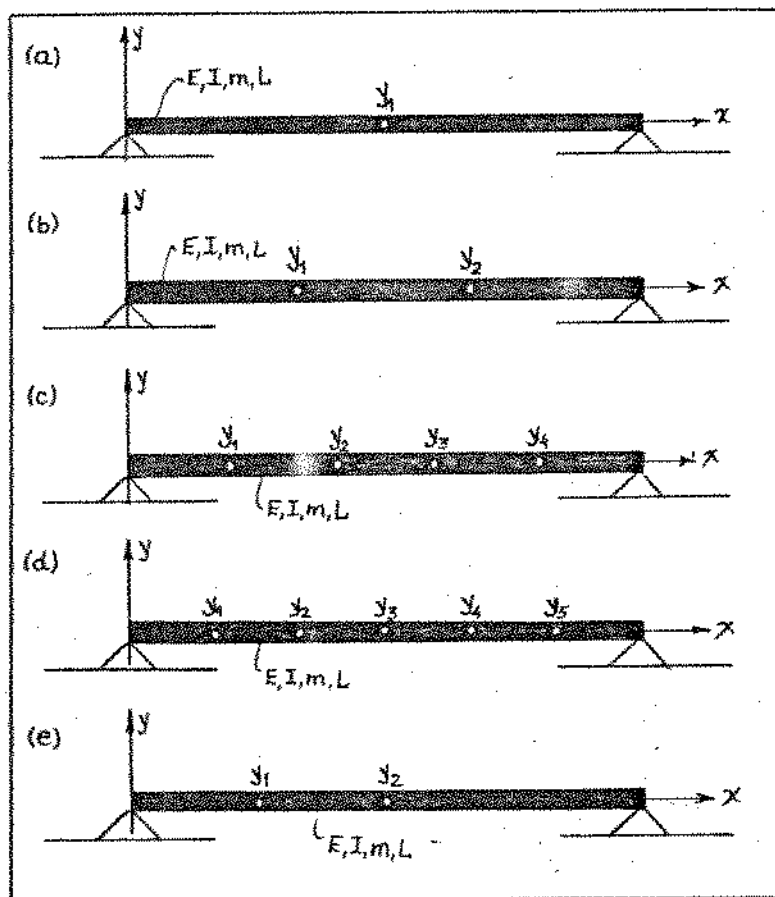


Figura 3.2: Viga Contínua Discretizada

Observa-se que quanto maior o número de graus de liberdade dos modelos, menor o valor dos elementos da matriz de massa. Fazendo-se o número de graus de liberdade tender para infinito e fazendo-se a somatória dos elementos da matriz de massa, observa-se que a matriz passa a contar com 100% da massa do sistema mecânico e os elementos de massa passam a ser infinitesimais.

- \* 5 G.L. - elemento de massa = 0,166mL (83% da massa total)
- \* 6 G.L. - elemento de massa = 0,143mL (85,8% da massa total)
- \* 7 G.L. - elemento de massa = 0,125mL (87,5% da massa total)
- \* ∞ G.L. - elemento de massa = ε mL (100% da massa total)

### 3.5 Variando a Posição das Coordenadas

No item anterior variou-se o número de graus de liberdade dos modelos, escolhendo-se coordenadas simétricas em relação aos dois apoios, figuras 3.2.(a), (b), (c) e (d). Observou-se que as matrizes de massa eram sempre diagonais e conseqüentemente, o sistema de equações desacoplado inercialmente.

Estudando-se a característica das matrizes  $[M_f]$  e  $[K_f]$  identificadas quando essas coordenadas escolhidas não guardam simetria em relação aos apoios, figura 3.2.(e), observa-se o acoplamento inercial do sistema de equações.

$$mL \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2}/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \end{Bmatrix} + \frac{\pi^4 EI}{L^3} \begin{bmatrix} 8 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & 9/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Com isto, destaca-se mais uma vez a afirmativa feita no capítulo 1, que o acoplamento ou desacoplamento das equações diferenciais não é uma propriedade intrínseca do sistema físico e sim, resultado do tipo de coordenada utilizada para descrever o movimento do sistema mecânico.

## Capítulo 4

# RESPOSTA FORÇADA DOS MODELOS MATEMÁTICOS

### 4.1 Introdução

Faz-se, aqui, um estudo comparativo das respostas de deslocamento do modelo contínuo e do modelo discreto identificado, utilizando-se para isto, os fundamentos de análise modal abordados nos capítulos 1 e 2. O equacionamento mostrado nos itens 4.2 e 4.4 mostra o Teorema da Expansão utilizado com autovetores e autofunções normalizados de uma forma arbitrária.

Compara-se o comportamento dos pontos referenciados do modelo discreto com os do modelo contínuo, quando ambos são excitados por condições iniciais de deslocamento, verificando-se a validade dos modelos discretos identificados.

### 4.2 Resposta Excitada dos Modelos Discretos

Dada a equação de movimento

$$[M_f]\{\ddot{y}(t)\} + [K_f]\{y(t)\} = \{f(t)\} \quad (4.1)$$

onde  $f_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) são funções de excitação arbitrárias e dependentes do tempo, e, conhecendo-se a matriz modal do modelo identificado  $[U']$  juntamente com os seus autovalores  $\omega_i^2$ , pode-se afirmar que a resposta do sistema é a superposição dos modos normais, ou seja,

$$\{y(t)\} = [U']\{\eta(t)\} \quad (4.2)$$

onde  $\{\eta(t)\}$  é uma matriz coluna composta de uma série de coordenadas generalizadas dependentes do tempo.

Sendo  $[U']$  definida como uma matriz constante, deriva-se a equação (4.2), que substituída na equação (4.1) resulta:

$$[M_f][U']\{\ddot{\eta}(t)\} + [K_f][U']\{\eta(t)\} = \{f(t)\} \quad (4.3)$$

Multiplicando-se a equação (4.3) por  $[U']^T$  obtém-se:

$$[U']^T [M_f] [U'] \{\bar{\eta}(t)\} + [U']^T [K_f] [U'] \{\eta(t)\} = [U']^T \{f(t)\} \quad (4.4)$$

Sendo  $[M']$  e  $[K']$  definidas como

$$[M'] = [U']^T [M_f] [U'] \quad (4.5)$$

$$[K'] = [U']^T [K_f] [U'] \quad (4.6)$$

pode-se escrever que

$$\{\bar{\eta}(t)\} + [M']^{-1} [K'] \{\eta(t)\} = [M']^{-1} [U']^T \{f(t)\} \quad (4.7)$$

Definindo-se

$$\{N(t)\} = [M']^{-1} [U']^T \{f(t)\} \quad (4.8)$$

e, sabendo-se que

$$[M']^{-1} [K'] = [w'^2] \quad (4.9)$$

reescreve-se a equação (4.7) da seguinte forma:

$$\{\bar{\eta}(t)\} + [w'^2] \{\eta(t)\} = \{N(t)\} \quad (4.10)$$

A equação (4.10) representa uma série de  $n$  equações diferenciais desacopladas do tipo

$$\ddot{\eta}_r(t) + w_r'^2 \eta_r(t) = N_r(t), \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (4.11)$$

A solução para a equação (4.11) pode ser facilmente obtida pelo Método da Transformada de Laplace [12]. Transformando ambos os lados da equação (4.11)

$$\mathcal{L}\{\ddot{\eta}_r(t)\} + w_r'^2 \mathcal{L}\{\eta_r(t)\} = \mathcal{L}\{N_r(t)\} \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (4.12)$$

escreve-se que

$$s^2 \bar{\eta}_r(s) - s \dot{\eta}_r(0) - \eta_r(0) + w_r'^2 \eta_r(s) = \bar{N}_r(s) \quad (4.13)$$

onde  $\bar{\eta}_r(s)$  e  $\bar{N}_r(s)$  são as transformadas Laplace das funções  $\eta_r(t)$  e  $N_r(t)$  respectivamente, e,  $\eta_r(0)$  e  $\dot{\eta}_r(0)$  são os valores iniciais associados com as coordenadas generalizadas  $\eta_r(t)$ .

Rearranjando-se a equação (4.13)

$$\bar{\eta}(s) = \bar{N}_r(s) \frac{1}{s^2 + w_r'^2} + \frac{s}{s^2 + w_r'^2} \eta_r(0) + \frac{1}{s^2 + w_r'^2} \dot{\eta}_r(0) \quad (4.14)$$

e aplicando-se a anti-transformada de Laplace e o Teorema de Borel [12], chega-se a

$$\eta_r(t) = \frac{1}{w_r} \int_0^t \bar{N}_r(\tau) \sin w_r'(t - \tau) d\tau + \eta_r(0) \cos w_r' t + \dot{\eta}_r(0) \frac{\sin w_r' t}{w_r'}, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (4.15)$$

onde a integral da equação (4.15) é chamada de Integral de Convolução. As condições iniciais de deslocamento  $\eta_r(0)$  e iniciais de velocidade  $\dot{\eta}_r(0)$  podem ser obtidas através das equações (4.2) e (4.5)

$$\{\eta(0)\} = [M']^{-1}[U']^T[M_f]\{y(0)\} \quad (4.16)$$

e

$$\{\dot{\eta}(0)\} = [M']^{-1}[U']^T[M_f]\{\dot{y}(0)\} \quad (4.17)$$

onde  $\{y(0)\}$  e  $\{\dot{y}(0)\}$  são matrizes-colunas compostas com os deslocamentos e velocidades iniciais, respectivamente.

Desta forma, com o auxílio das equações (4.17), (4.16), (4.15) e (4.2), é possível descrever o comportamento do sistema discreto excitado por uma função no tempo  $f_r(t)$  qualquer.

### 4.3 Resposta do Modelo Identificado

Para o modelo da viga biapóida discretizada com três graus de liberdade, cujas matrizes de massa e rigidez foram identificadas no item 3.3 do Capítulo 3, obtém-se as matrizes:  $[U']$ ,  $[w'^2]$ ,  $[M']$  e  $[M_f]$  de acordo com as equações (3.19), (3.20), (3.22) e (3.23), pois,  $[w'^2] = [w^2]$  e  $[U'] = [U]$ .

Considerando-se tal modelo excitado somente por condições iniciais de velocidade  $\{\dot{y}(0)\}$  e deslocamento  $\{y(0)\}$ , escreve-se, através das equações (4.16) e (4.17) que:

$$\eta_1(0) = \{U''^{(1)}\}^T[M_f]M_1'^{-1}\{y(0)\} \quad (4.18)$$

$$\eta_2(0) = \{U''^{(2)}\}^T[M_f]M_2'^{-1}\{y(0)\} \quad (4.19)$$

$$\eta_3(0) = \{U''^{(3)}\}^T[M_f]M_3'^{-1}\{y(0)\} \quad (4.20)$$

$$\dot{\eta}_1(0) = \{U''^{(1)}\}^T[M_f]M_1'^{-1}\{\dot{y}(0)\} \quad (4.21)$$

$$\dot{\eta}_2(0) = \{U''^{(2)}\}^T[M_f]M_2'^{-1}\{\dot{y}(0)\} \quad (4.22)$$

$$\dot{\eta}_3(0) = \{U''^{(3)}\}^T[M_f]M_3'^{-1}\{\dot{y}(0)\} \quad (4.23)$$

Substituindo-se os valores de  $\{U''^{(1)}\}$ ,  $[M_f]$  e  $[M']$  na equação (4.18) e (4.21)

$$\eta_1(0) = \alpha_1 \left\{ \begin{matrix} \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 \end{matrix} \right\} \frac{mL}{16} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \frac{2}{mL\alpha_1^2} \left\{ \begin{matrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{matrix} \right\} \quad (4.24)$$

$$\dot{\eta}_1(0) = \alpha_1 \left\{ \begin{matrix} \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 \end{matrix} \right\} \frac{mL}{16} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \frac{2}{mL\alpha_1^2} \left\{ \begin{matrix} \dot{y}_1(0) \\ \dot{y}_2(0) \\ \dot{y}_3(0) \end{matrix} \right\} \quad (4.25)$$

chega-se que

$$\eta_1(0) = \frac{1}{\alpha_1} \left[ \sqrt{2}/4 y_1(0) + 1/2 y_2(0) + \sqrt{2}/4 y_3(0) \right] \quad (4.26)$$

$$\dot{\eta}(0) = \frac{1}{\alpha_1} \left[ \sqrt{2}/4 \dot{y}_1(0) + 1/2 \dot{y}_2(0) + \sqrt{2}/4 \dot{y}_3(0) \right] \quad (4.27)$$

Substituindo-se as equações (4.26) e (4.27) em (4.15)

$$\eta_1(t) = \frac{1}{\alpha_1} \left\{ \left[ \sqrt{2}/4 y_1(0) + 1/2 y_2(0) + \sqrt{2}/4 y_3(0) \right] \cos w_1' t + \left[ \sqrt{2}/4 \dot{y}_1(0) + 1/2 \dot{y}_2(0) + \sqrt{2}/4 \dot{y}_3(0) \right] \frac{\sin w_1' t}{w_1'} \right\} \quad (4.28)$$

Analogamente, obtém-se que

$$\eta_2(t) = \frac{1}{\alpha_2} \left\{ [1/2 y_1(0) - 1/2 y_3(0)] \cos w_2' t + [1/2 \dot{y}_1 - 1/2 \dot{y}_3] \frac{\sin w_2' t}{w_2'} \right\} \quad (4.29)$$

$$\eta_3(t) = \frac{1}{\alpha_3} \left\{ \left[ \sqrt{2}/4 y_1(0) - 1/2 y_2(0) + \sqrt{2}/4 y_3(0) \right] \cos w_3' t + \left[ \sqrt{2}/4 \dot{y}_1(0) - 1/2 \dot{y}_2(0) + \sqrt{2}/4 \dot{y}_3(0) \right] \frac{\sin w_3' t}{w_3'} \right\} \quad (4.30)$$

Com o auxílio da equação (4.2) tem-se:

$$\begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ \sqrt{2}/2 & -1 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \eta_3(t) \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

ou

$$y_1(t) = \sqrt{2}/2 \alpha_1 \eta_1(t) + \alpha_2 \eta_2(t) + \sqrt{2}/2 \alpha_3 \eta_3(t) \quad (4.32)$$

$$y_2(t) = \alpha_1 \eta_1(t) - \alpha_3 \eta_3(t) \quad (4.33)$$

$$y_3(t) = \sqrt{2}/2 \alpha_1 \eta_1(t) - \alpha_2 \eta_2(t) + \sqrt{2}/2 \alpha_3 \eta_3(t) \quad (4.34)$$

Observa-se pelas equações de (4.28) a (4.34) que a resposta do sistema em função do tempo é independente dos fatores de normalização  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  utilizados.

## 4.4 Resposta Excitada dos Modelos Contínuos

Para sistemas contínuos com excitação transversal  $f(x, t)$ , pode-se escrever a seguinte equação diferencial parcial em função do tempo  $t$  e da posição  $x$  (ver figura 2.1 do capítulo 2)

$$m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right] = f(x, t) \quad (4.35)$$

Considerando  $m(x) = m$  e  $I(x) = I$  constantes, tem-se que

$$m \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} = f(x, t) \quad (4.36)$$

Sendo  $y(x, t)$  separável no tempo e no espaço, escreve-se que

$$y(x, t) = Y(x)F(t) \quad (4.37)$$

onde  $Y(x)$  pode ser obtido de acordo com a aplicação das condições de contorno estudada no capítulo 2 (equações de (2.2) a (2.7)).

Para a obtenção da função  $F(t)$  faz-se uso do Teorema da Expansão e escreve-se que a resposta do sistema contínuo é

$$y(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r(x)F_r(t) \quad (4.38)$$

Derivando-se a equação (4.38) e substituindo-a na equação (4.36) obtém-se

$$m \sum_{r=1}^{\infty} Y_r(x) \ddot{F}_r(t) + EI \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d^4 Y_r(x)}{dx^4} F_r(t) = f(x, t) \quad (4.39)$$

Multiplicando-se a equação (4.39) por  $Y_s(x)$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) fica-se com

$$m \sum_{r=1}^{\infty} Y_s(x) Y_r(x) \ddot{F}_r(t) + EI \sum_{r=1}^{\infty} Y_s(x) \frac{d^4 Y_r(x)}{dx^4} F_r(t) = Y_s(x) f(x, t), \quad s = 1, 2, \dots \quad (4.40)$$

Integrando-se a equação (4.40) ao longo do comprimento  $L$  da viga,

$$m \sum_{r=1}^{\infty} \ddot{F}_r(t) \int_0^L Y_s(x) Y_r(x) dx + EI \sum_{r=1}^{\infty} F_r(t) \int_0^L Y_s(x) \frac{d^4 Y_r(x)}{dx^4} dx = \int_0^L Y_s(x) f(x, t) dx \quad s = 1, 2, \dots \quad (4.41)$$

Sabendo-se que  $Y_r(x)$  obedece às condições de ortogonalidade descrita no capítulo 2, pode-se escrever que

$$\int_0^L m(x) Y_s(x) Y_r(x) dx = \gamma_r \quad r = s = 1, 2, \dots \quad (4.42)$$

$$\int_0^L m(x) Y_s(x) Y_r(x) dx = 0 \quad s \neq r \quad (4.43)$$

onde  $\gamma_r$  é uma constante qualquer de normalização.

Consequentemente,

$$\int_0^L EI(x) \frac{d^4 Y_r(x)}{dx^4} Y_s(x) dx = \gamma_r w_r^2, \quad r = s = 1, 2, \dots \quad (4.44)$$

$$\int_0^L EI(x) \frac{d^4 Y_r(x)}{dx^4} Y_s(x) dx = 0, \quad r \neq s \quad (4.45)$$

Assim, para  $m(x) = m$  e  $I(x) = I$ , escreve-se que

$$m \int_0^L Y_s(x) Y_r(x) dx = \gamma_r, \quad s = r = 1, 2, \dots \quad (4.46)$$

$$EI \int_0^L \frac{d^4 Y_r(x)}{dx^4} dx = \gamma_r w_r^2, \quad s = r = 1, 2, \dots \quad (4.47)$$



Substituindo-se as equações (4.46) e (4.47) em (4.41), chega-se a um sistema com infinitas equações diferenciais desacopladas

$$\sum_{r=1}^{\infty} \ddot{F}_r(t) \gamma_r + \sum_{r=1}^{\infty} F_r(t) \gamma_r w_r^2 = \int_0^L Y_r(x) f(x, t) dx \quad (4.48)$$

ou

$$\ddot{F}_r(t) + w_r^2 F_r(t) = \gamma_r^{-1} \int_0^L Y_r(x) f(x, t) dx, \quad r = 1, 2, \dots \quad (4.49)$$

Definindo-se

$$Q_r(t) = \gamma_r^{-1} \int_0^L Y_r(x) f(x, t) dx \quad (4.50)$$

reescreve-se a equação (4.49) da seguinte forma

$$\ddot{F}_r(t) + w_r^2 F_r(t) = Q_r(t), \quad r = 1, 2, \dots \quad (4.51)$$

Aplicando-se a Transformada de Laplace à equação (4.51) e utilizando-se o Teorema de Borel, analogamente ao desenvolvimento da resposta excitada do modelo discreto, obtém-se que

$$F_r(t) = \frac{1}{w_r} \int_0^t Q_r(\tau) \sin w_r(t - \tau) d\tau + F_r(0) \cos w_r t + \dot{F}_r(0) \frac{\sin w_r t}{w_r}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (4.52)$$

Mas, pela equação (4.38) pode-se escrever que

$$y(x, 0) = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r(x) F_r(0) \quad (4.53)$$

Multiplicando-se a equação (4.53) por  $mY_s(x)$  e integrando-a no comprimento  $\bar{L}$ , tem-se que

$$\int_0^L mY_s(x) y(x, 0) dx = \sum_{r=1}^{\infty} F_r(0) \int_0^L mY_s(x) Y_r(x) dx, \quad s = 1, 2, \dots \quad (4.54)$$

Fazendo-se uso da equação (4.46) chega-se que

$$F_r(0) = m\gamma_r^{-1} \int_0^L Y_r(x) y(x, 0) dx, \quad r = 1, 2, \dots \quad (4.55)$$

Analogamente,

$$\dot{F}_r(0) = m\gamma_r^{-1} \int_0^L Y_r(x) \dot{y}(x, 0) dx, \quad r = 1, 2, \dots \quad (4.56)$$

Logo, com as equações (4.56), (4.55), (4.52) e (4.38) obtém-se a resposta do sistema contínuo para qualquer forma de excitação, e, a partir daí, torna-se possível a comparação com a resposta do modelo discreto.

## 4.5 Resposta do Modelo Contínuo Estudado

Para a viga biapoada (figura 3.1 do capítulo 3) tem-se que

$$Y_r(x) = \alpha_r \sin(\pi r x/L), \quad r = 1, 2, \dots \quad (4.57)$$

e

$$w_r = (\pi r)^2 (EJ/mL^4)^{1/2}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (4.58)$$

Substituindo a equação (4.57) na equação (4.46) e resolvendo a integral, obtém-se o fator de normalização  $\gamma_r$ :

$$\gamma_r = \frac{1}{2} mL\alpha_r^2, \quad r = 1, 2, \dots \quad (4.59)$$

Escrevendo as condições iniciais do movimento para a viga em questão como uma combinação linear de senóides, tem-se

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \sin(n\pi x/L) \quad (4.60)$$

$$\dot{y}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin(n\pi x/L) \quad (4.61)$$

onde as constantes  $P_n$  e  $Q_n$  relacionam-se com o deslocamento e com a velocidade respectivamente. Quando  $Q_1 = Q_2 = \dots = 0$ , pode-se afirmar que as constantes  $P_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) representam entre si uma relação quantitativa da influência de cada modo natural na condição inicial de deslocamento do sistema contínuo.

Ressalta-se, que como o sistema contínuo apresenta infinitas frequências e modos naturais e o modelo discreto identificado apresenta somente as três primeiras frequências e os três primeiros modos, excitando-se os modos maiores que o terceiro, pode-se fazer um estudo dos erros na amplitude máxima da resposta de deslocamento, decorrentes da aproximação do modelo com infinitos graus de liberdade por um modelo com três graus apenas.

Destaca-se, também, que quanto maior o número do modo e da frequência, menor a sua influência na amplitude de resposta do sistema contínuo ou discreto. Esta afirmativa pode ser constatada quando se observa a equação (4.15) e (4.52). Aumentando-se o número do modo  $r$ , obtém-se as frequências naturais mais altas e, como divide a integral de convolução e o termo relacionado com as condições de velocidade do sistema, pode-se perceber o fato em questão.

Considerando-se o modelo contínuo excitado somente pelas condições iniciais de velocidade e deslocamento, obtém-se  $\dot{F}_r(0)$  e  $F_r(0)$  substituindo-se as equações (4.60) e (4.61) nas equações (4.55) e (4.56) respectivamente. Com o auxílio das equações (4.57) e (4.59) escreve-se que

$$F_r(0) = \frac{m}{(1/2)mL\alpha_r^2} \int_0^L \sin(\pi r x/L) \sum_{n=1}^{\infty} P_n \sin(n\pi x/L) dx \quad r = 1, 2, \dots \quad (4.62)$$

$$\dot{F}_r(0) = \frac{m}{(1/2)mL\alpha_r^2} \int_0^L \sin(\pi r x/L) \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin(n\pi x/L) dx \quad r = 1, 2, \dots \quad (4.63)$$

Utilizando-se as propriedades da Série de Fourier e a ortogonalidade das funções trigonométricas [13], reescreve-se as equações (4.62) e (4.63) da seguinte forma

$$F_r(0) = P_r/\alpha_r, \quad r = 1, 2, \dots \quad (4.64)$$

$$\dot{F}_r(0) = Q_r/\alpha_r, \quad r = 1, 2, \dots \quad (4.65)$$

Substituindo-se as equações (4.64) e (4.65) na equação (4.52) fica-se com

$$F_r(t) = \frac{1}{\alpha_r} \left( P_r \cos w_r t + Q_r \frac{\sin w_r t}{w_r} \right), \quad r = 1, 2, \dots \quad (4.66)$$

De posse das funções  $Y_r(x)$ ,  $F_r(x)$  e  $w_r$ , equações (4.57), (4.66) e (4.58) respectivamente, obtém-se a resposta do modelo contínuo excitado pelas condições iniciais de movimento. Com o auxílio da equação (4.38) escreve-se que

$$y(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \sin(\pi r x/L) \left( P_r \cos w_r t + Q_r \frac{\sin w_r t}{w_r} \right), \quad r = 1, 2, \dots \quad (4.67)$$

e, ressalta-se mais uma vez, que a resposta do sistema contínuo, equação (4.67), independe dos fatores de normalização  $\alpha_r$ , ( $r = 1, 2, \dots$ ) escolhidos.

## 4.6 Resultados Teóricos do Método de Identificação

Através das equações (4.32), (4.33) e (4.34) (resposta do modelo discreto identificado excitado somente por condições iniciais de deslocamento, ou seja,  $\dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = \dot{y}_3(0) = 0$ ) e, equação (4.67) com  $P_r = 0$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) (resposta do modelo contínuo excitado somente por condições iniciais de deslocamento), compara-se o comportamento dinâmico dos dois modelos.

Sabendo-se que

$$y_1(t) = y(L/4, t) \quad (4.68)$$

$$y_2(t) = y(L/2, t) \quad (4.69)$$

$$y_3(t) = y(3L/4, t) \quad (4.70)$$

Excitando-se o modelo contínuo com as condições de deslocamento, de tal forma que o quinto modo contribua com 10% na resposta de deslocamento do mesmo, figura 4.1.(a), é possível verificar a boa aproximação do comportamento dinâmico descrito pelo modelo discreto. (figuras 4.1.(b) e (c)).

Variando-se a participação do quinto modo natural nas condições iniciais de deslocamento do sistema contínuo, constrói-se a Tabela 4.1 e observa-se o comportamento do erro entre a máxima amplitude do modelo contínuo e do modelo discreto, dividida pela máxima amplitude do modelo contínuo.

Conclui-se, desta forma, que o erro decorrente da aproximação do modelo contínuo pelo modelo discreto está diretamente relacionado com a participação dos modos mais altos, negligenciados pelo modelo discreto.

No capítulo 6, faz-se a análise do comportamento dinâmico de uma viga com outras condições de contorno, engastada/livre. Analisa-se a amplitude de resposta em função da frequência de uma força que atua em um ponto particular da viga. Desta forma, completa-se

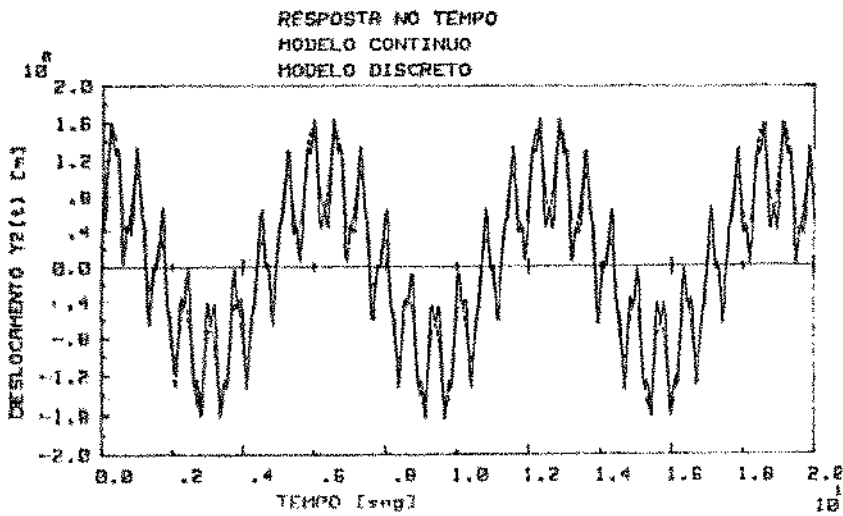
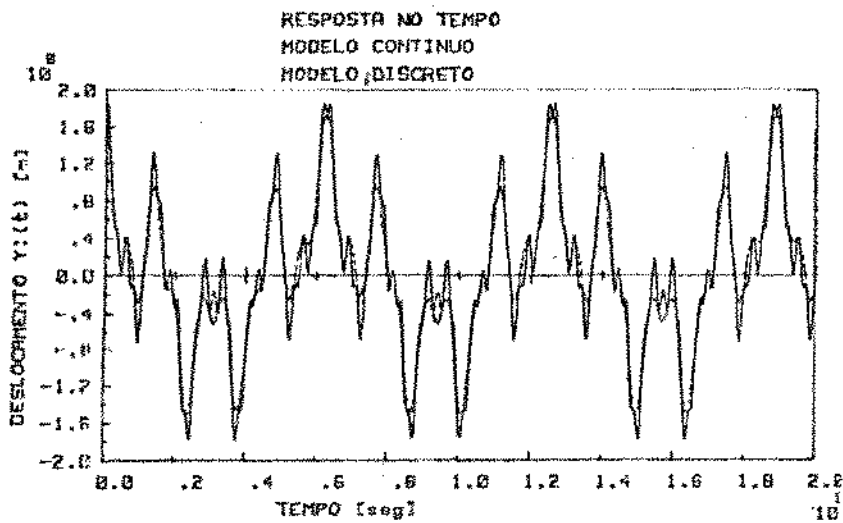
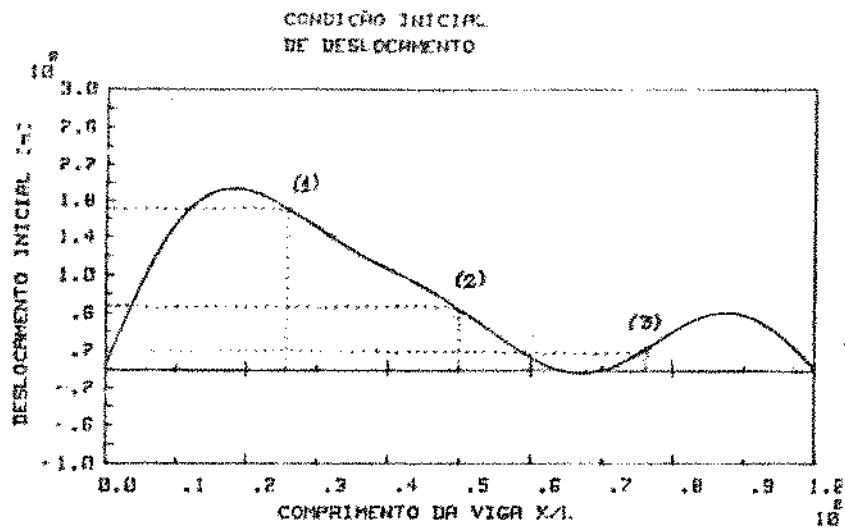


Figura 4.1: Modelos excitados por condições iniciais de deslocamento - modo 1 = 37% , modo 2 = 30% , modo 3 = 23% , modo 5 = 10%

Participação dos Modos na Resposta do Modelo Contínuo				Erro
MODO 1	MODO 2	MODO 3	MODO 5	
42%	33%	25%	0%	0,0%
40%	32%	24%	4%	0,3%
38%	31%	23%	8%	3,9%
37%	30%	22%	11%	8,7%
36%	29%	21%	14%	13,5%

o estudo teórico comparativo do comportamento excitado dos modelos discretos e contínuos, baseado na teoria de Análise Modal.

## Capítulo 5

# RECONSTITUIÇÃO EXPERIMENTAL DA LINHA ELÁSTICA

### 5.1 Introdução

Faz-se, aqui, um estudo sobre um dos tipos de função *spline*, e, a partir daí, ajusta-se polinômios do terceiro grau em cada intervalo de discretização da viga, de forma que este polinômio passe pelos pontos obtidos no processo experimental de análise modal.

A principal vantagem deste tipo de interpolação polinomial é a garantia quanto o comportamento da derivada segunda. Este fato é de fundamental importância no cálculo da energia de deformação.

Observa-se, também, para este tipo de interpolação, um comportamento mais suave para a linha elástica e, evita-se, desta forma, o fenômeno de Runge, bem comum em interpolação por polinômios de grau muito elevado.

No final do capítulo, mostra-se os resultados do programa computacional construído.

### 5.2 Spline Cúbica e Linha Elástica

Algumas funções cúbicas, como a de Lagrange  $S_3(x)$  ou de Hermite  $S^*(x)$  interpolam uma função  $Y(x)$  dando um erro

$$|Y(x) - S_3(x)| \leq |Y^{(4)}| h^4 / 16 \quad \text{para Lagrange e}$$

$$|Y(x) - S^*(x)| \leq |Y^{(4)}| h^4 / 96 \quad \text{para Hermite}$$

onde  $Y^{(4)}$  refere-se ao valor máximo da derivada quarta da função  $Y(x)$ . [14]

Uma função *spline* cúbica é uma função polinomial cúbica por partes, suave até segunda ordem, ou seja, apresenta tanto a primeira como a segunda derivada contínuas. [15]

Assim, seja  $S(x)$  a função *spline* de interpolação no intervalo  $[a, b]$ . Pela definição de função duas vezes continuamente diferenciável no intervalo  $[a, b]$  e polinômio de terceiro grau em  $[x_i, x_{i+1}]$ , ( $i = 1, 2, \dots$ ), pode-se escrever que

$$S''(x_i) = M_i \quad (5.1)$$

Fazendo-se analogia com a equação de uma reta

$$S''(x) - S''(x_i) = \left[ \frac{S''(x_{i+1}) - S''(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right] (x - x_i) \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (5.2)$$

ou

$$S''(x) = \left( \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \right) M_i + \left( \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) M_{i+1}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (5.3)$$

Integrando-se a equação (5.3) fica-se com

$$S'(x) = - \left[ \frac{(x_{i+1} - x)^2}{x_{i+1} - x_i} \right] \frac{M_i}{2} + \left[ \frac{(x - x_i)^2}{x_{i+1} - x_i} \right] \frac{M_{i+1}}{2} + C_{i+1} \quad (5.4)$$

onde  $C_{i+1}$  é uma constante de integração que depende do intervalo considerado.

Integrando-se a equação (5.4) obtém-se

$$S(x) = \left[ \frac{(x_{i+1} - x)^3}{x_{i+1} - x_i} \right] \frac{M_i}{6} + \left[ \frac{(x - x_i)^3}{x_{i+1} - x_i} \right] \frac{M_{i+1}}{6} + C_{i+1}x + D_{i+1} \quad (5.5)$$

onde  $D_{i+1}$  é mais uma constante de integração que depende do intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$  considerado.

Observando-se a equação (5.5) depara-se com quatro incógnitas:  $M_i, M_{i+1}, C_{i+1}$  e  $D_{i+1}$ .

Deseja-se que a função *spline* interpole a linha elástica  $Y(x)$  no intervalo  $[a, b] = [0, L]$ . Fazendo com que a função *spline* coincida com a linha elástica nos pontos  $x_i, x_{i+1}$ , ou seja, nos pontos de medição utilizados na análise modal,

$$S(x_i) = Y(x_i) \quad (5.6)$$

e,

$$S(x_{i+1}) = Y(x_{i+1}) \quad (5.7)$$

e, definindo

$$h_{i+1} = x_{i+1} - x_i \quad (5.8)$$

como o tamanho do subintervalo entre os pontos  $x_i, x_{i+1}$ , pode-se escrever mais duas equações:

$$S(x_i) = Y(x_i) = h_{i+1}^2 \frac{M_i}{6} + C_{i+1}x_i + D_{i+1} \quad (5.9)$$

$$S(x_{i+1}) = Y(x_{i+1}) = h_{i+1}^2 \frac{M_{i+1}}{6} + C_{i+1}x_{i+1} + D_{i+1} \quad (5.10)$$

Assim, expressando  $C_{i+1}$  e  $D_{i+1}$  em função de  $M_i$  e  $M_{i+1}$ , parâmetros desconhecidos, e  $Y(x_i)$  e  $Y(x_{i+1})$ , parâmetros conhecidos, pode-se reescrever a equação (5.5) em função de duas incógnitas somente:  $M_i$  e  $M_{i+1}$ .

Resolvendo o sistema

$$\begin{bmatrix} x_i & 1 \\ x_{i+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{i+1} \\ D_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y(x_i) - h_{i+1}^2 M_i / 6 \\ Y(x_{i+1}) - h_{i+1}^2 M_{i+1} / 6 \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

obtem-se

$$C_{i+1} = \frac{Y(x_{i+1}) - Y(x_i)}{h_{i+1}} + \frac{h_{i+1}}{6}(M_i - M_{i+1}) \quad (5.12)$$

$$D_{i+1} = x_{i+1} \left[ \frac{Y(x_i)}{h_{i+1}} - \frac{M_i h_{i+1}}{6} \right] - x_i \left[ \frac{Y(x_{i+1})}{h_{i+1}} - \frac{M_{i+1} h_{i+1}}{6} \right] \quad (5.13)$$

Substituindo as equações (5.12) e (5.13) em (5.5) obtém-se a equação da *spline* interpoladora da linha elástica em função das incógnitas  $M_i$  e  $M_{i+1}$ .

$$S(x) = M_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_{i+1}} + \left[ Y(x_i) - M_i \frac{h_{i+1}^2}{6} \right] \frac{(x_{i+1} - x)}{h_{i+1}} + \left[ Y(x_{i+1}) - M_{i+1} \frac{h_{i+1}^2}{6} \right] \frac{(x - x_i)}{h_{i+1}}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]. \quad (5.14)$$

Desta forma, o problema passa a ser a obtenção das incógnitas  $M_i$  e  $M_{i+1}$ .

O mesmo raciocínio desenvolvido para o intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$  pode ser realizado para o intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . Assim feito, chega-se à seguinte equação

$$S(x) = M_{i-1} \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + M_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + \left[ Y(x_{i-1}) - M_{i-1} \frac{h_i^2}{6} \right] \frac{(x - x_{i-1})}{h_i} + \left[ Y(x_i) - M_i \frac{h_i^2}{6} \right] \frac{(x_{i+1} - x)}{h_i}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (5.15)$$

Derivando-se as equações (5.14) e (5.15),

$$S'(x) = -M_i \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^2}{2h_{i+1}} + \frac{Y(x_{i+1}) - Y(x_i)}{h_{i+1}} + \frac{h_{i+1}}{6}(M_i - M_{i+1}), \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (5.16)$$

$$S'(x) = -M_{i-1} \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + M_i \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_i} + \frac{Y(x_i) - Y(x_{i-1})}{h_i} + \frac{h_i}{6}(M_{i-1} - M_i), \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (5.17)$$

e valendo-se da definição da função *spline* cúbica, (função duas vezes continuamente diferenciável), pode-se igualar as equações (5.16) e (5.17) no ponto  $x = x_i$  e chegar à seguinte equação:

$$\frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{(h_i + h_{i+1})}{3} M_i + \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} = \left\{ \left[ \frac{Y(x_{i+1}) - Y(x_i)}{h_{i+1}} \right] - \left[ \frac{Y(x_i) - Y(x_{i-1})}{h_i} \right] \right\} \quad (5.18)$$

Assim, fazendo  $i = 1, 2, \dots, q-1$ , chega-se a um sistema com  $q+1$  incógnitas. Entretanto com as condições de contorno, por exemplo, para a viga biapoada, onde a derivada segunda da *spline* está relacionada com o momento (figura 5.1), pode-se escrever que

$$M_0 = M_2 \quad (5.19)$$

$$M_q = 0 \quad (5.20)$$



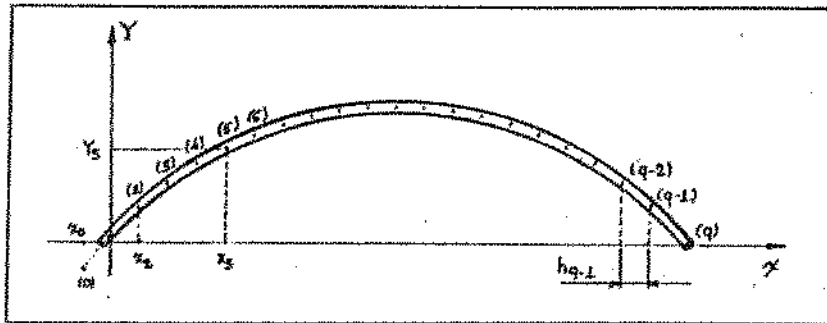


Figura 5.1: Viga Biapoiada - Discretização para o Processo de Análise Modal

onde

$$x_1 = -x_2 \quad (5.21)$$

$$Y_1 = -Y_2 \quad (5.22)$$

sendo  $(x_1, Y_1)$  as coordenadas de um ponto criado baseado no conhecimento das condições de contorno desses sistemas mecânicos.

Assim, através da equação (5.18) escreve-se que

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2/2) & (k_1 + 2k_2/3) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ k_2/6 & (k_2 + k_3/2) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_3/2 & (k_3 + k_4/2) & k_4/6 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_{q-1}/6 & (k_{q-1} + k_q/2) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{q-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{q-1} \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

onde

$$g_i = \left[ \frac{Y(x_{i+1}) - Y(x_i)}{h_{i+1}} \right] - \left[ \frac{Y(x_i) - Y(x_{i-1})}{h_i} \right], \quad i = 1, 2, \dots, (q-1) \quad (5.24)$$

Reescrevendo de uma forma compacta

$$[H]\{M\} = \{g\} \quad (5.25)$$

onde

.  $[H]$  é a matriz que depende somente do tamanho dos subintervalos  $h_i$ , ou seja, da distância entre dois pontos consecutivos utilizados no processo de análise modal,

.  $\{M\}$  é o vetor composto com os coeficientes que se deseja determinar para substituir na equação (5.14) e reconstituir a linha elástica, e,

.  $\{g\}$  é o vetor composto pelos dados obtidos experimentalmente, ou seja, as coordenadas da linha elástica nos pontos de medição.

Finalmente, resolvendo a equação (5.26) e com o auxílio das equações (5.19) e (5.20) reconstitui-se a linha elástica para a viga biapoiada.

$$\{M\} = [H]^{-1}\{g\} \quad (5.26)$$

### 5.3 Cálculo da Energia de Deformação

Sabendo-se que a energia de deformação máxima do modelo contínuo é dada por

$$E_{y_{(r)}} = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left[ \frac{d^2 Y_r(x)}{dx^2} \right]^2 dx \quad (5.27)$$

e que a matriz  $[M]$  composta com os fatores de normalização para cada modo  $r$  é uma função desta energia, equação (3.8), pode-se escrever que

$$M_r = w_r^{-2} \int_0^L EI(x) \left[ \frac{d^2 Y_r(x)}{dx^2} \right]^2 dx, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (5.28)$$

Igualando a segunda derivada da função spline  $S''(x)$ , equação (5.3), à segunda derivada da linha elástica,

$$\frac{d^2 Y_r(x)}{dx^2} = S_r''(x), \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (5.29)$$

e, escrevendo-se que

$$\Phi_r(x) = EI(x) [S_r''(x)]^2, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (5.30)$$

ou seja,

$$\Phi_r(x) = EI(x_i) \left[ \frac{(x_{i+1} - x)}{(x_{i+1} - x_i)} M_i^{(r)} + \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} M_{i+1}^{(r)} \right]^2$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}] \quad e \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (5.31)$$

pode-se integrar  $\Phi_r(x)$  no intervalo  $[a, b] = [0, L]$  e obter os elementos  $M_r$  da matriz de normalização. Portanto,

$$M_r = w_r^{-2} \int_0^L \Phi_r(x) dx, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (5.32)$$

ou, escrevendo a integral por Euler

$$M_r = w_r^{-2} \left\{ \Phi_r(0) + \Phi_r(L) + 2 [\Phi_r(x_1^*) + \Phi_r(x_2^*) + \dots + \Phi_r(x_{v-1}^*)] \right\} \frac{\delta}{2} \quad (5.33)$$

onde

$$\delta = \frac{L}{v} \quad (5.34)$$

é o passo de integração e,  $v + 1$  é o número de pontos  $x_j^*$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, v$ ) utilizados na integração numérica ( $x_0^* = 0$  e  $x_v^* = L$ )

## 5.4 Programa Computacional

O programa computacional construído é composto do programa principal IDENT e de mais quatro subrotinas: DADOS, SPLIN, INTEG e INVER.

- IDENT (programa principal)
- DADOS (subrotina)
- SPLIN (subrotina)
- INVER (subrotina)
- INTEG (subrotina)

A subrotina DADOS é responsável pela entrada dos dados obtidos experimentalmente:

- .comprimento da viga contínua.
- .número de pontos utilizados na análise modal.
- .número de graus de liberdade para a construção do modelo discreto.
- .condições de contorno para a viga,
  - (1) apoio simples
  - (2) engastamento
  - (3) livre
- .módulo de elasticidade do material.
- .passo de integração.
- .frequências naturais.
- .elementos da matriz modal.
- .coordenadas  $x, y$  da linha elástica para cada modo natural.
- .momento de inércia de área nos pontos de medição.

A subrotina SPLIN é responsável pela interpolação da linha elástica e o cálculo da derivada segunda ao quadrado, multiplicada pela rigidez de flexão  $EI(x)$ .

A subrotina INTEG efetua a integração da derivada segunda multiplicada pela rigidez de flexão e calcula os elementos da matriz de normalização.

A subrotina INVER é responsável pela inversão de matrizes sendo acessada pelo programa principal e pela subrotina SPLIN.

Com esses parâmetros calculados, volta-se ao programa principal IDENT e identifica-se as matrizes de massa e rigidez para o modelo discreto.

## 5.5 Resultados

No exemplo mostrado, utilizaram-se três tipos de normalização diferentes para a matriz modal e para a linha elástica. Calculando-se as matrizes de massa e rigidez através do programa computacional, chega-se sempre aos mesmos valores para  $[M_j]$  e  $[K_j]$ , independente do critério de normalização adotado.



## 5.6 Conclusões

Quando o problema de autovalor e autovetor é solucionado, obtém-se  $n$  frequências naturais e  $n$  modos de vibrar para um sistema com  $n$  graus de liberdade. Mas, esses modos não são únicos em amplitude, porque são obtidos de um sistema de equações homogêneas. Portanto, é possível obter infinitas matrizes de massa e infinitas matrizes de rigidez para o modelo discreto, que associadas levam a um sistema que responde com os mesmos modos de vibrar nas respectivas frequências naturais.

Para que o modelo matemático discreto identificado seja único, é necessário uma característica particular a mais do sistema físico, além dos autovalores e autovetores. Para o caso em questão, esta característica é a energia de deformação armazenada na linha elástica. Com ela, torna-se possível renormalizar os autovetores, identificar  $[M_f]$  e  $[K_f]$  e determinar o modelo matemático único desejado.

É interessante comentar que em [16], com o intuito de se construir modelos matemáticos contínuos, *Baruh e Meirovitch* passam pelo mesmo problema, aqui destacado. Como condição particular, utilizam o conhecimento da distribuição de massa do sistema mecânico em estudo e identificam uma função de distribuição de rigidez e de amortecimento para a construção das equações diferenciais parciais.

## Capítulo 6

# IDENTIFICAÇÃO TEÓRICO/EXPERIMENTAL

### 6.1 Introdução

Faz-se aqui, inicialmente, o estudo teórico e o equacionamento analítico para uma viga contínua e homogênea, engastada numa das extremidades e livre na outra. Baseado nestas equações, testa-se o programa computacional construído no capítulo 5 e compara-se a resposta dos modelos discretos construídos pelo programa com a resposta dos modelos contínuos.

Montando-se uma pequena bancada com uma viga nessas condições de contorno, realiza-se a análise modal experimental. Identifica-se, conseqüentemente, as frequências naturais e os modos de vibrar desses sistemas.

Com o auxílio do programa computacional IDENT, constrói-se modelos matemáticos discretos para o sistema físico em questão.

Finalmente, excitando o sistema físico real e o modelo matemático identificado através de uma varredura senoidal, compara-se o comportamento dinâmico do modelo matemático identificado ao do sistema físico real.

### 6.2 Viga Contínua Engastada/Livre

Para a viga engastada em  $x = 0$  e livre em  $x = L$ , figura 6.1, tem-se as seguintes condições de contorno

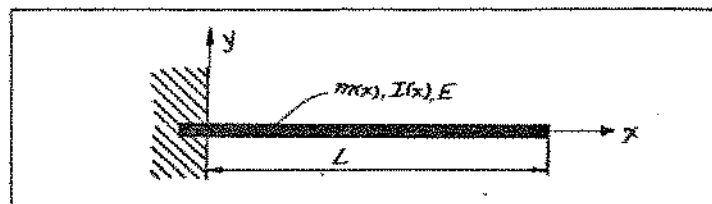


Figura 6.1: Viga Contínua Engastada/Livre

$$Y(0) = 0 \quad (6.1)$$

$$\left[ \frac{dY(x)}{dx} \right]_{(x=0)} = 0 \quad (6.2)$$

$$\left[ \frac{d^2Y(x)}{dx^2} \right]_{(x=L)} = 0 \quad (6.3)$$

$$\left[ \frac{d^3Y(x)}{dx^3} \right]_{(x=L)} = 0 \quad (6.4)$$

Assumindo-se que a equação de movimento da viga

$$\frac{d^4Y(x)}{dx^4} - \beta^4 Y(x) = 0, \quad \beta^4 = \frac{w^2 m}{EI} \quad (6.5)$$

tenha como solução

$$Y(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x \quad (6.6)$$

e, fazendo-se uso das condições de contorno, chega-se que

$$C_3 = -C_1 \quad (6.7)$$

$$C_4 = -C_2 \quad (6.8)$$

e

$$\begin{bmatrix} \sin \beta L + \sinh \beta L & \cos \beta L + \cosh \beta L \\ -\cos \beta L + \cosh \beta L & \sin \beta L - \sinh \beta L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.9)$$

Fazendo-se o determinante da matriz da equação (6.9) ser nulo, chega-se que

$$\cos \beta L \cosh \beta L = -1 \quad (6.10)$$

Desta forma, obtém-se as quatro primeiras frequências naturais para o sistema

$$\beta_1 = 1,875 \Rightarrow w_1 = 1,875^2 (EI/mL^4)^{1/2} \quad (6.11)$$

$$\beta_2 = 4,694 \Rightarrow w_2 = 4,694^2 (EI/mL^4)^{1/2} \quad (6.12)$$

$$\beta_3 = 7,855 \Rightarrow w_3 = 7,855^2 (EI/mL^4)^{1/2} \quad (6.13)$$

$$\beta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} \Rightarrow w_n = \beta_n^2 (EI/mL^4)^{1/2} \quad n = 4, 5, \dots \quad [17] \quad (6.14)$$

Supondo

$$C_2 = \alpha'_r \quad (6.15)$$

onde  $\alpha'_r$  é uma constante arbitrária qualquer, chega-se que

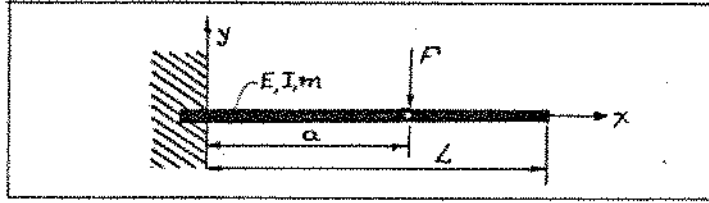


Figura 6.2: Viga Carregada Estaticamente

$$C_1 = \alpha_r \frac{(\sin \beta_r L - \sinh \beta_r L)}{(\cos \beta_r L + \cosh \beta_r L)} \quad (6.16)$$

Assim, pode-se escrever a equação da linha elástica para uma viga engastada/livre, em cada modo natural, através da equação

$$Y_r(x) = \alpha_r [A_r (\sin \beta_r x - \sinh \beta_r x) + B_r (\cos \beta_r x - \cosh \beta_r x)] \quad r = 1, 2, \dots \quad (6.17)$$

onde

$$A_r = \sin \beta_r L - \sinh \beta_r L \quad (6.18)$$

$$B_r = \cos \beta_r L + \cosh \beta_r L \quad (6.19)$$

## 6.3 Resposta Excitada da Viga Contínua

### 6.3.1 Comportamento Estático

Para uma viga engastada/livre excitada por uma força estática de amplitude  $F$  em um ponto qualquer  $a$  ao longo do seu comprimento  $L$ , figura 6.2. tem-se a equação da linha elástica estática dada por [18]

$$y(x, t) = y_{st}(x) = \begin{cases} \frac{F}{EI} (ax^2/2 - x^3/6) & 0 \leq x \leq a \\ \frac{a^2 F}{2EI} (x - a/3) & a \leq x \leq L \end{cases} \quad (6.20)$$

Baseado na teoria de Análise Modal apresentada no item 4.3 do capítulo 4 pode-se escrever a mesma equação da linha elástica estática como

$$y(x, t) = y'_{st}(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{Y_r(x) Y_r(a)}{\gamma_r w_r^2} F \quad (6.21)$$

onde  $Y_r(x)$  é dado pela equação (6.17) e  $\gamma_r$  é dado pela equação (4.46).

Variando-se o número de autofunções  $Y_r(x)$  e autovalores  $w_r$ , com objetivo de se reconstituir a linha elástica estática para o carregamento  $F$  no ponto  $a$ , constrói-se a tabela 6.1

Analisando-se estas tabelas, chega-se a conclusões importantes no diz respeito a amplitude de deformação desses sistemas quando carregados estaticamente. Estas conclusões serão de



Ponto de Aplicação da Força Unitária $a = 0,10L$								
$r$	$x = 0,10L$		$x = 0,50L$		$x = 0,75L$		$x = 1,00L$	
	$y_{st}^*(x)$	erro[%]	$y_{st}^*(x)$	erro[%]	$y_{st}^*(x)$	erro[%]	$y_{st}^*(x)$	erro[%]
1	9,10E-5	72,7	1,84E-3	21,0	3,57E-3	0,00	5,42E-3	12,2
2	1,61E-4	51,6	2,39E-3	2,57	3,67E-3	0,00	4,66E-3	3,52
3	2,16E-4	35,1	2,39E-3	2,57	3,53E-3	0,00	4,90E-3	1,45
4	2,57E-4	22,8	2,32E-3	0,43	3,60E-3	0,00	4,80E-3	0,62
5	2,86E-4	14,1	2,32E-3	0,43	3,58E-3	0,00	4,85E-3	0,41
6	3,05E-4	8,41	2,33E-3	0,00	3,58E-3	0,00	4,82E-3	0,20
7	3,18E-4	4,50	2,33E-3	0,00	3,58E-3	0,00	4,83E-3	0,00
8	3,25E-4	2,40	2,33E-3	0,00	3,58E-3	0,00	4,83E-3	0,00
9	3,29E-4	1,20	2,33E-3	0,00	3,58E-3	0,00	4,83E-3	0,00
$y_{st}(x)$	3,33E-4		2,33E-3		3,58E-3		4,83E-3	
Ponto de Aplicação da Força Unitária $a = 0,50L$								
$r$	$x = 0,10L$		$x = 0,50L$		$x = 0,75L$		$x = 1,00L$	
	$y_{st}^*(x)$	erro[%]	$y_{st}^*(x)$	erro[%]	$y_{st}^*(x)$	erro[%]	$y_{st}^*(x)$	erro[%]
1	1,87E-3	19,7	3,73E-2	10,3	7,23E-2	0,82	0,1099	5,47
2	2,38E-3	2,14	4,15E-2	0,24	7,30E-2	0,14	0,1040	0,19
3	2,39E-3	2,57	4,15E-2	0,24	7,29E-2	0,00	0,1040	0,19
4	2,31E-3	0,86	4,16E-2	0,00	7,29E-2	0,00	0,1042	0,00
5	2,32E-3	0,43	4,16E-2	0,00	7,29E-2	0,00	0,1042	0,00
$y_{st}(x)$	2,33E-3		4,16E-2		7,29E-2		0,1042	
Ponto de Aplicação da Força Unitária $a = 1,00L$								
$r$	$x = 0,10L$		$x = 0,50L$		$x = 0,75L$		$x = 1,00L$	
	$y_{st}^*(x)$	erro[%]	$y_{st}^*(x)$	erro[%]	$y_{st}^*(x)$	erro[%]	$y_{st}^*(x)$	erro[%]
1	5,42E-3	12,2	0,1099	5,47	0,2129	0,95	0,3236	2,91
2	4,67E-3	3,16	0,1040	0,19	0,2117	0,34	0,3319	0,42
3	4,90E-3	1,45	0,1040	0,19	0,2111	0,09	0,3329	0,12
4	4,80E-3	0,62	0,1042	0,00	0,2109	0,00	0,3332	0,03
5	4,85E-3	0,41	0,1042	0,00	0,2109	0,00	0,3333	0,00
6	4,82E-3	0,21	0,1042	0,00	0,2109	0,00	0,3333	0,00
7	4,84E-3	0,21	0,1042	0,00	0,2109	0,00	0,3333	0,00
8	4,83E-3	0,00	0,1042	0,00	0,2109	0,00	0,3333	0,00
$y_{st}(x)$	4,83E-3		0,1042		0,2109		0,3333	

Tabela 6.1: Análise Modal e Reconstituição da Linha Elástica Estática ( $E = 1$ ,  $I = 1$  e  $L = 1$ )

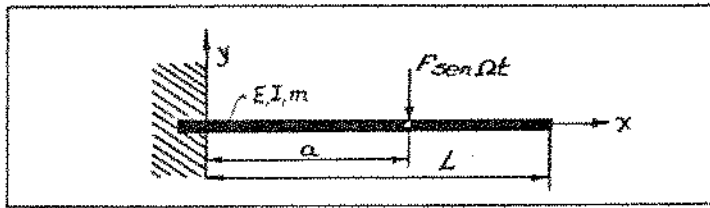


Figura 6.3: Viga com Carregamento Dinâmico

grande valia para se efetuar a análise qualitativa e quantitativa da resposta excitada dos modelos discretos identificados.

Quando se tem um número limitado de informações sobre as autofunções e os autovalores dos sistemas contínuos, ou seja, fixando-se o número de modos e frequências naturais  $r$  para se reconstituir a resposta do mesmo, a precisão no valor da resposta obtidas através da análise modal, é uma função do ponto onde esta força é aplicada. Isto, porque, dependendo do ponto onde esta força está atuando, a participação dos modos mais altos (acima dos modos que se está considerando) pode ser importante e o fato de se desprezar a participação desses modos acarreta uma diminuição na precisão da resposta do sistema.

### 6.3.2 Comportamento Dinâmico

A equação

$$m \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} = f(x, t) = \delta(x - a) F \sin \Omega t \quad (6.22)$$

representa matematicamente uma viga contínua excitada por uma força senoidal aplicada num ponto  $a$  ao longo do seu comprimento  $L$ .

Baseado na teoria de análise modal apresentada no item 4.3 do capítulo 4, pode-se escrever que a solução permanente para a viga da figura 6.3 é

$$y(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{Y_r(x) Y_r(a)}{\gamma_r (\omega_r^2 - \Omega^2)} F \sin(\Omega t) \quad (6.23)$$

onde  $\Omega$  é a frequência da força de excitação.

Variando-se o número de autofunções e autovalores para representar a resposta da viga nos pontos  $x = 0, 10L$  e  $x = 0, 50L$  quando a força senoidal atua em  $a = 0, 10L$  e  $a = 1, 00L$ , constrói-se os gráficos mostrados nas figuras 6.4 e 6.5. Observa-se, desta forma, o erro que se comete em aproximar a resposta de um sistema com infinitos graus de liberdade por um número limitado de autofunções e autovalores.

## 6.4 Cálculo dos Elementos da Matriz de Normalização

Calculando-se a segunda derivada da linha elástica

$$\frac{d^2 Y_r(x)}{dx^2} = \alpha_r \beta_r^2 [-A_r (\sin \beta_r x + \sinh \beta_r x) - B_r (\cos \beta_r x + \cosh \beta_r x)] \quad r = 1, 2, \dots \quad (6.24)$$

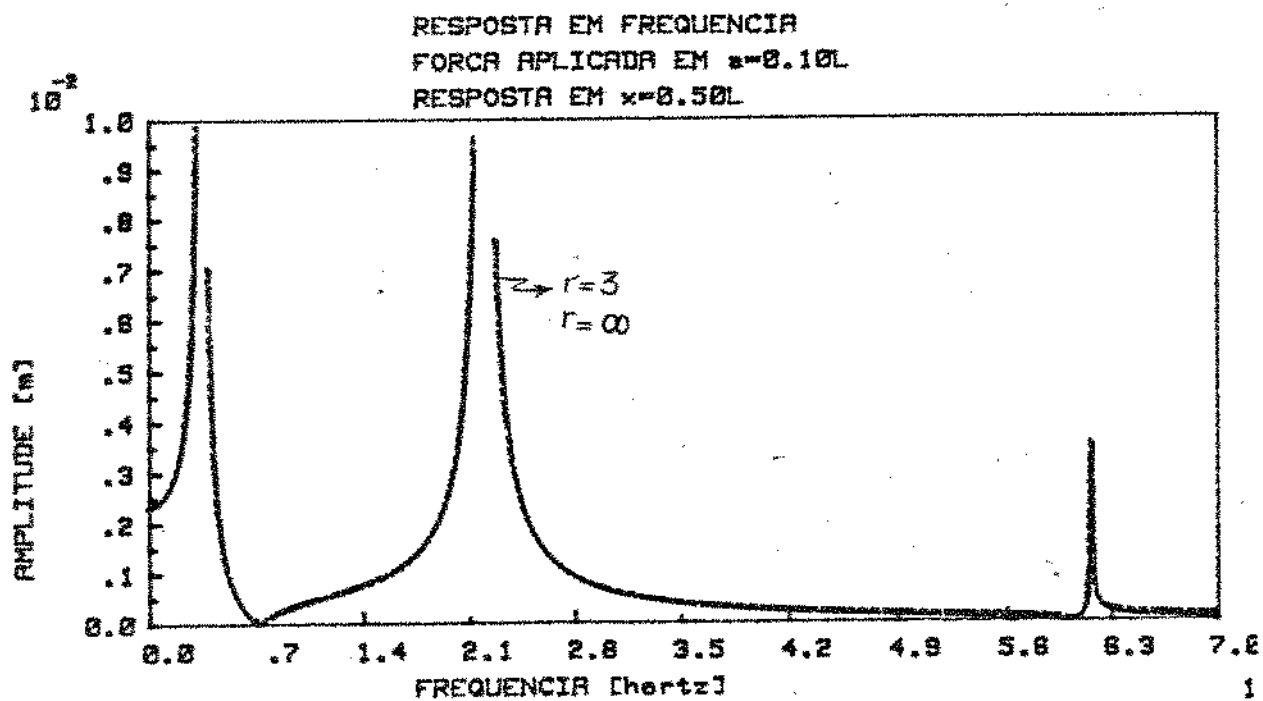
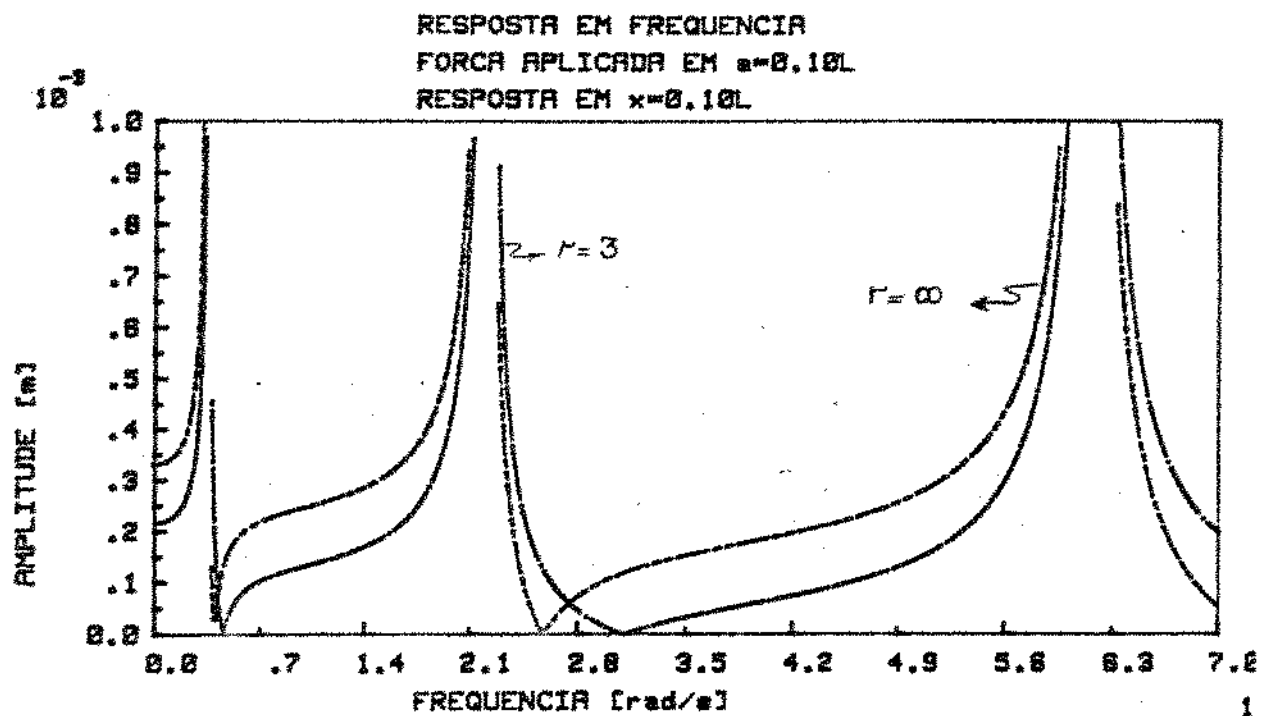


Figura 6.4: Força aplicada em  $a = 0,10L$

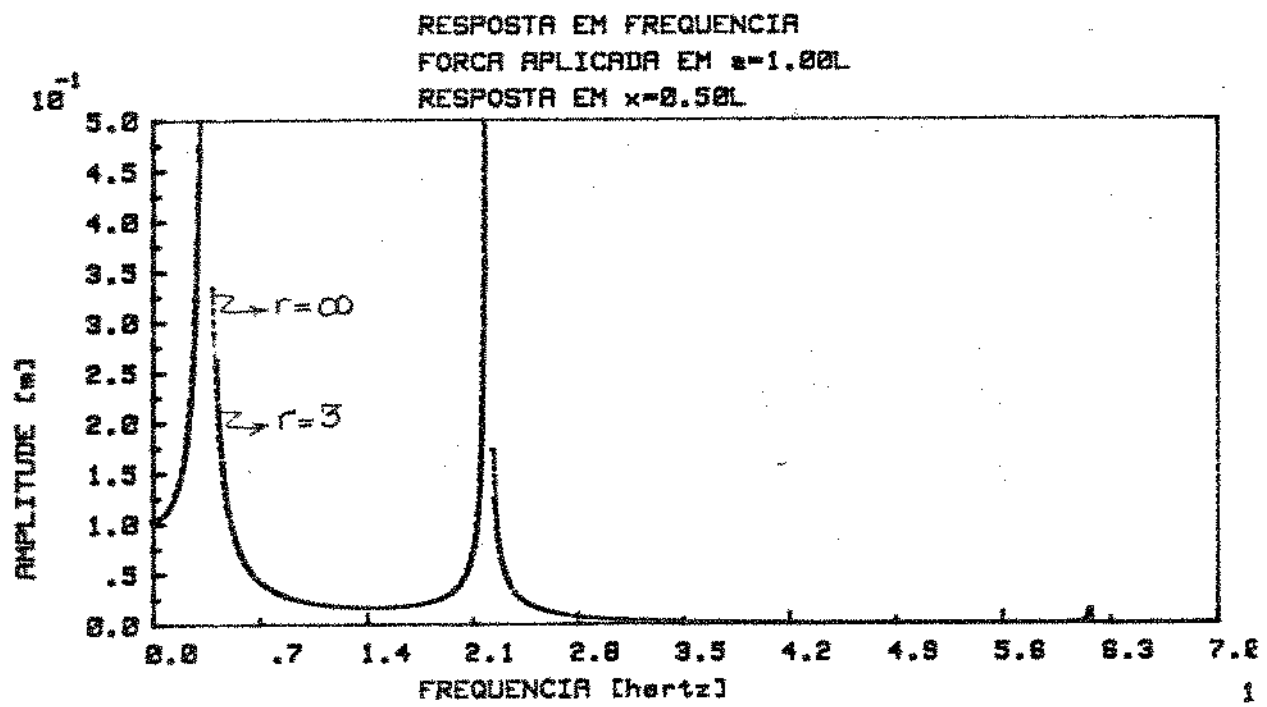
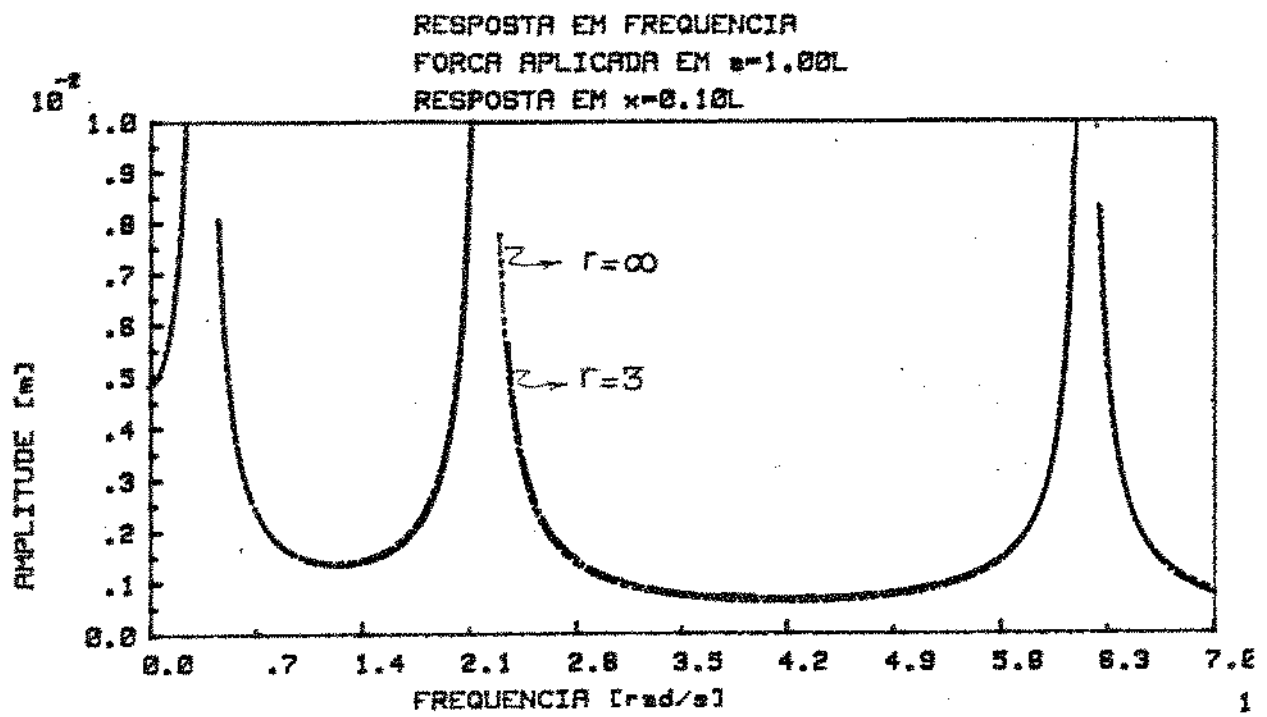


Figura 6.5: Força aplicada em  $a = 1,00L$

n° de Pontos	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>
5	7,610	2,246	1.161.913
6	7,955	2,426	1.286.803
7	8,168	2,537	1.366.764
8	8,317	2,610	1.419.802
...	...	...	...
∞	9,228	2,981	1.662.132

Tabela 6.2: Comportamento dos Elementos da Matriz de Normalização em Função do Número de Pontos Utilizados para a Reconstituição da Linha Elástica - Programa Computacional IDENT

é possível obter os elementos da matriz de normalização pela equação

$$M_r = w_r^{-2} \int_0^L EI \left[ \frac{d^2 Y_r(x)}{dx^2} \right]^2 dx, \quad r = 1, 2, \dots \quad (6.25)$$

Resolvendo a integral da equação (6.25) chega-se que

$$M_r = \alpha_r^2 m \beta_r^{-1} \left\{ \frac{(A_r^2 + B_r^2)}{2} \left[ \beta_r L - \cos \left( \beta_r L + 2 \arctan \left( \frac{B_r}{A_r} \right) \sin \beta_r \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{(A_r^2 + B_r^2)}{2} \sinh \beta_r L \cosh \beta_r L + \frac{(-A_r^2 + B_r^2)}{2} \beta_r L + \right. \\ \left. + \frac{A_r B_r}{2} [\cosh(2\beta_r L) - 1] + A_r^2 [\sin \beta_r L \cosh \beta_r L - \cos \beta_r L \sinh \beta_r L] + \right. \\ \left. + 2A_r B_r \sin \beta_r L \sinh \beta_r L + B_r^2 (\cos \beta_r \sinh \beta_r L + \sin \beta_r L \cosh \beta_r L) \right\} \quad r = 1, 2, \dots \quad (6.26)$$

Assim, fazendo-se  $L = 1$ ,  $E = 1$ ,  $I = 1$  e  $\alpha_r = 1$  ( $r = 1, 2, 3$ ), calcula-se, através da equação (6.26) os valores exatos para os elementos da matriz de normalização  $M_r$  ( $r = 1, 2, 3$ )

$$M_1 = 9,228$$

$$M_2 = 2,981$$

$$M_3 = 1.662.132$$

Variando-se o número de pontos (obtidos a partir da solução exata da viga, equação (6.17)) para a reconstituição da linha elástica (através da aproximação por *splines*), observa-se o comportamento dos elementos da matriz de normalização  $\{M\}$ , tabela 6.2, obtidos através do programa IDENT.

Montando-se

- a matriz modal  $\{U\}$  através da equação (6.17) com  $x = 0,50$ ,  $x = 0,75$  e  $x = 1,00$ .

$$\{U\} = \begin{bmatrix} -2,065 & -77,9761 & -50,6325 \\ -3,9957 & -14,7516 & 1499,2561 \\ -6,071 & 109,2618 & -2579,5934 \end{bmatrix}, \quad (6.27)$$

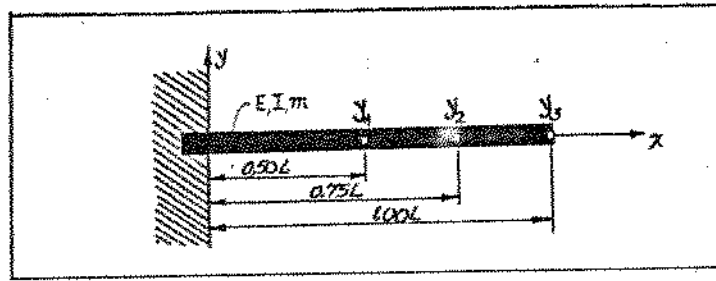


Figura 6.6: Viga Engastada/Livre Discretizada com Três Graus de Liberdade

- a matriz  $[w^2]$  com o valor das três primeiras frequências naturais para a viga contínua engastada/livre (equações (6.11), (6.12) e (6.13))

$$[w^2] = \frac{EI}{mL^4} \begin{bmatrix} 1,875^4 & 0 & 0 \\ 0 & 4,694^4 & 0 \\ 0 & 0 & 7,855^4 \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

- a matriz de normalização  $[M]$  com os valores exatos dados na tabela 6.2

$$[M] = mL \begin{bmatrix} 9,228 & 0 & 0 \\ 0 & 2,981 & 0 \\ 0 & 0 & 1,662.132 \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

obtem-se, através das equações (3.9) e (3.10) o seguinte modelo matemático discreto para os pontos da figura 6.6 :

$$mL \begin{bmatrix} 0,5248 & -0,3943 & 0,0502 \\ -0,3943 & 0,3955 & -0,0164 \\ 0,0502 & -0,0164 & 0,0010 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{Bmatrix} + \frac{EI}{L^4} \begin{bmatrix} 109,91 & -761,20 & 200,00 \\ -761,20 & 970,54 & -375,70 \\ 200,00 & -375,70 & 132,77 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.30)$$

## 6.5 Comportamento Estático e Dinâmico dos Modelos Discretos

A figura 6.7 mostra os modelos matemáticos teóricos, identificados a partir da equação teórica da linha elástica no primeiro modo natural,  $w_1 = 1,875^2(EI/mL^4)^{1/2}$  e  $M_1 = 9,228$ .

Comparando a deflexão estática dos pontos do modelo contínuo, tabela 6.1, e do modelo discreto, observa-se a equivalência estática dos modelos discretos com 1 g.l. para as coordenadas onde os modos superiores ao primeiro não tem grande importância.

Nas figuras 6.8 e 6.9 verifica-se a aproximação da resposta estática dos modelos contínuos através dos modelos discretos com dois e três graus de liberdade, identificados teoricamente.

O que se deseja dos modelo matemáticos identificados é o ajuste da amplitude de deslocamento dos sistemas mecânicos quando estes estiverem excitados por uma força  $F$  qualquer, estática ou dinâmica.

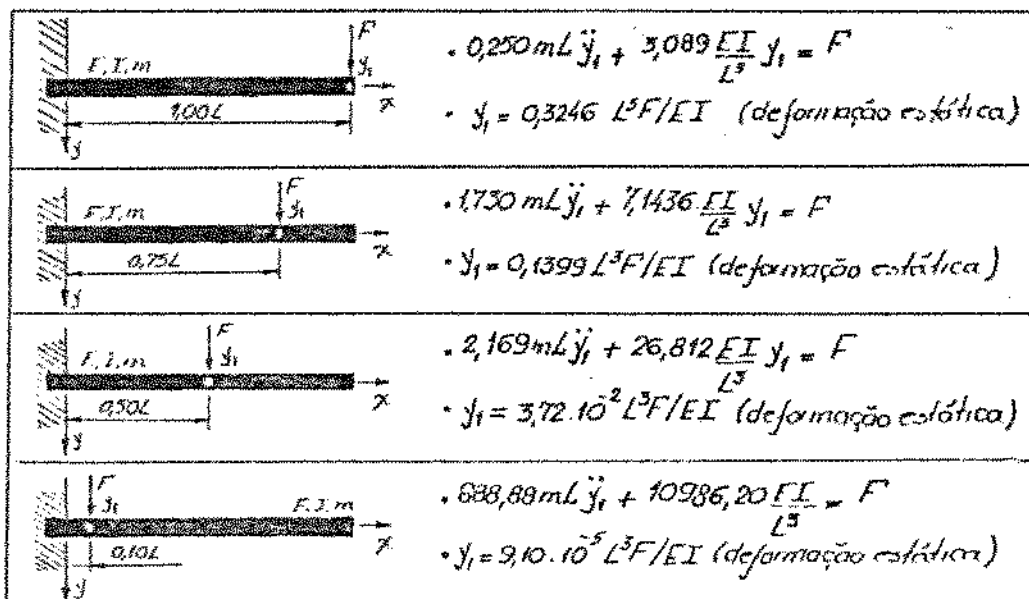


Figura 6.7: Modelos Discretos Teóricos com 1g.l - carregamento estático

Pensando assim, observa-se no estudo do comportamento estático desses modelos discretos, que pode-se ajustar a amplitude de deslocamento estática de uma forma satisfatória. Este ajuste pode ser otimizado em função da escolha das coordenadas discretizadas e do número de graus de liberdade escolhidos.

Tem-se, também, pelo fato da energia do modelo discreto ser igual a do modelo contínuo um ajuste automático da matriz de rigidez. Destaca-se que toda energia de deformação armazenada no modelo contínuo e distribuída ao longo do seu comprimento será redistribuída nas coordenadas escolhidas do modelo discreto.

Uma vez que a matriz de rigidez está identificada e ajustou-se o comportamento estático, é necessário que se faça o comportamento dinâmico do modelo discreto ser compatível com o comportamento dinâmico do sistema físico (contínuo).

O ajuste dinâmico (frequências naturais e modos) é feita pela matriz de massa e ressalta-se que o valor dos elementos da matriz de massa e a distribuição desses elementos dentro da matriz ocorrem de tal forma que se tem os modos e as frequências naturais ajustadas, pois os modos e as frequências são parâmetros conhecidos e impostos para identificação da matriz de massa. E mais, observando-se o valor da massa para o modelo da figura 6.7 (a), depara-se com a grande diferença deste método de discretização baseado no balanço energético com os demais: a massa atuante na coordenada discretizada não é necessariamente a massa total  $mL$ , e sim, uma massa equivalente  $0,250mL$ .

Nas figuras 6.10 (a) e (b), observa-se a equivalência dinâmica dos modelos discretos identificados teoricamente e do modelo contínuo.

- figura 6.10 (a) - Força de excitação aplicada em  $x = L$  e resposta no ponto  $x = L/2$
- figura 6.10 (b) - Força de excitação aplicada em  $x = L$  e resposta no ponto  $x = L$

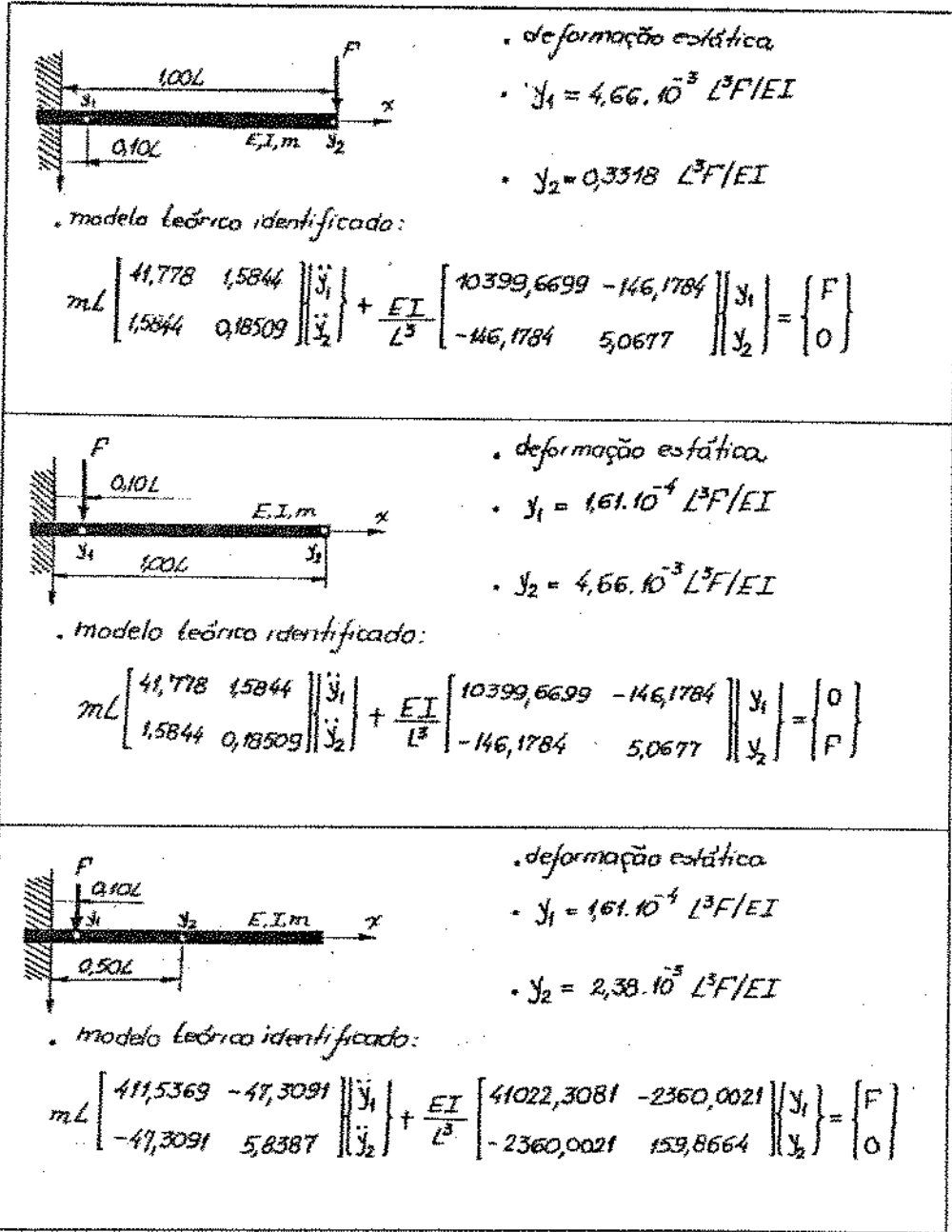


Figura 6.8: Modelo Discreto Teórico com 2 g.l - Carregamento Estático



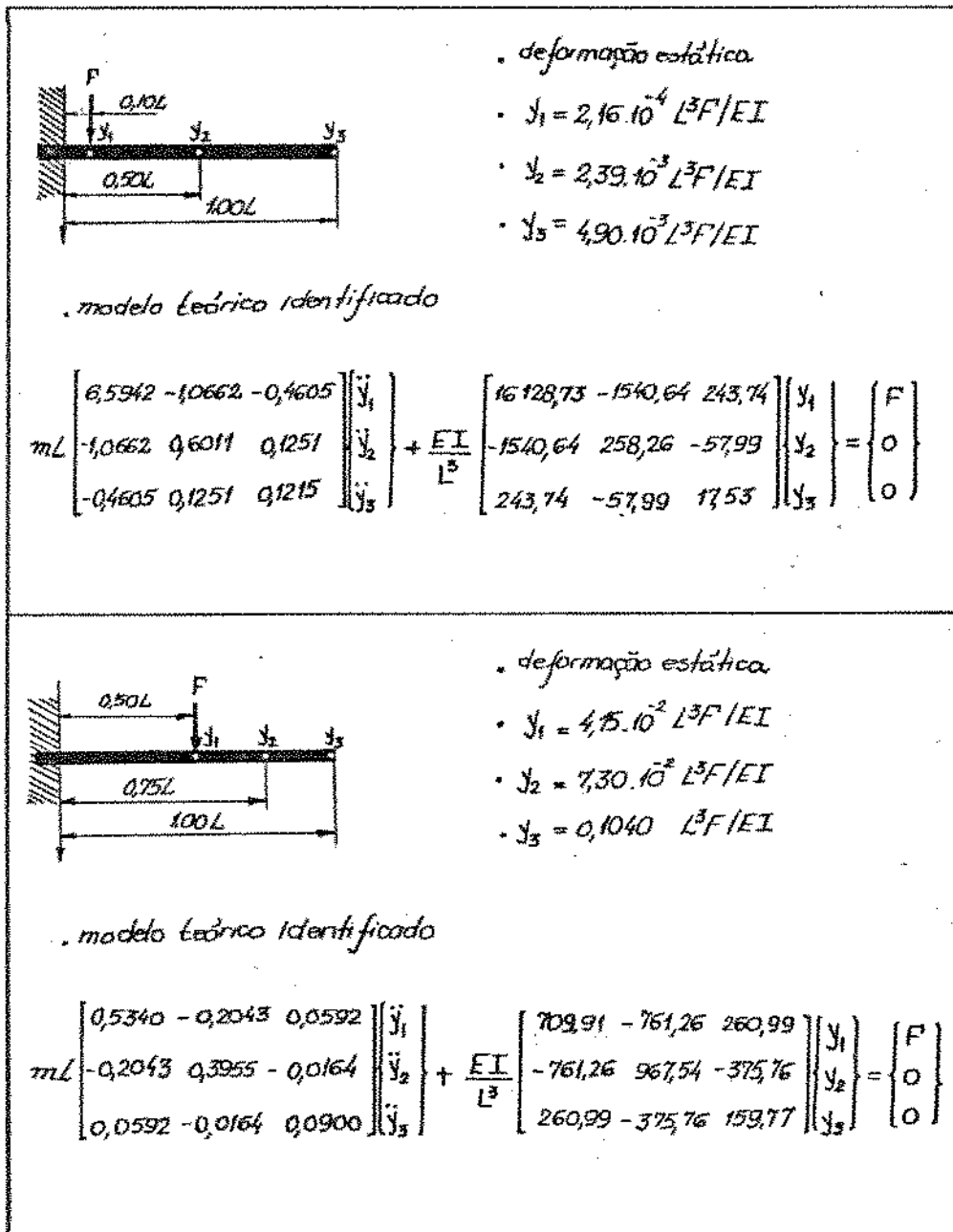


Figura 6.9: Modelo Discreto Teórico com 3 g.l - Carregamento Estático

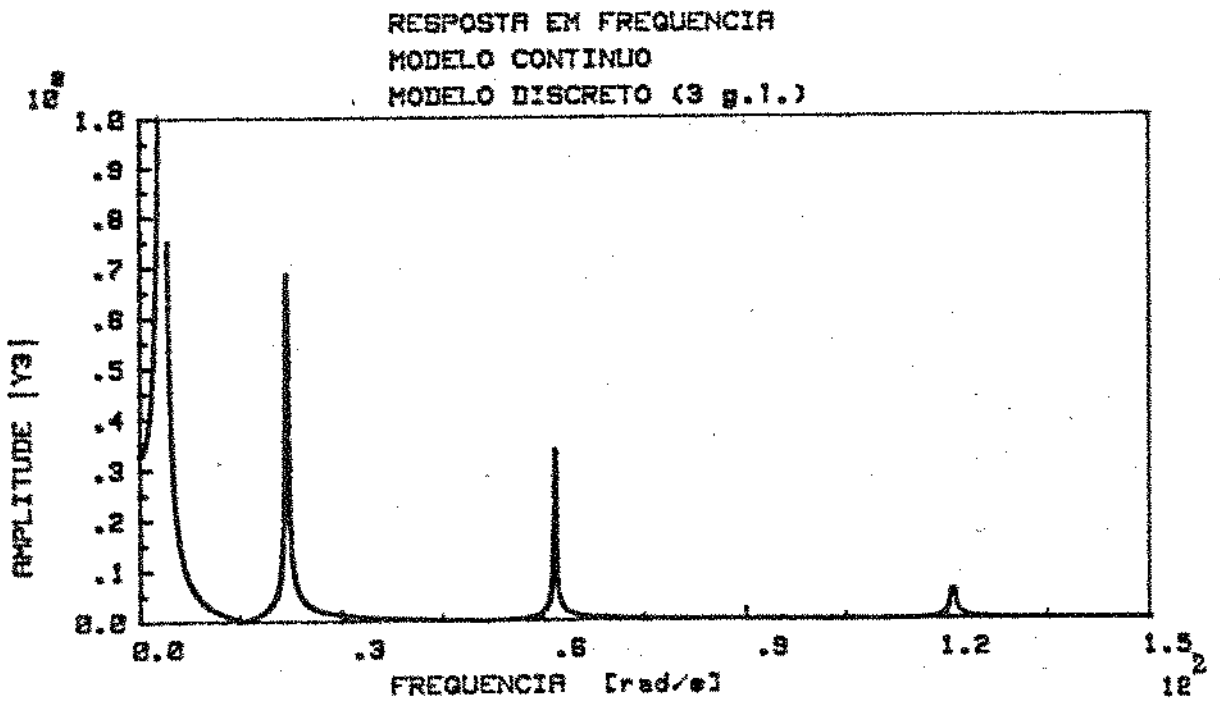
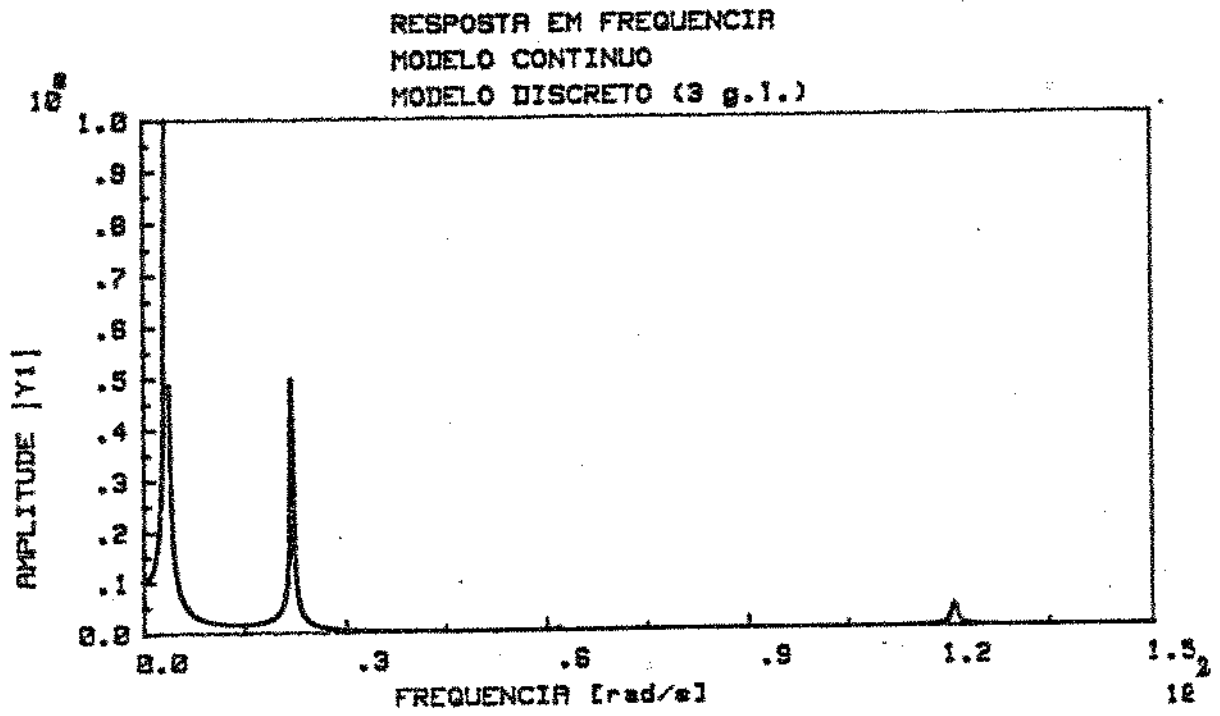


Figura 6.10: Resposta em Frequência do Modelo Discreto e do Modelo Contínuo

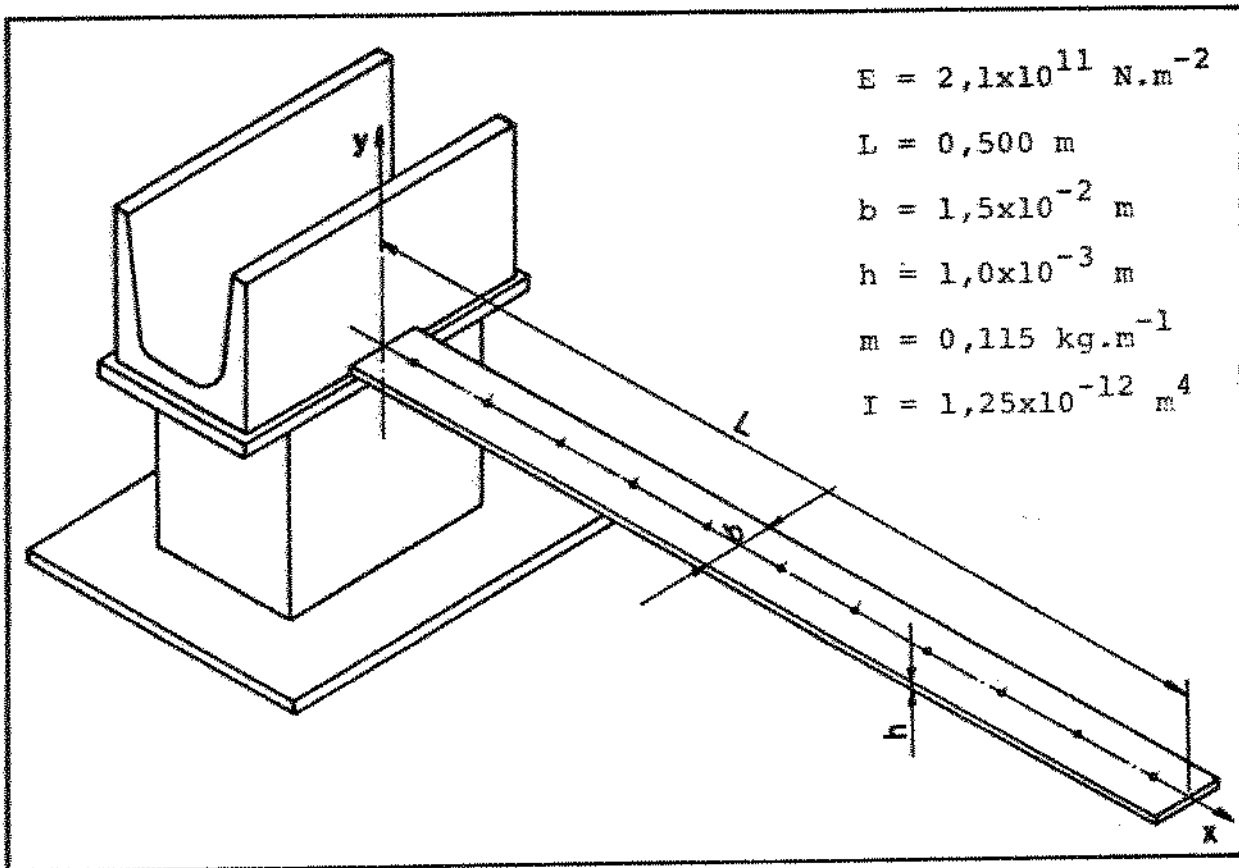


Figura 6.11: Dados do Modelo Físico Real

## 6.6 Modelo Físico Real

Para a verificação experimental do método de identificação, montou-se uma bancada com uma viga engastada/livre com as características mostradas na figura 6.11.

## 6.7 Processo Experimental de Análise Modal

### 6.7.1 Frequências Naturais

As quatro primeiras frequências naturais da viga engastada/livre obtidas experimentalmente são mostradas na figura 6.12. Esses valores podem ser comparados com os valores teóricos, obtidos pela teoria de viga, equações de (6.11) a (6.14), como mostra a tabela 6.3.

### 6.7.2 Modos de Vibração

Discretizando a viga da figura 6.11 e tomando-se doze pontos de medição, reconstituiu-se a linha elástica nos três primeiros modos naturais utilizando-se a subrotina SPLIN do programa

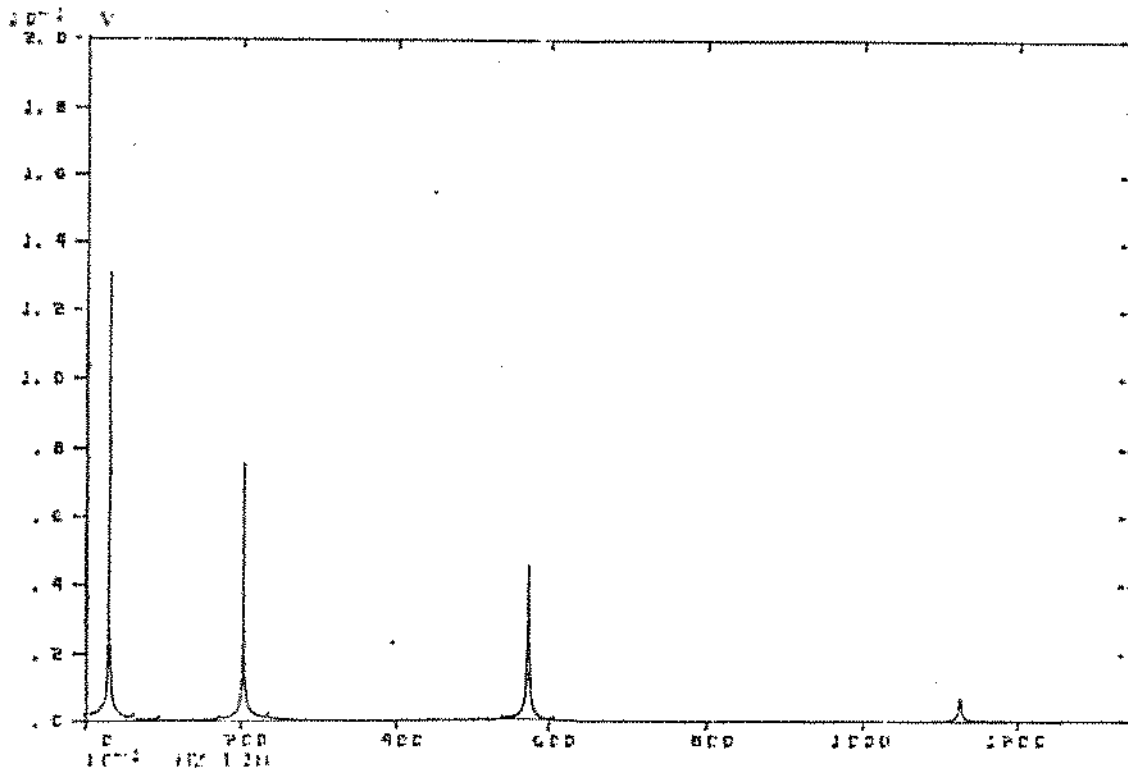


Figura 6.12: Transformada de Fourier da Resposta de Deslocamento da Viga Excitada por um Pulso

Frequência	Experimental	Teórica	Diferença
	[Hz]	[Hz]	[%]
I	3,17	3,38	3,4
II	20,51	21,19	3,3
III	57,50	59,34	3,2
IV	112,70	116,29	3,1

Tabela 6.3: Frequências Naturais da Viga

IDENT. Nas figuras 6.13 (a), (b) e (c) observam-se as linhas elásticas reconstituídas através das medições experimentais.

Desta forma, com os parâmetros modais obtidos experimentalmente, a linha elástica reconstituída por polinômios cúbicos por partes, calcula-se a energia de deformação armazenada em cada modo natural pelo programa IDENT - subrotina INTEG - e, obtêm-se os elementos da matriz de normalização

$$\begin{aligned} M_1 &= 32,5041 \\ M_2 &= 1,8417 \\ M_3 &= 0,8070 \end{aligned}$$

## 6.8 Identificação Experimental

A partir dos elementos da matriz de normalização e das coordenadas modais experimentais identifica-se a matriz de massa e de rigidez para os modelos discretos com 1,2 e 3 graus de liberdade. (figuras 6.14, 6.15 e 6.16)

Para se introduzir a excitação no modelo identificado através do ponto de engastamento, é necessário que se conheça a priori, um vetor  $\{\varphi\}$  que leve as informações corretas do modelo físico real para o modelo matemático discreto

$$[M_f]\{\ddot{y}(t)\} + [K_f]\{y(t)\} = \{\varphi\}f(t)$$

Isto, porque a excitação será introduzida no sistema real através de uma coordenada que não esta presente no modelo discreto (coordenada do ponto de engastamento).

Por exemplo, excitando-se o modelo matemático de três graus de liberdade no ponto de engastamento por um deslocamento senoidal de amplitude  $y_{st}$  e frequência  $\Omega$ , escreve-se que

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \\ \ddot{y}_3(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} y_{st} e^{i\Omega t} \quad (6.31)$$

Fazendo-se  $\Omega = 0$ , pode-se escrever, baseado na equação(6.46) e na linearidade do modelo em questão, que

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_{st} \\ y_{st} \\ y_{st} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} y_{st} \quad (6.32)$$

obtêm-se, desta forma, os valores dos elementos do vetor

$$\varphi_1 = K_{11} + K_{12} + K_{13}$$

$$\varphi_2 = K_{21} + K_{22} + K_{23}$$

$$\varphi_3 = K_{31} + K_{32} + K_{33}$$

Ressalta-se que o vetor  $\{\varphi\}$  é composto pelos coeficientes de influência ou coeficientes da matriz de rigidez identificada.

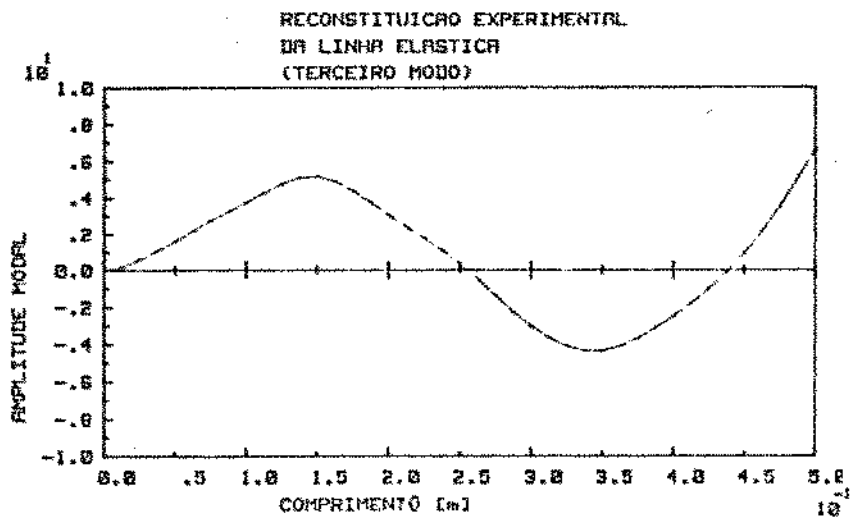
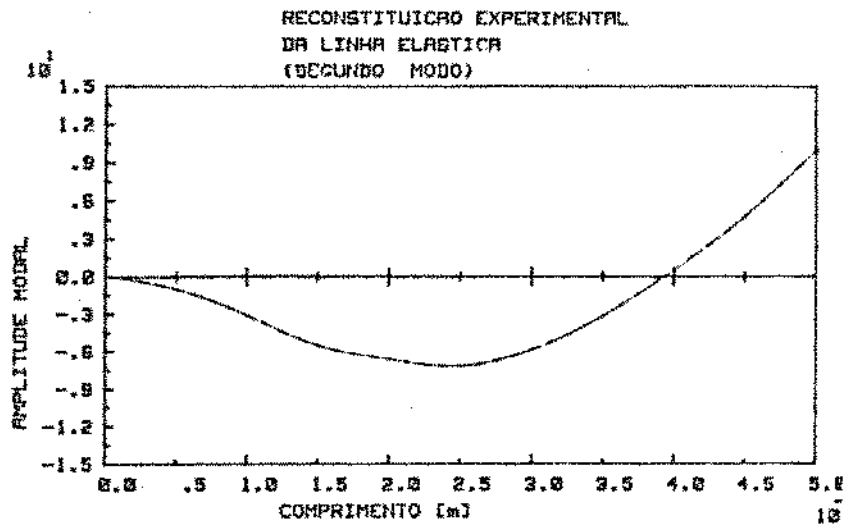
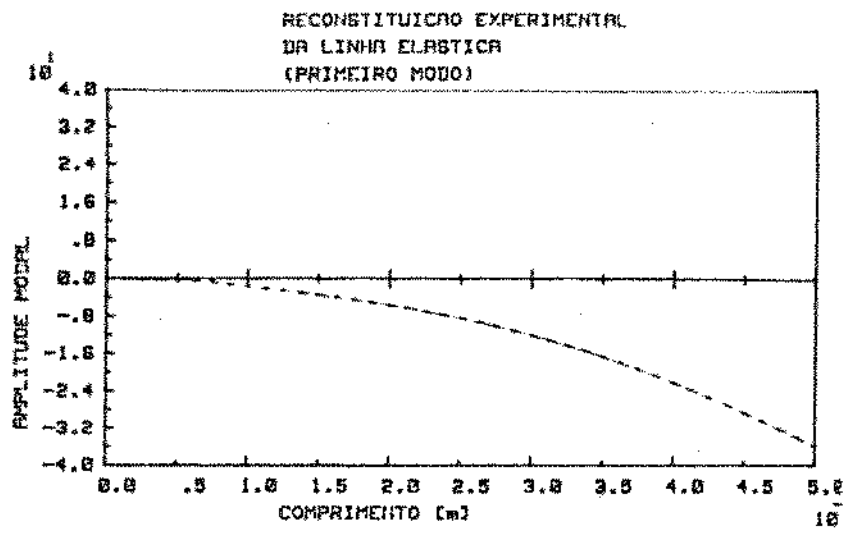


Figura 6.13: Reconstituição Experimental da Linha Elástica

Para os modelos com 1, 2 e 3 graus de liberdade, excitado pela base por um deslocamento senoidal tem-se

$$M_{11}\ddot{y}_1(t) + K_{11}y_1(t) = K_{11}y_{st}e^{i\omega t} \quad (6.33)$$

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{11} + K_{12} \\ K_{21} + K_{22} \end{Bmatrix} y_{st}e^{i\omega t} \quad (6.34)$$

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \\ \ddot{y}_3(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{11} + K_{12} + K_{13} \\ K_{21} + K_{22} + K_{23} \\ K_{31} + K_{32} + K_{33} \end{Bmatrix} y_{st}e^{i\omega t} \quad (6.35)$$

O comportamento dinâmico dos modelos discretos identificados, podem ser comparados com o comportamento do sistema físico real nas figuras 6.14, 6.15 e 6.16.

## 6.9 Conclusões

Observando-se as figuras 6.15, 6.16 e 6.17, verifica-se experimentalmente a possibilidade de se ajustar modelos matemáticos reduzidos para sistemas mecânicos contínuos flexíveis. Particularmente, na figura 6.17, nota-se a participação do amortecimento influenciando a resposta do sistema nos modos mais altos e o erro que se comete em negligenciar esse parâmetro nos modelos identificados.

Dependendo da faixa de frequência em que esses sistemas operam, deve-se variar o número de graus de liberdade do modelo matemático adequadamente, com o objetivo de representar esses sistemas da melhor forma possível nessa faixa e minimizar esses graus de liberdade.

Os pontos de discretização para a construção dos modelos condensados são escolhidos de acordo com as características e necessidades de projeto, pois, nos sistemas mecânicos em questão, existem pontos de medição de vibração e pontos onde atuarão os agentes de controle, como atuadores magnéticos, hidráulicos etc..

Com as informações experimentais provenientes da análise modal, tem-se subsídios para se verificar se os pontos escolhidos são os melhores para a construção do modelo. Esses pontos são aqueles onde os modos mais baixos influenciam de uma forma mais acentuada.

Como os modelos matemáticos são identificados através dos parâmetros modais obtidos experimentalmente, ressalta-se que é possível refinar esses modelos, melhorando-se o processo de análise modal.

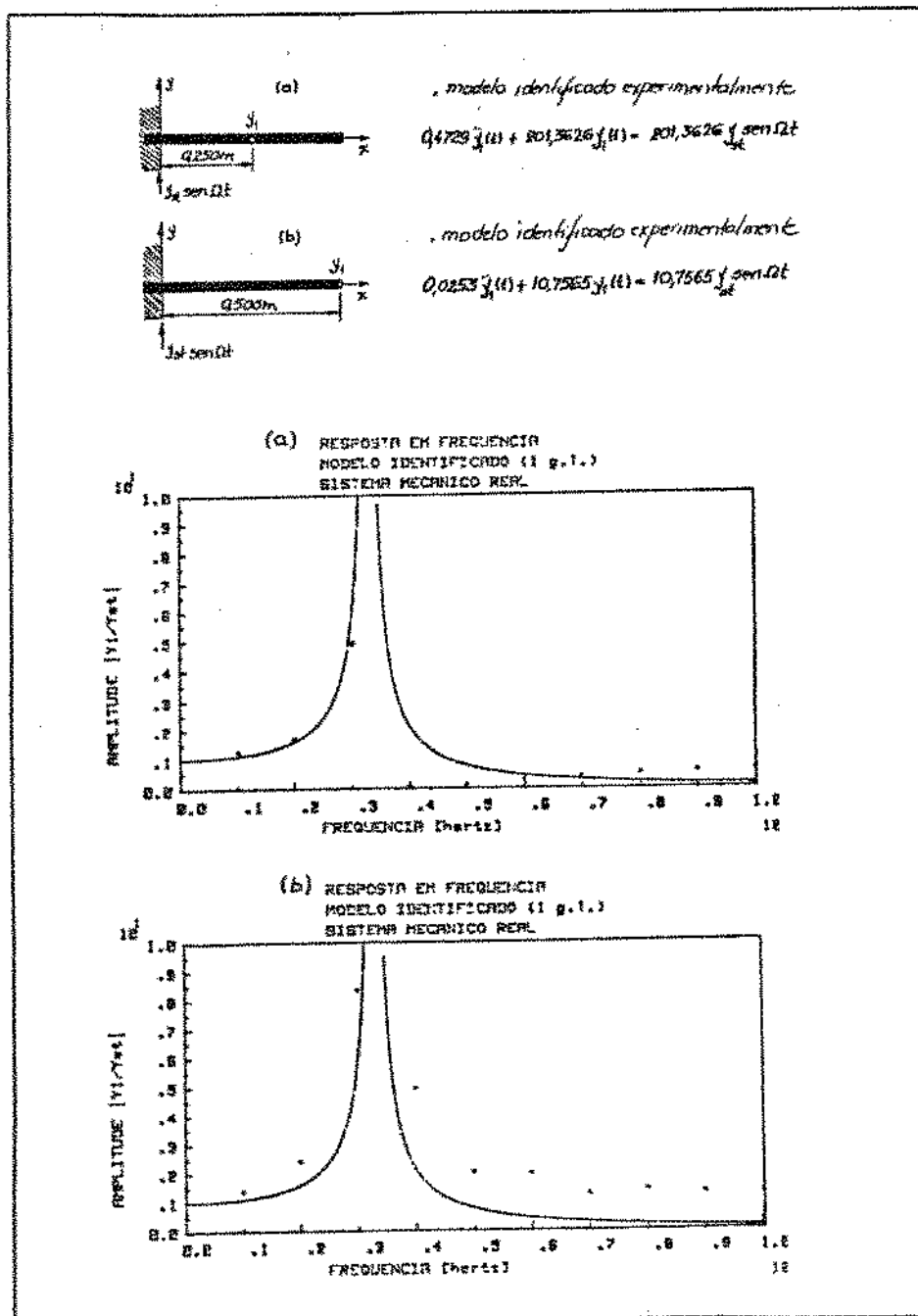


Figura 6.14: Modelos com 1 Grau de Liberdade



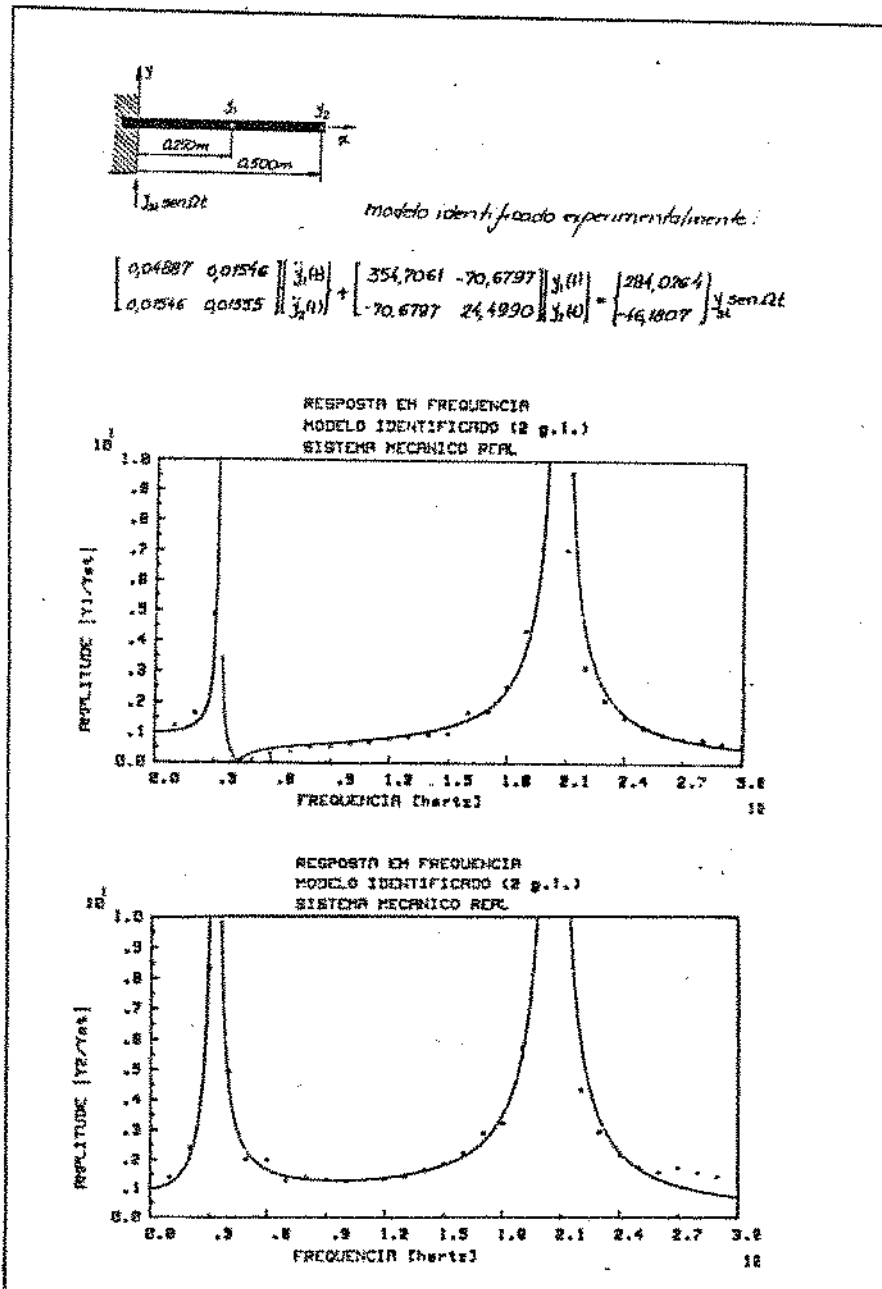
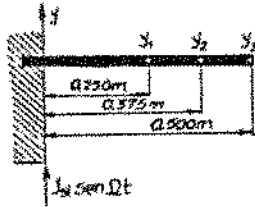


Figura 6.15: Modelo com 2 Graus de liberdade



modelo identificado experimentalmente:

$$\begin{bmatrix} 0.04939 & -0.0497 & 0.00824 \\ 0.0497 & 0.04052 & 0.00130 \\ 0.00824 & 0.00130 & 0.00894 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 207,11 & -2302,78 & 761,56 \\ -2302,78 & 3043,38 & -11293 \\ 761,56 & -112,93 & 425,87 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 529,89 \\ -332,33 \\ 74,50 \end{bmatrix} y_0 \sin \Omega t$$

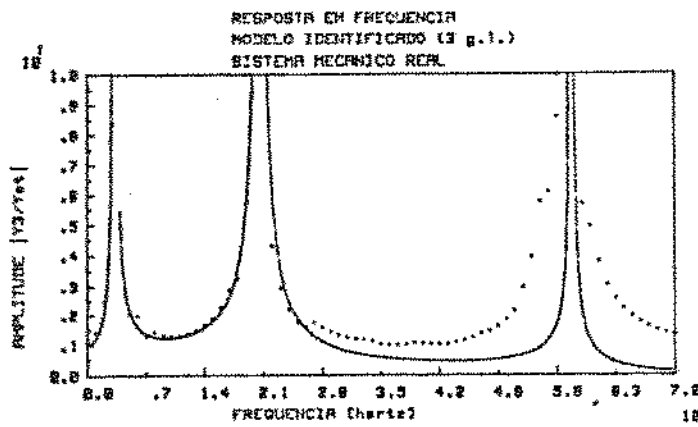
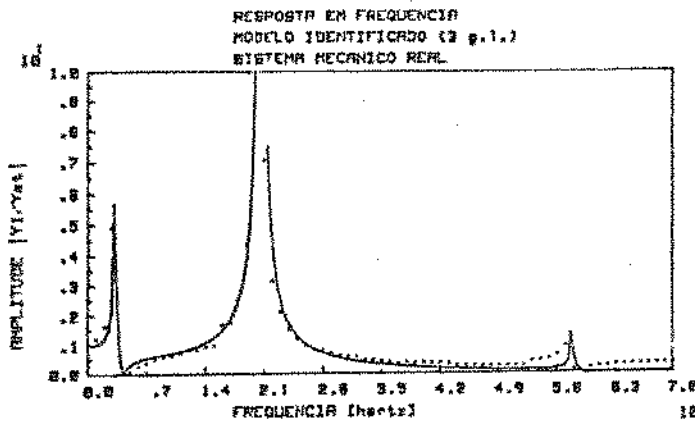


Figura 6.16: Modelo com 3 Graus de Liberdade

## Capítulo 7

# MODELOS MATEMÁTICOS EM DINÂMICA DE CORPOS RÍGIDOS

### 7.1 Introdução

Nos capítulos anteriores apresentou-se uma forma de representar o comportamento dinâmico de sistemas mecânicos contínuos através de modelos matemáticos discretos, identificados a partir de medições experimentais. Durante o modelamento desses sistemas, dadas as condições de contorno, preocupou-se somente com as frequências e os modos normais de flexão.

Nesta segunda etapa do trabalho, dadas as novas condições de contorno, sistemas mecânicos contínuos montados sobre elementos elásticos, a nova questão de estudo passa a ser como construir modelos matemáticos que representem o comportamento de corpo rígido desses sistemas. Com isto, surge a necessidade de se identificar a rigidez e o amortecimento desses elementos elásticos.

Mais uma vez, a preocupação com o número mínimo possível de graus de liberdade é de fundamental importância.

Para dar início a esta nova etapa, desenvolve-se, primeiramente, as equações analíticas para uma viga contínua e uniforme suportada por molas. Variando-se a rigidez dos apoios, observa-se o comportamento dos modos de corpo rígido e a influência dessas novas condições de contorno sobre os modos normais de flexão da viga.

Em seguida, baseado na Dinâmica de Corpos Rígidos, obtém-se as equações de movimento para um modelo de dois graus de liberdade (1 de translação e 1 de rotação), juntamente com a sua resposta de deslocamento quando excitado por uma função senoidal. Supondo-se conhecidos alguns parâmetros físicos de fácil obtenção experimental e medindo-se a fase entre os sinais de deslocamento dos dois pontos do sistema mecânico (pontos de apoio), ajusta-se, por mínimos quadrados, um valor de rigidez e um valor de amortecimento equivalentes para os elementos elásticos do suporte.

Simulando-se o modelo em computador analógico, observa-se a viabilidade da aplicação da técnica de identificação em sistemas físicos reais.

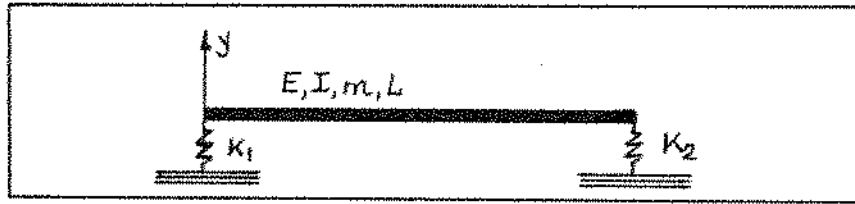


Figura 7.1: Viga Contínua sobre Molas

## 7.2 Viga Contínua Apoiada em Elementos Elásticos

Sabe-se do Capítulo 2, que a equação de uma viga para  $E$ ,  $I$  e  $m$  constantes é dada por

$$\frac{d^4 Y(x)}{dx^4} - \beta^4 Y(x) = 0 \quad ; \quad \beta^4 = \frac{w^2 m}{EI} \quad (7.1)$$

Como condições de contorno para uma viga biapoiada sobre molas (figura 7.1) tem-se: momento fletor nulo nas extremidades da viga e força cortante nas extremidades proporcional à deformação  $Y(x)$  ( $x = 0$  e  $x = L$ ) multiplicada pela rigidez dos apoios  $K_1$  e  $K_2$ , ou seja :

$$EI \left[ \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right]_{x=0} = 0 \quad (7.2)$$

$$EI \left[ \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right]_{x=L} = 0 \quad (7.3)$$

$$EI \left[ \frac{d^3 Y(x)}{dx^3} \right]_{x=0} = -K_1 Y(0) \quad (7.4)$$

$$EI \left[ \frac{d^3 Y(x)}{dx^3} \right]_{x=L} = -K_2 Y(L) \quad (7.5)$$

Tem-se como solução para a equação (7.1) uma função

$$Y(x) = A \sin \beta x + B \cos \beta x + C \sinh \beta x + D \cosh \beta x \quad (7.6)$$

onde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são constantes a serem determinadas em função das condições de contorno. Assim, tem-se para as derivadas segunda e terceira da linha elástica as seguintes equações

$$\frac{d^2 Y(x)}{dx^2} = \beta^2 (-A \sin \beta x - B \cos \beta x + C \sinh \beta x + D \cosh \beta x) \quad (7.7)$$

$$\frac{d^3 Y(x)}{dx^3} = \beta^3 (-A \cos \beta x + B \sin \beta x + C \cosh \beta x + D \sinh \beta x) \quad (7.8)$$

Através das equações (7.2), (7.3), (7.4), (7.5), (7.7) e (7.8), pode-se escrever o seguinte:

$$\begin{bmatrix} -\beta^2 \sin \beta L & -\beta^2 \cos \beta L & \beta^2 \sinh \beta L & \beta^2 \cosh \beta L \\ -\beta^3 \cos \beta L & \beta^3 \sin \beta L & \beta^3 \cosh \beta L & \beta^3 \sinh \beta L \\ (-\beta^2 \cos \beta L + \frac{K_1}{EI} \sin \beta L) & (\beta^2 \sin \beta L + \frac{K_1}{EI} \cos \beta L) & (\beta^2 \cosh \beta L + \frac{K_2}{EI} \sinh \beta L) & (\beta^2 \sinh \beta L + \frac{K_2}{EI} \cosh \beta L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.9)$$

ou

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.10)$$

Reduzindo-se a ordem do sistema matricial, chega-se que

$$\begin{bmatrix} (a_{11} - a_{14}a_{31}/a_{34}) & (a_{12} - a_{14}a_{32}/a_{34}) & (a_{13} - a_{14}a_{33}/a_{34}) \\ (a_{21} - a_{24}a_{31}/a_{34}) & (a_{22} - a_{24}a_{32}/a_{34}) & (a_{23} - a_{24}a_{33}/a_{34}) \\ (a_{41} - a_{44}a_{31}/a_{34}) & (a_{42} - a_{44}a_{32}/a_{34}) & (a_{43} - a_{44}a_{33}/a_{34}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.11)$$

ou

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.12)$$

Reduzindo-se novamente a ordem do sistema chega-se a :

$$\begin{bmatrix} (b_{11} - b_{13}b_{31}/b_{33}) & (b_{12} - b_{13}b_{32}/b_{33}) \\ (b_{21} - b_{23}b_{31}/b_{33}) & (b_{22} - b_{23}b_{32}/b_{33}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.13)$$

ou

$$|b|\{z\} = \{0\} \quad (7.14)$$

Fazendo-se o determinante de  $|b|$  igual a zero

$$Det(\beta) = (b_{11} - b_{13}b_{31}/b_{33})(b_{22} - b_{23}b_{32}/b_{33}) - (b_{21} - b_{23}b_{31}/b_{33})(b_{12} - b_{13}b_{32}/b_{33}) = 0 \quad (7.15)$$

chega-se a uma equação transcendental em função de  $\beta$ . Para os valores  $\beta$  onde essa equação se anula tem-se as frequências naturais da viga flexível, apoiada sobre elementos elásticos.

Definindo-se

- $\rho_1 = \frac{K_1 L^3}{EI}$ : relação entre a rigidez do mancal 1 e a rigidez de flexão da viga e
- $\rho_2 = \frac{K_2 L^3}{EI}$ : relação entre a rigidez do mancal 2 e a rigidez de flexão da viga,

observa-se, na tabela 7.1, a variação de  $\beta_r$  ( $r = 1, 2, 3, 4$ ), ou seja, a variação das frequências naturais da viga, em função das relações  $\rho_1$  e  $\rho_2$ .

Trabalhando-se com a equação (7.9) chega-se na equação da linha elástica para cada modo natural  $r$  ( $r = 1, 2, \dots$ )

$$Y(x) = \alpha_r \left[ E_r (\sin \beta_r x + \sinh \beta_r x) - F_r (\cos \beta_r x + \cosh \beta_r x) + \frac{2\rho_1}{\beta_r^3 L^3} F_r \sinh \beta_r x \right] \quad (7.16)$$

onde

$$E_r = \cos \beta_r L - \cosh \beta_r L + \frac{2\rho_1}{\beta_r^3 L^3 \sinh \beta_r L} \quad (7.17)$$

$\rho_1 = \rho_2$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
0,	0,	0,	4,730	7,853
0,0001	0,047	0,137	4,730	7,853
0,0010	0,101	0,243	4,730	7,853
0,0100	0,216	0,431	4,730	7,853
0,1000	0,465	0,767	4,730	7,853
0,2000	0,584	0,912	4,730	7,853
0,3000	0,670	1,009	4,730	7,853
0,4000	0,736	1,084	4,730	7,853
0,5000	0,793	1,145	4,730	7,853
1,5000	1,144	1,501	4,730	7,853
2,0000	1,259	1,610	4,731	7,853
10,000	2,155	2,353	4,747	7,854
1.000	3,141	6,253	9,141	11,66
*	*	*	*	*
$\infty$	$\pi$	$2\pi$	$3\pi$	$4\pi$

Tabela 7.1: Comportamento das frequências naturais da viga biapoiada sobre molas quando se varia as relações de rigidez  $\rho_1$  e  $\rho_2$

$$F_r = \sin \beta_r L - \sinh \beta_r L \quad (7.18)$$

Nas figuras 7.2 e 7.3, observa-se o comportamento da linha elástica nas quatro primeiras frequências naturais quando se varia as relações de rigidez  $\rho_1$  e  $\rho_2$ .

Quando  $\rho_1 = \rho_2 = 0,00001$ , a linha elástica tem a mesma forma da linha elástica de uma viga livre-livre. Já, quando  $\rho_1 = \rho_2 = \infty$ , a linha elástica se transforma na linha elástica de uma viga biapoiada, com  $\beta_1 = \pi$ ,  $\beta_2 = 2\pi$ ,  $\beta_3 = 3\pi$ ,  $\beta_4 = 4\pi$ , etc... como pode ser visto no capítulo 3, item 3.3.

Deste breve estudo, obtém-se subsídios básicos que permitem chegar a conclusões muito importantes:

- Observando-se a linha elástica nas duas primeiras frequências naturais (figura 7.2) quando  $\rho_1 = \rho_2 \leq 1.5$ , ou seja, a rigidez dos apoios é próxima a rigidez de flexão da viga, verifica-se que é perfeitamente válido e preciso aproximar a linha elástica por linhas retas e considerar a viga como um corpo rígido.
- Observando-se  $\beta_3$  e  $\beta_4$  na tabela 7.1 e a forma da linha elástica na figura 7.3 quando  $\beta_1 = \beta_2 \leq 1.5$ , verifica-se que a influência da rigidez dos apoios sobre as frequências e os modos de flexão de uma viga livre-livre é desprezível. Em outras palavras, o erro que se comete em estimar que as frequências naturais e os modos de flexão do sistema mecânico montado sobre elementos elásticos como sendo iguais às frequências naturais e os modos de flexão do sistema livre-livre, é desprezível quando a rigidez dos mancais é da mesma ordem ou inferior à ordem da rigidez de flexão da viga.

Exemplificando, quando for difícil ou impossível a realização do processo experimental de análise modal no eixo de uma turbina, ou de uma ultracentrífuga ou qualquer outro sistema mecânico montado dentro de sua carcaça, pode-se realizar a análise modal do eixo livre-livre (fora da carcaça) e usar esses resultados como os resultados do sistema

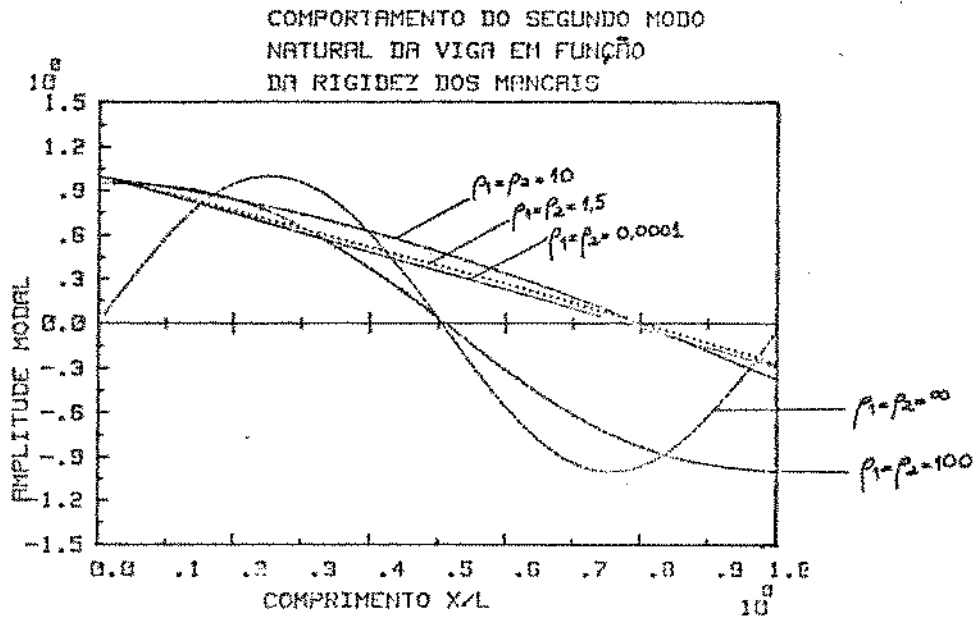
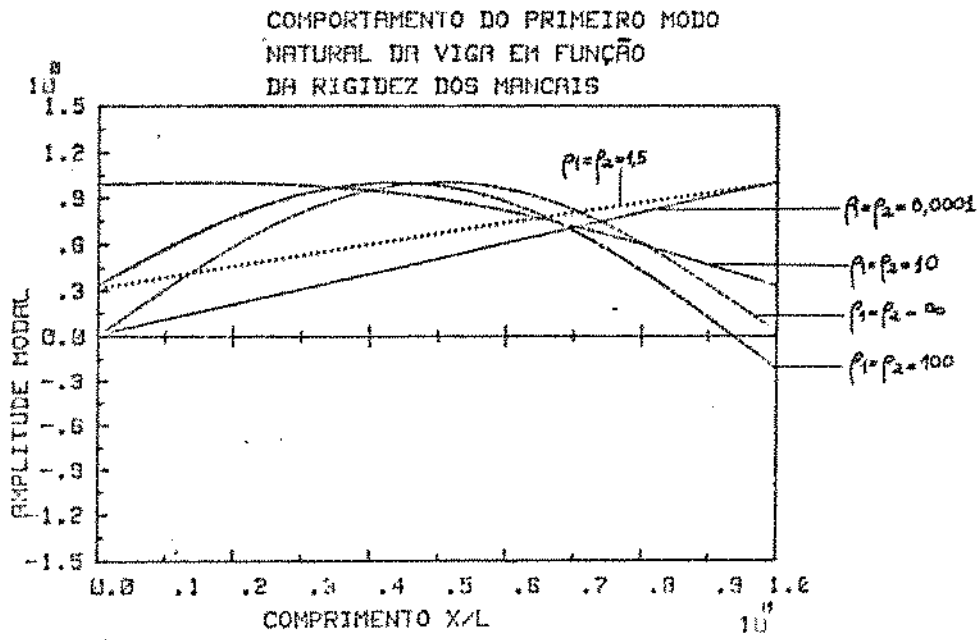


Figura 7.2: Forma da Linha Elástica nos Dois Primeiros Modos Naturais em função das relações  $\beta_1 = \beta_2 = \rho$

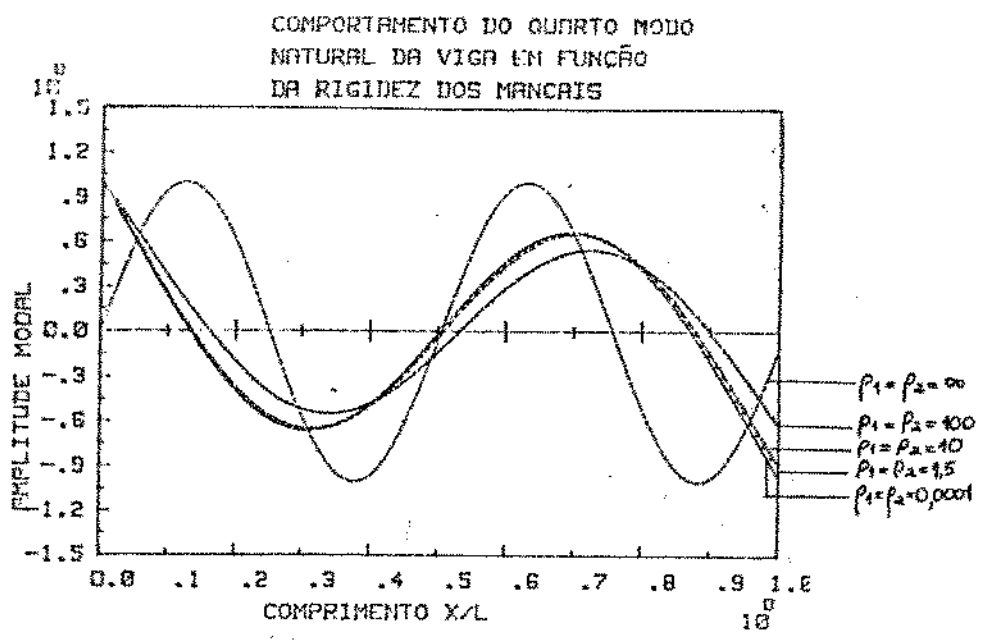
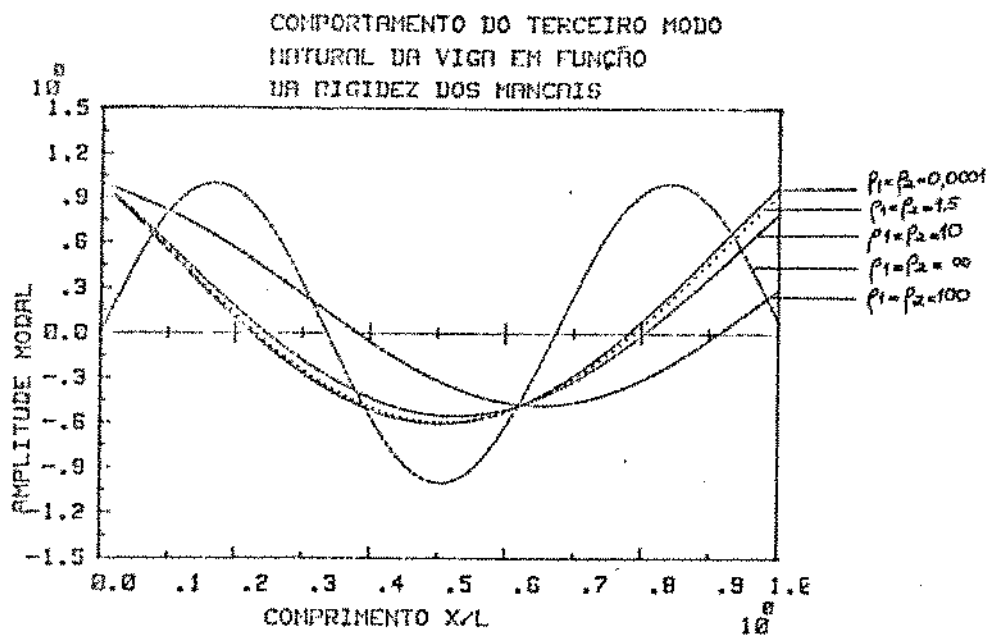


Figura 7.3: Forma da Linha Elástica no Terceiro e no Quarto Modo em função das relações  $p_1 = p_2 = p$



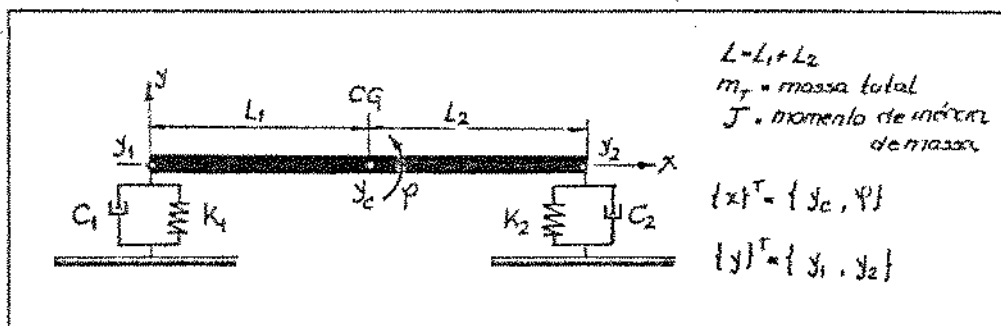


Figura 7.4: Modelo Rígido apoiado sobre elementos elásticos

montado, sem causar erros significativos, desde que a rigidez dos mancais elásticos seja da mesma ordem ou inferior à ordem da rigidez de flexão do eixo.

### 7.3 Equacionamento do Modelo Rígido

Como pode ser visto no item 7.2, quando a rigidez dos mancais e a rigidez de flexão da viga são da mesma ordem de grandeza ou menor, pode-se considerar que a viga é rígida, ou seja, não flete e não deforma, somente translada e/ou gira em relação ao referencial inercial, nas frequências naturais mais baixas.

Assim, equacionando o modelo mostrado na figura 7.4 no referencial colocado no centro de gravidade [19] tem-se

$$\begin{bmatrix} m_T & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_c(t) \\ \ddot{\varphi}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (C_2 + C_1) & (C_1 L_1 - C_2 L_2) \\ (C_1 L_1 - C_2 L_2) & (C_2 L_2^2 + C_1 L_1^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_c(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (K_2 + K_1) & (K_1 L_1 - K_2 L_2) \\ (K_1 L_1 - K_2 L_2) & (K_2 L_2^2 + K_1 L_1^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_c(t) \\ \varphi(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.19)$$

ou seja,

$$[M_0]\{\ddot{x}(t)\} + [C_0]\{\dot{x}(t)\} + [K_0]\{x(t)\} = \{0\} \quad (7.20)$$

O que se deseja, no entanto, não é escrever as equações de movimento do sistema mostrado na figura 7.4 no sistema de referência colocado no centro de gravidade, mas sim, num outro sistema que tenha como coordenadas os pontos  $y_1$  e  $y_2$  localizados nos apoios.

Uma vez que o corpo é rígido, pode-se escrever que

$$y_c = y_2 + L_2 \tan \varphi \quad (7.21)$$

e

$$\sin \varphi = \frac{y_1 - y_2}{L} \quad (7.22)$$

Se o ângulo  $\varphi$  for considerado pequeno  $\varphi \approx \sin \varphi \approx \tan \varphi$  e pode-se reescrever (7.21) e (7.22) como

$$\varphi = \frac{y_1 - y_2}{L} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{L}y_1 - \frac{1}{L}y_2 \quad (7.23)$$

e

$$y_v = y_2 + L_2 \frac{y_1 - y_2}{L} \Rightarrow y_v = \frac{L_2}{L}y_1 + \frac{L_1}{L}y_2 \quad (7.24)$$

Escrevendo-se (7.23) e (7.24) na forma matricial, tem-se

$$\begin{Bmatrix} y_v \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2/L & L_1/L \\ 1/L & -1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{x\} = [T]\{y\} \quad (7.25)$$

onde  $[T]$  é a matriz de transformação de coordenadas de  $\{y_v, \varphi\}^T$  para  $\{y_1, y_2\}^T$ .

Substituindo-se a equação (7.25) na (7.20) fica-se com

$$[M_0][\dot{T}]\{\ddot{y}(t)\} + [C_0][T]\{\dot{y}(t)\} + [K_0][T]\{y(t)\} = \{0\} \quad (7.26)$$

Pré-multiplicando (7.26) por  $[T]^T$  obtém-se

$$[T]^T[M_0][T]\{\ddot{y}(t)\} + [T]^T[C_0][T]\{\dot{y}(t)\} + [T]^T[K_0][T]\{y(t)\} = \{0\} \quad (7.27)$$

ou

$$[M_R]\{\ddot{y}(t)\} + [C_R]\{\dot{y}(t)\} + [K_R]\{y(t)\} = \{0\} \quad (7.28)$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} (m_T L_2^2 + J)/L^2 & (m_T L_1 L_2 - J)/L^2 \\ (m_T L_1 L_2 - J)/L^2 & (m_T L_1^2 + J)/L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.29)$$

Ressalta-se aqui, que os elementos da matriz de massa

$$M_{11} = (m_T L_2^2 + J)L^2$$

$$M_{12} = M_{21} = (m_T L_1 L_2 - J)/L^2$$

$$M_{22} = (m_T L_1^2 + J)/L^2$$

podem ser facilmente obtidos experimentalmente, pois dependem da massa total  $m_T$  (que pode ser pesada antes do sistema mecânico, aqui representado por uma viga, ser montado dentro de sua carcaça), das coordenadas do centro de gravidade  $L_1, L_2$ , do comprimento total  $L$  e do momento de inércia de massa  $J$ .

Destaca-se mais uma vez, a afirmativa feita no capítulo 1, que o acoplamento elástico ou inercial não é uma característica intrínseca do sistema físico, e sim resultado do tipo de coordenada utilizada para descrever o movimento do sistema mecânico.

Além disso, uma característica interessante da matriz de massa  $[M_H]$ , escrita neste sistema de coordenadas, é que quando se efetua a soma dos seus elementos, obtém-se a informação da massa total, ou seja,

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 M_{ij} = m_T$$

Observando a equação (7.29) que representa o modelo matemático de corpo rígido dos sistemas mecânicos com os quais se trabalha, percebe-se que, uma vez conhecida a matriz de massa, precisa-se identificar as constantes elásticas  $K_1$  e  $K_2$  e as constantes de amortecimento  $C_1$  e  $C_2$  dos elementos elásticos do suporte.

## 7.4 Identificação das Características dos Apoios

Reescrevendo a equação (7.29) com uma força de excitação colocada na coordenada  $y_1$ , fica-se com

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 e^{i\Omega t} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.30)$$

onde  $F_1$  é a amplitude e  $\Omega$  a frequência da força de excitação.

Como o modelo é linear, sabe-se que a resposta tem a mesma forma da excitação com diferenças na amplitude e na fase, ou seja, pode-se escrever que

$$y_1(t) = |y_1| e^{i(\Omega t + \psi_1)} \quad (7.31)$$

$$y_2(t) = |y_2| e^{i(\Omega t + \psi_2)} \quad (7.32)$$

Substituindo-se (7.31) e (7.32) em (7.30), chega-se que

$$\begin{bmatrix} (-M_{11}\Omega^2 + K_1 + i_1\Omega C_1) & -M_{12}\Omega^2 \\ -M_{12}\Omega^2 & (-M_{22}\Omega^2 + K_2 + iC_2\Omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} |y_1| e^{i\psi_1} \\ |y_2| e^{i\psi_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.33)$$

Resolvendo por Cramer tem-se

$$|y_1| e^{i\psi_1} = \frac{F_1 (-M_{22}\Omega^2 + K_2 + iC_2\Omega)}{[(-i)^2 M_{11} + K_1](-i)^2 M_{22} + K_2 - i^2 (C_1 C_2 - i^4 M_{12}^2) + i\Omega [C_1 (-i)^2 M_{22} + K_2] + C_2 (-i)^2 M_{11} + K_1} \quad (7.34)$$

$$|y_2| e^{i\psi_2} = \frac{F_1 M_{12} \Omega^2}{[(-i)^2 M_{11} + K_1](-i)^2 M_{22} + K_2 - i^2 (C_1 C_2 - i^4 M_{12}^2) + i\Omega [C_1 (-i)^2 M_{22} + K_2] + C_2 (-i)^2 M_{11} + K_1} \quad (7.35)$$

Definindo a fase  $\psi^*$  entre a resposta de deslocamento do apoio 1 e do apoio 2

$$\psi^* = \psi_1 - \psi_2 \quad (7.36)$$

tem-se baseado em [20] que

$$\tan \psi' = \frac{\Omega C_2}{(K_2 - M_{22}\Omega^2)} \quad (7.37)$$

ou seja, a defasagem entre a resposta de deslocamentos dos apoios 1 e 2 depende da frequência de excitação  $\Omega$ , do amortecimento  $C_2$  e da rigidez  $K_2$ . Observa-se, também, que  $\psi'$  é independente da amplitude da força de excitação  $F_1$ . Logo, variando-se a frequência de excitação e medindo-se a fase  $\psi'$  entre a resposta dos dois apoios através de um fasímetro, é possível escrever o seguinte sistema matricial baseado na equação (7.37)

$$\begin{bmatrix} \tan \psi'_1 & -\Omega_1 \\ \tan \psi'_2 & -\Omega_2 \\ \tan \psi'_3 & -\Omega_3 \\ \dots & \dots \\ \tan \psi'_q & -\Omega_q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_2 \\ C_2 \end{Bmatrix} = M_{22} \begin{Bmatrix} \Omega_1^2 \tan \psi'_1 \\ \Omega_2^2 \tan \psi'_2 \\ \Omega_3^2 \tan \psi'_3 \\ \dots \\ \Omega_q^2 \tan \psi'_q \end{Bmatrix} \quad (7.38)$$

onde  $q$  é o número de medições.

Baseado na teoria de Ajuste por Mínimos Quadrados [11,21], escreve-se que

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^q \tan^2 \psi'_i & \sum_{i=1}^q \Omega_i \tan \psi'_i \\ \sum_{i=1}^q \Omega_i \tan \psi'_i & \sum_{i=1}^q \Omega_i^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_2 \\ C_2 \end{Bmatrix} = M_{22} \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^q \Omega_i^2 \tan^2 \psi'_i \\ \sum_{i=1}^q \Omega_i^3 \tan \psi'_i \end{Bmatrix} \quad (7.39)$$

Resolvendo a equação (7.39) por Cramer, chega-se que a rigidez no apoio 2 é dada por

$$K_2 = M_{22} \frac{(\sum \Omega_i \tan^2 \psi'_i)(\sum \Omega_i^2) - (\sum \Omega_i^3 \tan \psi'_i)(\sum \Omega_i \tan \psi'_i)}{(\sum \tan^2 \psi'_i)(\sum \Omega_i^2) - (\sum \Omega_i \tan \psi'_i)^2} \quad (7.40)$$

e o amortecimento neste mesmo apoio, por

$$C_2 = M_{22} \frac{(\sum \tan^2 \psi'_i)(\sum \Omega_i^3 \tan \psi'_i) - (\sum \Omega_i \tan \psi'_i)(\sum \Omega_i^2 \tan^2 \psi'_i)}{(\sum \tan^2 \psi'_i)(\sum \Omega_i^2) - (\sum \Omega_i \tan \psi'_i)^2} \quad (7.41)$$

Desta forma, excitando-se o apoio 1, é possível identificar o amortecimento e a rigidez do apoio 2, através das medidas de frequência e fase.

Analogamente, excitando-se o apoio 2 com uma força  $F_2 e^{i\Omega t}$ , chega-se que a defasagem entre a resposta dos dois apoios é

$$\tan \psi'' = \frac{C_1 \Omega}{(K_1 - M_{11}\Omega^2)} \quad (7.42)$$

onde

$$\psi'' = \psi_1 - \psi_2 \quad (7.43)$$

Variando-se a frequência e medindo-se a fase entre os sinais dos dois apoios, tem-se

$$\begin{bmatrix} \tan \psi''_1 & -\Omega_1 \\ \tan \psi''_2 & -\Omega_2 \\ \tan \psi''_3 & -\Omega_3 \\ \dots & \dots \\ \tan \psi''_q & -\Omega_q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_1 \\ C_1 \end{Bmatrix} = M_{11} \begin{Bmatrix} \Omega_1^2 \tan \psi''_1 \\ \Omega_2^2 \tan \psi''_2 \\ \Omega_3^2 \tan \psi''_3 \\ \dots \\ \Omega_q^2 \tan \psi''_q \end{Bmatrix} \quad (7.44)$$

onde  $q$  é o número de medições.

Ajustando-se por mínimos quadrados, identifica-se a rigidez e o amortecimento no apoio 1:

$$K_1 = M_{11} \frac{(\sum u_i \tan^2 \psi_i^{**})(\sum v_i^2) - (\sum v_i \tan \psi_i^{**})(\sum u_i \psi_i^{**})}{(\sum \tan^2 \psi_i^{**})(\sum v_i^2) - (\sum u_i \tan \psi_i^{**})^2} \quad (7.45)$$

e

$$C_1 = M_{11} \frac{(\sum \tan^2 \psi_i^{**})(\sum v_i \tan \psi_i^{**}) - (\sum u_i \tan \psi_i^{**})(\sum v_i^2 \tan^2 \psi_i^{**})}{(\sum \tan^2 \psi_i^{**})(\sum v_i^2) - (\sum u_i \tan \psi_i^{**})^2} \quad (7.46)$$

Ressalta-se que  $\psi^*$  é a defasagem da resposta entre os dois apoios quando a excitação atua sobre o apoio 1 e  $\psi^{**}$  é a defasagem quando a excitação atua sobre o apoio 2. Assim, quando se excita o sistema mecânico através do apoio 1, identifica-se  $K_2$  e  $C_2$  e quando se excita o sistema através do apoio 2, identifica-se  $K_1$  e  $C_1$ .

A grande vantagem desta técnica de identificação é que mesmo existindo pequenas variações da rigidez e do amortecimento em função da frequência de operação do sistema mecânico, identifica-se uma rigidez e um amortecimento equivalentes.

## 7.5 Simulação Analógica do Modelo Rígido.

(a) Equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{y}_1 = -\frac{M_{12}}{M_{11}} \ddot{y}_2 - \frac{C_1}{M_{11}} \dot{y}_1 - \frac{K_1}{M_{11}} y_1 + \frac{F_1}{M_{11}} \sin \Omega t \\ \ddot{y}_2 = -\frac{M_{12}}{M_{22}} \ddot{y}_1 - \frac{C_2}{M_{22}} \dot{y}_2 - \frac{K_2}{M_{22}} y_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{y}_1 = -\frac{M_{12}}{M_{11}} \ddot{y}_2 - \frac{C_1}{M_{11}} \dot{y}_1 - \frac{K_1}{M_{11}} y_1 \\ \ddot{y}_2 = -\frac{M_{12}}{M_{22}} \ddot{y}_1 - \frac{C_2}{M_{22}} \dot{y}_2 + \frac{F_2}{M_{22}} \sin \Omega \end{array} \right.$$

(b) Parâmetros:

- $m_T = 100\text{Kg}$
- $L = 1\text{m}$
- $L_1 = 0,5\text{m}$
- $L_2 = 0,5\text{m}$
- $\text{raio} = 0,1\text{m}$
- $J = m_T(3.\text{raio}^2)/12 = 8,853\text{Kgm}^2$

(c) Elementos da Matriz de Massa

- $M_{11} = (m_T L_2^2 + J)/L^2 = 33,583\text{kg}$
- $M_{12} = (m_T L_1 L_2 - J)/L^2 = 16,417\text{kg}$

- $M_{21} = (m_T L_1 L_2 - J)/L^2 = 16,417\text{kg}$

- $M_{21} = (m_T L_1 L_2 + J)/L^2 = 33,583\text{kg}$

(d) Elementos da Matriz de Amortecimento

- $C_{11} = C_1 = 30 \text{Ns/m}$

- $C_{12} = 0$

- $C_{21} = 0$

- $C_{22} = C_2 = 30\text{Ns/m}$

(e) Elementos da Matriz de Rigidez

- $K_{11} = K_1 = 80.000\text{N/m}$

- $K_{12} = 0$

- $K_{21} = 0$

- $K_{22} = K_2 = 60.000\text{N/m}$

(f) Equacionamento Matricial

$$\begin{bmatrix} 33,583 & 16,417 \\ 16,417 & 33,583 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 80.000 & 0 \\ 0 & 60.000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(g) Frequências Naturais não Amortecidas ( $[C] = [0]$ )

- $w_1 = 36,839\text{rad/s} = 5,8\text{hz}$

- $w_2 = 64,123\text{rad/s} = 10,2\text{hz}$

(h) Modos de Vibração não Amortecidos ( $[C] = [0]$ )

- $\{U\}_R^{(1)} = \{0,64728 ; 1,00000\}^T$

- $\{U\}_R^{(2)} = \{1,00000 ; -0,8630\}^T$

(i) Circuito Analógico

(j) Medição de Fase

(l) Resultados da Simulação

Utilizando-se as equações (7.40), (7.41), (7.45) e (7.46) com os parâmetros de massa  $M_{11}$  e  $M_{22}$  obtidos no item (c),  $\Omega_i$ ,  $\psi_i^*$  e  $\psi_i^{**}$  obtidos da tabela 7.2, chega-se aos resultados mostrados na tabela 7.3

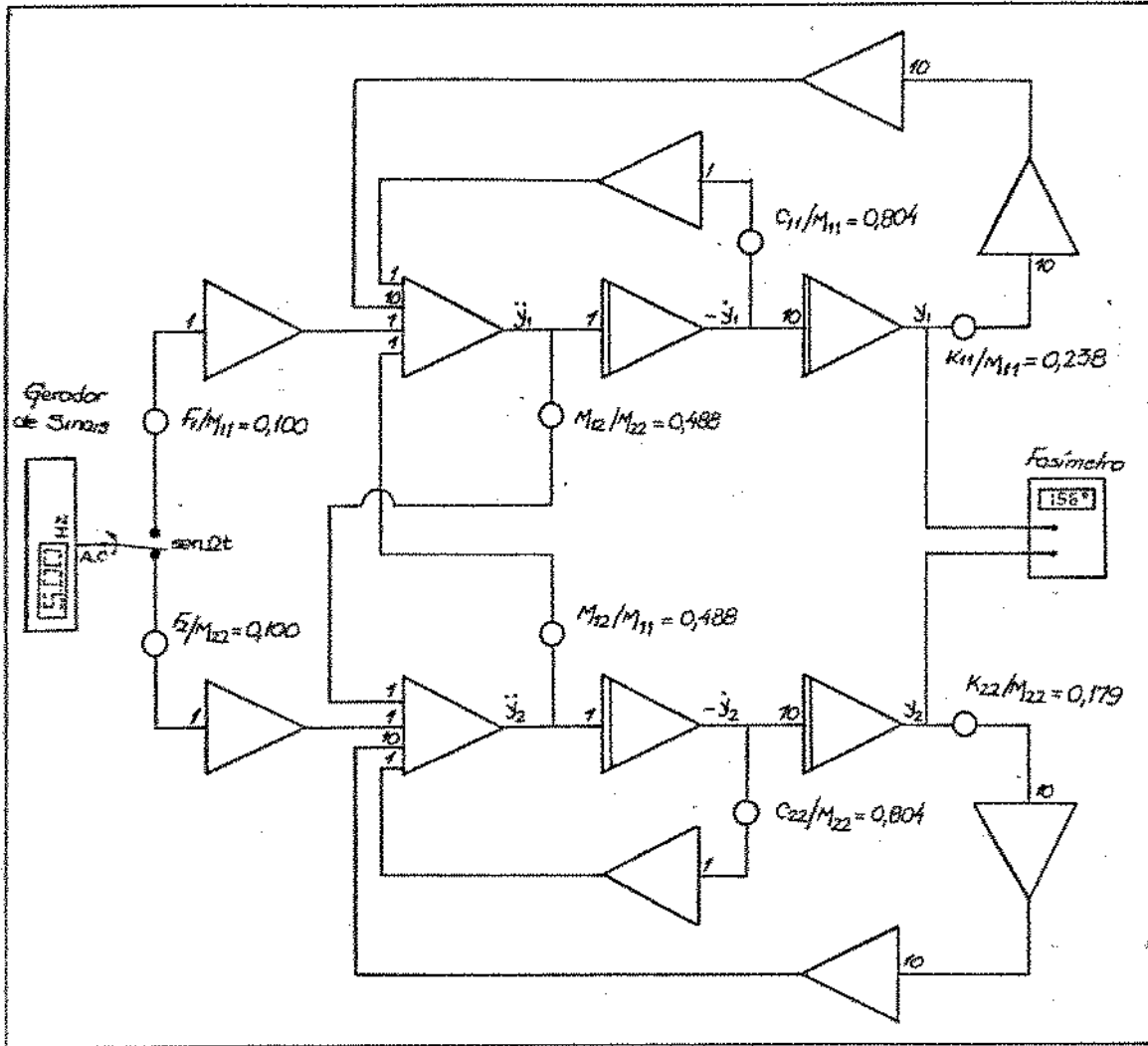


Figura 7.5: Circuito Analógico para simulação do modelo rígido

medida :	frequência		fase	
	$\Omega_i$ [Hz]	$\psi_i'$ [°]	$\Omega_i$ [Hz]	$\psi_i'$ [°]
1	2,0	1	2,0	1
2	2,5	1	2,5	1
3	3,0	1	3,0	1
4	3,5	1	3,5	1
5	4,0	1	4,0	2
6	4,5	1	4,5	2
7	5,0	2	5,0	2
8	5,5	3	5,5	3
9	6,0	5	6,0	4
10	6,1	6	6,5	5
11	6,2	7	7,0	6
12	6,3	9	7,1	7
13	6,4	12	7,2	9
14	6,5	19	7,3	10
15	6,6	38	7,4	13
16	6,7	108	7,5	15
17	6,8	156	7,6	19
18	6,9	166	7,7	35
19	7,0	171	7,8	142
20	7,5	176	7,9	169
21	8,0	177	8,0	175
22	8,5	178	8,5	176
23	9,0	179	9,0	178
24	9,5	179	9,5	179
25	10,0	179	10,0	179
26	11,0	179	10,5	179
27	12,0	179	11,0	179

Tabela 7.2: Medições de Frequência e Fase

Parâmetro Identificado	Valor Exato	Erro
$K_1 = 78.978$ N/m	80.000 N/m	1,3%
$C_1 = 26,11$ N.s/m	30,00 N.s/m	13,0%
$K_2 = 59.125$ N/m	60.000 N/m	1,4%
$C_2 = 27,63$ N.s/m	30,00 N.s/m	7,9%

Tabela 7.3: Resultado da simulação analógica



## 7.6 Conclusões

Observando-se os resultados da simulação, certifica-se que é possível, através do procedimento experimental aqui desenvolvido, identificar a rigidez e o amortecimento dos elementos elásticos que suportam os sistemas mecânicos em estudo. Desta forma, viabiliza-se a construção do modelo

$$[M_R]\{\ddot{y}(t)\} + [C_R]\{\dot{y}(t)\} + [K_R]\{y(t)\} = \{0\} \quad (7.47)$$

que representa o comportamento dinâmico dos sistemas mecânicos contínuos e flexíveis suportados por elementos elásticos nas frequências mais baixas, onde estes assemelham-se a corpos rígidos.



## Capítulo 8

# ACOPLAMENTO DO MODELO RÍGIDO E DO MODELO FLEXÍVEL

### 8.1 Introdução

Como já foi dito anteriormente, deseja-se contrair modelos matemáticos para sistemas mecânicos contínuos suportados por elementos elásticos.

Constatou-se no capítulo anterior que, quando a rigidez dos elementos que suportam esses sistemas mecânicos está na mesma faixa ou numa faixa de valores inferior ao valor da rigidez de flexão do mesmos, estes podem ser considerados como sendo rígidos. Baseado na dinâmica de corpos rígidos, construiu-se um modelo matemático discreto responsável por representar o comportamento dinâmico desses sistemas numa faixa específica de operação, a das velocidades baixas.

Neste capítulo propõe-se resolver um novo problema: Como acoplar o comportamento de corpo rígido e o comportamento de corpo flexível em um único modelo matemático?

A motivação deste estudo provém do fato de que muitos sistemas mecânicos operam em faixas de velocidades variáveis, podendo operar tanto nas baixas velocidades (comportando-se como um corpo rígido) quanto nas velocidades mais altas (passando pelas frequências naturais de flexão). Por exemplo, uma ultracentrífuga suportada por mancais magnéticos.

Para a identificação das matrizes de massa  $[M]_{glob}$ , de amortecimento  $[C]_{glob}$  e de rigidez  $[K]_{glob}$  para o modelo global, equação (8.1)

$$[M]_{glob}\{\ddot{y}(t)\} + [C]_{glob}\{\dot{y}(t)\} + [K]_{glob}\{y(t)\} = \{0\} \quad (8.1)$$

parte-se do conhecimento dos seguintes dados:

- As frequências e os modos de corpo rígido (resolvendo-se o problema de autovalor e autovetor para a equação (7.47));
- A energia cinética relacionada com a matriz de massa  $[M_R]$  e a energia potencial, relacionada com a matriz de rigidez  $[K_R]$  do modelo rígido.

- As frequências e os modos de flexão (obtidos do processo de análise modal do sistema mecânico livre, ou seja, fora dos apoios elásticos e da carcaça).
- A energia potencial do modelo flexível armazenada na linha elástica.

Relacionando-se esses dados com a teoria de análise modal em sistemas mecânicos com amortecimento viscoso não proporcional [12,22,23] e fazendo-se o balanço energético em cada modo natural de vibração, identifica-se as matrizes  $[M]_{g^{l,ob}}$ ,  $[C]_{g^{l,ob}}$ ,  $[K]_{g^{l,ob}}$ .

## 8.2 Análise Modal em Sistemas Mecânicos Amortecidos

Considerando as equações de movimento de um sistema com amortecimento viscoso  $[C]$ , massa  $[M]$  e rigidez  $[K]$ , sendo  $[C]$ ,  $[K]$  e  $[M]$  matrizes simétricas, tem-se:

$$[M]\{\ddot{y}(t)\} + [C]\{\dot{y}(t)\} + [K]\{y(t)\} = \{q(t)\} \quad (8.2)$$

Fazendo-se  $\{q(t)\} = \{0\}$ , assume-se como solução para a equação (8.2)

$$\{y(t)\} = \{U\}e^{\lambda t} \quad (8.3)$$

e chega-se que

$$[\lambda^2[M] + \lambda[C] + [K]]\{U\} = [f(\lambda)]\{U\} = \{0\} \quad (8.4)$$

onde  $[f(\lambda)]$  é uma matriz quadrada que depende de  $\lambda$ .

A equação (8.4) tem solução diferente da trivial, somente se o determinante de  $[f(\lambda)]$  é zero.

$$|[f(\lambda)]| = 0 \quad (8.5)$$

Desta forma, chega-se a uma equação algébrica de ordem  $2n$  em  $\lambda$ . As raízes dessa equação característica podem ser reais, puramente imaginárias ou complexas. Se as raízes são reais e negativas, tem-se um sistema superamortecido. Se as raízes são complexas, elas aparecem em pares conjugados com parte real negativa e o autovetor  $\{U\}$ , associado a essas raízes, são complexos conjugados também. O par de vetores complexos conjugados multiplicados pela correspondente função exponencial dependente do tempo, equação (8.3), pode ser combinado para se obter o movimento oscilatório amortecido. Este é o caso particular do sistema subamortecido. Para sistemas não amortecidos, obtém-se raízes puramente imaginárias que aparecem em pares conjugados.

Assumindo-se que todas as raízes são distintas, a solução da equação homogênea (8.2) será

$$\{y(t)\} = \{U^{(r)}\}e^{\lambda_r t} \quad r = 1, 2, \dots, 2n \quad (8.6)$$

onde  $\{U^{(r)}\}$  é o vetor modal. A solução mais geral para a equação homogênea (8.2) pode ser escrita como uma superposição das  $2n$  equações multiplicadas por constantes arbitrárias  $C_r'$  ( $r = 1, 2, \dots, 2n$ ) que podem ser reais ou complexas. Assim, escrevendo-se na forma matricial, tem-se:

$$\{y(t)\} = [U]\{C'e^{\lambda t}\} \quad (8.7)$$

onde  $[U]$  é uma matriz retangular  $n \times 2n$ . Infelizmente, a matriz  $[U]$  não pode ser usada como uma matriz de transformação de coordenadas da forma

$$\{y(t)\} = [U]\{\eta(t)\} \quad (8.8)$$

para obter a solução do problema não homogêneo, como foi visto no capítulo 1. A razão é que existem  $2n$  modos  $\{u^{(r)}\}$  e  $2n$  coordenadas  $\eta_r(t)$  e apenas  $n$  coordenadas  $y_r(t)$ . Para solucionar este problema, introduz-se uma série de variáveis auxiliares e converte-se as  $n$  equações diferenciais de segunda ordem em uma nova série com  $2n$  equações diferenciais de primeira ordem. Esta nova série de variáveis é o vetor  $\{\dot{z}(t)\}$  composto com as velocidades das  $n$  coordenadas. Desta forma, pode-se reescrever (8.2) como

$$[M^*]\{\dot{Z}(t)\} + [K^*]\{Z(t)\} = \{Q(t)\} \quad (8.9)$$

onde

$$\{Z(t)\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{y}(t)\} \\ \{y(t)\} \end{Bmatrix} \quad (8.10)$$

é o vetor de dimensão  $2n$  composto com  $n$  coordenadas de deslocamento e  $n$  coordenadas de velocidade,

$$\{Q(t)\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{q(t)\} \end{Bmatrix} \quad (8.11)$$

é o vetor de dimensão  $2n$  composto com as forças de excitação, e,

$$[M^*] = \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

e

$$[K^*] = \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} \quad (8.13)$$

são matrizes reais, simétricas e de dimensão  $2n \times 2n$ , pois  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  são reais, simétricas e de ordem  $n \times n$ .

A solução para a equação (8.9), quando  $\{Q(t)\} = \{0\}$  pode ser da forma

$$\{Z(t)\} = \{U^*\}e^{\lambda t} \quad (8.14)$$

onde  $\lambda$  é um número complexo e  $\{U^*\}$  é um vetor composto por elementos complexos. Substituindo-se (8.14) em (8.9), chega-se a um problema de auto valor

$$\lambda[M^*]\{U^*\} + [K^*]\{U^*\} = \{0\} \quad (8.15)$$

A equação (8.15) pode ser escrita na forma

$$[D]\{U^*\} = \frac{1}{\lambda}\{U^*\} \quad (8.16)$$

onde

$$[D] = -[K^*]^{-1}[M^*] = \begin{bmatrix} [M]^{-1} & [0] \\ [0] & [K]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [J] \\ -[K]^{-1}[M] & -[K]^{-1}[0] \end{bmatrix} \quad (8.17)$$

é chamada de matriz dinâmica. A equação (8.16) pode ser reescrita como

$$[f(\lambda)]\{U^*\} = \{0\} \quad (8.18)$$

onde

$$[f(\lambda)] = [D] - \lambda^{-1}[J] \quad (8.19)$$

Fazendo o determinante da matriz  $[[f(\lambda)]] = 0$ , chega-se à equação algébrica característica de ordem  $2n$  em  $\lambda$  e a sua solução leva a  $2n$  autovalores  $\lambda_r$  ( $r = 1, 2, \dots, 2n$ ).

Os autovetores correspondentes  $\{U^{(r)}\}$  são determinados pela substituição do autovalor  $\lambda_r$  na equação (8.19) e tomando-se qualquer coluna não nula da matriz adjunta de  $[f(\lambda_r)]$ , pois todas as colunas representam o mesmo autovetor [12]. Assim fica-se com  $2n$  autovalores e  $2n$  autovetores  $\{U^{(r)}\}$  na forma

$$\{U^{(r)}\} = \begin{Bmatrix} \lambda_r \{U^{(r)}\} \\ \{U^{(r)}\} \end{Bmatrix} \quad r = 1, 2, \dots, 2n \quad (8.20)$$

de ordem  $2n \times 1$ .

Ressalta-se, no entanto, que para o caso de vibrações livres, os autovetores modais não são únicos quanto à amplitude e, para o caso de sistemas não amortecidos, a amplitude é arbitrária e o modo é determinado multiplicado por uma constante (ver capítulo 1). Para sistemas amortecidos, tanto a amplitude como a fase são arbitrárias. Assim, fixando-se um elemento de vetor em amplitude e fase, amarra-se todos os outros elementos do vetor a essa escolha, ou normalização.

Destaca-se, também, que o método de identificação a ser proposto no item 8.4 fará com que as matrizes globais de massa, rigidez e amortecimento sejam independentes de qualquer critério de normalização escolhido para os autovetores.

### 8.3 Ortogonalidade dos Modos de Vibração

O autovalor  $\lambda_r$  e seu correspondente autovetor  $\{U^{(r)}\}$  são tais que satisfazem a solução

$$\lambda_r [M^*]\{U^{(r)}\} + [K^*]\{U^{(r)}\} = 0 \quad (8.21)$$

onde  $[M^*]$  e  $[K^*]$  são simétricas. Considerando uma outra solução para o problema de autovalor  $\lambda_s$  e  $\{U^{(s)}\}$  tem-se:

$$\lambda_s [M^*]\{U^{(s)}\} + [K^*]\{U^{(s)}\} = 0 \quad (8.22)$$

Pré-multiplicando (8.21) por  $\{U^{(s)}\}^T$  e (8.22) por  $\{U^{(r)}\}^T$  fica-se com

$$\lambda_r \{U^*\}^{(r)T} [M^*] \{U^*\}^{(r)} + \{U^*\}^{(r)T} [K^*] \{U^*\}^{(r)} = 0 \quad (8.23)$$

$$\lambda_s \{U^*\}^{(s)T} [M^*] \{U^*\}^{(s)} + \{U^*\}^{(s)T} [K^*] \{U^*\}^{(s)} = 0 \quad (8.24)$$

Subtraindo (8.24) de (8.23) e lembrando-se que  $[M^*]$  e  $[K^*]$  são matrizes simétricas, chega-se que

$$(\lambda_r - \lambda_s) \{U^*\}^{(s)T} [M^*] \{U^*\}^{(r)} = 0 \quad (8.25)$$

Se os autovalores  $\lambda_r$  e  $\lambda_s$  são distintos, obtém-se a relação de ortogonalidade entre os modos naturais

$$\{U^*\}^{(s)T} [M^*] \{U^*\}^{(r)} = 0, \quad \lambda_r \neq \lambda_s \quad (8.26)$$

Consequentemente,

$$\{U^*\}^{(r)T} [K^*] \{U^*\}^{(s)} = 0, \quad \lambda_r \neq \lambda_s \quad (8.27)$$

Montando-se a matriz modal  $[U^*]$  ordem  $2n \times 2n$  com os  $2n$  autovetores

$$[U^*] = \begin{bmatrix} \{U^*\}^{(1)} & \{U^*\}^{(2)} & \{U^*\}^{(3)} & \dots & \{U^*\}^{(2n)} \end{bmatrix} \quad (8.28)$$

e a matriz  $[\lambda]$  composta com os autovalores na diagonal principal

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{2n} \end{bmatrix} \quad (8.29)$$

pode-se escrever, baseado na ortogonalidade dos modos, que

$$[U^*]^T [M^*] [U^*] = [M^*] \quad (8.30)$$

e

$$[U^*]^T [K^*] [U^*] = [K^*] = [\lambda] [M^*] \quad (8.31)$$

sendo  $[M^*]$  a matriz de normalização.

Desta forma, conhecendo-se a matriz de normalização  $[M^*]$  pode-se identificar as matrizes  $[M^*]$  e  $[K^*]$  através das equações.

$$[M^*] = ([U^*]^T)^{-1} [M^*] [U^*]^{-1} \quad (8.32)$$

$$[K^*] = ([U^*]^T)^{-1} [\lambda] [M^*] [U^*]^{-1} \quad (8.33)$$

e consequentemente  $[M]$ ,  $[G]$  e  $[K]$ , auxiliado pelas equações (8.12) e (8.13).

## 8.4 Balanço Energético

Através das equações (8.20) e (8.28) pode-se escrever que

$$\{U^*\} = \begin{bmatrix} |\lambda| \{U\} & [\bar{\lambda}] \{\bar{U}\} \\ \{U\} & \{\bar{U}\} \end{bmatrix} \quad (8.34)$$

onde  $\bar{\lambda}$  é o conjugado de  $\lambda$  e  $\{\bar{U}\}$  é o autovetor associado a  $\bar{\lambda}$ .

Substituindo-se (8.13) e (8.34) em (8.31), fica-se com

$$\begin{bmatrix} -|\lambda| \{U\}^T \{M\} |\lambda| \{U\} + \{U\}^T \{K\} \{U\} & \\ |0\rangle & -[\bar{\lambda}] \{\bar{U}\}^T \{M\} [\bar{\lambda}] \{\bar{U}\} + \{\bar{U}\}^T \{K\} \{\bar{U}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\lambda| & |0\rangle \\ |0\rangle & [\bar{\lambda}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^* \\ \end{bmatrix} \quad (8.35)$$

Mas,

- $|\lambda| \{U\}^T \{M\} |\lambda| \{U\}$  está relacionada com o dobro da energia cinética máxima em cada modo natural, e
- $\{U\}^T \{K\} \{U\}$  está relacionada com o dobro da energia potencial máxima em cada modo natural.

Para as duas primeiras frequências naturais e os dois primeiros modos de corpo rígido ajustou-se o modelo

$$\{M_R\} \{\ddot{y}(t)\} + \{C_R\} \{\dot{y}(t)\} + \{K_R\} \{y(t)\} = \{0\} \quad (8.36)$$

como foi visto no capítulo anterior, onde  $\{M_R\}$  está relacionada com a massa total do sistema mecânico,  $\{C_R\}$  com o amortecimento nos mancais ou,  $\{K_R\}$  com a rigidez nos mancais e  $\{y(t)\} = \{y_1(t) ; y_2(t)\}^T$  com as coordenadas dos pontos de apoio. (figura 8.1(a) ou 7.6)

Resolvendo-se o problema de autovalor para a equação (8.36) através de uma subrotina computacional, é possível a obtenção dos autovalores  $\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \lambda_2$  e  $\bar{\lambda}_2$  e os autovetores do sistema

$$\{U\}_{(1)}^{(R)} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_{(1)} \quad \text{e} \quad \{\bar{U}\}_{(1)}^{(R)} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix}_{(1)} \quad \text{e} \quad \{U\}_{(2)}^{(R)} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_{(2)} \quad \text{e} \quad \{\bar{U}\}_{(2)}^{(R)} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix}_{(2)} \quad (8.37)$$

onde  $(R)$  refere-se a corpo rígido.

Para os dois primeiros modos naturais (figura 8.1(a) e (b)), o corpo se comporta como se fosse rígido, o que torna possível descrever o comportamento de qualquer ponto interno da viga ( $y_3, y_4, \dots$ ) em função das coordenadas  $y_1$  e  $y_2$ .

Sabe-se que a matriz  $\{M_R\}$  do modelo rígido é obtida em função da massa total do sistema distribuída nos pontos 1 e 2. Portanto, a energia cinética máxima no primeiro modo será dada por

$$\frac{1}{2} \lambda_1^2 \{U\}_{(1)}^{(R)T} \{M_R\} \{U\}_{(1)}^{(R)} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} \bar{\lambda}_1^2 \{\bar{U}\}_{(1)}^{(R)} \{M_R\} \{\bar{U}\}_{(1)}^{(R)} \quad (8.38)$$

onde  $\{M_R\}$  é dado pela equação (7.29) e  $\{U\}_{(1)}^{(R)}$  pela equação (8.37).



Analogamente, para o segundo modo, a energia cinética máxima será dada por

$$\lambda_2 \{U\}_{(2)}^{(R)} [M_R] \{U\}_{(2)}^{(R)} = \bar{\lambda}_2 \{\bar{U}\}_{(2)}^{(R)T} [M_R] \{\bar{U}\}_{(2)}^{(R)} \quad (8.39)$$

Pode-se afirmar, também, que nos modos de corpo rígido a energia potencial do sistema está toda armazenada na deformação elástica dos mancais, pois a viga não se deforma, apenas translada ou gira em relação ao referencial inercial. Logo, a energia potencial elástica máxima no primeiro modo será dada por

$$\frac{1}{2} \{U\}_{(1)}^{(R)T} [K_R] \{U\}_{(1)}^{(R)} = \frac{1}{2} (K_1 u_1^{(1)2} + K_2 u_2^{(1)2}) \quad (8.40)$$

e no segundo modo por

$$\frac{1}{2} \{U\}_{(2)}^{(R)T} [K_R] \{U\}_{(2)}^{(R)} = \frac{1}{2} (K_1 u_1^{(2)2} + K_2 u_2^{(2)2}) \quad (8.41)$$

Relembrando,  $K_1$  e  $K_2$  são as constantes elásticas identificadas no capítulo 7, para os apoios 1 e 2 respectivamente.

Quanto ao modelo matemático que descreve o comportamento flexional dos sistemas mecânicos (capítulo 3), assumiu-se que o amortecimento estrutural era desprezível, permitindo com que se trabalhasse num sistema conservativo, apenas com matrizes de massa  $[M_f]$  e de rigidez  $[K_f]$ . Assim, para os modos flexionais, tem-se as raízes como pares de complexos conjugados puros, autovetores reais e a energia cinética máxima igual à energia potencial máxima. Esta energia potencial pode ser obtida pelo processo de reconstituição da linha elástica apresentada no capítulo 5.

Se não existir possibilidade de realização da análise modal experimental no sistema mecânico montado dentro da sua carcaça, ressalta-se que os modos de flexão poderão ser obtidos do processo experimental de análise modal com o sistema mecânico livre-livre ou fora da carcaça. Recordando o item 7.2 do capítulo 7, justifica-se o porquê deste procedimento e mostra-se que a influência da rigidez dos apoios nas formas dos modos normais da viga livre-livre é desprezível dependendo da rigidez desses apoios.

Destaca-se, também, que a energia potencial máxima armazenada na deformação dos apoios é desprezível quando comparada com a energia potencial armazenada na linha elástica nos modos de flexão.

Considera-se, neste momento, que a energia dissipada pelo amortecimento viscoso nos mancais é desprezível para os modos de flexão.

Desta forma, igualando a energia do modelo discreto com a energia do modelo contínuo para os modos de flexão e utilizando-se as informações energéticas do modelo rígido, obtém-se a matriz de normalização  $[M^*]$ . Isto viabiliza a construção de um modelo matemático condensado, responsável por reproduzir tanto o comportamento de corpo rígido quanto o comportamento flexível.

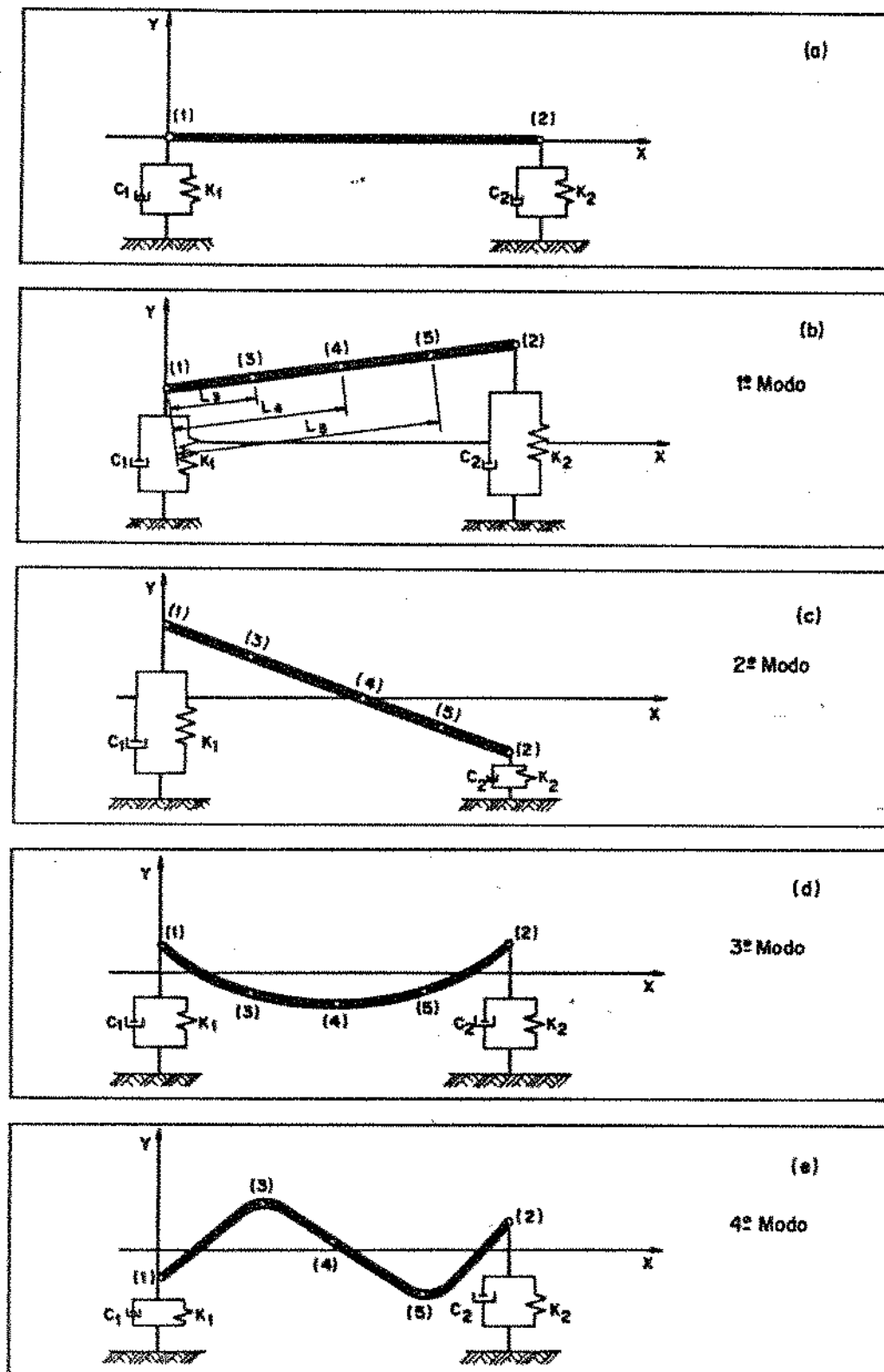


Figura 8.1: Viga Biapoiada sobre Elementos Elásticos - Modos Naturais

Assim,

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline \lambda_1^{(1)} \\ \hline \lambda_2^{(1)} \\ \hline \lambda_3^{(1)} \\ \hline \lambda_4^{(1)} \\ \hline \dots \\ \hline \lambda_n^{(1)} \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline \lambda_1^{(2)} \\ \hline \lambda_2^{(2)} \\ \hline \lambda_3^{(2)} \\ \hline \lambda_4^{(2)} \\ \hline \dots \\ \hline \lambda_n^{(2)} \\ \hline \end{array} \\
 \hline \\
 \begin{array}{|c|} \hline \lambda_1^{(1)} \\ \hline \lambda_2^{(1)} \\ \hline \lambda_3^{(1)} \\ \hline \lambda_4^{(1)} \\ \hline \dots \\ \hline \lambda_n^{(1)} \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline \lambda_1^{(2)} \\ \hline \lambda_2^{(2)} \\ \hline \lambda_3^{(2)} \\ \hline \lambda_4^{(2)} \\ \hline \dots \\ \hline \lambda_n^{(2)} \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left( -\lambda_1^{(1)} \bar{U}_{11}^{(1)} [M_{11}] \bar{U}_{11}^{(1)} + (\bar{U}_{11}^{(1)})^2 [K_{11}] \bar{U}_{11}^{(1)} \right) \\
 \left( -\lambda_2^{(1)} \bar{U}_{21}^{(1)} [M_{21}] \bar{U}_{21}^{(1)} + (\bar{U}_{21}^{(1)})^2 [K_{21}] \bar{U}_{21}^{(1)} \right) \\
 \left( 2 \int_0^L E I(x) \left[ \frac{d^2 \bar{U}_{31}^{(1)}}{dx^2} \right]^2 dx \right) \\
 \left( 2 \int_0^L E I(x) \left[ \frac{d^2 \bar{U}_{41}^{(1)}}{dx^2} \right]^2 dx \right) \\
 \dots \\
 \left( 2 \int_0^L E I(x) \left[ \frac{d^2 \bar{U}_{n1}^{(1)}}{dx^2} \right]^2 dx \right) \\
 \left( -\lambda_1^{(2)} \bar{U}_{11}^{(2)} [M_{11}] \bar{U}_{11}^{(2)} + (\bar{U}_{11}^{(2)})^2 [K_{11}] \bar{U}_{11}^{(2)} \right) \\
 \left( -\lambda_2^{(2)} \bar{U}_{21}^{(2)} [M_{21}] \bar{U}_{21}^{(2)} + (\bar{U}_{21}^{(2)})^2 [K_{21}] \bar{U}_{21}^{(2)} \right) \\
 \left( 2 \int_0^L E I(x) \left[ \frac{d^2 \bar{U}_{31}^{(2)}}{dx^2} \right]^2 dx \right) \\
 \left( 2 \int_0^L E I(x) \left[ \frac{d^2 \bar{U}_{41}^{(2)}}{dx^2} \right]^2 dx \right) \\
 \dots \\
 \left( 2 \int_0^L E I(x) \left[ \frac{d^2 \bar{U}_{n1}^{(2)}}{dx^2} \right]^2 dx \right)
 \end{array}
 \quad (8.42)$$

Para a construção da matriz modal global recorda-se, mais uma vez, que nos modos de corpo rígido, os pontos internos do sistema ( ver figura 8.1.(a) ) podem ser descritos em função das coordenadas modais dos apoios  $u_1$  e  $u_2$ , ou seja,

$$\begin{aligned}
 u_3^{(i)} &= (1 - L_3/L) u_1^{(i)} + (L_3/L) u_2^{(i)} \\
 u_4^{(i)} &= (1 - L_4/L) u_1^{(i)} + (L_4/L) u_2^{(i)} \\
 &\dots \\
 u_n^{(i)} &= (1 - L_n/L) u_1^{(i)} + (L_n/L) u_2^{(i)}
 \end{aligned}
 \quad (8.43)$$

onde para os modos de corpo rígido  $(i)$  é igual a 1 e 2.

Assim, para os modos de corpo rígido, tem-se

$$\begin{aligned}
 \{U^{(1)}\}^T &= \{ \lambda_1^{(1)} \bar{u}_1^{(1)}, \lambda_1^{(1)} \bar{u}_2^{(1)}, \lambda_1^{(1)} \bar{u}_3^{(1)}, \dots, \lambda_1^{(1)} \bar{u}_n^{(1)}, \bar{u}_1^{(1)}, \bar{u}_2^{(1)}, \bar{u}_3^{(1)}, \dots, \bar{u}_n^{(1)} \} \\
 \{U^{(2)}\}^T &= \{ \lambda_2^{(2)} \bar{u}_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)} \bar{u}_2^{(2)}, \lambda_2^{(2)} \bar{u}_3^{(2)}, \dots, \lambda_2^{(2)} \bar{u}_n^{(2)}, \bar{u}_1^{(2)}, \bar{u}_2^{(2)}, \bar{u}_3^{(2)}, \dots, \bar{u}_n^{(2)} \} \\
 \{U^{(3)}\}^T &= \{ \lambda_3^{(3)} \bar{u}_1^{(3)}, \lambda_3^{(3)} \bar{u}_2^{(3)}, \lambda_3^{(3)} \bar{u}_3^{(3)}, \dots, \lambda_3^{(3)} \bar{u}_n^{(3)}, \bar{u}_1^{(3)}, \bar{u}_2^{(3)}, \bar{u}_3^{(3)}, \dots, \bar{u}_n^{(3)} \} \\
 \{U^{(4)}\}^T &= \{ \lambda_4^{(4)} \bar{u}_1^{(4)}, \lambda_4^{(4)} \bar{u}_2^{(4)}, \lambda_4^{(4)} \bar{u}_3^{(4)}, \dots, \lambda_4^{(4)} \bar{u}_n^{(4)}, \bar{u}_1^{(4)}, \bar{u}_2^{(4)}, \bar{u}_3^{(4)}, \dots, \bar{u}_n^{(4)} \}
 \end{aligned}
 \quad (8.44)$$

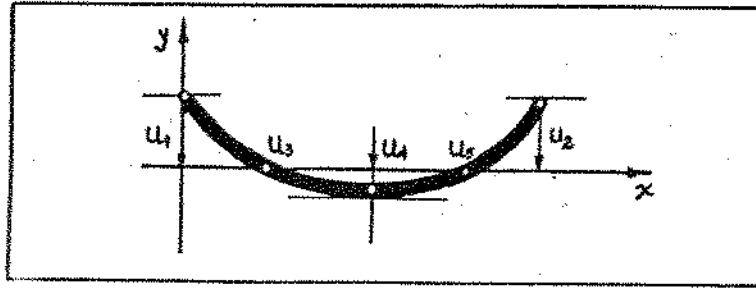


Figura 8.2: Modo de flexão - Sistema Livre-Livre

Para os modos de flexão, as coordenadas modais são obtidas do processo experimental de análise modal com o sistema livre-livre ou seja,

$$\{U^{(i)}\}^T = \{\lambda_i^{(i)} \bar{u}_1, \lambda_i^{(i)} \bar{u}_2, \lambda_i^{(i)} \bar{u}_3, \dots, \lambda_i^{(i)} \bar{u}_n, u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\} \quad (8.45)$$

$$\{\bar{U}^{(i)}\}^T = \{\bar{\lambda}_i^{(i)} \bar{u}_1, \bar{\lambda}_i^{(i)} \bar{u}_2, \bar{\lambda}_i^{(i)} \bar{u}_3, \dots, \bar{\lambda}_i^{(i)} \bar{u}_n, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \dots, \bar{u}_n\} \quad (8.46)$$

sendo  $\lambda_i$  e  $\bar{\lambda}_i$  números imaginários puros e conjugados e os elementos  $u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \dots, u_n^{(i)}$  ( $i = 3, 4, \dots, n$ ) todos números reais.

Desta forma, monta-se a matriz modal

$$[U^*] = \begin{bmatrix} \lambda_1^{(1)} \bar{u}_1 & \lambda_2^{(2)} \bar{u}_1 & \dots & \lambda_n^{(n)} \bar{u}_1 & \bar{\lambda}_1^{(1)} \bar{u}_1 & \bar{\lambda}_2^{(2)} \bar{u}_1 & \dots & \bar{\lambda}_n^{(n)} \bar{u}_1 \\ \lambda_1^{(1)} \bar{u}_2 & \lambda_2^{(2)} \bar{u}_2 & \dots & \lambda_n^{(n)} \bar{u}_2 & \bar{\lambda}_1^{(1)} \bar{u}_2 & \bar{\lambda}_2^{(2)} \bar{u}_2 & \dots & \bar{\lambda}_n^{(n)} \bar{u}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{(1)} \bar{u}_n & \lambda_2^{(2)} \bar{u}_n & \dots & \lambda_n^{(n)} \bar{u}_n & \bar{\lambda}_1^{(1)} \bar{u}_n & \bar{\lambda}_2^{(2)} \bar{u}_n & \dots & \bar{\lambda}_n^{(n)} \bar{u}_n \\ u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & \dots & u_1^{(n)} & \bar{u}_1^{(1)} & \bar{u}_1^{(2)} & \dots & \bar{u}_1^{(n)} \\ u_2^{(1)} & u_2^{(2)} & \dots & u_2^{(n)} & \bar{u}_2^{(1)} & \bar{u}_2^{(2)} & \dots & \bar{u}_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n^{(1)} & u_n^{(2)} & \dots & u_n^{(n)} & \bar{u}_n^{(1)} & \bar{u}_n^{(2)} & \dots & \bar{u}_n^{(n)} \end{bmatrix} \quad (8.47)$$

Assim, com  $[M^*]$  obtido da equação (8.42) e  $[U^*]$  da equação (8.47) chega-se que

$$[M^*] = ([U^*]^T)^{-1} [M] [U^*]^{-1} \quad (8.48)$$

$$[K^*] = ([U^*]^T)^{-1} [K] [U^*]^{-1} \quad (8.49)$$

$$[M^*] = \begin{bmatrix} [0] & [M]_{glob} \\ [M]_{glob} & [C]_{glob} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [K^*] = \begin{bmatrix} -[M]_{glob} & [0] \\ [0] & [K]_{glob} \end{bmatrix} \quad (8.50)$$

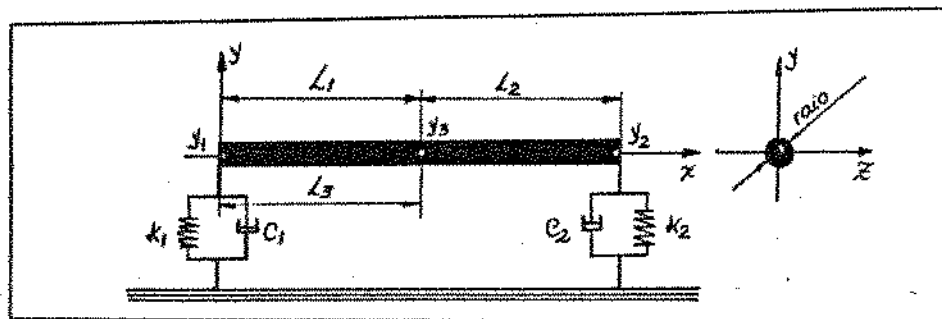


Figura 8.3: Discretização e escolha das coordenadas

Assim, com

$$[M]_{glob}\{\ddot{y}(t)\} + [C]_{glob}\{\dot{y}(t)\} + [K]_{glob}\{y(t)\} = \{0\} \quad (8.51)$$

chega-se ao modelo matemático que descreve tanto o comportamento de corpo rígido quanto o comportamento flexível do sistema mecânico.

## 8.5 Exemplo de Aplicação

Objetivo:

- Construir um modelo matemático discreto com 3 graus de liberdade e que represente o comportamento dinâmico de viga com secção circular até a faixa da terceira frequência natural (duas de corpo rígido e uma de flexão).

### 8.5.1 Dados:

- $m_T = 100 \text{ Kg}$
- $L = 1 \text{ m}$
- $L_1 = L_2 = 0,5 \text{ m}$  (coordenadas do centro de gravidade)
- $\text{raio} = 0,1 \text{ m}$
- $J = \frac{m}{12}(3 \cdot \text{raio}^2 + L^2) = 8,583 \text{ Kg m}^2$
- $C_1 = C_2 = 100 \text{ Ns/m}$
- $K_1 = 80000 \text{ N/m}$
- $K_2 = 60000 \text{ N/m}$
- $m = 100 \text{ Kg/m}$
- $E = 2,0372 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
- $I = \frac{\pi d^4}{64} = 7,8540 \times 10^{-5} \text{ m}^4$

- $EI = 1,6 \times 10^6 \text{ N/m}^2$

- $\rho_1 = \frac{K_1 L^3}{EI} = 0,500$

- $\rho_2 = \frac{K_2 L^3}{EI} = 0,375$

### 8.5.2 Montagem das Matrizes $\{M^*\}$ e $\{U^*\}$

\* Modelo Rígido (equação (7.39))

$$\begin{bmatrix} 33,583 & 16,417 \\ 16,417 & 33,583 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 80000 & 0 \\ 0 & 60000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

\* Autovalores do Modelo Rígido (Programa QR [24])

$$\lambda_1 = -1,02965 + 36,82696i$$

$$\bar{\lambda}_1 = -1,02965 - 36,82696i$$

$$\lambda_2 = -2,88308 + 64,12492i$$

$$\bar{\lambda}_2 = -2,88308 - 64,12492i$$

(8.52)

\* Autovetores do Modelo Rígido (Programa QR)

$$\{U\}_{(1)}^{(R)T} = \{0,64748 + 0,01481i; 1\}$$

$$\{\bar{U}\}_{(1)}^{(R)T} = \{0,64748 - 0,01481i; 1\}$$

$$\{U\}_{(2)}^{(R)T} = \{1; -0,86346 - 0,01133i\}$$

$$\{\bar{U}\}_{(2)}^{(R)T} = \{1; -0,86346 + 0,01133i\}$$

(8.53)

\* Termos relacionados com a Energia Cinética Máxima nos Modos de Corpo Rígido

$$\lambda_1^2 \{U\}_{(1)}^{(R)T} [M_R] \{U\}_{(1)}^{(R)} = -92.291,6114 - 6.742,4675i$$

$$\bar{\lambda}_1^2 \{\bar{U}\}_{(1)}^{(R)T} [M_R] \{\bar{U}\}_{(1)}^{(R)} = -92.291,6114 + 6.742,4675i$$

$$\lambda_2^2 \{U\}_{(2)}^{(R)T} [M_R] \{U\}_{(2)}^{(R)} = -123.622,4580 - 17.629,5140$$

$$\bar{\lambda}_2^2 \{\bar{U}\}_{(2)}^{(R)T} [M_R] \{\bar{U}\}_{(2)}^{(R)} = -123.622,4580 + 17.629,5140$$

(8.54)

\* Termos relacionados com a Energia Potencial Máxima nos Modos de Corpo Rígido

$$\begin{aligned}
\{U\}_{(1)}^{(R)T} [K_R] \{U\}_{(1)}^{(R)} &= 93.520, 8788 + 1.535, 2708i \\
\{U\}_{(1)}^{(R)T} [K_R] \{U\}_{(1)}^{(R)} &= 93.520, 8788 - 1.535, 2708i \\
\{U\}_{(2)}^{(R)T} [K_R] \{U\}_{(2)}^{(R)} &= 124.725, 9275 + 1.014, 0104i \\
\{U\}_{(2)}^{(R)T} [K_R] \{U\}_{(2)}^{(R)} &= 124.725, 9274 - 1.014, 0104i
\end{aligned}
\tag{8.55}$$

\* Modelo Flexível (Viga Livre-Livre)

(Informações obtidas com o sistema mecânico fora da carcaça)

\* Equação da linha elástica: ( $\beta_3 = 4,730$  e  $\alpha_3 = 1/115,29096$ )

$$\begin{aligned}
Y(x)_r &= \alpha_r [(\cos \beta_r L - \cosh \beta_r L)(\sin \beta_r x + \sinh \beta_r x) - \\
&\quad (\sin \beta_r L - \sinh \beta_r L)(\cos \beta_r x + \cosh \beta_r x)] \\
Y(0) &= y_1 = 115,29096\alpha_3 = 1,00000 \\
Y(1) &= y_2 = 115,29096\alpha_3 = 1,00000 \\
Y(0,5) &= y_3 = -70,076407\alpha_3 = -0,60782
\end{aligned}
\tag{8.56}$$

\* Autovalor para o primeiro modo de flexão ou terceiro do modo do modelo global

$$\omega_3 = \beta_3^2 \left[ \frac{EI}{mL^4} \right]^{1/2} = 4,730^2 \left[ \frac{1,6 \times 10^6}{100 \times 1^4} \right]^{1/2} = 895,1624$$

$$\lambda_3 = i\omega_3 = i895,1624 \quad \text{e} \quad \bar{\lambda}_3 = -i\omega_3 = -i895,1624$$

\* Termo relacionado com a energia potencial máxima armazenada na linha elástica no primeiro modo de flexão

$$\int_0^1 EI \left( \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right)^2 dx = \alpha_3^2 2,6627732 \times 10^{11} = 20.032.892,76$$

\* Montagem da Matriz  $[M^*]$  (equação (8.42))

$$[M^*] = \begin{bmatrix} 83,639 - 5.047i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 116,3 - 3.878i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -44.758i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 83,63 + 5.047i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 116,3 + 3.878i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 44.758i \end{bmatrix}$$

\* Montagem da Matriz Modal  $[U^*]$

$$\{U^{(1)}\}^T = \{u_1^{(1)} ; u_2^{(1)} ; u_3^{(1)}\}_{(R)} \quad (8.57)$$

onde

$$u_3^{(1)} = (1 - L_3/L) u_1^{(1)} + (L_3/L) u_2^{(1)}$$

$$\{U^{(1)}\}^T = \{0,64748 + 0,01481i ; 1 ; 0,82374 + 0,00741i\} \quad (8.58)$$

$$\{U^{(2)}\}^T = \{u_1^{(2)} ; u_2^{(2)} ; u_3^{(2)}\}_{(R)}$$

onde

$$u_3^{(2)} = (1 - L_3/L) u_1^{(2)} + L_3/L u_2^{(2)}$$

$$\{U^{(2)}\}^T = \{1 ; -0,86346 - 0,01133i ; -0,06827 - 0,00567i\}$$

$$\{U^{(3)}\}^T = \{Y(0) ; Y(1) ; Y(0,5)\} = \{y_1 ; y_2 ; y_3\} = \{1 ; 1 ; -0,60782\} \quad (8.59)$$

$$\{U^{(1)}\}^T = \{\bar{u}_1^{(1)} ; \bar{u}_2^{(1)} ; \bar{u}_3^{(1)}\}_{(R)} \quad \text{onde} \quad \bar{u}_3^{(1)} = (1 - L_3/L)\bar{u}_1^{(1)} + (L_3/L)\bar{u}_2^{(1)}$$

$$\{U^{(1)}\} = \{0,64748 - 0,01481i ; 1 ; 0,82374 - 0,00741i\} \quad (8.60)$$

$$\{U^{(2)}\}^T = \{\bar{u}_1^{(2)} ; \bar{u}_2^{(2)} ; \bar{u}_3^{(2)}\}_{(R)} \quad \text{onde} \quad \bar{u}_3^{(2)} = (1 - L_3/L)\bar{u}_1^{(2)} + (L_3/L)\bar{u}_2^{(2)}$$

$$\{U^{(2)}\}^T = \{1 ; -0,86346 + 0,01133i ; 0,06827 + 0,00567i\} \quad (8.61)$$

$$\{U^{(3)}\} = \{\bar{u}_1^{(3)} ; \bar{u}_2^{(3)} ; \bar{u}_3^{(3)}\} = \{Y(0) ; Y(1) ; Y(0,5)\} = \{1 ; 1 ; -0,60782\} \quad (8.62)$$

$$\lambda_1 = -1,02965 + 36,82696i$$

$$\lambda_2 = -2,883084 + 64,12492i$$

$$\lambda_3 = 895,1624i$$

$$\bar{\lambda}_1 = -1,02965 - 36,82696i$$

$$\bar{\lambda}_2 = -2,883084 - 64,12492i$$

$$\bar{\lambda}_3 = -895,1624i$$



Constrói-se, desta forma, a matriz modal do sistema global

$$[U^*] = \begin{bmatrix} \lambda_1\{U^{(1)}\} & \lambda_2\{U^{(2)}\} & \lambda_3\{U^{(3)}\} & \bar{\lambda}_1\{O^{(1)}\} & \bar{\lambda}_2\{O^{(2)}\} & \bar{\lambda}_3\{O^{(3)}\} \\ \{U^{(1)}\} & \{U^{(2)}\} & \{U^{(3)}\} & \{O^{(1)}\} & \{O^{(2)}\} & \{O^{(3)}\} \end{bmatrix}$$

$$[U^*] = \begin{bmatrix} -1.21244 + 23.82947i & -2.883084 + 64.12492i & 895.1624i \\ -1.02965 + 36.82696i & 3.1819783 - 55.33657i & 895.1624i \\ -1.12104 + 30.34347i & 0.166557 + 4.39417i & -544.0976i \\ 0.64748 + 0.01482i & 1. & 1. \\ 1. & -0.86346 - 0.01133i & 1. \\ 0.82374 + 0.00741i & 0.06827 - 0.00567i & -0.60782 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1.21244 - 23.82947i & 2.883084 - 64.12492i & -895.1624i \\ -1.02965 - 36.82696i & 3.1819783 + 55.33657i & -895.1624i \\ -1.12104 - 30.34347i & 0.166557 - 4.39417i & 544.0976i \\ 0.64748 - 0.01482i & 1. & 1. \\ 1. & -0.86346 + 0.01133i & 1. \\ 0.82374 - 0.0741i & 0.06827 + 0.00567i & -0.60782 \end{bmatrix}$$

### 8.5.3 Identificação de $[M^*]$ e $[K^*]$

Calculando-se  $([U^*]^T)^{-1}$  e  $[U^*]^{-1}$  através da rotina computacional do programa IDENT, obtém-se

$$[M^*] = ([U^*]^T)^{-1}[M^*][U^*]^{-1} = \begin{bmatrix} [0] & [M]_{glob} \\ [M]_{glob} & [C]_{glob} \end{bmatrix}$$

e

$$[K^*] = ([U^*]^T)^{-1}[M^*][\lambda][U^*]^{-1} = \begin{bmatrix} -[M]_{glob} & [0] \\ [0] & [K]_{glob} \end{bmatrix}$$

Desta forma, constrói-se o modelo global

$$[M]_{glob}\{\ddot{y}(t)\} + [C]_{glob}\{\dot{y}(t)\} + [K]_{glob}\{y(t)\} = \{0\}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 14,56 & -2,61 & 6,87 \\ -2,61 & 14,54 & 6,84 \\ 6,87 & 6,84 & 48,13 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \\ \ddot{y}_3(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 44,00 & -31,48 & 20,35 \\ -31,48 & 47,09 & 25,89 \\ 20,35 & 25,89 & 86,01 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \dot{y}_3(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.981.127 & 1.907.326 & -3.852.089 \\ 1.907.326 & 1.973.537 & -3.864.574 \\ -3.852.089 & -3.864.574 & 7.803.293 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

### 8.5.4 Resultados

Calculando-se os autovalores e os autovetores para o modelo global, através do programa computacional QR [24]

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -1,0268 + 36,8343i \\
\lambda_2 &= -2,2063 + 64,1633i \\
\lambda_3 &= -0,0000 + 895,2523i \\
\bar{\lambda}_1 &= -1,0268 - 36,8343i \\
\bar{\lambda}_2 &= -2,2063 - 64,1633i \\
\bar{\lambda}_3 &= -0,0000 - 895,2523i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{U^{(1)}\}^T &= \{0,64716 + 0,01426i ; 1 ; 0,82358 + 0,00713i\} \\
\{U^{(2)}\}^T &= \{1 ; -0,86326 - 0,01097i ; 0,06832 - 0,00549i\} \\
\{U^{(3)}\}^T &= \{1 ; 0,99990 + 0,00002i ; -0,60783 - 0,00000i\} \\
\{U^{(1)}\}^T &= \{0,64716 - 0,01426i ; 1 ; 0,82358 - 0,00713i\} \\
\{U^{(2)}\}^T &= \{1 ; -0,86326 + 0,01097i ; 0,06832 + 0,00549i\} \\
\{U^{(3)}\}^T &= \{1 ; 0,99990 - 0,00002i ; -0,60783 + 0,00000i\}
\end{aligned}$$

pode-se comparar esses valores com os valores mostrados nas equações de (8.58) a (8.62)

Assim, com o modelo matemático discreto de três graus de liberdade ajusta-se as três primeiras frequências naturais e os três primeiros modos (2 de corpo rígido e 1 de flexão) para a viga em questão.

Observa-se uma outra característica interessante relacionada com a matriz de massa  $[M]_{glob}$ . Identificada através do balanço energético, ela continua guardando a característica mencionada no capítulo 7,

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (M_{glob})_{ij} = m_T \quad (\text{massa total})$$

## 8.6 Conclusões

Constata-se, desta forma, a viabilidade de se construir modelos matemáticos discretos e reduzidos, a partir de medições experimentais para a representação do comportamento dinâmico de sistemas mecânicos que operam tanto em baixas velocidades (modos de corpo rígido) como em altas velocidades (modos normais de flexão).

Observa-se, também, que o número de graus de liberdade dos modelos continuam reduzidos e, como foi visto no exemplo deste capítulo, para a representação do comportamento dinâmico de um sistema que atravessa  $n$  ressonâncias na sua faixa de operação, obtém-se um modelo matemático com  $n$  graus de liberdade.

## Capítulo 9

# EIXOS FLEXÍVEIS SUPPORTADOS POR MANCAIS MAGNÉTICOS

### 9.1 Introdução

Neste capítulo contrõe-se um modelo matemático com **3** graus de liberdade para o eixo de uma centrífuga suportada por mancais magnéticos.

Com o objetivo de testar e comprovar a validade do modelo reduzido, substitui-se os parâmetros que deveriam ser obtidos experimentalmente por parâmetros calculados no programa computacional ANSYS, e constrõe-se os respectivos modelos para a representação tanto do comportamento de corpo rígido quanto o comportamento flexível dessas máquinas. Compara-se a resposta excitada desses modelos reduzidos com a resposta excitada dessas mesmas máquinas modeladas pelo Método dos Elementos Finitos com **42** graus de liberdade.

No decorrer do capítulo, com os gráficos e tabelas apresentados, observa-se o bom ajuste da resposta em frequência tanto para o caso onde o amortecimento dos mancais é negligenciado quanto para o caso onde o amortecimento dos mancais é levado em consideração.

### 9.2 Mancais com Amortecimento Desprezível

Utilizando-se a mesma sequência de passos descrita no item 8.5 do capítulo 8 e tomando-se os parâmetros modais calculados pelo programa ANSYS, chega-se ao seguinte modelo reduzido para o eixo flexível suportado por mancais elásticos

$$\begin{bmatrix} 15,38027 & -1,81441 & 5,62021 \\ -1,81441 & 15,35269 & 5,59522 \\ 5,62021 & 5,59523 & 49,79379 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{y}_1(t) \\ \bar{y}_2(t) \\ \bar{y}_3(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2,111.066 & 2,030.141 & -4,054.910 \\ 2,030.141 & 2,081.168 & -4,053.091 \\ -4,054.910 & -4,053.091 & 8,094.692 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9.1)$$

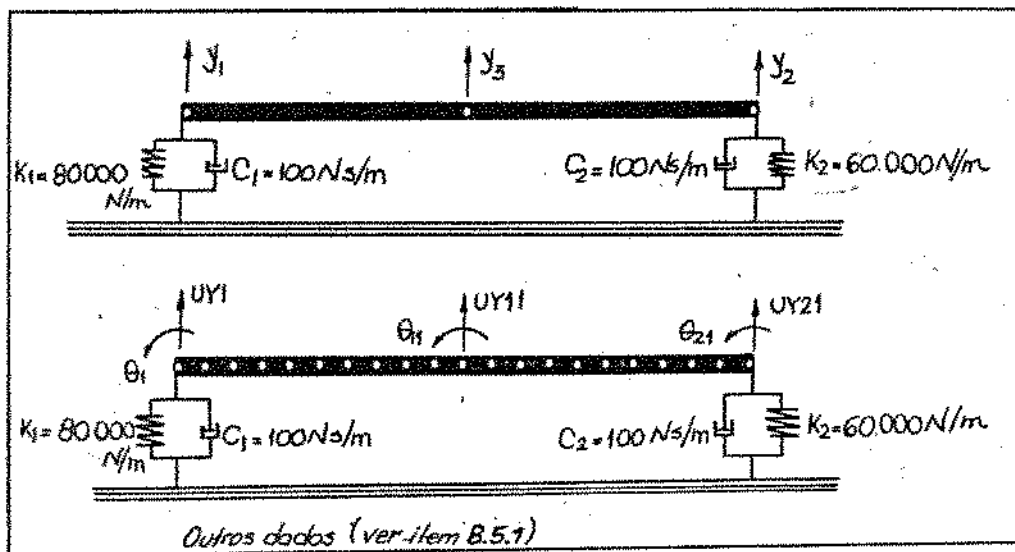


Figura 9.1: Coordenadas utilizadas para a construção do (a) Modelo Reduzido com 3 g.l. e (b) Modelo por Elementos Finitos com 42 g.l.

Nas figuras 9.2 e 9.3 compara-se o comportamento dinâmico do modelo reduzido com o comportamento dinâmico do modelo construído pelo ANSYS, quando ambos são excitados por uma força senoidal.

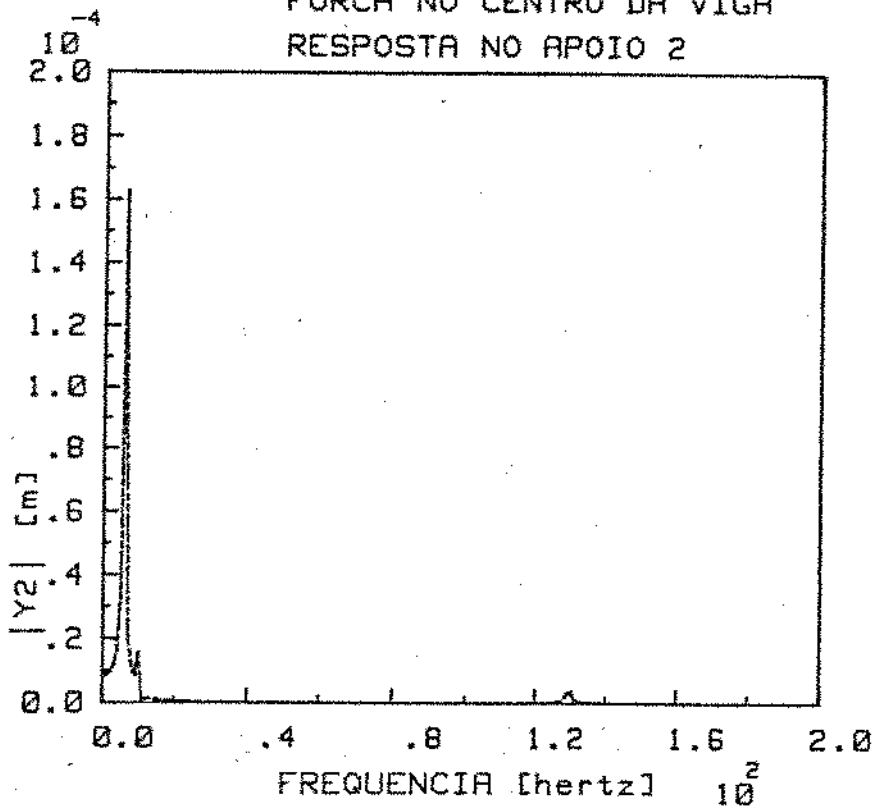
Na tabela 9.1, observa-se a amplitude da resposta em frequência para algumas frequências próximas das ressonâncias.

### 9.3 Mancais com Amortecimento Não Desprezível

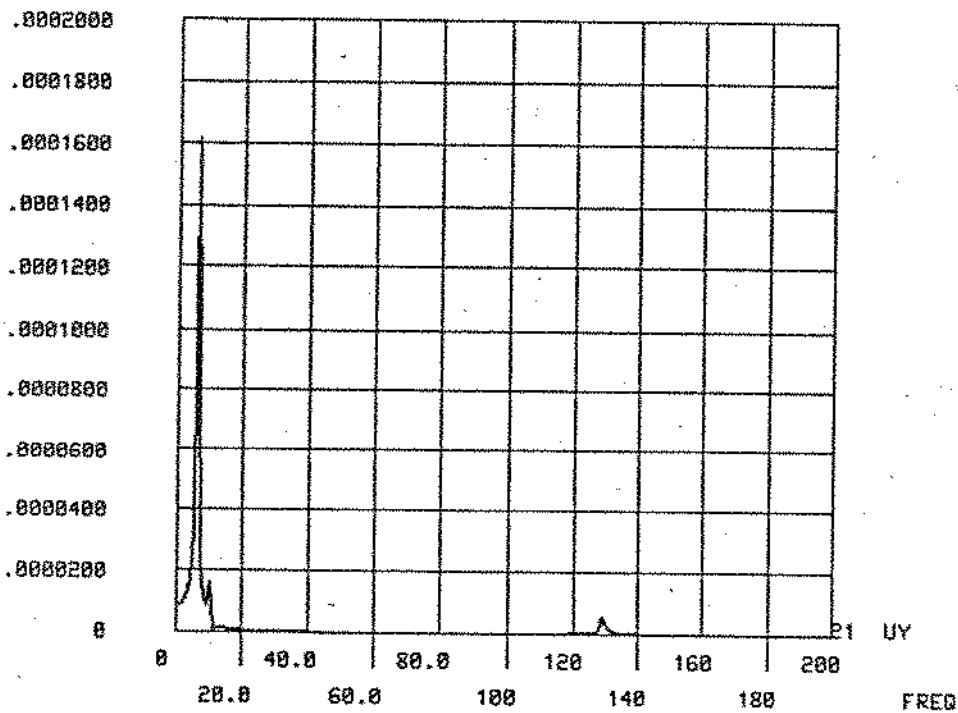
Utilizando-se a mesma sequência de passos descrita no item 8.5 do capítulo 8 e tomando-se os parâmetros modais calculados pelo Ansys, chega-se ao seguinte modelo reduzido para o eixo flexível suportado por mancais magnéticos

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 15,33980 & -1,83660 & 5,662262 \\ -1,83660 & 15,320119 & 5,591190 \\ 5,62502 & 5,592251 & 50,02575 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \\ \ddot{y}_3(t) \end{Bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} 44,22995 & -31,25010 & 20,49586 \\ -31,25010 & 47,32560 & 26,03403 \\ 20,49586 & 26,03403 & 74,51392 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \dot{y}_3(t) \end{Bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} 2,083,288 & 2,009,427 & -4,055,927 \\ 2,009,427 & 2,075,577 & -4,068,289 \\ -4,055,927 & -4,068,289 & 8,209,999 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9.2)
 \end{aligned}$$

RESPOSTA EM FREQUENCIA  
 FORCA NO CENTRO DA VIGA  
 RESPOSTA NO APOIO 2

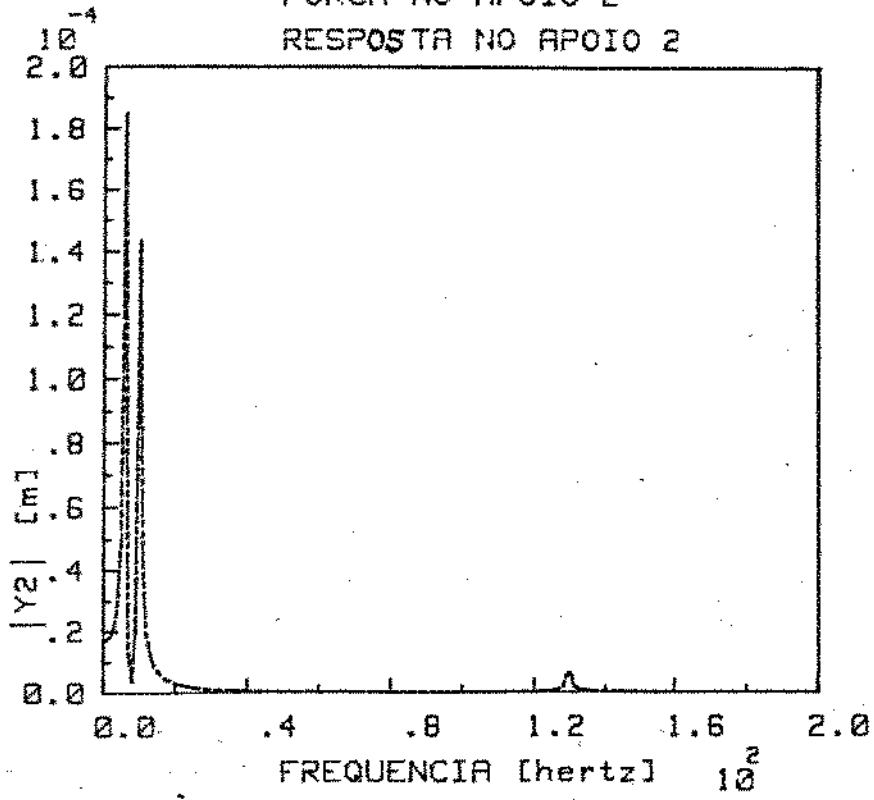


UY21

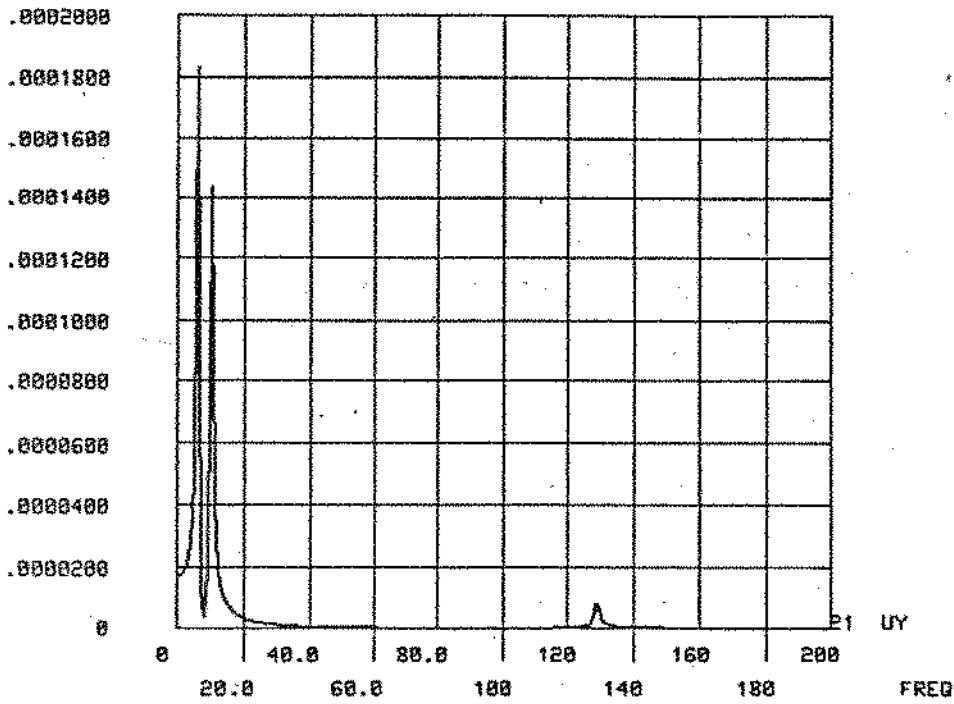


ANALISE HARMONICA FORCA NO MEIO DA VIGA

RESPOSTA EM FREQUENCIA  
 FORÇA NO APOIO 2  
 RESPOSTA NO APOIO 2



UY21

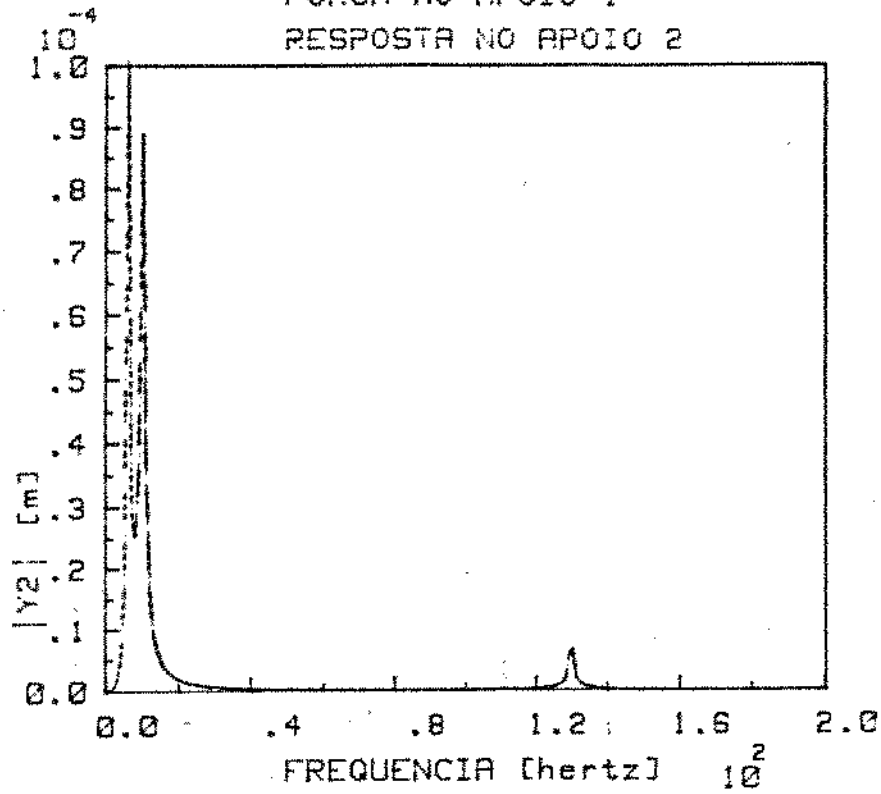


ANALISE HARMONICA FORÇA NO FIM DA VIGA

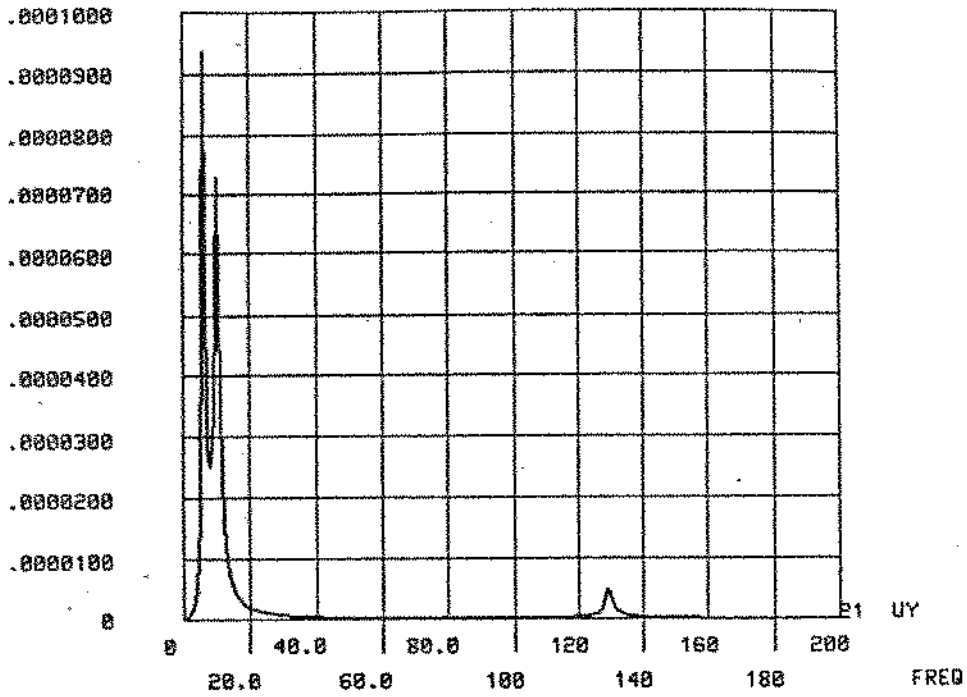
força unitária aplicada no apoio (1)				
freq. [Hz]	g.l.	apoio (1) [m]	apoio (2) [m]	centro (3) [m]
6	42	0,6871E-4	0,1354E-3	0,1033E-3
	3	0,6932E-4	0,1363E-3	0,1041E-3
10	42	0,1955E-4	0,1750E-3	0,1062E-3
	3	0,1957E-4	0,1753E-3	0,1062E-3
130	42	0,5953E-5	0,5880E-5	0,3644E-5
	3	0,6755E-5	0,6659E-5	0,4161E-5
força unitária aplicada no apoio (2)				
freq. [Hz]	g.l.	apoio (1) [m]	apoio (2) [m]	centro (3) [m]
6	42	0,1354E-3	0,1834E-3	0,1614E-3
	3	0,1364E-3	0,1849E-3	0,1626E-3
10	42	0,1750E-3	0,1433E-3	0,1642E-4
	3	0,1753E-3	0,1434E-3	0,1647E-4
130	42	0,5880E-5	0,5938E-5	0,3639E-5
	3	0,6659E-5	0,6738E-5	0,4156E-5
força unitária aplicada no centro (3)				
freq. [Hz]	g.l.	apoio (1) [m]	apoio (2) [m]	centro (3) [m]
6	42	0,1033E-3	0,1614E-3	0,1339E-3
	3	0,1041E-3	0,1626E-3	0,1349E-3
10	42	0,1062E-4	0,1642E-4	0,2857E-5
	3	0,1062E-4	0,1647E-4	0,2890E-5
130	42	0,3644E-5	0,3639E-5	0,2276E-5
	3	0,4163E-5	0,4157E-5	0,2620E-5

Tabela 9.1: Amplitude da resposta de deslocamento para o eixo flexível excitado em 3 pontos. Modelo Reduzido com 3 g.l. e Modelo ANSYS com 42 g.l.

RESPOSTA EM FREQUENCIA  
 FORÇA NO APOIO 1  
 RESPOSTA NO APOIO 2



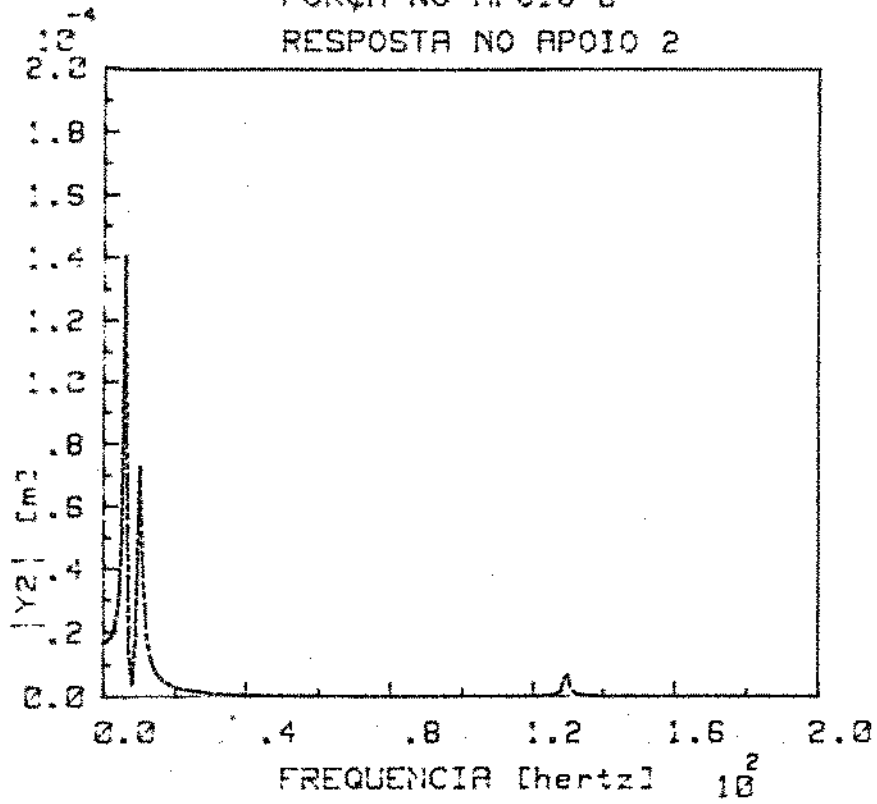
UY21



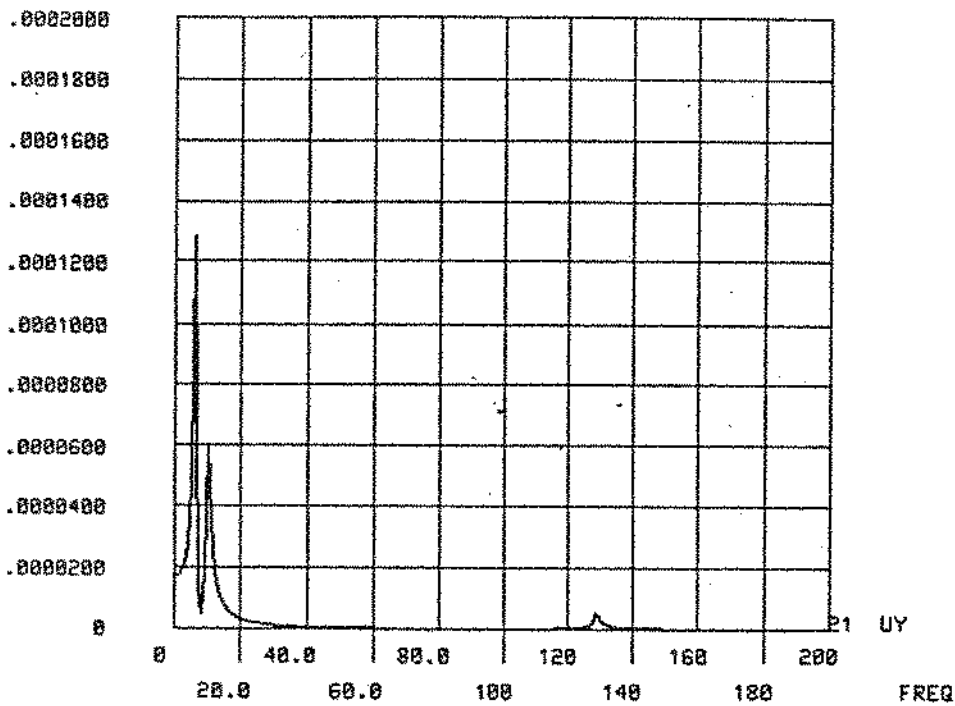
ANALISE HARMONICA COM AMORTEC. FORÇA NO INICIO DA UIGA



RESPOSTA EM FREQUENCIA  
 FORÇA NO APOIO 2  
 RESPOSTA NO APOIO 2



UY21



ANALISE HARMONICA COM AMORTEC. FORÇA NO FIM DA VIGA

Nas figuras 9.4 e 9.5 compara-se o comportamento dinâmico do modelo reduzido com o comportamento do modelo construído pelo ANSYS, quando ambos são excitados por uma força senoidal.

Na tabela 9.2 observa-se a amplitude da resposta dos dois modelos, em frequências próximas da ressonância e próximas das condições estáticas.

## 9.4 Conclusões

Neste capítulo, verifica-se a precisão dos modelos matemáticos reduzidos e da técnica de identificação proposta no capítulo 8. Com um modelo matemático de 3 g.l., aproxima-se a resposta do modelo construído por elementos finitos com 42 g.l. de uma forma satisfatória. Ressalta-se que com o estudo realizado desta forma, testa-se a técnica de modelamento rígido/flexível propriamente dita e evita-se a inclusão de erros experimentais no processo de construção das matrizes de massa, rigidez e amortecimento.

AMPLITUDE DE DESLOCAMENTO				
força unitária aplicada no apoio (1)				
freq. [Hz]	g.l.	apoio (1) [m]	apoio (2) [m]	centro (3) [m]
1	42	0,127E-4	0,140E-6	0,643E-5
	3	0,128E-4	0,227E-6	0,643E-5
6	42	0,500E-3	0,941E-4	0,721E-4
	3	0,552E-3	1,008E-4	0,773E-4
10	42	0,818E-4	0,730E-4	0,567E-5
	3	1,002E-4	0,816E-4	0,639E-5
129	42	0,487E-5	0,490E-5	0,304E-5
	3	0,542E-5	0,550E-5	0,343E-5
força unitária aplicada no centro (3)				
freq. [Hz]	g.l.	apoio (1) [m]	apoio (2) [m]	centro (3) [m]
1	42	0,643E-5	0,860E-5	0,766E-5
	3	0,643E-5	0,861E-5	0,757E-5
6	42	0,722E-5	0,112E-3	0,933E-4
	3	0,773E-4	0,120E-3	0,988E-4
10	42	0,567E-5	0,771E-5	0,373E-5
	3	0,639E-5	0,902E-5	0,367E-5
129	42	0,304E-5	0,304E-5	0,187E-5
	3	0,343E-5	0,343E-5	0,211E-5
FASE				
força unitária aplicada no apoio (1)				
freq. [Hz]	g.l.	apoio (1) [°]	apoio (2) [°]	centro (3) [°]
1	42	-0,458	-1,071	-0,464
	3	-0,382	-1,059	-0,450
6	42	-121,2	-138,6	-132,6
	3	-117,9	-133,8	-128,0
10	42	-67,40	117,4	-101,3
	3	-59,81	124,1	-90,92
129	42	-52,64	-52,01	127,7
	3	-0,001	0,002	0,001
força unitária aplicada no centro (3)				
freq. [Hz]	g.l.	apoio (1) [°]	apoio (2) [°]	centro (3) [°]
1	42	-0,465	-0,617	-0,542
	3	-0,458	-0,622	-0,549
6	42	-132,6	-134,8	-133,8
	3	-128,0	-130,1	-129,2
10	42	-101,2	144,7	-171,1
	3	-90,90	145,4	-170,0
129	42	127,6	127,6	-53,14
	3	0,001	-0,001	-0,001

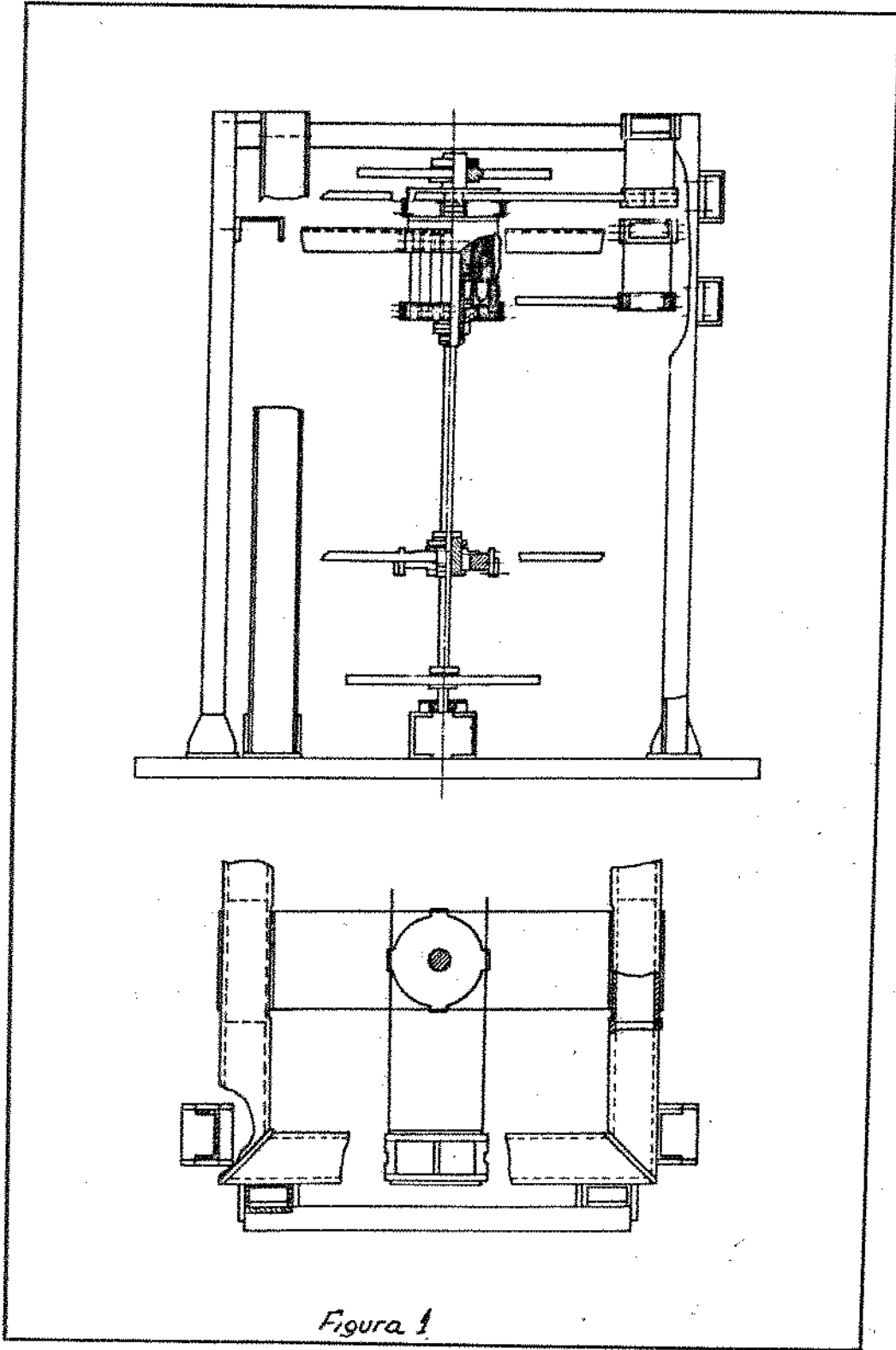
Tabela 9.2: Amplitude e Fase da Resposta de Deslocamento para o Eixo Excitado em 2 pontos. Modelo Reduzido com 3 g.l e Modelo ANSYS com 42 g.l.

## Perspectivas Futuras

Com os estudos teóricos e experimentais realizados até o momento, verificou-se que é possível trabalhar com modelos matemáticos constituídos por poucos graus de liberdade e representar o comportamento estático e dinâmico dos sistemas mecânicos em questão, com boa precisão.

Dando continuidade ao trabalho, tem-se como objetivos

- a realização experimental do processo de identificação da rigidez e do amortecimento de suspensões elásticas através das medições de fase e frequência. (*bancada em construção*)
- Obtenção do modelo rígido/flexível para uma viga suspensa por apoios elásticos (*bancada em construção*) e verificação experimental das hipóteses feitas no capítulo 8.
- Estudos teóricos para a inclusão do efeito giroscópico nos modelos matemáticos reduzidos.
- Modelamento experimental de sistemas mecânicos mais complexos como o mostrado na figura 1, através da técnica de identificação proposta nos capítulos 3 e 6. Ressalta-se que os parâmetros modais para a bancada mostrada na figura 1, já foram obtidos experimentalmente em [25].



# BIBLIOGRAFIA

- [1] Meirovitch, L. *Elements of Vibration Analysis* - Mc Graw Hill, Inc. - (1975)
- [2] Cranfield Institute of Technology - *Rotor Dynamic Critical Whirling Speeds of Rotating Shafts Using Transfer Matrices*.
- [3] Schiehlen, W.O. and Rauh, J. *Modelling of Flexible Multibeam System by Rigid-Elastic Superelements* 1 DINAME - Nova Friburgo - R.J. - (1986)
- [4] Archer, J. *Consistent Mass Matrix for Distributed Mass Systems*. - Journal of Structural Division - ASCE - August - (1963).
- [5] Hurty, W.C. *Dynamics Analysis of Structural Systems Using Component Modes* - AIAA Journal - vol3 - N4 - (1965).
- [6] Subbiah, M. and Sharan, A.M. *A Study of Dynamic Condensation Techniques for the Machine Tools and Robotic* - Proceedings of the 7th World Congress on the Theory of Machines - (1987).
- [7] Natke, H.G., Danisch, R. and Delinic, K. *Condensation Methods for the Dynamic Analysis of Large Models*. - Extend paper of the Transaction of the 9th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Tecnology (SMIRT) - Prepared for publication in Nuclear-Engineering and Design. - (1987).
- [8] Tse, F.S., Morse, I.E., Hinkle, R.T. *Mechanical Vibrations - Theory and Applications* - Allyn and Bacon, Inc - (1978).
- [9] Natke, H.G. *Identification of Vibrating Structures* - CISM - Courses and Lectures n 272 - Springer - Verlag (1982).
- [10] Clough, R.N. and Peuzien, J. - *Dynamic of Structures* Anco Technical Services - (1975).
- [11] Strang, G. *Linear Algebra and its Application* - Academic Press - 2 Edition - (1980).
- [12] Meirovitch, L. *Analytical Methods in Vibration* - Mc Graw Hill, Inc - (1976).
- [13] Bermant, A.F. and Aramanovitch, I.G. *Mathematical Analysis - A Brief Course for Engineering Students* - Mir Publishers - Moscow (1975).
- [14] Prenter, P.M. *Splines and Variational Methods* - John Wiley and Sons - (1975).
- [15] Schultz, M.H. *Spline Analysis* - Prentice-Hall, Inc - (1973).
- [16] Baruh, H. and Meirovitch, L. *Parameter Identification in Distributed Systems* - Journal of Sound Vibration - 551-564 - (1985).

- [17] Lallane, M; Berthier, P. and Hagopian J.D. *Mechanical Vibrations for Engineers* - John Wiley and Sons - (1983)
- [18] Timoshenko, S.P *Strength of Materials* D. Van Nostrand Company, Inc. 3 edition - (1965).
- [19] Vierck, R.K. *Vibration Analysis* - International Text Book Company - (1969).
- [20] Santos, I.F. *Determinação das Características Principais de Absorvedores Dinâmicos de Vibração* - Geprom/FEC/UNICAMP - (1986).
- [21] Kuo, S.S. - *Computer Applications of Numerical Methods* - Addison-Wesley Publishing Company - (1972).
- [22] Hurty, W.C. and Rubinstein, M.F. *Dynamics of Structures* - Prentice-Hall, Inc - (1976).
- [23] Martin, K.F. and Ghaim, K.H. *System Prediction Using Damped Component Modes* - Proc. Instn. Mech. Engrs. vol.198 C. n16 - (1984).
- [24] Portugal, C.C. *Determinação de Velocidades Críticas em Rotores* - Relatório de Bolsa de Pesquisa - SAE/UNICAMP - (1987)
- [25] Dana, S.S *Análise Dinâmica de Rotores com Eixo Vertical* - Tese de Doutorado FEC/UNICAMP - (1987)