

EXPLORAÇÃO DE RECURSOS RENOVÁVEIS:
OTIMIZAÇÃO DO MODELO DE
BEVERTON-HOLT DE UMA PESCA COMERCIAL

CELSO CORREIA DE SOUZA



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPINAS - SÃO PAULO
BRASIL

EXPLORAÇÃO DE RECURSOS RENOVÁVEIS:
OTIMIZAÇÃO DO MODELO DE
BEVERTON-HOLT DE UMA PESCA COMERCIAL

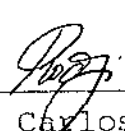
CELSON CORREIA DE SOUZA

UNICA
BIBLIOTECA CEF

EXPLORAÇÃO DE RECURSOS RENOVÁVEIS: OTIMIZAÇÃO
DO MODELO DE BEVERTON-HOLT DE UMA
PESCA COMERCIAL

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Celso Corroia de Souza e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, de de 1985.


Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

MARÇO/1985

Aos meus pais

*A Cidinha, minha esposa
e aos meus filhos
Celso Fabrício
Lara Patrícia
e Juliana Maria*

DEDICAR

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi, pela orientação segura e valiosa prestada nos diferentes aspectos deste trabalho;

À Lourdes, pela datilografia dos manuscritos;

À Universidade Federal de Mato Grosso do Sul e a CAPES pelo suporte financeiro;

A todos aqueles que, direta ou indiretamente colaboraram na efetivação deste trabalho.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
(1) CONCEITOS BÁSICOS PARA A OTIMIZAÇÃO DE UM MODELO DE PESCA COMERCIAL	4
(1.1) Função Alométrica	4
(1.2) Teoria do crescimento animal: Modelos de von Bertalanffy	6
(1.2.1) Equação de von Bertalanffy para o crescimento, em peso, do peixe	6
(1.2.2) Estudo da curva $w = w(t)$	13
(1.2.3) Equação de von Bertalanffy para o crescimento, em comprimento, do peixe	15
(1.3) Transformação de Ford-Walford para o cálculo dos parâme- tros L_{∞} e K	19
(1.4) Estimação de L_{∞} e K pela análise de regressão linear	21
(1.5) Relação entre peso e comprimento	22
(1.6) Esforço e colheita por unidade de esforço	23
(1.7) Equação de variação do crescimento de uma população de peixes,	26
(1.8) Função biomassa natural	29
(1.9) Função produção	30
(1.10) Função lucro	31
(1.11) Valor presente do lucro	32

(1.12) Otimização dinâmica do modelo de Beverton-Holt para uma única coorte	32
(1.13) O caso em que F_{\max} é finito	37
(1.14) Otimização do modelo de Beverton-Holt para várias coortes.	42
(2) OTIMIZAÇÃO DA FUNÇÃO VALOR PRESENTE DO LUCRO NA CRIAÇÃO DE MACHOS ALBINOS DA TILÁPIA DO NILO EM PSICULTURA (COORTE ÚNICA), NÃO CONSIDERANDO DESPESAS COM RAÇÃO E MÃO - DE-OBRA	51
(2.1) Introdução	51
(2.2) Descrição do experimento	51
(2.3) Determinação das equações de crescimento de von Bertalanffy	53
(2.3.1) Equação de crescimento em comprimento	53
(2.3.2) Equação de crescimento em peso	57
(2.4) Determinação do ponto de inflexão da função $w = w(t)$	61
(2.5) Função biomassa natural	61
(2.6) Tornando o problema mais real	63
(2.7) Determinação do ponto de máximo da função biomassa natural	64
(2.8) Determinação do instante ótimo de pesca t_g , sendo δ uma taxa instantânea de depreciação do capital	65
(2.9) Análise dos resultados	68

(3) OTIMIZAÇÃO DA FUNÇÃO VALOR PRESENTE DO LUCRO NA CRIAÇÃO DE MACHOS ALBINOS DA TILÁPIA DO NILO EM PSICULTURA (COORTE ÚNICA), CONSIDERANDO DESPESAS COM RAÇÃO E MÃO-DE-OBRA	70
(3.1) Introdução	70
(3.2) Função lucro	70
(3.3) Determinação da função consumo de ração	71
(3.4) Resultados	75
(3.5) Análise dos resultados	75
(4) CRIAÇÃO DE MACHOS ALBINOS DA TILÁPIA DO NILO EM LAGO NATURAL (COORTE ÚNICA)	77
(4.1) Introdução	77
(4.2) Determinação do intervalo ótimo de pesca $[t_1, t_2]$ para F_{\max} finito	77
(4.3) Cálculo da taxa F_{\max} de mortalidade por pesca	81
(4.4) Análise dos resultados	82
(5) DINÂMICA ÓTIMA DE UMA PESCA COMERCIAL ENVOLVENDO VÁRIAS COORTES DE MACHOS ALBINOS DA TILÁPIA DO NILO	84
(5.1) Introdução	84
(5.2) Maximização do valor presente do lucro de todas as colheitas futuras	84
(5.3) Análise dos resultados	101

CONCLUSÃO	104
APÊNDICES	106
(Ap. 1) Regressão linear de duas variáveis	106
(Ap. 2) Coeficiente de correlação entre duas variáveis	107
(Ap. 3) Equação de Euler	108
(Ap. 4) Integração Numérica: Quadratura Gaussiana	112
(Ap. 5) Valor futuro e valor presente do capital	117
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	120

INTRODUÇÃO

A pesca é uma das atividades mais antigas do ser humano na sua constante luta pela sobrevivência, pois o peixe é muito rico em proteínas e existe em abundância nos rios e oceanos.

A pesca, antigamente de subsistência, passou a ser uma pesca comercial atualmente, com sofisticados equipamentos que facilitou sobremaneira a localização e captura de grandes cardumes. Isso tem causado problemas, pois esse desenvolvimento tem elevado muito o "esforço de pesca" fazendo com que a captura do peixe aconteça numa fase subótima do seu desenvolvimento, prejudicando com isso o rendimento da pescaria. Um outro problema, certamente mais sério, é o problema dos períodos de pesca que são constantemente desrespeitados, prejudicando a procriação dos peixes. Esses fatores, aliados à poluição desenfreada tem comprometido seriamente os estoques de peixes no mundo. Tanto a pesca quanto a poluição fazem parte do contexto político e econômico de cada país, havendo

necessidade de uma regulamentação mais rigorosa por parte de cada país, com o intuito de minimizar os efeitos dessas duas ações contra a natureza. Essa regulamentação está diretamente relacionada com a diminuição do "esforço de pesca", que compreende os seguintes itens:

- a) Limitação da quantidade total de captura anual;
 - limitando o tamanho da frota pesqueira;
 - limitando a duração dos períodos de pesca;
 - limitando os equipamentos de pesca;
 - limitando as áreas de pesca .

- b) Proteção dos peixes para que os mesmos possam atingir o tamanho ideal de captura;
 - isolando as áreas de procriação de peixes;
 - determinando o tamanho mínimo das malhas das redes e dos anzóis.

: Para que possamos predizer os efeitos dessa regulamentação , modelos matemáticos tem sido usados, ainda que pese sobre eles várias críticas, sendo a principal delas a sua supersimplificação.

Nosso trabalho será desenvolvido em seis partes, sendo que na primeira parte construímos modelos matemáticos relacionados com o crescimento do peixe, que são as equações de von Bertalanffy

para o crescimento animal; na segunda parte apresentamos os resultados de um ensaio de Psicultura intensiva com machos albinos de Tilápia do Nilo (*Sarotherodon Niloticus*), feito em viveiro natural por pesquisadores do Departamento Nacional de Obras Contra a Seca (DNOCS), na cidade de Pentecoste -CE. Da terceira à quinta parte faremos um estudo de uma pesca comercial, otimizando a função "Produção de Pescado" (Modelo de Beverton -Holt), maximizando os lucros, usando os dados obtidos na segunda parte. A sexta parte consta de Apêndices sobre Regressão Linear, Equação de Euler, Integração Gaussiana e Valor Presente do Capital, conceitos matemáticos importantes para o desenvolvimento do trabalho proposto.

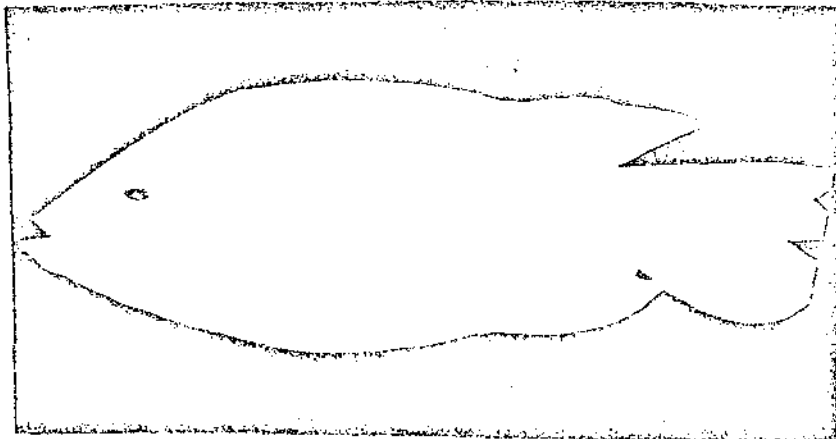


Fig. 1.1 - Exemplar da Tilápia do Nilo (*Sarotherodon-Niloticus*)

(1)- CONCEITOS BÁSICOS PARA A OTIMIZAÇÃO DE UM MODELO DE PESCA COMERCIAL.

Nesta primeira parte faremos um estudo da teoria necessária à otimização de uma pesca comercial. Começamos transformando em modelos matemáticos alguns princípios biológicos afim de determinarmos as equações de crescimento animal de von Bertalanffy, bem como a variação do número de peixes, em cativeiro, devido a mortalidade natural, a mortalidade por pesca e devido às duas juntas, não considerando a reprodução. Foi montado também um modelo matemático para o esforço de pesca, já que o mesmo é um importante item da pesca comercial. Alguns conceitos econômicos também foram introduzidos, como a Função Produção, Função Lucro e Valor Presente do Lucro, culminando com a otimização do Modelo de Beverton-Holt para uma única coorte (peixes de mesma idade), e para várias coortes.

(1.1) FUNÇÃO ALOMÉTRICA

Em biologia a palavra alometria significa "o crescimento diferenciado em intensidade entre as várias partes do organismo animal". A função simples, chamada função alométrica, que relaciona esse crescimento relativo entre duas partes x e y , quaisquer, do organismo, num determinado instante t , é representada por:

$$y(t) = \beta \cdot [x(t)]^\alpha \quad (1.3.1)$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+.$$

Conforme é conhecido (von Bertalanffy, 1973) muitos fenômenos do metabolismo animal seguem essa equação simples.

A variação instantânea de y em relação ao tempo t é dada por

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

De (1.1.1), vem

$$\frac{dy}{dt} = \alpha \beta [x(t)]^{\alpha-1} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \alpha \beta [x(t)]^\alpha \cdot [x(t)]^{-1} \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \alpha \cdot y \cdot [x(t)]^{-1} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = \alpha \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (1.1.2)$$

isto é: a proporção do aumento da variável y (variação relativa) para a variável x é constante, sendo α a constante de proporcionalidade, chamada "taxa de crescimento relativo" de y em relação a x .

O princípio da alometria não entrou para a biologia por esse caminho, mas sim, quando em 1840, biólogos perceberam que a taxa metabólica em animais de diferentes pesos do corpo não cresce em proporção ao peso do corpo mas antes em proporção à superfície do corpo.

Esta é a origem da "lei da superfície do metabolismo", que é um caso especial da função alométrica, sendo y representando o metabolismo básico do animal em repouso, x o peso do animal e o expoente α variando entre $2/3$ e 1 , isto é, $2/3 \leq \alpha \leq 1$, conforme a classe a que pertence o animal, sendo empiricamente determinado $\alpha = 2/3$ para o peixe, que é de nosso particular interesse.

(1.2) TEORIA DO CRESCIMENTO ANIMAL: MODELOS DE VON BERTALANFFY.

(1.2.1) Equação de von Bertalanffy para o crescimento, em peso, do peixe.

Seja $w = w(t)$ o peso de um animal no instante t .

Como o organismo animal é um sistema aberto (sistema em troca de matéria com o meio ambiente), a variação instantânea de sua taxa de crescimento (TC) pode, em geral, ser expressa pela equação de equilíbrio da forma:

$$TC = \frac{dw}{dt} = \text{SÍNTESE} - \text{PERDAS} + \sigma_1 + \sigma_2 + \dots$$

isto é, o crescimento em peso de um animal é dado pela diferença entre os processos de síntese e de perdas da matéria ingerida por esse animal mais um número qualquer de fatores indeterminados que podem influir no processo.

Se limitarmos nossas considerações ao esquema mais simples de sistema aberto, podemos fazer $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = 0$ (von Bertalanffy, 1973).

Teremos então

$$\frac{dw}{dt} = \text{SÍNTESE} - \text{PERDAS}.$$

Os termos SÍNTESE e PERDAS poderão ser admitidos como funções indefinidas das variáveis peso e tempo, então

$$\frac{dw}{dt} = f_1(w, t) + f_2(w, t).$$

Ora, f_1 e f_2 não podem depender do tempo t , pois, se assim o fosse, não poderia haver diferentes taxas de crescimento em determinados intervalos de tempo, como geralmente acontece. Portanto f_1 e f_2 devem ser funções somente do peso do corpo, temos então:

$$\frac{dw}{dt} = f_1(w) + f_2(w).$$

De acordo com o princípio da alometria para o metabolismo, podemos supor que as funções f_1 e f_2 sejam potências do peso do corpo, isto é

$$\frac{dw}{dt} = Hw^n + Pw^m$$

sendo H a constante do anabolismo, representando a taxa de síntese de massa por unidade de superfície do animal e P a constante do catabolismo, representando a taxa de destruição de massa por unidade de massa. Essas duas constantes H e P , assim como m e n são determinadas empiricamente. Para o peixe, que é de interesse particular para o nosso trabalho, verificou-se que $n = 2/3$.

Experiências fisiológicas demonstraram que o catabolismo, especialmente o das proteínas, é aproximadamente proporcional à massa do corpo do peixe. Fazemos então $m=1$.

Após essas considerações e simplificações temos o modelo matemático de von Bertalanffy do crescimento, em peso, do peixe

$$\frac{dw}{dt} = Hw^{2/3} + Pw \quad (1.2.1)$$

que é uma equação diferencial ordinária de Bernoulli, sujeita às condições:

Condição inicial: $w(t) \Big|_{t=t_0} = 0$: peso do peixe ao nascer

Condição assintótica: $w(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} = w_\infty$: peso assintótico ou peso limite atingido pelo peixe.

Solução da Equação (1.2.1)

$$\frac{dw}{dt} = Hw^{2/3} - Pw$$

$$\frac{dw}{dt} + Pw = Hw^{2/3}$$

dividindo todos os termos da equação por $w^{2/3}$ vem

$$w^{-2/3} \frac{dw}{dt} + Pw^{1/3} = H \quad (a)$$

Efetuada a substituição

$$y = w^{-2/3 + 1} = w^{1/3}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3} w^{-2/3} \frac{dw}{dt}$$

Isolando $\frac{dw}{dt}$, vem

$$\frac{dw}{dt} = 3w^{2/3} \frac{dy}{dt} .$$

Substituindo essa expressão em (a), temos

$$3 \frac{dy}{dt} + Py = H .$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{3} Py = \frac{1}{3} H \quad (b)$$

Fazendo $y = u \cdot v$

$$\frac{dy}{dt} = u \frac{dv}{dt} + v \frac{du}{dt} .$$

Substituindo em (b), vem

$$u \frac{dv}{dt} + v \frac{du}{dt} + \frac{1}{3} Puv = \frac{1}{3} H$$

$$u \left(\frac{dv}{dt} + \frac{1}{3} Pv \right) + v \frac{du}{dt} = \frac{1}{3} H \quad (c) .$$

Igualemos a zero a expressão entre parênteses

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{3} Pv = 0$$

Temos uma equação diferencial de variáveis separadas.

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{3} Py .$$

Separando as variáveis, vem

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{3} P dt$$

Integrando, vem

$$\ln y = -\frac{1}{3} Pt \Rightarrow y = e^{-1/3 Pt} \quad (d)$$

Para determinar u , substitui-se (d) em (c)

$$e^{-1/3 Pt} \frac{du}{dt} = \frac{1}{3} H$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{3} H e^{1/3 Pt}$$

$$du = \frac{1}{3} H e^{1/3 Pt} dt .$$

Integrando, vem

$$u = \frac{H}{P} e^{1/3 Pt} + C \quad (e)$$

Como $y = u \cdot v$, então

$$y = \left[\frac{H}{P} e^{1/3 Pt} + C \right] \cdot e^{-1/3 Pt}$$

$$y = \frac{H}{P} + C e^{-1/3 Pt}$$

Como $y = w^{1/3}$, temos

$$w^{1/3} = \frac{H}{P} + C e^{-1/3 Pt} \quad (f)$$

CONDIÇÕES INICIAIS

Para $t = t_0 \Rightarrow w = 0$, ou seja,

$$\frac{H}{P} + C e^{-1/3 Pt_0} = 0$$

$$C = -\frac{H}{P} \cdot e^{1/3 Pt_0} \quad (g)$$

Para $t \rightarrow \infty \Rightarrow w = w_\infty$, ou seja,

$$w_\infty^{1/3} = \frac{H}{P} \Rightarrow w_\infty = \left(\frac{H}{P}\right)^3 \quad (h)$$

Substituindo (g) em (f), vem

$$w^{1/3} = \frac{H}{P} - \frac{H}{P} e^{1/3 P t_0} \cdot e^{-1/3 P t}$$

$$w^{1/3} = \frac{H}{P} (1 - e^{-1/3 P (t - t_0)})$$

$$w = \left(\frac{H}{P}\right)^3 \cdot [1 - e^{-P/3 (t - t_0)}]^3$$

com $w_\infty = \left(\frac{H}{P}\right)^3$, então

$$w(t) = w_\infty [1 - e^{-K(t - t_0)}]^3 \quad (1.2.2)$$

com $K = P/3$.

K : fator de condição ou coeficiente de crescimento.

A equação (1.2.2) é chamada de "Equação de von Bertalanffy para o crescimento, em peso, do peixe.

(1.2.2) ESTUDO DA CURVA $w = w(t)$.

Temos que

$$w(t) = w_\infty (1 - e^{-K(t - t_0)})^3$$

Derivando em relação a t , vem:

$$w'(t) = 3Kw_{\infty}(1 - e^{-K(t-t_0)})^2 \cdot e^{-K(t-t_0)}$$

e

$$w''(t) = 3K^2w_{\infty} \cdot e^{-K(t-t_0)} \cdot (1 - e^{-K(t-t_0)}) \cdot (3e^{-K(t-t_0)} - 1)$$

De $w'(t) = 0$, temos $t = t_0$ e $t \rightarrow \infty$

$$\text{De } w''(t) = 0, \text{ temos } \begin{cases} t = t_0 \\ t \rightarrow \infty \\ t^* = t_0 + \ln 3 / K \end{cases} \quad (1.2.3)$$

a) $w'(t) > 0$, portanto o peso é sempre crescente, tendo um valor limite w_{∞} quando $t \rightarrow \infty$.

b) $t^* = t_0 + \frac{\ln 3}{K}$ é ponto de inflexão, sendo

$$w(t^*) = w_{\infty} [1 - e^{-K(t_0 + \frac{\ln 3}{K} - t_0)}]^3 = w_{\infty}(1 - e^{-\ln 3})^3 .$$

Portanto,

$$w(t^*) = 0,296 w_{\infty} .$$

O instante $t^* = t_0 + \frac{\ln 3}{K}$ é o instante de maior variação de peso do peixe, pois

$\frac{dw}{dt}(t^*)$ atinge seu valor máximo.

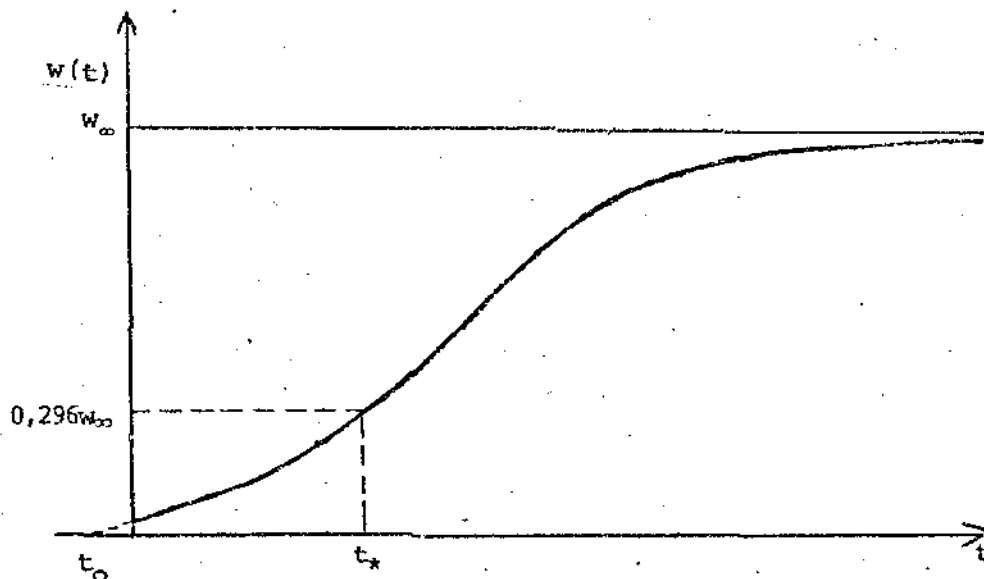


Fig.1.2 - Curva de crescimento, em peso, do peixe

(1.2.3) Equação de von Bertalanffy para o crescimento, em comprimento, do peixe.

De (1.2.1), temos que

$$\frac{dw}{dt} = Hw^{2/3} - Pw.$$

Pelo Princípio da Alometria, de que o crescimento do organismo é proporcional à superfície do corpo, podemos escrever a equação

(1.2.1), na forma

$$\frac{dw}{dt} = HS - Pw \quad (1.2.4)$$

sendo S a superfície fisiológica do organismo.

Finalmente, é necessário expressar S e w em termos da di mensão comprimento linear ℓ do organismo. Se assumirmos que o organismo cresce isometricamente e tem uma constante específica gravitacional, então podemos escrever

$$S = p\ell^2$$

$$w = q\ell^3 \quad , \quad p \text{ e } q \text{ constantes.}$$

Portanto

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d(q\ell^3)}{dt} = 3q\ell^2 \cdot \frac{d\ell}{dt}$$

que substituído em (1.2.4), produz

$$3q\ell^2 \frac{d\ell}{dt} = Hp\ell^2 - Pq\ell^3$$

ou seja

$$\frac{dl}{dt} = \frac{Hp}{3q} - \frac{Pl}{3}$$

fazendo $\frac{Hp}{3q} = E$ e $\frac{P}{3} = K$, temos a equação

$$\frac{dl}{dt} = E - K \cdot l \quad (1.2.5)$$

K: coeficiente de crescimento

CONDIÇÕES INICIAIS:

$l(t_0) = 0$: comprimento ao nascer

$l(t \rightarrow \infty) = L_\infty$: comprimento assintótico

Solução da equação (1.2.5)

$$dl = (E - Kl)dt$$

$$\frac{dl(t)}{E - Kl(t)} = dt$$

$$\int \frac{dl(t)}{E - Kl(t)} = \int dt$$

$$-\frac{1}{K} \ln(E - K\ell(t)) = t + c$$

$$\ln(E - K\ell(t)) = -K(t + c)$$

$$E - K\ell(t) = e^{-K(t+c)} = C \cdot e^{-Kt}$$

$$\ell(t) = \frac{E}{K} - C e^{-Kt} \quad (1.2.6)$$

CONDIÇÕES INICIAIS:

$$\ell(t_0) = 0, \text{ então, } C = \frac{E}{K} \cdot e^{Kt_0} \quad (1)$$

$$\ell(t \rightarrow \infty) = L_\infty, \text{ então, } L_\infty = \frac{E}{K} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), vem:

$$C = L_\infty \cdot e^{Kt_0} \quad (3)$$

Substituindo (2) e (3) em (1.2.6), vem:

$$\ell(t) = L_\infty [1 - e^{-K(t-t_0)}] \quad (1.2.7)$$

que é a equação de von Bertalanffy para o crescimento, em comprimento, do peixe.

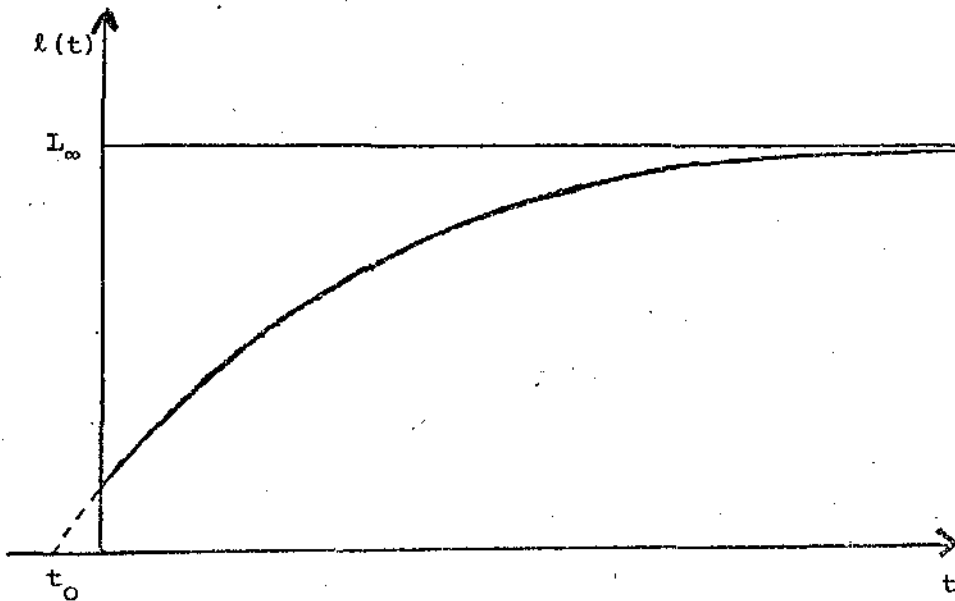


Fig.1.3 - Curva de crescimento, em comprimento de peixe

(1.3) Transformação de Ford-Walford para o Cálculo dos Parâmetros L_∞ e K .

Seja a equação $l(t) = L_\infty (1 - e^{-K(t-t_0)})$.

Para intervalos de tempos de comprimento Δt , podemos escrever:

$$l(t+\Delta t) = L_\infty [1 - e^{-K(t+\Delta t-t_0)}]$$

$$l(t+\Delta t) - l(t) = L_\infty [1 - e^{-K(t+\Delta t-t_0)}] - L_\infty [1 - e^{-K(t-t_0)}]$$

$$l(t+\Delta t) - l(t) = L_\infty e^{-K(t-t_0)} \cdot (1 - e^{-K\Delta t}) \quad (1)$$

Como $\ell(t) = L_{\infty} [1 - e^{-K(t-t_0)}]$,

então

$$L_{\infty} \cdot e^{-K(t-t_0)} = L_{\infty} - \ell(t)$$

que substituído em (1), vem

$$\ell(t+\Delta t) - \ell(t) = (L_{\infty} - \ell(t)) \cdot (1 - e^{-K\Delta t})$$

ou seja

$$\ell(t+\Delta t) = L_{\infty} (1 - e^{-K\Delta t}) + e^{-K\Delta t} \cdot \ell(t).$$

Fazendo $\Delta t = 1$, temos a relação entre $\ell(t+1)$ e $\ell(t)$, chamada de transformação de Ford-Walford, isto é,

$$\ell(t+1) = L_{\infty} (1 - e^{-K}) + e^{-K} \cdot \ell(t) \quad (1.3.1)$$

A transformação de Ford-Walford é uma relação linear entre $\ell(t+1)$ e $\ell(t)$ e sua intersecção com a reta bissetriz do primeiro quadrante, $\ell(t+1) = \ell(t)$, dá como abscissa L_{∞} .

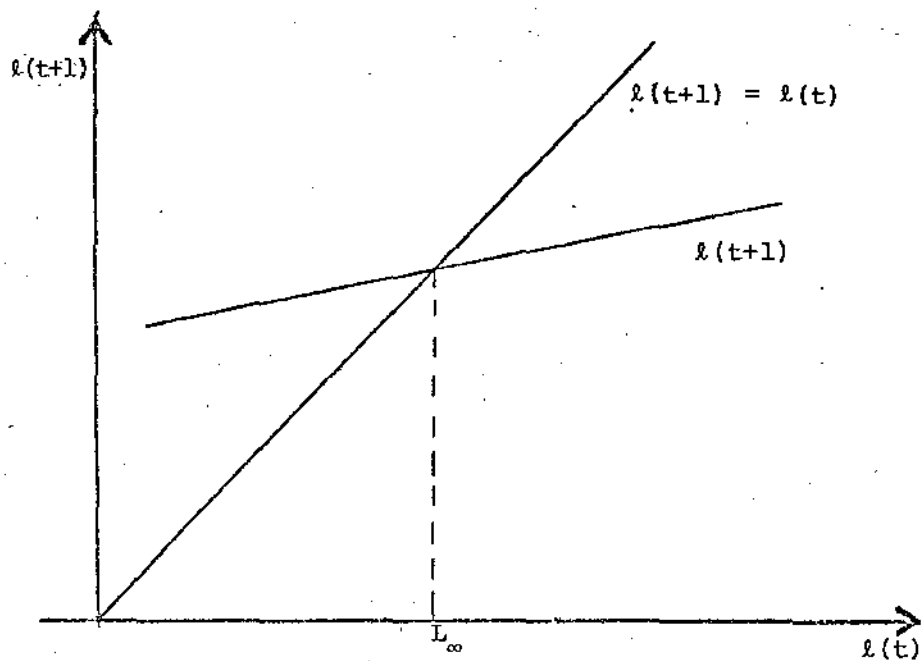


Fig.1.4 - Determinação gráfica de L_{∞} .

(1.4) Estimação de L_{∞} e K pela Análise de Regressão Linear

Esse método faz uso da transformação de Ford-Walford.

De (1.3.1), fazendo $a = L_{\infty}(1 - e^{-K})$ e $b = e^{-K}$, temos

$$\ell(t+1) = a + b \cdot \ell(t) \quad (1.4.1)$$

Com os valores de $\ell(t)$ e $\ell(t+1)$ determinam-se a e b através de Regressão Linear (Apêndice 1). De posse desses valores determinam-se L_{∞} e K usando os argumentos (1) e (2) abaixo.

(1) Quando $t \rightarrow \infty$, então $\ell(t+1) = \ell(t) = L_{\infty}$. Portanto de (1.4.1),

vem

$$L_{\infty} = a + b \cdot L_{\infty}$$

$$L_{\infty}(1 - b) = a$$

portanto

$$L_{\infty} = \frac{a}{1 - b} \quad (1.4.2)$$

(2) Como $b = e^{-K}$, então

$$\ln b = -K$$

$$\text{ou} \quad K = - \ln b \quad (1.4.3)$$

(1.5) Relação entre Peso e Comprimento.

Do princípio da alometria, sabemos que o peso é proporcional a uma potência ϕ do comprimento, isto é

$$w(t) = \theta \cdot [l(t)]^{\phi} \quad (1.5.1)$$

onde

$w(t)$: peso do animal no instante t ;

$l(t)$: comprimento do animal no instante t ;

$\theta, \phi \in \mathbb{R}^+$.

Essa relação nem sempre é linear, contudo pode ser vista como linear se fizermos a seguinte transformação logarítmica:

$$\ln w(t) = \ln \theta + \phi \ln l(t) \quad (1.5.2)$$

Fazendo

$$y = \ln w(t)$$

$$x = \ln l(t)$$

$$n = \ln \theta$$

$$m = \phi, \text{ temos de (1.5.2)}$$

$$y = n + mx \quad (1.5.3)$$

Com o uso de Regressão Linear, calculamos m e n e consequentemente θ e ϕ .

(1.6) Esforço e colheita por unidade de esforço.

O esforço e a colheita por unidade de esforço são grandezas

de suma importância para o estudo da pesca. A primeira está relacionada com a mortalidade de peixes através da pesca e a segunda com a densidade do estoque explorado.

A colheita por unidade de esforço pode ser obtida de uma parte da pescaria e é usada para estimar o estoque de peixes e o esforço total.

Quando estamos operando com um único equipamento sobre uma densidade uniforme de peixes é bem simples medir o esforço. Por exemplo, uma simples forma de operação é a pesca num lago com único barco por dia de modo que o esforço é dado pelo número de dias no lago e a colheita por unidade de esforço é a colheita de um dia no lago.

Quando se trata de uma frota pesqueira devemos ter uma padronização em relação ao tempo efetivo de pesca, distribuição da frota, força de pesca, para o cálculo do esforço de pesca. O tempo efetivo de pesca é obtido subtraindo do período em que a frota esteve pescando, o período não diretamente ocupado com a colheita ou localização do peixe.

A força de pesca está relacionada com a tonelagem e potência de cada barco. A força de pesca de um determinado equipamento é dada através de duas grandezas a e Δq , sendo a a medida da área ou volume de água sobre a qual os peixes estão sujeitos a serem capturados pelo equipamento e Δq a proporção de peixes dentro

dessa área, ou volume de água, em que os peixes são de fato capturados, em uma única operação.

Supondo $N = N(t)$ o número de peixes no instante t , uniformemente distribuídos num lago de área ou volume de água A , então a fração do estoque total de peixes dentro dessa área de influência do equipamento será a/A , e a colheita de uma operação (ΔC), será:

$$\Delta C = \Delta q \cdot \frac{a}{A} \cdot N \quad (1.6.1)$$

Por outro lado, a variação do número de peixes neste lago, considerando somente a pesca, será dado por

$$\frac{dN}{dt} = -F \cdot N \quad (1.6.2)$$

F : coeficiente de mortalidade devido à pesca, considerado constante em nosso estudo, mas podendo ser função de t em alguns casos.

Colocando a expressão (1.6.2) em termos de pequenos intervalos, temos:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -F \cdot N$$

$$\Delta N = -F \cdot N \cdot \Delta t$$

sendo ΔN a colheita de uma operação, então

$$\Delta C = - \Delta N = F \cdot N \cdot \Delta t$$

De (1.6.1), vem

$$\Delta q \cdot \frac{a}{A} \cdot N = F \cdot N \cdot \Delta t$$

ou seja,

$$F = \frac{a \cdot \Delta q}{A \cdot \Delta t} \quad (1.6.3)$$

Somando sobre um período de tempo de comprimento t , temos

$$F = \frac{a \cdot q}{A \cdot t} \quad (1.6.4)$$

(1.7) Equação de variação do crescimento de uma população de peixes,

Seja $N = N(t)$ o número de peixes num volume de água A . Se não houver reprodução, o número de peixes desse grupo diminui. Suporemos que essa variação obedeça à seguinte lei,

$$\frac{dN}{dt} = -M \cdot N(t) \quad (1.7.1)$$

M : taxa de mortalidade natural.

CONDIÇÃO INICIAL

$N(0) = N_0$ (número inicial de peixes)

O número de peixes $N(t)$, no instante t , é dado pela solução da equação (1.7.1), isto é

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-M \cdot t} \quad (1.7.2)$$

Das equações (1.2.2) e (1.7.2), concluímos que, enquanto o peso de cada peixe aumenta, o número de peixes diminui.

Considerando o efeito da pesca no modelo descrito acima, a partir de um determinado instante t_F , o declínio do número de peixes será maior, supondo que para isso haja um esforço de pesca constante que produz uma taxa de mortalidade F , sendo

$$F = \frac{a \cdot q}{a \cdot t}$$

A variação do número de peixes agora será:

$$\frac{dN}{dt} = - (M + F) \cdot N, \quad (1.7.3)$$

$$t > t_F.$$

CONDIÇÃO INICIAL

$$N(t_F) = N_0 e^{-M \cdot t_F}, \quad t = t_F.$$

Integrando (1.7.3) obtêm-se o número de peixes no instante $t > t_F$

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-Mt_F} \cdot e^{-(M+F) \cdot (t-t_F)} \quad (1.7.4)$$

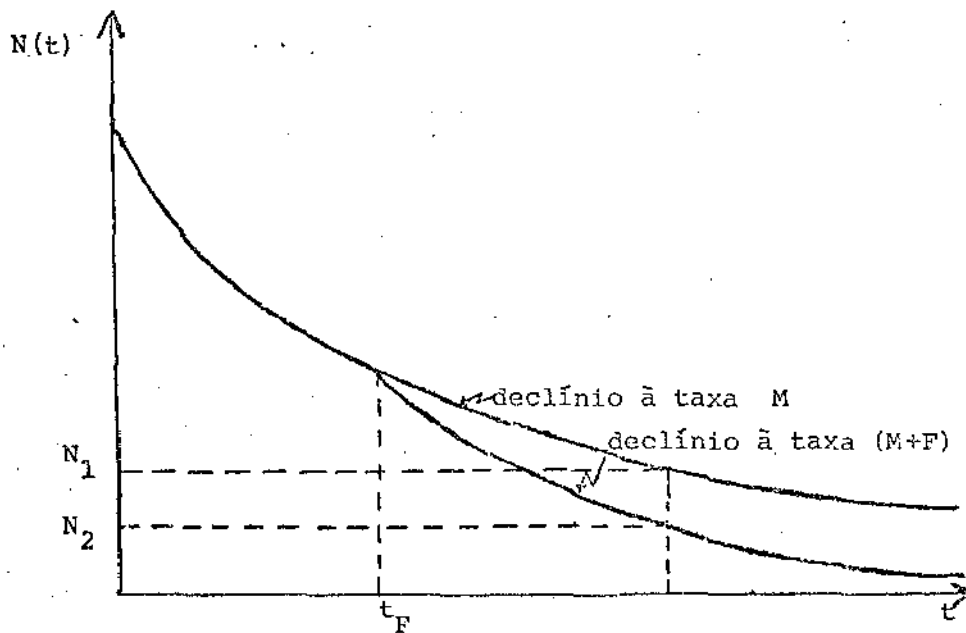


Fig.1.5 - Curva de Variação de $N(t)$ às taxas M e $(M+F)$. Expressões (1.7.2) e (1.7.4).

(1.8) Função biomassa natural.

Sejam $N = N(t)$ o número de peixes no instante t e $w = w(t)$ o peso de cada peixe neste instante. A função biomassa natural é dada por

$$B(t) = N(t) \cdot w(t) \quad (1.8.1)$$

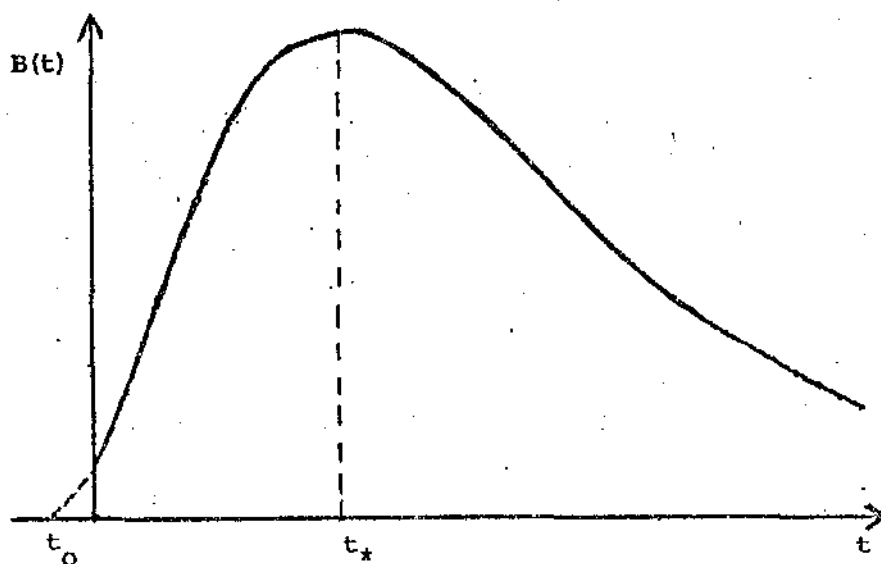


Fig.1.6 - Curva de biomassa natural

Ponto de máximo da biomassa natural

$$B'(t) = N'(t) w(t) + N(t) \cdot w'(t)$$

De (1.7.1), temos $N'(t) = -M \cdot N(t)$, portanto

$$B'(t) = -M \cdot N(t) \cdot w(t) + N(t) \cdot w'(t)$$

$$B'(t) = N(t) \cdot w(t) \cdot \left(\frac{w'(t)}{w(t)} - M \right)$$

Para máximo devemos ter $B'(t_*) = 0$, ou seja

$$\frac{w'(t_*)}{w(t_*)} = M \quad (1.8.2)$$

A solução $t_* \in \mathbb{R}^+$ é única pois $\frac{w'(t)}{w(t)}$ é uma função decrescente em relação ao tempo.

(1.9) FUNÇÃO PRODUÇÃO.

Essa função pode ser determinada de duas maneiras:

a) Considerando que todos os peixes possam ser capturados instantaneamente, isto é, o esforço aplicado é infinito, então a função produção coincide com a função biomassa, isto é,

$$Y(t) = B(t) \quad (1.9.1)$$

b) Considerando que uma taxa de mortalidade por pesca F seja aplicada a partir de um instante t_F , devido a um esforço finito de

pesca. Neste caso a colheita total dos peixes só será garantida num intervalo de tempo $[t_F, \infty)$, sendo a função biomassa a soma contínua das "biomassas infinitésimas", em cada instante, isto é,

$$Y(t) = \int_{t_F}^{\infty} w(t) \left[\frac{d[N_1 - N_2](t)}{dt} \right] dt$$

N_1 e N_2 mostrados na Fig. 1.5. De (1.7.1) e (1.7.3) temos que:

$$\frac{d[N_1 - N_2](t)}{dt} = -MN_1(t) + (M+F)N_2(t) = -M(N_1 - N_2)(t) + F \cdot N_2(t)$$

Como só nos interessa a mortalidade devido a pesca e, considerando $N_2(t) = N(t)$, temos o modelo de Beverton-Holt para uma única coorte.

$$Y(t) = \int_{t_F}^{\infty} w(t) \cdot F \cdot N(t) dt \quad (1.9.2)$$

(1.10) Função Lucro

Não considerando gastos com ração e mão-de-obra, a função lucro é dada por

$$L(t) = \int_{t_F}^{\infty} [p \cdot Y'(t) - C \cdot F] dt = \int_{t_F}^{\infty} [p \cdot w(t) \cdot F \cdot N(t) - C \cdot F] dt$$

$$\text{Portanto } L(t) = \int_{t_F}^{\infty} [p \cdot w(t) \cdot N(t) - C] F dt \quad (1.10.1)$$

C : custo por unidade de esforço.

p : preço por unidade de biomassa.

(1.11) Valor Presente do Lucro

O valor presente do lucro é uma função importantíssima neste trabalho, visto que o nosso principal objetivo é maximizá-la. De acordo com as expressões (Ap. 5.5) e (1.10.1) o valor presente do lucro é dado por

$$PV = \int_{t_F}^{\infty} e^{-\delta t} \cdot [p \cdot w(t) \cdot N(t) - C] \cdot F dt \quad (1.11.1)$$

(1.12) Otimização dinâmica do modelo de Beverton-Holt para uma única coorte.

Iniciamos o estudo para peixes de uma única coorte (peixes de mesma idade) sendo colhidos independentemente das outras coortes. Seja $F(t)$ coeficiente de mortalidade, variando no tempo, sujeito às restrições $0 \leq F(t) \leq F_{\max}$. F_{\max} pode ser finito ou infinito. Se $F(t)$ for infinito temos o controle por impulso.

Nosso problema, agora, é maximizar (1.11.1), determinando o

controle ótimo $F^*(t)$, isto é, determinar o valor

$$\max \int_0^{\infty} e^{-\delta t} [pN(t) \cdot w(t) - C] F(t) dt$$

sujeito a $N'(t) = -(M + F(t)) \cdot N(t)$

$$N(0) = N_0$$

De $N'(t) = -(M + F(t)) \cdot N(t)$, temos

$$F(t) = -M - \frac{N'(t)}{N(t)} \quad (1.12.1)$$

Chamando de

$$\phi(t, N, N') = e^{-\delta t} \cdot [pN(t) \cdot w(t) - C] \cdot F(t)$$

então de (1.12.1), vem

$$\phi(t, N, N') = e^{-\delta t} [pN(t) \cdot w(t) - C] \cdot \left[-M - \frac{N'(t)}{N(t)} \right]$$

$$\phi(t, N, N') = [-pMN(t) \cdot w(t) + MC + \left(\frac{C}{N} - pw(t) \right) N'(t)] e^{-\delta t} \quad (1.12.2)$$

A condição de máximo é dada pela equação de Euler (vide Ap.3.1),

ou seja,

$$\frac{\partial \phi}{\partial N} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \phi}{\partial N'} \right) \quad (a)$$

De (1.12.2), temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial N'} = \left(\frac{C}{N(t)} - pw(t) \right) \cdot e^{-\delta t} \quad (b)$$

então

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \phi}{\partial N'} \right) = -\delta \left(\frac{C}{N(t)} - pw(t) \right) e^{-\delta t} - \left(\frac{C}{N^2(t)} \cdot N'(t) + pw'(t) \right) e^{-\delta t}$$

e

$$\frac{\partial \phi}{\partial N} = [-pMw(t) - \frac{C}{N^2(t)} \cdot N'(t)] \cdot e^{-\delta t} \quad (c)$$

Substituindo (b) e (c) em (a) e isolando $N(t)$, vem

$$N^*(t) = \frac{p^{-1} \cdot C \cdot \delta}{w(t) \cdot [M + \delta - w'(t)/w(t)]} \quad (1.12.3)$$

Como $B^*(t) = N^*(t) \cdot w(t)$, então

$$B^*(t) = \frac{p^{-1} \cdot C \cdot \delta}{M + \delta - w'(t)/w(t)} \quad (1.12.4)$$

e

$$F^*(t) = -M - \frac{(N^*(t))'}{N^*(t)} \quad (1.12.5)$$

$F^*(t)$: controle ótimo singular.

Quando $t < t_F$, temos de (1.12.1)

$$F(t) = -M + \frac{M \cdot N(t)}{N(t)} = -M + M = 0$$

isto é, a pesca ótima não captura peixes imaturos.

Observe que $B^*(t)$ tem uma assíntota vertical em $t = t_\delta$

sendo

$$\frac{w'(t_\delta)}{w(t_\delta)} = M + \delta \quad (1.12.6)$$

Como $w'(t)/w(t)$ é uma função decrescente em relação ao tempo, a equação (1.12.6) tem uma única solução. Observe que $\frac{w'(t_*)}{w(t_*)} = M$, sendo t_* ponto de máximo da função biomassa natural, de modo que,

$$B^*(t_*) = \frac{C}{p}$$

A pesca ótima que havia iniciado em $t = t_{\delta}^*$ cessa quando $t = t_*$, pois para todo $t > t_*$, $pB(t) < C$, de modo que uma receita positiva não pode ser obtida a partir da pesca.

Com as considerações acima podemos contruir o gráfico do nível de biomassa ótima, que é representada pela curva mais forte.

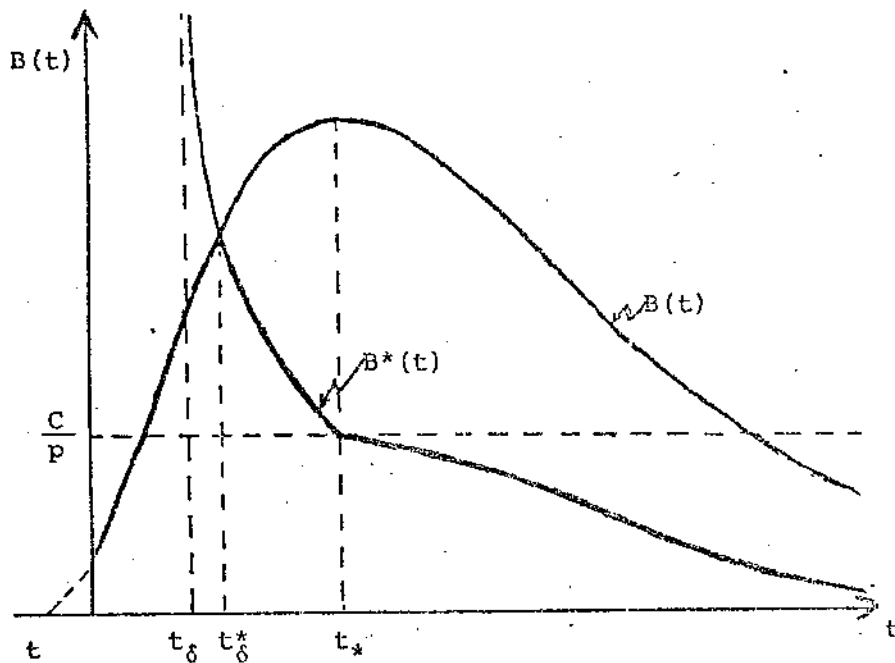


Fig.1.7 - Curva de biomassa ótima para uma única coorte

Pela observação do gráfico concluímos que a pesca ótima pode ser resumida no seguinte esquema

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < t < t_{\delta}^* \\ F^*(t) > 0 & \text{para } t_{\delta}^* \leq t \leq t_* \\ 0 & \text{para } t > t_* \end{cases}$$

OBS: Se a razão entre o custo por unidade de esforço para o preço por unidade de biomassa é pequena (isto é, se uma grande proporção da coorte tem biomassa de valor comercial), então a pesca ótima pode vir logo após a coorte atingir a idade t_δ , dada pela equação (1.12.6), isto é

$$\frac{w'(t_\delta)}{w(t_\delta)} = M + \delta$$

(1.13) CASOS EM QUE $F(t)$ DEVE SER INFINITO.

Do ítem anterior podemos concluir que um esforço de pesca infinito deve ser aplicado em dois casos especiais:

a) Quando $\delta = 0$, em que a biomassa deve ser colhida, no seu ponto máximo em $t = t_*$, Fig. (1.8).

b) Quando $C = 0$ e $\delta \geq 0$, em que a biomassa deve ser colhida no ponto em que $t = t_\delta$ (fig. 1.9). Este caso é muito importante para o estudo de várias coortes.

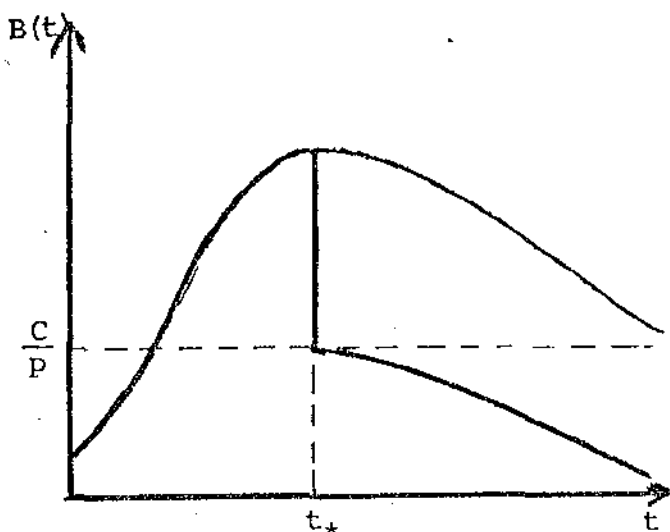


Fig. 1.8 - Curva de biomassa ótima para o caso $\delta = 0$

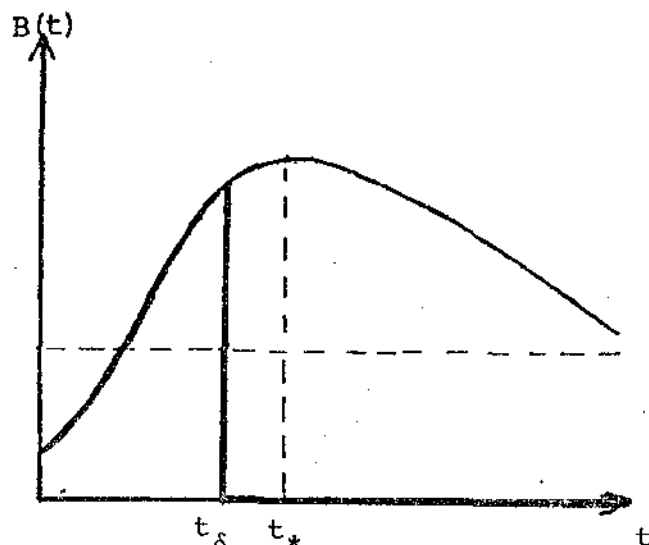


Fig. 1.9 - Curva de biomassa ótima para o caso $C = 0$ e $\delta \geq 0$

Nos dois casos vistos acima pode acontecer de não conseguirmos um esforço infinito, isto é, $F(t) \leq F_{\max} < \infty$. Neste caso a política ótima seria aplicarmos um esforço $F(t) = F_{\max}$ sobre algum intervalo fechado $t_1 \leq t \leq t_2$ contendo t_* no caso a) e contendo t_δ no caso b), com $F(t) = 0$ fora desse intervalo.

Estudaremos o caso em que $\delta = 0$. Neste caso o valor presente do lucro é dado por:

$$J(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} [pN(t) \cdot w(t) - C] F_{\max} dt = \int_{t_1}^{t_2} \phi(t, t_1) dt \quad (1.13.1)$$

$$\text{sendo } N(t) = N_0 e^{-Mt_1} \cdot e^{-(M+F_{\max})(t-t_1)} \quad (1.13.2)$$

$$e \quad \phi(t, t_1) = [pN_0 e^{-Mt_1} \cdot e^{-(M+F_{\max})(t-t_1)} \cdot w(t) - C] F_{\max} \quad (1.13.3)$$

Maximizando $J(t_1, t_2)$, vem

$$\frac{\partial J}{\partial t_2} = \phi(t_2, t_1) = 0 \quad (1.13.4)$$

$$\frac{\partial J}{\partial t_1} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \phi}{\partial t_1}(t, t_1) dt - \phi(t_1, t_1) = 0 \quad (1.13.5)$$

De (1.13.3) e (1.13.4), temos que

$$\phi(t_1, t_1) = pN_0 F_{\max} e^{F_{\max} \cdot t_1} e^{-(M+F_{\max})t_1} \cdot w(t_1) - e^{-(M+F_{\max})t_2} \cdot w(t_2) \quad (1.13.6)$$

De (1.13.5), temos que

$$N_0 e^{-Mt_1} \cdot w(t_1) - N_0 e^{-Mt_1} \cdot e^{-(M+F_{\max})(t_2-t_1)} \cdot w(t_2) =$$

$$= N_0 F_{\max} \int_{t_1}^{t_2} e^{-Mt_1} \cdot e^{-(M+F_{\max})(t-t_1)} \cdot w(t) dt$$

ou seja

$$B(t_1) - B(t_2) = F_{\max} \int_{t_1}^{t_2} B(t) dt \quad (1.13.7)$$

Por outro lado, sendo $B(t) = N(t) \cdot w(t)$, então

$$\frac{dB(t)}{dt} = -(M + F_{\max})N(t) \cdot w(t) + N(t) \cdot \frac{dw(t)}{dt}.$$

Temos então

$$\begin{aligned} \Delta B = B(t_2) - B(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{dB(t)}{dt} dt = -(M + F_{\max}) \int_{t_1}^{t_2} B(t) dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} N(t) \frac{dw(t)}{dt} dt \end{aligned}$$

Assim

$$\Delta B = \int_{t_1}^{t_2} N(t) \cdot \frac{dw(t)}{dt} dt - F_{\max} \int_{t_1}^{t_2} B(t) dt - M \int_{t_1}^{t_2} B(t) dt \quad (1.13.8)$$

De (1.13.7) e (1.13.8), concluímos que

$$\int_{t_1}^{t_2} N(t) \cdot \frac{dw(t)}{dt} dt = M \int_{t_1}^{t_2} B(t) dt \quad (1.13.9)$$

Uma conclusão muito interessante, pois afirma que durante a exploração o crescimento e a mortalidade natural cancela um ao outro, independente dos parâmetros econômicos.

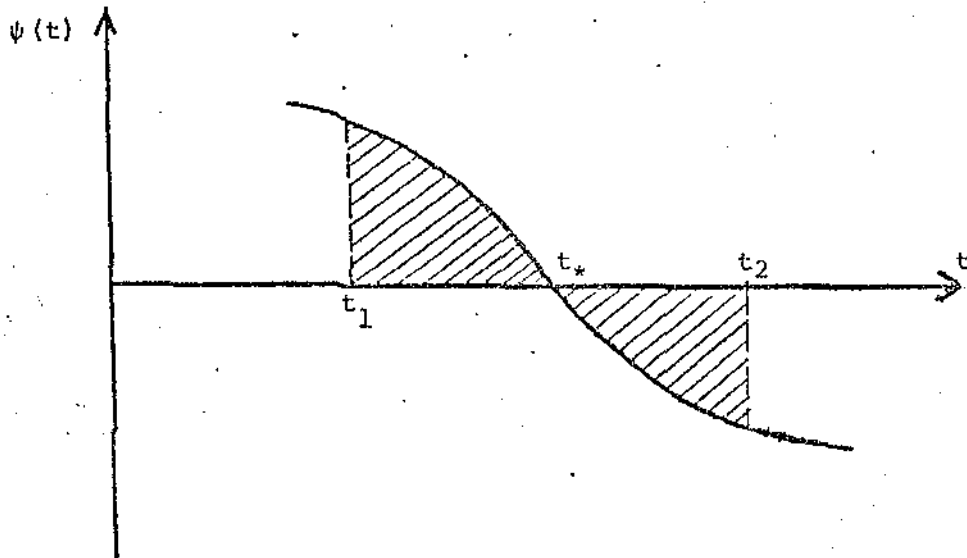
Esse resultado pode ser usado para projetarmos um método numérico para determinar o intervalo $[t_1, t_2]$.

Da equação (1.13.9) temos que

$$\int_{t_1}^{t_2} [N(t) \cdot \frac{dw(t)}{dt} - MN(t) \cdot w(t)] dt = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) dt = 0 \quad (1.13.10)$$

De (1.13.2), temos que

$$\psi(t) = e^{-(M+F_{\max})t} \cdot \left(\frac{dw(t)}{dt} - Mw(t) \right), \quad (1.13.11)$$

Fig.1.10 - Gráfico da função $\psi(t)$

A equação (1.13.10) requer que t_1 e t_2 estejam em lados opostos de t_* , de modo que

$$\int_{t_1}^{t_2} \psi(t) dt = 0$$

De (1.13.4), t_1 e t_2 devem satisfazer a equação

$$t_1 = \frac{1}{F_{\max}} \ln \frac{C \cdot e^{(M+F_{\max})t_2}}{p \cdot N_0 \cdot w(t_2)} \quad (1.13.12)$$

(1.14) Otimização dinâmica do modelo de Beverton-Holt para vários coortes.

Trataremos, agora, da otimização dinâmica para uma população

de várias coortes, com reprodução periódica, sendo que todo mês N_0 novos peixes atingem a idade k e são incorporados a população (recrutamento). Suporemos, ainda, que o custo de pesca seja desprezível, isto é, $C = 0$.

A unidade de tempo será especificada como o tempo entre dois recrutamentos sucessivos, que ocorrem em intervalos regulares.

Seja $N_k(t)$ o número de peixes na k -ésima coorte, no instante t . Vamos considerar que os peixes dessa coorte foram recrutados no k -ésimo mês.

A variação do número de peixes nessa coorte, não considerando a pesca, é

$$\frac{dN_k(t)}{dt} = -MN_k(t) \quad , \quad t \geq k \quad (1.14.1)$$

$$N_k(k) = N_0$$

A biomassa a partir do recrutamento será :

$$B_k(t) = \begin{cases} N_k(t) \cdot w(t-k) \quad , \quad t \geq k \\ 0 \quad , \quad t < k \end{cases} \quad (1.14.2)$$

Introduzindo a pesca neste modelo, seja $F(t)$ o coeficiente

de mortalidade pela pesca. Se o equipamento possuir seletividade "Knife-edge", isto é, os peixes abaixo da idade S não são capturados, mas todos os peixes com idade maior ou igual a S estão igualmente sujeitos à captura, teremos::

$$\frac{dN_k}{dt} = \begin{cases} -MN_k & , (k \leq t < k+S) \\ -(M+F(t))N_k & , t \geq k+S \end{cases} \quad (1.14.3)$$

Inicialmente, assumindo que não exista seletividade, isto é, todo peixe está, igualmente, sujeito à captura logo após seja recrutado, o valor presente (para $C = 0$ e $\delta \geq 0$), será dado por

$$PV = p \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot B(t) \cdot F(t) dt \quad (1.14.4)$$

onde

$$B(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} N_k(t) \cdot w(t-k) \quad (1.14.5)$$

Uma vez que $N_k(t) = 0$ para $k > t$, então o limite superior do somatório será $k = [t]$ (maior inteiro menor que t). O limite inferior $-\infty$ é necessário para incluir a contribuição dos coortes recrutados no passado.

A série (1.14.5) é limitada, pois para qualquer $t \geq k$, não considerando a pesca, temos

$$B_k(t) = N_0 e^{-M(t-k)} \cdot w_\infty [1 - e^{-K(t-k)}]^3 \leq C e^{-M(t-k)},$$

onde $C = N_0 w_\infty$, pois $[1 - e^{-K(t-k)}]^3$ se aproxima de 1 quando t se torna muito grande, de modo que

$$B(t) \leq C \cdot \sum_{k=-\infty}^{[t]} e^{-M(t-k)} \leq \frac{C'}{1 - e^{-M}} = C'' ,$$

(limite da soma de uma Progressão Geométrica decrescente, infinita), C' e C'' constantes. Assim, a biomassa total da população está limitada por uma constante fixa C'' . Portanto a integral (1.14.4) e a série (1.14.5) são convergentes (assumindo $\delta > 0$).

Temos então o problema

$$\text{maximizar } p \cdot \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot B(t) \cdot F(t) dt$$

$$\text{sujeito a } \frac{dN_k(t)}{dt} = -(M+F(t)) \cdot N_k(t), \quad t \geq k$$

$$N_k(k) = N_0$$

$$F(t) \geq 0 \quad (\text{variável de controle})$$

O Hamiltoniano desse problema é

$$\mathcal{H} = e^{-\delta t} \sum N_k w(t-k) \cdot F(t) - \sum \lambda_k (M + F(t)) \cdot N_k \quad (1.14.7)$$

com função de transferência

$$\sigma(t) = e^{-\delta t} \cdot \sum N_k w(t-k) - \sum \lambda_k N_k \quad (1.14.8)$$

sendo $\{\lambda_k\}$ um sistema infinito de variáveis canalizadas, tais que

$$\frac{d\lambda_k}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N_k} = -e^{-\delta t} \cdot w(t-k) \cdot F(t) + \lambda_k(t) (M + F(t)) \quad (1.14.9)$$

Derivando $\sigma(t)$ e igualando a zero (para controle linear), temos

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} = & -\delta e^{-\delta t} \sum N_k \cdot w(t-k) + e^{-\delta t} \sum w(t-k) \cdot N_k' + \\ & + e^{-\delta t} \sum N_k \cdot w'(t-k) - \sum \frac{d\lambda_k}{dt} N_k - \sum \lambda_k N_k' \end{aligned} \quad (1.14.10)$$

Substituindo (1.14.9) em (1.14.10), e simplificando, vem

$$\delta \sum N_k w(t-k) = \sum N_k [w'(t-k) - Mw(t-k)]$$

$$\frac{\sum N_k [w'(t-k) - Mw(t-k)]}{\sum N_k w(t-k)} = \delta$$

$$\frac{\sum B_k(t) \left(\frac{w'(t-k)}{w(t-k)} - M \right)}{\sum B_k(t)} = \delta \quad (1.14.11)$$

Observando a expressão (1.14.11) concluímos que a mesma não muda em consequência da pesca, pois todas as coortes são reduzidas na mesma proporção. Consequentemente a pesca continuará até que toda a população seja colhida (ou até o custo da pesca tornar a mesma não rentável). Portanto, por simplicidade matemática, consideremos uma sequência de controles-impulsivos de tempos específicos $t = T_1, T_2, \dots, T_j \dots$ com a população toda de peixes sendo colhida em cada instante T_j , $j = 1, 2, \dots$.

Como o recrutamento não é afetado pela pesca, então a biomassa cresce mais e mais com novas coortes sendo recrutados. Quando a biomassa atinge determinado valor acontecerá uma nova colheita, reduzindo-a a nível zero, e o processo é repetido.

Seja $V_1(T_j - T_{j-1})$ o biovalor entre duas colheitas consecutivas, isto é, $V_1(T_j - T_{j-1}) = p \cdot B(T_j - T_{j-1})$, sendo p o preço por

unidade de biomassa $B(T_j - T_{j-1})$.

Como todos os parâmetros permanecem constantes, então o intervalo de tempo $T_j - T_{j-1}$ entre duas colheitas devem ser iguais, isto é:

$$T_2 - T_1 = T_1 \implies T_2 = 2T_1$$

$$T_3 - T_2 = T_1 \implies T_3 = 3T_1$$

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

$$T_j - T_{j-1} = T_1 \implies T_j = jT_1$$

De modo geral, fazendo $T_1 = T$, teremos

$$T_j = jT, \quad j=1,2,\dots \quad (1.14.12)$$

Portanto $V_1(T_j - T_{j-1}) = V_1(jT - (j-1)T) = V_1(T)$, onde $V_1(T)$ denota o biovalor da população T meses depois de uma colheita completa.

Como $C = 0$ e $\delta \geq 0$, então o valor presente do lucro para todas colheitas futuras será:

$$PV = e^{-\delta T} V_1(T_1) + e^{-2\delta T} V_1(T_2 - T_1) + \dots + e^{-j\delta T} V_1(T_j - T_{j-1}) + \dots$$

$$PV = e^{-\delta T} V_1(T) + e^{-2\delta T} V_1(T) + \dots + e^{-j\delta T} V_1(T) + \dots$$

$$PV = (e^{-\delta T} + e^{-2\delta T} + \dots + e^{-j\delta T} + \dots) \cdot V_1(T)$$

Como $e^{-\delta T} < 1$ então a expressão entre parênteses é uma progressão geométrica decrescente com infinitos termos e razão $e^{-\delta T}$.

Portanto

$$PV = \frac{e^{-\delta T}}{1 - e^{-\delta T}} \cdot V_1(T) = \frac{V_1(T)}{e^{\delta T} - 1} \quad e^{\delta T} > 1$$

$$PV = \frac{V_1(T)}{e^{\delta T} - 1} \quad (1.14.13)$$

Maximizando PV, com respeito a T, encontramos o tempo ótimo entre duas colheitas sucessivas.

$$\frac{dPV}{dT} = \frac{V_1'(T) \cdot (e^{\delta T} - 1) - \delta \cdot e^{\delta T} V_1(T)}{(e^{\delta T} - 1)^2} = 0$$

$$\boxed{\frac{V_1'(T)}{V_1(T)} = \frac{\delta}{1 - e^{-\delta T}}} \quad (1.14.14)$$

O ponto de máximo está garantido, pois

$$B(t) > 0 \quad \text{para } t \in (0, +\infty)$$

$$B(t) = 0 \quad \text{se } t \notin (0, +\infty)$$

A fórmula (1.14.14) é denominada *Fórmula de Faustmann* (1.849), e foi originalmente usada na exploração florestal.

(2) OTIMIZAÇÃO DA FUNÇÃO VALOR PRESENTE DO LUCRO NA CRIAÇÃO DE MACHOS ALBINOS DA TILÁPIA DO NILO, EM PSICULTURA (COORTE ÚNICA), NÃO CONSIDERANDO DESPESAS COM RAÇÃO E MÃO-DE-OBRA.

(2.1) INTRODUÇÃO.

Nesta seção apresentaremos os resultados de um experimento sobre a criação de machos albinos da Tilápia do Nilo, em Psicicultura, no Centro de Pesquisas Ictiológicas do DNOCS, em Pentecoste - CE.

O experimento constou da criação de 350 desses peixes num viveiro natural com área inundada de 350 m². Mensalmente em uma amostra de 15% desses peixes eram tomadas medidas do comprimento e peso, com o fim específico de determinar as curvas de crescimento de von Bertalanffy e curva de biomassa natural.

(2.2) DESCRIÇÃO DO EXPERIMENTO.

A Tilápia do Nilo é originária da Costa do Marfim - África, sendo introduzida no Brasil em 1971, no Nordeste brasileiro, pelo DNOCS. Através de experiências obteve-se a tilápia albina, de maior valor econômico.

A escolha dos machos albinos é justificada pela rapidez do

seu crescimento tanto em comprimento quanto em peso (duas vezes maior que o das fêmeas).

As medidas de comprimento obtidas foram as de comprimento total, isto é, distância anterior ao focinho à posterior da nadadeira caudal.

Os peixes foram tratados com ração balanceada para engorda de galináceos.

Os resultados obtidos do experimento, decorridos 244 dias de estocagem, estão na Tabela I abaixo.

TABELA I

Dados obtidos da Tabela II do Boletim Técnico do DNOCS, Fortaleza-CE, 41(1), 55-83, jan./jun. 1983, sobre o cultivo de machos albinos da Tilápia do Nilo, *SAROTHERODON NILOTICUS*, em viveiro de 350m², no Centro de Pesquisas Ictiológicas do DNOCS, Pentecoste - CE.

	t	N(t)	comp. médio L(t)	Peso médio w(t)	Biomassa B(t)	Cons. Ração R(t)
	(mês)		(cm)	(g)	(g)	(g)
25.08.81	0	350	11,000	26,000	9.100	-
25.09.81	1	350	15,000	59,500	20.825	12.265
27.10.81	2	350	17,400	105,400	36.890	27.972
27.11.81	3	350	20,500	200,000	70.000	49.788
29.12.81	4	350	22,700	239,500	83.825	56.700
28.01.82	5	350	25,300	364,300	127.505	65.390
26.02.82	6	350	27,400	421,700	147.595	95.625
26.03.82	7	346	28,000	476,000	164.696	106.272
27.04.82	8	346	29,300	488,200	168.900	128.463

(2.3) DETERMINAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CRESCIMENTO DE von BERTALANFFY

(2.3.1) Equação de crescimento em comprimento.

A partir das medidas de comprimento da Tabela I, podemos construir a Tabela II para obtenção da transformação de Ford-Walford.

$$l(t+1) = a + bl(t) \quad (2.3.1)$$

TABELA II

t (mês)	l(t) (cm)	l(t+1) (cm)
0	11,000	15,000
1	15,000	17,400
2	17,400	20,500
3	20,500	22,700
4	22,700	25,300
5	25,300	27,400
6	27,400	28,000
7	28,000	29,300

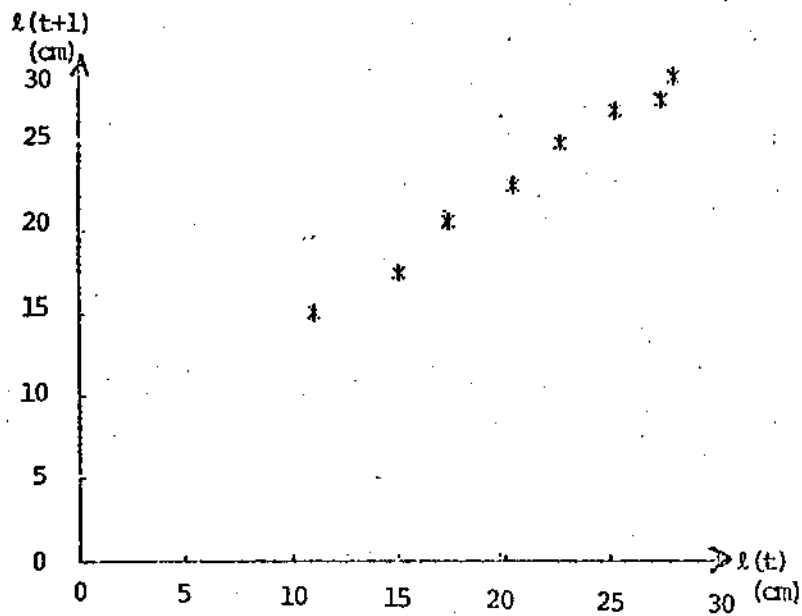


Fig.2.1 - Pontos de comprimento pelo comprimento um mês anterior, obtidos na criação de machos albinos da Tilápia do Nilo. (Pontos de Ford-Walford).

Determinamos a e b em (2.3.1) através de Regressão Linear.

De (Ap. 1.1), (Ap. 1.2) e (Ap. 2.1), obtemos:

$$a = 5,392$$

$$b = 0,852$$

$$r = 0,995$$

que substituídos em (2.3.1), vem

$$l(t+1) = 5,392 + 0,852l(t)$$

De (1.2.7), (1.4.2) e (1.4.3) temos respectivamente

$$l(t) = L_{\infty} [1 - e^{-K(t-t_0)}] \quad (a)$$

$$L_{\infty} = \frac{a}{1-b} \text{ (comprimento limite assintótico)}$$

e

$$K = -\ln b \text{ (coeficiente de crescimento)}$$

Como $a = 5,392$ e $b = 0,852$, então

$$L_{\infty} = \frac{5,392}{1-0,852} = 36,432 \text{ (cm)} \quad (b)$$

$$K = -\ln(0,852) = 0,16 \quad (c)$$

Da equação (1.2.7), temos:

$$t_0 = t + \frac{1}{K} \cdot \ln \frac{L_{\infty} - l(t)}{L_{\infty}} \quad (2.3.2)$$

Da tabela II, temos:

$$t = 0 \implies l(0) = 11,000 \quad (d)$$

Substituindo (b), (c) e (d) em (2.3.2), vem:

$$t_0 = 0 + \frac{1}{0,16} \ln \left(\frac{36,432 - 11,000}{36,432} \right) = -2,25 \text{ (mês)} \quad (e)$$

Substituindo (b), (c) e (e) em (a), vem:

$$l(t) = 36,432 \cdot [1 - e^{-0,16(t+2,25)}] \quad (\text{cm}) \quad (2.3.2)$$

A função $l(t)$ é a função que representa o crescimento em comprimento, do macho albino da Tilápia do Nilo.

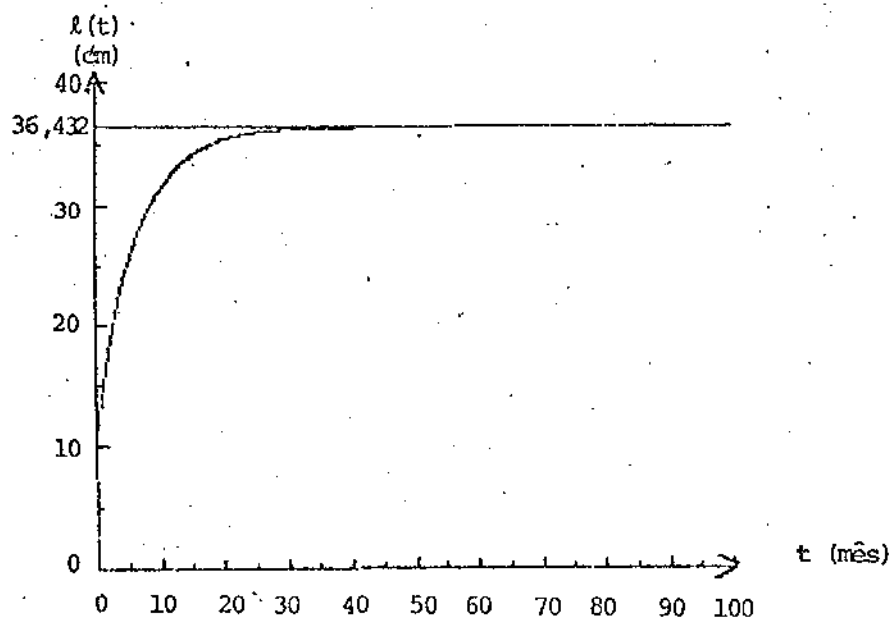


Fig.2.2 - Curva de crescimento, em comprimento, em relação ao tempo, obtida na criação de machos albinos da Tilápia do Nilo.

(2.3.2) Equação de crescimento em peso.

De (1.5.1), (1.5.2) e (1.5.3), temos respectivamente

$$w(t) = \phi [\ell(t)]^\theta \quad (2.3.3)$$

$$\ln w(t) = \ln \phi + \theta \ln(\ell(t))$$

e

$$y = a + b \cdot x ,$$

onde

$$y = \ln w(t)$$

$$a = \ln \phi$$

$$b = \theta$$

$$x = \ln(\ell(t)) .$$

a e b são determinados através de Regressão Linear usando dados de $\ell(t)$ e $w(t)$ da tabela III construída a partir da tabela I.

TABELA III

t (mês)	$l(t)$ (cm)	$w(t)$ (g)
0	11,000	26,000
1	15,000	59,500
2	17,400	105,400
3	20,500	200,000
4	22,700	239,500
5	25,300	364,300
6	27,400	421,700
7	28,000	476,000
8	29,300	488,200

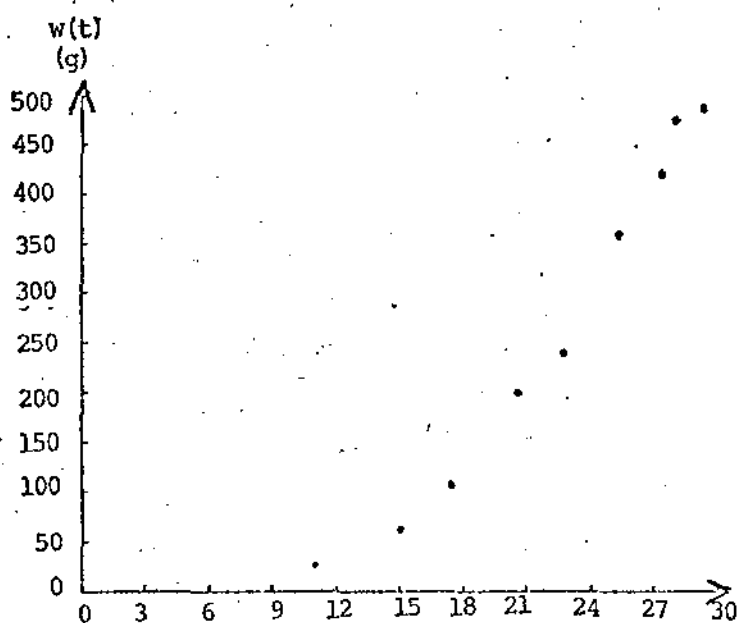


Fig.2.3 - Pontos do peso em relação ao comprimento, obtidos na criação de machos albinos da Tilápia do Nilo. (Tab.III).

De acordo com as expressões (Ap. 1.1), (Ap. 1.2) e (Ap. 2.1), temos:

$$a = -4,232$$

$$b = 3,113$$

$$r = 0,997$$

$$\text{sendo } a = \ln \phi \Rightarrow \phi = e^a \Rightarrow \phi = e^{-4,232} = 0,015 \quad (a)$$

$$e \quad b = \theta \Rightarrow b = 3,113 \quad (b)$$

Substituindo (a) e (b) em (2.3.3), vem:

$$w(t) = 0,015 \cdot [l(t)]^{3,113} \quad (c)$$

Substituindo (2.3.2) em (c), vem:

$$w(t) = 0,015 \cdot \{36,432 \cdot [1 - e^{-0,16(t+2,25)}] \}^{3,113}$$

Portanto

$$w(t) = 1088,900 [1 - e^{-0,16(t+2,25)}]^{3,113} \text{ (g)}$$

ou

$$w(t) = 1,089 [1 - e^{-0,16(t+2,25)}]^{3,113} \text{ (Kg)} \quad (2.3.4)$$

A função acima é a função que representa o crescimento em peso do macho albino da Tilápia do Nilo.

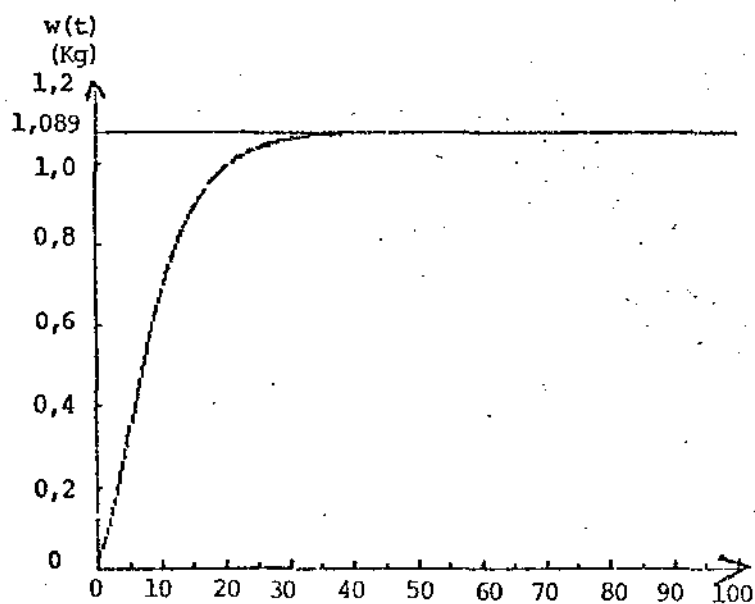


Fig.2.4 - Curva de crescimento, em peso, em relação ao tempo, obtida na criação de machos albinos da Tilápia do Nilo.

Observe que $\theta = 3,113$ está bem próximo do valor calculado analiticamente em (1.2.2), que era igual a 3. Observe, também, que o peso limite do macho albino da Tilápia do Nilo $w_{\infty} = 1,089$ (Kg), enquanto seu comprimento limite $L_{\infty} = 36,432$ (cm).

(2.4) DETERMINAÇÃO DO PONTO DE INFLEXÃO DA FUNÇÃO $w = w(t)$.

O ponto de inflexão é dado pela expressão (1.2.3), substituindo o 3 calculado analiticamente por 3,113 obtido empiricamente.

Então

$$t^* = -2,25 + \frac{1}{0,16} \ln(3,113) = 4,847 \text{ (mês)}$$

e

$$w(t^*) = 1,089 [1 - e^{-0,16(t^*+2,25)}] 3,113$$

ou seja,

$$w(t^*) = 0,326 \text{ (Kg)}.$$

Em $t^* = 4,847$ (mês) temos a maior variação do crescimento em peso do macho albino da Tilápia do Nilo, sendo um importante parâmetro na otimização de uma pesca comercial.

(2.5) FUNÇÃO BIOMASSA NATURAL.

A função biomassa natural é dada por (1.8.1), ou seja,

$$B(t) = N(t) \cdot w(t)$$

Como no experimento s3o morreram 4 peixes, a taxa de mortalidade M 3e desprez3vel ($M = 0$).

Temos, ent3o, de (1.7.2) que

$$N(t) = N_0 e^{-Mt} = N_0 = 350 \text{ peixes}$$

e sendo $w(t) = 1,089 [1 - e^{-0,16(t+2,25)}]^{3,113}$ (Kg), ent3o

$$B(t) = 381,15 [1 - e^{-0,16(t+2,25)}]^{3,113} \text{ (Kg)}$$

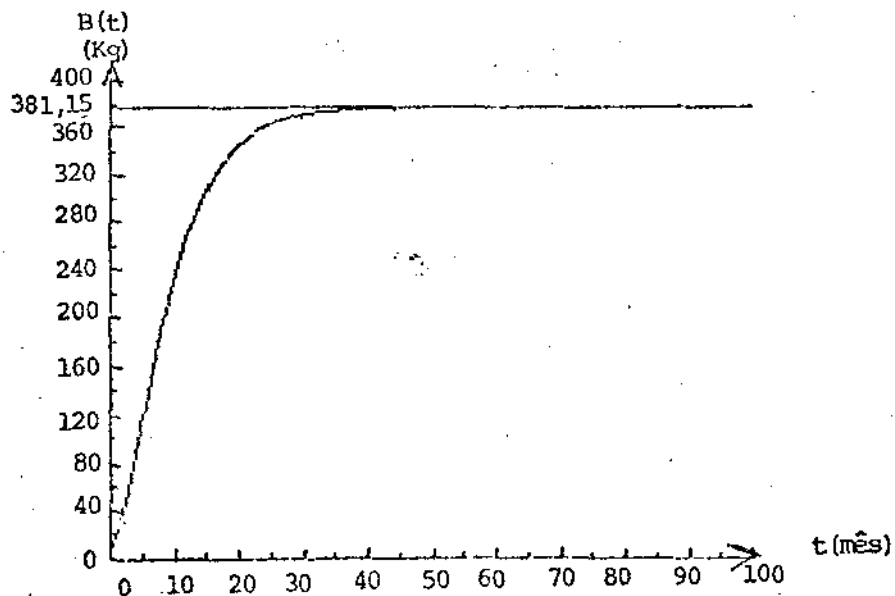


Fig.2.5 - Curva de biomassa natural em rela33o ao tempo, obtida na cria33o de machos albinos da Til3pia do Nilo.

Observando o gráfico percebemos que $B(t)$ é sempre crescente, atingindo seu limite em $t_* \rightarrow +\infty$. Assim, para $t_* \rightarrow +\infty \Rightarrow B(t_*) \rightarrow B_\infty = 381,15$ (Kg).

(2.6) TORNANDO O PROBLEMA MAIS REAL.

A taxa de mortalidade mais real às condições brasileiras é $M = 0,02$, isto é, numa criação de machos albinos da Tilápia do Nilo 2% dos peixes morrerão em cada mês. Então, de (1.7.2), teremos:

$$N(t) = 350 \cdot e^{-0,02t} \quad (2.6.1)$$

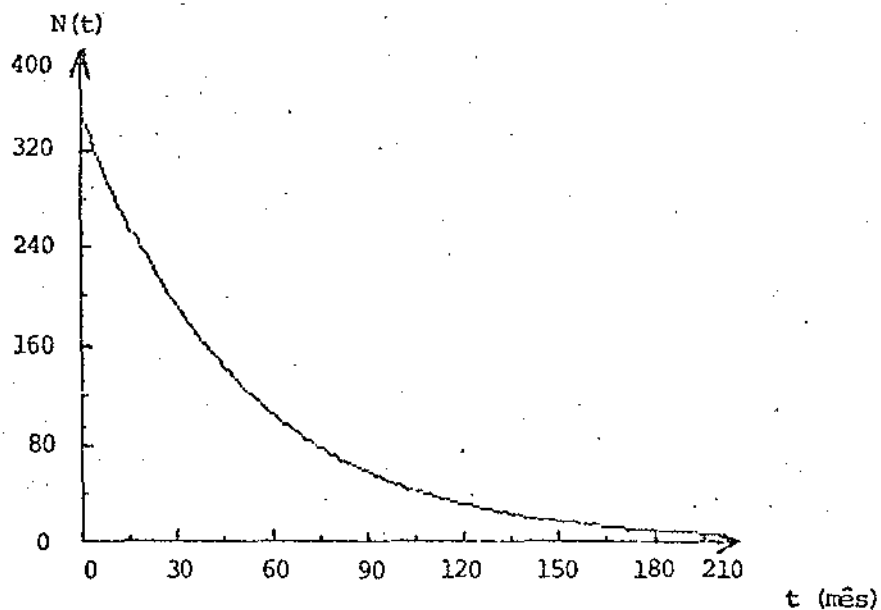


Fig.2.6 - Curva de variação do número de peixes em relação ao tempo, obtida na criação de machos albinos da Tilápia do Nilo. ($M = 0,02$).

A nova função biomassa natural passa a ser:

$$B(t) = 381,15 \cdot e^{-0,02t} \cdot [1 - e^{-0,16(t+2,25)}]^{3,113} \text{ (Kg)} \quad (2.6.2)$$

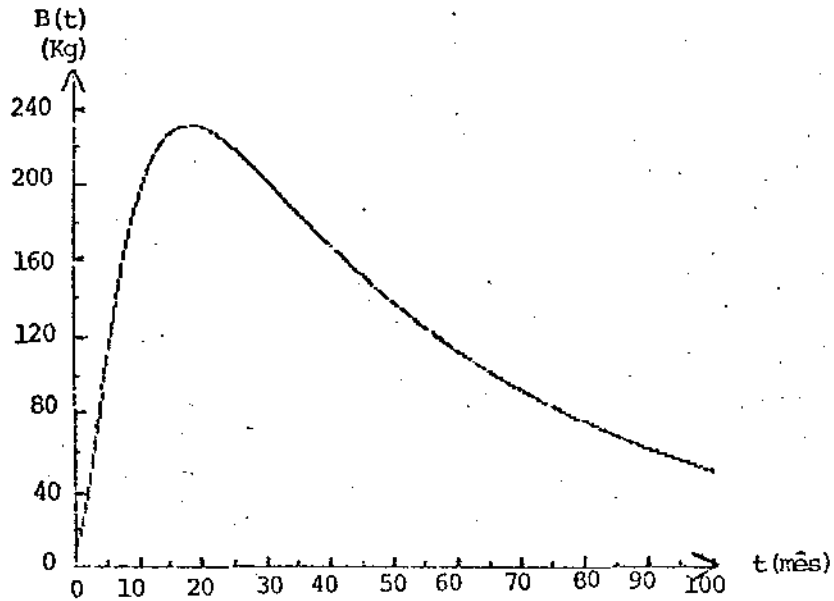


Fig.2.7 - Curva de biomassa natural em relação ao tempo, obtida na criação de machos albinos da Tilápia do Nilo ($M = 0,02$)

(2.7) DETERMINAÇÃO DO PONTO DE MÁXIMO DA FUNÇÃO BIOMASSA NATURAL

O ponto de máximo t_* é dado por (1.8.2), ou seja,

$$\frac{w'(t_*)}{w(t_*)} = M \quad (2.7.1)$$

sendo $w(t) = 1,089 [1 - e^{-0,16(t+2,25)}]^{3,113}$ (a)

$$w'(t) = 0,498 \times 1,089 [1 - e^{-0,16(t+2,25)}]^{2,113} .$$

$$\cdot e^{-0,16(t+2,25)} \quad (b)$$

Substituindo (a) e (b) em (2.7.1) e simplificando, vem:

$$\frac{0,498}{e^{0,16(t_*+2,25)} - 1} = 0,02$$

ou seja,

$$t_* = 18,089 \text{ (mês)}, \text{ ponto máximo, e de (2.6.2), temos,}$$

$$B(t_*) = B(18,089) = 234,824 \text{ (Kg)},$$

quantidade máxima de biomassa obtida na presente criação de machos albinos da Tilápia do Nilo, considerando $M = 0,02$.

(2.8) DETERMINAÇÃO DO INSTANTE ÓTIMO DE PESCA t_δ , SENDO δ UMA TAXA INSTANTÂNEA DE DEPRECIÇÃO DO CAPITAL.

Supondo que a força de pesca seja calculada considerando um único pescador, em um barco, trabalhando com uma tarrafa (aparelho de pesca) durante um período padrão em que seja possível acionar o aparelho 445 vezes (esse número será justificado mais adiante), de

modo que uma unidade de esforço seja igual ao produto de um barco pelo período padrão.

Sendo $C = \text{Cr\$ } 100.000,00$ o custo de uma unidade de esforço e $p = \text{Cr\$ } 4.000,00$ o preço por unidade de biomassa (Kg) da Tilápia do Nilo, então o quociente $\frac{C}{p} = \frac{100.000}{4.000} = 25$ é pequeno se comparado com a biomassa máxima $B(t_*) = 234,824$ (Kg), isto é, $\frac{C}{p} = 0,11 \cdot B_\infty$. Portanto a pesca ótima pode ter início em t_δ dado pela expressão (1.12.6), isto é,

$$\frac{w'(t_\delta)}{w(t_\delta)} = M + \delta$$

segundo o mesmo raciocínio utilizado em (2.7.1), temos

$$\frac{0,498}{e^{0,16(t_\delta + 2,25)} - 1} = 0,02 + \delta$$

ou seja,

$$t_\delta = -2,25 + \frac{1}{0,16} \ln \frac{0,518 + \delta}{0,02 + \delta}$$

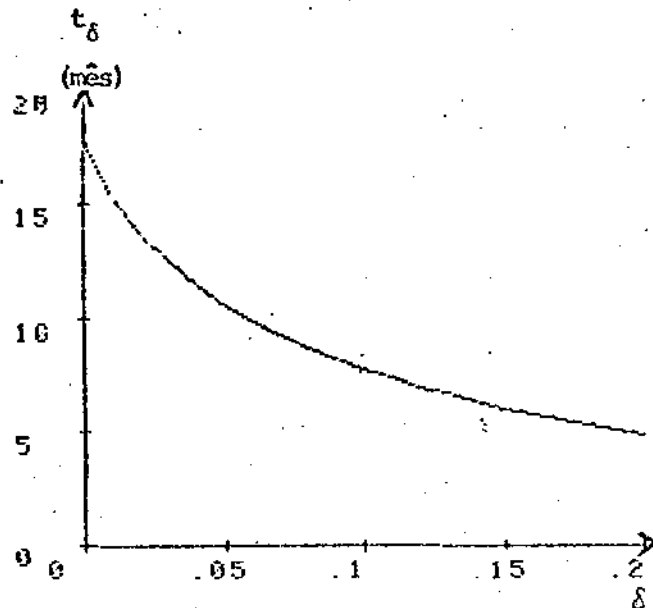


Fig.2.8 - Curva de tempo ótimo de pesca em relação à taxa de instantânea de depreciação de capital, obtida na criação de machos albinos da Tilápia do Nilo ($M = 0,02$).

Considerando um esforço de pesca infinito, com custo $C=0$ e sendo $\delta \geq 0$, de modo que a expressão (1.12.6) continue válida, então o rendimento ótimo de biomassa será dado pela expressão:

$$Y(t_\delta) = B(t_\delta)$$

ou seja

$$Y(t_\delta) = 381,15 e^{-0,02t_\delta} \cdot [1 - e^{-0,16(t_\delta+2,25)}]^{3,113} \quad (\text{Kg}) \quad (2.8.2)$$

Supondo que o preço por quilo de biomassa seja $p = \text{Cr\$ } 4.000,00$ então o presente valor do lucro será dado por (Ap. 5.3), ou seja:

$$PV = 4.000 \cdot e^{-\delta t} \cdot Y(t_{\delta}) \quad (2.8.3)$$

Discretizando alguns valores de δ , podemos construir a tabela abaixo.

TABELA IV

δ	t_{δ} (mês)	$Y(t_{\delta})$ (Kg)	PV (Cr\$)
0	18,089	234,824	939.296,00
0,05	10,835	203,783	474.186,20
0,06	10,110	195,833	427.073,71
0,10	7,994	165,883	298.323,08
0,15	6,303	134,676	209.289,04
0,20	5,143	110,105	157.453,29

(2.9) ANÁLISE DOS RESULTADOS.

Os resultados obtidos na criação de machos albinos da Tilápia do Nilo, não considerando despesas com ração e mão-de-obra podem ser considerados bons nos seguintes aspectos: (a) a precocidade do peixe em atingir o momento de captura; (b) o baixo índice de mortalidade e (c) a boa aproximação dos valores dos parâmetros de von Bertalanffy calculados empiricamente para aqueles determinados

analiticamente.

Observando, ainda, a tabela anterior percebemos que crescendo δ , t_δ decresce, decrescendo o rendimento de biomassa $Y(t_\delta)$ e decrescendo conseqüentemente o presente valor do lucro PV.

(3) OTIMIZAÇÃO DA FUNÇÃO VALOR PRESENTE DO LUCRO NA CRIAÇÃO DE MACHOS ALBINOS DA TILÁPIA DO NILO, EM PSICULTURA (COORTE ÚNICA), CONSIDERANDO DESPESAS COM RAÇÃO E MÃO-DE-OBRA.

(3.1) INTRODUÇÃO.

Nesta seção estamos preocupados em otimizar a função valor presente do lucro na criação de machos albinos da Tilápia do Nilo considerando despesas com ração, mão-de-obra e uma taxa instantânea de depreciação de capital $\delta = 0,06$ ao mês. Para isso deveremos fazer uso de programas computacionais.

(3.2) FUNÇÃO LUCRO.

A função lucro é dada pela diferença entre as receitas e as despesas. Para o nosso problema o lucro tem o seguinte aspecto:

$$\text{Lucro} = \left(\begin{array}{l} \text{Receita com} \\ \text{a biomassa} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \text{Despesas acumula-} \\ \text{das com ração} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \text{Despesas acumuladas} \\ \text{com mão-de-obra} \end{array} \right)$$

e a função lucro será:

$$L(t) = p(t) \cdot B(t) - \int_0^t c(\tau) \cdot R(\tau) d\tau - \int_0^t H(\tau) \cdot d\tau \quad (3.2.1)$$

onde:

$L(t)$: função lucro em (Cr\$)

$p(t)$: função preço por quilo de biomassa (Cr\$)

$B(t)$: função biomassa (Kg).

$c(t)$: função custo por quilo de ração (Cr\$)

$R(t)$: função consumo de ração (Kg)

$H(t)$: gasto com mão-de-obra (Cr\$)

Através de pesquisas de mercado em Campinas - SP, mês de novembro/84, e considerando uma inflação que provoque uma elevação - no índice setorial de preços de 5% ao mês, chegamos às seguintes - funções:

$$p(t) = 4.000 \cdot e^{0,05t} \quad (a)$$

$$c(t) = 500 \cdot e^{0,05t} \quad (b)$$

$$H(t) = 10.000 \cdot e^{0,05t} \quad (c) \quad (\text{gastos direto com a piscicultura}).$$

(3.3) DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO CONSUMO DE RAÇÃO.

Da tabela I podemos montar a tabela V abaixo para mostrar a relação que existe entre a biomassa natural e o consumo de ração (considerando um decréscimo de 2% em relação ao original devido à taxa de mortalidade).

TABELA V

t (mês)	B(t) (Kg)	R(t) (ração) (Kg)
1	22,263	12,042
2	40,180	26,875
3	61,348	46,880
4	83,450	52,341
5	105,746	59,167
6	127,015	84,812
7	146,585	92,388
8	164,072	109,469

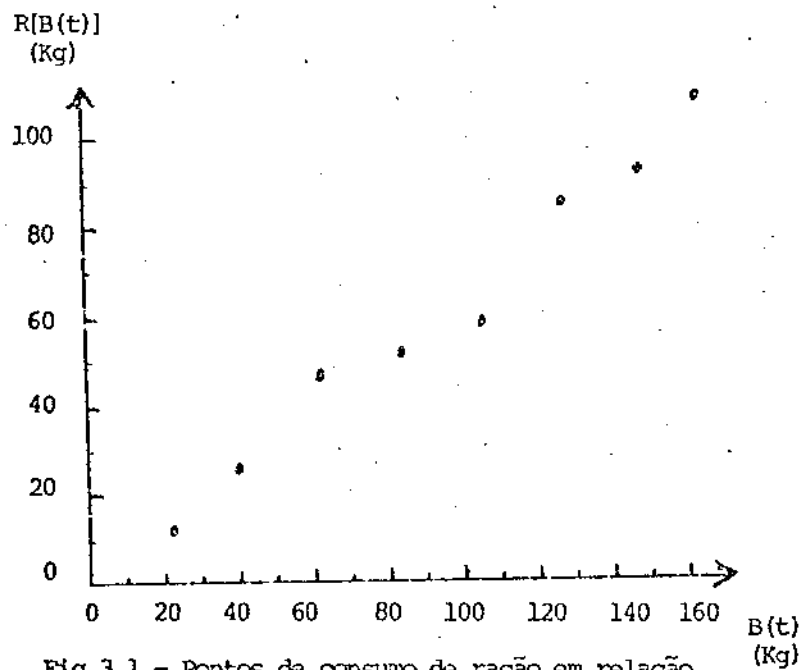


Fig.3.1 - Pontos de consumo de ração em relação à biomassa, obtida na criação de machos albinos da Tilápia do Nilo do Nilo.

(M = 0,02)

Observando o gráfico da figura 3.1 percebemos que existe, aproximadamente, uma relação linear entre o consumo de ração e a biomassa natural, isto é,

$$R[B(t)] = a + b \cdot B(t) \quad (3.3.1)$$

De (Ap. 1.1), (Ap. 1.2) e (Ap. 2.1), temos:

$$a = -0,141 \quad (1)$$

$$b = 0,646 \quad (2)$$

$$r = 0,989$$

Substituindo (1), (2) e (2.6.2) em (3.3.1) e simplificando, temos:

$$R(t) = -0,141 + 246,223 e^{-0,02t} \cdot [1 - e^{-0,16(t+2,25)}]^{3,113} \text{ (Kg)} \quad (3.3.2)$$

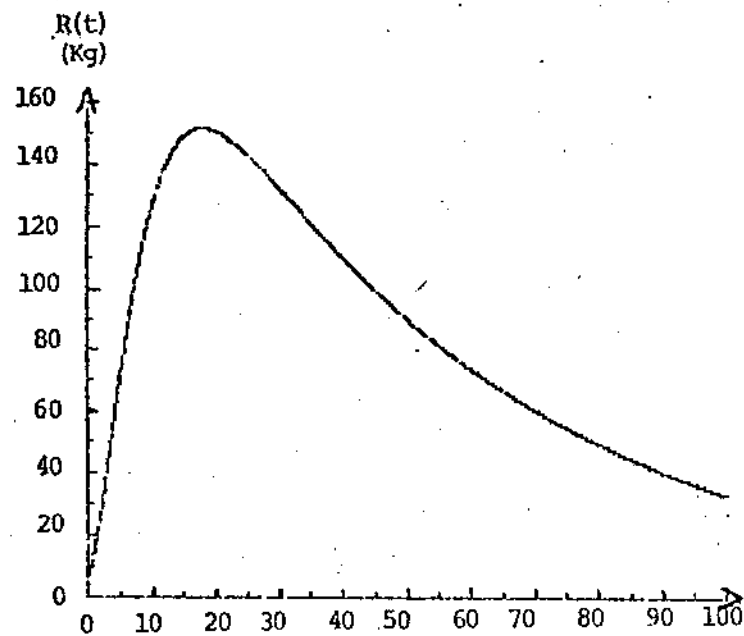


Fig.3.2 - Curva de consumo de ração em relação ao tempo, obtida na criação de machos albinos da Tilápia do Nilo ($M = 0,02$)

Substituindo (a), (b), (c) e (3.3.2) em (3.2.1) e simplificando, temos:

$$L(t) = 1.524.600 e^{0,03t} \cdot [1 - e^{-0,16(t+2,25)}]^{3,113} - 198590(1 - e^{0,05t}) - 123111,5 \int_0^t e^{0,05\tau} [1 - e^{-0,16(\tau+2,25)}]^{3,113} d\tau \quad (3.3.3)$$

Considerando uma taxa instantânea de depreciação de capital $\delta = 0,06$ ao mês, o valor presente do lucro será dado por

$$PV = e^{-0,06t} L(t) \quad (3.3.4)$$

Para maximizar PV fazemos uso do programa computacional de "maximização de funções por eliminação de intervalos", no final dessa seção.

(3.4) RESULTADOS.

O programa foi rodado para dois valores iniciais diferentes, obtendo uma pequena diferença entre os resultados, conforme a tabela abaixo.

TABELA VI

VALORES INICIAIS			RESULTADOS OBTIDOS	
T_1	T_4	D	T_{MAX}	PV_{MAX}
0	15	0,01	8,980	379.658,66
0	10	0,01	8,989	379.659,21

(3.5) ANÁLISE DOS RESULTADOS.

A pequena variação entre os resultados obtidos não compromete o trabalho, pois a causa se deve ao critério de parada do programa. Os resultados obtidos para T_{MAX} e PV_{MAX} estão coerentes com aqueles obtidos na tabela IV para $\delta = 0,06$ onde não foi levado em consideração o consumo de ração e mão-de-obra.

```

10 REM "MAXIMIZACAO DA FUNCAO F
V"
20 DISP "DE-ME OS VALORES DE X1
, X4 e D"
30 INPUT X1
40 INPUT X4
50 INPUT D
60 K=0
70 REM "DETERMINACAO DE X2"
80 X2=X1+.5*(X4-X1-D)
90 Z=X2
100 GOSUB 480
110 GOSUB 420
120 Y2=H
130 REM "DETERMINACAO DE X3"
140 X3=X2+D
150 Z=X3
160 GOSUB 480
170 GOSUB 420
180 Y3=H
190 REM "COMPARACAO ENTRE Y2 e
Y3"
200 IF Y2<Y3 THEN GOTO 260
210 IF Y2=Y3 THEN GOTO 330
220 REM "ELIMINAR O INTERVALO EN
- TRE X3 e X4"
230 X4=X3
240 GOSUB 270
250 REM "ELIMINAR O INTERVALO EN
- TRE X1 e X2"
260 X1=X2
270 K=K+1
280 REM "VERIFICACAO DO NUMERO D
E INTERACOES"
290 IF K>200 THEN GOTO 390
300 REM "VERIFICACAO DO COMPRIME
N TO DO INTERVALO"
310 IF X4-X1>3#D THEN GOTO 80
320 REM "CALCULAR O PONTO MEDIO
ENTRE X2 e X3"
330 X5=.5*(X2+X3)
340 Z=X5
350 GOSUB 420
360 Y5=H
370 DISP "Xmax=";X5;"Ymax=";Y5
380 STOP
390 DISP "K>200"
400 END
410 REM "FUNCAO A SER MAXIMIZADA
"
420 H1=EXP(-(.06#Z))
430 H2=1524600#EXP(.03#Z)*(1-EXP
(-(.16*(Z+2.25))))^3.113
440 H3=198590*(1-EXP(.05#Z))-5
450 H=H1*(H2+H3)
460 RETURN
470 REM "CALCULO DA INTEGRAL USA
N DO QUADRATURA GAUSSIANA
"
480 X1=0

```

```

490 X2=Z
500 S=0
510 REM "RAIZES DO POLINOMIO DE
LEGENRE DE GRAU 5"
520 X(0)=-.932
530 X(1)=-.661
540 X(2)=-.239
550 X(3)=-X(2)
560 X(4)=-X(1)
570 X(5)=-X(0)
580 REM "COEFICIENTES CORRESPON-
DENTES"
590 A(0)=.171
600 A(1)=.361
610 A(2)=.468
620 A(3)=A(2)
630 A(4)=A(1)
640 A(5)=A(0)
650 FOR I=0 TO 5 STEP 1
660 X=X(I)
670 GOSUB 730
680 S=S+A(I)*F
690 NEXT I
700 S=.5*(X2-X1)*S
710 RETURN
720 REM "FUNCAO A SER INTEGRADA"
730 F1=123111.5#EXP(.015*((X2-X1
)*X+X2*X1))
740 F2=(1-EXP(-(.08*((X2-X1)*X+X
2+X1+4.5))))^3.113
750 F=F1*F2
760 RETURN

```

```

RUN
DE-ME OS VALORES DE X1, X4 e D
?
0
?
15
?
0.01
Xmax= 8.98826746055 Ymax=
379658.657561

```

```

RUN
DE-ME OS VALORES DE X1, X4 e D
?
0
?
10
?
0.01
Xmax= 8.989021497 Ymax=
379659.209857

```

(4) CRIAÇÃO DE MACHOS ALBINOS DA TILÁPIA DO NILO EM LAGO NATURAL
(COORTE ÚNICA).

(4.1) INTRODUÇÃO.

A criação de peixes em lago natural pode deparar com um problema até antes não enfrentado em piscicultura artificial, que é a aplicação de um esforço infinito no momento da despesca.

Nesta seção estamos interessados em determinar um intervalo de tempo ótimo $[t_1, t_2]$ para efetuarmos a despesca do lago, quando dispomos de um esforço de pesca F_{\max} finito. Com os valores de t_1 e t_2 podemos calcular o presente valor do lucro que é nosso objetivo final.

(4.2) DETERMINAÇÃO DO INTERVALO ÓTIMO DE PESCA $[t_1, t_2]$ PARA F_{\max}
FINITO

Vamos supor que a criação de peixes em um lago natural seja feita para uma única coorte, não havendo despesas com ração e mão-de-obra e ainda, que a taxa instantânea de depreciação de capital δ seja igual a zero. Não dispondo de um esforço infinito no momento da despesca, então a política ótima será aplicarmos um esforço $F(t) = F_{\max}$ (finito), tal que:

$$F(t) = \begin{cases} F_{\max} & \text{para } t \in [t_1, t_2], \quad t_* \in [t_1, t_2] \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

t_* : ponto de máximo da função biomassa,

t_1 e t_2 devem satisfazer (1.13.10), ou seja,

$$\int_{t_1}^{t_2} \psi(t) dt = 0 \quad (4.2.1)$$

com

$$\psi(t) = e^{-(M+F_{\max}) \cdot t} \cdot \left[\frac{dw(t)}{dt} - M \cdot w(t) \right] \quad (a)$$

sendo $M = 0,02$ (taxa de mortalidade natural) (b)

e

$$w(t) = 1,089 \left[1 - e^{-0,16(t+2,25)} \right] 3,113 \text{ (Kg)} \quad (c)$$

Substituindo (b) e (c) em (a) e simplificando, vem:

$$\psi(t) = 21,78 e^{-(0,02+F_{\max}) \cdot t} \cdot \left[1 - e^{-0,16(t+2,25)} \right] 2,113 \cdot$$

$$\cdot \left[25,904 e^{-0,16(t+2,25)} - 1 \right] \quad (4.2.2)$$

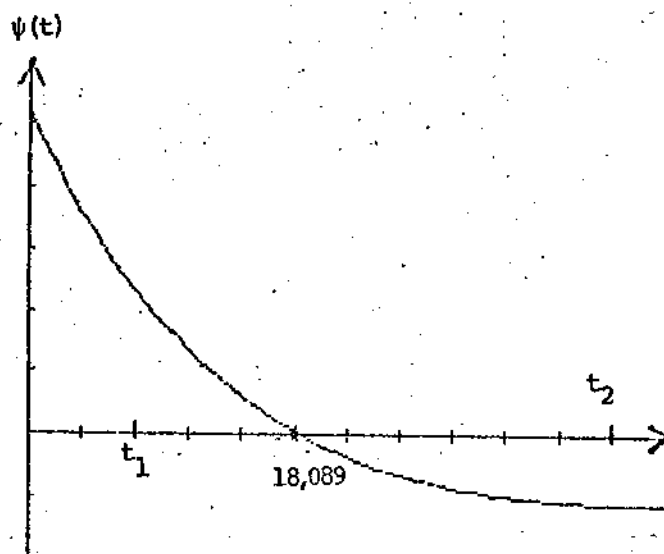


Fig. 4.1 - Gráfico da função $\psi(t)$ para o cálculo do intervalo ótimo de pesca $[t_1, t_2]$.

Por outro lado t_1 e t_2 devem satisfazer (1.13.12), ou seja,

$$t_1 = \frac{1}{F_{\max}} \cdot \ln \frac{C \cdot e^{(M + F_{\max}) \cdot t_2}}{p \cdot N_0 \cdot w(t_2)} \quad (4.2.3)$$

sendo $M = 0,02$ (taxa de mortalidade natural) (b)

$N_0 = 350$ (peixes) (c')

$w(t_2) = 1,089 \cdot [1 - e^{-0,16(t_2 + 2,25)}]^{3,113}$ (Kg) (d)

$p = \text{Cr\$ } 4.000$ (preço por quilo da Tilápia do Nilo) (e)

Substituindo (b), (c'), (d) e (e) em (4.2.3) e simplificando,

vem:

$$t_1 = \frac{1}{F_{\max}} \cdot \ln \frac{C \cdot e^{(0,02 + F_{\max}) \cdot t_2}}{1524600 \cdot [1 - e^{-0,16(t_2 + 2,25)}]^{3,113}} \quad (4.2.4)$$

Com os valores de t_1 e t_2 satisfazendo (4.2.1) e (4.2.4) podemos calcular o presente valor do lucro dado por (1.13.1), ou seja

$$PV = J(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} [p \cdot N(t) \cdot w(t) - C] F_{\max} dt = \int_{t_1}^{t_2} \phi(t, t_1) dt$$

$$\text{com } \phi(t, t_1) = [p \cdot N(t) \cdot w(t) - C] \cdot F_{\max} \quad (4.2.5)$$

$$\text{Sendo } N(t) = 350 e^{-0,02t_1} \cdot e^{-(0,02 + F_{\max}) \cdot (t - t_1)}$$

$$\text{e } w(t) = 1,089 \cdot [1 - e^{-0,16(t + 2,25)}]^{3,113} \text{ (Kg) ,}$$

que substituídos em (4.2.5), produz:

$$\phi(t, t_1) = \{ 1.524.600 e^{F_{\max} t_1} \cdot e^{-(0,02 + F_{\max}) \cdot t} \cdot [1 - e^{-0,16(t + 2,25)}]^{3,113} - C \} F_{\max} \quad (4.2.6)$$

(4.3) CÁLCULO DA TAXA F_{MAX} DE MORTALIDADE POR PESCA.

Convencionando que uma unidade de esforço seja um pescador trabalhando com uma tarrafa, de raio $R=1\text{m}$, num lago de área $A = 350\text{m}^2$, tendo como unidade padrão de tempo o período gasto para que a tarrafa seja acionada 445 vezes. Seja o custo por unidade de esforço $C = \text{Cr\$ } 100.000,00$ e que somente 75% dos peixes sejam capturados em cada acionamento do aparelho.

De (1.6.4), temos:

$$F = \frac{a \cdot q}{A \cdot t}$$

onde

$$a = \pi R^2 = \pi \cdot 1^2 (\text{m}^2) = \pi (\text{m}^2)$$

$$A = 350 \text{ m}^2$$

$$t = 1 \text{ período padrão}$$

$$q = 445 \cdot 0,75 = 333,75$$

$$\text{Portanto } F_{\text{max}} = \frac{\pi \times 333,75}{350 \times 1} \approx 3,0$$

De posse desse resultado e considerando as expressões (4.2.1), (4.2.4) e (4.2.5) elaboramos um programa computacional, que está no final dessa seção, para o cálculo do intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ de aplicação do esforço de pesca F_{max} e do presente

valor do lucro PV.

(4.4) ANÁLISE DOS RESULTADOS.

O programa computacional foi rodado fazendo $T_2 = 18$ (mês), $F_{\max} = 3$ e $C = \text{Cr\$ } 100.000,00$, obtendo $T_1 = 17,853$ (mês), $T_2 = 18,6$ (mês) e $PV = S_1 = \text{Cr\$ } 615.079,70$. Em outras palavras significa que a despesa deve ser iniciada em $T_1 = 17$ meses e 26 dias e terminar em $T_2 = 18$ meses e 18 dias. Percebemos também que $t_* = 18,089$ (ponto de biomassa máxima), pertence a esse intervalo.

O lucro obtido nessa seção está bem superior ao obtido na seção anterior onde não tínhamos gastos com esforço de pesca, mas tínhamos gastos com ração, mão-de-obra e, além do mais, havia uma taxa instantânea de depreciação de capital $\delta = 0,06$ (mensal).

```

5 REM "CALCULO DO INTERVALO DE
  TEMPO T1, T2 PARA Fmax
  FINI- TO"
10 DISP "DE-ME OS VALORES DE T2
  , F=Fmax e C"
20 INPUT T2
30 INPUT F
40 INPUT C
50 REM "DETERMINACAO DE T1"
60 T3=C*EXP((.02+F)*T2)
70 T4=1524600*(1-EXP(-(.16*(T2+
  2.25))))^3.113
80 T1=LOG(T3/T4)/F
90 REM "CALCULO DA INTEGRAL POR
  QUADRATURA GAUSSIANA"
100 X(0)=-.932
110 X(1)=-.661
120 X(2)=-.239
130 X(3)=-X(2)
140 X(4)=-X(1)
150 X(5)=-X(0)
160 A(0)=.171
170 A(1)=.361
180 A(2)=.468
190 A(3)=A(2)
200 A(4)=A(1)
210 A(5)=A(0)
220 X1=T1
230 X2=T2
240 S=0
250 FOR I=0 TO 5 STEP 1
260 X=X(I)
270 GOSUB 650
280 S=S+A(I)*H
290 NEXT I
300 S=.5*(X2-X1)*S
310 REM "VERIFICAR SE A INTEGRAL
  ESTA PROXIMA DE ZERO"
320 IF ABS(S)<5.E-26 THEN GOTO 4
  20
330 IF S<0 THEN GOTO 360
340 IF S>0 THEN GOTO 390
350 REM "DIMINUIR T2"
360 T2=T2-.05
370 GOTO 60
380 REM "AUMENTAR T2"
390 T2=T2+.05
400 GOTO 60
410 REM "CALCULO DA INTEGRAL POR
  QUADRATURA GAUSSIANA"
420 X(0)=-.932
430 X(1)=-.661
440 X(2)=-.239
450 X(3)=-X(2)
460 X(4)=-X(1)
470 X(5)=-X(0)
480 A(0)=.171
490 A(1)=.361
500 A(2)=.468
510 A(3)=A(2)

```

```

520 A(4)=A(1)
530 A(5)=A(0)
540 S1=0
550 FOR J=0 TO 5 STEP 1
560 X=X(J)
570 GOSUB 710
580 S1=S1+A(J)*G
590 NEXT J
600 S1=.5*(X2-X1)*S1
610 DISP "T1=";T1,"T2=";T2,"S1="
  ;S1
620 STOP
630 END
640 REM "FUNCAO A SER INTEGRADA"
650 H1=21.78*EXP(-(.5*(.02+F)*((
  X2-X1)*X+X2+X1)))
660 H2=(1-EXP(-(.08*((X2-X1)*X+X
  2+X1+4.5))))^3.113
670 H3=25.984*EXP(-(.08*((X2-X1)
  *X+X2+X1+4.5)))
680 H=H1*H2*(H3-1)
690 RETURN
700 REM "FUNCAO A SER INTEGRADA"
710 G1=1524600*EXP(F*X1)*EXP(-(.
  5*(.02+F)*((X2-X1)*X+X2+X1))
  )
720 G2=(1-EXP(-(.08*((X2-X1)*X+X
  2+X1+4.5))))^3.113
730 G=(G1*G2-C)*F
740 RETURN

```

```

RUN
DE-ME OS VALORES DE T2,      F=Fma
x e C
?
18
?
3
?
100000
T1= 17.8534861856      T2= 18.6
S1= 615079.781795

```

```

RUN
DE-ME OS VALORES DE T2,      F=Fma
x e C
?
18
?
3
?
200000
T1= 17.8844474667      T2= 18.4
S1= 429836.893612

```

(5) DINÂMICA ÓTIMA DE UMA PESCA COMERCIAL ENVOLVENDO VÁRIAS COORTES DE MACHOS ALBINOS DA TILÁPIA DO NILO.

(5.1) INTRODUÇÃO

Trataremos agora da otimização dinâmica para uma população de várias coortes, com as seguintes hipóteses iniciais:

- 1) Recrutamento mensal de 1000 peixes ($N_0 = 1000$).
- 2) A K-ésima coorte foi recrutada no K-ésimo mês.
- 3) O custo da pesca é desprezível ($C = 0$).
- 4) Sequência de controles impulsivos ($F = \infty$), colhendo, instantaneamente, toda a população de peixes.
- 5) Instante de recrutamento $t_0' = 2,25$ (instante em que o peixe foi colocado no viveiro).

(5.2) MAXIMIZAÇÃO DO VALOR PRESENTE DO LUCRO DE TODAS COLHEITAS FUTURAS.

O nosso objetivo é maximizar o valor presente do lucro (PV) dado pela expressão (1.14.13), ou seja

$$PV = \frac{V_1(T)}{e^{\delta T} - 1}$$

sendo T o período de rotação ótima, dado pela expressão (1.14.14),
Fórmula de Faustmann

$$\frac{V_1'(T)}{V_1(T)} = \frac{\delta}{1 - e^{-\delta T}}$$

Para simplicidade matemática, restringiremos T somente para valores inteiros, de modo que $V_1(T)$ denotando o biovalor da população no instante T meses após uma colheita completa, é dado por

$$V_1(T) = pN_0 \cdot e^{-M \cdot T} \cdot w(T) + pN_0 e^{-M(T-1)} \cdot w(T-1) + \dots +$$

$$+ pN_0 e^{-M} \cdot w(1) = pN_0 \cdot \sum_{k=1}^T e^{-kM} \cdot w(k)$$

Resolveremos o problema, primeiramente, usando aparelho de captura não seletivo, isto é, todos os peixes recrutados na população estão, igualmente, sujeitos a serem capturados.

Para a k -ésima coorte recrutada o peso de cada peixe é dado por

$$w(k) = 1089 \cdot [1 - e^{-0,16(k+t_0+2,25)}]^{3,113} \quad (g)$$

Como $t'_\delta = 2,25$, então

$$w(k) = 1089, [1 - e^{-0,16(k+4,5)}]^{3,113} \quad (g) \quad (5.2.1)$$

O valor da biomassa por peixe recrutado em T recrutamentos é dado por:

$$w(T) = \frac{V_1(T)}{pN_0} = \sum_{k=1}^T e^{-kM} \cdot w(k) .$$

Sabendo-se que $M = 0,02$, então

$$w(T) = 1089 \sum_{k=1}^T e^{-0,02k} \cdot [1 - e^{-0,16(k+4,5)}]^{3,113} \quad (g) \quad (5.2.2)$$

Determinaremos T ótimo usando a igualdade

$$\frac{\Delta w(T)}{w(T)} = \frac{V'_1(T)}{V_1(T)} \quad (5.2.3)$$

O cálculo de $\frac{\Delta w(T)}{w(T)}$ é feito através da tabela a seguir.

TABELA VII - Biomassa por recruta $w(T)$, taxa de crescimento proporcional $\Delta w/w$ e rendimento médio mensal para a Tilápia do Nilo. $w(T)/T$: Equipamento não seletivo.

T (mês)	$w(T)$ [g]	$\frac{\Delta w(T)}{w(T)}$	$\frac{w(T)}{T}$
1	201,372	1,000	201,372
2	470,557	0,572	235,279
3	806,644	0,417	268,881
4	1.205,935	0,331	301,484
5	1.662,939	0,275	332,588
6	2.171,175	0,234	361,863
7	2.723,774	0,203	389,111
8	3.313,904	0,178	414,238
9	3.935,048	0,158	437,228
10	4.581,173	0,141	458,117
11	5.246,818	0,127	476,983
12	5.927,124	0,115	493,927
13	6.617,829	0,104	509,064
14	7.315,239	0,095	522,517
15	8.016,182	0,087	534,412
16	8.717,960	0,080	544,873
17	9.418,298	0,074	554,018

cont.

cont.

T (mês)	w(T) [g]	$\frac{\Delta w(T)}{w(T)}$	$\frac{w(T)}{T}$
18	10.115,289	0,069	561,961
19	10.807,351	0,064	568,808
20	11.493,180	0,060	574,659
21	12.171,712	0,056	579,605
22	12.842,087	0,052	583,731
23	13.503,620	0,049	587,114
24	14.155,770	0,046	589,824
25	14.798,123	0,043	591,925
26	15.430,367	0,041	593,476
27	16.052,278	0,039	594,529
28	16.663,704	0,037	595,132
29	17.264,555	0,035	595,329
30	17.854,789	0,033	595,160
31	18.434,408	0,031	594,658

O gráfico a seguir mostra a relação entre $\frac{\Delta w(T)}{w(T)}$ e T.

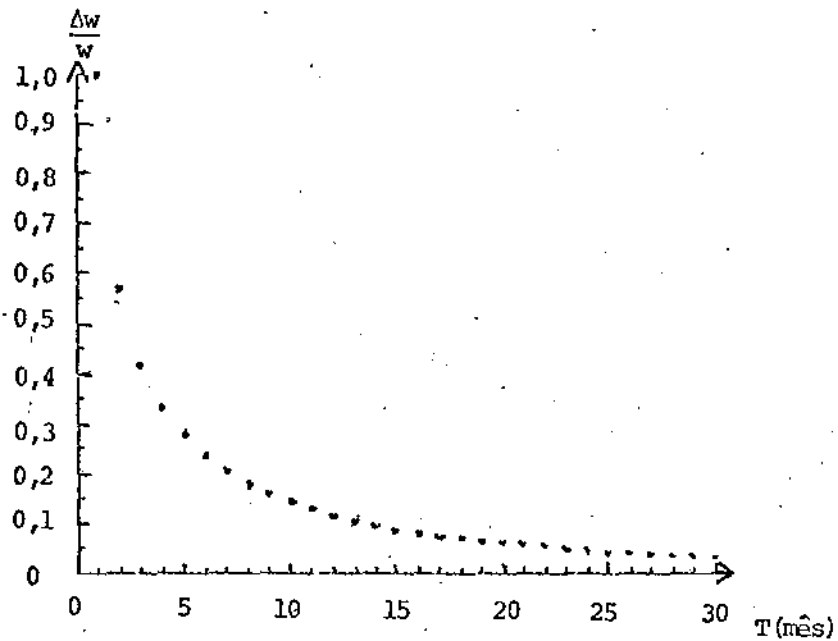


Fig. 5.1.- Pontos da taxa de variação proporcional $\frac{\Delta w(T)}{w(T)}$ em relação ao tempo T (equipamento não seletivo).

Observando o gráfico acima concluímos que a função $\frac{\Delta w(T)}{w(T)}$ é do tipo

$$\frac{\Delta w(T)}{w(T)} = \phi \cdot T^{\theta} \quad (5.2.4)$$

Como esta função nem sempre é linear tomamos, os logaritmos dos dois membros, obtendo assim uma nova função, neste caso, linear, ou seja

$$\ln \frac{\Delta w(T)}{w(T)} = \ln \phi + \theta \ln T$$

Fazendo $y = \ln \frac{\Delta w(T)}{w(T)}$

$$a = \ln \phi$$

$$b = 0$$

e $x = \ln T$, temos

$$\hat{y} = a + bx$$

a e b podem ser calculadas através de regressão linear.

Dos Apêndices 1 e 2, considerando-se as fórmulas (Ap.1.1), (Ap. 1.2) e (Ap. 2.1), temos

$$a = 0,319$$

$$b = -1,050 \text{ (a)}$$

$$r = -0,991$$

Como $a = \ln \phi$, então

$$\phi = e^a$$

ou seja $\phi = e^{0,319}$

$$\phi = 1,376 \text{ (b)}$$

Substituindo (a) e (b) em (5.2.4), vem

$$\frac{\Delta w(T)}{w(T)} = 1,376 T^{-1,05}$$

$$\frac{\Delta w(T)}{w(T)} = \frac{1,376}{T^{1,05}} \quad (5.2.5)$$

A figura abaixo representa, simultaneamente, os gráficos das expressões $\frac{\Delta w(T)}{w(T)}$ e $\frac{V_1'(T)}{V_1(T)}$

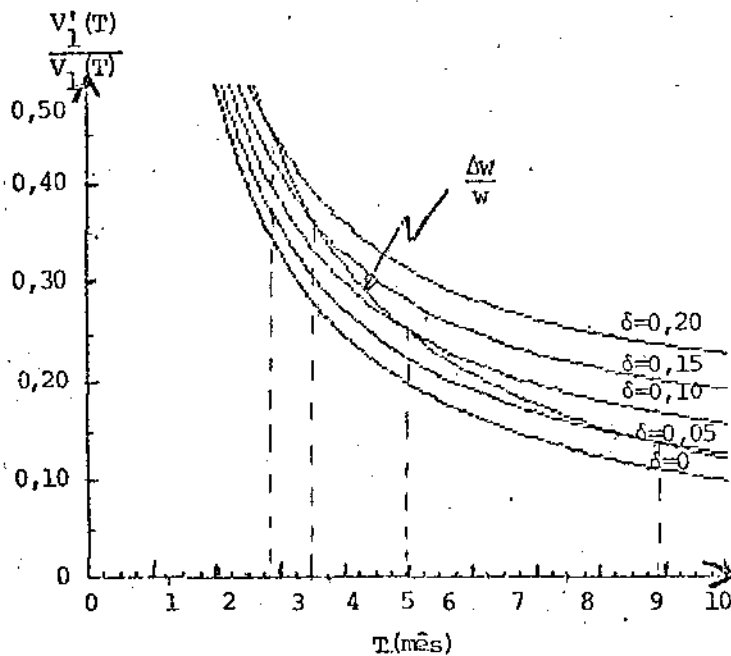


Fig.5.2 - Determinação gráfica da rotação ótima para várias coortes de machos albinos da Tilápia do Nilo. Equipamento não seletivo (tabelas VII e IX).

Os valores de T podem ser calculados através da expressão (5.2.3), ou seja

$$\frac{\Delta w(T)}{w(T)} = \frac{V_1'(T)}{V_1(T)}$$

Substituindo em (5.2.3) as expressões (1.14.14) e (5.2.5), temos

$$\frac{1,376}{T^{1,05}} = \frac{\delta}{1 - e^{-\delta T}} \quad (5.2.6)$$

$T \neq 0$ e $\delta > 0$

onde δ é a taxa instantânea de depreciação de capital.

Simplificando a expressão (5.2.6), temos

$$1,376(1 - e^{-\delta T}) - \delta \cdot T^{1,05} = 0$$

Resolveremos a equação acima usando o método de Newton, para valores arbitrários de δ dados na Tabela VIII, adiante.

Seja $F(T) = 1,376(1 - e^{-\delta T}) - \delta T^{1,05}$, então

$$F'(T) = 1,376 \cdot \delta \cdot e^{-\delta T} - 1,05 \cdot \delta \cdot T^{0,05}$$

Fazendo $F = F(T)$; $F_1 = F'(T)$ e $D = \delta$, temos, a seguir, o método Newton em linguagem computacional para a determinação de T , sendo que na Tabela VIII temos os resultados obtidos para valores arbitrários de δ .

```

1  REM "CALCULO DA RAIZ DE F PE
L   PELO METODO DE NEWTON"
5  INPUT D
10 INPUT T
20 K=0
30 F=1.376*(1-EXP(-(D*T)))-D*T^
   1.05
40 F1=1.376*D*EXP(-(D*T))-1.05*
   D*T^1.05
50 IF ABS(F1)<.001 THEN GOTO 130
60 T1=T-F/F1
70 F2=1.376*(1-EXP(-(D*T1)))-D*
   T1^1.05
80 IF ABS(T1-T)<=.01 THEN GOTO
   140
90 T=T1
100 K=K+1
110 IF K>100 THEN GOTO 140
120 GOTO 30
130 DISP "F1<0.001"
140 DISP "T=";T;"K=";K
150 END

```

TABELA VIII

δ	0	0,01	0,05	0,06	0,10	0,15	0,20
T (mês)	592,064	30,448	8,748	7,554	4,986	3,567	2,808

Quando $\delta = 0$, a expressão correspondente a $\frac{V'(T)}{V(T)}$ é indeterminada, e seu cálculo é feito através da "Regra de L'Hospital", ou seja,

$$\frac{V'(T)}{V(T)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{1 - e^{-\delta T}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{T \cdot e^{-\delta T}} = \frac{1}{T}$$

Portanto a expressão (5.2.6) passa a ser

$$\frac{1,376}{T^{1,05}} = \frac{1}{T}$$

$$T^{0,05} = 1,376 \Rightarrow T = 592,064 \text{ (mês)}$$

Com os valores δ e T da tabela VIII podemos calcular o valor presente do lucro de todas colheitas futuras, dada por:

$$PV = \frac{V_1(T)}{e^{\delta T} - 1}$$

com $V_1(T) = p \cdot N_0 \cdot w(T)$

$w(T)$ obtido através de interpolação na tabela VII para os particulares valores de δ e T .

1) $\delta = 0$ e $T = 592,064$

Não é possível calcular PV pela tabela.

Neste caso $PV = V_1(T)$.

$$2) \delta = 0,01 \text{ e } T = 30,448$$

Da tabela VII temos:

$$1 \begin{vmatrix} T \\ 30 \\ 30,448 \\ 31 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0,448 \\ \\ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} w(T) \\ 17.854,789 \\ y \\ 18.434,408 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 579,619 \\ \\ \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 579,619 \\ 0,448 & x \end{matrix}$$

$$x = 259,669$$

$$\text{Como } y = 17.854,789 + x,$$

$$\text{então } y = 17.854,789 + 259,669 =$$

$$\therefore y = 18,114,458 \text{ (g) ou}$$

$$w(T) = 18,114 \text{ Kg, para } T = 30,448 \text{ (mês).}$$

De posse de $\delta, T, w(T)$ e sabendo-se que o preço da Tilápia do Nilo, $p = \text{cr\$ } 4000$ por Kg e $N_0 = 1000$ peixes para cada recrutamento, podemos calcular o valor presente do lucro para todas colheitas futuras através da expressão:

$$PV = \frac{p \cdot N_0 \cdot w(T)}{e^{\delta T} - 1}$$

ou seja,

$$PV = \frac{4000 \cdot 1000 \cdot 18,114}{e^{0,01 \cdot 30,448} - 1} = 203.574.008,20$$

Portanto, se as colheitas forem realizadas à cada 30,448 meses, teremos PV = Cr\$ 203.574,008,20 de todas as colheitas futuras.

De modo análogo podemos calcular os valores restantes de PV e de $w(T)/T$ que estão na tabela IX.

TABELA IX - Rotação Ótima - Equipamento não seletivo.

δ	0	0,01	0,05	0,06	0,10	0,15	0,20
T (mês)	592,064	30,448	8,748	7,554	4,986	3,567	2,808
PV (Cr\$)	-	203.574.008	27.546.485	21.281.454	10.250.639	5.840.242	3.939.690
$w(T)/T$ (g/mês)	-	594,935	431,435	403,031	332,153	287,367	262,429

Vamos, agora, resolver o mesmo problema anterior supondo que o aparelho de captura possui seletividade "knife-edge" na idade $S = 8$ meses após o recrutamento. Neste caso a expressão para $V_1(T)$ deve ser mudada para:

$$V_1(T) = p \cdot R \cdot \sum_{k=8}^T e^{-Mk} \cdot w(k)$$

e

$$w(T) = 1089 \sum_{k=8}^T e^{-0,02k} \cdot [1 - e^{-0,16(k+4.5)}]^{3,113} \quad (5.3.1)$$

Determinamos T ótimo usando a igualdade

$$\frac{\Delta w(T)}{w(T)} = \frac{V_1'(T)}{V_1(T)} \quad (5.3.2)$$

O cálculo de $\frac{\Delta w(T)}{w(T)}$ é feito através da tabela a seguir.

TABELA X - Biomassa por recruta $w(T)$, taxa de crescimento proporcional $\Delta w(T)/w(T)$ e rendimento anual médio $w(T)/T$.

Parâmetro de Seletividade 8 meses

T (mês)	w(T) (g)	$\frac{\Delta w(T)}{w(T)}$	$\frac{w(T)}{T}$	
8	590,130	1,000	73,766	
9	1.211,274	0,513	134,586	
10	1.857,399	0,348	185,740	cont.

cont.

T (mês)	w(T) (g)	$\frac{\Delta w(T)}{w(T)}$	$\frac{w(T)}{T}$
11	2.523,044	0,264	229,368
12	3.203,350	0,212	266,946
13	3.894,055	0,177	299,543
14	4.591,465	0,152	327,962
15	5.292,408	0,132	352,827
16	5.994,186	0,117	374,637
17	6.694,524	0,105	393,796
18	7.391,515	0,094	410,640
19	8.083,577	0,086	425,451
20	8.769,406	0,078	438,470
21	9.447,938	0,072	449,902
22	10.118,314	0,066	459,923
23	10.779,847	0,061	468,689
24	11.431,997	0,057	476,333
25	12.074,350	0,053	482,974
26	12.706,594	0,050	488,715
27	13.328,505	0,047	493,648

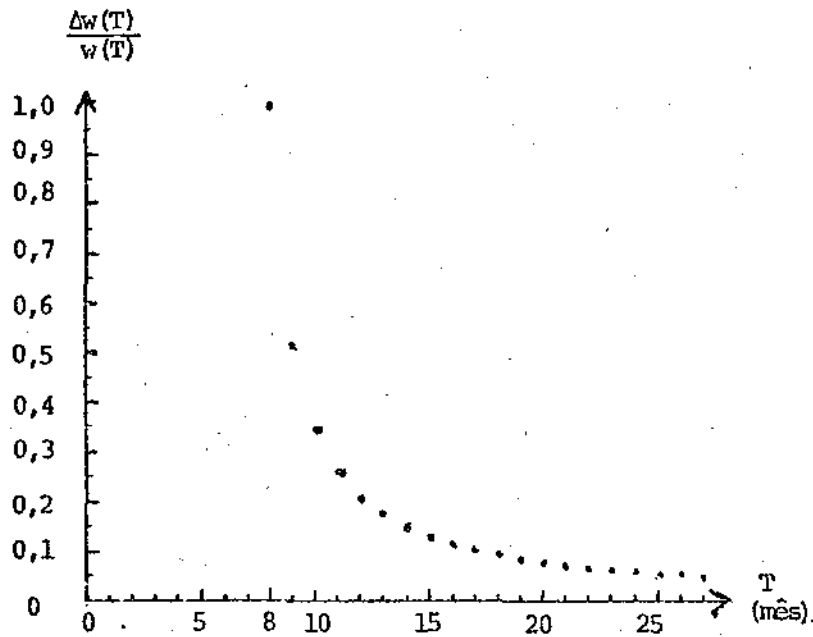


Fig.5.3 - Pontos da taxa de variação proporcional $\Delta w(T)/w(T)$ em relação ao tempo T (equipamento seletivo com S=8 (mês))

Observando o gráfico acima percebemos que a função é do tipo

$$\frac{\Delta w(T)}{w(T)} = \phi T^\theta \quad (5.3.3)$$

A função (5.3.3) não é linear, mas se tornará linear se aplicarmos logaritmos nos dois membros, isto é,

$$\ln \frac{\Delta w(T)}{w(T)} = \ln \phi + \theta \ln T \quad (5.3.4)$$

fazendo $y = \ln \frac{\Delta w(T)}{w(T)}$

$$a = \ln \phi$$

$$b = \theta$$

e $x = \ln T$, de (5.3.4), vem,

$$y = a + bx$$

a e b são calculadas através de regressão linear.

De (Ap. 1.1), (Ap. 1.2) e (Ap. 2.1), temos

$$a = 4,132$$

$$b = -2,225 \quad (a')$$

$$r = 983$$

sendo $a = \ln \phi \Rightarrow \phi = e^a = e^{4,132} = 62,302 \quad (b')$

Substituindo (a') e (b') em (5.3.3), vem

$$\frac{\Delta w(T)}{w(T)} = \frac{62,302}{T^{2,225}} \quad (5.3.5)$$

$$T \neq 0$$

A figura a seguir representa, simultaneamente, os gráficos das expressões $\frac{\Delta w(T)}{w(T)}$ e $\frac{V_1'(T)}{V_1(T)}$

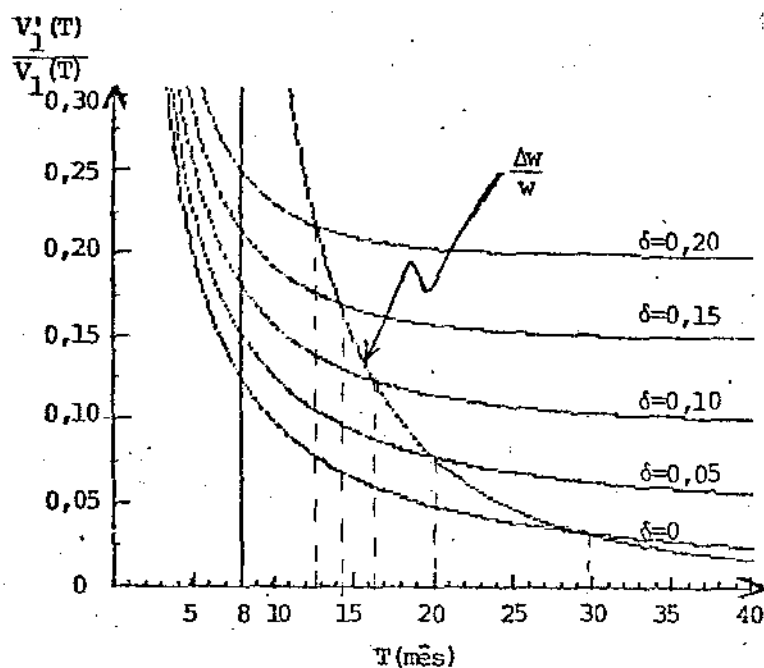


Fig.5.4 - Determinação gráfica da rotação ótima para várias coortes de machos albinos da Tilápia do Nilo. Equipamento seletivo com $S=8$ (mês), (tabelas X e XI).

Os valores de T são calculados através da expressão (5.2.3), abaixo

$$\frac{\Delta w(T)}{w(T)} = \frac{V_1'(T)}{V_1(T)}$$

ou seja,

$$\frac{62,302}{T^{2,225}} = \frac{\delta}{1 - e^{-\delta T}} \quad (5.3.6)$$

$T \neq 0 \text{ e } \delta > 0$

δ : taxa instantânea de depreciação de capital.

Simplificando a expressão acima, vem

$$62,302(1 - e^{-\delta T}) - \delta \cdot T^{2,225} = 0.$$

Determinamos o valor de T , na equação acima, para δ arbitrário, usando o método de Newton para resolução de equações, como no caso anterior. O presente valor do lucro (PV) também é calculado de modo análogo aos da tabela IX, bem como os valores de $w(T)/T$, na Tabela XI abaixo.

TABELA XI - Rotação Ótima - Equipamento seletivo com $S = 8$ (mês)

δ	0	0,01	0,05	0,06	0,10	0,15	0,20
T (mês)	29,168	26,264	20,017	19,118	16,343	14,186	12,731
PV (Cr\$)	-	171.405.550	20.413.752	15.196.955	6.044.208	2.553.307	1.261.469
$w(T)/T$ (g/mês)	-	490,017	438,664	426,987	381,209	332,587	290,774

Como no caso anterior, quando $\delta = 0$ devemos calcular $V'(T)/V(T)$ através da "Regra L'Hospital", sendo a expressão (5.3.6)

transformada para

$$\frac{62,302}{T^{2,225}} = \frac{1}{T}$$

ou

$$T^{1,225} = 62,302$$

$$T = 29,168 \text{ (mês)}$$

(5.3) ANÁLISE DOS RESULTADOS.

Analisando os resultados dessa seção podemos chegar às seguintes conclusões:

- (1) A elaboração de um modelo matemático geral para a pesca comercial é praticamente impossível de ser conseguido.
- (2) Quando o equipamento de pesca não possui seletividade "knife-edge" a pesca, para algumas coortes, virá num período sub-ótimo, tornando a pesca predatória.
- (3) É de fundamental importância a taxa instantânea de depreciação de capital, principalmente para peixes de longa duração de vida, pois o capital pode ser seriamente depreciado ao longo do tempo.
- (4) Por último, vemos a grande importância da Fórmula de Faustmann, de rotação florestal, para o estudo da pesca; é um exemplo de como a analogia entre modelos deve ser usada, mostrando o inter-relacionamento entre as ciências.

CONCLUSÃO

Dos resultados obtidos no presente trabalho, conclui-se o seguinte:

1) A criação de machos albinos da Tilápia do Nilo em viveiros é altamente rentável, pois esse peixe atingiu idade ótima de venda com, apenas, $t_* = 8,97$ meses de estocagem, levando-se em conta o consumo de ração, mão-de-obra, e uma taxa instantânea de depreciação de capital $\delta = 0,06$ ao mês.

2) Se a criação do peixe em estudo fosse feita em lago natural, onde não fosse necessário ração, mão-de-obra e a taxa instantânea de depreciação de capital $\delta = 0$, então o instante ótimo de pesca passaria a ser $t_* = 18,09$ meses do momento de estocagem. O lucro neste caso será bem maior que o conseguido anteriormente. Na hipótese de não dispormos de um esforço infinito para efetuarmos a despesca (como esvaziar o lago), então um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, contendo o ponto de máximo t_* será requerido para a despesca. Neste caso o lucro decrescerá, pois haverá um custo por unidade de esforço.

3) É praticamente impossível construirmos um modelo geral para a pesca comercial envolvendo várias coortes, pois não temos controle sobre a reprodução e recrutamento. Além do mais, as hipóteses adicionais de considerarmos o esforço de pesca como um "controle-

impulso", colhendo toda a população em cada aplicação do controle, custo de pescaria $C = 0$, recrutamento constante, são realmente necessários para não tornar o modelo complexo demais.

Com essas hipóteses foi possível montarmos dois modelos, considerando a seletividade do aparelho. O primeiro modelo, onde o aparelho era não seletivo se apresentou mais eficaz, em termos de lucro, que o segundo modelo, com aparelho seletivo. Por outro lado, no primeiro modelo a pesca acontecia num instante sub-ótimo para várias coortes, tornando-a uma pesca predatória, comprometendo seriamente os estoques de peixes.

4) Do exposto podemos concluir que a criação de peixes em lagos é altamente rentável, mas devemos estar atentos à seletividade quando envolver mais de uma coorte, pois se assim não for feito, certamente capturaremos peixes em idade sub-ótima de pesca. Pior ainda pode acontecer em rios e oceanos pois a não seletividade do aparelho pode afetar a reprodução, comprometendo com isso o estoque de peixes nesses lugares.

APÊNDICES

(Ap.1) REGRESSÃO LINEAR DE DUAS VARIÁVEIS.

A análise de regressão simples, entre duas variáveis, é usada para testar hipóteses relacionando uma variável dependente, y , e uma variável independente, x , e para predições. O processo se inicia com a colocação dos pontos (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, em um diagrama de dispersão, determinando-se, pela inspeção gráfica, se há uma relação aproximada:

$$y_i = a + bx_i, \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad b \in \mathbb{R}^+$$

Usando o método dos quadrados mínimos calculamos os valores de \underline{a} e \underline{b} através das fórmulas

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i) \cdot (\sum_{i=1}^n y_i)}{n}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n}} \quad (\text{Ap.1.1})$$

$$a = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n y_i - b_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i \right] \quad (\text{Ap.1.2})$$

(Ap.2) COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO ENTRE DUAS VARIÁVEIS.

O coeficiente de correlação mede o grau de associação entre as duas variáveis x e y . O coeficiente de correlação r para o conjunto de pontos (x_i, y_i) , $i=1, 2, 3, \dots$, é dado pela fórmula, obtida através dos quadrados mínimos

$$r^2 = b \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n}}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n}} \quad (\text{Ap.2.1})$$

$$-1 \leq r \leq 1$$

Se $-1 \leq r < 0$ significa que x e y movem-se em direções opostas. Neste caso temos uma correlação negativa.

Se $0 < r < 1$ significa que x e y movem-se na mesma direção. Neste caso temos uma correlação positiva.

Se $r = 0$ significa que não existe relação linear entre x e y .

O sinal de r é determinado pela inspeção visual do diagrama de dispersão ou pelo sinal de b da regressão linear.

(Ap.3) EQUAÇÃO DE EULER

A equação de Euler serve para determinar os extremos de um funcional do tipo

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

na classe $C^1(a, b)$, (funções contínuas com derivadas primeiras contínuas definidas em (a, b)), com $y(a) = A$ e $y(b) = B$; A e B números reais e $F(x, y, y')$ contínua com derivadas parciais primeira e segunda contínuas em x, y e y' .

As hipóteses sobre F garantem a existência de $(\partial J)_y(a)$ e $(\partial^2 J)_y(a)$.

Sejam $y \in C^1(a, b)$ e $h \in C^1(a, b)$. Para que $y+h$ seja uma variação admissível de y , devemos ter

$$h(a) = h(b) = 0.$$

Então,

$$(\Delta J)_Y(h) = J(y+h) - J(y) = \int_a^b [F(x, y+h, y'+h') - F(x, y, y')] dx$$

Por Taylor, vem

$$J(y+h) - J(y) = \int_a^b [F_Y(x, y, y')h + F_{Y'}(x, y, y')h' + \text{termos com } h^2, (h^2)', \text{ etc, ...}] dx$$

Portanto

$$(\partial J)_Y(h) = \int_a^b [F_Y(x, y, y')h + F_{Y'}(x, y, y')h'] dx$$

Se J tiver um máximo em y , então $(\partial J)_Y(h) = 0$ para todo h admissível, isto é,

$$\int_a^b [F_Y(x, y, y')h + F_{Y'}(x, y, y')h'] dx = 0$$

Integrando por partes a primeira parcela, temos

$$\left(\int^x F_Y \right) \cdot h \Big|_a^b - \int_a^b \int^x F_Y h' dx + \int_a^b F_{Y'}(x, y, y') h' dx = 0$$

ou

$$\int_a^b (- \int_a^x F_Y + F_{Y'}) h' dx = 0$$

Lema (DU BOIS - REYMOND)

Se $\int_a^b f(x) \cdot h'(x) dx = 0$, para todo $h(x) \in C^1(a,b)$

com $h(a) = h(b) = 0$ e $f(x)$ contínua, então $f(x) = C$, sendo C constante.

DEMONSTRAÇÃO. $\int_a^b h'(x) dx = h(x) \Big|_a^b = 0$.

Portanto

$$\int_a^b h'(x) \cdot [f(x) - C] dx = 0, \quad \forall C. \quad \text{Escolhendo}$$

$$C = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \quad \text{para que} \quad \int_a^b (f(x) - C) dx = 0.$$

Então

$$f(x) = \int_a^x (f(t) - C) dt \quad \text{está em} \quad C^1(a,b)$$

e $H(a) = H(b) = 0$. Também $H'(x) = f(x) - C$.

Portanto, podemos aplicar a hipótese do lema para $H(x)$ e obtemos,

$$\int_a^b (f(x) - C) \cdot (f(x) - C) dx = \int_a^b (f(x) - C)^2 dx = 0$$

e pela continuidade de $f(x)$ e também de $f(x) - C$, temos $f(x) - C = 0$ c.q.d.

Voltando agora ao cálculo do $(\partial J)_y(h) = 0$, obtemos do lema, que

$$- \int^x F_y + F_{y'} = k \quad , \quad k = \text{constante},$$

e derivando membro a membro em relação a x , vem

$$F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y') = 0 \quad (\text{Ap.3.1})$$

A equação (Ap.3.1) é denominada de Equação de Euler, sendo uma condição necessária para que y seja um extremo para o funcional J . É uma equação diferencial de 2ª ordem e, sua solução dependerá em geral de duas constantes arbitrárias a serem determinadas a partir das condições de contorno $y(a) = A$ e $y(b) = B$.

(Ap.4) INTEGRAÇÃO NUMÉRICA: QUADRATURA GAUSSIANA.

A técnica de Integração numérica através da quadratura Gaussiana é muito usada devido ao seu baixo tempo de computação, pois ao contrário das regras do Trapézio e de Simpson, a quadratura Gaussiana requer somente uma iteração para a determinação da integral desejada. Ela é determinada pela pesquisa de uma fórmula de integração do tipo,

$$\int_a^b f(x) dx = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + \dots + a_n f(x_n) \quad (\text{Ap.4.1})$$

onde a_i e x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) devem ser determinados de modo a se obter a melhor precisão possível. Como existem $2n+2$ parâmetros arbitrários, a fórmula a ser obtida deverá ser exata para polinômios de grau menor ou igual a $2n+1$.

O primeiro passo é transformar o intervalo $[a, b]$ no intervalo $[-1, 1]$ através da substituição

$$x = \frac{1}{2}(b - a) \cdot t + \frac{1}{2}(a + b) \quad (\text{Ap.4.2})$$

sendo

$$dx = \frac{(b-a)}{2} dt$$

e

$$f(x) = f\left[\frac{1}{2}(b-a)t + \frac{1}{2}(a+b)\right] = F(t) ,$$

de modo que

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^1 F(t) dt \quad (\text{Ap.4.3})$$

A fórmula a ser, agora, pesquisada será do tipo

$$\int_{-1}^1 F(t) dt = A_0 F(t_0) + A_1 F(t_1) + \dots + A_n F(t_n) \quad (\text{Ap.4.4})$$

onde A_i e t_i ($i = 0, 1, \dots, n$) a serem determinados, de modo que a integral seja exata para todos os polinômios de grau menor ou igual a $2n+1$.

Suponhamos que $F(t)$ represente os polinômios especiais t^k ($k = 1, \dots, 2n+1$), tais que

$$\int_{-1}^1 t^k dt = 0 \quad \text{se } k \text{ é ímpar}$$

e

$$\int_{-1}^1 t^k dk = \frac{2}{k+1} \quad \text{se } k \text{ é par.}$$

Obtemos, assim, o sistema de $2n+2$ equações não lineares a $2n+1$ incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 + A_1 + \dots + A_n = 2 \\ A_0 t_0 + A_1 t_1 + \dots + A_n t_n = 0 \\ A_0 t_0^2 + A_1 t_1^2 + \dots + A_n t_n^2 = 2 \\ \vdots \\ A_0 t_0^{2n+1} + A_1 t_1^{2n+1} + \dots + A_n t_n^{2n+1} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{Ap. 4.5})$$

A solução do sistema (Ap.4.5) é trabalhosa. Contudo, podemos mostrar que o sistema (Ap.4.5) possui uma única solução. Usando a teoria dos polinômios ortogonais, é fácil ver que os t_k são raízes de um conjunto de polinômios, denominados *Polinômios de Legendre*. De posse desses resultados, determinamos os valores das incógnitas A_k resolvendo o sistema (Ap.4.5).

A fórmula do erro de (Ap.4.3) é dada pela expressão

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1} \cdot (n!)^4}{[(2n!)]^3 \cdot (2n+1)} \cdot f^{2n}(\xi) \quad (\text{Ap. 4.6})$$

$$-1 \leq \xi \leq 1 .$$

O conjunto dos polinômios de Legendre é definido pela seguinte fórmula de recorrência

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$\vdots$$

$$P_{m+1}(x) = \frac{1}{m+1} \{ (2m+1)x \cdot P_m(x) - mP_{m-1}(x) \} \quad (\text{Ap. 4.7})$$

$$m = 1, 2, \dots$$

PROPRIEDADES DOS POLINÔMIOS DE LEGENDRE

- 1) $P_m(x)$ é um polinômio de grau m em x
- 2) As raízes de $P_m(x)$ são todas reais e distintas e estão no intervalo $[-1, 1]$.
- 3) As raízes de $P_m(x)$ estão simetricamente situadas com respeito à origem.
- 4) Se m é ímpar, uma raiz de $P_m(x)$ é sempre zero.

Na tabela a seguir temos as raízes t_k e os correspondentes A_k para $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

0	$t_0 = 0,000$	$A_0 = 2,000$
1	$t_1 = -t_0 = 0,577$	$A_1 = A_0 = 1,000$
2	$t_1 = 0,000$	$A_1 = 0,889$
	$t_2 = -t_0 = 0,775$	$A_2 = A_0 = 0,556$
3	$t_2 = -t_1 = 0,340$	$A_2 = A_1 = 0,652$
	$t_3 = -t_0 = 0,861$	$A_3 = A_0 = 0,348$
4	$t_4 = -t_0 = 0,906$	$A_4 = A_0 = 0,237$
	$t_3 = -t_1 = 0,538$	$A_3 = A_1 = 0,479$
	$t_2 = 0,000$	$A_2 = 0,569$
5	$t_5 = -t_0 = 0,932$	$A_5 = A_0 = 0,171$
	$t_4 = -t_1 = 0,661$	$A_4 = A_1 = 0,361$
	$t_3 = -t_2 = 0,239$	$A_3 = A_2 = 0,468$

A fórmula Gaussiana quatro pontos ($m = 3$) é

$$\int_{-1}^1 F(t) dt = 0,348 \cdot F(-0,861) + 0,652 \cdot F(-0,340) +$$

$$+ 0,652 \cdot F(0,340) + 0,348 \cdot F(0,861)$$

(Ap. 4.8)

(Ap.5) VALOR FUTURO E VALOR PRESENTE DO CAPITAL.

Sejam P_0 : capital

i : taxa de juros (composto mensalmente)

n : número de meses.

O valor futuro FV de um capital P_0 , após n meses de aplicação mensal de taxa de juros compostos i , é determinado pela fórmula de recorrência abaixo:

$$FV_0 = P_0$$

$$FV_1 = P_0 + P_0 \cdot i = P_0 (1+i)$$

$$FV_2 = FV_1 + FV_1 \cdot i = FV_1 (1+i) = P_0 (1+i) \cdot (1+i) = P_0 (1+i)^2$$

$$FV_3 = FV_2 + FV_2 \cdot i = FV_2 (1+i) = P_0 (1+i)^2 \cdot (1+i) = P_0 (1+i)^3$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$FV_n = FV = FV_{t-1} + FV_{t-1} \cdot i = FV_{t-1} (1+i) = P_0 (1+i)^{t-1} \cdot (1+i) = P_0 (1+i)^t$$

ou seja

$$FV = P_0 \cdot (1+i)^t$$

(Ap.5.1)

Introduzindo $\delta = \ln(1+i)$ como a taxa de instantânea mensal de juros ou taxa anual de juros (composta continuamente), então

$1 + i = e^{\delta}$ que substituído em (1.11.1), vem

$$FV = P_0 e^{\delta t} \quad (\text{Ap.5.2})$$

que é uma fórmula mais geral para o futuro valor para um tempo arbitrário $t \geq 0$.

Invertendo o processo podemos calcular o valor presente PV de um capital P_0 que seria obtido após t meses, incidindo sobre ele uma taxa instantânea de depreciação de capital, ou seja,

$$PV = P_0 \cdot e^{-\delta t} \quad (\text{Ap.5.3})$$

O valor presente total PV de uma sequência de pagamentos P_0, P_1, \dots, P_N , recebidos nos meses $0, 1, \dots, N$, respectivamente, é dado por

$$PV = \sum_{k=0}^N \frac{P_k}{(1+i)^k} \quad (\text{Ap.5.4})$$

De modo similar o valor presente em tempo contínuo de receitas $P(t)$, $0 \leq t \leq T$, é dado por

$$PV = \int_0^T e^{-\delta t} \cdot P(t) dt \quad (\text{Ap.5.5})$$

N e T podem ser finitos ou infinitos sendo que no caso de serem infinitos as expressões (Ap.5.4) e (Ap.5.5) devem ser convergentes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- [1] BASSANEZI, R.C. & J.F. MEYER - *Um Modelo Alternativo para Exploração de Recursos Renováveis* - Atas da Soc. Bras. Mat. Aplicada e Computacional, Maringá - PR, (1980).
- [2] BERTALANFFY, L. von - "Teoria Geral dos Sistemas" - Editora Vozes Ltda, Petrópolis - RJ (351 p.), (1973)
- [3] BEVERTON, R.J.H. and S.J. HOLT - "On the Dynamics of Exploited Fish Populations" - Ministry of Agriculture, Fisheries and Food, London.- Fisheries Investigations. Series 2 (19), (533p.), (1957).
- [4] BURGHEES, D.N. and M.S. BORRIE - "Modelling with Differential Equations" - John Wiley & Sons, New York, (172 p.), (1981).
- [5] CLARK, C.W. et al., - Beverton-Holt Model of a Commercial Fishery: Optimal Dynamics - J. Fish. Res. Board Can. 30, (1629-1640 p.), (1973).
- [6] CLARK, C.W. - "Mathematical Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resources" - John Wiley & Sons, New York, (352 p.), (1976).

- [7] CONTE, S.D. - "Elementos de Análise Numérica" - Editora Globo, Porto Alegre - RS, (1977).
- [8] DORN, W.S. & DANIEL D. MacCRACKEN - "Cálculo Numérico com Estudo de Casos em Fortran IV" - Editora Campus Ltda e Editora da U.S.P. (568 p.), (1981).
- [9] ELSGOLTS, L. - "Differential Equations and the Calculus of Variations" - Mir Publishers, Moscou, (1970).
- [10] GULAND, J.A. - "Manual of Methods for Fish Assessment" - Part 1 - Fish Population Analysis, FAO Manual Fishery Science, nº 4, (154 p.), (1969).
- [11] N. PISKUNOV - "Cálculo Diferencial e Integral" - Edições Cardoso, São Paulo, SP, (448 p.).
- [12] PACITTI, T. & CYRIL, P.A. - "Programação e Métodos Computacionais", Vol. 2, Livros Técnicos e Científicos S.A. (1977).
- [13] PAULY, D. - *A Selection of Simple Methods for the Assessment of Tropical Fish Stocks* - FAO Fisheries Circular, nº 729 - Food and Agriculture Organization of the United Nations-Roma, (54 p.), (1980).

- [14] SALVATORE, D. - "Estatística e Econometria" - São Paulo - SP, McGraw-Hill, (262 p.), (1982).
- [15] SANTOS, E.P. dos - "Dinâmica de Populações Aplicações à Pesca e Psicultura" - São Paulo - SP, Editora da U.S.P., (129p.) (1978).
- [16] SILVA, J.W.B. e et al - Resultados de um Ensaio sobre a Criação de Machos Albinos da Tilápia do Nilo, *Sarotherodon Niloticus* (Linnæus), em Viveiro do Centro de Pesquisa Ictiológicas do Departamento Nacional de Obras Contra a Seca (Pentecoste - CE, Brasil) - Bol. Tec. DNOCS, (Fortaleza - CE, 41 (1): 55-83, jan./jun (1983).
- [17] VAZZOLER, A.E.A. de M. - "Manual de Métodos para Estudos Biológicos de Populações de Peixes - Reprodução e Crescimento"- Coordenação Editorial: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq.

Unidade	Bo
Fls.	
Ass.	
Fonte	Doação
Data	01/04/85