

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE SISTEMAS

OTIMIZAÇÃO DO PROCESSO DE CORTAGEM ACOPLADO
AO PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO

MARIA CRISTINA NOGUEIRA GRAMANI

Orientador: Prof. Dr. Paulo Morelato França

Co-Orientador: Prof. Dr. Marcos Nereu Arenales

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Reinaldo Morábito

Prof. Dr. Horácio Hideki Yanasse

Profa. Dra. Franklina Maria Bragion de Toledo

Prof. Dr. Takaaki Ohishi

Profa. Dra. Maria Teresa Moreira Rodrigues

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação da Universidade Estadual de Campinas –
UNICAMP, como parte dos requisitos exigidos para
obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

*“... Ainda que eu falasse a língua dos anjos
Sem amor, eu nada seria ...”*

Agradecimentos

Àqueles que colaboraram profissionalmente e pessoalmente :

- a meu orientador Paulo M. França e co-orientador Marcos N. Arenales por todo o apoio, incentivo e amizade durante o desenvolvimento deste trabalho (e por toda a paciência também ☺);
- especialmente à minha família, meus pais Adhemar e Maria Lucia, meus irmãos/cunhada Ricardo/Renata e Fernando e minhas sobrinhas Fernanda e Luana por todo amor, apoio, carinho e compreensão (além de toda a paciência também, claro ! ☺);
- à Reinaldo Morábito e Horácio Yanasse pelas valiosas sugestões e discussões que muito enriqueceram nosso trabalho;
- à Jean-Marie Bourjolly pela receptividade, amizade e orientação durante minha estadia no Canadá;
- aos professores e funcionários do Densis, pelo apoio (principalmente pelas gostosas risadas com o Prof. Christiano);
- aos amigos Joyce, Pécora, Eduardo e Sonia por todo o companheirismo, amizade e principalmente pelas “dicas quentes” para sobreviver ao frio Canadense;
- às “meninas e meninos” do Densis (e afins) Fran, Lúcia, Jô, Cíntia, Débora, Ernesto, Vitória, Van R., Darli, Regina, Pablo, Lú Buriol, Cris Pissarra, Maristela, Marcelo, Edilson, Daniel, Cláudio e Alexandre por toda a amizade e claro, também pelos valiosos “congressos” (vulgos churrascos) e happy-hours num “certo” bar da coxinha (espero continuar a participar ☺).

- às amigas São Carlenses, Sil, Paula e Fabi, à eterna amizade !
- Ademir, pela amizade, carinho, risadas e principalmente pelas respostas às várias “questões existenciais” !
- à “turminha” feminina (quase meiga ☺), Fran, Jô, Van R., Lúcia, Cíntia, Darli, Lu (Pira), Van P., Marta, às Americanenses: Isa, Dedé e Renata, por todas as complexas teorias compartilhadas (nada a ver com a tese) !
- Alexandre Linhares, agradeço por todo o incentivo, ajuda com traduções mas claro, por todos os bons momentos e sonhos compartilhados também;
- aos professores da USP de São Carlos: Sandra Maria Godoy, Wagner Nunes, Luis A. Ladeira e Carlos Biasi pelo contínuo apoio e incentivo desde a Graduação.
- à FAPESP pelo apoio financeiro ao projeto;

Enfim, agradeço a todos que, tanto do lado profissional quanto do lado pessoal, me ajudaram a finalizar mais um capítulo de minha vida. Mas claro, conto com vocês para começar o próximo !

Obrigada a todos !

Sumário

Introdução	1
Apresentação do Problema Combinado	1
Motivação	3
Objetivo	4
Organização da Tese	5
Capítulo 1 Revisão Bibliográfica do Problema Combinado	9
Introdução	9
Revisão Bibliográfica	10
Capítulo 2 Problemas de Corte de Estoque e de Dimensionamento de Lotes – Alguns Algoritmos Clássicos	15
Introdução	15

Problema de Dimensionamento de Lotes	15
Problema de Corte de Estoque	21
Capítulo 3 Formulação Matemática do Problema Combinado	25
Introdução	25
Modelagem Matemática	27
Dificuldades do Modelo Combinado	30
Capítulo 4 Resolução Prática do Problema Combinado	33
Introdução	33
Heurística de Decomposição	36
Exemplo Numérico	39
Capítulo 5 Enfoque usando o Problema Combinado Simplificado como uma Rede de Caminho Mínimo	43
Introdução	43
Modelagem Matemática	44
Método de Resolução	46
Resultados Computacionais e Conclusões	50
Capítulo 6 Problema Combinado sem Custos de Preparação – Um Método Exato .	61
Introdução	61
Modelagem Matemática	62
Método de Resolução	63
Resultados Computacionais e Conclusões	67

Capítulo 7 Problema Combinado – Relaxação Lagrangiana	77
Introdução	77
Modelagem Matemática	78
Método de Resolução	79
Resultados Computacionais e Conclusões	86
Capítulo 8 Problema de Dimensionamento de Lotes Capacitado considerando Tempos de Preparação – Novas Abordagens de Resolução	93
Introdução	93
Modelagem Matemática	94
Métodos de Resolução	96
Resultados Computacionais e Conclusões	101
Problema de Setup Pairings	104
Resultados Computacionais e Conclusões	106
Conclusões Finais e Perspectivas Futuras	109
Referências Bibliográficas	115

Introdução

Apresentação do Problema Combinado

Devido a aspectos econômicos e avanços computacionais, as indústrias de manufatura têm sido estimuladas a tornar seus processos mais eficientes. Isto estimula, por outro lado, que modelos de otimização para o controle e planejamento de sistemas produtivos cresçam em complexidade e proporções consideráveis, motivando pesquisas acadêmicas.

O gerenciamento da produção dentro de uma indústria é responsável pela transformação de matérias-primas em produtos finais. O sistema responsável por este gerenciamento denomina-se Planejamento e Controle da Produção (PCP), que coordena as atividades, desde a aquisição de matérias-primas até a entrega dos produtos finais. A estrutura hierárquica de um sistema PCP pode ser dividida em três níveis de planejamento distintos: estratégico, tático e operacional (Anthony, 1965).

O Planejamento Estratégico trata da identificação e implementação de políticas adequadas para a realização das metas estratégicas de longo prazo da indústria.

O Planejamento Tático é responsável pela utilização eficiente dos recursos necessários para a implementação das estratégias definidas no nível superior (planejamento estratégico). Seu principal objetivo consiste na efetiva alocação de recursos para satisfazer a demanda, levando em conta os custos envolvidos.

Finalmente, o Planejamento Operacional trata das decisões do dia-a-dia sobre a implementação dos planos táticos, elaborados no segundo nível.

Esta tese enfoca os problemas de tomada de decisão relacionados ao planejamento tático/operacional. Neste contexto, considere um processo de produção que consiste em cortar placas retangulares (Figura 1a) em peças menores (Figura 1b), necessárias para compor os produtos finais (Figura 1c).

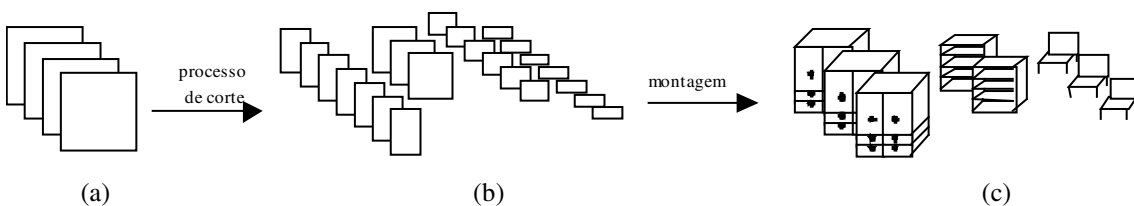


Figura 1: a. Placa retangular a ser cortada
b. Peças retangulares
c. Produtos finais

O processo de programar a produção consiste de três etapas. A primeira etapa consiste em definir uma carteira de pedidos para um horizonte de planejamento finito (alguns dias, uma semana, um mês, etc.) especificando as quantidades dos produtos finais demandados e suas respectivas datas de entrega. A segunda etapa é facilmente obtida convertendo a demanda de produtos finais em demanda de peças, como mostra a Figura 2 (para um exemplo de 3 produtos finais constituídos de 6 diferentes tipos de peças). O

produto final 1 é constituído pelas peças tipo 1 e 2, o produto final 2 é constituído pelas peças do tipo 3 e 4 e o produto final 3 é constituído pelas peças tipo 4, 5 e 6. Como vemos, um tipo de peça pode ser utilizado por vários produtos finais diferentes. Obviamente, as quantidades das peças necessárias são também fornecidas. Estruturas de produto mais complexas também podem ser consideradas.

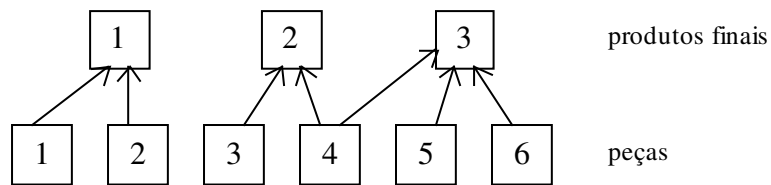


Figura 2: Peças necessárias para obter os produtos finais.

Finalmente, a terceira etapa consiste em decidir a quantidade de produtos finais que devem ser produzidos em cada período do horizonte de planejamento, minimizando os custos associados ao estoque e preparação e, além disso, minimizar a perda ocorrida no processo de corte das placas em peças.

Motivação

Nesta tese estaremos interessados na terceira etapa. Frequentemente existe uma perda de material quando as placas são cortadas em peças menores. Essa perda, que é uma parte crucial na estrutura de custos, geralmente diminui conforme a demanda de peças cresce. Será admitido também um custo associado com a preparação da produção de cada produto em cada período do planejamento. Daí surge uma pressão econômica para fabricar alguns produtos finais antecipadamente a fim de minimizar a perda e os custos de preparação, respeitando a capacidade disponível em cada período do horizonte de planejamento. Entretanto, os custos de estoque resultantes levam a uma pressão oposta: retardar a produção. Imediatamente nos deparamos com um compromisso entre adiantar ou não a produção de certos lotes de produtos finais (aumentando os custos de estoque, mas possibilitando um vantajoso lucro, gerando melhores padrões de corte e diminuindo a quantidade de períodos em que há produção). Baseado nesta decisão, surge

o problema de acoplamento de dois problemas de otimização muito conhecidos na literatura, *dimensionamento de lotes e corte de estoque*, que denominaremos de **Problema Combinado de Dimensionamento de Lotes e Corte de Estoque** ou simplesmente **Problema Combinado**.

Obviamente a junção de vários problemas de alta complexidade leva a um problema combinado muito mais difícil de resolver, pois são adicionadas restrições de acoplamento (que unem os problemas separados) e, uma solução ótima global para o problema combinado provavelmente não será uma simples composição de cada solução ótima dos problemas separados.

Em situações reais, algumas indústrias, tais como, de móveis, de roupas, e outros, usualmente resolvem esses dois problemas de forma separada, como segue. Inicialmente, são determinados para cada período do horizonte de planejamento, as quantidades de cada produto final (o tamanho do lote) a serem produzidos. Utilizando essa informação, para cada período determina-se a quantidade de peças de cada tipo a serem cortadas e os melhores padrões de corte são então gerados. Entretanto, tratar estes dois problemas de forma separada pode elevar os custos globais, principalmente se o processo de corte for economicamente relevante no processo, isto é, se uma parcela significativa do custo do produto final é formada pelo material que foi cortado.

Objetivo

O objetivo desta tese consiste em modelar matematicamente o Problema Combinado e desenvolver métodos eficientes e eficazes que investiguem o compromisso existente quando resolvemos o problema de corte de estoque levando em consideração o planejamento da produção para vários períodos. Uma solução ótima para o problema combinado provavelmente contém soluções não-ótimas para os problemas de corte de estoque e dimensionamento de lotes considerados separadamente. O objetivo a ser alcançado nessa tese consiste em encontrar uma solução que minimize não apenas a perda

ocorrida no processo de corte, como também os custos de estoque e preparação, de uma forma conjunta.

Organização da Tese

Como referências bibliográficas para o Problema Combinado, apresentamos no **Capítulo 1** alguns trabalhos encontrados na literatura.

No **Capítulo 2** apresentamos alguns métodos clássicos para os problemas de corte de estoque e dimensionamento de lotes tratados separadamente.

O desenvolvimento do modelo matemático para o Problema Combinado está apresentado no **Capítulo 3**. Este Modelo Combinado, de otimização inteira-mista, apresenta restrições de balanço de estoque dos produtos finais e peças, capacidade de serra e custos de preparação, visando minimizar os custos de produção, estoque, preparação e a perda ocorrida no processo de corte.

A fim de comparar as soluções que obteremos para o Problema Combinado, apresentamos no **Capítulo 4** o método geralmente utilizado na prática industrial. Esse método de solução consiste em resolver os problemas de corte de estoque e dimensionamento de lotes de forma separada.

Devido à alta complexidade do Modelo Combinado, o desenvolvimento de métodos de solução eficientes envolveu três simplificações distintas sobre o modelo apresentado no Capítulo 3, como mostra a Figura 3 a seguir.

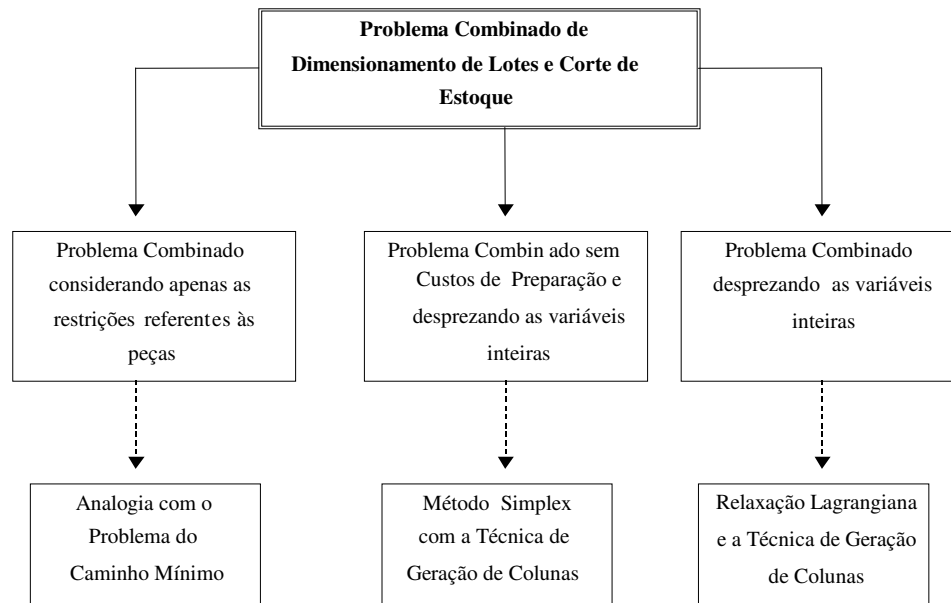


Figura 3: Três simplificações distintas do Modelo Combinado e seus respectivos métodos de resolução.

No **Capítulo 5** simplificamos o modelo combinado, considerando apenas as restrições referentes às peças e propomos um método heurístico de resolução baseado na analogia com o problema do caminho mínimo. Resultados computacionais são apresentados comparando as soluções obtidas pela heurística proposta com as soluções obtidas pelo método de decomposição apresentado no Capítulo 4 e também comparando com soluções ótimas.

Relaxando, no modelo original do Capítulo 3, as restrições de preparação e a condição de integralidade sobre as variáveis (tal simplificação se torna aceitável na prática desde que a demanda seja suficientemente grande), continuando ainda assim com um problema combinado de corte de estoque e dimensionamento de lotes, propomos no **Capítulo 6** um método de resolução ótimo para o problema. Essa abordagem baseia-se na utilização do método simplex com a geração de colunas proposta por Gilmore e Gomory (1965). Apresentamos também resultados computacionais comparando as soluções obtidas pelo método exato com as soluções obtidas pelo método geralmente utilizado na prática (apresentado no Capítulo 4).

Finalmente, no **Capítulo 7** propomos um método de resolução heurístico para o Problema Combinado apresentado no Capítulo 3, relaxando as restrições de integralidade. A heurística desenvolvida para esse problema baseia-se na relaxação lagrangiana e no método do subgradiente utilizado para atualizar o vetor multiplicador de lagrange. Testes computacionais são apresentados analisando a qualidade das soluções obtidas pelo desvio percentual entre os limitantes inferior e superior.

Embora o Problema de Dimensionamento de Lotes com restrições de Capacidade considerando tempos de preparação, estudado separadamente, não seja o foco desta tese, baseado na idéia de resolução do Problema Combinado descrito no Capítulo 5 (analogia com o problema do caminho mínimo) propomos, no **Capítulo 8**, quatro abordagens de soluções para este problema. Ainda neste capítulo estudamos o problema de *Setup Pairings*. Resultados computacionais são apresentados, comparando as soluções obtidas por Trigeiro et al (1989) e as soluções obtidas pelas quatro abordagens propostas.

Finalmente, no **Capítulo 9** são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 1

Revisão Bibliográfica do Problema Combinado

Introdução

O problema de selecionar objetos e definir como eles devem ser cortados consiste por si só em um problema de otimização combinatória bastante complexo que tem motivado intensas pesquisas. A combinação deste com a programação da produção é ainda pouco explorada na literatura, mas a constatação de sua relevância em diversas situações encontradas na prática o elegem como um interessante problema a ser pesquisado.

Drexl e Kimms (1997) sugerem para pesquisas futuras, problemas combinados (*Coordination Problem*), o problema de corte de estoque integrado ao problema de dimensionamento de lotes, descrevendo-os como “provavelmente o mais crucial objetivo para trabalhos futuros”.

Veremos a seguir alguns trabalhos encontrados neste assunto.

Revisão Bibliográfica

Reinders (1992) estudou o planejamento de produção no processo de corte de troncos de árvores. Os troncos passam por dois processos, o processo de corte dos troncos em variedades (troncos cortados na vertical) e o processo de corte de variedades em chapas (variedades cortadas na horizontal). Mas o problema consiste não apenas em otimizar o corte em um tronco de árvore, mas toda uma população. Os problemas que ocorrem nesse nível foram descritos como:

- Quantas variedades de quais tipos de quais troncos de árvores deveriam ser produzidas ou compradas ?
- E quando e quantas chapas de quais tipos de quais variedades deveriam ser produzidos?

O autor desenvolveu um modelo matemático para o problema acima. A solução foi interpretada pelo significado do problema dual e padrões de corte alternativos foram obtidos ajustando os preços das variedades e dos produtos baseados na interpretação das variáveis duais.

Hendry et al. (1996) realizaram um estudo de caso em uma fábrica de componentes de cobre, onde o foco principal consiste de três processos: derreter os pedaços de metal, transformá-los em toras e cortar as toras em toras de menor comprimento. O objetivo do trabalho foi investigar métodos alternativos de geração de um plano de produção tal que os custos fossem minimizados. Os autores, utilizaram um procedimento de solução dois-estágios para esse problema.

Nonas et al. (2000) propuseram uma formulação para o problema combinado de corte de estoque e dimensionamento de lotes para uma companhia da Noruega que produz um tipo especial de caminhões. A companhia produz a maioria das partes de aço dos caminhões, onde grandes placas de aço têm de ser cortadas em diferentes formas e tamanhos. Surge então um problema combinado de dimensionamento de lotes e corte de estoque bidimensional irregular, onde o objetivo é minimizar o custo total do corte no departamento de aço. Isso inclui os custos da perda ocorrida na operação de corte, o custo de estocagem e os custos de preparação para os diferentes padrões de corte a serem cortados. Para esse problema, os autores supuseram que as placas de aço têm somente uma dimensão padrão, não foram consideradas quaisquer restrições de capacidade e também foi suposto que os diferentes padrões de corte eram conhecidos a priori. Os algoritmos de resolução do problema proposto foram categorizados como algoritmos de aproximação, global e por tentativa. No primeiro, um algoritmo guloso que inicia com uma solução ótima para o problema de corte de estoque é proposto. No algoritmo global, uma busca iterativa em pontos extremos aumentando os custos de corte de estoque é realizada. O espaço de soluções para o algoritmo é limitado entre a solução ótima do problema de corte de estoque e um limitante inferior para a soma dos custos de estoque e preparação para a solução global. Finalmente, dois algoritmos por tentativa foram realizados colocando o ponto extremo inicial em diferentes graus.

Além disso, na literatura estão disponíveis alguns artigos referentes ao problema de corte de estoque considerando custos de preparação na troca de padrões de corte. McDiarmid (1999) mostra que o problema de minimizar os padrões de corte é NP-hard mesmo em casos especiais. Dizer que um problema é NP-hard significa que não existe e conjectura-se que provavelmente não existirá um algoritmo onde o número de operações elementares necessário para a obtenção de uma solução ótima é limitado por uma função polinomial. Portanto, é pouco provável que se encontre um algoritmo ótimo capaz de solucionar um exemplo real, com tempo computacional razoável.

Haessler (1975), um dos primeiros a determinar esse importante problema no processo de corte, propõe uma heurística baseada em encontrar um padrão de corte, segundo certos “descritores” e “nível de aspiração”. É uma heurística aplicável a problemas de tamanhos relativamente grandes, evita o arredondamento pois a solução já é inteira, além de ser rápida em relação ao tempo computacional e facilmente implementável.

Haessler (1988) apresenta algumas abordagens para a resolução de problemas de corte de estoque levando em consideração tanto os custos de perda no processo de corte como os custos de preparação na mudança de padrões de corte. Vahrenkamp (1996) propõe utilizar o algoritmo de Haessler (1975) para o mesmo problema, mas modificando o procedimento de busca de padrão de corte, onde o problema de múltiplas ocorrências de soluções equivalentes com diferentes padrões de corte é tratada utilizando a técnica de *cross over* bem conhecida dos algoritmos genéticos.

LeFrançois e Gascon (1995) apresentam uma análise de quatro diferentes abordagens para o problema de corte de estoque quando a função objetivo visa minimizar a troca de padrões de corte:

- heurística de Haessler (1975),
- heurística utilizada pela companhia (estudo de caso),
- SGPI: heurística baseada no método de resolução de Gilmore e Gomory (minimizando apenas a perda), e finalmente
- SGPI*: heurística baseada na adaptação da heurística de Haessler (1980) à SGPI.

Para cada heurística foram calculadas as perdas e as quantidades de diferentes tipos de padrões de corte utilizados. A conclusão tirada foi que a heurística de Haessler (1975) é a que oferece mais vantagens sobre as outras três, principalmente por diminuir a quantidade de diferentes tipos de padrões de corte, em alguns casos mais de 50%, mantendo a porcentagem da perda em um nível aceitável.

Morábito e Arenales (2000) apresentam uma análise do compromisso existente entre cortar padrões mais simples de serem produzidos e padrões que resultam em menores perdas de material, mas que reduzem a produtividade do equipamento de corte.

Nenhuma das abordagens anteriormente citadas considera o estágio de montagem das peças nos produtos finais e, em geral, nenhum custo de estocagem é levado em conta.

Veremos no próximo capítulo uma revisão bibliográfica dos problemas de corte de estoque e dimensionamento de lotes separadamente, uma vez que usaremos para a resolução do Problema Combinado alguns métodos clássicos da literatura utilizados para os problemas separados.

Capítulo 2

Problemas de Corte de Estoque e de Dimensionamento de Lotes – Alguns Algoritmos Clássicos

Introdução

Os problemas corte de estoque e dimensionamento de lotes considerados separadamente, constituem por si só problemas de otimização combinatória de alta complexidade. Neste capítulo faremos uma revisão de cada problema, apresentando alguns algoritmos clássicos, geralmente utilizados para solucionar os problemas de corte de estoque e dimensionamento de lotes tratados separadamente.

Problema de Dimensionamento de Lotes

O problema de dimensionamento de lotes consiste em planejar a quantidade a ser produzida dos itens em vários (ou único) estágios, em cada período ao longo de um horizonte de tempo finito, de modo a atender uma certa demanda e otimizar uma função

objetivo (por exemplo, minimizar os custos). Bahl et al. (1987) apresentam uma classificação de diferentes tipos de problemas de dimensionamento de lotes através da Figura 2.1.

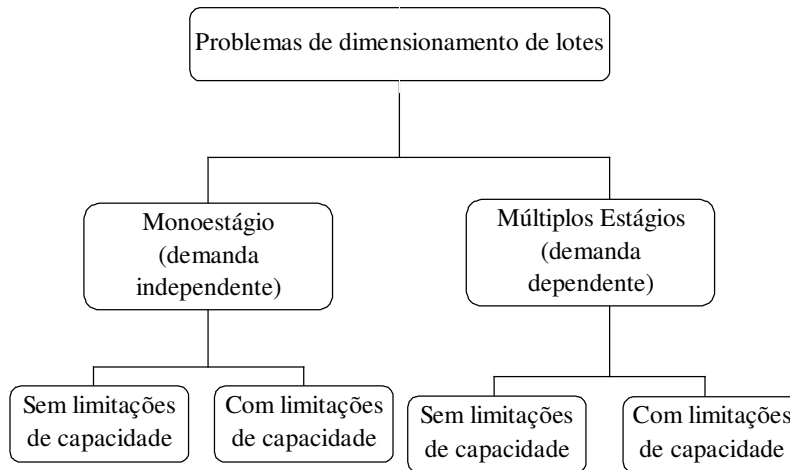


Figura 2.1 : Uma classificação dos problemas de dimensionamento de lotes.

Esta classificação é simplista, enfatizando apenas dois aspectos dos problemas de dimensionamento de lotes: o número de estágios (um sistema é dito monoestágio quando os itens a serem produzidos são independentes, isto é, nenhum segue ou antecede o outro, e um sistema é dito multiestágio quando a produção de um determinado item depende da produção de outro item, chamado item componente) e a existência de limitações de capacidade. Outros aspectos importantes tais como tempos e custos de preparação de máquinas, máquinas paralelas, por exemplo, não são contemplados nesta classificação simplificada.

Segundo Maes et al. (1991), encontrar uma solução factível para problemas de dimensionamento de lotes com capacidade limitada que considere tempo de preparação (*setup time*) é NP-completo. Por esta razão, a maioria das técnicas de resolução

encontradas na literatura são heurísticas dedicadas a resolver problemas específicos (Billington et al., 1983 e Bahl et al., 1987)

No caso do problema de dimensionamento de lotes monoestágio com capacidade infinita de produção, a minimização dos custos totais trata do balanceamento dos custos de produção e dos custos de estocagem. Seja T o número de períodos do horizonte de planejamento e M o número de diferentes tipos de itens (produtos finais) a serem produzidos. Este problema pode ser formulado como:

$$\text{Min} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^M (c_{it}x_{it} + h_{it}I_{it} + s_{it}z_{it}) \quad (2.1)$$

$$\text{s.a.: } x_{it} + I_{i,t-1} - I_{it} = d_{it} \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T \quad (2.2)$$

$$x_{it} \leq Q \cdot z_{it} \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T \quad (2.3)$$

$$x_{it}, I_{it} \geq 0 \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T \quad (2.4)$$

$$z_{it} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T \quad (2.5)$$

onde,

- dados do problema

c_{it} : custo de produção do item i no período t ,

h_{it} : custo de estoque do item i no período t ,

s_{it} : custo de preparação do item i no período t ,

d_{it} : demanda para o item i no período t ,

Q : limitante superior de x_{it} .

- variáveis do problema

x_{it} : quantidade a ser produzida do item i no período t ,

I_{it} : estoque do item i no fim do período t ,

z_{it} : custo de preparação, sendo 1 se há produção no período e 0 caso contrário.

A referência clássica para a resolução do problema de dimensionamento de lotes monoestágio com capacidade infinita de produção (2.1)-(2.5), é o artigo de Wagner e Whitin (1958), pois o problema pode ser decomposto em M subproblemas, um para cada item. E, cada subproblema pode ser resolvido utilizando um algoritmo ótimo de programação dinâmica.

Entretanto, se limitarmos a quantidade de recursos a serem utilizados e incluirmos tempos de preparação, obteremos o seguinte Modelo para o Problema de Dimensionamento de Lotes Monoestágio Capacitado com Tempo de Preparação:

$$\text{Min} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^M (c_{it} x_{it} + h_{it} I_{it} + s_{it} z_{it}) \quad (2.6)$$

$$\text{s.a.: } x_{it} + I_{i,t-1} - I_{it} = d_{it} \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T \quad (2.7)$$

$$\sum_{i=1}^M (v_i x_{it} + f_{it} z_{it}) \leq C_t \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T \quad (2.8)$$

$$x_{it} \leq Q \cdot z_{it} \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T \quad (2.9)$$

$$x_{it}, I_{it} \geq 0 \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T \quad (2.10)$$

$$z_{it} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T \quad (2.11)$$

onde como dados adicionais do problema (2.1)-(2.5) temos:

v_i : tempo necessário na produção do item i ,

C_t : quantidade disponível de recursos (em unidades de tempo) para cada período t ,

f_{it} : tempos de preparação para a produção do item i no período t .

Para o problema matemático inteiro-misto (2.6)-(2.11), Trigeiro et al. (1989) formulou um método heurístico de resolução baseado na relaxação lagrangiana. Observe que as únicas restrições que ligam os itens são as restrições de capacidade (2.8). Assim, ao se aplicar a relaxação lagrangiana às restrições (2.8), o problema torna-se do tipo (2.1)-(2.5), podendo então ser resolvido via programação dinâmica. O valor da função objetivo do problema relaxado (lagrangiano) produzirá um limitante inferior para o problema original (2.6)-(2.11), e o método do subgradiente é utilizado para atualizar os multiplicadores de lagrange, visando determinar o maior dos limitantes inferiores.

Provavelmente a solução do problema relaxado será ineficaz violando as restrições de capacidade. Para isso, Trigeiro et al. (1989) desenvolveu uma heurística de factibilização que parte da solução obtida pelo algoritmo de programação dinâmica, tentando ajustar os lotes (transferindo-os para períodos anteriores ou posteriores, se possível) de acordo com a capacidade disponível em cada período. O procedimento de factibilização possui dois passos: regressivo e progressivo no tempo.

Passo Regressivo no Tempo

No passo regressivo as transferências de produção são analisadas do último período para o segundo, $t=T, \dots, 2$. Para transferir a produção de um item i de um determinado período t tem-se:

Se o tamanho do lote do item i no período t não for maior do que a violação do período t , duas opções são consideradas:

- Mover todo o lote para o período imediatamente anterior ($t-1$)
- Mover todo o lote para outro período anterior ($t-j$, com $j>1$), onde $t-j$ é o primeiro período anterior no qual o item i já esteja sendo produzido. Assim evitam-se os custos associados a uma preparação.

No entanto, se o tamanho do lote é maior que a violação, três diferentes combinações de quantidades e períodos são considerados para a transferência:

- Mover a quantidade necessária para eliminar a violação para o período $t-1$.
- Mover a quantidade necessária para eliminar a violação para o período $t-j$.
- Mover todo o lote para o período $t-j$.

O item de menor custo é transferido de acordo com um dos procedimentos descritos acima. Se persistir a violação no período t , um outro item é escolhido e o processo é repetido até que a violação do período seja eliminada. O mesmo processo é aplicado ao período anterior ($t-1$) e assim por diante, até o período 2. Observe que ao final do passo regressivo tem-se uma solução factível, exceto possivelmente para o primeiro período.

Passo Progressivo no Tempo

Neste passo, as transferências de produção são analisadas do período $t=1$ até $T-1$. O período alvo é sempre o imediatamente posterior e a quantidade transferida é o estoque I_{it} . Os itens que podem ser transferidos são:

- Os itens que foram agrupados pelo algoritmo de Wagner e Whitin.
- Aqueles que foram transferidos pelo primeiro passo regressivo.

Os passos regressivo e progressivo são aplicados sucessivamente até que uma solução factível seja obtida ou um número limite de iterações seja atingido. Uma iteração do procedimento de factibilização é contada quando se executa um passo regressivo e um progressivo da heurística.

Vejamos a seguir uma revisão para o Problema de Corte de Estoque Bidimensional Guilhotinado em 2-Estágios.

Problema de Corte de Estoque

O problema de corte de estoque tem sido estudado desde a década de 60, consistindo na otimização do processo de corte de placas em peças menores nas quantidades e dimensões demandadas. Define-se *padrão de corte* como o arranjo das peças dentro de cada placa. Algumas regras são necessárias para a definição de um padrão de corte, por exemplo, cortes do tipo *guilhotinados* (cada corte feito sobre uma placa retangular sempre produz dois novos retângulos), limitação de peças (cortes restritos ou irrestritos), número de estágios (um corte é dito 2-estágios quando apenas uma mudança no sentido dos cortes guilhotinados é permitida: vertical/horizontal, ou horizontal/vertical), etc.. Mais ainda, dizemos que o problema é *bidimensional* quando duas dimensões são relevantes para o processo de cortagem, por exemplo no caso de indústrias de móveis (a Figura 2.2 retrata um plano de corte bidimensional guilhotinado 3-estágios). No caso de corte de bobinas ou barras, onde apenas uma dimensão é importante, o problema é dito *unidimensional*. Todos estes casos citados foram bastante estudados na literatura (Gilmore e Gomory, 1961, 1963, 1965; Hinxman, 1980; Morábito e Arenales, 1996; Christofides e Whitlock, 1977, entre outros).

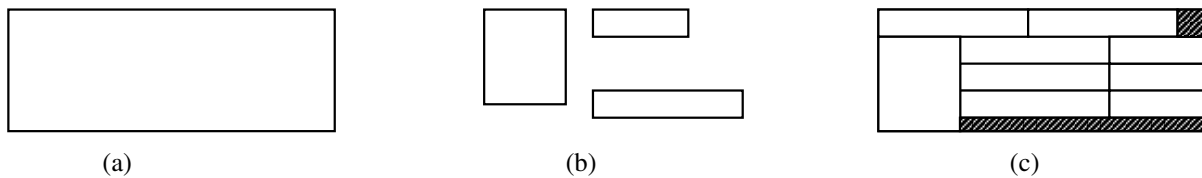


Figure 2.2: a. placa a ser cortada (objeto)
 b. itens demandados
 c. plano de corte guilhotinado 3-estágios

Para o problema de corte de estoque bidimensional guilhotinado irrestrito em 2-estágios, Gilmore e Gomory (1965) propuseram um método de resolução baseado no método simplex com a técnica de geração de colunas, apresentada a seguir. Morábito e

Arenales (1996) revisam este trabalho e fazem um estudo computacional comparando as soluções em 2-estágios com outras heurísticas.

Técnica de Geração de Colunas

Gilmore e Gomory (1965) propõem uma abordagem por otimização linear para o problema de corte de estoque bidimensional.

Sejam N o número de todos os possíveis padrões de corte e P a quantidade de diferentes tipos de peças. O modelo matemático para o problema segue:

$$\text{Min} \quad \sum_{j=1}^N cp \cdot y_j \quad (2.12)$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{j=1}^N a_{pj} y_j \geq d_p \quad p = 1, \dots, P \quad (2.13)$$

$$y_j \geq 0 \text{ e inteiros} \quad j = 1, \dots, N \quad (2.14)$$

onde,

cp : custo de cada placa (observe que neste caso apenas um tipo de placa está disponível em estoque (cp é constante), então a função objetivo (2.12) é equivalente a minimizar o

total de placas cortadas, ou seja $\text{Min} \sum_{j=1}^N y_j$);

a_{pj} : quantidade de peças do tipo p presentes no padrão de corte tipo j ;

d_p : demanda de peças do tipo p ;

E as variáveis de decisão são:

y_j : quantidade de placas cortadas no padrão j .

Existem dois fatores contribuindo para fazer esta formulação do problema de corte de estoque impraticável: (1) a restrição de integralidade e, (2) o tamanho de N que pode ser enorme.

Com relação à integralidade, podemos relaxá-la quando a demanda é suficientemente alta, dado que o número de placas a serem cortadas será grande. Em relação ao segundo fator, quando no método simplex chega-se no estágio de procurar uma nova coluna (ou padrão) que irá melhorar a solução, ao invés de procurar sobre uma vasta coleção de colunas (que torna o problema impraticável pelo grande número de variáveis envolvidas), simplesmente determina-se uma coluna útil resolvendo um problema auxiliar, que será de otimização combinatória, mas de um tipo especial, o problema de cortar uma única placa. Existem vários métodos de resolução deste problema auxiliar, tais como, a programação dinâmica ou o método de enumeração implícita. A geração de colunas surge naturalmente da aplicação do método simplex ao problema (2.12)-(2.14):

Seja π o vetor multiplicador associado às restrições (2.13). Utilizando o critério de Dantzig para escolher a coluna a entrar na base, isto é, a variável com menor custo relativo, obtemos:

$$\min cp - \pi.a_j, \text{ ou no caso de } cp \text{ constante, } \min 1 - \pi.a_j \quad (2.15)$$

Como os vetores a_j têm uma lei de formação (pois correspondem a padrões de corte), segue que o problema (2.15) consiste na resolução do seguinte subproblema:

$$\begin{aligned} & \max \pi.a \\ \text{s.a: } & a: \text{ corresponde a um padrão de corte} \\ & \text{bidimensional guilhotinado 2-estágios} \end{aligned} \quad (2.16)$$

O problema (2.16) deve ser resolvido encontrando uma coluna a , correspondente ao novo padrão de corte. Se $1 - \pi a \geq 0$ então a base atual é ótima e o PL está resolvido. Caso contrário, se $1 - \pi a < 0$, a coluna a entra na base. A escolha da coluna a sair da base segue os passos usuais do método simplex, encontrando então uma nova solução para o problema (2.12)-(2.14).

Existem vários métodos de resolução para os problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque tratados separadamente, porém mostramos apenas alguns pois o foco principal desta tese consiste em resolver os dois problemas de forma conjunta. Os métodos apresentados neste capítulo auxiliarão na resolução do Problema Combinado proposto nesta tese.

No próximo capítulo propomos um modelo matemático para o Problema Combinado.

Capítulo 3

Formulação Matemática do Problema Combinado de Dimensionamento de Lotes e Corte de Estoque

Introdução

O Problema Combinado consiste em decidir a quantidade de produtos finais a serem produzidos em cada período do horizonte de planejamento, tal que minimize não somente os custos de produção, preparação e estocagem (problema de dimensionamento de lotes), mas também a quantidade de placas a serem cortadas em peças a fim de compor os produtos finais demandados (problema de corte de estoque). Para isso, formulamos um modelo matemático inteiro-misto o qual analisa o compromisso entre antecipar a produção de certos lotes de produtos finais a fim de minimizar os custos no processo de corte e preparação, e o aumento dos custos de estocagem.

Uma relação importante existente no modelo está entre a demanda de um produto final e a demanda de seus itens (peças). A demanda de um produto final d_{it} ocorre externamente e as quantidades são determinadas pelo cliente. Tendo conhecida a produção dos produtos finais, é fácil obter a demanda interna dos itens, que é dada por $\sum_i r_{pi} x_{it}$, onde r_{pi} denota a quantidade necessária de peças do tipo p para produzir uma unidade do produto i , e x_{it} denota a quantidade produzida do produto i no período t .

Um outro ponto que nos aproxima de problemas reais é a inclusão da disponibilidade da serra em cada período. Temos de assegurar que o tempo gasto para cortar as placas não excede o tempo disponível. Observe que com a inclusão das restrições de capacidade de serra em cada período, ao resolvermos os problemas de forma separada, provavelmente encontraremos ineficiências na produção, enquanto que se resolvermos os problemas de forma combinada, podemos antecipar a produção de certos lotes, de forma a obter uma melhor utilização das máquinas ou evitar períodos em que os limites de capacidade de serra tenham sido ultrapassados.

Hipóteses adicionais devem ser consideradas na modelagem matemática do problema:

- sem perda de generalidade, podemos considerar apenas uma dimensão padrão para as placas disponíveis em estoque, digamos $L \times W$, disponível em quantidade suficiente para atender a demanda (caso não tenha em estoque, estas podem ser facilmente adquiridas de terceiros);
- o período será tratado como sendo um turno de trabalho em uma indústria,
- consideramos também o custo de preparação associado à produção ou não no período t , ou seja, haverá custo de preparação se houver produção em um determinado turno.

A seguir apresentamos o modelo matemático para o Problema Combinado.

Modelagem Matemática

Para a modelagem matemática do Problema Combinado a seguinte notação é utilizada:

- Índices:
 $t=1, \dots, T$ Número de períodos (ou turnos de trabalho).
 $p=1, \dots, P$ Número de diferentes tipos de peças a serem cortadas.
 $j=1, \dots, N$ Número de diferentes padrões de corte para a placa $L \times W$ a fim de produzir as peças requeridas.

$i=1, \dots, M$ Número de diferentes produtos finais demandados.

- Parâmetros:

c_{it} : custo de produção do produto final i no período t

h_{it} : custo de estocagem do produto final i no período t

hp_{pt} : custo de estocagem da peça do tipo p no período t

d_{it} : demanda do produto final i no período t

r_{pi} : número de peças do tipo p necessárias para formar uma unidade do produto final i

v_j : tempo gasto para cortar uma placa no padrão de corte j

b_t : capacidade de serra (em horas) no período t

s_{it} : custo de preparação para produzir o produto final i no período t

a_{pj} : número de peças do tipo p no padrão j

- Variáveis:

x_{it} : quantidade do produto final i produzido no período t

I_{it} : quantidade do produto final i em estoque no fim do período t

IP_{pt} : quantidade da peça do tipo p em estoque no fim do período t

y_{jt} : quantidade de placas cortadas usando o padrão de corte j no período t

z_{it} : variável binária: $z_{it} = 1$ se $x_{it} > 0$; zero, caso contrário

Para modelar esse problema, consideramos as seguintes restrições:

Balanco de Estoque de Produtos Finais: Esse conjunto de restrições considera o balanço de estoque de produtos finais, assegurando que a demanda de cada período seja atendida sem atraso, $I_{it} \geq 0$, $i=1, \dots, M$; $t=1, \dots, T$. Sem perda de generalidade, o estoque inicial é considerado nulo. Logo,

$$x_{it} + I_{i,t-1} - I_{it} = d_{it} \quad i=1, \dots, M; t=1, \dots, T$$

Balanco de Estoque de Peças: Esse conjunto de restrições assegura que a demanda de peças seja

satisfeita. A quantidade de peças do tipo p a serem produzidas é dada por $\sum_{j=1}^N a_{pj} y_{jt}$, $t=1, \dots, T$, e

considerando a produção do produto final i dada por x_{it} , para cada período t , a demanda de peças pode ser

facilmente calculada por $\sum_i r_{pi}x_{it}$, $p=1,\dots,P$; $t=1,\dots,T$. Sem perda de generalidade, o estoque inicial de peças é considerado nulo. Logo,

$$\sum_{j=1}^N a_{pj}y_{jt} + IP_{p,t-1} - IP_{pt} = \sum_{i=1}^M r_{pi}x_{it} \quad p=1,\dots,P; t=1,\dots,T$$

Capacidade de Serra: Existe uma capacidade limite de serra. Note que o tempo gasto para cortar uma placa depende do padrão de corte utilizado na mesma. Por exemplo, um padrão de corte 2-estágios requer menos tempo de produção do que um padrão de corte 3-estágios. Temos que assegurar que o tempo gasto para cortar placas nos diversos padrões de corte, não exceda o tempo limite, C_t , em cada período. Observe que não estamos considerando neste modelo os tempos de preparação. Portanto,

$$\sum_{j=1}^N v_j y_{jt} \leq C_t \quad t=1,\dots,T$$

Nesta tese consideramos apenas padrões de corte 2-estágios, de modo que o tempo gasto para cortar uma placa será constante para todos os padrões de corte. Em Morábito e Arenales (2000) um padrão de corte “tabuleiro”, mais simples que o padrão 2-estágios é estudado.

Produção: Se existe produção ao longo do período t então $z_{it}=1$, caso contrário $z_{it}=0$. Portanto,

$$x_{it} \leq Q \cdot z_{it} \quad i=1,\dots,M; t=1,\dots,T$$

onde Q é um número grande.

Objetivo: O objetivo do modelo consiste em minimizar: os custos dos produtos finais, usando, c_{ib} , h_{it} e s_{it} como os custos de produção, estoque e preparação, respectivamente; e os custos do processo de corte, usando, cp , como os custos de placas e hp_{pt} como custos de estoque das peças do tipo p no período t . Na prática, o objetivo visa encontrar um planejamento de produção ótimo de tal modo que minimize o número de placas a serem cortadas minimizando os custos de produção, estoque e preparação. Logo,

$$\sum_{i=1}^M \sum_{t=1}^T (c_{it}x_{it} + h_{it}I_{it} + s_{it}z_{it}) + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T cp \cdot y_{jt} + \sum_{p=1}^P \sum_{t=1}^T hp_{pt}IP_{pt}$$

Finalmente, o modelo matemático inteiro-misto para o Problema Combinado de Corte de Estoque e Dimensionamento de Lotes pode ser descrito como:

(MC)

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^M \sum_{t=1}^T (c_{it}x_{it} + h_{it}I_{it} + s_{it}z_{it}) + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T cp \cdot y_{jt} + \sum_{p=1}^P \sum_{t=1}^T hp_{pt}IP_{pt} \quad (3.1)$$

$$\text{s.a. :} \quad x_{it} + I_{i,t-1} - I_{it} = d_{it} \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T \quad (3.2)$$

$$\sum_{j=1}^N a_{pj}y_{jt} + IP_{p,t-1} - IP_{pt} = \sum_{i=1}^M r_{pi}x_{it} \quad p = 1, \dots, P ; t = 1, \dots, T \quad (3.3)$$

$$\sum_{j=1}^N v_j y_{jt} \leq C_t \quad t = 1, \dots, T \quad (3.4)$$

$$x_{it} \leq Q \cdot z_{it} \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T \quad (3.5)$$

$$x_{it}, I_{it} \geq 0 \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T \quad (3.6)$$

$$y_{jt} \geq 0 \text{ e inteiros} \quad j = 1, \dots, N ; t = 1, \dots, T \quad (3.7)$$

$$IP_{pt} \geq 0 \quad p = 1, \dots, P ; t = 1, \dots, T \quad (3.8)$$

$$z_{it} \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T \quad (3.9)$$

Observe que as restrições (3.3) são as únicas restrições que acoplam os dois problemas, pois incluem ambas as variáveis, x_{it} que definem o tamanho dos lotes e y_{jt} que definem a quantidade de placas utilizadas (cortadas).

Dificuldades do Modelo Combinado

A alta complexidade do modelo matemático do Problema Combinado deve-se a três fatores: (1) a integralidade das variáveis y_{jt} ; (2) as variáveis binárias de preparação z_{it} e (3) a grande quantidade de padrões de corte a_{pj} que podem ser gerados.

Devido a estas dificuldades, na prática as indústrias resolvem o problema combinado decompondo-o em dois subproblemas: problema de dimensionamento de lotes e problema de corte de

estoque, onde na literatura encontram-se métodos ótimos de resolução para cada um, como visto no Capítulo 2. Mas resolvendo-se o problema decomposto, mesmo obtendo a solução ótima para os dois problemas e agregando suas soluções, pode não ser compensador do ponto de vista do custo de produção global.

A fim de mostrar a desvantagem do método decomposto, proporemos ao longo desta tese a resolução do problema combinado de forma conjunta, sempre comparando suas soluções com as obtidas resolvendo os problemas de forma separada. Porém, devido à alta complexidade do problema combinado, resolveremos três variações do mesmo, descritas detalhadamente nos Capítulos 5, 6 e 7.

Segue no próximo capítulo a heurística de decomposição utilizada na prática para a resolução do problema em forma decomposta.

Capítulo 4

Resolução Prática do Problema Combinado

Introdução

Devido à alta complexidade do problema combinado, na prática, indústrias resolvem os problemas de corte de estoque e dimensionamento de lotes de forma independente.

Inicialmente, o processo de produção consiste em definir uma carteira de pedidos para um horizonte de planejamento finito (alguns dias, uma semana ou um mês) especificando as quantidades e dimensões dos produtos finais demandados e suas respectivas datas de entrega. Por exemplo, considere um horizonte de planejamento de 4 períodos e 3 tipos de produtos finais consistindo de 6 tipos de peças, como mostra a Figura 4.1.

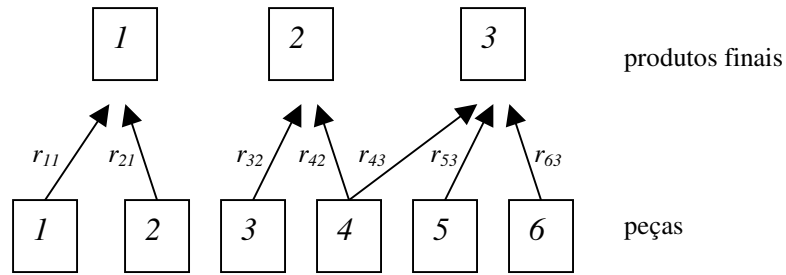


Figura 4.1: Estrutura do produto

Considere as quantidades demandadas dos produtos finais dadas pela Tabela 4.1.

	Período 1	Período 2	Período 3	Período 4
Produto Final 1	3	0	5	2
Produto Final 2	4	3	0	0
Produto Final 3	3	3	3	5

Tabela 4.1: Demanda dos produtos finais para o horizonte de planejamento de 4 períodos.

Temos então um problema de dimensionamento de lotes a ser resolvido, ou seja, dada a carteira de pedidos realizamos o planejamento da produção, decidindo a quantidade de cada tipo de produto final a ser produzido em cada período do horizonte de planejamento, visando minimizar os custos de produção, estoque e preparação.

Suponha que a solução do problema de dimensionamento de lotes para a demanda dos produtos finais dados na Tabela 4.1, resulte na produção dada pela Tabela 4.2.

	Período 1	Período 2	Período 3	Período 4
Produto Final 1	3	0	7	0
Produto Final 2	7	0	0	0
Produto Final 3	3	6	0	5

Tabela 4.2: Planejamento da Produção após resolver o problema de dimensionamento de lotes.

Podemos notar na Tabela 4.2 que alguns itens tiveram sua produção antecipada, obviamente aumentando os custos de estoque, porém obtendo vantagens nos custos de preparação.

Tendo em mãos a quantidade de cada produto final a ser produzido em cada período, facilmente esta quantidade é convertida em quantidade de peças a serem produzidas (utilizando a Figura 4.1). Obtemos então, na Tabela 4.3, a quantidade de cada tipo de peça a ser produzida em cada período do horizonte de planejamento:

	Período 1	Período 2	Período 3	Período 4
Peça Tipo 1	3	0	7	0
Peça Tipo 2	3	0	7	0
Peça Tipo 3	7	0	0	0
Peça Tipo 4	10	6	0	5
Peça Tipo 5	3	6	0	5
Peça Tipo 6	3	6	0	5

Tabela 4.3: Demanda de peças para cada período do horizonte de planejamento.

Assim, usando a informação da Tabela 4.3, para cada período resta resolver um problema de corte de estoque. Logo, para cada período são gerados os melhores padrões de corte, minimizando os custos de perda ou a quantidade de placas cortadas.

Finalmente, somando-se os custos da primeira parte (problema de dimensionamento de lotes) com os custos de placas gastas em cada período (problema de corte de estoque), temos o custo global do problema combinado. A essa maneira de resolução denominamos Heurística de Decomposição (HD).

Note que a solução obtida pela HD pode ser infactível, pois não observa a capacidade de serra. Neste caso, alguns lotes serão diminuídos.

Em resumo, a HD pode ser descrita da seguinte forma:

Heurística de Decomposição: Problemas de Corte de Estoque e de Dimensionamento de Lotes tratados separadamente.

Uma solução aproximada para o Problema Combinado (3.1)-(3.9) pode ser calculada decompondo-o em dois problemas separados, o problema de dimensionamento de lotes (PDL) e o problema de corte de estoque (PCE).

1. Inicialmente, resolva o PDL constituído pelo primeiro termo da função objetivo do problema (3.1)-(3.9) e das restrições (3.2), (3.5), (3.6) e (3.9), ou seja

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad \sum_{i=1}^M \sum_{t=1}^T (c_{it} x_{it} + h_{it} I_{it} + s_{it} z_{it}) \\
 & \text{s.a.:} \quad x_{it} + I_{i,t-1} - I_{it} = d_{it} \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T \\
 & \quad \quad x_{it} \leq Q \cdot z_t \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T \\
 & \quad \quad x_{it}, I_{it} \geq 0 \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T \\
 & \quad \quad z_t \in \{0, 1\}, \quad t = 1, \dots, T
 \end{aligned}
 \tag{PDL}$$

Seja \hat{x}_{it} , $i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T$ uma solução de PDL.

2. Como segundo passo, para cada período do horizonte de planejamento, resolvemos um problema de corte de estoque com restrições de capacidade, considerando a função objetivo constituída pelo segundo termo e respeitando as restrições (3.3), (3.4) e (3.7). Note que, ao resolver o problema de corte de estoque, x_{it} é substituído por \hat{x}_{it} (obtido da resolução de PDL). Assim, determinamos \hat{y}_{jt} , ou seja, a quantidade de placas cortadas conforme o padrão j , no período t , como solução do seguinte problema:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T cp \cdot y_{jt} \\
 \text{(PCE)} \quad & \text{s.a.:} \quad \sum_{j=1}^N a_{pj} y_{jt} \geq \sum_{i=1}^M r_{pi} \hat{x}_{it} \quad p = 1, \dots, P; t = 1, \dots, T \\
 & \sum_{j=1}^N v_j y_{jt} \leq C_t \quad t = 1, \dots, T \\
 & y_{jt} \geq 0 \text{ e inteiros} \quad j = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T
 \end{aligned}$$

3. Finalmente, a função objetivo do problema combinado é dada pela soma das funções objetivos dos problemas PDL e PCE.

Observe que, para o PCE não foi considerado estoque de peças provenientes das restrições (3.3). Se considerássemos o estoque de peças, o problema seria combinado, pois além de decidir os melhores padrões de corte levando-se em consideração \hat{x}_{it} decorrente do problema de dimensionamento de lotes, poderia antecipar a produção de peças em função de um melhor aproveitamento das placas. Como isso não é feito na prática, para o enfoque HD, excluimos o estoque de peças.

Dessa forma, para cada período resolvemos um problema de corte de estoque em 2-estágios de forma estagiada, ou seja, para cada período resolvemos o PCE, subtraindo as peças que sobraram de um período anterior na demanda de peças atual $(\sum_{i=1}^M r_{pi} \hat{x}_{it})$.

Portanto, o PCE modificado tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T cp \cdot y_{jt} \\
 \text{s.a.:} \quad & \sum_{j=1}^N a_{pj} y_{jt} \geq \text{demanda}_{peças}_{pt} \quad p = 1, \dots, P; t = 1, \dots, T \\
 & \sum_{j=1}^N v_j y_{jt} \leq C_t \quad t = 1, \dots, T \\
 & y_{jt} \geq 0 \quad j = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T
 \end{aligned}$$

onde, $demanda_peças_{pt} = (\sum_{i=1}^M r_{pi} \hat{x}_{it})$ - (peças que sobraram no período anterior).

Vale observar que a integralidade das variáveis y_{jt} foram relaxadas devido às altas demandas encontradas na prática.

Método de Resolução dos Problemas PDL e PCE

Como o PDL é um problema de dimensionamento de lotes monoestágio com capacidade infinita de produção para vários itens (ou produtos finais), podemos resolvê-lo decompondo-o em M subproblemas com apenas um item (produto final) sendo que cada um desses subproblemas pode ser resolvido utilizando programação dinâmica. Para isso, usamos o algoritmo de Wagner e Whitin (1958) implementado conforme a sugestão de Evans (1985), mencionado no Capítulo 2.

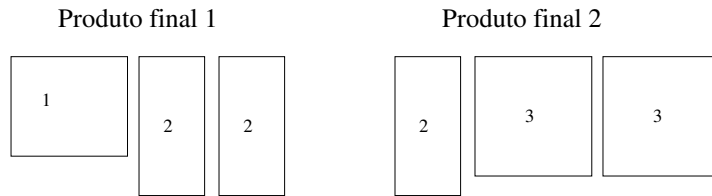
O PCE representa um problema de corte de estoque com restrições de capacidade e para solucioná-lo utilizamos o pacote comercial CPLEX juntamente com a técnica de geração de colunas, também discutida no Capítulo 2.

Embora a resolução dos problemas de forma independente seja simples pelo fato de já existirem métodos clássicos na literatura que os resolvem de forma eficiente, tratar os problemas separadamente pode fazer crescer os custos de produção global, especialmente se o estágio de corte for economicamente relevante no processo, bem como soluções ineficazes poderiam ser geradas, obrigando revisões (novas heurísticas) no dimensionamento de lotes.

A seguir, apresentamos um exemplo numérico a fim de mostrar a qualidade da solução quando se resolvem os problemas de forma separada (HD) e quando são resolvidos de forma conjunta (PC), utilizando o pacote comercial AMPL/CPLEX. O exemplo se destina a ilustrar a vantagem de desenvolver um método para a resolução dos problemas de corte de estoque e dimensionamento de lotes de forma conjunta.

Exemplo Numérico

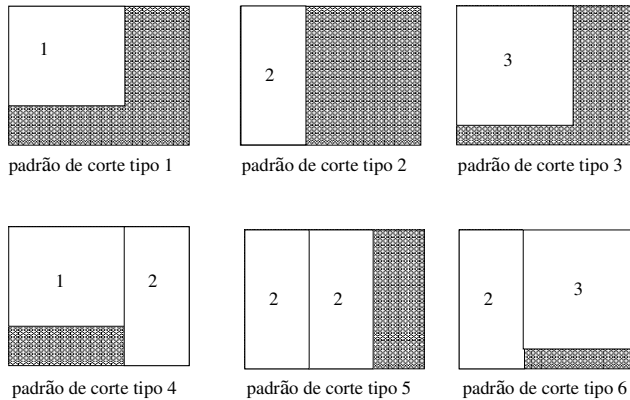
Considere dois produtos finais constituídos pelos seguintes tipos e quantidades de peças.



As dimensões das peças são dadas por:

	Peça tipo 1	Peça tipo 2	Peça tipo 3
comprimento (cm)	70	50	70
largura (cm)	80	120	100

Dada uma placa retangular de dimensões (120cm x 120cm) e a partir dos três tipos de peças apresentados, os possíveis padrões de corte (não permitindo rotações das peças) são:



Os custos das peças e placas são dados por $c=10^{-4} R\$/cm^2$ e os custos dos produtos finais são dados pela soma dos custos das peças que os constituem. O custo de estoque das peças e produtos finais em cada um dos dois períodos é dado por 2% dos custos das respectivas peças e produtos finais. Os custos de preparação são R\$0,03.

Seja a demanda de produtos finais para o horizonte de planejamento de 2 períodos dada pela seguinte tabela.

	Período 1	Período 2
Produto final 1	1	0
Produto final 2	0	1

Resolvemos então o exemplo acima utilizando as abordagens: (1) Heurística de Decomposição (HD) e, (2) Problema Combinado (PC).

Resolvendo o problema de dimensionamento de lotes para a demanda acima, os dois métodos (HD e PC) obtiveram a mesma solução, lote-por-lote, ou seja, a produção resultante para os períodos do horizonte de planejamento é a mesma que a demanda desses períodos.

O próximo passo consiste em converter a produção de produtos finais obtida após resolver o problema de dimensionamento de lotes em produção de peças:

	Período 1	Período 2
Peça tipo 1	1	0
Peça tipo 2	2	1
Peça tipo 3	0	2

Finalmente, resolvendo o problema de corte, obtivemos os seguintes resultados:

Heurística (HD)		
	Quantidade de placas utilizadas	Sobra de Peças
Período 1	1 placa no padrão 1 1 placa no padrão 5	0
Período 2	1 placa no padrão 6 1 placa no padrão 3	0
Total de placas utilizadas	4 placas	

Problema Combinado (PC)		
	Quantidade de placas utilizadas	Sobra de Peças
Período 1	1 placa no padrão 4 1 placa no padrão 6	1 peça tipo 3
Período 2	1 placa no padrão 6	0
Total de placas utilizadas	3 placas	

Observando as soluções obtidas nas duas tabelas anteriores, notamos, como esperado, que o problema combinado resolveu o exemplo levando em consideração todos os períodos, ou seja, ao invés de cortar uma placa do tipo 1 e uma do tipo 5, ele cortou uma placa do tipo 4 e uma do tipo 6, guardando em estoque uma peça do tipo 3 a qual será usada no próximo período. Com essa peça em estoque, no período 2, faz-se necessário apenas cortar um tipo de placa, obtendo-se uma economia de uma placa com relação à resolução separada.

Podemos então concluir que, considerando os problemas de forma separada, o modelo se torna “míope” em relação à produção dos próximos períodos e pode não usar adequadamente os padrões de corte. Podemos também notar a importância das variáveis de estoque presentes no modelo.

Um leitor crítico poderia argumentar que o tamanho do exemplo utilizado e os ganhos foram modestos. Porém, se aumentarmos essas quantidades na procura de maiores ganhos, o pacote AMPL/CPLEX dificilmente encontrará solução em tempos computacionais razoáveis.

Devido à alta complexidade do Modelo Combinado, propomos três métodos de resolução referentes a três alterações feitas no Modelo Combinado, como mostram os capítulos 5, 6 e 7, respectivamente. Em cada Modelo “alterado” proposto, mostramos a eficácia de se resolver os problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque de forma conjunta.

Capítulo 5

Enfoque usando o Problema Combinado Simplificado como uma Rede de Caminho Mínimo

Introdução

Como já mencionado no Capítulo 3, o Problema Combinado considerando variáveis inteiras, variáveis binárias e o conhecimento *a priori* de todos os padrões de corte, tornam o problema de difícil resolução. Por este motivo, em uma primeira abordagem simplificaremos o problema apresentando um método de resolução baseado no problema de caminho mínimo. Simplificaremos o Problema Combinado de tal forma que serão consideradas apenas as restrições referentes às peças, excluindo as restrições referentes aos produtos finais. Isso é aceitável, pois tendo a demanda de produtos finais, facilmente obtemos a demanda de peças e mostraremos que ainda assim, continuamos com o compromisso entre produzir ou não antecipadamente certos lotes de peças. Apresentaremos também resultados computacionais comparando soluções obtidas pelo Problema Combinado Simplificado com as soluções obtidas utilizando a Heurística de Decomposição. Também, a fim de analisar a qualidade das soluções obtidas pelo Problema Combinado Simplificado, resolvemos algumas instâncias pequenas de forma exata (através do pacote comercial AMPL/CPLEX).

A seguir apresentaremos o novo modelo matemático considerado para o Problema Combinado Simplificado.

Modelagem Matemática

Sejam T o número de períodos (ou turnos de trabalho), P a quantidade de diferentes tipos de peças e N a quantidade de todos os possíveis padrões de corte. Para o modelo matemático simplificado, consideramos as seguintes restrições:

Balço de Estoque de Peças: Como no Modelo Combinado (3.1)-(3.8), essas restrições consideram o balanço de estoque de peças de modo que a demanda seja atendida em cada período do horizonte de planejamento. Supomos que a demanda seja conhecida para cada período t . Na prática, indústrias usualmente trabalham com demanda em produtos finais, mas como já vimos, tal demanda pode ser facilmente convertida em demanda de peças. Logo, trataremos apenas com a demanda d_{pt} , $p=1, \dots, P$, $t=1, \dots, T$. Sejam IP_{pt} as variáveis que representam o estoque de peças do tipo p no período t . Sem perda de generalidade, o estoque inicial é considerado nulo. A quantidade de peças a serem produzidas é dada por $\sum_{j=1}^N a_{pj} y_{jt}$, onde a_{pj} denota a quantidade de peças do tipo p encontradas no padrão de corte j e y_{jt} representa a quantidade de placas no padrão j usadas no período t . Portanto,

$$\sum_{j=1}^N a_{pj} y_{jt} + IP_{p,t-1} - IP_{pt} = d_{pt} \quad p = 1, \dots, P; t = 1, \dots, T$$

Capacidade de Serra: Existe uma capacidade de serra limite no tempo de uso da máquina de corte. Logo, temos que assegurar que o tempo gasto para cortar placas no padrão de corte j , v_j , não exceda o tempo limite, C_t , em cada período. Portanto,

$$\sum_{j=1}^N v_j y_{jt} \leq C_t \quad t = 1, \dots, T$$

Também nesse capítulo trataremos apenas com padrões de corte 2-estágios, logo o tempo para cortar uma placa é constante para todos os padrões de corte.

Preparação: Esse conjunto de restrições difere das restrições (3.5) do modelo combinado, pois como estamos considerando apenas as peças, nesse conjunto o custo de preparação está relacionado ao corte ou não de placas no período, ou seja, se houver produção, ou, se houver placas a serem cortadas em um dado período ($y_{jt} > 0$) então $z_t = 1$, caso contrário $z_t = 0$. Portanto,

$$y_{jt} \leq Q \cdot z_t \quad j = 1, \dots, N ; t = 1, \dots, T$$

onde Q é um número grande.

Objetivo: O planejamento de produção para o problema combinado simplificado leva em consideração os custos da perda no processo de corte, os custos de estoque e de preparação de produção. Na prática, esse objetivo nos leva a minimizar o número de placas cortadas necessárias para a produção da quantidade de peças demandadas considerando, entretanto, os custos de estocagem e preparação. Sejam, cp , hp_{pt} e s_t os custos das placas, estoque de uma peça do tipo p no período t e custo de preparação no período t , respectivamente. Logo, desejamos minimizar a seguinte função objetivo:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T cp \cdot y_{jt} + \sum_{p=1}^P \sum_{t=1}^T hp_{pt} IP_{pt} + \sum_{t=1}^T s_t z_t$$

O modelo matemático, que chamaremos de Modelo Combinado Dinâmico (MCD), será:

$$\begin{aligned}
& \text{Min} \quad \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T cp \cdot y_{jt} + \sum_{p=1}^P \sum_{t=1}^T hp_{pt} IP_{pt} + \sum_{t=1}^T s_t z_t \\
& \text{s.a.:} \quad \sum_{j=1}^N a_{pj} y_{jt} + IP_{p,t-1} - IP_{pt} = d_{pt} \quad p = 1, \dots, P; t = 1, \dots, T \\
& \quad \quad \sum_{j=1}^N v_j y_{jt} \leq C_t \quad t = 1, \dots, T \\
\text{(MCD)} \quad & y_{jt} \leq Q \cdot z_t \quad j = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T \\
& y_{jt} \geq 0 \text{ e inteiros} \quad j = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T \\
& IP_{pt} \geq 0 \quad p = 1, \dots, P; t = 1, \dots, T \\
& z_t \in \{0, 1\} \quad t = 1, \dots, T
\end{aligned}$$

Novamente, há três grandes dificuldades para se encontrar um método de resolução para o MCD: (1) a integralidade das variáveis y_{jt} , (2) a enorme quantidade de padrões de corte (a_{pj}) que podem ser gerados e (3) as variáveis binárias de preparação de produção. Para superar essas dificuldades propomos um método heurístico em uma forma estagiada, usando uma analogia com o problema do caminho mínimo, como segue.

Heurística RCM: Método de Resolução

A proposta é resolver o modelo MCD através de um enfoque heurístico onde usa-se uma analogia com um problema de caminho mínimo. Chamaremos esta heurística de RCM (rede de caminho mínimo).

Considere um grafo onde os nós representam os períodos e cada arco corresponde a um problema associado de corte de estoque capacitado. Suponha, que o arco (k, l) corresponda aos períodos k e l . Nesse problema estamos procurando por uma solução de corte de estoque que utilize a menor quantidade de placas satisfazendo a soma das demandas de peças dos períodos $k, k+1, \dots, l-1$. A Figura 5.1 corresponde à rede constituída por 4 períodos e seus respectivos arcos. A Tabela 5.1 denota, para cada arco, o período t em que haverá produção (z_t) e a demanda de peças a ser encontrada nesse período (D_{pt}).

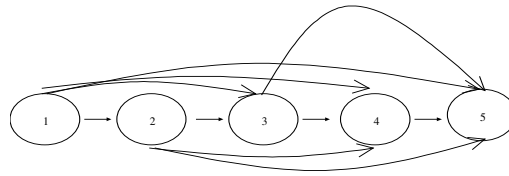


Figura 5.1: Rede de Caminho Mínimo

Table 5.1: Representação da demanda de peças e preparação para cada arco da Figura 5.1

Arco 1-2 $D_{pt}=d_{p1}$ $z_1=1$	Arco 1-3 $D_{pt}=d_{p1}+d_{p2}$ $z_1=1$	Arco 1-4 $D_{pt}=d_{p1}+d_{p2}+d_{p3}$ $z_1=1$	Arco 1-5 $D_{pt}=d_{p1}+d_{p2}+d_{p3}+d_{p4}$ $z_1=1$
---	--	---	--

Arco 2-3 $D_{pt}=d_{p2}$ $z_2=1$	Arco 2-4 $D_{pt}=d_{p2}+d_{p3}$ $z_2=1$	Arco 2-5 $D_{pt}=d_{p2}+d_{p3}+d_{p4}$ $z_2=1$
---	--	---

Arco 3-4 $D_{pt}=d_{p3}$ $z_3=1$	Arco 3-5 $D_{pt}=d_{p3}+d_{p4}$ $z_3=1$
---	--

Arco 4-5 $D_{pt}=d_{p4}$ $z_4=1$

Por exemplo, o Arco 1-4 na Figura 5.1, corresponde à produção da demanda das peças dos períodos 1, 2 e 3 ($D_{pt}=d_{p1}+d_{p2}+d_{p3}$) no início do período 1 ($z_1=1$). O Arco 2-4 corresponde à produção da demanda das peças dos períodos 2 e 3 ($D_{pt}=d_{p2}+d_{p3}$) no início do período 2 ($z_2=1$).

Associado a cada arco (k,l) existe um problema de corte de estoque capacitado a ser resolvido, que é uma simplificação do modelo MCD. O valor da função objetivo obtida dessa resolução é então definido como o custo associado ao arco (k,l) .

Para cada arco (k,l) , onde $k < l$, temos o seguinte problema de corte de estoque capacitado a ser resolvido, que chamaremos de Modelo Combinado Estagiado (MCE):

$$\begin{aligned}
 \text{(MCE)} \quad & \text{Min} \quad \sum_{j=1}^N cp \cdot y_{jk} + s_k + \sum_{p=1}^P \sum_{t=k+1}^{l-1} hp_{pt} d_{pt} \\
 & \text{s.a.:} \quad \sum_{j=1}^N a_{pj} y_{jk} \geq \sum_{t=k}^{l-1} d_{pt} \quad p = 1, \dots, P \\
 & \quad \quad \quad \sum_{j=1}^N v_j y_{jk} \leq C_k \\
 & \quad \quad \quad y_{jk} \geq 0 \text{ e inteiros} \quad j = 1, \dots, N
 \end{aligned}$$

O primeiro termo da função objetivo de MCE minimiza a quantidade de placas a serem cortadas, o segundo termo denota o custo de preparação requerido para o período k e o terceiro termo representa os custos de estoque das peças nos períodos $k+1$ a $l-1$.

A restrição de integralidade em MCE pode ser relaxada quando a demanda é suficientemente grande. Isso significa que após resolver o PL arredondamos as variáveis inteiras.

Note que as variáveis binárias z_t em MCD aparecem em MCE como parâmetros, mas a enorme quantidade de padrões de corte que podem ser gerados ainda é presente no modelo MCE. Se resolvermos esse problema inteiro-misto utilizando um pacote comercial, apenas conseguiremos resolver instâncias pequenas, porém podemos utilizar um algoritmo muito conhecido na literatura, o método simplex com geração de colunas, resolvendo então o MCE com suas restrições de integralidade relaxadas.

Após resolver $(T^2+T)/2$ problemas associados (um para cada arco), a rede é montada e então resta apenas resolver um simples problema do caminho mínimo. Denotaremos essa proposta de resolução de RCM (rede de caminho mínimo).

A fim de mostrar a qualidade das soluções obtidas utilizando a heurística proposta (RCM), faremos a comparação com as soluções obtidas resolvendo os problemas de forma separada (Heurística de Decomposição - HD), conforme descrito no capítulo 4.

Mas como algumas restrições do Modelo Combinado não foram consideradas em relação ao Capítulo 4, a heurística de decomposição será um pouco modificada, da seguinte forma.

1. A heurística de decomposição para o modelo MCD consiste em resolver inicialmente o seguinte Problema de Dimensionamento de Lotes:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \sum_{p=1}^P \sum_{t=1}^T (c_p \cdot x_{pt} + h_p \cdot IP_{pt}) + \sum_{t=1}^T s_t z_t \\
 \text{s.a.} : \quad & x_{pt} + IP_{p,t-1} - IP_{pt} = d_{pt} \quad p = 1, \dots, P ; t = 1, \dots, T \\
 & x_{pt} \leq Q \cdot z_t \quad p = 1, \dots, P ; t = 1, \dots, T \\
 & x_{pt}, IP_{pt} \geq 0 \quad p = 1, \dots, P ; t = 1, \dots, T \\
 & z_t \in \{0, 1\} \quad t = 1, \dots, T
 \end{aligned}$$

onde, x_{pt} representa a quantidade de peças do tipo p a serem produzidas em cada período t .

2. Resolvendo o problema acima, obteremos a quantidade de peças a serem produzidas em cada período t , representadas pela variável \bar{x}_{pt} , que serve de entrada para o próximo estágio. Finalmente, para cada período t resta resolver o seguinte Problema de Corte de Estoque Capacitado:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T c_p \cdot y_{jt} \\
 \text{s.a.} : \quad & \sum_{j=1}^N a_{pj} y_{jt} \geq \bar{x}_{pt} \quad p = 1, \dots, P ; t = 1, \dots, T \\
 & \sum_{j=1}^N v_j y_{jt} \leq C_t \quad t = 1, \dots, T \\
 & y_{jt} \geq 0 \text{ e inteiros} \quad j = 1, \dots, N ; t = 1, \dots, T
 \end{aligned}$$

3. O modelo de corte de estoque capacitado no passo 2 nos leva à mínima quantidade de placas a serem cortadas, \bar{y}_j , enquanto produzindo \bar{x}_{pt} peças do tipo p no período t .

Dado que os problemas de Dimensionamento de Lotes e Corte de Estoque tratados separadamente são os mesmos apresentados no Capítulo 4, os métodos de resolução para tais problemas foram detalhados quando apresentamos a Heurística HD.

Resultados Computacionais

O algoritmo proposto, RCM, foi programado em Pascal e executado em um Pentium III 500MHz. Realizamos dois conjuntos de testes para os algoritmos, RCM e HD. No primeiro conjunto comparamos os resultados obtidos utilizando a abordagem RCM com as soluções obtidas por HD. Uma segunda comparação observa a qualidade da solução quando se compara a abordagem RCM com as soluções ótimas obtidas pelo pacote comercial AMPL/CPLEX (para instâncias pequenas).

1. Comparação entre as abordagens RCM e HD

Comparamos os resultados obtidos pela heurística proposta que utiliza a rede de caminho mínimo, RCM, com os resultados obtidos resolvendo os problemas de forma separada, HD. As dimensões (L, W) das placas são dadas por (100,120), as dimensões das peças são geradas aleatoriamente no intervalo [20,75] e a demanda também é gerada aleatoriamente no intervalo [30,300]. O custo de cada peça é dado por 1% da área da respectiva peça e o custo de estoque é dado por 2% do custo da respectiva peça. Todas as instâncias foram resolvidas considerando os custos de preparação com os valores de 5, 20 e 50. A capacidade é constante ao longo dos períodos e foi calculada de modo a ser suficiente para produzir o arco (0,T) para ambas as abordagens. O custo da placa é fixado em 5,0 para todas as instâncias.

As Tabelas 5.2 e 5.3 ilustram a performance da heurística RCM considerando 4 e 10 períodos, respectivamente, como horizonte de planejamento. A coluna *P* denota a quantidade de diferentes tipos de peças a serem produzidas, a coluna *Custos de Preparação* denota os custos de preparação que variam entre 5, 20 e 50, a coluna *Arcos* representa os arcos utilizados pela heurística RCM, a coluna *Solução RCM* mostra a soma dos custos de placas cortadas, custos de estoque e custos de preparação de produção, obtidas utilizando a abordagem RCM, enquanto que a coluna *Solução HD* denota a soma dos custos de placas, estoque e preparação de produção utilizando abordagem HD. Observe que ao lado de cada solução HD existe um número após um hífen que representa a quantidade de períodos em que há produção na solução HD. Finalmente, a coluna *Lucro (%)* denota o ganho percentual obtido utilizando RCM em relação à solução de HD

$$\left(100. \frac{\text{solução HD} - \text{solução RCM}}{\text{solução HD}} \right).$$

Tabela 5.2: Resultados computacionais considerando um horizonte de planejamento de 4 períodos

Exemplos	P	Custos de Preparação s_t	Arcos	Solução (RCM)	Solução (HD)	Lucro (%)
1	10	5	0-1,1-3,3-4	4061	5206-4	28,2
		20	0-1,1-3,3-4	4116	4931-3	19,8
		50	0-3,3-4	4174	4931-3	18,1
2	10	5	0-1,1-3,3-4	3557	4205-4	18,2
		20	0-2,2-4	3593	4184-3	16,4
		50	0-2,2-4	3653	4074-1	11,5
3	10	5	0-1,1-4	4315	4883-4	13,2
		20	0-1,1-4	4345	4364-1	0,43
		50	0-4	4394	4394-1	0,00
4	10	5	0-3,3-4	7022	8230-4	17,2
		20	0-4	7043	7134-2	1,30
		50	0-4	7073	7073-1	0,00
5	10	5	0-1,1-3,3-4	3982	4354-4	9,34
		20	0-3,3-4	4024	4051-1	0,67
		50	0-4	4081	4081-1	0,00
6	20	5	0-1,1-3,3-4	8977	9830-4	9,50
		20	0-1,1-3,3-4	9022	9118-1	1,06
		50	0-1,1-3,3-4	9112	9148-1	0,40
7	20	5	0-1,1-2,2-	8340	8747-4	4,88
		20	3,3-4	8345	8433-2	1,05
		50	0-1,1-2,2-4 0-2,2-4	8411	8414-1	0,03
8	20	5	0-1,1-4	11164	12218-4	9,44
		20	0-1,1-4	11194	11202-1	0,07
		50	0-4	11232	11232-1	0,00
9	20	5	0-3,3-4	13034	13467-4	14,3
		20	0-4	13076	13106-1	0,30
		50	0-4	13106	13106-1	0,00
10	20	5	0-2,2-3,3-4	8619	9018-4	4,63
		20	0-2,2-3,3-4	8664	8802-2	1,60
		50	0-2,2-3,3-4	8754	8787-1	0,38
Média		5				12,89
		20				4,26
		50				3,04

Tabela 5.3: Resultados computacionais considerando um horizonte de planejamento de 10 períodos

Exemplos	P	Custos de Preparação s_t	Arcos	Solução (RCM)	Solução (HD)	Lucro (%)
1	10	5	0-1,1-2,2-4,4-5,5-7,7-8,8-10	11384	13175-10	15,7
		20	0-2,2-4,4-6,6-8,8-10	11488	12357-6	7,5
		50	0-2,2-5,5-8,8-10	11618	12527-3	7,8
2	10	5	0-2,2-4,4-6,6-9,9-10	7749	8242-10	6,4
		20	0-2,2-4,4-6,6-9,9-10	7824	8512-6	8,8
		50	0-3,3-6,6-10	7955	8518-2	7,1
3	10	5	0-3,3-6,6-9,9-10	7469	8510-10	13,9
		20	0-3,3-6,6-9,9-10	7529	8589-4	14,1
		50	0-3,3-10	7605	8743-3	14,9
4	10	5	0-3,3-6,6-7,7-8,8-9,9-10	12990	15591-10	20,1
		20	0-3,3-6,6-8,8-10	13065	15379-8	17,7
		50	0-3,3-6,6-8,8-10	13185	14102-5	6,9
5	10	5	0-1,1-3,3-5,5-7,7-8,8-10	10512	12288-10	16,9
		20	0-3,3-7,7-8,8-10	10635	11944-6	12,3
		50	0-3,3-7,7-10	10707	11449-2	6,9
6	20	5	0-1,1-3,3-4,4-6,6-9,9-10	22759	25174-10	10,6
		20	0-1,1-3,3-4,4-6,6-9,9-10	22849	24283-7	6,2
		50	0-3,3-6,6-9,9-10	23007	24602-3	6,9
7	20	5	0-1,1-2,2-5,5-7,7-10	18052	20005-10	10,8
		20	0-1,1-2,2-5,5-7,7-10	18127	20294-8	11,9
		50	0-1,1-2,2-5,5-7,7-10	18277	19132-4	4,6
8	20	5	0-1,1-4,4-8,8-10	21771	24479-10	12,4
		20	0-5,5-8,8-10	21819	25674-8	17,6
		50	0-5,5-8,8-10	21909	23549-4	7,5
9	20	5	0-2,2-7,7-8,8-10	24590	27452-10	11,6
		20	0-2,2-6,6-10	24648	26914-7	9,2
		50	0-2,2-6,6-10	24738	26043-3	5,3
10	20	5	0-2,2-3,3-5,5-7,7-10	18951	21178-10	11,7
		20	0-2,2-3,3-5,5-7,7-10	19026	20929-7	10,1
		50	0-2,2-5,5-7,7-10	19174	19990-3	4,2
Média		5				13,0
		20				11,5
		50				8,3

Note que para os problemas com 10 períodos os ganhos não são maiores em média. Para problemas com baixos custos de preparação ($s_i=5$), observamos uma maior economia nos custos globais, de 13%, em média. Note que o ganho em um caso isolado chegou a 28% (Tabela 5.2). Quando os custos de preparação aumentam, ($s_i=20, 50$), ambas as abordagens têm um alto custo de estocagem, mas em qualquer um dos casos, a abordagem RCM apresenta um ganho significativo nos custos globais em relação à abordagem HD. Isso nos mostra claramente que a heurística da rede de caminho mínimo fornece um ganho significativo comparado à prática usual. Mais ainda, a abordagem RCM é mais rápida e capaz de resolver problemas de tamanhos reais. A média do tempo computacional para as instâncias da Tabela 5.2 é de 35 segundos, e de 135 segundos para as instâncias da Tabela 5.3.

Para melhor entender de onde vêm os ganhos, faremos a seguir uma análise mais cuidadosa do que acontece com os custos de estoque e de placas obtidos por ambas as abordagens, para os exemplos fornecidos nas Tabelas 5.2 e 5.3.

Figura 5.1: Comparação entre as soluções obtidas por RCM e HD, com relação aos custos de estoque e placas, variando os custos de preparação (T=4).

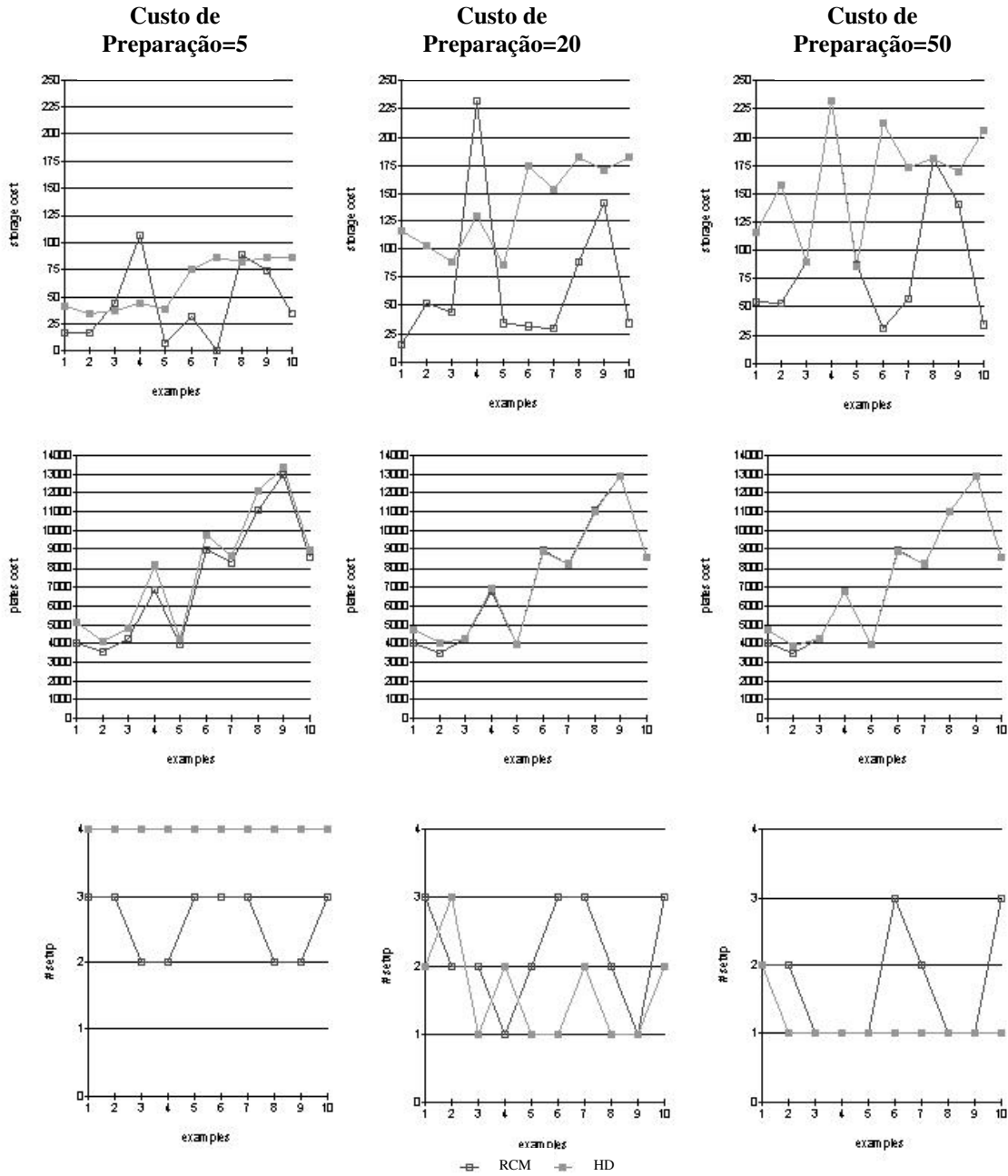
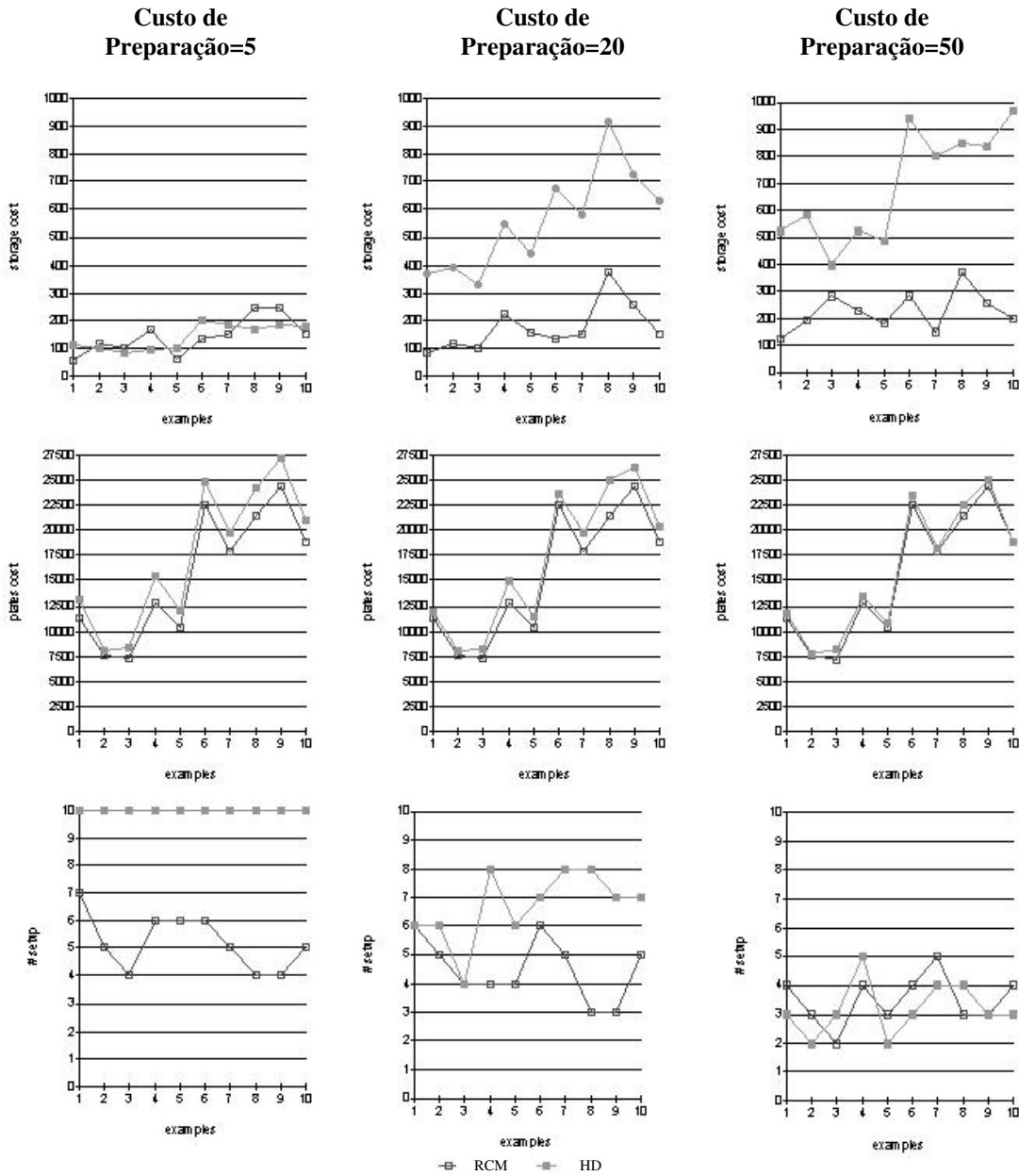


Figura 5.2: Comparação entre as soluções obtidas por RCM e HD, com relação aos custos de estoque e placas, variando os custos de preparação ($T=10$).



As figuras 5.2 e 5.3 comparam as abordagens RCM e HD com relação aos custos de placas e estocagem, quando se variam os custos de preparação, para os exemplos das Tabelas 5.2 e 5.3, respectivamente. Também mostramos o gráfico com relação ao número de períodos em que há produção. Como os custos de preparação para a abordagem HD consideram custo por peça por período, pode haver estoque mesmo se há produção em todos os períodos. O mesmo não ocorre na abordagem RCM, onde o custo de preparação considerado é apenas por período.

As figuras mostram que a abordagem RCM antecipa a produção de certos lotes de peças (aumentando os custos de estoque) mas obtendo um vantajoso ganho nos custos do processo de corte, diminuindo a quantidade de placas a serem cortadas. Por outro lado, a abordagem HD aumenta os custos de estoque somente por causa dos altos custos de preparação, sem levar em consideração a construção de melhores padrões de corte, aumentando também os custos do processo de corte. Para valores pequenos de preparação, os problemas separados, HD, geram custos de estoque mas como essa abordagem não leva em consideração o processo de corte, esse estoque não leva a uma diminuição nos custos de placas. Por outro lado, a abordagem RCM obtém um ganho geral, usando custos de estoque para diminuir o número de placas utilizadas. Entretanto, um aumento nos custos de preparação tende a aumentar consideravelmente os custos de estoque mas mesmo assim, a abordagem RCM obtém ganhos significativos sobre a abordagem HD. Essas soluções confirmam nossa afirmação de que uma solução ótima para o Problema Combinado pode conter soluções não-ótimas para os problemas tratados separadamente.

As Figuras 5.3 e 5.4 abaixo, mostram o compromisso existente entre os custos de placas, preparação e estoque por período para o exemplo 4 da Tabela 5.1 e o exemplo 8 da Tabela 5.2, respectivamente. Essas figuras também mostram os custos globais (soma dos custos de preparação, estoque e placas usadas).

Figura 5.3: Análise dos custos de estoque, e placas para o exemplo 4 da Tabela 5.2, em relação à variação nos custos de preparação.

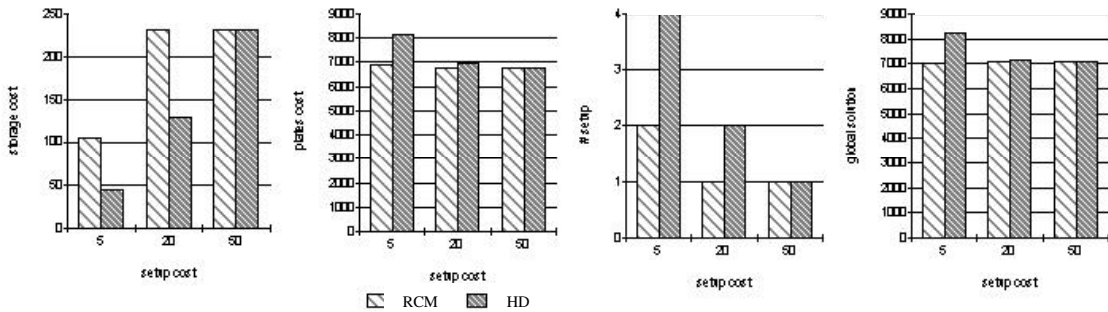
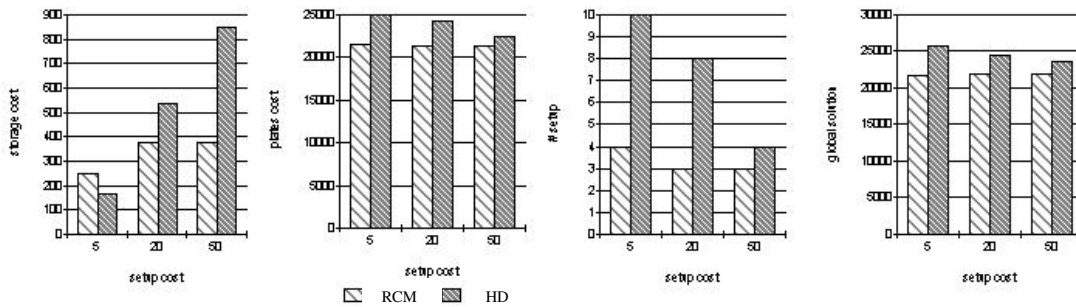


Figura 5.4: Análise dos custos de estoque, e placas para o exemplo 8 da Tabela 5.3, em relação à variação nos custos de preparação.



Podemos observar que, conforme os custos de preparação crescem, a quantidade de placas necessária pela abordagem RCM diminui, pois a produção de lotes de peças tende a ser antecipada (aumentando os custos de estoque, mas encontrando melhores arranjos no corte). Ao passo que, para os problemas separados, HD, isso não necessariamente ocorre, como podemos ver, os custos de estoque aumentam, mas os custos de placas continuam maiores que os da abordagem RCM, isso porque o estoque de peças leva em consideração apenas os custos de preparação. Portanto, por exemplo, pode ser necessário cortar uma placa para satisfazer até mesmo uma pequena demanda, tal como uma única peça.

2. Comparação entre a abordagem RCM e a solução ótima de MCD

Nesse conjunto de testes, a qualidade das soluções obtidas por RCM é calculada através de comparações com as soluções ótimas, obtidas resolvendo o modelo MCD utilizando o pacote comercial AMPL. Note que, para usar o pacote comercial AMPL, temos que gerar *a priori* todos os possíveis padrões de corte, e como essa quantidade é enorme, o pacote AMPL pode requerer um grande tempo computacional. Devido a esse fato, geramos apenas exemplos pequenos, com uma pequena quantidade de diferentes tipos de peças. As dimensões das placas (L,W) são dadas por (100,100), as dimensões das peças foram aleatoriamente geradas no intervalo $([0,40L, 0,75L], [0,40W, 0,75W])$, os custos de estoque das peças são dados pela área de cada peça, os custos de placas são dados por 10,0 e os custos de preparação são dados por 1,0. Note que maiores dimensões de peças implicam em menores quantidades de diferentes tipos de padrões de corte.

A coluna *# Padrões de Corte* na Tabela 5.4 representa a quantidade de todos os possíveis padrões de corte gerados para cada exemplo, a coluna *Arcos obtidos por RCM* representa o caminho da rede obtido utilizando a abordagem RCM, e finalmente, a coluna *gap (%)* representa quão longe a solução de RCM está da solução ótima.

Tabela 5.4: Comparação entre as soluções obtidas por RCM e as soluções ótimas.

Exemplos	# Padrões de Corte	Arcos obtidos por RCM	gap (%)
1	34	0-1,1-2,2-3,3-4	0,00
2	37	0-1,1-2,2-3,3-4	0,00
3	39	0-2,2-4	0,41
4	47	0-2,2-4	0,70
5	77	0-1,1-2,2-3,3-4	0,00
6	120	0-1,1-3,3-4	0,20
Média			0,22

Podemos constatar pelos resultados obtidos na Tabela 5.4, que a abordagem RCM obteve soluções ótimas em 3 dos 6 casos considerados. O maior gap de otimalidade foi

de 0,7% e as soluções obtidas por RCM estão em média a 0,22% da solução ótima. Mais uma vez, os testes realizados foram com instâncias pequenas em virtude do pacote comercial AMPL. Gostaríamos de comparar os resultados com problemas de tamanhos reais, mas o pacote AMPL não suportaria tais tamanhos.

Capítulo 6

Problema Combinado sem Custos de Preparação – Um Método Exato

Introdução

Como segunda modificação feita no Problema Combinado, neste capítulo propomos resolver o Modelo Combinado (3.1)-(3.9) descrito no Capítulo 3 com as seguintes alterações:

- (1) desconsiderar ocorrência de custos de preparação;
- (2) relaxar a integralidade das variáveis y_{jt} .

A aplicação deste modelo é sugerida para situações em que os custos de preparação não são relevantes, o que o torna um modelo de otimização linear, facilitando a resolução do problema na forma combinada. Além disso, a relaxação da integralidade das variáveis

y_{jt} pressupõe grandes quantidades de demanda em cada período, onde o erro de arredondamento é pequeno.

Para este novo problema apresentaremos um método de resolução exato baseado no método simplex com a técnica de geração de colunas. Apresentaremos também cinco conjuntos de testes computacionais analisados sob três aspectos diferentes.

Modelagem Matemática

Relaxando a ocorrência de custos de preparação e as condições de integralidade sobre as variáveis y_{jt} do Modelo Combinado (3.1)-(3.9), o modelo combinado relaxado segue:

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^M \sum_{t=1}^T (c_{it}x_{it} + h_{it}I_{it}) + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T cp \cdot y_{jt} + \sum_{p=1}^P \sum_{t=1}^T hp_{pt}IP_{pt} \quad (6.1)$$

$$\text{s.a.} : \quad x_{it} + I_{i,t-1} - I_{it} = d_{it} \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T \quad (6.2)$$

$$\sum_{j=1}^N a_{pj}y_{jt} + IP_{p,t-1} - IP_{pt} = \sum_{i=1}^M r_{pi}x_{it} \quad p = 1, \dots, P ; t = 1, \dots, T \quad (6.3)$$

$$\sum_{j=1}^N v_j y_{jt} \leq C_t \quad t = 1, \dots, T \quad (6.4)$$

$$x_{it}, I_{it} \geq 0 \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T \quad (6.5)$$

$$y_{jt} \geq 0 \quad j = 1, \dots, N ; t = 1, \dots, T \quad (6.6)$$

$$IP_{pt} \geq 0 \quad p = 1, \dots, P ; t = 1, \dots, T \quad (6.7)$$

Note que, este modelo combinado relaxado trata-se de um modelo linear (não existem mais as dificuldades referentes à integralidade de y_{jt} e às variáveis binárias),

porém permanece a dificuldade referente à grande quantidade de padrões de corte que podem ser gerados.

Vale também observar que, embora as restrições de preparação não sejam mais consideradas, o problema combinado ainda conserva o compromisso entre os custos de estoque e placas que aparece quando se combinam os problemas de corte de estoque e dimensionamento de lotes, ou seja, ainda se faz necessário examinar se é vantajoso antecipar a produção de certos lotes de peças e/ou produtos finais, aumentando os custos de estoque mas obtendo um ganho no processo de corte (com um melhor arranjo das peças nas placas).

Método de Resolução

Apresentaremos a seguir uma abordagem ótima que resolve o modelo combinado (6.1)-(6.7).

Por simplicidade de notação, rescreveremos o modelo (6.1)-(6.7) da seguinte forma:

$$\text{Min} \quad \sum_{t=1}^T (c_t x_t + h_t I_t) + \sum_{t=1}^T cp \cdot y_t + \sum_{t=1}^T hp_t IP_t \quad (6.8)$$

$$\text{s.a.:} \quad d_t = x_t + I_{t-1} - I_t \quad t=1, \dots, T \quad (6.9)$$

$$0 = -R x_t + A y_t + IP_{t-1} - IP_t \quad t=1, \dots, T \quad (6.10)$$

$$C_t \geq V y_t \quad t=1, \dots, T \quad (6.11)$$

$$y_t \geq 0 \quad t=1, \dots, T \quad (6.12)$$

$$x_t, I_t \geq 0 \text{ e } I_0 \text{ conhecido} \quad t=1, \dots, T \quad (6.13)$$

$$IP_t \geq 0 \text{ e } IP_0 \text{ conhecido} \quad t=1, \dots, T \quad (6.14)$$

onde,

$c_t = (c_{1t}, c_{2t}, \dots, c_{Mt})$; e assim como $h_t, I_t, hp_t, IP_t, d_t, x_t$ e y_t ;

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1M} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{P1} & r_{P2} & \dots & r_{PM} \end{bmatrix}, \quad V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_N],$$

e A uma matriz $P \times N$ tal que cada coluna corresponde a um padrão de corte.

Portanto, a matriz dos coeficientes para o modelo todo tem a seguinte forma:

	d_t		x_1	x_2	\dots	x_T	I_1	I_2	\dots	I_{t-1}	I_t	\dots	I_T	y_1	y_2	\dots	y_T	IP_1	IP_2	\dots	IP_{t-1}	IP_t	\dots	IP_T
			c_1	c_2	\dots	c_T	h_1	h_2	\dots	h_{t-1}	h_t	\dots	h_T	cp	cp	\dots	cp	hp_1	hp_2	\dots	hp_{t-1}	hp_t	\dots	hp_T
$t=1$	$d_1 - I_0$	=	I	0	\dots	0	$-I$	0	\dots	0	0	\dots	0	0	\dots	0	0			\dots			0	
$t=2$	d_2	=	0	I	\dots	0	I	$-I$	\dots	0	0	\dots	0	0	\dots	0	0			\dots			0	
\dots	\dots													0	\dots	0	0			\dots			0	
$t=t-1$	d_{t-1}	=	0	0	\dots	0	0	0	\dots	$-I$	0	\dots	0	0	\dots	0	0			\dots			0	
$t=t$	d_t	=	0	0	\dots	0	0	0	\dots	I	$-I$	\dots	0	0	\dots	0	0			\dots			0	
\dots	\dots		\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots			\dots			\dots	
$t=T$	d_T	=	0	0	\dots	I	0	0	\dots	0	0	\dots	$-I$	0	\dots	0	0			\dots			0	
$t=1$	0	=	$-R$	0	\dots	0	0	\dots					0	A	0	\dots	0	$-I$	0	\dots	0	0	\dots	0
$t=2$	0	=	0	$-R$	\dots	0	0	\dots					0	0	A	\dots	0	I	$-I$	\dots	0	0	\dots	0
\dots	\dots		\dots	\dots	\dots	0	\dots						0	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$t=t-1$	0	=	0	0	\dots	0	0	\dots					0	0	0	\dots	0	0	0	\dots	$-I$	0	\dots	0
$t=t$	0	=	0	0	\dots	0	0	\dots					0	0	0	\dots	0	0	0	\dots	I	$-I$	\dots	0
$t=T$	0	=	0	0	\dots	$-R$	0	\dots					0	0	0	\dots	A	0	0	\dots	0	0	\dots	$-I$
$t=1$	C_1	\geq	0	0	\dots	0	0	\dots					0	V	0	\dots	0	0	0	\dots	0	0	0	0
$t=2$	C_2	\geq	0	0	\dots	0	0	\dots					0	0	V	\dots	0	0	0	\dots	0	0	0	0
\dots	\dots		\dots	\dots	\dots	\dots	\dots						\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$t=T$	C_T	\geq	0	0	\dots	0	0	\dots					0	0	0	\dots	V	0	0	\dots	0	0	0	0

A segunda coluna da tabela representa o termo independente, e a segunda linha denota os coeficientes da função objetivo.

Como havíamos mencionado previamente, o modelo combinado ainda tem uma grande dificuldade, que envolve a enorme quantidade de padrões de corte. A fim de superar essa dificuldade propomos um método de resolução que consiste no uso do bem conhecido método simplex com a técnica de geração de colunas, descrita no Capítulo 2. Este processo nos permite a resolução de problemas com uma quantidade enorme de variáveis, pois poucas colunas são guardadas (somente as básicas) e as demais são consideradas implicitamente, sendo geradas apenas as colunas a entrar na base.

Notamos que a matriz de restrições é muito esparsa e cresce consideravelmente com o número de peças, produtos finais e períodos, levando a uma necessidade de memória computacional muito grande. Portanto, a fim de otimizar o novo problema combinado (agora tratado como um programa linear) utilizaremos o pacote comercial CPLEX.

Inicialmente consideramos um problema restrito substituindo a matriz A do modelo (6.8)-(6.14) pela matriz de padrões de corte homogêneos (H) que pode ser facilmente calculada. Então procedemos da seguinte forma:

1. Leia $(c_b, cp, hp_b, h_b, C_b, R, H, V)$; $A^0 \leftarrow H$; $k=0$; Pare=Falso

Enquanto Pare = Falso faça

Início (1)

2. Resolva o problema (6.8)-(6.14) com $A=A^k$ (utilizando o pacote comercial CPLEX);

3. Seja π_t o vetor multiplicador obtido no passo 2, referente às restrições (6.10)

Resolva os T problemas da mochila a seguir:

para $t=1$ até T faça

Início (2)

Maximize $\pi_t a_{jt}$

s.a.: a_{jt} corresponde a um padrão de corte

bidimensional guilhotinado 2 - estágios.

Fim.(2)

4. Escolha a melhor coluna a_t^j com o menor custo relativo;

5. Se o custo relativo da coluna escolhida for não-negativo, a solução atual é ótima para o problema global, então Pare = Verdade;

6. Senão, se o custo relativo da coluna escolhida for negativo, inclua essa coluna na matriz de restrições do problema, $k=k+1$ e volte ao Passo 2.

Fim.(1)

A fim de analisar os resultados obtidos pela abordagem proposta (método simplex com a técnica de geração de colunas), comparamos suas soluções com as soluções obtidas aplicando a HD. Porém, como neste capítulo estamos tratando o Modelo Combinado desprezando os custos de preparação, a HD é tratada com algumas modificações:

- (1) Desprezando as restrições de preparação, o modelo de dimensionamento de lotes apresentado no capítulo 4 sempre irá gerar a solução lote-por-lote.

- (2) Após a resolução do Problema de Dimensionamento de Lotes, basta para cada período resolver um problema de corte de estoque apresentado no Capítulo 4 (PCE), com o mesmo método de resolução mencionado (método simplex com a técnica de geração de colunas).

A seguir apresentamos os resultados computacionais mostrando a qualidade das soluções obtidas quando aplicado o método exato proposto (método simplex com a técnica de geração de colunas) e a heurística HD.

Resultados Computacionais e Conclusões

O algoritmo exato proposto foi programado em C e executado em uma estação Ultra 1 Sun. Cinco conjuntos de testes computacionais foram realizados sobre três aspectos diferentes: (1) comparação entre os resultados obtidos usando o método exato com a capacidade normal e apertada; (2) comparação entre os resultados obtidos pelo método exato e a heurística de decomposição e, finalmente, (3) apresentamos uma análise da qualidade das soluções obtidas pelo método exato quando aumentado os custos de placas. Utilizamos a tolerância de 10^{-3} para encontrar uma solução ótima no método exato.

Os parâmetros referentes às dimensões das placas, quantidade de peças que constituem cada produto final e a demanda de produtos finais, foram aleatoriamente gerados dentro dos seguintes limites:

- largura e comprimento das peças: [25,75];
- largura e comprimento das placas: 120 e 100, respectivamente;
- quantidade de peças que compõem os produtos finais: [0,5];
- demanda dos produtos finais: [0,500];

Os custos de estoque e de placas foram considerados da seguinte forma:

Seja l_i, w_i $i=1, \dots, P$ a largura e comprimento dos i diferentes tipos de peças, respectivamente e L, W a largura e o comprimento das placas, respectivamente.

- custo de peças : $[(l_i * w_i)/(L * W)]$;
- custo dos produtos finais: considerados como a soma das peças que os constituem;
- custo de estoque das peças: (custo da respectiva peça)* 10^{-3} ;
- custo de estoque dos produtos finais: (custo do respectivo produto final)* 10^{-3} ;
- custo de placas: $(L * W) * 10^{-3}$;
- capacidade: A capacidade foi calculada como uma média das capacidades consumidas em todos os períodos do horizonte de planejamento usando a heurística HD. *Capacidade Apertada* é definida como sendo a média da capacidade necessária, usando a heurística de decomposição, mais 20%. *Capacidade Normal* é a média da capacidade necessária, mais 100%.

Cada Tabela (6.1)-(6.15) está intitulada com a quantidade de diferentes tipos de peças, produtos finais e períodos utilizados. Por exemplo, o conjunto de testes usados na Tabela 6.1 considera 10 tipos de diferentes tipos de peças, 4 tipos de produtos finais e um horizonte de planejamento de 4 períodos.

Capacidade de Serra: Normal x Apertada

As Tabelas 6.1 – 6.5 comparam a qualidade das soluções com respeito à capacidade normal e apertada. As colunas *Capacidade Apertada* e *Capacidade Normal*, como previamente mencionado, denotam as médias da capacidade consumida quando aplicamos a heurística de decomposição mais 20 e 100 por cento, respectivamente. As colunas *# placas usadas* representam a quantidade de placas cortadas a fim de atender a demanda. A coluna *% utilização da capacidade* representa a porcentagem de capacidade

utilizada pela máquina. E, finalmente, a coluna *% solução global* representa o ganho (em termos de custos de estoque e de placas) que foi obtido quando considerando a capacidade normal.

Tabela 6.1: 10 peças, 4 produtos finais e 4 períodos

<i>ex</i>	<i>Capacidade Apertada</i>		<i>Capacidade Normal</i>		<i>% (solução global)</i>
	<i># placas usadas</i>	<i>% utilização da capacidade</i>	<i># placas usadas</i>	<i>% utilização da capacidade</i>	
1	15321	95	14125	52	5,55
2	18225	85	16860	47	5,46
3	6307	87	5740	47	6,31
4	infectível	-	13729	48	-
5	infectível	-	16729	45	-
6	14543	88	12960	47	8,12
7	infectível	-	5701	48	-
8	11888	83	11510	43	2,18
9	13241	83	12258	46	5,35
10	infectível	-	25079	48	-
Média		86		47	5,50

Tabela 6.2: 20 peças, 6 produtos finais e 4 períodos

<i>ex</i>	<i>Capacidade Apertada</i>		<i>Capacidade Normal</i>		<i>% (solução global)</i>
	<i># placas usadas</i>	<i>% utilização da capacidade</i>	<i># placas usadas</i>	<i>% utilização da capacidade</i>	
1	21525	89	18980	47	8,47
2	34450	86	29849	45	10,21
3	infectível	-	35011	46	-
4	37274	85	32887	45	8,56
5	20594	89	18293	48	7,85
6	34427	84	32420	50	3,89
7	38150	97	29918	46	17,67
8	30818	86	28456	48	5,30
9	33892	87	30192	47	7,72
10	infectível	-	24578	47	-
Média		87		47	8,70

Tabela 6.3: 30 peças, 8 produtos finais e 6 períodos

<i>ex</i>	<i>Capacidade Apertada</i>		<i>Capacidade Normal</i>		<i>% (solução global)</i>
	<i># placas usadas</i>	<i>% utilização da capacidade</i>	<i># placas usadas</i>	<i>% utilização da capacidade</i>	
1	infectível	-	95019	47	-
2	infectível	-	69592	47	-
3	infectível	-	85249	47	-
4	infectível	-	79368	48	-
5	infectível	-	59113	48	-
6	infectível	-	60487	49	-
7	113667	90	100574	48	8,35
8	infectível	-	86179	47	-
9	infectível	-	94022	48	-
10	infectível	-	74412	48	-
Média		90		48	8,35

Tabela 6.4: 40 peças, 10 produtos finais e 6 períodos

<i>ex</i>	<i>Capacidade Apertada</i>		<i>Capacidade Normal</i>		<i>% (solução global)</i>
	<i>#placas usadas</i>	<i>% utilização da capacidade</i>	<i>#placas usadas</i>	<i>% utilização da capacidade</i>	
1	infectível	-	131331	49	-
2	131368	87	118401	47	7,07
3	173933	91	152386	48	9,32
4	168668	94	142426	48	11,70
5	infectível	-	127911	48	-
6	128100	92	109106	47	10,80
7	188135	92	163036	48	9,97
8	151632	87	140017	48	5,33
9	122287	88	110639	48	6,70
10	204877	92	175360	47	10,78
Média		90		48	8,95

Tabela 6.5: 50 peças, 10 produtos finais e 6 períodos

<i>ex</i>	<i>Capacidade Apertada</i>		<i>Capacidade Normal</i>		<i>% (solução global)</i>
	<i># placas usadas</i>	<i>% utilização da capacidade</i>	<i># placas usadas</i>	<i>% utilização da capacidade</i>	
1	inactível	-	28394	48	-
2	inactível	-	32139	42	-
3	inactível	-	29752	48	-
4	40581	92	34148	47	11,98
5	143900	92	123798	47	10,32
6	inactível	-	132225	48	-
7	175440	96	146229	48	12,73
8	inactível	-	142875	48	-
9	inactível	-	157540	48	-
10	inactível	-	148864	49	-
Média		93		47	11,67

As Tabelas 6.1 – 6.5 mostram claramente que quando lidamos com o problema “folgado”, ou seja, capacidade normal, a quantidade de placas usadas é menor comparada à capacidade apertada. Isso ocorre porque quando consideramos capacidade normal, o problema tem mais flexibilidade em relação ao estoque, levando a uma melhor solução global. Em alguns exemplos, quando apertamos a capacidade, obtemos soluções inactíveis. Essas tabelas mostram que a capacidade normal fornece um ganho de até 17,7% sobre a capacidade apertada. Esse ganho pode ser interpretado como menos turnos de trabalho no horizonte de planejamento.

Método Exato x Heurística de Decomposição

As Tabelas 6.6 – 6.10 ilustram a performance do método exato proposto. Os conjuntos de testes usados são os mesmos das tabelas anteriores. A coluna *Heurística de Decomposição* denota a quantidade de placas cortadas (*# placas usadas*) quando aplicando a Heurística de Decomposição e a coluna *Método Exato* representa a quantidade de placas usadas (*# placas usadas*) e os custos de estoque (*\$ estoque*) quando aplicando o Método Exato proposto. A coluna *% solução global* representa o ganho, em termos dos custos de estoque e de placas, obtido pelo método exato sobre a heurística de

decomposição. Observe que HD não possui o custo de estoque, pois o problema de Dimensionamento de Lotes sempre gera uma solução lote-por-lote.

Tabela 6.6: 10 peças, 4 produtos finais e 4 períodos

<i>ex</i>	<i>Heurística de Decomposição</i>	<i>Método Exato</i>		<i>% solução global</i>
	<i># placas usadas</i>	<i># placas usadas</i>	<i>\$ estoque</i>	
1	15321	14125	4,18	8,46
2	17776	16860	14,63	5,42
3	6031	5740	5,59	5,06
4	14281	13729	14,26	4,02
5	18352	16729	10,26	9,70
6	13636	12960	13,10	5,21
7	5973	5701	8,51	4,55
8	11888	11510	4,23	3,28
9	13194	12258	6,02	7,64
10	26156	25079	6,17	4,30
Média				5,76

Tabela 6.7: 20 peças, 6 produtos finais e 4 períodos

<i>ex</i>	<i>Heurística de Decomposição</i>	<i>Método Exato</i>		<i>% solução global</i>
	<i># placas usadas</i>	<i># placas usadas</i>	<i>\$ estoque</i>	
1	20113	18980	23,27	5,96
2	33114	29849	40,13	10,93
3	37470	35011	46,00	7,02
4	36457	32887	37,29	10,86
5	19110	18293	12,55	4,46
6	34186	32420	17,32	5,45
7	32572	29918	26,76	8,87
8	29727	28456	25,72	4,46
9	32258	30192	14,41	6,84
10	26157	24578	24,95	6,42
Média				7,22

Tabela 6.8: 30 peças, 8 produtos finais e 6 períodos

<i>ex</i>	<i>Heurística de Decomposição</i>	<i>Método Exato</i>		<i>% solução global</i>
	<i># placas usadas</i>	<i># placas usadas</i>	<i>\$ estoque</i>	
1	100966	95019	97,62	6,25
2	72995	69592	74,55	4,88
3	89479	85249	31,4	4,96
4	81844	79368	24,04	3,12
5	61401	59113	67,33	3,88
6	61950	60487	23,31	2,42
7	105114	100574	99,27	4,51
8	91231	86179	67,12	5,86
9	98090	94022	49,25	4,33
10	77499	74412	86,99	4,15
Média				4,44

Tabela 6.9: 40 peças, 10 produtos finais e 6 períodos

<i>ex</i>	<i>Heurística de Decomposição</i>	<i>Método Exato</i>		<i>% solução global</i>
	<i># placas usadas</i>	<i># placas usadas</i>	<i>\$ estoque</i>	
1	133947	131331	63,85	2,00
2	125646	118401	91,73	6,12
3	158672	152386	94,39	4,12
4	149040	142426	86,86	4,64
5	133813	127911	83,98	4,61
6	115223	109106	114,72	5,61
7	170266	163036	127,47	4,43
8	144813	140017	180,11	3,43
9	115032	110639	90,85	3,97
10	184292	175360	132,47	5,10
Média				4,41

Tabela 6.10: 50 peças, 10 produtos finais e 6 períodos

<i>ex</i>	<i>Heurística de Decomposição</i>	<i>Método Exato</i>		<i>% solução global</i>
	<i># placas usadas</i>	<i># placas usadas</i>	<i>\$ estoque</i>	
1	29213	28394	31,72	2,87
2	33747	32139	36,40	5,00
3	31093	29752	28,66	4,50
4	36445	34148	26,51	6,72
5	130208	123798	160,57	5,17
6	137451	132225	107,23	3,95
7	151273	146229	81,28	3,45
8	147950	142875	159,05	3,54
9	162665	157540	157,42	3,25
10	153378	148864	56,67	3,03
Média				4,15

Das Tabelas 6.6 – 6.10, é evidente que o problema combinado antecipa a produção de certos lotes de peças, aumentando os custos de estoque, mas obtendo uma vantajosa diminuição na quantidade de placas usadas, levando a um significativo ganho no custo global (de até 10,9% na Tabela 6.7), quando comparado com a heurística de decomposição.

Comparação da quantidade de placas usadas diminuindo o custo de placa

As Tabelas 6.11 – 6.15 mostram o crescimento da quantidade de placas usadas quando se diminui o custo de placa. Os conjuntos de testes usados são os mesmos das tabelas anteriores. A coluna $(\text{área da placa}) \cdot 10^{-3}$ representa a quantidade de placas usadas quando aplicamos o método exato para custos de placas igual a $(L \cdot W \cdot 10^{-3})$. A coluna $\$ \text{ estoque de peças}$ denota a quantidade de placas cortadas quando os custos de placas são dados como uma média dos custos das peças. A coluna $(0,000022)$ representa a quantidade de placas cortadas quando os custos das placas é igual a 0,000022 (esse custo é muito menor que a média dos custos de estoque das peças). Em todos os casos a capacidade é considerada normal.

Tabela 6.11: 10 peças, 4 produtos finais e 4 períodos

<i>Ex</i>	<i>(área da placa) * 10⁻³</i>	<i>\$ estoque de peças</i>	<i>0,000022</i>
1	14125	15321	15321
2	16860	17776	18225
3	5740	6031	6307
4	13729	14281	14281
5	16729	18352	18927
6	12960	13636	14543
7	5701	5973	6902
8	11510	11888	11888
9	12558	12749	13241
10	12300	13437	13437
Média	12221,2	12944,4	13307,2

Tabela 6.12: 20 peças, 6 produtos finais e 4 períodos

<i>Ex</i>	<i>(área da placa) * 10⁻³</i>	<i>\$ estoque de peças</i>	<i>0,000022</i>
1	18980	20113	21525
2	29849	33114	34450
3	35011	37470	40421
4	32887	36475	37274
5	18293	19584	20594
6	32420	34186	34427
7	29918	32572	38150
8	28456	29727	30818
9	30192	32259	33892
10	24578	26157	28592
Média	28058,4	30165,7	32014,3

Tabela 6.13: 30 peças, 8 produtos finais e 6 períodos

<i>Ex</i>	<i>(área da placa)*10⁻³</i>	<i>\$ estoque de peças</i>	<i>0,000022</i>
1	95019	100966	112942
2	69592	73158	79340
3	85249	89479	95120
4	79368	83317	83898
5	59113	61431	67182
6	60487	61950	67187
7	100574	105114	113667
8	86179	91231	92988
9	94022	98270	113193
10	74412	77499	83397
Média	80401,5	84241,5	90891,4

Tabela 6.14: 40 peças, 10 produtos finais e 6 períodos

<i>Ex</i>	<i>(área da placa)*10⁻³</i>	<i>\$ estoque de peças</i>	<i>0,000022</i>
1	131331	136742	154359
2	118401	125646	131368
3	152386	158672	173933
4	142426	149040	168668
5	127911	134221	134221
6	109106	114683	128100
7	163036	170601	188135
8	140017	144813	151632
9	110639	116602	122287
10	175360	184292	204877
Média	137061,3	143531,2	155758,0

Tabela 6.15: 50 peças, 10 produtos finais e 6 períodos

<i>Ex</i>	<i>(área da placa)*10⁻³</i>	<i>\$ estoque de peças</i>	<i>0,000022</i>
1	28394	29213	31755
2	32139	33747	36150
3	29752	31093	32950
4	34148	36445	39666
5	123798	130208	139022
6	132225	137451	148100
7	146229	151273	165145
8	142875	147950	157073
9	157540	162665	170943
10	148864	153378	164525
Média	97596,4	101342,3	108532,9

As tabelas 6.11 – 6.15 mostram o crescimento no número de placas cortadas de acordo com o decréscimo dos custos de placas. Isso era o esperado, dado que quando o custo de placa cresce consideravelmente, o algoritmo deve tentar rearranjar as peças nas placas de tal modo que se obtenha um menor número de placas usadas.

Capítulo 7

Problema Combinado – Relaxação Lagrangiana

Introdução

Finalmente, como última variação do Problema Combinado (3.1)-(3.9), propomos um novo problema combinado com três alterações:

- (1) a condição de integralidade é relaxada (relaxação aceitável pelo fato de se considerar a demanda suficientemente alta);
- (2) as restrições de capacidade são agora relacionadas aos produtos finais, e não mais, referentes às peças.
- (3) uma última alteração feita neste novo modelo combinado, consiste na desconsideração das variáveis de estoque para as peças. Na prática não é usual estocar as peças separadamente, por falta de espaço físico, ou até mesmo

pela dificuldade operacional (apesar de ser compensador do ponto de vista de perdas no processo de cortagem).

Modelagem Matemática

O modelo matemático combinado inteiro-misto pode então ser escrito da seguinte forma:

$$Z = \text{Min} \sum_{i=1}^M \sum_{t=1}^T (c_{it} x_{it} + h_{it} I_{it} + s_{it} z_{it}) + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T cp.L.W. y_{jt} \quad (7.1)$$

$$s.a.: \quad x_{it} + I_{i,t-1} - I_{it} = d_{it} \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T \quad (7.2)$$

$$\sum_{j=1}^N a_{pj} y_{jt} \geq \sum_{i=1}^M r_{pi} x_{it} \quad p = 1, \dots, P ; t = 1, \dots, T \quad (7.3)$$

$$\sum_{i=1}^M v_i x_{it} \leq b_t \quad t = 1, \dots, T \quad (7.4)$$

$$x_{it} \leq Q \cdot z_{it} \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T \quad (7.5)$$

$$x_{it}, I_{it} \geq 0 \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T \quad (7.6)$$

$$y_{jt} \geq 0 \quad j = 1, \dots, N ; t = 1, \dots, T \quad (7.7)$$

$$z_{it} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T \quad (7.8)$$

onde, $v_i = \sum_{p=1}^P (r_{pi} l_p w_p)$, $i = 1, \dots, M$ denota a área necessária para compor uma

unidade do produto final i , sendo l_p e w_p o comprimento e a largura das peças do tipo p , respectivamente, e b_t representa a área total possível de ser cortada no período t . As restrições (7.3) não incluem mais o balanço de estoque de peças, apenas asseguram que a demanda de peças seja satisfeita nos períodos determinados. Por conseqüência, a nova função objetivo (7.1) minimiza os custos de produção, estoque e preparação para os produtos finais e a quantidade de placas cortadas no processo de corte (onde cp denota o custo unitário da área da placa).

O problema combinado (7.1)-(7.8) possui um forte compromisso entre antecipar ou não a produção de certos lotes de produtos finais, aumentando os custos de estoque, porém possibilitando um vantajoso ganho nos custos de preparação e no processo de corte.

Note que neste novo modelo combinado, não existem mais problemas referentes à integralidade de y_{jt} , porém permanecem as dificuldades em relação às variáveis binárias e à grande quantidade de padrões de corte que podem ser gerados. Obviamente, comparando com o modelo combinado apresentado no Capítulo 6 (que não considera as restrições de preparação), o problema combinado (7.1)-(7.8) tornou-se bem mais complexo e de difícil resolução.

Para isso, propomos um método de resolução baseado na Relaxação Lagrangiana das restrições (7.3) e (7.4), como segue.

Método de Resolução

Sejam $\mu_{pt} \geq 0$, $p=1, \dots, P$; $t=1, \dots, T$ o multiplicador associado à restrição (7.3) e $\lambda_t \geq 0$, $t=1, \dots, T$ o multiplicador simplex relacionado à restrição (7.4). Utilizando a Relaxação Lagrangiana, dualizam-se essas duas restrições, incluindo-as na função objetivo.

Logo, o Problema Lagrangiano é escrito como:

$$Z_L(\lambda, \mu) = \text{Min} \sum_{i=1}^M \sum_{t=1}^T (c_{it} x_{it} + h_{it} I_{it} + s_{it} z_{it}) + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T cp.L.W. y_{jt} + \sum_{t=1}^T \lambda_t \left(\sum_{i=1}^M v_i x_{it} - b_t \right) + \sum_{p=1}^P \sum_{t=1}^T \mu_{pt} \left(\sum_{i=1}^M r_{pi} x_{it} - \sum_{j=1}^N a_{pj} y_{jt} \right)$$

ou
$$\text{Min} \sum_{i=1}^M \sum_{t=1}^T \left[\left(c_{it} + \lambda_t v_i + \sum_{p=1}^P \mu_{pt} r_{pi} \right) x_{it} + h_{it} I_{it} + s_{it} z_{it} \right] + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T \left(cp.L.W. - \sum_{p=1}^P \mu_{pt} a_{pj} \right) y_{jt} - \sum_{t=1}^T \lambda_t b_t$$

s.a.:

$$x_{it} + I_{i,t-1} - I_{it} = d_{it} \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T$$

$$x_{it} \leq Q.z_{it} \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T$$

$$x_{it}, I_{it} \geq 0 \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T$$

$$z_{it} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T$$

$$y_{jt} \geq 0 \quad j = 1, \dots, N ; t = 1, \dots, T$$

Observe que o modelo acima pode ser decomposto nos dois seguintes modelos:

Modelo M1 (Dimensionamento de Lotes):

$$Z_{DL}(\lambda, \mu) = \text{Min} \sum_{i=1}^M \sum_{t=1}^T \left[\left(c_{it} + \lambda_t v_i + \sum_{p=1}^P \mu_{pt} r_{pi} \right) x_{it} + h_{it} I_{it} + s_{it} z_{it} \right] - \sum_{t=1}^T \lambda_t b_t$$

s.a.:

$$x_{it} + I_{i,t-1} - I_{it} = d_{it} \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T$$

$$x_{it} \leq Q.z_{it} \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T$$

$$x_{it}, I_{it} \geq 0 \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T$$

$$z_{it} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T$$

Modelo M2 (Corte de Estoque):

$$Z_C(\mu) = \underset{y_{jt} \geq 0}{\text{Min}} \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T \left(cp.L.W - \sum_{p=1}^P \mu_{pt} a_{pj} \right) y_{jt}$$

Portanto, $Z_L(\lambda, \mu) = Z_{DL}(\lambda, \mu) + Z_C(\mu)$.

⇒ Em relação ao Modelo M1, temos as seguintes observações a fazer:

Para λ_i e μ_{pt} fixos, o problema lagrangiano se decompõe em subproblemas (um para cada i) que podem ser facilmente resolvidos pelo algoritmo de programação dinâmica de Wagner e Whitin (1958).

Sabe-se (Nemhauser (1988)) que a solução do problema lagrangiano resultante fornece um limitante inferior para o Problema Combinado (7.1)-(7.8). Logo, para λ_i e μ_{pt} fixos, o problema lagrangiano fornece um limitante inferior da solução ótima do Problema Combinado. Quer-se encontrar o maior limitante inferior, mais ainda, quer-se obter os multiplicadores de Lagrange que nos forneça um limitante inferior tão próximo quanto possível da solução ótima do problema original.

⇒ Em se tratando do Modelo M2, podemos notar que:

Se $\left(cp.L.W - \sum_{p=1}^P \mu_{pt} a_{pj} \right) < 0$, então $y_{jt} \rightarrow \infty$ e $Z_C(\lambda, \mu) \rightarrow -\infty$ e, por consequência,

$Z_L(\lambda, \mu) \rightarrow -\infty$. Portanto, devemos escolher μ_{pt} de tal modo que $\left(cp.L.W - \sum_{p=1}^P \mu_{pt} a_{pj} \right) \geq 0$.

Para isso, para obtermos $\left(cp.L.W - \sum_{p=1}^P \mu_{pt} a_{pj} \right) \geq 0$, basta escolher $\mu_{pt} \geq 0$, pois $\sum_{p=1}^P \mu_{pt} a_{pj}$ representa o custo das peças cortadas em um dado padrão e, obviamente, esse custo é menor que o custo da placa total ($cp.L.W$). Logo $\left(cp.L.W - \sum_{p=1}^P \mu_{pt} a_{pj} \right)$ será sempre positivo.

E, finalmente, escolhendo-se $\mu_{pt} \geq 0$, obtemos $Z_C(\lambda, \mu) = 0$, pois,

$$\text{Se } \left(cp.L.W - \sum_{p=1}^P \mu_{pt} a_{pj} \right) > 0, \text{ então } y_{jt} = 0 \text{ e } \left(cp.L.W - \sum_{p=1}^P \mu_{pt} a_{pj} \right) y_{jt} = 0$$

$$\text{Se } \left(cp.L.W - \sum_{p=1}^P \mu_{pt} a_{pj} \right) = 0, \text{ então } y_{jt} > 0 \text{ e } \left(cp.L.W - \sum_{p=1}^P \mu_{pt} a_{pj} \right) y_{jt} = 0$$

Logo, $Z_L(\lambda, \mu) = Z_{DL}(\lambda, \mu)$.

A partir desses resultados, a nossa proposta de solução consiste em resolver o problema lagrangiano $Z_L(\lambda, \mu)$ para um λ_t e μ_{pt} inicial fornecido pelo usuário, obtendo uma certa solução. Se as condições de otimalidade forem satisfeitas (a solução obtida satisfaz as restrições relaxadas, e os valores das função objetivos do problema original e do problema lagrangiano coincidem), então estamos na solução ótima do problema original (Problema Combinado). Caso contrário, devemos atualizar os vetores multiplicadores de lagrange aplicando as regras a seguir. Após a atualização dos vetores multiplicadores, o processo é reinicializado até que algum critério de parada (descritos a seguir) seja satisfeito.

Atualização dos vetores multiplicadores de lagrange

Para a atualização do vetor multiplicador λ_t , utilizaremos o passo dado por

$$Passo_{\lambda_t} = \frac{\pi(Z_{ub} - Z_{lb})}{\left\| \sum_{t=1}^T \left(\sum_{i=1}^M (v_i x_{it}) - b_t \right) \right\|}, \text{ onde } \pi=2, Z_{UB} \text{ denota um limitante superior (valor da}$$

função objetivo do problema original), Z_{LB} denota um limitante inferior (valor da função objetivo do problema lagrangiano). Assim, utilizando o algoritmo proposto por Camerini

et al., (1975) λ_t é então atualizado por $\lambda_t = \lambda_t + Passo_{\lambda_t} * \left(\sum_{i=1}^M (v_i x_{it}) - b_t \right)$.

Para a atualização do vetor multiplicador μ_{pt} , inicialmente, considere o seguinte sub-problema de corte de estoque:

$$\begin{aligned} Z_{CE}(x) = & \text{Min} \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T cp.L.W.y_{jt} \\ \text{s.a. : } & \sum_{j=1}^N a_{pj} y_{jt} \geq \sum_{i=1}^M r_{pi} x_{it} \quad p = 1, \dots, P ; t = 1, \dots, T \\ & y_{j,t} \geq 0 \quad j = 1, \dots, N ; t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Seja γ_{pt} o vetor multiplicador ótimo do problema $Z_{CE}(x)$. Então, pelo dual de

$$Z_{CE}(x) \text{ podemos dizer que } Z_{CE}(x) = \sum_{i=1}^M \sum_{p=1}^P \sum_{t=1}^T \gamma_{pt} r_{pi} x_{it} \text{ e } \left(cp.L.W - \sum_{p=1}^P \gamma_{pt} a_{pj} \right) \geq 0$$

(custo relativo da variável y_{jt} , pois γ_{pt} é multiplicador ótimo). Logo,

$$\begin{aligned}
 & \text{Se } \left(cp.L.W - \sum_{p=1}^P \gamma_{pt} a_{pj} \right) > 0 \text{ então, } y_{jt} = 0 \text{ e } \left(cp.L.W - \sum_{p=1}^P \gamma_{pt} a_{pj} \right) y_{jt} = 0 \text{ e, se} \\
 & y_{jt} > 0 \quad (\text{variável básica}), \quad \text{então} \quad \left(cp.L.W - \sum_{p=1}^P \gamma_{pt} a_{pj} \right) = 0 \quad \text{e} \\
 & \left(cp.L.W - \sum_{p=1}^P \gamma_{pt} a_{pj} \right) y_{jt} = 0.
 \end{aligned}$$

Escolhendo-se $\mu_{pt} = \gamma_{pt}$ e resolvendo $Z_{CE}(x)$, obtemos então um novo μ_{pt} .

Critérios de Parada

Os critérios de parada mais comumente usados, segundo Camerini et al. (1975), para o método do subgradiente são:

1. se o passo for muito pequeno, não tendo assim mais muitas modificações na solução;
2. se um certo número máximo de iterações for atingido (it_{max});
3. se os limitantes inferior ou superior diferirem de uma tolerância ε .

Antes de apresentar o algoritmo de resolução do Problema Combinado, vale observar que ao se resolver o problema lagrangiano, provavelmente encontraremos uma solução infactível em relação às restrições de capacidade. Para isso, utilizamos a heurística de factibilização proposta por Trigeiro et al. (1989) e discutida no Capítulo 2. Essa heurística consiste em dois passos, regressivo e progressivo no tempo, tentando ajustar os lotes (transferindo-os para períodos anteriores ou posteriores, se possível) de

acordo com a capacidade disponível em cada período. Obtemos assim, uma solução factível para o Problema Combinado.

Logo, o algoritmo de resolução do Problema Combinado pode ser esquematizado no diagrama da Figura 7.1.

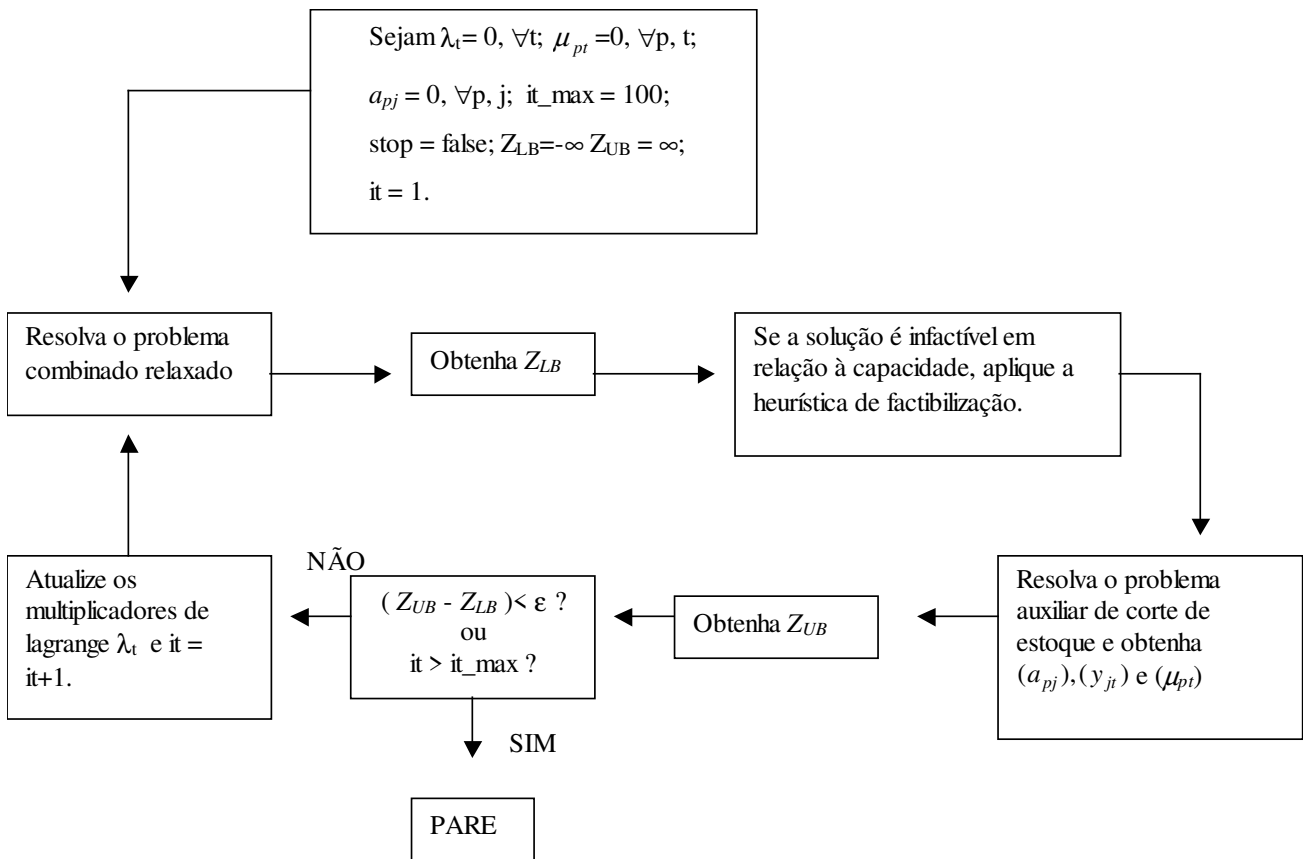


Figura 7.1 : Esquema do algoritmo de resolução para o Problema Combinado

Resultados Computacionais

A heurística proposta foi implementada usando a linguagem C e para resolver o problema auxiliar de corte de estoque utilizamos o pacote comercial CPLEX.

Utilizamos quatro conjuntos de testes computacionais com 10 instâncias cada. O primeiro e o segundo conjunto consideram 7 períodos para o horizonte de planejamento, 20 diferentes tipos de peças e 10 produtos finais, onde a largura (w_p) e o comprimento (l_p) das peças estão nos intervalos $[10,75]$ no primeiro conjunto e $[25,50]$ no segundo conjunto de testes. O terceiro e quarto conjuntos consideram 7 períodos, 30 diferentes tipos de peças e 15 produtos finais, onde a largura (w_p) e o comprimento (l_p) das peças estão nos intervalos $[10,75]$ no terceiro conjunto e $[25,50]$ no quarto conjunto de testes.

Os parâmetros do problema foram gerados randomicamente nos seguintes intervalos:

1. r_{pi} (quantidade necessária de peças do tipo p para formar um produto final i) no intervalo $[0,5]$;
2. d_{it} (demanda do produto final i no período t) no intervalo $[0,500]$.
3. Os custos dos produtos finais (c_{it}) foram calculados como:

$$c_{it} = \sum_{p=1}^P r_{pi} l_p w_p \text{ para todo } i=1, \dots, M; t=1, \dots, T.$$

4. Os custos de estoque dos produtos finais foram definidos como: $h_{it}=0,1c_{it}$, para todo $i=1, \dots, M; t=1, \dots, T$.
5. O custo de placa foi tomado como: $cp=L*W/100$;
6. Os custos de preparação foram gerados como uma média dos custos dos produtos finais;
7. A capacidade (b_t) foi gerada como a média gasta quando se aplica o método lote-por-lote. A fim de prevenir infactibilidades no primeiro período assume-se $b_0=b_0+30\%b_0$;

Em todos os exemplos utilizamos o número máximo de iterações permitidas no Método do Subgradiente igual a 30.

Utilizaremos como medida de qualidade de uma solução obtida pela heurística proposta o desvio percentual entre os limitantes superior e inferior:

$$\Delta = \frac{Z_{UB} - Z_{LB}}{Z_{LB}} * 100$$

Observe que podemos ter uma solução de baixa qualidade devido a um limitante superior pobre, apesar da solução obtida ser muito boa.

A fim de comparar as soluções obtidas pela Heurística Lagrangiana, notamos que o limitante inferior da primeira iteração refere-se à solução da Heurística de Decomposição. Logo, guardamos para cada exemplo o primeiro limitante inferior e o denotamos como solução da heurística HD. Essa solução, que ainda não passou pelo passo da factibilização, provavelmente será infactível com relação à capacidade e, com isso verificaremos que ao factibilizar a solução, a quantidade de períodos em que haverá solução provavelmente aumentará.

As tabelas a seguir nos mostram a qualidade das soluções obtidas quando aplicamos a Heurística de Decomposição (HD) e a Heurística Lagrangiana. Em cada uma das tabelas, a coluna *#setup* representa a quantidade de períodos em que houve custos de preparação, a coluna *#placas* representa a quantidade de placas cortadas e a coluna Δ denota o desvio percentual entre os limitantes inferior e superior obtidos pela Heurística Lagrangiana.

Em todos os testes a solução HD é sempre infactível. Isso ocorre como já mencionamos anteriormente, pois a solução HD, vinda da primeira iteração da solução Lagrangiana, não considera a capacidade em cada período.

As Tabelas 7.1 e 7.2 representam 20 problemas com 20 tipos de peças, 10 produtos finais e 7 períodos. Na Tabela 7.1 o tamanho das peças varia no intervalo $[25,50]$, e na Tabela 7.2 os tamanhos das peças variam no intervalo $[10,75]$.

Tabela 7.1: 20 peças, 10 produtos finais, 7 períodos, capacidade apertada, $25 \leq l, w \leq 50$

	<i>Solução HD</i>		<i>Solução Lagrangiana</i>		
	# setup	# placas	# setup	# placas	Δ
1	33	7175	34	7181	0,6
2	31	6932	34	6935	0,6
3	32	6618	35	6612	0,3
4	31	7413	32	7416	0,5
5	28	7841	34	7835	0,5
6	28	8641	35	8631	0,6
7	30	7937	32	7934	0,6
8	27	6122	-	-	infectível
9	27	6855	33	6852	0,5
10	33	8060	33	8063	0,5
Média	30	7359	33	7357	0,47

*média de 4 segundos por instância

Tabela 7.2 : 20 peças, 10 produtos finais, 7 períodos, capacidade apertada, $10 \leq l, w \leq 75$

	<i>Solução HD</i>		<i>Solução Lagrangiana</i>		
	# setup	# placas	# setup	# placas	Δ
1	31	12748	34	11623	0,9
2	30	12562	35	13082	0,4
3	33	8745	36	8552	0,2
4	31	9885	31	9746	0,9
5	27	10247	31	10184	0,4
6	29	10091	32	10110	0,8
7	34	12394	33	12344	0,2
8	27	13515	30	13500	0,7
9	26	9206	31	9184	0,4
10	31	13283	34	13108	0,7
Média	30	11267	32	11143	0,56

* média de 75 segundos

Podemos observar que a média do desvio entre os limitantes inferior e superior da Tabela 7.1 ($25 \leq l, w \leq 50$) é menor que da Tabela 7.2 ($10 \leq l, w \leq 75$), o que já era esperado, pois problemas cujos tamanhos das peças variam no intervalo $[10,75]$ são mais difíceis de resolver, pois peças menores representam maiores possibilidades de arranjos nas placas.

Aumentando a quantidade de diferentes tipos de peças e produtos finais, obtemos os seguintes resultados:

Tabela 7.3 : 30 peças, 15 produtos finais, 7 períodos, capacidade apertada, $25 \leq l, w \leq 50$

	<i>Solução HD</i>		<i>Solução Lagrangiana</i>		
	# setup	# placas	# setup	# placas	Δ
1	39	16953	47	16953	0,5
2	43	15512	46	15498	0,2
3	37	16697	43	16679	0,2
4	42	17927	47	17925	0,1
5	48	18977	46	18973	0,6
6	42	15763	48	15756	0,3
7	49	15865	49	15872	0,3
8	35	17209	49	17193	0,1
9	44	14823	47	14818	0,4
10	36	15659	45	15651	0,3
Média	41	16538	46	16531	0,3

* média de 5 segundos por instância

Tabela 7.4 : 30 peças, 15 produtos finais, 7 períodos, capacidade apertada, $10 \leq l, w \leq 75$

	<i>Solução HD</i>		<i>Solução Lagrangiana</i>		
	# setup	# placas	# setup	# placas	Δ
1	41	29643	49	29444	0,9
2	47	24767	50	24449	0,4
3	34	23241	46	23209	0,4
4	46	30807	47	28913	0,5
5	43	26093	47	26781	0,5
6	50	23907	53	23625	0,4
7	41	25928	44	24210	0,2
8	35	21875	45	21897	0,5
9	47	29722	49	29889	0,7
10	51	23939	55	23714	0,4
Média	43	25992	48	25613	0,5

* média de 85 segundos por instância

Em todas as tabelas anteriormente apresentadas, observamos que como a solução HD (que produziu somente soluções inactíveis para todas as instâncias) não leva em consideração a capacidade, sua solução provavelmente irá gerar sempre uma quantidade menor de períodos em que há produção em relação à solução gerada pela heurística lagrangiana (esta por sua vez, em apenas uma instância, na Tabela 7.1, gerou uma solução inactível).

Abaixo de cada tabela indicamos o tempo médio de execução de uma instância de cada tabela. Observe que problemas com maiores quantidades de diferentes tipos de peças obtiveram melhores soluções, pois aumentam as chances de ocupar melhor a área das placas.

Os próximos passos consistem em, ao invés de tomar a solução da Heurística de Decomposição antes do passo de factibilização do algoritmo da Heurística Lagrangiana desenvolvida neste capítulo, tomar a solução após o primeiro passo de factibilização (resolvendo assim o problema de dimensionamento de lotes capacitado) e então compará-la com as soluções obtidas pela Heurística Lagrangiana.

Capítulo 8

Problema de Dimensionamento de Lotes Capacitado considerando Tempos de Preparação – Novas Abordagens de Resolução

Introdução

O problema de dimensionamento de lotes é uma decisão fundamental no estágio do planejamento tático em um processo de manufatura, consistindo em decidir a quantidade a ser produzida de cada item demandado em cada período do horizonte de planejamento. Uma breve revisão deste problema foi estudado no Capítulo 2.

Embora o Problema de Dimensionamento de Lotes Capacitado considerando Tempos de Preparação, estudado separadamente, não seja o foco dessa dissertação, baseado na idéia de resolução do Problema Combinado Simplificado descrito no Capítulo 5 (analogia com o problema do caminho mínimo) surgiram algumas propostas de resolução. E, para analisar a eficácia dos métodos propostos faremos a comparação de suas soluções com as soluções obtidas por Trigeiro et al. (1989).

Ainda neste capítulo, após a resolução do Problema de Dimensionamento de Lotes Capacitado, investigamos o que chamaremos de Problema de *Setup Pairings*, onde, para cada período analisamos a possibilidade de rearranjar os itens nos períodos em que já estão alocados de tal modo que o último item produzido no período t seja o mesmo item produzido no início do período $t+1$. Fazendo dessa forma podemos economizar no custo de preparação quando tem-se que preparar a máquina para a produção de itens diferentes.

Modelagem Matemática

O modelo matemático para o Problema de Dimensionamento de Lotes monoestágio com vários itens, restrição de capacidade, custos de produção, preparação e estoque e tempos de preparação e produção, usualmente denotado por (CLSP), pode ser escrito como segue.

Seja a seguinte notação:

Índices:

$i=1, \dots, M$ número de itens a serem processados.

$t=1, \dots, T$ número de períodos considerados.

Parâmetros:

d_{it} : demanda do item i para cada período t

c_{it} : custo de produção do item i no período t

h_{it} : custo de estoque do item i no fim do período t

s_{it} : custo de preparação do item i no período t

v_i : quantidade unitária de recurso utilizado na produção do item i

C_t : capacidade disponível no período t (em unidades de tempo)

f_i : tempo de preparação do item i

Q : Número grande

Variáveis:

x_{it} : número de itens i produzidos no período t

I_{it} : estoque do item i no período t

z_{it} : 1 se existe produção do item i no período t e 0 caso contrário.

$$\text{Min} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^M (c_{it}x_{it} + h_{it}I_{it} + s_{it}z_{it}) \quad (8.1)$$

$$\text{s.a.} : x_{it} + I_{i,t-1} - I_{it} = d_{it} \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T \quad (8.2)$$

$$\sum_{i=1}^M (v_i x_{it} + f_i z_{it}) \leq C_t \quad t = 1, \dots, T \quad (8.3)$$

$$x_{it} \leq Q \cdot z_{it} \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T \quad (8.4)$$

$$x_{it}, I_{it} \geq 0 \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T \quad (8.5)$$

$$z_{it} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, M ; t = 1, \dots, T \quad (8.6)$$

A função objetivo (8.1) representa os custos envolvidos na produção, estoque e preparação. As restrições (8.2) denotam o balanço de estoque (sem perda de generalidade, o estoque inicial e final podem ser considerado nulos), as restrições (8.3) representam os limites de capacidade onde se levam em consideração o tempo despendido para a produção dos itens e preparação das máquinas e, as restrições (8.4) denotam em quais períodos ocorre produção (onde Q é um número grande).

Trigeiro et al. (1989) propõem um método de resolução para esse problema baseado na relaxação lagrangiana das restrições de capacidade (8.3), como descrito em maiores detalhes no Capítulo 2.

Neste capítulo propomos algumas abordagens que consistem em uma analogia com o problema do caminho mínimo, como segue.

Métodos de Resolução

Considere um grafo onde os nós representam os períodos e cada arco corresponde a um problema de dimensionamento de lotes capacitado. Por exemplo, o arco (k,l) corresponde ao problema de dimensionamento de lotes considerando apenas os dados referentes aos períodos $k, k+1, \dots, l$. Logo, nessa nova notação, solucionar um problema com T períodos significa resolver o arco $(1,T)$. Por exemplo, para um problema que tenha 5 períodos resolver o arco $(1,T)$ significa resolver o (CLSP) para os períodos 1 a 5. Se no mesmo exemplo quiséssemos resolver o arco $(3,5)$, significaria resolver o (CLSP) com 3 períodos, considerando o período 3 como o primeiro período, o período 4 como o segundo e finalmente o período 5 como o último período. E, cada arco pode ser resolvido utilizando o algoritmo de Trigeiro et al. (1989).

Apresentamos a seguir 4 abordagens distintas para o Problema de Dimensionamento de Lotes Capacitado com Tempos de Preparação usando a representação acima.

Primeira Abordagem: 2-Sets

Nossa primeira abordagem para o problema consiste em dividir o problema original que corresponde ao arco $(1,T)$ em dois problemas menores, por exemplo, considere um problema com 5 períodos. Ao invés de resolvermos o arco $(1,5)$, podemos dividir o problema em dois menores, por exemplo, podemos resolver os seguintes caminhos de dois arcos: $(1,1)(2,5)$ ou $(1,2)(3,5)$ ou $(1,3)(4,5)$ ou $(1,4)(5,5)$, como mostra o primeiro nível da Figura 8.1 (considere o arco $(1,T)$ como nível zero).

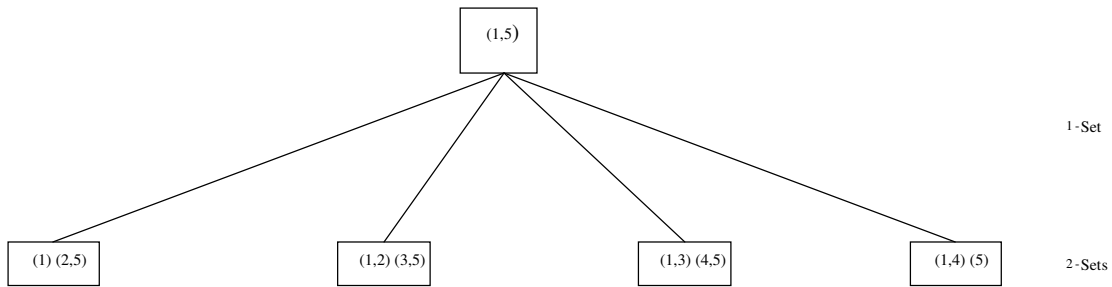


Figura 8.1: Rede para T=5, mostrando todos os possíveis nós para 2-Sets.

Tomemos como exemplo o caminho (1,2)(3,5). Esse caminho significa resolver primeiramente o (CLSP) para os períodos 1 e 2 e depois resolver o (CLSP) para os períodos 3, 4 e 5. Obviamente, quando resolvemos o segundo arco (3,5) provavelmente encontraremos infactibilidade no primeiro período, no nosso caso, no período 3. Para superar essa dificuldade, ao invés de resolvermos o segundo arco como um problema de três períodos (3, 4 e 5), resolvemos como um problema de T períodos, utilizando a seguinte abordagem:

Seja $T=5$, $M=4$ e a demanda dada pela tabela abaixo.

	1	2	3	4
1	10	0	0	10
2	10	10	0	10
3	0	0	10	0
4	10	10	10	10
5	0	0	10	10

Suponha que vamos solucionar o caminho (1,2)(3,5). Logo, o primeiro passo é resolver um (CLSP) para o arco (1,2), ou seja, resolver o (CLSP) apenas considerando os períodos 1 e 2. Suponha que a produção resultante seja:

	1	2	3	4
1	20	0	0	20
2	0	10	0	0

Nesse momento, ao invés de resolvermos outro (CLSP) considerando apenas os períodos 3, 4 e 5, guardamos o custo de estoque referente ao primeiro (CLSP) resolvido (considerando apenas os períodos 1 e 2) denominamos $d_{it}=x_{it}$ para $i=1,\dots,M$ e $t=1,2$ e para os períodos do segundo arco, a demanda continua a mesma, da seguinte forma, considerando ainda o exemplo:

	1	2	3	4
1	20	0	0	20
2	0	10	0	0
3	0	0	10	0
4	10	10	10	10
5	0	0	10	10

Resolvendo-se novamente o (CLSP) para a demanda acima, a solução final para o problema geral, é a soma dos custos de estoque do primeiro arco com os custos de produção, preparação e estoque do segundo arco. Fazendo dessa forma, o problema tem mais flexibilidade para mover itens de períodos apertados em relação à capacidade para períodos, pertencentes a arcos anteriores, mais “folgados”. Também, resolvendo problemas menores, temos maiores possibilidades de encontrar melhores soluções, ou até soluções próximas do ótimo. Chamamos essa abordagem de 2-Sets.

Segunda Abordagem: 3-Sets

Da mesma forma que o procedimento 2-Sets, a abordagem 3-Sets divide agora o problema em um caminho de 3 arcos, ou 3 subproblemas. Ao invés de resolver o problema original (1,T), podemos resolver 3 subproblemas, por exemplo, para T=5, temos os caminhos: (1)(2)(3,5) ou (1)(2,3)(4,5) ou (1)(2,4)(5) ou (1,2)(3)(4,5) ou (1,2)(3,4)(5) ou (1,3)(4)(5), como mostra o segundo nível da Figura 8.2.

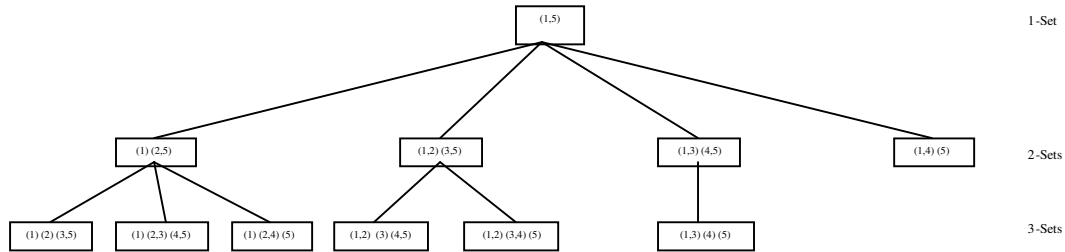


Figura 8.2: Rede para T=5, mostrando todos os possíveis nós para 2-Sets e 3-Sets

Da mesma forma, ao resolvermos o segundo arco, utilizamos a produção proveniente da resolução do primeiro arco como demanda, e o terceiro arco é resolvido do período 1 a T, sendo que a demanda dos períodos do primeiro e segundo arcos são dados como a produção obtida anteriormente.

Poderíamos continuar dessa forma e dividir o problema em caminhos de 4 arcos (4-Sets), 5 arcos (5-Sets),..., até T arcos (T-Sets), como mostra a Figura 8.3. Obviamente, resolver todos os possíveis caminhos da rede é computacionalmente inviável.

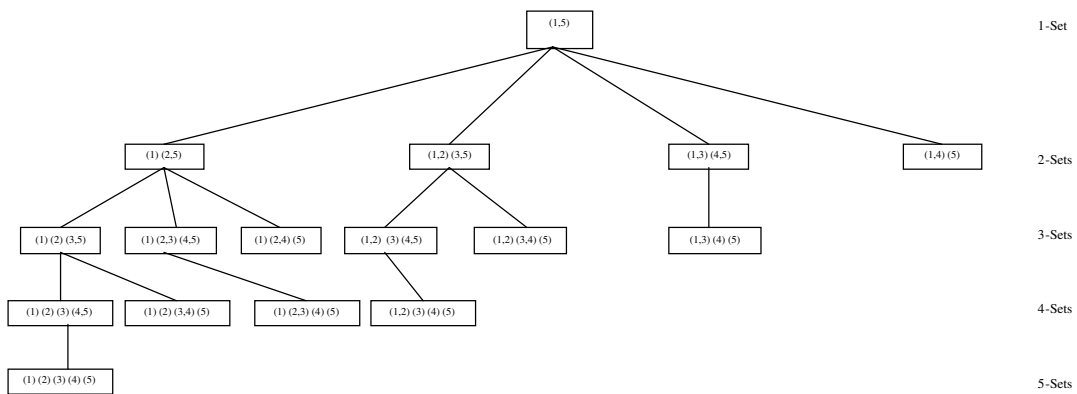


Figura 8.3: Rede para T=5, mostrando todos os possíveis arcos para 2-Sets, 3-Sets, 4-Sets e 5-Sets.

Neste trabalho apenas lidamos com as abordagens 2-Sets e 3-Sets. E, para resolver cada arco, utilizamos o algoritmo de Trigeiro et al. (1989).

Terceira Abordagem: Network_Trigeiro

A terceira abordagem é baseada no problema de caminho mínimo da seguinte forma: Inicialize o caminho com os arcos (1)(2) ou (1,2). Resolva esses dois caminhos utilizando o algoritmo de Trigeiro et al. (1989). Escolha o melhor caminho até o momento, ou seja, escolha (1)(2) se seu custo for menor que o custo do caminho (1,2), ou vice-versa. Suponha que o melhor caminho (com menor custo) tenha sido o caminho (1)(2). Agora devemos inserir o período 3, logo temos as seguintes opções: os caminhos (1)(2)(3), (1)(2,3) ou (1,3). Resolva esses três caminhos e escolha o melhor (novamente o de menor custo). Suponha que o caminho com menor custo até o momento seja (1)(2,3). Agora temos que inserir o período 4. Para isso temos que percorrer os seguintes caminhos: (1)(2,3)(4), (1,)(2,4) ou (1,4). Resolva novamente todos os caminhos e guarde o melhor. E assim por diante até inserir o último período T, obtendo assim o melhor caminho do período 1 ao T. É importante ressaltar que, fazendo dessa maneira não estamos percorrendo todos os possíveis caminhos do grafo, mas podemos encontrar soluções, ou caminhos, com 1, 2, 3,..., ou T arcos. A solução com apenas um arco, (1,T) corresponde à solução de Trigeiro et al. (1989), e a solução com T arcos corresponde à solução lote por lote.

Nesse caso, a solução encontrada por *Network_Trigeiro* será sempre melhor ou igual à solução de Trigeiro et al. (1989) pois sempre resolveremos o último arco (1,T).

Quarta Abordagem: Network_Tabu

É basicamente a mesma abordagem do *Network_Trigeiro*, mas ao invés de resolver os arcos utilizando o algoritmo de Trigeiro et al. (1989), a abordagem *Network_Tabu* resolve os arcos utilizando o algoritmo de Gopalakrishnan (2001) que é baseado na Busca Tabu.

Nesse caso, a solução do Network_Tabu não necessariamente será melhor ou igual á solução de Trigeiro et al. (1989) pois ao resolver o arco (1,T) estaremos utilizando o algoritmo de Gopalakrishnan (2001) e não o algoritmo de Trigeiro et al. (1989).

Obviamente essas quatro abordagens possuem um tempo computacional maior que a heurística de Trigeiro et al. (1989), principalmente a Netwok_Tabu. A fim de sermos justos nas comparações, aumentamos o tempo de execução do algoritmo de Trigeiro et al. (1989). Para isso, basta aumentar o número máximo de iterações no método do Subgradiente. Portanto, aumentamos de 100 iterações para 500 e 1.000 iterações. Observamos que a partir de 1.000 iterações, embora o algoritmo de Trigeiro et al. (1989) continue sendo mais rápido que as 4 abordagens apresentadas, ele não melhora mais sua solução. Para as abordagens 2-Sets, 3-Sets e Network_Trigeiro foi utilizado o algoritmo de Trigeiro et al. (1989) com 100 iterações no Método do Subgradiente.

Resultados Computacionais

Para mostrar a performance das heurísticas 2-Sets, 3-Sets, Network_Trigeiro e Network_Tabu, utilizamos 751 problemas testes de Trigeiro et al. (1989) e comparamos com suas soluções. Embora Trigeiro et al. (1989) considere no modelo matemático todos os custos variantes no tempo, na implementação do método, todos os custos foram considerados constantes no tempo. Os métodos implementados neste capítulo foram feitos em linguagem C e os testes computacionais foram realizados em uma Sun Station Ultra 1.

Trigeiro et al. (1989) apresenta os seguintes 5 conjuntos de testes com 751 instâncias: o conjunto 70 no qual possui 70 instâncias, o conjunto 141 que possui 141 instâncias, e os conjuntos 540-1, 540-2 e 540-3, cada um possuindo 180 instâncias.

Para 2-Sets construímos todos os possíveis caminhos (de dois arcos) e escolhemos o de menor custo. O mesmo fizemos para 3-Sets (construímos todos os possíveis

caminhos de 3 arcos). Depois, tomamos a melhor solução entre eles e denominamos essa solução de 2-3Sets (os melhores resultados entre 2 e 3-Sets).

A seguinte tabela compara as soluções obtidas por Trigeiro et al. (1989) com 100, 500 e 1.000 iterações no Subgradiente com as soluções obtidas por 2-3Sets, Network_Trigeiro a Network_Tabu, para todos os 5 conjuntos de testes computacionais.

Tabela 8.1: Comparações entre as soluções das 4 abordagens propostas e os resultados de Trigeiro et al. (1989).

	Instâncias	Trigeiro et al. 100 iterações	Trigeiro et al. 500 iterações	Trigeiro et al. 1.000 iterações
2-3 Sets	70	53 (11)	53 (11)	53 (11)
	141	105 (18)	90 (20)	90 (20)
	540-1	119 (57)	117 (36)	117 (36)
	540-2	93 (67)	73 (60)	73 (60)
	540-3	76 (74)	51 (63)	51 (63)
Network Tabu	70	63 (3)	63 (3)	63 (3)
	141	118 (5)	115 (5)	115 (5)
	540-1	136 (27)	132 (11)	132 (11)
	540-2	93 (25)	67 (25)	67 (25)
	540-3	43 (28)	30 (28)	30 (28)
Network Trigeiro	70	21 (49)	19 (41)	19 (41)
	141	30 (111)	22 (70)	22 (70)
	540-1	46 (134)	43 (70)	43 (70)
	540-2	20 (160)	15 (97)	15 (97)
	540-3	10 (170)	9 (97)	9 (97)

A coluna *Instâncias* denota o conjunto de instâncias utilizadas por Trigeiro et al. (1989). A coluna *Trigeiro et al. 100 iterações* denota a quantidade de soluções obtidas por 2-3Sets, Network_Trigeiro e Network_Tabu melhores que Trigeiro et al. com 100 iterações no Método do Subgradiente. O mesmo para as colunas *Trigeiro et al. 500 iterações* e *Trigeiro et al. 1.000 iterações*, onde o primeiro denota utilizar o algoritmo de Trigeiro et al. (1989) com 500 iterações no Método do Subgradiente e o segundo representa o algoritmo de Trigeiro et al. (1989) com 1.000 iterações no Método do Subgradiente.

Por exemplo, para o conjunto de Instâncias 70, a abordagem 2-3Sets obteve 53 soluções melhores que Trigeiro et al. 100, 500 e 1.000 iterações. Para o conjunto de instâncias 141, 2-3Sets obteve 105 soluções melhores que Trigeiro et al. com 100 iterações, e 90 soluções melhores que Trigeiro et al. com 500 e 1.000 iterações. Os números entre parênteses denotam a quantidade de soluções obtidas iguais às de Trigeiro et al. (1989). Por exemplo, para o conjunto de soluções 141, a abordagem 2-3Sets obteve 18 soluções iguais a Trigeiro et al. com 100 iterações e 20 soluções iguais a Trigeiro et al. com 500 e 1.000 iterações.

Podemos concluir a partir da Tabela 8.1 que resolver vários problemas menores resultam, em grande parte, em melhores soluções do que resolvendo os problemas globais. Observe que, como mencionado anteriormente, a qualidade das soluções de Trigeiro et al. quando aumentamos de 500 para 1.000 iterações no subgradiente não sofre diferenças consideráveis.

A Tabela 8.2 a seguir, refere-se aos “seis problemas difíceis” de Trigeiro et al. (1989) relatados por Wolsey (encontrados na internet no endereço: <http://www.core.ucl.ac.be/wolsey/trigeiro.htm>). A Tabela 8.2 nos mostra para os seis problemas difíceis (pertencentes ao conjunto 141 dos problemas de Trigeiro et al. (1989)), os resultados obtidos por Wolsey, Trigeiro et al. e a melhor solução entre 2-Sets

e 3-Sets incluindo o caminho obtido por esta melhor solução. Dentre os 6 problemas a heurística 2-Sets conseguiu melhores resultados que Trigeiro et al. (1989) em 3 instâncias e em 1 instância conseguiu melhor resultado que Wolsey.

Tabela 8.2: Problemas “difíceis” relatados por Wolsey.

Instâncias (conjunto 141)	Solução obtida por Wolsey	Solução obtida por Trigeiro et al.	Trigeiro et al. LB	Melhor Solução entre 2-Sets e 3-Sets	Melhor caminho
G30	37.721	39.142	36.793	38.874*	(1,9)(10,15)
G53	74.634	75.291	73.752	75.485	(1,3)(4,15)
G57	136.509	137.033	136.358	137.138	(1,2)(3,15)
G62	61.806	63.227	60.920	62.924*	(1,28)(29,30)
G69	132.650	132.281	130.162	132.096**	(1,21)(22,30)
G72	288.424	288.447	287.744	288.783	(1,2)(3,30)

*2-Sets fornece solução melhor que Trigeiro et al.

** 2-Sets fornece solução melhor que Trigeiro et al. e Wolsey

Problema de Setup Pairings

A fim de melhorar a solução recorrente do CLSP, propomos aplicar o *Setup Pairings*. O *Setup Pairings* é semelhante ao *Setup Carryover* (estudado por Gopalakrishnan et al. (1995)), mas não leva em consideração o tempo ocioso de máquina em cada período utilizando-o para produção. O propósito do Problema de *Setup Pairings* é apenas rearranjar os itens nos períodos em que já estão alocados de tal modo que o último item produzido no período t seja o mesmo item produzido no início do período $t+1$. Fazendo dessa forma podemos economizar no custo de preparação quando tem-se que preparar a máquina para a produção de itens diferentes.

A seguir mostramos o modelo matemático para o problema de *Setup Pairings*.

Seja M a quantidade de itens, T a quantidade de períodos do horizonte de planejamento, $M(t)$ a quantidade de itens produzidos no período t , $C(t)$ o número de itens em comum produzidos nos períodos t e $t+1$, e seja s_{it} o custo de preparação para o item i no período t . Mais ainda, sejam,

$$\alpha_{it} = \begin{cases} 1 & \text{se o item } i \text{ é produzido primeiro no período } t \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\beta_{it} = \begin{cases} 1 & \text{se o item } i \text{ é produzido por último no período } t \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$Y_{it} = \begin{cases} 1 & \text{se o item } i \text{ é escolhido para ser produzido por último no período } t \text{ e primeiro no período } t+1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\delta_t = \begin{cases} 1 & \text{se somente um produto é produzido no período } t \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Sem perda de generalidade podemos supor que 1 ou mais produtos são produzidos em cada período, pois caso contrário podemos dividir o problema em dois ou mais subproblemas. O modelo matemático para o Problema de *Setup Pairings* pode ser escrito da seguinte forma:

$$\text{Max} \quad \sum_{t=1}^T \sum_{i \in C(t)} s_{it} Y_{it} \quad (8.7)$$

$$\text{s.a. :} \quad \sum_{i \in M(t)} \alpha_{it} = 1 \quad t = 1, \dots, T \quad (8.8)$$

$$\sum_{i \in M(t)} \beta_{it} = 1 \quad t = 1, \dots, T \quad (8.9)$$

$$\alpha_{it} + \beta_{it} \leq 1 + \delta_t \quad \forall i \in M(t); t = 1, \dots, T \quad (8.10)$$

$$2Y_{it} - \alpha_{i,t+1} - \beta_{it} \leq 0 \quad \forall i \in C(t); t = 1, \dots, T-1 \quad (8.11)$$

$$\sum_{i \in C(t)} Y_{it} \leq 1 \quad t = 1, \dots, T-1 \quad (8.12)$$

$$Y_{it}, \alpha_{it}, \beta_{it} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T \quad (8.13)$$

A função objetivo (8.7) minimiza os custos de preparação. As restrições (8.8) asseguram que pelo menos um item será produzido no início de cada período. Também, as restrições (8.9) asseguram que pelo menos um item será produzido no fim de cada período. Para períodos com mais de um item produzido, as restrições (8.10) garantem que o primeiro item seja diferente do último item produzido em cada período. As restrições (8.11) asseguram que se um dado item for escolhido para ser produzido no início de um período, o mesmo não pode ser escolhido para ser produzido no início do próximo período. As trocas de posição dos itens são contabilizadas pelas restrições (8.12). As variáveis consideradas são binárias, conforme restrições (8.13).

Resultados Computacionais

Depois de obter os melhores resultados dentre as heurísticas 2-Sets, 3-Sets, Network_Trigeiro e Network_Tabu, aplicamos o *Setup Pairings* (utilizando o pacote comercial CPLEX) e comparamos com os resultados obtidos por Gopalakrishnan (2001) após a aplicação do *Setup Carryover*. A Tabela 8.3 nos mostra a quantidade de instâncias em que depois de aplicar o *Setup Pairings* sob a melhor solução, obteve melhores resultados que Gopalakrishnan (2001) após o *Setup Carryover*.

Tabela 8.3: Comparação dos resultados obtidos por *Setup Pairings* e os resultados obtidos por Gopalakrishnan, 2001 após *Setup Carryover*.

Set	# melhores soluções que <i>Setup Carryover</i>
70	0
141	1
540-1	35
540-2	64
540-3	55

Note que o Problema de *Setup Carryover*, além de rearranjar os itens levando em conta o primeiro e último item produzido em cada período, leva em consideração o tempo ocioso em cada período do horizonte de planejamento. Desta forma, já era esperado que seus resultados fossem melhores que os obtidos aplicando o *Setup Pairings*. Mas da Tabela 8.3 podemos deduzir que como os testes 70 e 141 são mais “folgados” que os restantes, o Problema de *Setup Pairings* aplica-se bem a problemas “apertados” (540-1, 540-2 e 540-3), obviamente, quando não há tempo ocioso.

Conclusões Finais e Perspectivas Futuras

Esta tese abordou o ***Problema Combinado de Dimensionamento de Lotes e Corte de Estoque***, ou simplesmente, o ***Problema Combinado***. Considere um processo de produção que consiste em cortar placas em peças menores a fim de compor os produtos finais. Quando a demanda dos produtos finais é alta e pode ser atendida dentro de um horizonte de tempo, as decisões de planejamento consistem em escolher quais produtos finais e/ou peças e em que quantidades (tamanhos de lotes) devem ser produzidos em cada período (problema de dimensionamento de lotes). Nesses processos industriais, tais decisões geram as demandas das peças no problema de corte de estoque. Dependendo dos tamanhos dos lotes escolhidos, o processo de cortagem pode ser altamente prejudicado, de modo que tais decisões devem ser harmonizadas.

A princípio, implementamos o método usualmente utilizado por indústrias na prática. Devido à alta complexidade do Modelo Combinado, as indústrias resolvem os dois problemas de forma separada. Inicialmente resolve-se o problema de dimensionamento de lotes obtendo a quantidade de produtos finais a serem produzidos em cada período do horizonte de planejamento e então para cada período resolve-se um problema de corte de estoque. Chamamos este enfoque de Heurística de Decomposição (HD). A solução do problema de forma conjunta pode levar a ganhos de custos relevantes. Este é o principal objetivo a ser alcançado nesta tese.

A fim de solucionar os problemas de forma conjunta, formulamos um modelo matemático inteiro-misto que combina os problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque. O fator determinante que sugere a modelagem do problema combinado deve-se à antecipação da produção de certos lotes de produtos finais e/ou peças. Tal antecipação leva a um compromisso entre aumentar os custos de estoque enquanto se diminuem os custos de preparação e perdas nas placas (devido a um melhor arranjo nos padrões de corte). Restrições adicionais, como capacidade de serra no processo de corte, também foram consideradas.

O modelo matemático inteiro-misto desenvolvido possui três grandes dificuldades: (1) integralidade das variáveis que representam a quantidade de placas a serem cortadas; (2) a grande quantidade de padrões de corte que podem ser gerados e (3) variáveis binárias referentes à preparação.

Devido às três dificuldades em solucionar o Modelo Combinado, desenvolvemos três métodos de solução para três diferentes versões do mesmo.

A primeira versão feita no Modelo Combinado desenvolvido consiste em considerar apenas as restrições referentes às peças, desprezando as restrições referentes aos produtos finais. Mesmo com essa simplificação, continuamos com um problema

combinado onde existe um compromisso entre antecipar a produção de certos lotes de peças, aumentando os custos de estocagem, mas propiciando um melhor arranjo nos padrões de corte e diminuindo os custos de preparação. Para isso formulamos o Problema Combinado Simplificado e propomos um método de resolução baseado na analogia com a rede de caminho mínimo (RCM). Dois conjuntos de testes computacionais foram apresentados. O primeiro compara as soluções obtidas pela abordagem RCM com a abordagem HD (heurística de decomposição). Esses testes de tamanhos reais mostram um ganho significativo da abordagem RCM, chegando a um lucro de até 28% em um caso isolado sobre os problemas separados. Em média, os ganhos obtidos pelo RCM com custos de preparação variando entre 5, 20 e 50 são de 12,9%, 4,26% e 3,04%, respectivamente, para problemas com 4 períodos no horizonte de planejamento. Para problemas com 10 períodos no horizonte de planejamento, os ganhos obtidos por RCM, variando os custos de preparação entre 5, 20 e 50 aumentam para 13,0%, 11,5% e 8,3 %, respectivamente. Esse resultado é ainda mais expressivo se considerarmos que as soluções dos problemas separados são ótimas (com respeito a cada problema) enquanto que a solução da abordagem RCM é heurística. Isso claramente nos mostra que existem benefícios quando antecipamos a produção de certos lotes de peças. O segundo conjunto de testes verifica a qualidade das soluções obtidas pela abordagem RCM. Mostramos que, para exemplos pequenos (para os quais estamos aptos a encontrar soluções ótimas usando o pacote comercial CPLEX), a abordagem RCM encontrou soluções ótimas em 3 dos 6 casos e, nos restantes a média do desvio entre as soluções é de 0,22%. Este capítulo resultou no artigo “*The combined cutting stock and lot sizing problem in industrial processes*”, aceito na revista *European Journal of Operational Research*, juntamente com o Prof. Paulo França.

A segunda alteração realizada no Modelo Combinado consiste em desprezar as restrições de preparação e integralidade, ficando apenas com a dificuldade da enorme quantidade de padrões que podem ser gerados. Ainda assim, continua existindo o compromisso entre os custos de estoque e de placas. Para esse modelo resultante

propomos um método de solução exato usando o método simplex com a técnica de geração de colunas proposta por Gilmore e Gomory (1965). Resultados computacionais comparando as soluções do método proposto com soluções obtidas resolvendo o problema de forma separada (HD), mostram claramente os ganhos obtidos quando se antecipa a produção de certos lotes de produtos ou peças. Cinco conjuntos de testes computacionais foram realizados sobre três aspectos diferentes: (1) comparação entre os resultados obtidos pelo método exato usando capacidade apertada e capacidade frouxa, onde constatamos que quando lidamos com o problema “folgado” a quantidade de placas cortadas é menor comparada à quantidade quando a capacidade é apertada, podendo levar a um aumento nos ganhos de até 11,67%. (2) comparação entre os resultados obtidos pelo método proposto e a heurística HD, onde constatamos um ganho do método proposto em média de 4,15% em relação à heurística HD quando utilizamos 50 diferentes tipos de peças; (3) por fim, comparamos a quantidade de placas cortadas quando diminuimos os custos de placas. Nesta última comparação verificamos o que já esperávamos, quanto maior o custo de placas o algoritmo tenta rearranjar as peças nas placas de modo a minimizar a quantidade de placas cortadas. Baseado neste capítulo, juntamente com os Professores Paulo França e Marcos Arenales, está em fase final de preparação o artigo “*An exact approach to the combined production planning model*”.

Como última alteração do modelo Combinado, desta vez desprezamos apenas a integralidade das variáveis que representam a quantidade de placas a serem cortadas. Se considerarmos a demanda suficientemente alta, a não-integralidade dessas restrições não afetam consideravelmente os custos globais. Portanto para esse novo modelo propomos um método de resolução baseado na Relaxação Lagrangiana, utilizando o Método do Subgradiente para atualizar o vetor multiplicador de lagrange. Resultados computacionais também são apresentados, onde realizamos 4 conjuntos de testes computacionais analisados sob dois aspectos diferentes: (1) análise do desvio padrão dos limitantes inferior e superior, onde constatamos um desvio de 0,47% em média e, (2) comparação da solução lagrangiana obtida com a solução HD (não considerando as

restrições de capacidade), onde constatamos que o desvio percentual entre os limitantes inferior e superior varia de 0,3 a 0,5 %.

Embora não seja o foco da tese, estudamos também o Problema de Dimensionamento de Lotes com tempos de Preparação (CLSP). Para isso, formulamos quatro abordagens de soluções, comparando seus resultados com os obtidos por Trigeiro (1989). Estudamos também o que chamamos de *Setup Pairings*, que, após a solução do (CLSP) rearranja os itens dentro de cada período do horizonte de planejamento, fazendo com que o último item produzido no período t seja igual ao primeiro período produzido no período $t+1$, obtendo uma grande economia nos custos de preparação de máquinas. Baseado neste capítulo está em fase final de preparação o artigo “*On a Tactical/Operational Production Planning Problem in Supply Chain Management: Balancing Inventory and Setup Costs*”, juntamente com o Prof. Jean-Marie Bourjolly.

Como perspectivas futuras podemos sugerir a inclusão de tempos de preparação ao modelo combinado de corte de estoque e dimensionamento de lotes

Outra sugestão seria o estudo do Problema Combinado modificando o objetivo do problema de corte de estoque. Neste trabalho consideramos somente a minimização da perda no processo de corte, mas como o custo de preparação nas mudanças de padrões de corte são também de muita importância, poderíamos modelar matematicamente o novo modelo combinado minimizando a perda e a quantidade de diferentes padrões de corte. O problema de minimização de diferentes tipos de padrões de corte por si só consiste em um problema *NP-hard*, para isso seria necessário desenvolver heurísticas para sua resolução.

Referências Bibliográficas

Anthony, R.N. (1965), “Planning and control systems: A framework for analysis”, *Harvard University Press, Cambridge, Mass, apud em Hox & Candea (1984)*.

Bahl, H. C., Ritzman, L. P., Gupta, J. N. D. (1987), “Determining lot sizes and resource Requirements : A Review”, *Operations Research* 35, n.3, 329-345.

Billington P. J., McClain J. O. e Thomas L. J. (1983), “Mathematical programming approaches to capacity MRP systems: Review, formulation and problem reduction”, *Management Science* 29, n.10, 1126-1141.

Camerini, P.M., Fratta, L. e Maffioli, F. (1975), “On improving relation methods by modified Gradient Techniques”, *Mathematical Programming Study* 3, 26-54.

Christofides, N. E Whitlock, C. (1977), “An algorithm for two-dimensional cutting problems”, *Operations Research* 25, 30-44.

Drexl, A. e Kimms, A. (1997), “Lot sizing and scheduling – survey and extentions”, *European Journal of Operational Research* 99, 221-235.

Evans, James R. (1985), “An efficient implementation of the Wagner-Whitin algorithm for dynamic lot-sizing”, *Journal of Operations Mangament* 5, n. 2, 229-235.

Gilmore, P. e Gomory, R. (1961), “A linear programming approach to the cutting stock problem”, *Operations Research* 9, 849-859.

Gilmore, P. e Gomory, R. (1963), “A linear programming approach to the cutting stock problem - Part II”, *Operations Research* 11, 863-888.

Gilmore, P. e Gomory, R. (1965), “MultiStage cutting stock problems of two and more dimensions”, *Operations Research* 14, 1045-1074.

Gopalakrishnan M., Miller D.M. e Schmidt C.P. (1995), “A framework for modeling setup carryover in the capacitated lot sizing problem”, *International Journal of Production Research* 33, 1973-1988.

Gopalakrishnan M, Ding K, Bourjolly JM e Mohan S. (2001), “A tabu-search heuristic for the capacitated lot-sizing problem with set-up carryover”, *Management Science* 47: (6) 851-863.

Haessler R.W. (1971), “A heuristic programming solution to a nonlinear cutting stock problem”, *Management Science* 17, B793-B802.

Haessler, R.W. (1975), “Controlling cutting pattern changes in one-dimensional trim problems”, *Operations Research* 23(3), 483-493.

Haessler, R.W. (1980), “A Note on Computational Modifications to the Gilmore-Gomory cutting stock algorithm”, *Operations Research* 28, 1001-1005.

Haessler, R.W. (1988), "Selection and design of heuristic procedures for solving roll trim loss problems", *Management Science* 34 (12), 1460-1471.

Hendry, L. C., Fok, K. K., e Shek, K. W. (1996), "A cutting stock scheduling problem in the copper industry", *Journal of Operational Research Society* 47, 38-47.

Hinxman, A. (1980), "The trim-loss and assortment problems: A survey", *European Journal of Operational Research* 5, 8-18.

LeFrançois, P. e Gascon, A. (1995), "Solving a one-dimensional cutting-stock problem in a small manufacturing firm: a case study", *IIE Transactions* 27, 483-496.

Maes J., McClain, J. O. e Van Wassenhove, L. N. (1991), "Multilevel capacitated lotsizing complexity and LP based heuristic", *European Journal of Operational Research* 53, 131-148.

McDiarmid, C. (1999), "Pattern minimisation in cutting stock problems", *Discrete Applied Mathematics* 98, 121-130.

Morábito R. e Arenales, M. (1996), "Staged and constrained two-dimensional guillotine cutting problems: An AND/OR-graph approach", *European Journal of Operational Research* 94, n.3, 548-560.

Morábito, R. e Arenales, M. (2000), "Optimizing the cutting of stock plates in a furniture company", *International Journal of Production Research* 38: (12) 2725-2742.

Nemhauser, G.L., e Wolsey, L.A. (1988), "Integer and combinatorial optimization", *Wiley-Interscience Publication*.

Nonas S.L. e Thorstenson A. (2000), “A combined cutting-stock and lot-sizing problem”, *European Journal of Operational Research* 120:(2), 327-342.

Reinders, M. P. (1992), “Cutting stock optimization and integral production planning for centralized wood processing “, *Mathematical Computer Modeling* 16, n.1, 37-55.

Reinders, M. P. (1993), “Tactical planning for a cutting stock system”, *Journal of Operational Research Society* 44, n.7, 645-657.

Trigeiro W. W., Thomas L. J. e McClain J. O. (1989), “Capacitated lot sizing with setup times”, *Management Science* 35, n. 3, 353-366.

Vahrenkamp,R. (1996), “Random search in the one-dimensional cutting stock problem”, *European Journal of Operational Research* 95.

Wagner, H. M. e Whitin, T. M. (1958), “Dynamic version of the economic lot size model”, *Management Science* 5, n.1, 89-96.