

Universidade Estadual de Campinas  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Técnicas de Pós-Processamento na Simulação de Fluxos  
Monofásicos em Meios Porosos

Agnaldo Monteiro Farias  
Mestrado em Matemática Aplicada


Orientadora: Profa. Dra. Sônia Maria Gomes  
Co-Orientador: Prof. Dr. Philippe R. B. Devloo

Campinas - SP  
Dezembro de 2008


**TÉCNICAS DE PÓS-PROCESSAMENTO NA SIMULAÇÃO DE FLUXOS  
MONOFÁSICOS EM MEIOS POROSOS**

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Aginaldo Monteiro Farias** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 15 de dezembro de 2008.



Prof. Dra.: Sônia Maria Gomes  
Orientadora



Prof. Dr.: Philippe Remy. B. Devloo  
Co-orientador

Banca Examinadora:

- 1 Profa. Dra.: Sônia Maria Gomes (IMECC-UNICAMP)
- 2 Prof. Dr.: Petronio Pulino (IMECC-UNICAMP)
- 3 Prof. Dr.: Jorge Lizardo Diaz Calle (FZEA-USP)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **Mestre em Matemática Aplicada**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Farias, Agnaldo Monteiro

F225t Técnicas de pós-processamento na simulação de fluxos  
monofásicos em meios porosos/Agnaldo Monteiro Farias -- Campinas,  
[S.P. :s.n.], 2008.

Orientadores : Sônia Maria Gomes; Philippe Remy B. Devloo

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas.  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Método dos elementos finitos. 2. Métodos Goal-oriented. 3.  
Função de extração. I. Gomes, Sônia Maria. II. Devloo, Philippe R. B.  
III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,  
Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Post-processing techniques in simulation of flow in porous media.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Finite element method. 2. Goal-oriented methods.  
3. Function extraction.

Área de concentração: Análise numérica

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Profª. Dra. Sonia Maria Gomes (IMECC-UNICAMP)  
Prof. Dr. Petronio Pulino (IMECC-UNICAMP)  
Prof. Dr. Jorge Lizardo Diaz Calle (USP-FZEA)

Data da defesa: 15/12/2008

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática Aplicada

**Dissertação de Mestrado defendida em 15 de dezembro de 2008 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

  
\_\_\_\_\_  
**Prof.(a). Dr(a). SÔNIA MARIA GOMES**

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. (a). Dr (a). JORGE LIZARDO DIAZ CALLE**

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. (a). Dr (a). PETRONIO PULINO**

*A meus pais,*

*José Alves Farias e*

*Helena Monteiro do N. Farias.*

# Agradecimentos

A minha querida Patrícia a quem agradeço o amor, carinho, compreensão e apoio.

A meus pais e irmãos.

Aos meus orientadores Sônia Maria Gomes e Philippe Remy B. Devloo pela atenção, compreensão e amizade no desenvolvimento deste trabalho.

A todos meus colegas e amigos.

A todos os professores e funcionários da Unicamp que contribuíram de forma direta e indireta no desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas e amigos do LabMeC, Cesar, Pira, Caju, Gustavo, Wilbor, João, Alaor, Denise, Diogo e Thiago, sempre dispostos a ajudar.

À Petrobas pela bolsa de estudo concedida.

Agradeço a Deus pelo sonho realizado.

# Resumo

Em muitas situações na modelagem de problemas aplicados, o que se deseja de uma solução da Equação Diferencial Parcial que descreve o modelo, não é a própria solução e sim alguma quantidade de interesse. De forma geral, estas quantidades de interesse são caracterizadas por funcionais lineares limitados no espaço de funções que contém as soluções. Como exemplo, tem-se: a derivada da solução, o fluxo através de uma região da fronteira, o valor médio da solução sobre uma região do domínio, o valor da solução em um ponto etc. Em tais circunstâncias, nem sempre o refinamento uniforme ou uma estratégia de hp-refinamento, que diz respeito à qualidade global da solução, são as estratégias mais apropriadas para melhorar a aproximação da quantidade, pois podem tornar o custo computacional muito alto. Neste sentido, estratégias direcionadas para o aprimoramento da aproximação de quantidades de interesse são temas que têm recebido grande interesse nas últimas décadas. Um dos objetivos deste trabalho é o estudo de métodos para o pós-processamento da solução por elementos finitos com objetivo de se obter uma precisão desejável na aproximação das quantidades de interesse. Em particular, estudam-se dois métodos: a estratégia de adaptatividade goal-oriented e o método da função de extração.

**Palavras-chaves:** Método dos elementos finitos, Métodos goal-oriented, Função extração.

# Abstract

In many situations in the modeling of applied problems, what is wish is not the solution of governing partial differential equation system but rather a quantities of interest. In general, the quantities of interest are characterized by bounded linear functionals on the space of functions to which the solutions belongs. As an example, we have: the derivative of the solution, the flux through part of the bondary of the domain, the average of the solution over a subdomain, the value of the solution in a point etc. In this circumstances, the uniform refinement or a strategy for hp-refinement, which concerns the overall quality of the solution, not always are the most appropriate strategies to improve the approximation of the quantity, because the computational cost may become too high. In this sense, strategies directed to improve the accuracy of quantities of interest are topics that have received considerable interest in recent decades. One of the objectives of this work is the study of post-processing methods of the solution by finite elements in order to achieve a desirable precision in the approximation of quantities of interest. In particular two methods are studied: the strategy goal-oriented adaptivity and the method of the extraction function.

**keywords:** Finite element method, Goal-oriented methods, Extraction function.



# Lista de Símbolos

## Letras Romanas:

$B(\cdot, \cdot)$  - Forma bilinear

$C^m([a, b])$  - Espaço das funções definidas em  $[a, b]$  e de derivada  $D^\alpha$ ,  $0 \leq |\alpha| \leq m$ , contínua

$D^\alpha$  - Operador de derivada parcial de multi-índice,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$F(\cdot)$  - Forma linear

$h$  - Parâmetro relacionado ao "tamanho" do elemento

$H^m(\cdot)$  - Espaço de Sobolev

$\overleftrightarrow{K}$  - Tensor das permeabilidades

$K$  - Elemento geométrico

$L(\cdot)$  - Quantidade de Interesse

$\tilde{L}(\cdot)$  - Forma generalizada de  $L(\cdot)$

$L^2(\cdot)$  - Espaço Vetorial Normado

$N_x, N_y$  - Número de divisões nos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente

$p(\cdot)$  - Pressão

$p$  - grau do polinômio

$T(\cdot)$  - Transformação Linear

$T_h$  - Partição

$X, Y$  - Espaços vetoriais

## Letras Gregas:

$\Omega$  - Domínio computacional

$\mu$  - Viscosidade do fluido

$\varphi$  - Função Geradora

$\varphi_i$  - Funções de base globais

$\phi_i$  - Funções de base locais

**Símbolos:**

$\Delta$  - Operador laplaciano

$\nabla$  - Operador gradiente

div - Operador divergente

$|\cdot|$  - Módulo

$\|\cdot\|$  - Norma

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  - Producto interno

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Aspectos Teóricos da Análise Funcional</b>	<b>3</b>
2.1	Noções Preliminares . . . . .	3
2.1.1	Transformações Lineares . . . . .	3
2.1.2	Funcional Linear (ou Forma Linear) . . . . .	5
2.1.3	Espaços Duais . . . . .	5
2.1.4	Espaços de Hilbert . . . . .	5
2.2	Formas Bilineares . . . . .	7
2.2.1	Exemplos . . . . .	9
2.3	Problema Variacional e Método de Galerkin . . . . .	10
2.3.1	O Problema Variacional . . . . .	10
2.3.2	O Método de Galerkin . . . . .	10
2.4	Os Espaços de Sobolev $H^m(\Omega)$ e $H_0^m(\Omega)$ . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Problema Físico</b>	<b>17</b>
3.1	Equações Diferenciais de Interesse . . . . .	17
3.1.1	Lei de Conservação da Massa . . . . .	18
3.1.2	Casos Especiais de Interesse . . . . .	21
<b>4</b>	<b>O Método dos Elementos Finitos - MEF</b>	<b>23</b>
4.1	O Problema Modelo - Equação de Poisson . . . . .	24
4.2	Formulação Variacional . . . . .	24
4.2.1	Existência e Unicidade . . . . .	25
4.3	Espaços de Elementos Finitos . . . . .	26
4.3.1	Espaços de Elementos Finitos de Lagrange em 1D . . . . .	26
4.3.2	Espaços de Elementos Finitos de Lagrange em 2D . . . . .	31

4.3.3	Formulação de Galerkin . . . . .	34
4.4	Estimadores de erro . . . . .	35
4.4.1	Estimativa do Erro a Priori . . . . .	36
4.4.2	Estimativa do Erro a Posteriori . . . . .	37
4.5	Adaptatividade . . . . .	39
<b>5</b>	<b>PZ - Ambiente de Programação Orientado a Objeto</b>	<b>41</b>
5.1	Experimentos Numéricos . . . . .	42
5.1.1	Problema 1D . . . . .	42
5.1.2	Exemplo 2D . . . . .	45
<b>6</b>	<b>Adaptatividade <i>Goal-Oriented</i></b>	<b>51</b>
6.1	Introdução . . . . .	51
6.1.1	Exemplos de funcionais lineares limitados . . . . .	52
6.2	Estimativa para o Erro em Quantidade de Interesse . . . . .	53
6.3	Aproximações e Limites para Erro $L(e)$ . . . . .	55
6.4	Controle Adaptativo do Erro $L(e)$ : Refinamento <i>Goal-Oriented</i> . . . . .	57
6.5	Exemplo . . . . .	59
6.5.1	Construção do Problema Dual . . . . .	59
6.5.2	Solução Numérica . . . . .	60
6.6	Problema Dual na Aproximação do Fluxo . . . . .	63
6.6.1	Resultados Numéricos e Comentários . . . . .	64
<b>7</b>	<b>O Método da Função de Extração</b>	<b>67</b>
7.1	Forma Generalizada para $L(u)$ . . . . .	67
7.1.1	Exemplo . . . . .	68
7.2	Caso de Interesse (fluxo monofásico em meios porosos) . . . . .	70
7.2.1	Formulação do Problema . . . . .	70
7.2.2	Formas Generalizadas $\tilde{L}(u)$ . . . . .	71
7.2.3	Testes de Validação . . . . .	76
7.2.4	Comentários . . . . .	85
<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>87</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>89</b>

# Lista de Figuras

2.1	Gráficos da função $u(x)$ e de sua derivada fraca $v(x)$ . . . . .	15
3.1	Elemento de meio poroso ( à esquerda) e Fluxo de fluido através do elemento de meio poroso (à direita). . . . .	18
4.1	Funções de base local lineares para problemas unidimensionais. . . . .	28
4.2	Funções de base local quadráticas para problemas unidimensionais. . . . .	29
4.3	Elemento retangular $K = [-1, 1] \times [-1, 1]$ e seus vértices indicados por $a_{11}$ , $a_{12}$ , $a_{21}$ e $a_{22}$ . . . . .	32
4.4	Funções de base local bilineaes para problemas bidimensionais. . . . .	32
5.1	Gráficos da Solução exata $\exp(x) + 1$ do problema 1D. . . . .	43
5.2	Gráficos da solução aproximada $u_h(x)$ usando funções de base lineares, $p = 1$ , e com $h = 9/2$ e $h = 9/4$ . . . . .	44
5.3	Gráficos da solução aproximada $u_h(x)$ usando funções de base lineares, $p = 1$ , e com $h = 9/8$ e $h = 9/16$ . . . . .	44
5.4	Gráficos da solução aproximada $u_h(x)$ usando funções de base lineares, $p = 1$ , e com $h = 9/32$ e $h = 9/64$ . . . . .	44
5.5	Gráfico da Taxa de convergência nas normas $L^2(\Omega)$ , $semi-H^1(\Omega)$ e energia $E(\Omega)$ , com $p = 1(\circ)$ , $p = 2(\square)$ e $p = 3(\diamond)$ . . . . .	46
5.6	Solução exata do problema 2D, $u = 5x^2y^2(1-x)^2(e^{10x^2} - 1)(1-y)^2(e^{10y^2} - 1)$ . . .	48
5.7	Solução aproximada do problema 2D, usando refinamento uniforme com $p = 5$ e $h = 1/32$ . . . . .	50
6.1	Solução exata do problema primal e dual. . . . .	60
6.2	Solução aproximada do problema Primal e Dual, com $p = 1$ , para $h = 1/2$ , $h = 1/4$ , $h = 1/8$ , $h = 1/16$ , respectivamente. . . . .	61

6.3	Solução aproximada do problema Primal e Dual, com $p = 2$ , para $h = 1/2$ , $h = 1/4$ , $h = 1/8$ , $h = 1/16$ , respectivamente. . . . .	62
6.4	Convergência do erro no funcional linear limitado $L(u)$ , usando funções de La- grange de grau $p = 1$ (1) e $p = 2$ (2). . . . .	64
6.5	Solução aproximada do problema dual considerando $Nx = Ny = 4$ (à esquerda) e $Nx = Ny = 8$ (à direita). . . . .	65
6.6	Solução aproximada do problema dual considerando $Nx = Ny = 16$ (à esquerda) e $Nx = Ny = 32$ (à direita). . . . .	65
7.1	Representação do domínio computacional $\Omega$ . . . . .	70
7.2	Gráfico da derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, 0)$ , $x = [-1, 1]$ . . . . .	72
7.3	Exemplo de uma função $g(s)$ para o problema auxiliar. . . . .	74
7.4	Gráficos da função $\varphi$ considerando $\partial\Omega_s = [1/4, 1/2] \times \{0\}$ . . . . .	75
7.5	Gráficos Log-Log do erro, na aproximação do valor do fluxo saindo pela região $\partial\Omega_{s1} = [0, 1/4] \times \{0\}$ com $p = 1, 2, 3$ e $4$ . . . . .	80
7.6	Gráficos Log-Log do erro, na aproximação do valor do fluxo saindo pela região $\partial\Omega_{s2} = [1/2, 3/4] \times \{0\}$ com $p = 1, 2, 3$ e $4$ . . . . .	81
7.7	Gráficos das funções $g_1(s) = g(s) _{\partial\Omega_{s1}}$ e $g_2(s) = g(s) _{\partial\Omega_{s2}}$ , com $\varepsilon = 0, 1$ . . . . .	82

# Lista de Tabelas

5.1	Taxa de convergência do erro medido nas normas $L^2(\Omega)$ e $semi - H^1(\Omega)$ . . . . .	45
5.2	Taxa de convergência do erro medido nas normas $H^1(\Omega)$ e $E(\Omega)$ . . . . .	46
5.3	Valor do erro medido na norma em $L^2(\Omega)$ , considerando $p = 1, p = 2, p = 3, p = 4$ e $p = 5$ . . . . .	49
5.4	Taxas de convergências, do erro, medidas na norma em $L^2(\Omega)$ , considerando $p = 1, p = 2, p = 3, p = 4$ e $p = 5$ . . . . .	49
5.5	Valor do erro medido na norma em $H^1(\Omega)$ , considerando $p = 1, p = 2, p = 3, p = 4$ e $p = 5$ . . . . .	49
5.6	Taxas de convergências medidas na norma em $H^1(\Omega)$ , considerando $p = 1, p = 2, p = 3, p = 4$ e $p = 5$ . . . . .	50
6.1	Valor do erro, medido na norma da energia e taxa de convergência para o problema primal. . . . .	62
6.2	Valor do erro, medido na norma da energia e taxa de convergência para o problema dual. . . . .	63
6.3	Valor do erro e taxa de convergência no funcional linear limitado $L(u)$ , com $p = 1$ e $p = 2$ . . . . .	63
7.1	Erros na regra de integração no cálculo do fluxo na região $\partial\Omega_{s1} = [0, 1/4] \times \{0\}$ usando $u$ e $\varphi$ analíticas. . . . .	77
7.2	Erros na regra de integração no cálculo do fluxo no região $\partial\Omega_{s2} = [1/2, 3/4] \times \{0\}$ , usando $u$ e $\varphi$ analíticas. . . . .	77
7.3	Valores aproximados do fluxo na região $\partial\Omega_{s1} = [0, 1/4] \times \{0\}$ , pelo método direto, modelo 2 e modelo 3. . . . .	78
7.4	Valores aproximados do fluxo na região $\partial\Omega_{s2} = [1/2, 3/4] \times \{0\}$ , pelo método direto, modelo 2 e modelo 3. . . . .	79
7.5	Valores aproximados do fluxo total saindo pela região $\partial\Omega_{s1} = [0, 1/4] \times \{0\}$ . . . . .	83

7.6	Valores aproximados do fluxo total saindo pela região $\partial\Omega_{s_2} = [1/2, 3/4] \times \{0\}$ . . .	84
-----	--	----



# Capítulo 1

## Introdução

Em muitas situações na modelagem de problemas aplicados, o que se deseja de uma solução da Equação Diferencial Parcial (EDP), que descreve o modelo, não é a própria solução e sim alguma quantidade de interesse. De forma geral, estas quantidades de interesse são caracterizadas por funcionais lineares limitados no espaço de funções que contém as soluções, tal como: a derivada da solução, o fluxo através de uma região da fronteira, o valor médio da solução sobre uma região do domínio, o valor da solução em um ponto, etc. Em tais circunstâncias, nem sempre o refinamento uniforme ou uma estratégia de hp-refinamento, que diz respeito à qualidade global da solução, são as estratégias mais apropriadas para melhorar a aproximação da quantidade, pois podem tornar o custo computacional muito alto. Neste sentido, estratégias direcionadas para o aprimoramento da aproximação de quantidades de interesse são temas que têm recebido grande importância nas últimas décadas, como mostram as referências [2] e [3].

Um dos objetivos deste trabalho é o estudo de métodos para o pós-processamento da solução por elementos finitos com objetivo de se obter uma precisão desejável na aproximação das quantidades de interesse. Em particular, estudam-se dois métodos: a estratégia de adaptatividade *goal-oriented* e o *método da função de extração*, [2] e [3], respectivamente. Também, apresenta-se um procedimento designado para controlar o erro em uma quantidade de interesse específico, no espírito de adaptatividade *goal-oriented*.

Especificamente, o modelo matemático a ser tratado é o escoamento monofásico de fluidos em meios porosos, tendo como objetivo aplicações na simulação de reservatórios de petróleo onde a quantidade de interesse representa a vazão de fluido em certas regiões do contorno no domínio estipulado. As equações diferenciais do modelo são obtidas pela lei de conservação de massa juntamente com relação da Lei de Darcy para a velocidade do fluido. Maiores detalhes são encontrados em [14, 15, 9, 12, 22].

Os próximos capítulos deste trabalho estão organizados da seguinte forma. O Capítulo 2 traz noções e tópicos de Análise Funcional necessários ao desenvolvimento do trabalho.

No Capítulo 3 apresenta-se um breve comentário e descrição das equações do fluxo monofásico em meios porosos, como ocorre em modelagem de reservatórios de petróleo, tendo como referências [15, 14, 22, 12].

O Capítulo 4 é dedicado ao estudo do Método de Elementos Finitos (MEF), [25, 10, 23]. Sua sistemática, a partir de uma formulação variacional, é semelhante para muitos tipos de problemas. Isso permite sua aplicação em inúmeras áreas: mecânica dos fluidos, mecânica dos sólidos, eletromagnetismo, termodinâmica, etc.

A parte computacional deste trabalho foi desenvolvido no Laboratório de Mecânica Computacional (LabMec) da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Unicamp. O LabMec desenvolve um ambiente de programação orientado a objeto, conhecido como PZ. O ambiente PZ é um conjunto de classes em linguagem C++, com objetivo de permitir a simulação de métodos de elementos finitos. O Capítulo 5 contém uma breve descrição dos principais aspectos do ambiente PZ e, como exemplo ilustrativo, apresentam-se as resoluções de problemas de valores de contorno unidimensional e bidimensional.

O Capítulo 6 é dedicado ao estudo de propostas do tipo *goal-oriented* para a estimativa do erro de aproximações por elementos finitos de uma quantidade de interesse, no qual descrevem-se argumentos propostos na literatura [2, 21, 16].

No Capítulo 7, apresenta-se um método para o pós-processamento da solução, pelo método dos elementos finitos, com objetivo de obter uma alta precisão da aproximação de certas quantidades de interesse, de acordo com Babuska [3, 4, 5]. Um exemplo em duas dimensões ilustra a aplicabilidade do método, em que a quantidade de interesse considerada representa o fluxo sobre uma sub-região do contorno em certo domínio estipulado.

O Capítulo 8 traz as conclusões e considerações finais da dissertação.

Nos Apêndices A e B são incluídos os conceitos básicos de Espaços Normados, as notações utilizadas no texto.

# Capítulo 2

## Aspectos Teóricos da Análise Funcional

Neste capítulo, resumem-se alguns conceitos de Análise Funcional que são úteis na teoria de métodos dos elementos finitos. Como referência, utilizam-se [18, 20, 17]. Mostra-se, também, alguns aspectos teóricos dos problemas elípticos, [13, 10], sendo de grande importância no entendimento dos próximos capítulos.

### 2.1 Noções Preliminares

O Apêndice A contém os conceitos de espaços vetoriais normados que contribuem no entendimento dessa seção.

#### 2.1.1 Transformações Lineares

**Definição 2.1** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços vetoriais sobre o mesmo corpo. Uma **Transformação Linear** é uma aplicação  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathcal{R}(T)$ , tal que:*

*i) O domínio  $\mathcal{D}(T)$  de  $T$  e a imagem  $\mathcal{R}(T)$  são espaços vetoriais, ambos no mesmo corpo  $\mathbb{K}$ , isto é:*

$$T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow \mathcal{R}(T) \subset Y$$

*ii) Para todo  $u, v \in \mathcal{D}(T)$ , e  $\alpha \in \mathbb{K}$ , tem-se*

$$T(u+v) = T(u) + T(v) \quad e \quad T(\alpha u) = \alpha T(u)$$

*No caso em que o domínio e contradomínio coincidem, é usada a expressão **Operador Linear**.*

**Definição 2.2 (Núcleo)** O núcleo de uma transformação linear  $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow \mathcal{R}(T) \subset Y$ , denotado por  $N(T)$ , é o conjunto

$$N(T) = \{u \in \mathcal{D}(T) : T(u) = 0\}.$$

O conjunto  $N(T)$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{D}(T) \subset X$ .

**Definição 2.3** Seja  $T : X \rightarrow Y$  uma transformação linear, em que  $X$  e  $Y$  são espaços vetoriais normados.  $T$  é limitada se existe um escalar  $c > 0$ , tal que

$$\|T(u)\| \leq c \|u\|, \forall u \in X$$

Pela definição acima, tem-se

$$\frac{\|T(u)\|}{\|u\|} \leq c, u \neq 0$$

Define-se a norma de uma transformação limitada  $\|T\|$  como o ínfimo das constantes  $c$  que satisfazem a condição acima

$$\|T\| = \sup_{u \in X, u \neq 0} \frac{\|T(u)\|}{\|u\|} = \sup_{u \in X, \|u\|=1} \|T(u)\|$$

Disto decorre que, para todo  $u \in X$ ,  $\|T(u)\| \leq \|T\| \|u\|$ .

**Definição 2.4 (Continuidade)** Uma transformação linear  $T$  é contínua em  $u_0 \in \mathcal{D}(T)$  se para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $\delta = (\varepsilon, u_0) > 0$  tal que

$$\|u - u_0\| < \delta \Rightarrow \|T(u) - T(u_0)\| < \varepsilon$$

Diz-se que  $T$  é contínua, se for contínua para todo  $u \in \mathcal{D}(T)$ .

**Teorema 2.1** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços vetoriais normados e  $T : X \rightarrow Y$  uma transformação linear. Então:

(a)  $T$  é limitada se, e somente se,  $T$  é contínua;

(b) Se  $T$  é contínua em  $u_0$ , então,  $T$  é contínua em qualquer ponto  $u \in X$ .

### 2.1.2 Funcional Linear (ou Forma Linear)

**Definição 2.5** Uma transformação linear,  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ , em que  $X$  é um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$ , é chamada de funcional linear.

**Exemplo 2.1** A integral definida,  $f : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$f(u) = \int_a^b u(t)dt, \quad u \in C([a, b])$$

é um funcional linear limitado definido no espaço  $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ , e  $\|f\|_\infty = b - a$ .

### 2.1.3 Espaços Duais

**Definição 2.6** Seja  $(X, \|\cdot\|)$  um espaço vetorial normado. O conjunto de todos funcionais lineares limitados sobre  $X$  é chamado de **espaço dual** de  $X$ , denotado por  $X'$ , o qual constitui um espaço normado, com a norma definida por

$$\|f\| = \sup_{u \in X, u \neq 0} \frac{|f(u)|}{\|u\|} = \sup_{u \in X, \|u\|=1} |f(u)|$$

e com as operações

$$(f + g)(u) = f(u) + g(u) \quad e \quad (\alpha f)(u) = \alpha f(u) .$$

Resulta que  $X'$ , é um espaço de Banach (sendo  $X$  de Banach ou não).

### 2.1.4 Espaços de Hilbert

**Definição 2.7 (Espaço Vetorial com Produto Interno)** Um espaço vetorial está munido com um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$  se tal aplicação verifica as seguintes propriedades: para todos vetores  $u, v$  e  $w \in X$  e  $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ , tem-se

$$(P1) \quad \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}, \text{ se } \mathbb{K} = \mathbb{R} \Rightarrow \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

$$(P2) \quad \langle u, u \rangle \geq 0, \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

$$(P3) \quad \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

$$(P4) \quad \langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$$

sendo  $\bar{z}$  o complexo conjugado de  $z$ .

Dado um produto interno, a partir dele é possível introduzir uma norma

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}. \quad (2.1)$$

Esta norma satisfaz a **Regra do Paralelogramo**

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \quad (2.2)$$

e a **Desigualdade de Cauchy-Schwartz**

$$|\langle u, v \rangle|^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle.$$

**Definição 2.8 (Espaço de Hilbert)** *Um espaço de Hilbert é um espaço com produto interno completo em que a norma provém do produto interno. Portanto, um espaço de Hilbert é um espaço de Banach.*

### Alguns Exemplos

**Exemplo 2.2 (Espaço Euclidiano)** *O espaço  $\mathbb{R}^n$  é um espaço de Hilbert com o produto interno definido por*

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$$

em que,  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ . Daí, tem-se

$$\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2} = [u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2]^{1/2}.$$

**Exemplo 2.3** *No espaço  $(C([a, b]), \|\cdot\|_2)$ , a norma é proveniente do produto interno*

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u(t)v(t) dt. \quad (2.3)$$

*Este espaço não é completo, logo não é um espaço de Hilbert.*

**Exemplo 2.4** *O espaço  $L^2([a, b])$ , definido como o completamento do espaço  $(C([a, b]), \|\cdot\|_2)$ , é um espaço de Hilbert, em que a norma é proveniente do produto interno (2.3).*

### Projeção Ortogonal

**Definição 2.9 (Vetores ortogonais)** *Seja  $X$  um espaço vetorial munido com produto interno. Diz-se que  $u, v \in X$  são ortogonais,  $u \perp v$ , se  $\langle u, v \rangle = 0$ .*

**Teorema 2.2 (Pitágoras)** *Seja  $X$  um espaço vetorial munido com produto interno. Se  $u$  e  $v \in X$  são ortogonais, então*

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 .$$

**Teorema 2.3 (Projeção Ortogonal)** *Sejam  $X$  um espaço de Hilbert,  $F \subset X$  um subespaço fechado e  $u \in \{X - F\}$ . Então, existe um único elemento  $v \in F$  tal que*

$$u - v \perp \omega, \forall \omega \in F.$$

**Propriedades 1** *Nas condições do teorema da projeção acima, são equivalentes:*

- i)  $u - v \perp \omega, \forall \omega \in F$ ;
- ii)  $\|u - v\| = \min_{\omega \in F} \|u - \omega\|$ .

**Teorema 2.4 (de Representação de Riesz)** *Seja  $X$  um espaço de Hilbert. Se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é um funcional linear limitado,  $f \in X'$ , então existe um único elemento  $u \in X$  de modo que o funcional  $f$  é representado por:*

$$f(v) = \langle v, u \rangle, \forall v \in X$$

e

$$\|f\|_{X'} = \|u\|_X .$$

A solução  $u \in X$  é conhecida como representador de Riesz do funcional linear limitado  $f \in X'$ .

## 2.2 Formas Bilineares

Os resultados descritos abaixo são uma prévia para o Teorema de Lax-Milgran, que será visto mais adiante.

**Definição 2.10 (Forma Sesquilinear)** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços vetoriais sobre o corpo  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), a forma sesquilinear (ou funcional sesquilinear)  $B$  em  $X \times Y$  é uma função*

$$B : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$$

tal que para todo  $u, u_1, u_2 \in X$  e  $v, v_1, v_2 \in Y$  e todo escalar  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ , tem-se

$$(a) \quad B(u_1 + u_2, v) = B(u_1, v) + B(u_2, v)$$

$$(b) \quad B(u, v_1 + v_2) = B(u, v_1) + B(u, v_2)$$

$$(c) \quad B(\alpha u, v) = \alpha B(u, v)$$

$$(d) \quad B(u, \beta v) = \overline{\beta} B(u, v)$$

No caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $B(\cdot, \cdot)$  é chamado de **forma bilinear**.

**Definição 2.11** Para espaços normados  $X$ , diz-se que uma forma sesquilinear  $B(\cdot, \cdot)$  em  $X \times X$  é **limitada (contínua)** se existe uma constante  $\delta > 0$  tal que

$$|B(u, v)| \leq \delta \|u\|_X \|v\|_X, \quad \forall u, v \in X. \quad (2.4)$$

e define-se a norma de  $B$  por

$$\|B\| = \sup_{u, v \in X - \{0\}} \frac{|B(u, v)|}{\|u\|_X \|v\|_X} = \sup_{\|u\|_X = \|v\|_X = 1} |B(u, v)| \quad (2.5)$$

**Definição 2.12** Uma forma bilinear  $B(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  é considerada **simétrica** se

$$B(u, v) = B(v, u)$$

para todo  $u, v \in X$ .

**Definição 2.13** Uma forma bilinear  $B(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  é considerada **positiva definida** se

$$B(u, u) > 0$$

para todo  $u \in X$ ,  $u \neq 0$ .

**Definição 2.14 (Coercividade)** Uma forma bilinear  $B(\cdot, \cdot)$  em  $X \times X$  é uma **forma bilinear coerciva** se existe uma constante  $\beta > 0$  tal que

$$B(u, u) \geq \beta \|u\|_X^2, \quad \forall u \in X. \quad (2.6)$$



A constante  $\beta$  é denominada constante de coercividade da forma bilinear. Note que a condição de coercividade implica na positividade da forma bilinear.

Uma forma bilinear simétrica e coerciva define um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_B : X \times X \rightarrow K$ , tal que

$$\langle u, v \rangle_B = B(u, v), \quad \forall u, v \in X$$

e a norma proveniente desse produto interno

$$\| u \|_B = [\langle u, u \rangle_B]^{1/2}$$

é denominada **norma energia**.

### 2.2.1 Exemplos

Seja o espaço vetorial real  $X = V([a, b])$ ,

$$V([a, b]) = \{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ contínua, } f' \text{ contínua por partes e limitada} \},$$

com o produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle_X = \int_a^b f(t)g(t) dt + \int_a^b f'(t)g'(t) dt, \quad \forall f, g \in X. \quad (2.7)$$

Considerando o espaço  $X$ , definem-se as formas bilinear e linear sobre  $X$ . A forma bilinear  $B(\cdot, \cdot)$  é definida por

$$B(u, v) = \int_a^b b(t)u(t)v(t) dt + \int_a^b k(t)u'(t)v'(t) dt, \quad \forall u, v \in X,$$

em que  $b$  e  $k$  são funções contínuas e estritamente positivas no intervalo  $[a, b]$ . A forma linear  $F(\cdot)$  é definida por

$$F(v) = \int_a^b u(t)v(t) dt, \quad \forall v \in X \quad (2.8)$$

em que  $u \in C([a, b])$ .

Esta forma bilinear  $B(\cdot, \cdot)$  é simétrica, limitada e coerciva considerando a norma  $\| \cdot \|_X$  proveniente do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$  definido por (2.7). Analogamente, a forma linear  $F(\cdot)$  é limitada com relação a norma  $\| \cdot \|_X$  proveniente do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$  definido por (2.8).

## 2.3 Problema Variacional e Método de Galerkin

### 2.3.1 O Problema Variacional

**Definição 2.15** *Seja  $X$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  munido do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$  e da norma  $\| \cdot \|_X$  proveniente desse produto interno. Considere uma forma bilinear  $B(\cdot, \cdot)$ , sobre  $X$ , simétrica, contínua e coerciva e  $F \in X'$  um funcional linear limitado. O problema definido por:*

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u \in X \text{ solução da equação} \\ B(u, v) = F(v) \text{ para todo } v \in X \end{cases} \quad (2.9)$$

é denotado *Problema Variacional Simétrico*.

O próximo teorema (Lax-Milgram) apresenta os resultados de existência e unicidade, bem como uma estimativa de estabilidade, para a solução do Problema Variacional (2.9).

**Teorema 2.5 (Lax-Milgram)** *Sejam  $B(\cdot, \cdot)$  uma forma bilinear contínua, simétrica e coerciva sobre o espaço de Hilbert  $X$  e  $F \in X'$ . Então, existe um único elemento  $u \in X$  solução da equação*

$$B(u, v) = F(v) \text{ para todo } v \in X,$$

e ainda, tem-se

$$\| u \|_X \leq \frac{\gamma}{\beta},$$

em que,  $\gamma$  é a constante de continuidade da forma linear  $F$  e  $\beta$  a constante de coercividade da forma bilinear  $B$ .

### 2.3.2 O Método de Galerkin

Considerando que já se tem o problema variacional (2.9), pode-se agora pensar no **Método de Galerkin**, que é a base para o Método dos Elementos Finitos, que consiste em encontrar soluções aproximadas para (2.9).

Considere um subespaço de dimensão finita  $V_N$  do espaço vetorial  $X$  e seja  $\mathfrak{B} = \{ \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \}$  uma base para  $V_N$ . Desse modo, toda função  $v \in V_N$  é escrita como uma combinação linear das funções de base, ou seja,

$$v(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(x).$$

Assim, uma discretização para o problema variacional (2.9), usualmente denominada de **Método**

de Galerkin, consiste em:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u_N \in V_N \text{ solução da equação} \\ B(u_N, v) = F(v) \text{ para todo } v \in V_N. \end{cases} \quad (2.10)$$

Como a função  $u_N \in V_N$ , tem-se

$$u_N(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x),$$

e pelo fato de (2.10) ser válido para toda função em  $V_N$ , em particular será válida para as funções de base. Com isso, o problema (2.10) passa ser escrito como

$$\begin{cases} \text{Encontrar } \alpha = (\alpha_i) \in \mathbb{R}^n, \text{ tal que} \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i B(\varphi_i, \varphi_j) = F(\varphi_j) \text{ para todos } j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.11)$$

O problema (2.11) é um sistema linear com  $n$  equações e  $n$  incógnitas  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , que são as coordenadas de  $u_N$  com relação à base do subespaço  $V_N$ . O sistema linear (2.11) pode ser escrito na forma matricial

$$\mathbf{K} \alpha = \mathbf{b}$$

em que os elementos da matriz  $\mathbf{K} = [k_{ij}]$  são dados por

$$k_{ij} = B(\varphi_i, \varphi_j) \text{ para todos } i, j = 1, \dots, n,$$

e os elementos do vetor  $\mathbf{b} = [b_j]$  são dados por

$$b_j = F(\varphi_j) \text{ para todos } j = 1, \dots, n.$$

De maneira análoga ao problema variacional simétrico (2.9), a **existência e unicidade** da solução do problema variacional discreto (2.10) são garantidas pelo Teorema de Lax-Milgram.

### Interpretação Geométrica da Solução de Galerkin

Vamos apresentar uma interpretação geométrica para a solução de Galerkin do Problema Variacional (2.9) com relação ao produto interno energia  $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$  associado à forma bilinear  $B(\cdot, \cdot)$  sobre  $X$ .

Se  $u \in X$  é a solução do Problema Variacional (2.9), então

$$B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in X.$$

Como  $V_N \subset X$  a igualdade acima continua valendo se escolhermos  $v \in V_N$ , ou seja

$$B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V_N. \quad (2.12)$$

Da mesma forma, se  $u_N \in V_N$  for a solução do problema variacional discreto (2.10), tem-se

$$B(u_N, v) = F(v), \quad \forall v \in V_N. \quad (2.13)$$

Assim, subtraindo (2.13) de (2.12) e utilizando a definição do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_B = B(\cdot, \cdot)$ , tem-se

$$B(u - u_N, v) = \langle (u - u_N), v \rangle_B = 0, \quad \forall v \in V_N.$$

Portanto, pode-se dizer que o erro  $u - u_N$  da solução de Galerkin é ortogonal ao subespaço de aproximação  $V_N$  com relação ao produto interno energia. Esta propriedade é conhecida como **ortogonalidade de Galerkin**. Ou seja, a solução de Galerkin  $u_N$  é a projeção ortogonal de  $u$  no espaço de aproximação  $V_N$  com relação ao produto interno energia. Em outras palavras, diz que a solução de Galerkin  $u_N \in V_N \subset X$  é a melhor aproximação de  $u \in X$  com relação à norma energia, isto é

$$\|u - u_N\|_B \leq \|u - v\|_B \quad \text{para todo } v \in V_N. \quad (2.14)$$

## 2.4 Os Espaços de Sobolev $H^m(\Omega)$ e $H_0^m(\Omega)$

Nesta seção, apresentam-se os conceitos principais dos espaços de Sobolev  $H^m(\Omega)$  e  $H_0^m(\Omega)$ , os quais são de grande importância na construção de espaços de aproximação no método dos elementos finitos. Como referências, utilizam-se [18, 11].

**Definição 2.16** *Dados  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , um aberto limitado, e um inteiro  $m \geq 0$ , denota-se por  $C^m(\Omega)$  o espaço vetorial das funções reais definidas em  $\Omega$ , tal que  $D^\alpha u$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , é contínua para  $0 \leq |\alpha| \leq m$ . Por  $C_0^m(\Omega)$  denota-se o subespaço de  $C^m(\Omega)$  formado pelas funções  $u$  que se anulam fora de um compacto contido em  $\Omega$ , o qual pode variar de acordo com  $u$ .*

Desde já,

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_m C^m(\Omega), \quad C_0^\infty = \bigcap_m C_0^m(\Omega).$$

Em  $C_0^m(\Omega)$  define-se o produto interno

$$\langle u, v \rangle_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle, \quad (2.15)$$

em que,

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} (uv) \, dx$$

é o produto interno em  $L^2(\Omega)$ . A partir desse produto interno, definem-se a semi-norma e norma em  $C_0^m(\Omega)$  e  $C^m(\Omega)$ , respectivamente,

$$\text{Semi-Norma:} \quad \|u\|_{m,2}^2 = \int_{\Omega} \left[ \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u(x)|^2 \right] dx \quad (2.16)$$

$$\text{Norma:} \quad \|u\|_{m,2}^2 = \int_{\Omega} \left[ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} |D^\alpha u(x)|^2 \right] dx. \quad (2.17)$$

Para  $m = 0$  tem-se

$$\|u\|_{0,2}^2 = \|u\|_{0,2}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

**Definição 2.17** O espaço vetorial  $C_*^m(\Omega)$  é definido por

$$C_*^m(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{m,2} < \infty\}.$$

Ambos  $C_0^m(\Omega)$  e  $C_*^m(\Omega)$ , munidos da norma  $\|\cdot\|_{m,2}$ , não são espaços completos. Os completamentos destes espaços são denotados, respectivamente, por  $H_0^m(\Omega)$  e  $H^m(\Omega)$ , os quais são espaços de Hilbert. Para  $m = 0$ , fica claro que

$$H^0(\Omega) = H_0^0(\Omega) = L^2(\Omega). \quad (2.18)$$

Por definição de completamento, dado  $u \in H^m(\Omega)$  existe uma sequência  $\{u_n\}$  em  $C_*^m(\Omega)$  tal que  $\|u_n - u\|_{m,2} \rightarrow 0$ . Tem-se também que para todo multi-índice  $\alpha$  com  $|\alpha| \leq m$

$$\|D^\alpha u_n - D^\alpha u_N\|_{0,2} \leq \|u_n - u_N\|_{m,2},$$

e assim pode-se concluir que  $\{D^\alpha u_n\}$  é sequência de Cauchy em  $L^2(\Omega)$ . Sendo  $L^2(\Omega)$  completo, existe  $v_\alpha \in L^2(\Omega)$  tal que  $\|D^\alpha u_n - v_\alpha\|_{0,2} \rightarrow 0$ . Então, tem-se a seguinte caracterização para o espaço  $H^m(\Omega)$ , [18].

**Definição 2.18** O espaço  $H^m(\Omega)$  é caracterizado como o conjunto das funções  $u \in L^2(\Omega)$  tal que existe uma sequência  $\{u_n\}$  em  $C_*^m(\Omega)$  e  $v_\alpha \in L^2(\Omega)$  com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{0,2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|D^\alpha u_n - v_\alpha\|_{0,2} = 0. \quad (2.19)$$

No caso em que  $u \in C_*^m(\Omega)$ , se  $\|u_n - u\|_{m,2} \rightarrow 0$ , então os limites em (2.19) são válidos com  $v_\alpha = D^\alpha u$ . Deste modo, as funções  $v_\alpha$  em (2.19) são vistas como uma generalização do conceito de derivada das funções de  $H^m(\Omega)$ , generalização esta que dará origem à seguinte definição.

**Definição 2.19** Dada uma função  $u \in L^2(\Omega)$ , diz-se que as funções  $v_\alpha \in L^2(\Omega)$ ,  $|\alpha| \leq m$ , são suas derivadas no **sentido forte** se existir uma sequência  $\{u_n\}$  em  $C_*^m(\Omega)$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n - u|^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |D^\alpha u_n - v_\alpha|^2 dx = 0, \quad |\alpha| \leq m \quad (2.20)$$

Diz-se também que a função  $u$  tem todas as derivadas (no sentido forte) de ordem menor ou igual a  $m$ .

A **unicidade** dessas derivadas está provada em [18]. Uma outra noção de derivada em  $H^m(\Omega)$  é a chamada **derivada no sentido fraco**.

**Definição 2.20** Diz-se que uma função  $v_\alpha \in L^2(\Omega)$  é a derivada de ordem  $\alpha$  de  $u \in H^m(\Omega)$  no **sentido fraco**, se:

$$\int_{\Omega} (\phi v_\alpha) dx = (-1)^\alpha \int_{\Omega} (u D^\alpha \phi) dx, \quad |\alpha| \leq m \quad (2.21)$$

para toda  $\phi \in C_0^m(\Omega)$ .

Assim, se  $v_\alpha$  é a derivada de ordem  $\alpha$  de  $u \in H^m(\Omega)$  no sentido forte, ela também é sua derivada no sentido fraco. A recíproca também é verdadeira, [18]. Desta forma, simplifcadamente, o espaço  $H^m(\Omega)$  é definido como o espaço das funções  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  em que  $u \in L^2(\Omega)$  e  $u$  admite derivada fraca  $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ , para todo  $|\alpha| \leq m$ , isto é

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}. \quad (2.22)$$

**Exemplo 2.5** Seja  $u \in L^2(\Omega)$ , em que  $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ , definida por

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1/2 \\ 1-x & \text{se } 1/2 < x < 1 \end{cases}.$$

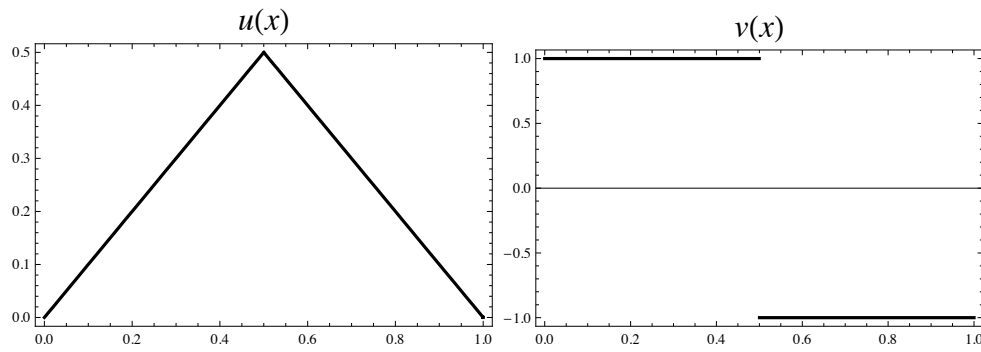


Figura 2.1: Gráficos da função  $u(x)$  e de sua derivada fraca  $v(x)$ .

Esta função não admite derivada ordinária  $u'$  pois não é derivável em  $x = 1/2$ . Contudo, admite derivada fraca  $v = \frac{du}{dx}$  definida por

$$v(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } 0 < x < 1/2 \\ -1 & \text{se } 1/2 < x < 1 \end{cases},$$

Figura 2.1.

**Teorema 2.6 (Desigualdade de Friedrichs)** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto limitado, com diâmetro igual a  $d$ . Então, para todo  $u \in H_0^m(\Omega)$ , tem-se:*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq d^m \left[ \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{1/2}.$$

# Capítulo 3

## Problema Físico

### 3.1 Equações Diferenciais de Interesse

O objetivo desta seção é apresentar um breve comentário sobre as equações do fluxo horizontal em meios porosos, como ocorre em modelagem de reservatórios de petróleo, tendo como referências [15, 14, 22, 12]. Um meio poroso é um material construído por uma fase sólida (rocha) e um espaço vazio (poros) e é representado por um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Nesta dissertação somente é tratado o caso do fluxo monofásico. Equações para o fluxo nos casos bifásico e trifásico são apresentadas em [22].

Na simulação de um reservatório, representa-se o comportamento real do mesmo através de um modelo matemático formado por um conjunto de equações diferenciais parciais, juntamente com as condições iniciais e de contorno, que descrevem adequadamente os processos físicos significativos do sistema. Os processos que ocorrem em um reservatório de petróleo são basicamente escoamento de fluido e transferência de massa. Isso ocorre em até três fases imiscíveis (água, óleo e gás), fluindo simultaneamente. Na próxima subseção descreve-se a equação de conservação da massa em fluxo monofásico, a qual é associada a duas equações básicas: a *lei de Darcy*, que é uma equação de transporte de massa, e uma equação de estado, que tanto pode ser uma *lei dos gases* como a *equação da compressibilidade* para o caso de líquidos.

Para o desenvolvimento das equações será utilizado um elemento de meio poroso através do qual está ocorrendo o fluxo monofásico de um fluido. O elemento em questão, tal como mostrado na Figura 3.1, tem a forma de um cubo com dimensões  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$ , e o fluxo através do mesmo será estudado durante um intervalo de tempo  $\Delta t$ .



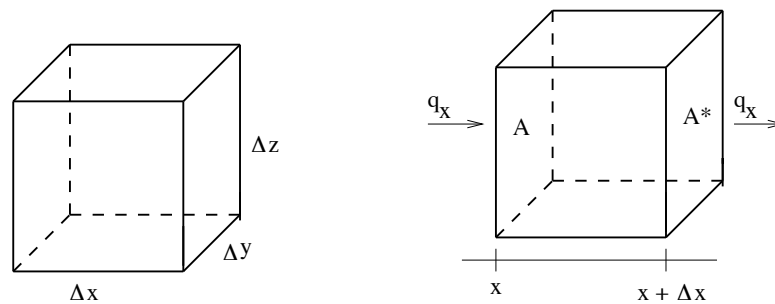


Figura 3.1: Elemento de meio poroso ( à esquerda) e Fluxo de fluido através do elemento de meio poroso (à direita).

### 3.1.1 Lei de Conservação da Massa

Uma lei de conservação de uma certa quantidade é equacionada a partir do princípio

$$[\text{massa que entra}] - [\text{massa que sai}] = [\text{massa acumulada}]. \quad (3.1)$$

A forma diferencial da lei de conservação é obtida avaliando este princípio em um cubo suficientemente pequeno, permitindo assumir que a concentração dentro do volume é essencialmente uniforme, e tomando o limite do resultado quando as dimensões do volume tendem para zero.

O caso mais geral é aquele em que ocorre a movimentação do fluido nas três direções,  $x$ ,  $y$  e  $z$ . A Figura 3.1 ilustra a movimentação do fluido na direção  $x$  (figura à direita). O fluido que se desloca nessa direção, ao entrar no meio poroso o faz através da face  $A$ , normal à direção  $x$ , e ao sair, o faz através da face oposta  $A^*$ . O mesmo raciocínio pode ser utilizado para os fluxos nas direções  $y$  e  $z$ .

O quociente entre a vazão  $q(x, y, z, t)$  [ $m^3/s$ ] e a área através da qual o fluxo está ocorrendo é chamada de *velocidade aparente do fluido*. Assim, o quociente entre a vazão  $q_x$  e a área  $\Delta y \Delta z$  é a velocidade aparente do fluido na direção  $x$ , que normalmente é representada por  $v_x$ :

$$v_x = \frac{q_x}{\Delta y \Delta z}.$$

Da mesma forma as velocidades aparentes nas direções  $y$  e  $z$  são dadas, respectivamente, por:

$$v_y = \frac{q_y}{\Delta x \Delta z} \quad \text{e} \quad v_z = \frac{q_z}{\Delta x \Delta y}.$$

Em seguida considera-se a lei de conservação de massa para um fluxo monofásico em três dimensões, primeiramente para o caso do fluxo compressível e depois do fluxo incompressível.

**Fluido Compressível e Monofásico**

No caso do fluido compressível considera-se que a densidade  $\rho(x, y, z, t)$  [ $kg/m^3$ ] e a velocidade do fluido  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z, t)$  [ $m/s$ ] variam com a posição espacial e com o tempo.

Na direção  $x$ , a massa total que penetra no meio poroso através da face  $A$  e a massa que sai através da face  $A^*$  são, respectivamente:

$$\text{massa que entra} = \Delta y \Delta z (\rho v_x)(x, y, z, t) \quad (3.2)$$

e

$$\text{massa que sai} = \Delta y \Delta z (\rho v_x)(x + \Delta x, y, z, t). \quad (3.3)$$

Analogamente, tem-se para o fluxo na direção  $y$  e  $z$ . Assim, a massa acumulada no corpo durante o intervalo de tempo é

$$\frac{\Delta x \Delta y \Delta z [(\phi \rho)(x, y, z, t + \Delta t) - (\phi \rho)(x, y, z, t)]}{\Delta t}, \quad (3.4)$$

em que  $\phi$  representa a porosidade do meio dada pela razão entre o volume dos poros e o volume total. Dessa forma, substituindo as equações (3.2) a (3.4) na fórmula (3.1) e dividindo por  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{(\rho v_x)(x, y, z, t) - (\rho v_x)(x + \Delta x, y, z, t)}{\Delta x} + \frac{(\rho v_y)(x, y, z, t) - (\rho v_y)(x, y + \Delta y, z, t)}{\Delta y} + \\ & \frac{(\rho v_z)(x, y, z, t) - (\rho v_z)(x, y, z + \Delta z, t)}{\Delta z} = \frac{(\phi \rho)(x, y, z, t + \Delta t) - (\phi \rho)(x, y, z, t)}{\Delta t}, \end{aligned}$$

tomando o limite, com  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ ,  $\Delta z \rightarrow 0$  e  $\Delta t \rightarrow 0$ , tem-se que a equação da conservação da massa do fluxo compressível é dada por:

$$-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = \frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t}. \quad (3.5)$$

Usando a notação do divergente na equação (3.5) tem-se

$$\frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (3.6)$$

### Lei de Darcy

A Lei de Darcy para um fluxo monofásico relaciona a velocidade aparente do fluido com os gradientes de pressão. Em três dimensões tem-se

$$v_x = -\frac{k_x}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{k_y}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \text{e} \quad v_z = -\frac{k_z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (3.7)$$

com  $k_x, k_y$  e  $k_z > 0$ . Portanto, o sistema de equações (3.7) pode ser escrito como:

$$\vec{v} = -\frac{1}{\mu} \overleftrightarrow{K} \nabla p, \quad (3.8)$$

sendo  $\overleftrightarrow{K}$  o tensor das permeabilidades, cuja representação matricial é dada por:

$$\overleftrightarrow{K} = \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{pmatrix}.$$

O sinal negativo na equação (3.8) indica que a pressão é decrescente na direção do fluxo, ou seja, o escoamento ocorre de um ponto de maior pressão para outro de menor pressão. Para incluir a força da gravidade nas equações (3.7) toma-se a função profundidade  $Z(x, y, z)$ , aqui tomada na direção- $z$ . Desda maneira, a lei de Darcy é dada por, [12, 22]:

$$\vec{v} = -\frac{1}{\mu} \overleftrightarrow{K} (\nabla p - \rho g \nabla Z), \quad (3.9)$$

sendo  $g[m/s^2]$  a aceleração da gravidade. Portanto, substituindo a lei de Darcy (3.9) na equação (3.6), tem-se a forma geral para a conservação de massa em fluidos compressíveis e monofásicos em três dimensões

$$-\text{div} \left[ \frac{\rho}{\mu} \overleftrightarrow{K} (\nabla p - \rho g \nabla Z) \right] + \frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t} = 0. \quad (3.10)$$

### Equação de Estado

Além das considerações relacionadas com fluxos em meios porosos feitas anteriormente, é necessário especificar uma equação de estado para o fluido, isto é, a relação entre a densidade e a pressão,  $\rho = \rho(p)$ . Para o caso de fluxo de líquidos, pode-se usar a equação geral da compressibilidade dos

fluidos, escrita na forma:

$$c = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}, \quad (3.11)$$

em que  $c [Pa^{-1}]$  é a compressibilidade do líquido. A equação (3.11) pode ser desdobrada em função de  $x, y, z$  e  $t$  para ser incorporada na equação (3.10), obtendo as igualdades:

$$\rho \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad \rho \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial y} \quad \text{e} \quad \rho \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial z}.$$

A equação  $\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t}$  é escrita da seguinte maneira, [1]:

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} = \frac{\phi c_t}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

em que  $c_t = c + c_f$  é a *compressibilidade total*, dada pela soma da compressibilidade do líquido com a compressibilidade do meio.

Considerando  $c, c_t$  e  $\mu$  constantes e desprezando o efeito da gravidade, ou seja  $\nabla Z = 0$ , a equação 3.10 é escrita como

$$\text{div}\left(\frac{1}{\mu} \overleftrightarrow{K} \nabla p\right) = (\phi c_t) \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (3.12)$$

### Condições de Contorno

Em simulações de reservatórios, o interesse principal encontra-se no interior do mesmo. Sendo assim, pode-se assumir que o meio poroso encontra-se dentro de um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  e o escoamento no reservatório está sujeito as seguintes condições de contorno:

- Nos limites do reservatório pode-se aplicar condições de contorno tipo Dirichlet ou tipo Neumann. Nas condições de contorno tipo Dirichlet define-se o valor da pressão do fluido nos limites do reservatório e nas condições de Neumann define-se o valor do fluxo (vazão) que entra ou sai do reservatório através de seus limites.

### 3.1.2 Casos Especiais de Interesse

Neste trabalho consideram-se apenas casos especiais, em que a equação de conservação de massa (3.10) é simplificada. Inicialmente, assume-se que o efeito da gravidade é negligenciado e que o meio seja homogêneo com  $\phi$  constante. Nestas condições, o problema de valor de contorno para um fluido compressível monofásico se reduz a:

**Problema 1: Fluido Compressível**

Encontrar  $p(x, y, z, t)$  e  $\vec{v}$  tal que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[\rho \vec{v}] + \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \\ \vec{v} = -\frac{1}{\mu} \overleftrightarrow{K} \nabla p, \\ \rho = \rho(p), \end{cases} \quad (3.13)$$

mais as condições de contorno e inicial. No caso em que a densidade do fluido é constante,  $\phi \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , tem-se um fluido incompressível, em que a equação da conservação da massa se reduz a  $-\operatorname{div} \vec{v} = 0$ . Dessa forma tem-se:

**Problema 2: Fluido Incompressível**

Encontrar  $p = p(x, y, z, t)$  e  $\vec{v}$ , tal que:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\vec{v}) = 0, \\ \vec{v} = -\frac{1}{\mu} \overleftrightarrow{K} \nabla p, \end{cases} \quad (3.14)$$

mais as condições de contorno e inicial.

# Capítulo 4

## O Método dos Elementos Finitos - MEF

O Método dos Elementos Finitos - MEF para solução aproximada de um problema variacional é essencialmente o método de Galerkin onde usa-se como espaço de aproximação um espaço de elementos finitos formado por funções polinomiais por partes. Simplificadamente, a metodologia do MEF consiste nos seguintes passos:

1. Definição da equação diferencial - em geral provém de uma lei de conservação e inclui as informações de contorno;
2. Obtenção da formulação variacional do problema;
3. Escolha de um espaço de funções de aproximação de dimensão finita;
4. Aplicação do método de Galerkin para o espaço de funções adotado: o resultado da aplicação do método será um sistema algébrico cuja solução consiste de coeficientes da combinação linear da solução aproximada em relação à da base adotada;
5. Resolução do sistema algébrico: consiste na resolução do sistema linear gerado pelo método de Galerkin para obtenção dos coeficientes;
6. Análise da solução obtida: como o resultado é uma aproximação para a solução real do problema, há a necessidade de se verificar a precisão da solução por meio de alguma técnica de pós-processamento, ou ainda por meio da estimativa do erro de aproximação.

Para descrever a metodologia será utilizado um problema bidimensional, a equação de Poisson, sendo desenvolvidas todas as etapas consideradas acima.

## 4.1 O Problema Modelo - Equação de Poisson

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um aberto limitado com contorno  $\partial\Omega$  Lipschitz (as derivadas normais de  $u$  são limitadas e uniformemente contínuas em  $\partial\Omega$ ). Considere o problema modelo de valor de contorno,

$$-\Delta u = f \quad \text{em } \Omega \quad (4.1)$$

com  $f \in L^2(\Omega)$ , sujeito à condição de contorno de Dirichlet

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (4.2)$$

## 4.2 Formulação Variacional

Multiplicando a equação (4.1) por um função  $v$  e integrando em  $\Omega$ , tem-se

$$-\int_{\Omega} (\Delta u v) dA = \int_{\Omega} (f v) dA, \quad (4.3)$$

que vale para todas funções  $v$  de um espaço escolhido adequadamente. As funções  $v$  são conhecidas como funções teste. Com o intuito de descrever a formulação variacional do problema mais consistentemente, será introduzido a idéia de conjunto de todas funções que são suficientemente suaves para serem consideradas como funções testes. O conjunto de tais funções, que tem valor  $v(x, y) = 0$  em  $(x, y) \in \partial\Omega$  é denotado pelo símbolo  $V(\Omega)$ .

Agora, será obtida uma formulação variacional de (4.1) pela observação que, se  $u$  e  $v$  são funções suficientemente suaves, então, a integração por partes e com o uso da fórmula de Green, Apêndice B.2, do lado esquerdo da expressão em (4.3), tem-se

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v) dA = \int_{\Omega} (f v) dA. \quad (4.4)$$

Pode-se observar que (4.3) contém as derivadas segundas da solução  $u$ , enquanto (4.4) tem apenas derivadas primeiras e assim, em passar de (4.3) para (4.4) tem-se um "enfraquecimento" da suavidade requerida na solução. Desta forma, (4.1) e (4.2) podem ser substituídas pelo problema variacional

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u \in V(\Omega), \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v) dA = \int_{\Omega} (f v) dA, \quad \forall v \in V(\Omega), \end{cases} \quad (4.5)$$

em que  $V(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ . Isto é,

$$V(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v(x, y) = 0, (x, y) \in \Gamma_D\}. \quad (4.6)$$

Outro aspecto importante a ser destacado é a possibilidade de representar a formulação variacional através de um termo bilinear e um termo linear conforme mostrado abaixo:

$$\begin{cases} B(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v) dA, \\ F(v) = \int_{\Omega} (f v) dA. \end{cases} \quad (4.7)$$

Assim, o problema é escrito como:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u \in V(\Omega), \text{ tal que} \\ B(u, v) = F(v), \forall v \in V(\Omega). \end{cases} \quad (4.8)$$

### 4.2.1 Existência e Unicidade

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, tem-se,

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v) dA \right| \leq \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)} \| \nabla v \|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \| u \|_{H^1(\Omega)} \| v \|_{H^1(\Omega)}, \forall u, v \in V(\Omega) \end{aligned}$$

Isso implica que a forma bilinear  $B(\cdot, \cdot)$  é limitada em  $V(\Omega) \times V(\Omega)$ . Além disso, tem-se que a forma bilinear é simétrica em  $V(\Omega)$ . Por outro lado, através da desigualdade de Friedrichs, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\| u \|_{L^2(\Omega)}^2 < C \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)}^2, \forall u \in V(\Omega).$$

Pelo fato de  $\| u \|_{H^1(\Omega)}^2 = \| u \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)}^2$ , tem-se

$$\| u \|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (1 + C) \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Como  $B(u, u) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla u) dA = \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)}^2$ , resulta que

$$B(u, u) \geq (1 - C)^{-1} \| u \|^2, \forall u \in V(\Omega).$$

Isto é,  $B(\cdot, \cdot)$  é coerciva em  $V(\Omega) \times V(\Omega)$ . Portanto, pelo Teorema 2.5, Teorema de Lax-Milgram, existe uma única solução  $u$  para o problema (4.8) (maiores detalhes ver [11], pg. 91).



### 4.3 Espaços de Elementos Finitos

Espaços de elementos finitos são espaços de funções polinomiais por partes definidas em subdivisões do domínio de simulação. Para definir um espaço de elementos finitos é necessário os seguintes passos, [13] página 67:

- Construir uma partição  $T_h = \{K\}$  do domínio computacional  $\Omega$ . Os elementos  $K$  poderão ser intervalos, para  $m = 1$ , triângulos ou quadriláteros, para  $m = 2$ , e tetraedros, por exemplo, para  $m = 3$ ;
- Definir a natureza das funções  $v$  sobre cada elemento  $K$  (isto é, linear, quadrática, cúbica, etc) e uma base local para essas funções;
- Construir o espaço de elementos finitos  $V_h$  através da descrição dos parâmetros que permitem combinar as funções de base locais em cada elemento, formando bases globais.

Nesta seção será abordado de maneira sucinta o conceito dos espaços de elementos finitos para o caso particular dos espaços de Lagrange.

#### 4.3.1 Espaços de Elementos Finitos de Lagrange em 1D

Seja  $\mathcal{P}_d$  o espaço vetorial real dos polinômios de grau menor ou igual a  $d$ . Dada uma sequência de  $d + 1$  pontos  $a_0 < a_1 < \dots < a_{d-1} < a_d$ , definem-se os polinômios de Lagrange  $\ell_i \in \mathcal{P}_d$ , para  $i = 0, 1, 2, \dots, d$ ,

$$\ell_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^d \frac{(x - a_j)}{(a_i - a_j)}$$

que formam uma base para  $\mathcal{P}_d$ . De fato, como

$$\ell_i(a_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

todo polinômio  $p \in \mathcal{P}_d$  é escrito da seguinte forma:

$$p(x) = p(x_0)\ell_0(x) + p(x_1)\ell_1(x) + \dots + p(x_d)\ell_d(x).$$

**Definição 4.1** Dada uma partição  $T_h = \{K = [x_{k-1}, x_k], k = 1, \dots, n\}$  do intervalo  $[a, b]$ , seja  $V_h = \mathbb{L}_d(T_h)$  o conjunto das funções  $v$  definidas no intervalo  $[a, b]$ , tal que

- A restrição de  $v(x)$  em cada elemento  $K \in T_h$  coincide com um polinômio  $p^{(K)}(x) \in \mathcal{P}_d$ ;

- $v \in C^0([a, b])$ .

O espaço  $\mathbb{L}_d(T_h)$  é um subespaço vetorial de  $C^0([a, b])$  com  $\dim(\mathbb{L}_d(T_h)) = n \times d + 1$ . O parâmetro  $h$  indica o espaçamento mínimo  $h = \min\{h_k, k = 1, \dots, n\}$ .

A seguir, mostram-se alguns exemplos desses espaços, o espaço das funções de Lagrange lineares e quadráticas,  $\mathbb{L}_1(T_h)$  e  $\mathbb{L}_2(T_h)$  respectivamente. A construção dos espaços das funções de Lagrange de grau maior ou igual a três, isto é, as funções cúbicas, quárticas, etc, é análoga, como indicado em [10] página 64 e [7] página 38.

### Espaços das Funções de Lagrange Lineares por Partes

Para  $d = 1$ , o espaço  $V_h = \mathbb{L}_1(T_h)$  é denominado de espaço das funções de Lagrange lineares por partes. Os polinômios de Lagrange associadas aos vértices do elemento  $K = [x_{k-1}, x_k]$  são dados por

$$\begin{aligned}\phi_1^{(K)}(x) &= \frac{x_k - x}{h_k}, \\ \phi_2^{(K)}(x) &= \frac{x - x_{k-1}}{h_k},\end{aligned}\tag{4.9}$$

em que  $h_k = x_k - x_{k-1}$ . Desta forma, a restrição de toda função  $v \in \mathbb{L}_1(T_h)$  ao elemento  $K$  pode ser expressa em termos desta base de Lagrange

$$v(x) = v(x_{k-1})\phi_1^{(K)}(x) + v(x_k)\phi_2^{(K)}(x), \quad \forall x \in K = [x_{k-1}, x_k].$$

As funções  $\phi_1^{(K)}$  e  $\phi_2^{(K)}$  são chamadas de **funções de base local**, no elemento  $K$ . A Figura 4.1 mostra um elemento padrão, ou mestre,  $K = [0, 1]$  com as funções de base local  $\phi_1$  e  $\phi_2$ .

A partir da definição das funções de base local definem-se as **funções de base global** do espaço  $\mathbb{L}_1(T_h)$ .

**Definição 4.2** Denota-se por  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , as funções da base global do espaço  $\mathbb{L}_1(T_h)$ , associadas aos vértices  $x_i$  dos elementos da partição  $T_h$ , as quais são definidas por:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h_1} & \text{se } x \in [x_0, x_1] \\ 0 & \text{se } x \notin [x_0, x_1], \end{cases}$$

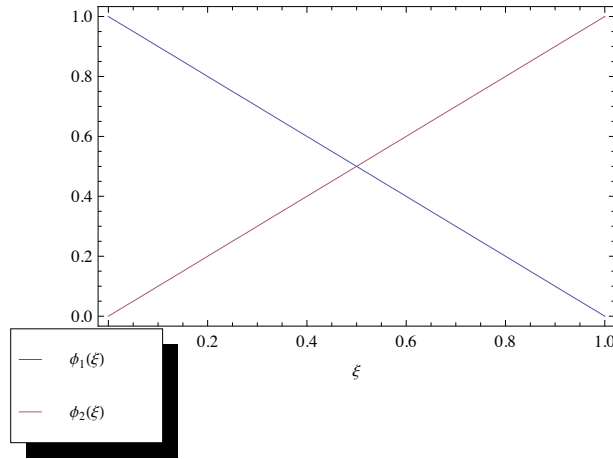


Figura 4.1: Funções de base local lineares para problemas unidimensionais.

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h_i} & \text{se } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} & \text{se } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{se } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$$

e

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{h_n} & \text{se } x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0 & \text{se } x \notin [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

As funções  $\varphi_i$  satisfazem a condição

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n,$$

sendo portanto, chamadas de funções de base nodais. Essas funções são linearmente independentes e verifica-se que toda  $v$  em  $\mathbb{L}_1(T_h)$  se expressa na forma

$$v(x) = \sum_{i=0}^n v(x_i) \varphi_i(x).$$

Portanto, formam uma base para o espaço  $\mathbb{L}_1(T_h)$ , resultando que a dimensão de  $\mathbb{L}_1(T_h)$  é igual a  $n + 1$ . Pela sua construção, uma função de  $\mathbb{L}_1(T_h)$  possui derivada constante por partes, sendo portanto uma função de  $H^1([a, b])$ .

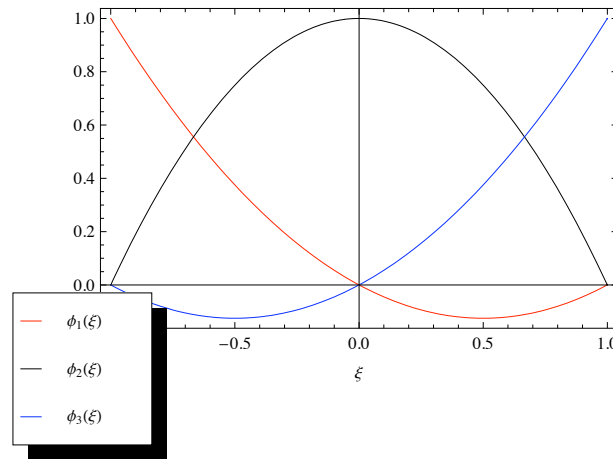


Figura 4.2: Funções de base local quadráticas para problemas unidimensionais.

### Espaço das Funções de Lagrange Quadráticas

Para  $d = 2$ , o espaço  $V_h = \mathbb{L}_2(T_h)$  é denominado espaço das funções de Lagrange quadráticas por partes. Os polinômios de Lagrange associadas aos vértices do elemento  $K = [x_{k-1}, x_k]$  e ao seu ponto médio  $\bar{x}_k = (x_{k-1} + x_k)/2$  são dados por

$$\begin{aligned}\phi_1^{(K)}(x) &= 2\left(\frac{x_k - x}{h_k}\right)\left(\frac{x_k - x}{h_k} - \frac{1}{2}\right), \\ \phi_2^{(K)}(x) &= 4\left(\frac{x_k - x}{h_k}\right)\left(\frac{x - x_{k-1}}{h_k}\right), \\ \phi_3^{(K)}(x) &= 2\left(\frac{x - x_{k-1}}{h_k}\right)\left(\frac{x - x_{k-1}}{h_k} - \frac{1}{2}\right),\end{aligned}\tag{4.10}$$

em que,  $h_k = x_k - x_{k-1}$ . Sendo assim, a restrição de toda função  $v \in \mathbb{L}_2(T_h)$  ao elemento  $K$  pode ser escrita da forma

$$v(x) = v(x_{k-1})\phi_1^{(K)}(x) + v(\bar{x}_k)\phi_2^{(K)}(x) + v(x_k)\phi_3^{(K)}(x), \quad \forall x \in K = [x_{k-1}, x_k].$$

As funções  $\phi_1^{(K)}$ ,  $\phi_2^{(K)}$  e  $\phi_3^{(K)}$  são as **funções de base local** do elemento  $K$ . A Figura 4.2 mostra um elemento padrão  $K = [-1, 1]$  com as funções de base local  $\phi_1^{(K)}$ ,  $\phi_2^{(K)}$  e  $\phi_3^{(K)}$  pertencentes a  $\mathcal{P}_2$ .

A partir da definição das funções de base local quadráticas, definem-se as **funções de base global** do espaço  $\mathbb{L}_2(T_h)$ .

**Definição 4.3** Denota-se por  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_{2k-1}, \varphi_{2k}, \dots, \varphi_{2n-1}, \varphi_{2n}$  as funções da base global do

espaço  $\mathbb{L}_2(T_h)$ , as quais são definidas da seguinte forma:

1. Função  $\varphi_0$  associada ao ponto  $x_0$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 2\left(\frac{x_1-x}{h_1}\right)\left(\frac{x_1-x}{h_1} - \frac{1}{2}\right) & \text{se } x \in \mathbf{K} = [x_0, x_1] \\ 0 & \text{se } x \notin [x_0, x_1]. \end{cases}$$

2. Funções  $\varphi_{2k}$  associadas aos pontos  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ ,

$$\varphi_{2k}(x) = \begin{cases} \phi_3^{(\mathbf{K})}(x) & \text{se } x \in \mathbf{K} = [x_{k-1}, x_k] \\ \phi_1^{(\mathbf{K})}(x) & \text{se } x \in \mathbf{K} = [x_k, x_{k+1}] \\ 0 & \text{se } x \notin [x_{k-1}, x_{k+1}]. \end{cases}$$

3. Funções  $\varphi_{2k-1}$  associadas aos pontos médios  $\bar{x}_k = (x_{k-1} + x_k)/2$ ,  $\bar{x}_k \in \mathbf{K} = [x_{k-1}, x_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$

$$\varphi_{2k-1}(x) = \begin{cases} \phi_2^{(\mathbf{K})}(x) & \text{se } x \in \mathbf{K} = [x_{k-1}, x_k] \\ 0 & \text{se } x \notin [x_{k-1}, x_k]. \end{cases}$$

4. Função  $\varphi_{2n}$  associada ao ponto  $x_n$

$$\varphi_{2n}(x) = \begin{cases} 2\left(\frac{x-x_{n-1}}{h_n}\right)\left(\frac{x-x_{n-1}}{h_n} - \frac{1}{2}\right) & \text{se } x \in \mathbf{K} = [x_{n-1}, x_n] \\ 0 & \text{se } x \notin [x_{n-1}, x_n]. \end{cases}$$

As funções  $\varphi_i$  satisfazem as condições

$$\varphi_{2k}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = x_k \\ 0 & \text{se } x = x_j, j \neq k, \quad k = 0, 1, \dots, n, \\ 0 & \text{se } x = \bar{x}_k \end{cases}$$

e

$$\varphi_{2k-1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = \bar{x}_k \\ 0 & \text{se } x = x_j, \quad k = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

sendo portanto, chamadas de funções de base nodais. Essas funções são linearmente independentes e verifica-se que toda  $v$  em  $\mathbb{L}_2(T_h)$  se expressa da na forma

$$v(x) = \sum_{j=0}^{2n} a_j \varphi_j(x),$$

em que os coeficientes são  $a_{2k} = v(x_k)$  e  $a_{2k-1} = v(\bar{x}_k)$ . Portanto, formam uma base de  $\mathbb{L}_2(T_h)$ , cuja dimensão é  $2n + 1$ . Pela sua construção, uma função de  $\mathbb{L}_2(T_h)$  possui derivada linear por partes, sendo portanto uma função de  $H^1([a, b])$ .

### 4.3.2 Espaços de Elementos Finitos de Lagrange em 2D

Os princípios para a construção de espaços de elementos finitos de Lagrange bidimensionais são análogos ao caso unidimensional. Ou seja, considera-se o domínio computacional  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  particionado em um número finito de elementos retangulares ou triangulares  $K$ , formando uma partição  $T_h$ . Constroem-se funções de base polinomiais localmente em cada elemento e depois constroem-se as funções de base globais, as quais são contínuas nas interfaces, entre elementos adjacentes.

#### Elementos Retangulares

Sobre um elemento retangular  $K$  define-se por  $Q_1(K)$  o **espaço das funções polinomiais bilineares**,

$$Q_1(K) = \{v, v(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4xy, (x, y) \in K \text{ e } \alpha_i \in \mathbb{R}\},$$

com  $\dim Q_1(K) = 4$ . As funções  $v \in Q_1(K)$  são produtos tensoriais de polinômios unidimensionais de grau menor ou igual a um em cada uma das variáveis  $x$  e  $y$ . Sendo assim, se  $K = K_x \times K_y$  com  $K_x = [x_{k-1}, x_k]$  e  $K_y = [y_{j-1}, y_j]$ , as funções de base local para  $Q_1(K)$  podem ser obtidas como produto tensorial das funções de base de Lagrange lineares, (4.9), para  $\mathcal{P}_1(K_x)$  e  $\mathcal{P}_1(K_y)$ . Precisamente,

$$\begin{aligned} \phi_{11}^{(K)}(x, y) &= \phi_1^{(K_x)}(x)\phi_1^{(K_y)}(y), \\ \phi_{12}^{(K)}(x, y) &= \phi_1^{(K_x)}(x)\phi_2^{(K_y)}(y), \\ \phi_{21}^{(K)}(x, y) &= \phi_2^{(K_x)}(x)\phi_1^{(K_y)}(y), \\ \phi_{22}^{(K)}(x, y) &= \phi_2^{(K_x)}(x)\phi_2^{(K_y)}(y), \end{aligned} \tag{4.11}$$

são as quatro funções de base local para  $Q_1(K)$ , as quais são funções nodais associadas aos quatro vértices de  $K$ . Como exemplo, a Figura 4.3 mostra um elemento retangular padrão,  $K = [-1, 1] \times [-1, 1]$ , e a Figura 4.4 mostra as funções de base sobre o elemento, associadas aos vértices a11, a12, a21 e a22 do elemento.

De forma análoga, produtos tensoriais de polinômios de Lagrange de ordem arbitrária podem ser usados nas construções de elementos retangulares de ordem superior cujas bases locais nodais

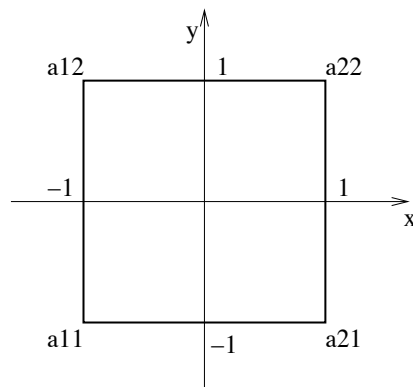


Figura 4.3: Elemento retangular  $K = [-1, 1] \times [-1, 1]$  e seus vértices indicados por  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  e  $a_{22}$ .

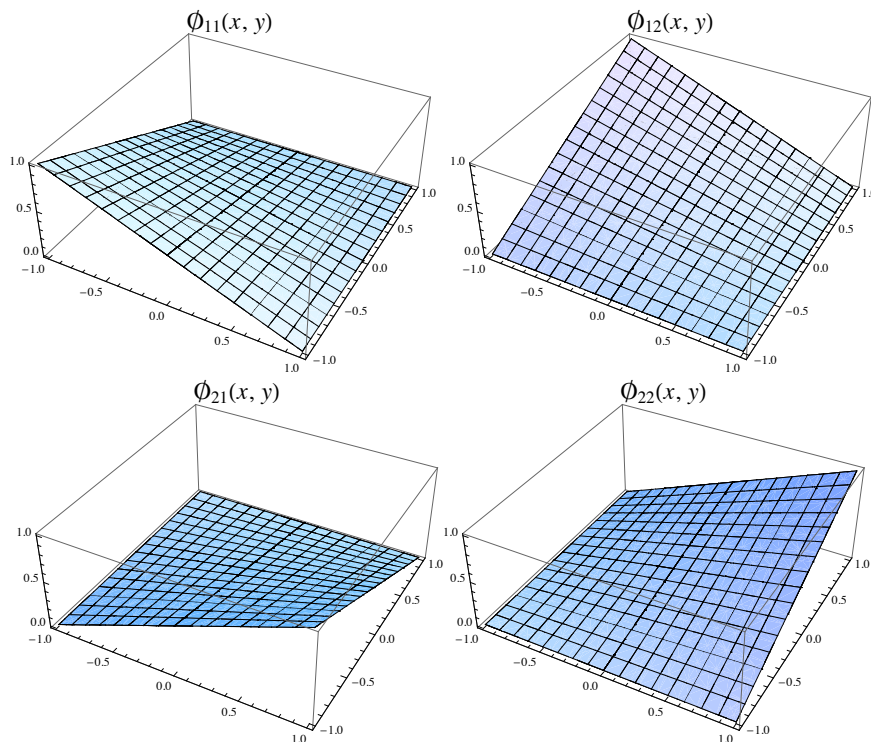


Figura 4.4: Funções de base local bilineares para problemas bidimensionais.

estão associadas aos nós que são obtidos pelo produto tensorial das funções nodais pertencentes às bases unidimensionais correspondentes, [10] página 198.

Como no caso unidimensional o espaço de elementos finitos retangulares  $V_h$  são construídos combinando as bases locais para formar bases globais contínuas. Além disso, pelo fato das funções  $v \in V_h$  serem polinômios em cada elemento  $K$  e contínuas através da fronteira de elementos adjacentes, então as derivadas  $D^\alpha v$ ,  $|\alpha| = 1$ , existem e são contínuas por partes, portanto  $v \in H^1(\Omega)$ , [10] e [13].

### Elementos Triangulares

Sejam  $K$  um elemento triangular e  $\mathcal{P}_1(K)$  o espaço de funções lineares

$$v(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \quad (x, y) \in K$$

com  $\dim \mathcal{P}_1(K) = 3$ . Sendo  $(x_j, y_j) \in \mathbb{R}^2$ ,  $j = 1, 2, 3$ , as coordenadas dos vértices do triângulo, as funções de base local são:

$$\begin{aligned} \phi_1^{(K)}(x, y) &= \frac{1}{2A_K} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y], \\ \phi_2^{(K)}(x, y) &= \frac{1}{2A_K} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y], \\ \phi_3^{(K)}(x, y) &= \frac{1}{2A_K} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y], \end{aligned} \quad (4.12)$$

em que  $A_K$  é a área do triângulo  $K$ , de forma que

$$\phi_i^{(K)}(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Toda função  $v \in \mathcal{P}_1(K)$  é escrita unicamente por

$$v(x, y) = a_1^K \phi_1^{(K)}(x) + a_2^K \phi_2^{(K)}(x) + a_3^K \phi_3^{(K)}(x), \quad \forall (x, y) \in K$$

sendo  $a_j^{(K)} = v(x_j, y_j)$ ,  $j = 1, 2, 3$ .



De forma geral,  $\dim \mathcal{P}_r(\mathbf{K}) = \frac{(r+1)(r+2)}{2}$  e

$$\mathcal{P}_r(\mathbf{K}) = \left\{ v, v(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq r} \alpha_{ij} x^i y^j \text{ para } (x, y) \in \mathbf{K}, \alpha_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Analogamente definem-se funções de base local  $\phi_i^{(\mathbf{K})}(x, y)$ ,  $i = 1, \dots, \dim \mathcal{P}_r(\mathbf{K})$ . Para os casos dos elementos quadráticos e cúbicos, ver [10] página 204.

Como no caso dos elementos finitos retangulares, o espaço de elementos finitos triangulares  $V_h$  são construídos combinando as bases locais para formar bases globais contínuas e resultam em subespaços de  $H^1(\Omega)$ , [10] e [13].

### 4.3.3 Formulação de Galerkin

Considerando que já se tem a formulação variacional para o problema e um espaço de elementos finitos  $V_h$ , pode-se agora pensar no **método de Galerkin**, visto na Subseção 2.3.2, para construir soluções aproximadas para o problema (4.8). Assim, em vez de tratar o problema de dimensão infinita (4.8), procura-se uma solução aproximada  $u_h \in V_h$ . Desta forma, o problema aproximado consiste em:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u_h \in V_h, \text{ tal que} \\ B(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (4.13)$$

Utilizando as funções de base global para  $V_h$

$$\Psi_h = \{ \varphi_i, \quad i = 1, \dots, N_h \}, \quad (4.14)$$

e adotando como funções testes  $v = \varphi_j$ ,  $j = 1, \dots, N_h$ , o problema (4.13) resume-se em:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } \alpha_i, \quad i = 1, \dots, N_h, \text{ tal que} \\ \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i \{ B(\varphi_i, \varphi_j) \} = F(\varphi_j), \quad j = 1, \dots, N_h. \end{cases} \quad (4.15)$$

Consideram-se agora algumas mudanças de notações, sob as quais o problema (4.15) é mais visto:

- A matriz de rigidez global  $K_{ij}$ , é dada por:

$$K_{ij} = B(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega} (\nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j) dA; \quad (4.16)$$

- O vetor de carga  $X = [X_j]$  é dado por:

$$X_j = F(\varphi_j) = \int_{\Omega} (f \varphi_j) dA. \quad (4.17)$$

Com isso, o problema (4.15) pode ser escrito na forma usual (sistema de equações lineares):

$$\begin{cases} \text{Encontrar } \alpha_i, i = 1, \dots, N_h, \text{ tal que} \\ \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i K_{ij} = X_j, j = 1, \dots, N_h. \end{cases} \quad (4.18)$$

O qual pode ser representado por  $[K][\alpha] = [X]$ .

## 4.4 Estimadores de erro

O método dos elementos finitos fornece uma aproximação da função procurada, dentro do subespaço  $V_h$  escolhido. Caso o subespaço escolhido  $V_h$  não seja adequado, a função de aproximação não apresentará uma precisão satisfatória. Neste caso, uma análise para verificar tal precisão será necessária.

Para a análise de aproximação gerada por meio de uma metodologia de elementos finitos considera-se o erro

$$e(x) = u(x) - u_h(x), \quad (4.19)$$

em que  $u$  é a solução exata e  $u_h$  é a solução aproximada. As principais normas utilizadas no estudo de estimadores de erro são :

- norma energia  $E(\Omega)$ :  $\|e\|_B^2 = B(u - u_h, u - u_h)$ , em que  $B$  representa uma forma bilinear;
- norma  $L^2(\Omega)$ :  $\|e\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} |u - u_h|^2 dx$ ;
- semi-norma  $H^1(\Omega)$ :  $|e|_{H^1}^2 = \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla u_h|^2 dx$ ;
- norma  $H^1(\Omega)$ :  $\|e\|_{H^1}^2 = \|e\|_{L^2}^2 + |e|_{H^1}^2$
- norma  $L^\infty(\Omega)$ :  $\|e\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} \{|u(x) - u_h(x)|\}$ .

Utilizando uma norma e conhecendo-se o resultado analítico do problema em questão, o cálculo do erro seria simples. Como a obtenção da solução analítica é algo inviável para a maioria dos problemas nos quais são utilizados métodos numéricos, utiliza-se, então, uma abordagem na qual o erro da aproximação é estimado.

Os estimadores de erro podem ser baseados em dois grupos: *a priori* e *a posteriori*. As estimativas de erro *a priori* trazem informações antecipadas sobre a grandeza do erro e sobre o modo de convergência da solução. O estimador de erro *a posteriori* é baseado nas informações obtidas durante o processo de solução e as estimativas de erro podem ser feitas para cada elemento da malha (erro local) ou para toda malha (erro global). Os estimadores de erro *a posteriori* tem seu desenvolvimento cada vez maior, sendo [6] o primeiro trabalho de destaque, onde o estimador de erro baseia-se nas aproximações da norma de energia do erro em cada elemento  $K$  da malha.

Em seguida apresentam-se algumas estimativas de erro *a priori* e *a posteriori*. Um estudo mais aprofundado do assunto, já que está além do estudo proposto nesse trabalho, pode ser visto em [11] e [2, 24].

#### 4.4.1 Estimativa do Erro a Priori

Nesta seção apresentam-se algumas estimativas *a priori* para o erro, nas normas em  $H^1(\Omega)$  e  $L^2(\Omega)$ , na aproximação pelo método do Galerkin do problema modelo, que são válidas sob condições apropriadas dos espaços aproximantes de elementos finitos (ver [11], pg. 82-95).

Seja  $e = u - u_h$  o erro entre a solução exata  $u$  do problema (4.8) e a solução aproximada por elementos finitos  $u_h$  do problema (4.13). Seja  $p \geq 1$  o grau dos polinômios usados na definição das funções de base  $V_h$ , supondo que  $u \in H^r(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ,  $r > 1$ , e  $\mu = \min(p, r - 1)$ , então

$$\|e\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(1 + \frac{M}{\alpha}\right) h^\mu \|u\|_{H^r(\Omega)} \quad (4.20)$$

Assim, se  $u$  for suficientemente suave (isto é, se  $r$  for grande), a taxa de convergência assintótica do erro, na norma em  $H^1(\Omega)$ , será de ordem  $O(h^\mu)$ . Por exemplo, para elementos lineares e quadráticos tem-se as ordens  $O(h)$  e  $O(h^2)$ , respectivamente. Vale notar que, se a regularidade de  $u$  for  $r < p$  o aumento no grau do polinômio não melhora a taxa de convergência. Verifica-se que se  $f \in H^s(\Omega)$ ,  $\Omega$  é convexo com fronteira  $\partial\Omega$  Lipschitziano, então,  $u \in H^{s+2}(\Omega)$  e  $\|u\|_{H^{s+2}(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^s(\Omega)}$ , ver [11, 19]. Desta forma, tem-se

$$\|e\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{\mu_1} \|f\|_{H^s(\Omega)}, \quad (4.21)$$

em que

$$\mu_1 = \min(p, s + 1)$$

e  $C$  é uma constante que depende dos dados do problema.

No caso da norma em  $L^2(\Omega)$ , tem-se o seguinte estimador do erro:

$$\| e \|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^\gamma \| u \|_{H^r(\Omega)},$$

sendo

$$\gamma = \min(2p, p + 1, r).$$

Se  $f \in H^s(\Omega)$ ,  $\| u \|_{H^r(\Omega)} \leq C \| f \|_{H^{r-2}(\Omega)}$ , então

$$\| e \|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^\lambda \| f \|_{H^s(\Omega)},$$

em que

$$\lambda = \min(2p, p + 1, s + 2)$$

e  $C$  é uma constante que depende dos dados do problema. Assim, se elementos lineares são usados,  $p = 1$ , e  $r = s + 2 \geq 2$ , tem-se  $\lambda = 2$  e ordem  $O(h^2)$  para o erro em  $L^2(\Omega)$ , e assim sucessivamente para elementos de grau maior.

Outras estimativas para erro *a priori* considerando a norma da energia  $E$  e a semi-norma  $H^1(\Omega)$  são mostradas em [10, 11].

De um modo geral, as estimativas *a priori* são da forma

$$\text{Erro}(h) = \| e \| \leq Ch^\mu, \tag{4.22}$$

em que  $C$  é uma constante que depende dos dados do problema e  $\mu$  é um inteiro que depende da regularidade da solução e do grau dos polinômios usados na definição das funções de base polinomiais por partes utilizadas. O expoente  $\mu$  é uma medida da taxa de convergência assintótica do erro, com respeito a norma  $\| \cdot \|$  escolhida. Além disso, se  $\mu > 0$ , então o erro  $\| e \|$ , claramente, aproxima-se de zero quando  $h$  tende a zero.

#### 4.4.2 Estimativa do Erro a Posteriori

Nesta seção apresenta-se uma estimativa para o erro *a posteriori*, encontrado em [2, 24], através da norma da energia. A forma bilinear  $B(u, v)$  é simétrica e coersiva em  $V(\Omega) \times V(\Omega)$  e assim, define um produto interno em  $V(\Omega)$ . Este produto interno está associado com a norma de energia  $\| u \|_E = \sqrt{B(u, u)}$ . O erro numérico na aproximação  $u_h$  de  $u$ , é dado por uma função  $e \in V(\Omega)$ ,

$e = u - u_h$ . Fazendo  $u = e + u_h$  tem-se

$$\begin{aligned} B(e + u_h, v) &= F(v) \Rightarrow B(e, v) + B(u_h, v) = F(v) \\ \Rightarrow B(e, v) &= F(v) - B(u_h, v), \quad \forall v \in V(\Omega) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Escrevendo  $R_h^u(v) = F(v) - B(u_h, v)$ , tem-se

$$B(e, v) = R_h^u(v), \quad \forall v \in V(\Omega), \quad (4.24)$$

em que  $R_h^u$ , chamado de *resíduo*, é um funcional linear do espaço dual  $V'(\Omega)$  e depende dos dados do problema e da solução por elementos finitos  $u_h$ . Essa estimativa de erro faz uso dos dados do problema variacional e propriedades do erro. Por exemplo, este erro aproximado satisfaz a equação residual (4.23) e a condição de **ortogonalidade de Galerkin**, Subseção 2.3.2,

$$B(e, v_h) = R_h^u(v_h) = F(v_h) - B(u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h.$$

Uma equação residual similar a (4.23) é proposta por Ainsworth e Oden [2], a qual é obtida pela integração por partes, sobre cada elemento, da parte esquerda da equação (4.23).

$$\int_K (\nabla e \cdot \nabla v) dA = \int_K (Rv) dA + \int_K (v \nabla e|_K \cdot \vec{n}_K) ds. \quad (4.25)$$

Em que:

$e$  : função erro procurada;

$v$  : função teste;

$R$  : função residual ou resíduo,  $R = f + \Delta u$ ;

$\vec{n}_K$  : vetor normal à face do elemento (K);

K : elemento em análise.

Assim, de acordo com [2], resolvendo a equação (4.25), considerando condições de continuidade das funções e de suas integrais, a sua solução pode ser limitada por:

$$\| e \|_{E(K)} \leq C_1 \| R \|_{L^2(K)} + C_2 \| S \|_{L^2(K)}, \quad (4.26)$$

onde  $S$  é uma aproximação para  $\nabla e \cdot \vec{n}_K$  na face do elemento e  $C_1$  e  $C_2$  são constantes que dependem da malha, principalmente do tamanho do elemento ( $h_k$ ).

## 4.5 Adaptatividade

Nesta Subseção faz-se uma breve introdução sobre o conceito de adaptatividade. Pela definição do MEF, os parâmetros que podem ser alterados para modificar o espaço de funções de aproximação são:

- $h$ : parâmetro relacionado à discretização da malha, normalmente associado ao "tamanho" do elemento;
- $p$ : parâmetro relacionado ao grau dos polinômios, de cada elemento, utilizados como base local para o espaço  $V_h$ .

A adaptatividade consiste no enriquecimento/melhoria do espaço de funções  $V_h$ , onde este enriquecimento pode ser feito através do refinamento dos parâmetros  $h$ ,  $p$  ou ainda a combinação destes. O refinamento  $h$  consiste na redução do tamanho dos elementos da malha, enquanto que o refinamento  $p$  consiste na elevação da ordem dos polinômios da base de funções teste. O refinamento  $hp$  consiste no refinamento destes dois parâmetros para a mesma malha.

## Capítulo 5

# PZ - Ambiente de Programação Orientado a Objeto

A parte numérica deste trabalho foi desenvolvida usando o Ambiente de Programação Científica Orientada a Objetos PZ, que é um código livre, disponível para a comunidade científica através do endereço <http://labmec.fec.unicamp.br/pz/download>. Para um estudo mais aprofundado do Ambiente PZ ver as referências [8, 24].

O ambiente PZ é um conjunto de classes em linguagem C++, com o objetivo de permitir a implementação de métodos de elementos finitos em problemas de valores de contorno unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais. O PZ é constituído de módulos bem diferenciados, cada qual com funções específicas, os quais combinados adquirem as funcionalidades necessárias para a implementação de métodos de elementos finitos.

O PZ é desenvolvido usando programação orientada a objetos e portanto tem como um de seus grandes trunfos a reutilização de códigos (objetos e métodos), pois a maioria das partes de um código de elementos finitos são muito semelhantes de uma formulação para outra.

O ambiente PZ pode ser entendido como um conjunto de ferramentas cuja única interdependência reside na utilização de suas classes comuns e utilitárias. De modo geral as ferramentas do ambiente PZ podem ser classificadas nos seguintes grupos:

- Módulo para definição do problema a ser solucionado;
- Módulo para definição de geometria do problema, incluindo diversos elementos unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais, além de algoritmos de adaptatividade  $h$  para todos os elementos disponíveis;
- Módulos para definição de espaço das funções de base;

- Módulos utilitários, onde são definidas classes de vetores matriciais e métodos de resolução de sistemas lineares.

Como exemplo de classes implementadas no PZ, tem-se:

A classe *TPZGeoMesh* e suas classes derivadas executam (implementam) uma malha geométrica para o ambiente PZ, em que, uma malha geométrica consiste em uma coleção de nós e elementos geométricos. A classe *TPZCompEl* e suas classes derivadas implementam o espaço de aproximação.

A classe *TPZAnalysis* e suas derivadas implementam as operações globais de uma simulação de elementos finitos, sendo aqui executadas as operações de construção de sistema de equações. Implementam métodos de resolução do sistema, podendo ser implementado desde a solução de problemas lineares até a solução de problemas não lineares com evolução no tempo.

## 5.1 Experimentos Numéricos

São resolvidos numericamente dois problemas de valores de contorno, unidimensional e bidimensional, respectivamente, tendo como objetivo confirmar a ordem da taxa de convergência assintótica do erro, nas normas  $H^1(\Omega)$  e  $L^2(\Omega)$ , em problema elípticos, conforme o que foi apresentado na análise do erro a priori na Seção 4.4 do Capítulo 4. Além disso, o estudo da taxa de convergência é útil na validação do programa computacional desenvolvido. Na resolução numérica do problema unidimensional utilizam-se os espaços de elementos finitos de Lagrange em 1D como espaços de funções aproximantes. Já no problema bidimensional usam-se os espaços de elementos finitos de Lagrange em 2D associados aos elementos retangulares da partição da malha.

### 5.1.1 Problema 1D

Considera-se o seguinte problema de valor de contorno

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = 1, & x \in \Omega \\ u(0) = 2 \\ u(9) = \exp(9) + 1, \end{cases}$$

com  $\Omega = (0, 9)$ . A solução analítica deste problema é  $u(x) = \exp(x) + 1$ , como mostra a Figura 5.1.



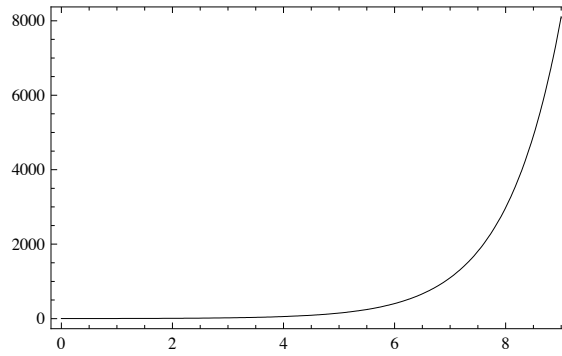


Figura 5.1: Gráficos da Solução exata  $\exp(x) + 1$  do problema 1D.

### Formulação Variacional

Multiplicando a equação diferencial pela função teste  $v \in H_0^1(\Omega)$  e integrando no intervalo, tem-se:

$$\int_0^9 [-u''(x)v(x) + u(x)v(x)] dx = \int_0^9 [v(x)] dx.$$

Fazendo integração por partes tem-se que:

$$\int_0^9 [u''(x)v(x)] dx = [u'(x)v(x)]_0^9 - \int_0^9 [u'(x)v'(x)] dx$$

Portanto, a formulação variacional é dada por: Encontrar  $u \in H^1(\Omega)$ ,  $u(0) = 1$  e  $u(9) = \exp(9) + 1$ , tal que

$$B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

em que

$$B(u, v) = \int_0^9 [u'(x)v'(x) + u(x)v(x)] dx, \quad F(v) = \int_0^9 [v(x)] dx.$$

### Solução Numérica

As Figuras 5.2, 5.3 e 5.4 mostram os gráficos da solução exata e das soluções aproximadas considerando elementos finitos de Lagrange lineares,  $p = 1$ , em malhas uniformes variando o espaçamento  $h$ . Observa-se que a solução aproximada tende à solução exata com  $h$  tendendo a zero.

A partir de (4.22), se  $\text{Erro} = O(h^\mu)$ , plotando o gráfico log-log, ( $\log_{10} h$  versus  $\log_{10} \text{Erro}$ ), obtém-se

$$\log_{10} \text{Erro} = \mu \log_{10} h + \log_{10} C. \quad (5.1)$$

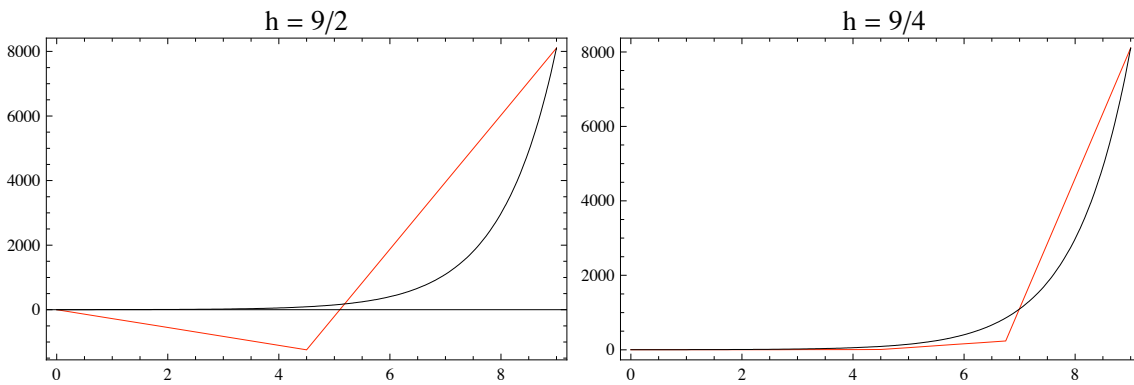


Figura 5.2: Gráficos da solução aproximada  $u_h(x)$  usando funções de base lineares,  $p = 1$ , e com  $h = 9/2$  e  $h = 9/4$ .

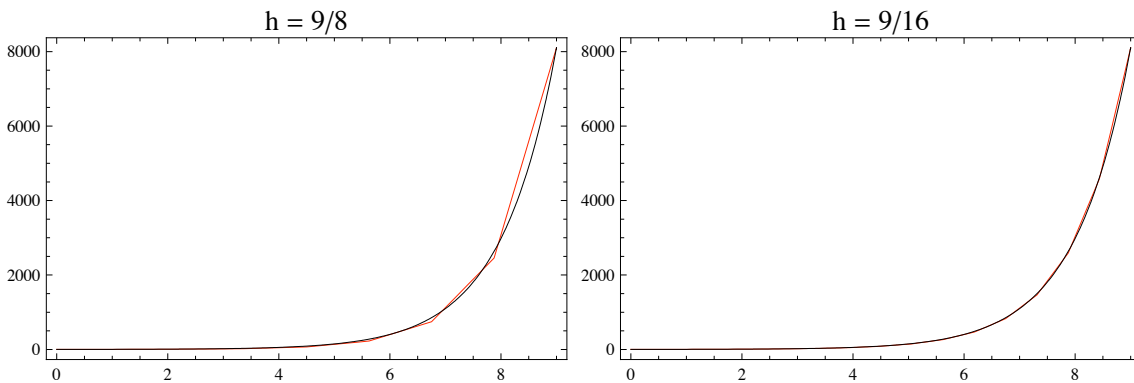


Figura 5.3: Gráficos da solução aproximada  $u_h(x)$  usando funções de base lineares,  $p = 1$ , e com  $h = 9/8$  e  $h = 9/16$ .

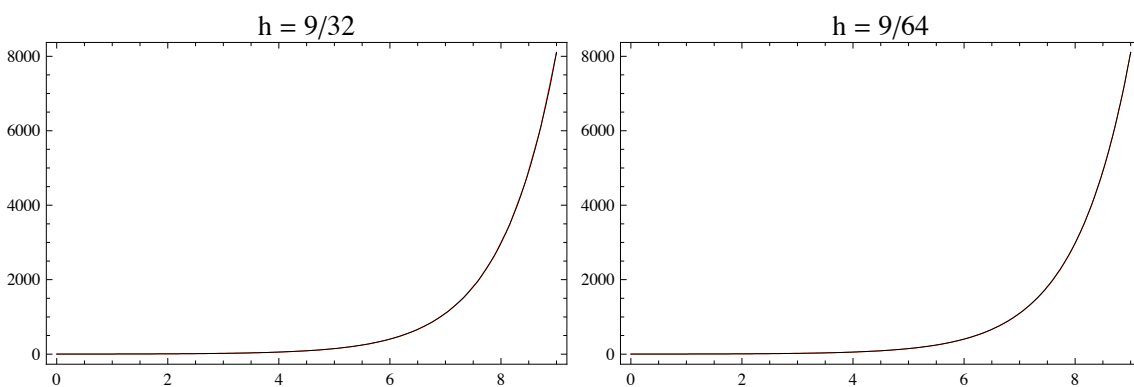


Figura 5.4: Gráficos da solução aproximada  $u_h(x)$  usando funções de base lineares,  $p = 1$ , e com  $h = 9/32$  e  $h = 9/64$ .

Medida da taxa de convergência, $\mu = \frac{\log_{10}(\text{Erro}_1/\text{Erro}_2)}{\log_{10} 2}$						
$h_1, h_2$	Norma $L^2(\Omega)$			Semi-norma $H^1(\Omega)$		
	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$
9/2, 9/4	1,42233	1,99839	3,10097	0,691256	1,328720	2,038520
9/4, 9/8	1,80423	2,63041	3,66221	0,753194	1,770680	2,629380
9/8, 9/16	1,96531	2,89580	3,91391	0,843794	1,951090	2,881740
9/16, 9/32	2,00360	2,97332	3,98654	0,922576	1,998160	2,963590
9/32, 9/64	2,00742	2,99330	4,00143	0,963188	2,005300	2,988050
9/64, 9/128	2,00512	2,99830	4,00262	0,982258	2,004240	2,995570
9/128, 9/256	2,00291	2,99955	3,99992	0,991339	2,002520	2,999490
9/256, 9/512	2,00155	2,99988	3,95877	0,995722	2,001360	3,009460

Tabela 5.1: Taxa de convergência do erro medido nas normas  $L^2(\Omega)$  e *semi* –  $H^1(\Omega)$ .

A partir desta equação, a medida da taxa de convergência pode ser estimada da seguinte maneira: considerando os parâmetros  $h_1$  e  $h_2$ ,  $h_1 > h_2$ , pertencentes a duas malhas uniformes, tem-se

$$\log_{10} \text{Erro}_1 = \mu \log_{10} h_1 + \log_{10} C$$

e

$$\log_{10} \text{Erro}_2 = \mu \log_{10} h_2 + \log_{10} C.$$

Subtraindo a segunda equação da primeira resulta que

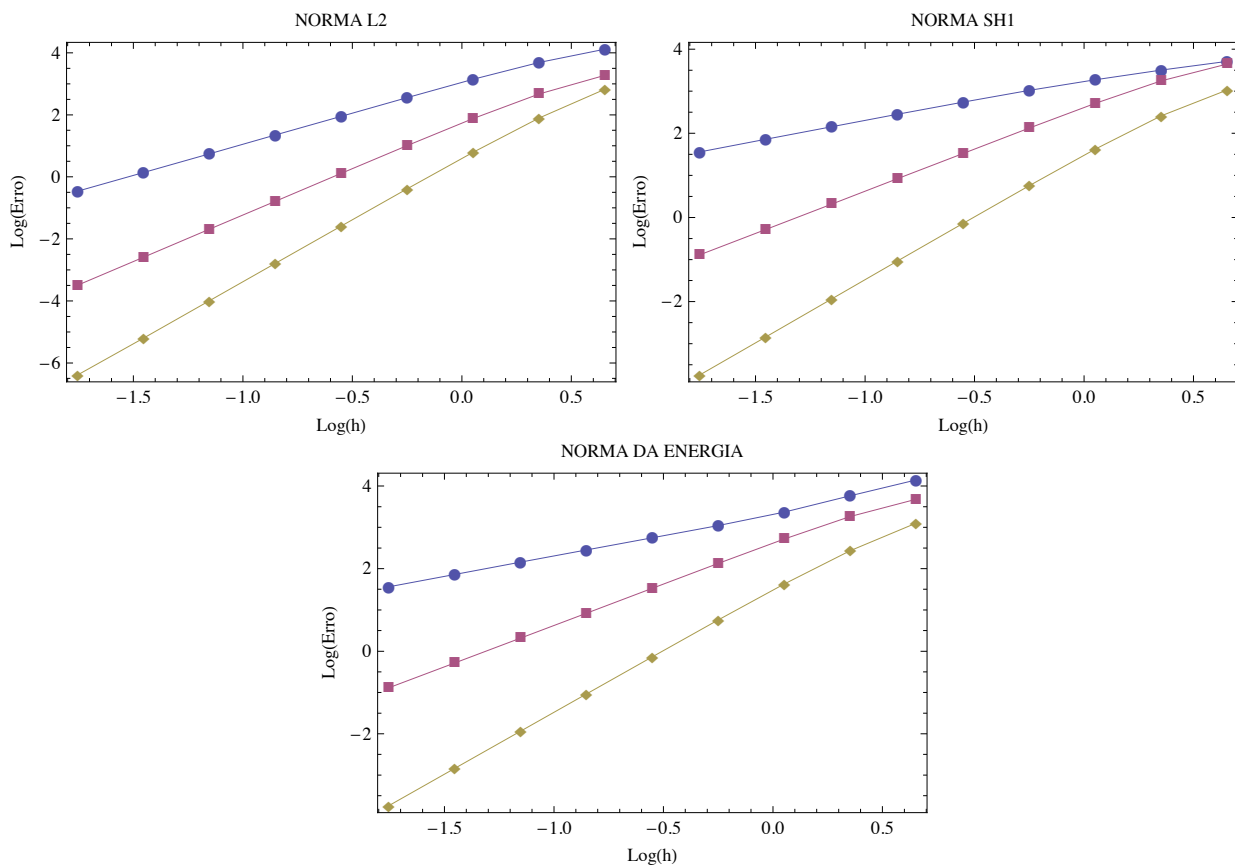
$$\mu = \frac{\log_{10}(\text{Erro}_1/\text{Erro}_2)}{\log_{10}(h_1/h_2)}. \quad (5.2)$$

As Tabelas 5.1 e 5.2 mostram os valores da taxa de convergência  $\mu$  estimada pela fórmula (5.2), tomando valores de  $h$  listados na primeira coluna. De acordo com a literatura [10, 11], para o erro medido na norma  $L^2(\Omega)$  a taxa de convergência deve ser de ordem  $O(h^{p+1})$  enquanto que nas normas  $H^1(\Omega)$ , *semi* –  $H^1(\Omega)$  e energia  $E(\Omega)$  a ordem é de  $O(h^p)$ , concordando com os valores estimados. A Figura 5.5 mostra os gráfico log-log dessas taxas de convergências.

### 5.1.2 Exemplo 2D

O objetivo aqui, é mostrar um problema de valor de contorno, no qual é difícil de ser verificada numericamente a taxa de convergência do erro  $O(h^p)$  esperada. Neste caso, nem sempre o refinamento uniforme  $h$  ou  $p$  leva a um erro numérico tendendo a zero quando  $h$  tende a zero ou quando

Medida da taxa de convergência, $\mu = \frac{\log_{10}(\text{Erro}_1/\text{Erro}_2)}{\log_{10} 2}$						
$h_1, h_2$	Norma $H^1(\Omega)$			Norma energia $E(\Omega)$		
	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$
9/2, 9/4	1,271910	1,39891	2,21611	1,27191	1,39891	2,21611
9/4, 9/8	1,314010	1,80502	2,67647	1,314010	1,80502	2,67647
9/8, 9/16	1,082410	1,96237	2,89346	1,082410	1,96237	2,89346
9/16, 9/32	0,983935	2,00129	2,96641	0,983935	2,00129	2,96641
9/32, 9/64	0,977423	2,00611	2,98873	0,977423	2,00611	2,98873
9/64, 9/128	0,985640	2,00445	2,99593	0,985640	2,00445	2,99593
9/128, 9/256	0,992148	2,00257	2,99954	0,992148	2,00257	2,99954
9/256, 9/512	0,995924	2,00137	3,00946	0,995924	2,00137	3,00946

Tabela 5.2: Taxa de convergência do erro medido nas normas  $H^1(\Omega)$  e  $E(\Omega)$ .Figura 5.5: Gráfico da Taxa de convergência nas normas  $L^2(\Omega)$ ,  $semi-H^1(\Omega)$  e energia  $E(\Omega)$ , com  $p = 1(\circ)$ ,  $p = 2(\square)$  e  $p = 3(\diamond)$ .

aumenta-se a ordem dos polinômios das funções de base.

Considere o seguinte problema de valor de contorno, [2] pg. 198:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & (x, y) \in \Omega \\ u = 0, & (x, y) \in \Gamma_D \\ \partial u / \partial n = 0, & (x, y) \in \Gamma_N \end{cases}$$

em que,  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ ,  $\Gamma_D = \{(x, y), 0 < x < 1 \text{ e } y = 0\}$ ,  $\Gamma_N = \Gamma - \Gamma_D$  e

$$\begin{aligned} f(x, y) = & 10\{(e^{10x^2} - 1)(e^{10y^2} - 1)(x - 1)^2(y - 1)^2y^2 + \\ & 4(e^{10y^2} - 1)(1 - x)x(1 + e^{10x^2}(-10x^2 + 10x - 1))(y - 1)^2y^2 + \\ & (e^{10y^2} - 1)x^2(-1 + e^{10x^2}(200x^4 - 400x^3 + 250x^2 - 60x + 11))(y - 1)^2y^2 + \\ & 40e^{10y^2}(e^{10x^2} - 1)(x - 1)^2x^2y^2(2y^2 - 3y + 1) + (e^{10x^2} - 1)(e^{10y^2} - 1)(x - 1)^2x^2(6y^2 - y + 1) + \\ & 10e^{10y^2}(e^{10x^2} - 1)(x - 1)^2x^2(y - 1)^2y^2(20y^2 + 1)\}. \end{aligned}$$

A solução exata é dada por:

$$u(x, y) = 5x^2y^2(1 - x)^2(e^{10x^2} - 1)(1 - y)^2(e^{10y^2} - 1).$$

### Formulação Variacional

Seja  $V(\Omega)$  o subespaço

$$V(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ em } \Gamma_D\}.$$

Multiplicando a equação diferencial pela função teste  $v \in V(\Omega)$  e aplicando a fórmula de Green, Equação (B.6), tem-se:

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v) dA - \int_{\partial\Omega} (v \nabla u \cdot n) ds = \int_{\Omega} (f v) dA.$$

Pelas condições de contorno, tem-se

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v) dA = \int_{\Omega} (f v) dA.$$

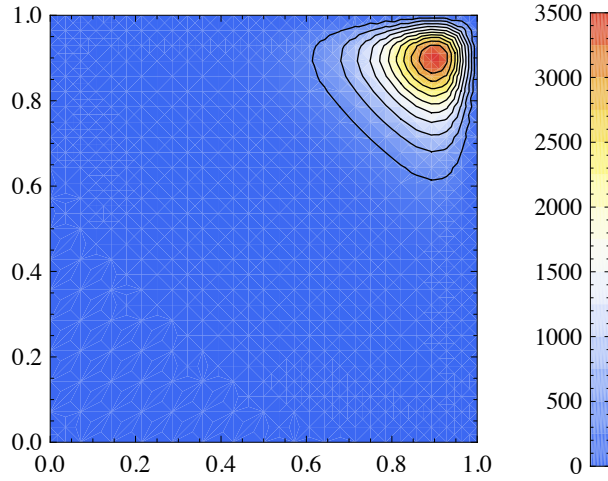


Figura 5.6: Solução exata do problema 2D,  $u = 5x^2y^2(1-x)^2(e^{10x^2} - 1)(1-y)^2(e^{10y^2} - 1)$ .

Portanto, a formulação variacional é dada por: Encontrar  $u \in V(\Omega)$ , tal que

$$B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V(\Omega)$$

em que

$$B(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v) dA, \quad F(v) = \int_{\Omega} (fv) dA.$$

### Solução Numérica

Embora seja suave, a solução exata possui uma região de forte gradiente, como mostra a Figura 5.6. Devido a esse fato, o custo computacional para se obter uma solução com precisão adequada, pode ser muito alto quando trabalha-se com refinamentos uniformes  $hp$ . Nas Tabelas 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6 mostram-se os valores do erro numérico e das taxas de convergência do erro medidos nas normas  $L^2(\Omega)$  e  $H^1(\Omega)$ , onde podem-se constatar os cometários acima. O parâmetro  $p$  representa o grau das funções de base de Lagrange unidimensionais, utilizadas no produto tensorial para construção dos espaços de elementos finitos de Lagrange em 2D.

A Figura 5.7 mostra o gráfico da solução aproximada usando  $p = 5$  e  $h = 1/32$ . Os valores do erro,  $e = u - u_h$ , calculados nas normas  $L^2(\Omega)$  e  $H^1(\Omega)$  são de 0,00087364 e 0,428289, respectivamente, como mostram as Tabelas 5.3 e 5.5.

Valor do erro, $\  \cdot \ _{L^2(\Omega)}$					
$h$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
1/2	485,037	395,791	182,802	68,6695	71,9861
1/4	418,617	120,598	53,681	44,486	20,6810
1/8	145,654	38,2637	24,2332	7,15342	1,46716
1/16	37,8799	16,6034	3,48541	0,455989	0,04451890
1/32	18,9318	3,08534	0,28934	0,0182051	0,00087364

Tabela 5.3: Valor do erro medido na norma em  $L^2(\Omega)$ , considerando  $p = 1, p = 2, p = 3, p = 4$  e  $p = 5$ .

Taxa de convergência, $\  \cdot \ _{L^2(\Omega)}, \mu = \frac{\log_{10}(\text{Erro}_1/\text{Erro}_2)}{\log_{10} 2}$					
$h_1, h_2$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
1/2, 1/4	0,212464	1,71453	1,76815	0,626318	1,79941
1/4, 1/8	1,52309	1,65616	1,14708	2,636650	3,81721
1/8, 1/16	1,94304	1,2045	2,79758	3,971560	5,04246
1/16, 1/32	1,00062	2,42798	3,59050	4,646580	5,67123

Tabela 5.4: Taxas de convergências, do erro, medidas na norma em  $L^2(\Omega)$ , considerando  $p = 1, p = 2, p = 3, p = 4$  e  $p = 5$ .

Valor do erro, $\  \cdot \ _{H^1(\Omega)}$					
$h$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
1/2	7639,31	6987,37	4583,74	3293,40	3265,72
1/4	7464,75	4065,00	3054,25	2600,06	1389,54
1/8	4803,11	2668,33	1989,21	738,082	183,825
1/16	2591,65	1818,28	539,035	91,4074	10,9609
1/32	2059,19	648,77	88,2487	7,24674	0,428289

Tabela 5.5: Valor do erro medido na norma em  $H^1(\Omega)$ , considerando  $p = 1, p = 2, p = 3, p = 4$  e  $p = 5$ .

	Taxa de convergência, $\  \cdot \ _{H^1(\Omega)}, \mu = \frac{\log_{10}(\text{Erro}_1/\text{Erro}_2)}{\log_{10} 2}$				
$h_1, h_2$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
1/2, 1/4	0,033484	0,781494	0,585707	0,341033	1,23279
1/4, 1/8	0,636125	0,610566	0,618623	1,816690	2,9182
1/8, 1/16	0,890098	0,550115	1,883740	3,013400	4,06789
1/16, 1/32	0,331794	1,486800	2,610730	3,656910	4,67764

Tabela 5.6: Taxas de convergências medidas na norma em  $H^1(\Omega)$ , considerando  $p = 1, p = 2, p = 3, p = 4$  e  $p = 5$ .

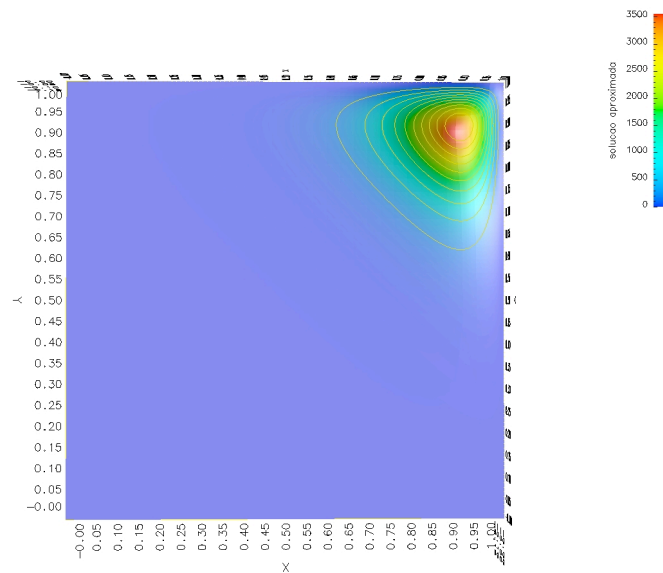


Figura 5.7: Solução aproximada do problema 2D, usando refinamento uniforme com  $p = 5$  e  $h = 1/32$ .



# Capítulo 6

## Adaptatividade *Goal-Oriented*

Neste capítulo, um dos focos principais deste trabalho, considera-se a estimativa do erro *a posteriori* na qual o erro numérico da aproximação por elementos finitos é calculado em termos da quantidade de interesse em vez da norma de energia. Estas quantidades de interesse são caracterizadas por funcionais lineares no espaço de funções que contém as soluções. Também mostram-se os conceitos de adaptatividade "*goal-oriented*", [2, 21], a qual envolve adaptação da malha, procedimento designado para controlar o erro em uma quantidade de interesse específica.

### 6.1 Introdução

O objeto de muitos cálculos por elementos finitos é a determinação de uma quantidade específica dependendo da solução  $u$ , a qual é necessária para uma ou mais decisões particulares. Segundo Oden e Ainsworth [2], o estimador para o erro medido na norma da energia pode ser utilizado para estimar o erro da quantidade de interesse. Para desenvolver um sistema geral, é conveniente considerar uma quantidade de interesse como um funcional linear limitado  $L : V \rightarrow \mathbb{R}$  em um espaço  $V$  de funções de aproximação admissíveis para o problema considerado. O caminho mais simples para estimar a quantidade de interesse  $L$  na solução exata  $u$ , dada a aproximação por elementos finitos  $u_h$ , é tomar  $L(u) \approx L(u_h)$ . A linearidade do funcional  $L$  significa que o erro na aproximação da quantidade de interesse pode ser escrito na forma

$$L(u) - L(u_h) = L(e) , \tag{6.1}$$

em que  $e = u - u_h$  é o erro na aproximação por elementos finitos.

### 6.1.1 Exemplos de funcionais lineares limitados

Alguns exemplos de quantidade de interesse caracterizados em termos de funcionais lineares limitados são descritos a seguir. Na aproximação por elementos finitos estes funcionais mostram-se adequados para expressarem a quantidade de interesse, quando possível, na forma de uma integral sobre o domínio  $\Omega$ . Nesta seção, assume-se  $V = H_0^1(\Omega)$ . Como primeiro exemplo de uma quantidade de interesse pode-se citar a média da solução  $u$  sobre um subdomínio  $\Omega_s \subset \Omega$ . E seu funcional linear limitado correspondente é dado por:

$$L_1(u) = \frac{1}{|\Omega_s|} \int_{\Omega} \kappa_1(x) u(x) dx, \quad (6.2)$$

em que  $\kappa_1(x)$  é igual a 1 se  $x \in \Omega_s$  e 0 caso contrário, e  $|\Omega_s|$  define a área ou volume de  $\Omega_s$ .

**Proposição 6.1** *Sejam  $u \in H_0^1(\Omega)$  e  $\kappa \in L^2(\Omega)$ . Então, o funcional linear  $L(u) = \int_{\Omega} \kappa u dx$  é limitado em  $H_0^1(\Omega)$ .*

**Prova:** Como  $u \in H_0^1(\Omega)$  e  $\kappa \in L^2(\Omega)$ , então, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, tem-se:

$$|L(u)| = \left| \int_{\Omega} \kappa u dx \right| \leq \|\kappa\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

em que  $C = \|\kappa\|_{L^2(\Omega)}$ .

□

Sendo assim,  $L_1(u)$  em (6.2) é um funcional linear limitado. Um outro exemplo aplica-se para funções vetoriais  $u \in (H_0^1(\Omega))^d$  em que o interesse é sobre o fluxo através de  $\partial\Omega_s \subset \partial\Omega$ , em que,  $\Omega_s$  é uma sub-região do domínio. Assim o funcional será dado por:

$$L_2(u) = \int_{\partial\Omega_s} u \cdot n ds = \int_{\Omega_s} \operatorname{div}(u) dx = \int_{\Omega_s} \kappa_2(x) \operatorname{div}(u) dx, \quad (6.3)$$

sendo  $\kappa_2(x) = 1$  se  $x \in \Omega_s$  e zero caso contrário. Este, também é um funcional linear limitado.

Existem outras quantidades de interesse, as quais não podem ser caracterizadas por um funcional linear limitado. É o caso por exemplo do valor de uma função  $u \in H^1(\Omega)$  em um ponto do domínio, cujo funcional é  $L(u) = u(x_0)$ . Na referência [2] mostra-se como esses casos podem ser tratados.

## 6.2 Estimativa para o Erro em Quantidade de Interesse

Seja  $L \in V'$  um funcional linear limitado em  $V$ , representando alguma quantidade de interesse  $L(u)$ . Tem-se por objetivo, estimar o erro  $\varepsilon^L$  na aproximação da quantidade de interesse  $L(u_h)$ , o qual pode ser escrito como

$$\varepsilon^L = L(u) - L(u_h) = L(u - u_h) = L(e) . \quad (6.4)$$

Uma maneira de estimar  $\varepsilon^L$  seria aproximar o erro  $e$  através de (4.24) e daí  $L(e) = \varepsilon^L$ . Mas, resolver o problema (4.24) é tão caro numericamente quanto o problema original. Uma aproximação alternativa para  $L(e)$ , encontrada em [21], é feita através de um problema adjunto, ou problema dual, do problema primal. O problema primal representa o problema a ser resolvido, tal como o problema modelo na forma (4.8).

Como a norma aqui associada ao espaço  $V$  é a norma de energia, por definição, a norma de  $L$  é:

$$\| L \|_{V'} = \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{|L(v)|}{\| v \|_E} . \quad (6.5)$$

De (6.5) segue que  $\sup_{v \in V - \{0\}} \frac{|L(u)|}{\| v \|_E} \geq \frac{|L(e)|}{\| e \|_E}$ , o que implica

$$|L(e)| \leq \| L \|_{V'} \| e \|_E . \quad (6.6)$$

Esta fórmula indica um limite para o erro na quantidade de interesse em termos da norma de energia do erro  $e$ . Pode-se assim, relacionar o erro na quantidade de interesse pelo erro na aproximação por elementos finitos. É claro que (6.6) é de uso limitado em virtude de vários fatores, um dos quais é não sabermos a norma do funcional linear limitado  $L$ .

Seja  $\omega^L \in V$  o representador de Riesz do funcional linear limitado  $L$ , o qual é definido como a solução única do problema:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } \omega^L \in V, \text{ tal que} \\ B(v, \omega^L) = L(v), \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (6.7)$$

Esse problema é chamado *problema adjunto*, ou *problema dual*, do problema primal. O Teorema de Lax-Milgram garante a existência e unicidade de  $\omega^L$  em  $V$  e, além disso,  $\| L \|_{V'} = \| \omega^L \|_E$ . Portanto, de (6.6), tem-se

$$|L(e)| \leq \| \omega^L \|_E \| e \|_E . \quad (6.8)$$

De acordo com Oden, [2], existem dois pontos negativos em relação ao limite (6.8). Primeiro,

é requerido o conhecimento do valor exato de  $\omega^L$ . Segundo, o argumento geral que conduz à (6.8) não traz nenhuma vantagem do fato que  $e$  é o erro na aproximação de Galerkin, e assim, como consequência, a estimativa pode ser um tanto inadequada. Estas deficiências são tratadas nos seguintes resultados:

**Teorema 6.2** *Seja  $u_h \in V_h$  a aproximação por elementos finitos da solução do problema primal:*

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u \in V, \text{ tal que} \\ B(u, v) = F(v), \forall v \in V, \end{cases}$$

em que  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  é uma forma bilinear simétrica, contínua e coerciva e  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  é uma forma linear limitada. Seja  $L : V \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional linear limitado e defina  $\omega^L$  como a solução do problema adjunto,

$$\begin{cases} \text{Encontrar } \omega^L \in V, \text{ tal que} \\ B(v, \omega^L) = L(v), \forall v \in V, \end{cases} \quad (6.9)$$

Então, o erro na aproximação por elementos finitos da quantidade de interesse é dado por

$$L(e) = L(u) - L(u_h) = B(e, e^L), \quad (6.10)$$

sendo  $e = u - u_h$  e  $e^L = \omega^L - \omega_h^L$  os erros na aproximação por elementos finitos de  $u$  e  $\omega^L$ , respectivamente.

**Prova:** Escolhendo  $v = e$  em (6.9), tem-se  $L(e) = B(e, \omega^L)$ .

A propriedade de ortogonalidade de Galerkin implica que para todo  $\omega_h \in V_h$  tem-se  $B(e, \omega_h) = 0$ .

Logo,

$$L(e) = B(e, \omega^L) = B(e, \omega^L) - B(e, \omega_h) = B(e, \omega^L - \omega_h).$$

Seja  $\omega_h$  a aproximação por elementos finitos de  $\omega^L$ , definida pela solução do problema

$$\omega_h \in V_h : B(v_h, \omega_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

Assim, tem-se

$$L(e) = B(e, \omega^L - \omega_h) = B(e, e^L),$$

como desejado.

□

Este Teorema relaciona o erro na quantidade de interesse  $L$  em termos dos erros na aproximação por elementos finitos da solução  $u$  e o representador de  $L$ , medido na norma energia. Disto segue que qualquer dos estimadores para o erro medido na norma energia pode ser usado para estimar o erro na quantidade de interesse. Assim, as conclusões do Teorema 6.2 justificam a atenção considerável dada ao estimador do erro medido na norma energia.

### 6.3 Aproximações e Limites para Erro $L(e)$

Suponha que  $\eta$  seja um estimador *a posteriori* para o erro  $e$  no problema primal medido na norma de energia. Analogamente, dado a aproximação por elementos finitos para o representador de Riesz satisfazendo

$$\omega_h^L \in V_h : B(\omega_h^L, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (6.11)$$

pode-se utilizar a mesma técnica para produzir o estimador *a posteriori* do erro  $e^L = \omega^L - \omega_h^L$

$$\|e^L\|_E \leq \eta^L. \quad (6.12)$$

O Teorema (6.2) mostra então que

$$|L(u) - L(u_h)| = |B(e, e^L)| \leq \|e\|_E \|e^L\|_E = \eta \eta^L. \quad (6.13)$$

De acordo com Oden e Ainsworth [2, 21] a desigualdade de Cauchy-Schwarz usada para deduzir o limite (6.13) da fórmula exata (6.10) geralmente produz um péssimo limite. Assim em vez disto, pode-se recorrer ao Teorema (6.3):

**Teorema 6.3** *Assumindo as definições do Teorema 6.2, e que a forma bilinear  $B$  seja simétrica tem-se:*

$$L(e) = B(e, e^L) = \frac{1}{4} \|e + e^L\|_E^2 - \frac{1}{4} \|e - e^L\|_E^2. \quad (6.14)$$

**Prova:** Pela identidade do paralelogramo tem-se

$$\|e + e^L\|_E^2 = B(e + e^L, e + e^L) = B(e, e) + 2B(e, e^L) + B(e^L, e^L)$$

e

$$\|e - e^L\|_E^2 = B(e - e^L, e - e^L) = B(e, e) - 2B(e, e^L) + B(e^L, e^L).$$

Combinando esses dois resultados, tem-se

$$\|e - e^L\|_E^2 - \|e + e^L\|_E^2 = -4B(e, e^L),$$

o que implica

$$B(e, e^L) = \frac{1}{4} \|e + e^L\|_E^2 - \frac{1}{4} \|e - e^L\|_E^2.$$

□

Agora, utilizando um escalar  $\alpha \in \mathbb{R}$ , uma nova versão de (6.14) é dada por, [2]:

$$B(e, e^L) = \frac{1}{4} \|\alpha e + \frac{1}{\alpha} e^L\|_E^2 - \frac{1}{4} \|\alpha e - \frac{1}{\alpha} e^L\|_E^2, \quad \alpha \neq 0. \quad (6.15)$$

Com os resultados de (6.15) e pelo Teorema 6.2 tem-se uma representação exata do erro na quantidade de interesse,

$$L(e) = L(u) - L(u_h) = \frac{1}{4} \|\alpha e + \frac{1}{\alpha} e^L\|_E^2 - \frac{1}{4} \|\alpha e - \frac{1}{\alpha} e^L\|_E^2. \quad (6.16)$$

A equação (6.16) é o ponto chave para a derivação do limite superior ( $\eta_{upp}^L$ ) e inferior ( $\eta_{low}^L$ ) em  $L(e)$ . Assim, pode-se enunciar o seguinte Lema, de acordo com a referência [2]:

**Lema 6.4** *Seja  $\alpha$  uma constante real fixa,  $\alpha \neq 0$ , e suponha que  $\eta_{low}^+$ ,  $\eta_{upp}^+$ ,  $\eta_{low}^-$  e  $\eta_{upp}^-$  satisfaçam*

$$\eta_{low}^+ \leq \|\alpha e + \frac{1}{\alpha} e^L\|_E \leq \eta_{upp}^+ \quad (6.17)$$

e

$$\eta_{low}^- \leq \|\alpha e - \frac{1}{\alpha} e^L\|_E \leq \eta_{upp}^-. \quad (6.18)$$

Então,

$$\eta_{low}^L = \frac{1}{4} (\eta_{low}^+)^2 - \frac{1}{4} (\eta_{upp}^-)^2 \leq L(u) - L(u_h) \leq \frac{1}{4} (\eta_{upp}^+)^2 - \frac{1}{4} (\eta_{low}^-)^2 = \eta_{upp}^L, \quad (6.19)$$

em que  $\eta_{low}^+$ ,  $\eta_{upp}^+$ ,  $\eta_{low}^-$  e  $\eta_{upp}^-$  denotam os estimadores de erros globais.

Este resultado mostra que o problema reduz-se à derivação de limites superiores e inferiores sobre erros medidos na norma de energia. O valor de  $\alpha$  é escolhido de tal maneira que

$$\|\alpha e\|_E = \|e^L / \alpha\|_E.$$

Assim,

$$\| \alpha e \|_e = \left\| \frac{e^L}{\alpha} \right\|_e = \frac{1}{\alpha} \| e^L \|_E \Rightarrow \alpha^2 = \frac{\| e^L \|_E}{\| e \|_E},$$

ou seja,

$$\alpha = \sqrt{\frac{\| e^L \|_E}{\| e \|_E}}. \quad (6.20)$$

Esta escolha de  $\alpha$  é justificada pelo fato de minimizar as quantidades  $\| \alpha e + \frac{e^L}{\alpha} \|_e^2$  e  $\| \alpha e - \frac{e^L}{\alpha} \|_e^2$ .

Uma outra alternativa para obter uma estimativa de  $L(e)$  na quantidade de interesse segue de (6.10),

$$| L(e) | = | B(e, e^L) | \leq \sum_K | B_K(e, e^L) | \leq \sum_K \| e \|_{E,K} \| e^L \|_{E,K}, \quad (6.21)$$

em que  $B_K(.,.)$  e  $\| \cdot \|_{E,K}$  denotam, respectivamente, a restrição de  $B(.,.)$  e  $\| \cdot \|_E$  sobre um elemento  $K$ . Visto que as estimativas  $\eta$  e  $\eta^L$  de  $\| e \|_E$  e  $\| e^L \|_E$ , respectivamente, podem ser decompostas na norma de energia sobre o elemento  $K$ , define-se

$$\varepsilon^L = \sum_K \varepsilon_K^L \approx \sum_K \eta_K \eta_K^L \quad (6.22)$$

tal que

$$| L(e) | \leq \sum_K \| e \|_{E,K} \| e^L \|_{E,K} \approx \varepsilon^L. \quad (6.23)$$

em que  $\varepsilon^L$  é uma estimativa do erro  $L(e)$  na quantidade de interesse.

## 6.4 Controle Adaptativo do Erro $L(e)$ : Refinamento *Goal-Oriented*

Tradicionalmente, os algoritmos de refinamento adaptativo são construídos a partir do controle do erro medido na norma de energia. Controlando o erro global tem-se um efeito benéfico na exatidão dos erros locais e do erros em quantidades de interesse. No entanto, se tratarmos somente certas quantidades específicas, a aproximação por adaptatividade baseada no erro global pode resultar em uma resolução adaptativa extensiva e desnecessária, de características da solução que têm pouca relação na precisão da quantidade de interesse, [2]. A disponibilidade de estimativas computáveis para erros na quantidade específica de interesse, torna-se possível construir os esquemas de refinamento adaptativos designados a atingir o erro diretamente na quantidade de interesse, [21]. A adaptatividade *goal-oriented* resulta na redução do custo computacional, visto que somente as

características da solução que afetam fortemente a quantidade de interesse são resolvidas. Segue abaixo uma estratégia do refinamento adaptativo *goal-oriented* designado a produzir uma aproximação da quantidade de interesse  $L$  para um erro relativo de tolerância  $\rho_{tol}$ , ([2], [21]):

1. Construir uma partição inicial  $T_h$  do domínio  $\Omega$  e um subespaço de elementos finitos inicial  $V_h$ ;
2. Calcular a aproximação de elementos finitos  $u_h \in V_h$  e aproximar a quantidade de interesse por  $L(u_h)$ ;
3. Calcular os limitantes superiores e inferiores do erro na quantidade de interesse ;
4. Observar se o erro relativo é menor do que a tolerância  $\rho_{tol}$  dada. O processo iterativo termina se a tolerância é alcançada;
5. Se a tolerância não for satisfeita a malha dos elementos é adaptada, para reduzir os efeitos das fontes de erro, e retornar ao passo 2.

A malha será adaptada sempre que o estimador para o erro relativo exceder a tolerância  $\rho_{tol}$ , isto é,

$$e_{rel} = \frac{|L(e)|}{|L(u)|} \approx \frac{|\mathcal{E}^L|}{|L(u_h)|} \geq \rho_{tol}, \quad (6.24)$$

em que  $\mathcal{E}^L$  uma estimativa do erro  $L(e)$  na quantidade de interesse, equação (6.23). O objetivo na adaptação de malhas é refinar os elementos que mais contribuem para a quantidade  $L(e)$ . Isto é possível pela decomposição da estimativa global  $\mathcal{E}^L$  em contribuições dos elementos individuais, equação (6.22), em que

$$\mathcal{E}^L = \sum_K \varepsilon_K^L = \sum_K \eta_K \eta_K^L. \quad (6.25)$$

Sendo  $\eta_K$  e  $\eta_K^L$  os respectivos indicadores locais dos erros  $e$  e  $e^L$  medidos na norma de energia sobre o elemento  $K$ . De acordo com [2], um elemento  $K$  da malha será refinado se

$$\varepsilon_K^L \geq \rho_{adp} \max_j(\varepsilon_j^L), \quad (6.26)$$

em que  $\rho_{adp}$  é um parâmetro definido entre 0 e 1. Ou ainda, pode-se utilizar o seguinte critério: o elemento  $K$  será refinado se

$$\varepsilon_K^L \geq 0,3 \max_j(\varepsilon_j^L). \quad (6.27)$$



## 6.5 Exemplo

O objetivo nesse exemplo é mostrar numericamente que a ordem da taxa de convergência do erro, medida pelo funcional linear limitado, é igual a duas vezes a ordem de convergência medida na norma da energia, [2, 16]. Para isto, seguem-se todos os passos do Teorema 6.2. Na resolução numérica dos problemas, primal e dual, utilizam-se os espaços de elementos finitos de Lagrange em 1D, das funções lineares e quadráticas.

### 6.5.1 Construção do Problema Dual

Considere o problema primal:

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = x, \forall x \in \Omega = (0, 1), \\ u(0) = 0 \text{ e } u(1) = 0. \end{cases}$$

A formulação variacional deste problema consiste em encontrar  $u \in H_0^1(\Omega)$ , tal que

$$\begin{cases} \int_0^1 \{u'(x)v'(x) + u(x)v(x)\} dx = \int_0^1 xv(x) dx, \\ \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Usando as fórmulas bilinear e linear, tem-se,

$$B(u, v) = \int_0^1 \{u'(x)v'(x) + u(x)v(x)\} dx \quad \text{e} \quad F(v) = \int_0^1 xv(x) dx. \quad (6.28)$$

Desta maneira o problema primal é dado por: Encontrar  $u \in H_0^1(\Omega)$ , tal que

$$B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

O funcional linear limitado  $L(u)$  representará a média da solução, sobre o subdomínio  $\Omega_s = [1/2, 3/4] \subset \Omega$ , ou seja,

$$L(u) = \frac{1}{|\Omega_s|} \int_0^1 \kappa(x)u(x) dx, \quad (6.29)$$

em que

$$\kappa(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in \Omega_s \\ 0 \text{ se } x \notin \Omega_s \end{cases} \quad (6.30)$$

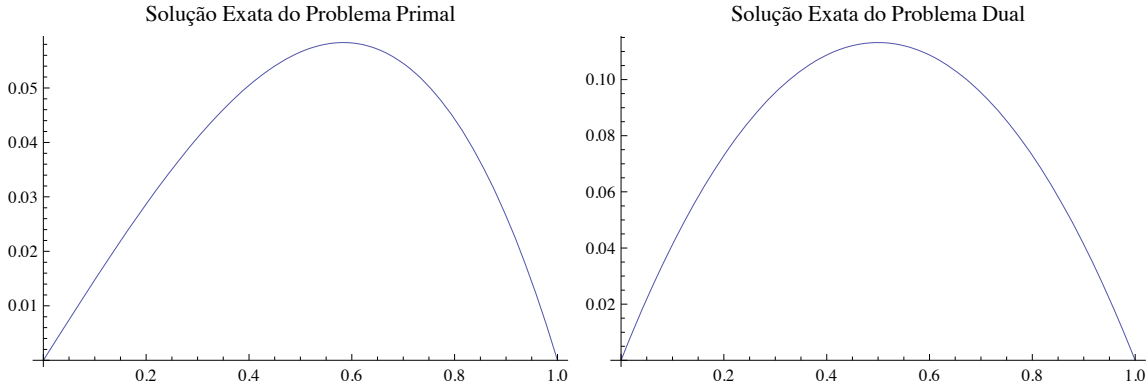


Figura 6.1: Solução exata do problema primal e dual.

com  $\kappa \in L^2(\Omega)$ . Sendo assim, o problema dual é dado por : Encontrar  $\omega$ , tal que

$$\begin{cases} -\omega''(x) + \omega(x) = \frac{1}{|\Omega_s|} \kappa(x), \forall x \in \Omega \\ \omega(0) = 0 \text{ e } \omega(1) = 0 \end{cases},$$

sendo  $\kappa$  dado pela equação (6.30). A fomulação variacional do problema dual reduz-se a encontrar  $\omega \in H_0^1(\Omega)$ , tal que

$$\int_0^1 \{v'(x)\omega'(x) + v(x)\omega(x)\} dx = \frac{1}{|\Omega_s|} \int_0^1 \kappa(x)v(x) dx, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ou seja, encontrar  $\omega \in H_0^1(\Omega)$ , tal que

$$B(v, \omega) = L(v), \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

## 6.5.2 Solução Numérica

A solução exata do problema primal e do problema dual, Figura 6.1, são dadas por, respectivamente:

$$u(x) = x - \frac{\sinh(x)}{\sinh(1)}$$

e

$$\omega(x) = 1 - \frac{e^x + e^{1-x}}{1 + e}.$$

O valor exato do funcional linear limitado é  $L(u) = 0,0563916$ . As Figuras 6.2 e 6.3 mostram os gráficos das soluções aproximadas do problemas primal e dual. Os parâmetros  $p$  e  $h$  representam

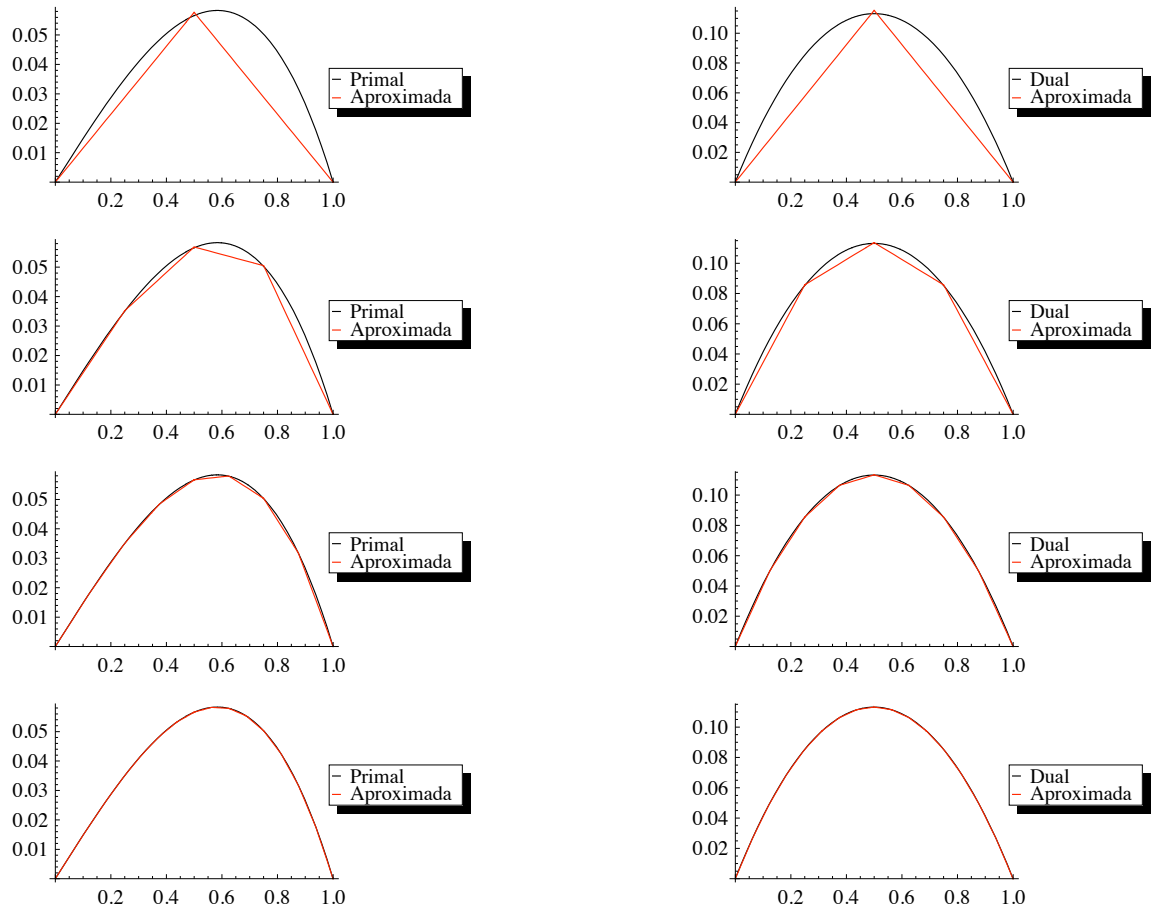


Figura 6.2: Solução aproximada do problema Primal e Dual, com  $p = 1$ , para  $h = 1/2$ ,  $h = 1/4$ ,  $h = 1/8$ ,  $h = 1/16$ , respectivamente.

o grau da função polinomial e o espaçamento de cada partição do domínio, respectivamente. Analogamente, as Tabelas 6.1 e 6.2 mostram os valores dos erros, medidos na norma da energia, na aproximação da solução e suas respectivas taxas de convergência.

Os valores dos erros para o problema primal e dual, respectivamente, são dados por:

$$\| e \|_E = \| u - u_h \|_E = [B(u - u_h, u - u_h)]^{1/2}$$

e

$$\| e^L \|_E = \| \omega - \omega_h \|_E = [B(\omega - \omega_h, \omega - \omega_h)]^{1/2}.$$

Portanto, através do Teorema 3.1, o erro em aproximar a quantidade de interesse pelo funcional linear limitado é dado por:

$$\mathcal{E}^L = L(e) = L(u - u_h) = B(e, e^L).$$

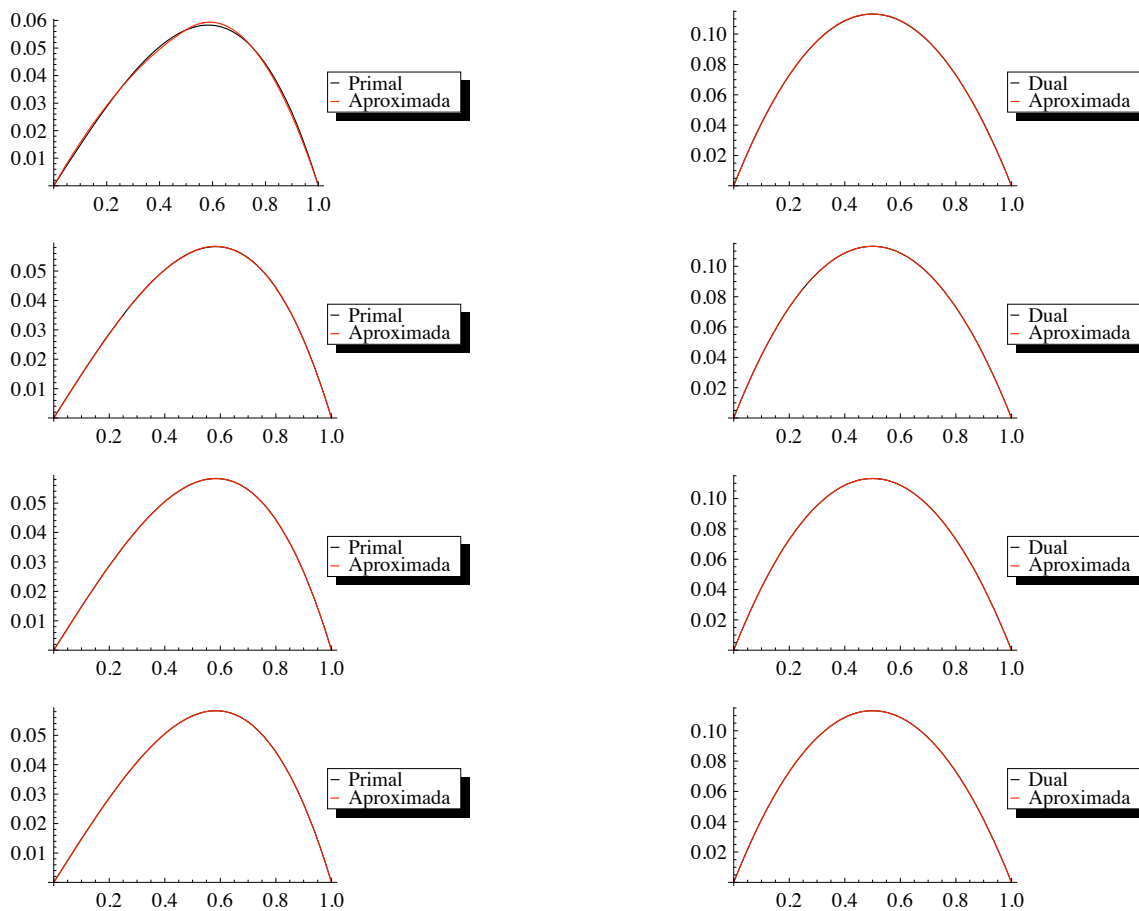


Figura 6.3: Solução aproximada do problema Primal e Dual, com  $p = 2$ , para  $h = 1/2$ ,  $h = 1/4$ ,  $h = 1/8$ ,  $h = 1/16$ , respectivamente.

Problema primal				
	Valor do erro		Taxa de convergência	
$h$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 1$	$p = 2$
1/2	0,07664840	0,00935090	-	-
1/4	0,03895630	0,00234740	0,97639902	1,99404052
1/8	0,01955600	0,00058748	0,99124535	1,99846433
1/16	0,00978767	0,00014690	0,99857639	1,99961450
1/32	0,00489504	0,00003672	0,99964481	1,99990180
1/64	0,00244767	0,00000918	0,99991158	1,99997879

Tabela 6.1: Valor do erro, medido na norma da energia e taxa de convergência para o problema primal.

Problema dual				
	Valor do erro		Taxa de convergência	
$h$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 1$	$p = 2$
1/2	0,13443700	0,00213359	-	-
1/4	0,06686100	0,00059262	1,00769	1,8481
1/8	0,03338690	0,00011681	1,00188	1,96607
1/16	0,01668810	0,00003813	1,00046	1,99174
1/32	0,00834336	0,00000957	1,00012	1,99464
1/64	0,00417159	0,00000239	1,00003	2,00154

Tabela 6.2: Valor do erro, medido na norma da energia e taxa de convergência para o problema dual.

Funcional linear limitado				
	Valor do erro		Taxa de convergência	
$h$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 1$	$p = 2$
1/2	0,0090366900	$2,2761 \times 10^{-6}$	-	-
1/4	0,0022351900	$1,7560 \times 10^{-7}$	2,0153969610	3,6961909778
1/8	0,0005573440	$1,1504 \times 10^{-8}$	2,0037575135	3,9321562800
1/16	0,0001392460	$7,2726 \times 10^{-10}$	2,0009321676	3,9834657714
1/32	0,0000348058	$4,5589 \times 10^{-11}$	2,0002362447	3,9957182832
1/64	0,0000087011	$2,6099 \times 10^{-12}$	2,0000580309	4,1266011426

Tabela 6.3: Valor do erro e taxa de convergência no funcional linear limitado  $L(u)$ , com  $p = 1$  e  $p = 2$ .

A Tabela 6.3 mostra o valor do erro,  $\varepsilon^L$ , e sua taxa de convergência em  $p = 1$  e  $p = 2$ , a qual está de acordo com as referências citadas. A Figura 6.4 mostra o gráfico log-log dessa taxa de convergência.

## 6.6 Problema Dual na Aproximação do Fluxo

Nessa seção considera-se um exemplo bidimensional para avaliar o comportamento da solução do problema dual, quando a quantidade de interesse representa o fluxo saindo por uma região do contorno  $\partial\Omega$ . Onde conclue-se que a solução do problema dual apresenta singularidades na região de interesse, tornando-se este um processo caro na estimativa do erro na aproximação da quantidade de interesse. Na resolução numérica do problema utilizam-se os espaços de elementos finitos de Lagrange em 2D, associados aos elementos retangulares de Lagrange de grau  $p = 6$ .

Considera-se o problema primal dado pelo problema

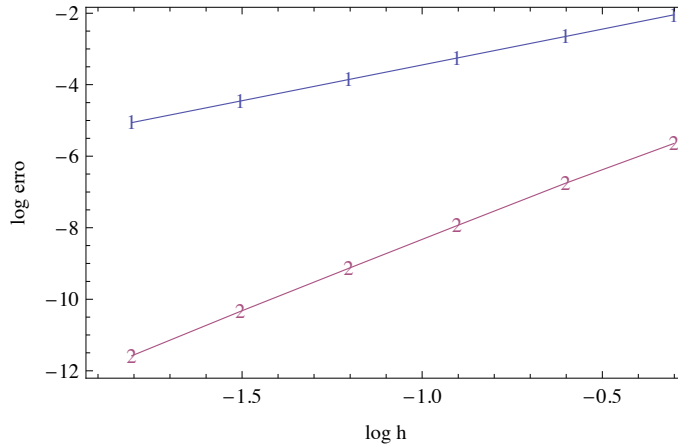


Figura 6.4: Convergência do erro no funcional linear limitado  $L(u)$ , usando funções de Lagrange de grau  $p = 1$  (1) e  $p = 2$  (2).

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = g_D & \text{em } \Gamma_D \\ u = g_N & \text{em } \Gamma_N \end{cases}$$

com  $g_D \in L^2(\Gamma_D)$  e  $g_N \in L^2(\Gamma_N)$ , sendo  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ ,  $\Gamma_D = \{(0, y) \cup (1, y), y \in (0, 1)\}$  e  $\Gamma_N = \partial\Omega - \Gamma_D$ . A quantidade de interesse representa o valor do fluxo saindo pela fronteira  $\Gamma_0 = \{(1, y), y \in (0, 1)\} \subset \Gamma_D$ ,

$$L(v) = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial v}{\partial n} ds.$$

O problema dual é dado por

$$\begin{cases} -\Delta \omega = 0 & \text{em } \Omega \\ \omega = 1 & \text{em } \Gamma_0 \\ \omega = 0 & \text{em } \Gamma_D - \Gamma_0 \\ \partial \omega / \partial n = 0 & \text{em } \Gamma_N. \end{cases}$$

### 6.6.1 Resultados Numéricos e Comentários

As Figuras 6.5 e 6.6 mostram as soluções aproximadas do problema dual, considerando um espaço de aproximação formado por funções polinomiais biquadráticas, com o domínio particionado uniformemente nos eixos  $x$  e  $y$ . Denotam-se por  $N_x$  e  $N_y$  os números de divisões dos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Na Figura 6.5 mostram-se as soluções aproximadas do problema dual considerando  $N_x = N_y = 4$  (gráfico à esquerda) e  $N_x = N_y = 8$  (gráfico à direita). Analogamente, na Figura 6.6 mostram-

se as soluções aproximadas do problema dual, considerando  $N_x = N_y = 16$  (gráfico à esquerda),  $N_x = N_y = 32$  (gráfico à direita).

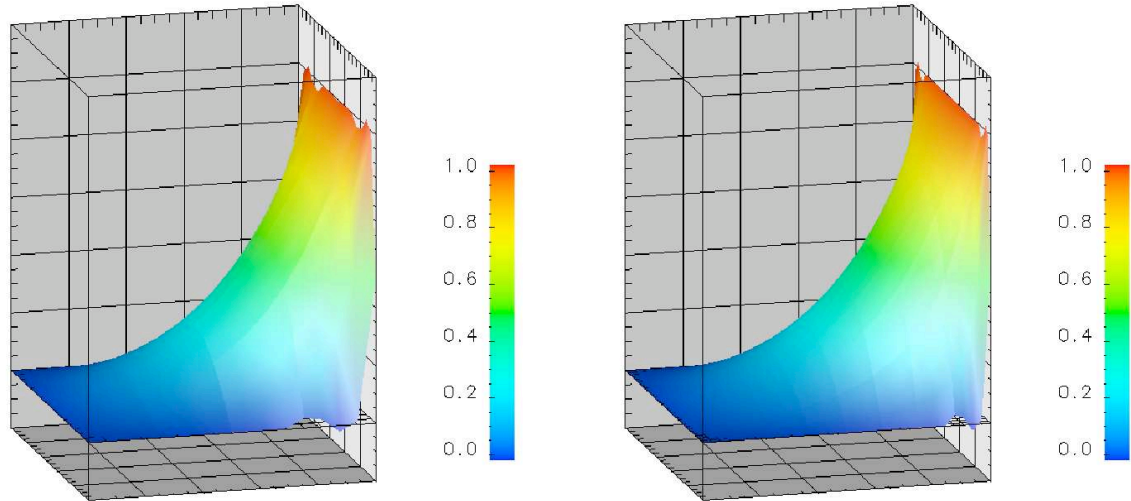


Figura 6.5: Solução aproximada do problema dual considerando  $N_x = N_y = 4$  (à esquerda) e  $N_x = N_y = 8$  (à direita) .

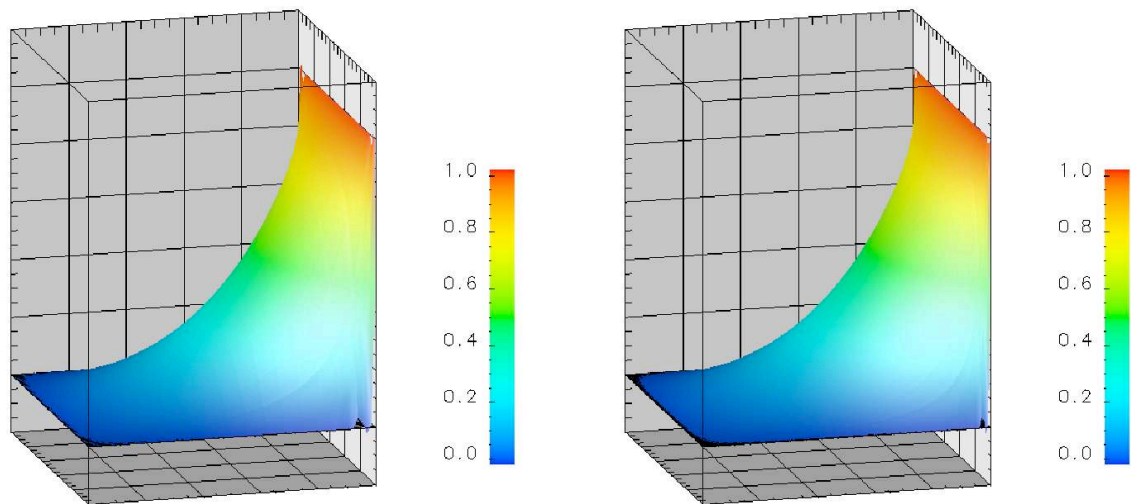


Figura 6.6: Solução aproximada do problema dual considerando  $N_x = N_y = 16$  (à esquerda) e  $N_x = N_y = 32$  (à direita).

Observa-se que a solução do problema dual sempre apresenta singularidades na região de interesse. Desta forma, conclue-se que o método de estimativa para erro em quantidade de interesse através da adaptatividade *goal oriented* torna-se um processo caro e não vantajoso para esse caso.



# Capítulo 7

## O Método da Função de Extração

Neste capítulo apresenta-se um método, visto em [3, 4, 5], para o pós-processamento da solução, de elementos finitos, com objetivo de obter uma alta precisão da aproximação de certas quantidades de interesse  $L(u)$ . A idéia consiste em utilizar um funcional auxiliar  $\tilde{L}$ , coincidindo com  $L$  na solução do problema, que permita melhor taxa de convergência. Apresentam-se exemplos da aplicação do método em problemas bidimensionais de escoamento monofásico de fluidos em meios porosos, em que a quantidade de interesse representa o fluxo sobre uma sub-região do contorno.

### 7.1 Forma Generalizada para $L(u)$

Como no Capítulo 6, denota-se por  $L(u)$  a quantidade de interesse que se deseja determinar sobre a solução  $u$  do problema em questão.

**Definição 7.1 (Forma Generalizada para L)** *Um funcional linear limitado  $\tilde{L}$  é uma forma generalizada de  $L$  se*

$$L(u) = \tilde{L}(u)$$

em que  $u$  é a solução do problema de valor de contorno (4.1)-(4.2).

Quando  $\tilde{L}(u)$  tiver a forma

$$\tilde{L}(u) = \int_{\Omega} T(u)\xi \, dA + R, \quad (7.1)$$

essa é conhecida como a expressão de extração para  $L(u)$ , a função  $\xi$  é chamada de *função de extração* e  $R$  de *termo de carga*.  $T$  é uma transformação linear e pode, por exemplo, ter a forma  $T(u) = u$  ou  $T(u) = \nabla u$ , de acordo com a quantidade de interesse a ser tratada. Nas próximas seções são apresentados alguns exemplos relacionados à escolha de  $\tilde{L}$ .

De acordo com [3], sugere-se um método de aproximação para  $\tilde{L}(u)$ . Se  $u_h$  é uma aproximação de  $u$  pelo método dos elementos finitos da solução do problema, então, pode-se aproximar  $\tilde{L}(u)$  por  $\tilde{L}(u_h)$ . A diferença entre  $\tilde{L}(u)$  e  $\tilde{L}(u_h)$  é dada por

$$e = \tilde{L}(u) - \tilde{L}(u_h) \quad (7.2)$$

A escolha de  $\tilde{L}$  afeta a magnitude dessa diferença. Por exemplo, na expressão de extração (7.1), uma boa escolha da  $\xi$  é uma característica importante de uma implementação bem sucedida de  $\tilde{L}(u_h)$ .

### 7.1.1 Exemplo

Considere o problema modelo de valor de contorno:

$$-\Delta u = f \quad \text{em } \Omega \quad (7.3)$$

sujeito à condição de contorno de Dirichlet

$$u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \quad (7.4)$$

em que  $f \in L^2(\Omega)$ . Suponha uma quantidade de interesse  $L(u)$  e uma forma generalizada na forma de extração em que  $T(u) = u$ . Nesse exemplo mostra-se a necessidade de termos uma função  $\xi$  suave na precisão da aproximação  $\tilde{L}(u_h)$ . Considere um modelo de elementos finitos para o problema modelo (7.3)-(7.4), em que a solução  $u_h$  satisfaz

$$B(u_h, v) = F(v), \quad v \in V, \quad (7.5)$$

sendo  $V$  o espaço de elementos finitos de funções admissíveis,  $B(\cdot, \cdot)$  dada por

$$B(u, u) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla u) dA, \quad \forall u \in V$$

e  $F(\cdot)$  por

$$F(v) = \int_{\Omega} (f v) dA, \quad \forall v \in V.$$

Pela propriedade da ortogonalidade do erro, tem-se

$$B(u - u_h, v) = \int_{\Omega} (\nabla(u - u_h) \cdot \nabla v) dA = 0 \quad (7.6)$$

para todo  $v \in V$ . A norma da energia proveniente do produto interno  $B(\cdot, \cdot)$  é dada por

$$\|u\|_B = (E(u))^{1/2},$$

com

$$E(u) = \int_{\Omega} (\nabla(u))^2 dA.$$

Desta forma, pelo fato de  $\tilde{u}$  ser a solução por elementos finitos, a estimativa do erro por elementos finitos pode ser escrita como

$$E(u - u_h) \leq \min_{v^* \in V} E(u - v^*). \quad (7.7)$$

Seja  $\psi$  uma função auxiliar tal que

$$\begin{cases} \Delta\psi &= -\xi \text{ em } \Omega, \\ \psi &= 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7.8)$$

Multiplicando por  $w$  e integrando por partes, tem-se

$$\int_{\Omega} (\nabla\psi \cdot \nabla w) dA = \int_{\Omega} (\xi w) dA \quad (7.9)$$

para toda função  $w$  satisfazendo as condições de contorno em (7.4) e com  $E(w)$  a norma energia associada ao problema auxiliar. Tomando  $w = u - u_h$  em (7.9), chega-se na seguinte estimativa para o erro:

$$\begin{aligned} e &= \tilde{L}(u) - \tilde{L}(u_h) = \int_{\Omega} (\xi w) dA \\ &= \int_{\Omega} (\nabla\psi \cdot \nabla w) dA = \int_{\Omega} (\nabla\psi \cdot \nabla(u - u_h)) dA. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Subtraindo-se (7.6) de (7.10), resulta que

$$\tilde{L}(u) - \tilde{L}(u_h) = \int_{\Omega} ((\nabla(u - u_h) \cdot \nabla(\psi - v)) dA,$$

para todo  $v \in V$ . Assim, tomando o mínimo sobre todo  $v \in V$  e por (7.7), tem-se

$$\begin{aligned} |\tilde{L}(u) - \tilde{L}(u_h)| &\leq \min_{v \in V} \left| \int_{\Omega} ((\nabla(u - u_h) \cdot \nabla(\psi - v)) dA \right| \\ &\leq \min_{v \in V} \left\{ E(u - u_h)^{1/2} E(\psi - v)^{1/2} \right\} \\ &= \min_{v^* \in V} \left\{ E(u - v^*)^{1/2} \right\} \min_{v \in V} \left\{ E(\psi - v)^{1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Portanto, pode-se dizer que o erro em  $\tilde{L}(u)$  é limitado pelo produto entre a norma energia da dife-

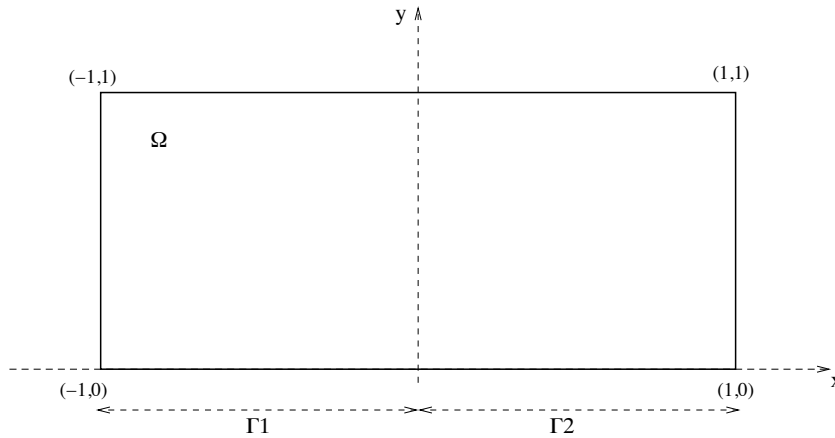


Figura 7.1: Representação do domínio computacional  $\Omega$ .

rença de  $u$  pela sua melhor aproximação em  $V$  e a norma energia da diferença de  $\psi$  e sua melhor aproximação em  $V$ . Isso mostra a importância da função de extração ser suave, pois uma função  $\xi$  suave garante uma função  $\psi$  suave e essa será melhor aproximada pelas funções em  $V$ , reduzindo o erro em  $\tilde{L}(u)$ .

## 7.2 Caso de Interesse (fluxo monofásico em meios porosos)

Nesta seção mostra-se como construir uma função de extração  $\xi$  e assim determinar uma expressão para as quantidades de interesse  $L(u)$ , representadas pelo valor do fluxo de fluido saindo por uma sub-região  $\partial\Omega_s$  do contorno. Para isso, será considerado um problema de valor de contorno em duas dimensões.

### 7.2.1 Formulação do Problema

O modelo matemático a ser tratado é o escoamento monofásico de fluidos incompressíveis e de regime de fluxo permanente em meios porosos, tendo como objetivo aplicações na simulação de reservatórios de petróleo. No regime permanente de fluxo significa que o meio poroso  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , Figura 7.1, recebe uma alimentação externa contínua de tal maneira que o fluido produzido através do poço é repostado simultaneamente através da fronteira externa. Devido a essa alimentação, a vazão permanece constante no espaço e no tempo. Devido à alimentação externa, a pressão também não varia com o tempo.

A equação diferencial do modelo é dada por

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \text{ em } \Omega \\ \vec{v} = -\frac{1}{\mu} \overleftrightarrow{K} \nabla u \end{cases} \quad (7.12)$$

- Sendo  $\overleftrightarrow{K}$  o tensor das permeabilidades

$$\overleftrightarrow{K} = \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix},$$

em que,  $k_x$  e  $k_y$  são as permeabilidades nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, com  $k_x$  e  $k_y > 0$  e constantes;

- $\mu > 0$  é a viscosidade do fluido,  $\mu$  constante.

Nos contornos do domínio pode-se aplicar condições de contorno tipo Dirichlet ou tipo Neumann. A condição de contorno tipo Dirichlet define o valor da pressão do fluido nos limites do reservatório e a condição de Neumann define o valor do fluxo (vazão) que entra ou sai do reservatório através de seus limites.

Quando o meio poroso for isotrópico, isto é  $k = k_x = k_y$ , o problema (7.12) é representado pela equação de Laplace

$$-\Delta u = 0. \quad (7.13)$$

A partir da teoria apresentada nas seções anteriores, considera-se como quantidade de interesse o fluxo total que sai por uma região do contorno,

$$L(u) = - \int_{\partial\Omega_s} \left( \frac{1}{\mu} (\overleftrightarrow{K} \nabla u) \cdot \vec{n} \right) ds,$$

em que  $\vec{n}$  é a normal externa a  $\partial\Omega_s$ .

### 7.2.2 Formas Generalizadas $\tilde{L}(u)$

Como demonstração prática da construção da forma generalizada  $\tilde{L}(u)$ , considera-se o problema (7.12) no caso em que o meio poroso é isotrópico. Dessa forma, o problema é dado por:

$$-\Delta u = 0, \quad (7.14)$$

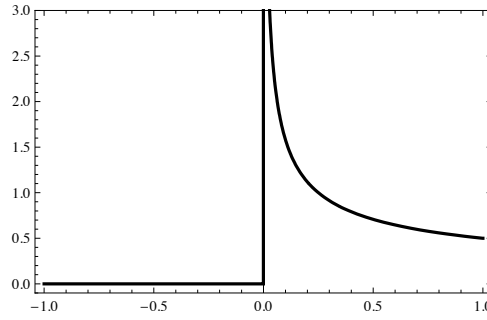


Figura 7.2: Gráfico da derivada parcial  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, 0)$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

com a condição de contorno

$$\begin{cases} u = 0 & \text{em } \Gamma_2 = (0, 1] \times \{0\} \\ \nabla u \cdot \vec{n} = 0 & \text{em } \Gamma_1 = [-1, 0] \times \{0\} \\ u = f & \text{em } \partial\Omega - \{\Gamma_1 \cup \Gamma_2\} \end{cases} \quad (7.15)$$

em que  $f = r^{1/2} \sin(\theta/2)$ , com  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $\theta = \arctan(y/x)$ , e  $\vec{n}$  é a normal unitária externa à  $\Gamma_2$ . Esse problema possui solução analítica

$$u = r^{1/2} \sin(\theta/2). \quad (7.16)$$

A Figura 7.2 mostra o gráfico da derivada direcional  $\partial u / \partial \vec{n}$ ,  $\vec{n} = \{0, -1\}$ , na região  $[-1, 1] \times \{0\}$ , a qual apresenta uma singularidade quando  $x$  se aproxima de zero pela direida,  $x \rightarrow 0^+$ .

A quantidade de interesse é escrita como:

$$L(u) = - \int_{\partial\Omega_s} (\nabla u \cdot \vec{n}) ds,$$

em que  $\partial\Omega_s \subset \Gamma_2$  e  $\vec{n}$  é a normal externa a  $\partial\Omega_s$ . Consideram-se três modelos para a forma generalizada  $\tilde{L}(u)$  da quantidade de interesse.

### Modelo 1:

Seja  $\varphi$  uma *função geradora*, suave em  $\Omega$ , que satisfaça

$$\begin{cases} \varphi = -1 & \text{em } \partial\Omega_s \subset \Gamma_2 \\ \varphi = 0 & \text{em } \partial\Omega - \partial\Omega_s. \end{cases} \quad (7.17)$$

Pela Fórmula de Green, Apêndice B.6, tem-se

$$\int_{\partial\Omega} (\varphi \nabla u \cdot \vec{n}) ds = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\varphi \nabla u) dA = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi) dA + \int_{\Omega} (\varphi \Delta u) dA.$$

Uma vez que  $\Delta u = 0$  e pelas condições em  $\varphi$ , resulta que

$$\int_{\partial\Omega_s} (-\nabla u \cdot \vec{n}) ds = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi) dA.$$

Ou seja, definindo

$$\tilde{L}(u) = - \int_{\partial\Omega_s} (\nabla u \cdot \vec{n}) ds = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi) dA, \quad (7.18)$$

tem-se que  $\tilde{L}(u)$  é uma forma generalizada para  $L(u)$ .

A fórmula (7.18) está na forma de extração (7.1), com  $T(u) = \nabla u$ , função de extração  $\xi = \nabla \varphi$  e termo de carga nulo,  $R = 0$ . Sendo assim, a expressão de extração nos leva a aproximar  $\tilde{L}(u)$  por

$$\tilde{L}(u_h) = \int_{\Omega} (\nabla u_h \cdot \nabla \varphi) dA$$

em que  $u_h$  é uma aproximação por elementos finitos de  $u$ . A precisão da aproximação  $\tilde{L}(u_h)$  depende da suavidade da função geradora  $\varphi$ .

Existem muitas maneiras de se construir uma função geradora suave que satisfaça a condição (7.17). Pode-se, por exemplo, construir uma função  $\varphi$  com essas propriedades utilizando o método dos elementos finitos para resolver o seguinte problema:

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 & \text{em } \Omega \\ \varphi = g(s) & \text{em } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ \varphi = 0 & \text{em } \partial\Omega - \{\Gamma_1 \cup \Gamma_2\} \end{cases} \quad (7.19)$$

sendo  $g$  uma função suave em  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , tal que  $g(s) = -1$  em  $s \in \partial\Omega_s$  e  $g$  tende, suavemente, a zero para  $s \in \{\Gamma_1 \cup \Gamma_2\} - \partial\Omega_s$ . Por exemplo,  $\partial\Omega_s = [x_1, x_2] \times \{0\}$ , pode escrever  $g$  como:

$$g(s) = \begin{cases} -\frac{(\varepsilon + 2x_1 - 2s)(\varepsilon - x_1 + s)^2}{\varepsilon^3} & \text{se } x_1 - \varepsilon \leq s < x_1 \\ -1 & \text{se } x_1 \leq s \leq x_2 \\ -\frac{(\varepsilon + x_2 - s)^2(\varepsilon - 2x_2 + 2s)}{\varepsilon^3} & \text{se } x_2 < s \leq x_2 + \varepsilon. \end{cases} \quad (7.20)$$

A Figura 7.3 mostra o gráfico para a função  $g(s)$ , com  $\partial\Omega_s = [0, 1/2] \times \{0\}$  e  $\varepsilon = 0,25$ .

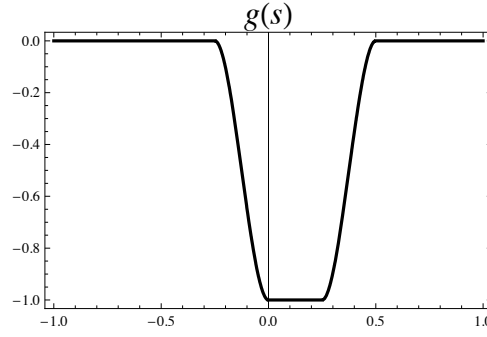


Figura 7.3: Exemplo de uma função  $g(s)$  para o problema auxiliar.

## Modelo 2

Seja  $\varphi$  uma função geradora, suave em  $\Omega$ , que satisfaça

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \\ \varphi = -1 \text{ em } \partial\Omega_s \subset \Gamma_2 \\ \varphi = 0 \text{ em } \Gamma_2 - \partial\Omega_s \end{cases} \quad (7.21)$$

De forma análoga ao Modelo 1, tem-se

$$\int_{\partial\Omega} (\varphi \nabla u \cdot \vec{n}) ds = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi) dA.$$

Assim,

$$\int_{\Gamma_1} (\varphi \nabla u \cdot \vec{n}) ds + \int_{\Gamma_2} (\varphi \nabla u \cdot \vec{n}) ds + \int_{\partial\Omega - \{\Gamma_1 \cup \Gamma_2\}} (\varphi \nabla u \cdot \vec{n}) ds = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi) dA.$$

Pelas condições em  $\varphi$  e  $u$ , Equações (7.21) e (7.15) respectivamente, resulta que

$$\int_{\partial\Omega_s} (-\nabla u \cdot \vec{n}) ds = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi) dA - \int_{\partial\Omega - \{\Gamma_1 \cup \Gamma_2\}} (\varphi \nabla u \cdot \vec{n}) ds.$$

Ou seja, definindo

$$\tilde{L}(u) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi) dA - \int_{\partial\Omega - \{\Gamma_1 \cup \Gamma_2\}} (\varphi \nabla u \cdot \vec{n}) ds \quad (7.22)$$

tem-se que  $\tilde{L}(u)$  é uma forma generalizada para  $L(u)$ , que está na forma de extração (7.1), com



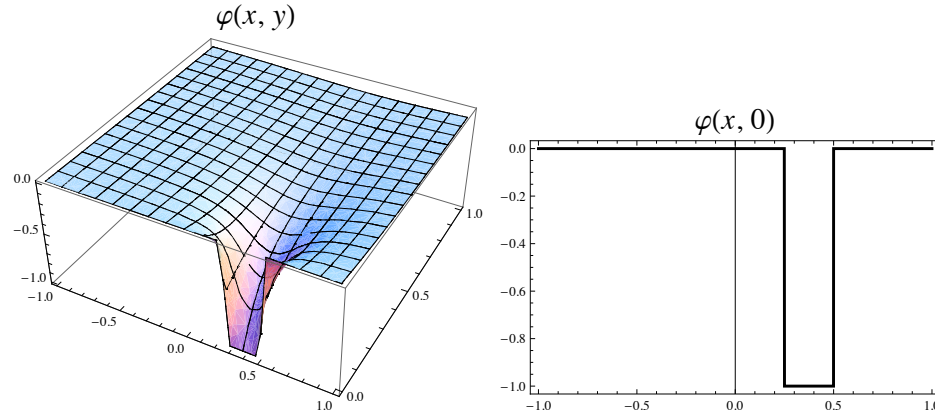


Figura 7.4: Gráficos da função  $\varphi$  considerando  $\partial\Omega_s = [1/4, 1/2] \times \{0\}$ .

$T(u) = \nabla u$ , função de extração  $\xi = \nabla \varphi$  e termo de carga

$$R = - \int_{\partial\Omega - \{\Gamma_1 \cup \Gamma_2\}} (\varphi \nabla u \cdot \vec{n}) ds,$$

que agora depende de  $u$ .

Sendo assim, o método da função de extração nos leva a aproximar  $\tilde{L}(u)$  por

$$\tilde{L}(u_h) = \int_{\Omega} (\nabla u_h \cdot \nabla \varphi) dA - \int_{\partial\Omega - \{\Gamma_1 \cup \Gamma_2\}} (\varphi \nabla u_h \cdot \vec{n}) ds,$$

em que  $u_h$  é uma aproximação por elementos finitos de  $u$ .

Tem-se que a função geradora  $\varphi$  tem a seguinte expressão analítica:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \left[ \arctan \left( \frac{x - x_2}{y} \right) - \arctan \left( \frac{x - x_1}{y} \right) \right]. \quad (7.23)$$

Considerando, por exemplo,  $\partial\Omega_s = [1/4, 1/2] \times \{0\}$  a Figura 7.4 mostra os gráficos de  $\varphi(x, y)$  e  $\varphi(x, 0)$  com  $x, y \in \Omega$ .

### Modelo 3

Considera-se a mesma função  $\varphi$  do Modelo 2, tem-se

$$\int_{\partial\Omega} (u \nabla \varphi \cdot \vec{n}) ds = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi) dA.$$

Portanto, substituindo em (7.22), tem-se que

$$\tilde{L}(u) = \int_{\partial\Omega - \Gamma_2} (u \nabla \varphi \cdot \vec{n}) ds - \int_{\partial\Omega - \{\Gamma_1 \cup \Gamma_2\}} (\varphi \nabla u \cdot \vec{n}) ds \quad (7.24)$$

é uma forma generalizada para a quantidade  $L(u)$ .

### 7.2.3 Testes de Validação

Como uma demonstração prática do método descrito, nesta seção considera-se o resultado numérico pelo MEF para o problema (7.14)-(7.15). Serão utilizadas as formas generalizadas para  $L(u)$  definidas pelos Modelos 1, 2 e 3, Equações (7.18) e (7.22) e (7.24). Os resultados obtidos serão usados para validar o programa computacional desenvolvido e, também, comparar os resultados das taxas de convergência do erro, através do gráfico log-log, na aproximação da quantidade de interesse pelo **Método Direto** e pelo método da função de extração.

Na resolução numérica do problema utilizam-se os espaços de elementos finitos de Lagrange retangulares como espaços de funções aproximantes. O parâmetro  $p$  representa o grau das funções de base de Lagrange unidimensionais, utilizadas no produto tensorial para construção dos espaços de elementos finitos de Lagrange em 2D. Definem-se por  $N_x$  e  $N_y$  os números de intervalos da partição nos eixos  $x$  e  $y$  do domínio, respectivamente.

Define-se como método direto a aproximação da quantidade de interesse  $L(u)$  pela forma geral, isto

$$L(u_h) = - \int_{\partial\Omega_s} (\nabla u_h \cdot \vec{n}) ds, \quad (7.25)$$

em que  $\tilde{u}$  é a solução aproximada, pelo método dos elementos finitos, do problema (7.14)-(7.15). Serão consideradas dois casos para a sub-região  $\partial\Omega_s \subset \Gamma_2$ :

$$\partial\Omega_{s1} = [0, 1/4] \times \{0\} \text{ e } \partial\Omega_{s2} = [1/2, 3/4] \times \{0\}.$$

#### Resultados Obtidos Usando $u$ e $\varphi$ Analíticas

Utiliza-se a função  $u$ , solução analítica do problema (7.14)-(7.15), calculam-se os valores da quantidade de interesse escrita nas formas generalizadas, Equações (7.22) e (7.24), e pelo método direto, Equação (7.25), no programa computacional desenvolvido, sendo  $\varphi$  dada pela equação (7.23). O objetivo aqui é validar o programa, através do cálculo do erro na regra de integração em cada partição do domínio. Nas Tabelas 7.1 e 7.2 mostram-se os valores do erro em porcentagem para cada  $N_x$ , com  $N_x = N_y$ , na qual observa-se que os erros na regra de integração não serão significantes

Valor exato do fluxo 0,5						
$N_x, N_y$	Método Direto	D(%)	Modelo 3	D(%)	Modelo 2	D(%)
1	0,5063438955	0,12	0,4864646065	2,70	0,508716033	1,74
2	0,4851052787	2,97	0,4904344812	1,91	0,4860982089	2,78
4	0,489381386	2,12	0,4932380723	1,35	0,4899959596	2,00
8	0,4924915061	1,50	0,4952192703	0,95	0,4929252625	1,41
16	0,494690693	1,06	0,496619752	0,67	0,4949971164	1,00
32	0,496245753	0,75	0,497609888	0,47	0,4964623248	0,70

Tabela 7.1: Erros na regra de integração no cálculo do fluxo na região  $\partial\Omega_{s1} = [0, 1/4] \times \{0\}$  usando  $u$  e  $\varphi$  analíticas.

Valor exato do fluxo 0,158918623						
$N_x, N_y$	Método Direto	D(%)	Modelo 3	D(%)	Modelo 2	D(%)
1	0,14251276	10,32	0,15892118	$1,6 \times 10^{-3}$	0,14139314	11,03
2	0,15894221	$1 \times 10^{-2}$	0,15891952	$5,6 \times 10^{-4}$	0,15896469	$3 \times 10^{-2}$
4	0,15891862	$2,5 \times 10^{-7}$	0,15891894	$2 \times 10^{-4}$	0,15891824	$2,4 \times 10^{-4}$
8	0,15891862	$2,5 \times 10^{-7}$	0,15891873	$7 \times 10^{-5}$	0,15891849	$8,6 \times 10^{-5}$
16	0,15891862	$2,5 \times 10^{-7}$	0,15891866	$2,5 \times 10^{-5}$	0,15891857	$3,1 \times 10^{-5}$
32	0,15891862	$2,5 \times 10^{-7}$	0,15891864	$8,5 \times 10^{-6}$	0,15891861	$1,1 \times 10^{-5}$

Tabela 7.2: Erros na regra de integração no cálculo do fluxo no região  $\partial\Omega_{s2} = [1/2, 3/4] \times \{0\}$ , usando  $u$  e  $\varphi$  analíticas.

na qualidade da aproximação numérica.

Método Direto				
$N_x, N_y$	$P = 1$	$P = 2$	$P = 3$	$P = 4$
1	0,18427701	0,29431677	0,36232310	0,39963821
2	0,22012398	0,32836280	0,37903913	0,40590313
4	0,27387358	0,37154584	0,41442253	0,43255391
8	0,32338454	0,40898757	0,43754887	0,45128448
16	0,36716683	0,43474567	0,45486901	0,46491844
32	0,40240992	0,45313692	0,46757379	0,47487530

Método da Extração: Modelo 3				
$N_x, N_y$	$P = 1$	$P = 2$	$P = 3$	$P = 4$
1	0,29179224	0,33887436	0,37227083	0,39463369
2	0,32434877	0,37275331	0,40227655	0,42053099
4	0,35600581	0,40267866	0,42691062	0,44133433
8	0,38721020	0,42730877	0,44628399	0,45726493
16	0,41433215	0,44661058	0,46098719	0,46914939
32	0,43633028	0,46123823	0,47189408	0,47786677

Método da Extração: Modelo 2				
$N_x, N_y$	$P = 1$	$P = 2$	$P = 3$	$P = 4$
1	0,32095241	0,36613846	0,40111339	0,42298012
2	0,32437789	0,37308143	0,40260106	0,42082976
4	0,35603736	0,40273369	0,42698544	0,44142454
8	0,38723203	0,42734749	0,44633679	0,45732865
16	0,41434749	0,44663791	0,46102449	0,46919442
32	0,43634109	0,46125754	0,47192044	0,47789860

Tabela 7.3: Valores aproximados do fluxo na região  $\partial\Omega_{s1} = [0, 1/4] \times \{0\}$ , pelo método direto, modelo 2 e modelo 3.

### Resultados Obtidos Usando $\tilde{u}$ e $\varphi$

Usa-se a função  $\tilde{u}$ , solução aproxima do problema (7.14)-(7.15), nas formas generalizadas, Equações (7.22) e (7.24), e a função  $\varphi$  é dada pela equação (7.23). As Tabelas 7.3 e 7.4 mostram os valores aproximados do fluxo nas regiões  $\partial\Omega_{s1} = [0, 1/4] \times \{0\}$  e  $\partial\Omega_{s2} = [1/2, 3/4] \times \{0\}$ , considerando a aproximação pelo Método Direto, Equação (7.25), e pelo Método da função de Extração com a forma generalizada do Modelo 2, Equações (7.22) e Modelo 3, Equação (7.24).

As Figuras 7.5 e 7.6 mostram os gráficos log-log do erro, em porcentagem, na aproximação do fluxo em cada sub-região  $\partial\Omega_s \subset \Gamma_2$ . Utilizam-se as seguintes notações para os gráficos:

- MD: Cálculo do fluxo pelo Método Direto, Equação (7.25);

Método Direto				
$N_x, N_y$	$P = 1$	$P = 2$	$P = 3$	$P = 4$
1	0,1202887008	0,1396161552	0,1421232238	0,1469384836
2	0,1452484308	0,1627236871	0,1579792940	0,1587969690
4	0,1530835717	0,1594906628	0,1585254551	0,1586198512
8	0,1565255332	0,1588443256	0,1586854091	0,1587716701
16	0,1579292517	0,1587859522	0,1587994036	0,1588456220
32	0,1584858988	0,1588270912	0,1588588578	0,1588821636

Método da Extração: Modelo 3				
$N_x, N_y$	$P = 1$	$P = 2$	$P = 3$	$P = 4$
1	0,1629800244	0,1580148777	0,1559611217	0,1586070938
2	0,1579780096	0,1571758525	0,1579111224	0,1583431288
4	0,1575670564	0,1579830811	0,1584348113	0,1586266797
8	0,1580795401	0,1584483032	0,1586787237	0,1587726889
16	0,1584620078	0,1586835300	0,1587989387	0,1588456928
32	0,1586815138	0,1588011432	0,1588588259	0,1588821681

Método da Extração: Modelo 2				
$N_x, N_y$	$P = 1$	$P = 2$	$P = 3$	$P = 4$
1	0,1462220436	0,1408006942	0,1378400006	0,1409112100
2	0,1580605005	0,1571738877	0,1579590129	0,1583889023
4	0,1575841308	0,1579853859	0,1584347747	0,1586266772
8	0,1580793149	0,1584483425	0,1586787237	0,1587726889
16	0,1584620142	0,1586835278	0,1587989387	0,1588456928
32	0,1586815144	0,1588011431	0,1588588259	0,1588821681

Tabela 7.4: Valores aproximados do fluxo na região  $\partial\Omega_{s,2} = [1/2, 3/4] \times \{0\}$ , pelo método direto, modelo 2 e modelo 3.

- IntDom: Cálculo do fluxo pelo método da função de extração usando a forma generalizada do Modelo 2, Equação (7.22);
- IntCont: Cálculo do fluxo pelo método da função de extração usando a forma generalizada do Modelo 3, Equação (7.24).

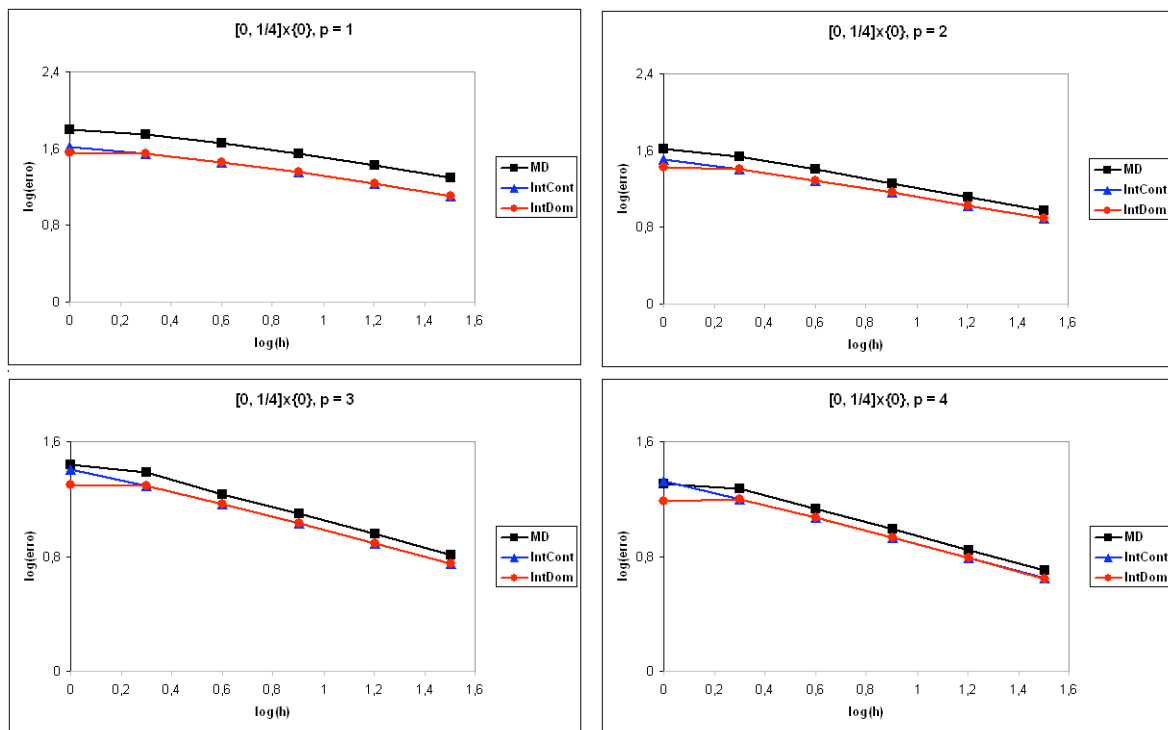


Figura 7.5: Gráficos Log-Log do erro, na aproximação do valor do fluxo saindo pela região  $\partial\Omega_{s1} = [0, 1/4] \times \{0\}$  com  $p = 1, 2, 3$  e  $4$ .

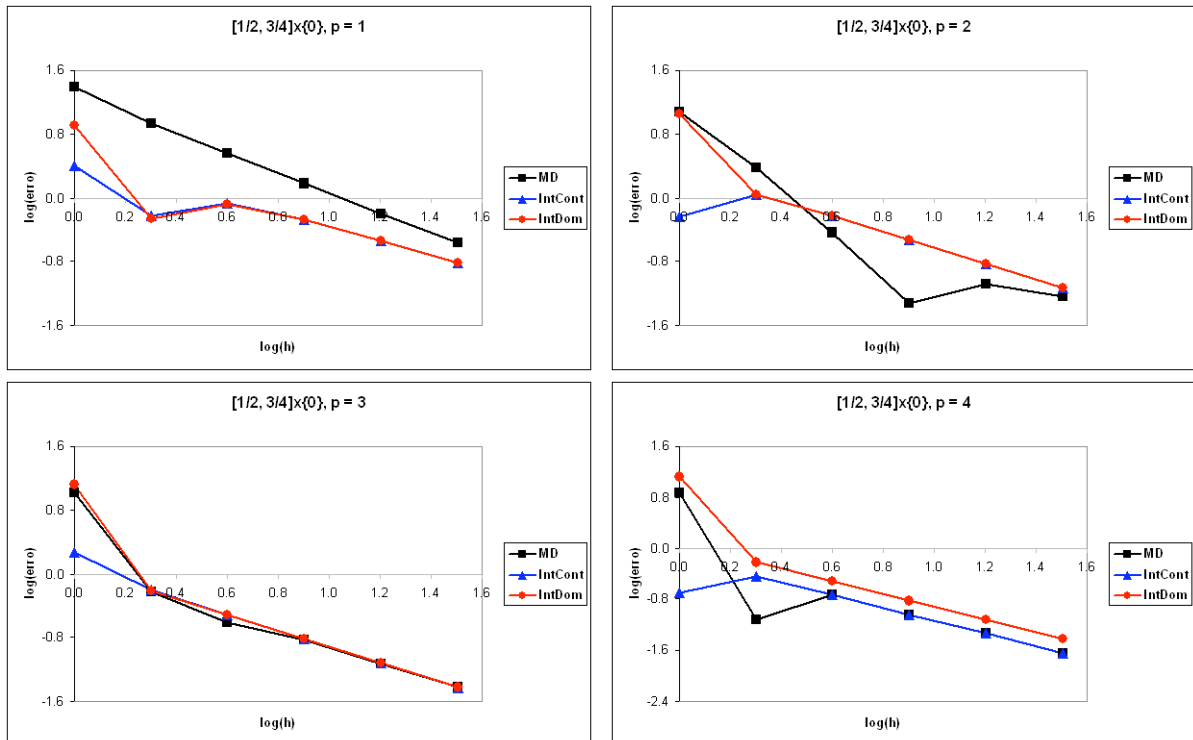


Figura 7.6: Gráficos Log-Log do erro, na aproximação do valor do fluxo saindo pela região  $\partial\Omega_{s2} = [1/2, 3/4] \times \{0\}$  com  $p = 1, 2, 3$  e 4.

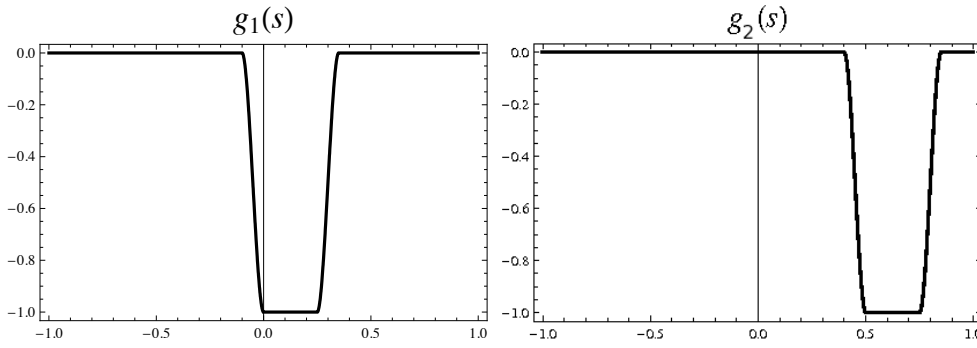


Figura 7.7: Gráficos das funções  $g_1(s) = g(s) |_{\partial\Omega_{s1}}$  e  $g_2(s) = g(s) |_{\partial\Omega_{s2}}$ , com  $\varepsilon = 0, 1$ .

### Resultados Obtidos Usando $\tilde{u}$

Neste teste, tem-se por objetivo confrontar os resultados obtidos na aproximação da quantidade de interesse  $L(u)$  obtidos pelo método direto, Equação (7.25), pelo Modelo 1, Equação (7.18), e pelo Modelo 2, Equação (7.22). Calcula-se a solução aproximada da quantidade de interesse pelo método da função de extração usando os Modelo 1, Equações (7.18) e pelo Método Direto, usando a Equação (7.25). Neste caso, usam-se as funções  $\tilde{u}$  e  $\tilde{\varphi}$ , soluções aproximadas dos problemas (7.14)-(7.15) e (7.19), respectivamente, para cada uma das sub-regiões  $\partial\Omega_{s1} = [0, 1/4] \times \{0\}$  e  $\partial\Omega_{s2} = [1/2, 3/4] \times \{0\}$ . No caso do Modelo 2, Equação(7.22), usa-se a função  $\varphi$  analítica dada pela Equação (7.23).

Na resolução numérica do problema auxiliar (7.19) foi utilizado um espaço de aproximação mais enriquecido, para obter uma aproximação mais precisa e com isso diminuir o erro na aproximação da quantidade de interesse pelo método da função de extração. Foram utilizadas funções de base de Lagrange unidimensionais de grau  $p + 1$ , na construção do espaço de elementos finitos de Lagrange em 2D. Toma-se  $\varepsilon = 1/10$  na função  $g(s)$  do problema (7.19), correspondente a cada uma das sub-regiões  $\partial\Omega_{s1}$  e  $\partial\Omega_{s2}$ . A Figura 7.7 mostra os gráficos de  $g |_{\partial\Omega_{s1}}$  e  $g |_{\partial\Omega_{s2}}$ .

Na Tabela 7.5 mostram-se os resultados na aproximação da quantidade de interesse  $L(u)$  e o valor do erro (D), em porcentagem, em relação a solução exata  $L(u)$  na região  $\partial\Omega_{s1}$ , considerando vários valores do grau  $p$  e do número de intervalos  $N_x$  e  $N_y$ . Analogamente, na Tabela 7.6 mostram-se, respectivamente, os mesmos resultados considerando a aproximação do fluxo de fluido na região  $\partial\Omega_{s2}$ . Os valores exatos da quantidade de interesse em cada sub-região são:

- $L(u) = 0,5$  em  $\partial\Omega_{s1} = [0, 1/4] \times \{0\}$
- $L(u) = 0,158919$  em  $\partial\Omega_{s2} = [1/2, 3/4] \times \{0\}$



Valores aproximados com $p = 1$						
$N_x, N_y$	Método Direto	D(%)	Modelo 1	D(%)	Modelo 2	D(%)
3, 1	0,166408	66,7	0,274125	45,2	0,300188	40,0
6, 2	0,216802	56,6	0,297552	40,5	0,325162	35,0
12, 4	0,269356	46,1	0,342097	31,6	0,356659	28,7
24, 8	0,320887	35,8	0,381175	23,8	0,387765	22,5
48, 16	0,365741	26,9	0,411556	17,7	0,414813	17,0
96, 32	0,401561	19,7	0,437075	12,6	0,436732	12,7

Valores aproximados com $p = 2$						
$N_x, N_y$	Método Direto	D(%)	Modelo 1	D(%)	Modelo 2	D(%)
3, 1	0,264748	47,1	0,313240	37,4	0,337539	32,5
6, 2	0,322025	35,6	0,360725	27,9	0,372461	25,5
12, 4	0,371672	25,7	0,393097	21,4	0,402632	19,5
24, 8	0,408339	18,3	0,424957	15,1	0,427343	14,5
48, 16	0,434239	13,2	0,446634	10,7	0,446668	10,7
96, 32	0,452792	9,44	0,464996	7,00	0,461296	7,74

Valores aproximados com $p = 3$						
$N_x, N_y$	Método Direto	D(%)	Modelo 1	D(%)	Modelo 2	D(%)
3, 1	0,329267	34,2	0,345469	30,9	0,371886	25,6
6, 2	0,378740	24,3	0,386802	22,6	0,401907	19,6
12, 4	0,413185	17,5	0,418821	16,2	0,426673	14,7
24, 8	0,437129	12,6	0,446179	10,8	0,446135	10,8
48, 16	0,454582	9,08	0,463047	7,39	0,460893	7,82
96, 32	0,467377	6,52	0,477935	4,41	0,471834	5,63

Valores aproximados com $p = 4$						
$N_x, N_y$	Método Direto	D(%)	Modelo 1	D(%)	Modelo 2	D(%)
3, 1	0,369805	26,0	0,381819	23,6	0,393790	21,2
6, 2	0,407301	18,5	0,410383	17,9	0,419916	16,0
12, 4	0,432515	13,5	0,434539	13,1	0,440921	11,8
24, 8	0,451022	9,80	0,459207	8,16	0,456983	8,60
48, 16	0,464736	7,05	0,473070	5,39	0,468956	6,21
96, 32	0,474749	5,05	0,485790	2,84	0,477733	4,45

Tabela 7.5: Valores aproximados do fluxo total saindo pela região  $\partial\Omega_{s1} = [0, 1/4] \times \{0\}$ .

Valores aproximados com $p = 1$						
$N_x, N_y$	Método Direto	D(%)	Modelo 1	D(%)	Modelo 2	D(%)
3, 1	0,131682	17,1	0,167188	5,20	0,167357	5,31
6, 2	0,145881	8,20	0,153870	3,18	0,159651	0,46
12, 4	0,153286	3,54	0,157060	1,17	0,158304	0,39
24, 8	0,156634	1,44	0,158172	0,47	0,158437	0,30
48, 16	0,157972	0,60	0,158892	0,02	0,158640	0,18
96, 32	0,158503	0,26	0,159218	0,19	0,158771	0,09

Valores aproximados com $p = 2$						
$N_x, N_y$	Método Direto	D(%)	Modelo 1	D(%)	Modelo 2	D(%)
3, 1	0,161080	1,36	0,148464	6,58	0,154090	3,04
6, 2	0,160860	1,22	0,158513	0,26	0,156733	1,38
12, 4	0,159367	0,28	0,158796	0,08	0,157907	0,64
24, 8	0,158845	0,05	0,159075	0,10	0,158435	0,30
48, 16	0,158789	0,08	0,159359	0,28	0,158683	0,15
96, 32	0,158829	0,06	0,159454	0,34	0,158802	0,07

Valores aproximados com $p = 3$						
$N_x, N_y$	Método Direto	D(%)	Modelo 1	D(%)	Modelo 2	D(%)
3, 1	0,161089	1,37	0,158784	0,08	0,157265	1,04
6, 2	0,158770	0,09	0,157994	0,58	0,157988	0,59
12, 4	0,158526	0,25	0,159279	0,23	0,158446	0,30
24, 8	0,158688	0,15	0,159304	0,24	0,158682	0,15
48, 16	0,158801	0,07	0,159473	0,35	0,158800	0,07
96, 32	0,158860	0,04	0,159511	0,37	0,158860	0,04

Valores aproximados com $p = 4$						
$N_x, N_y$	Método Direto	D(%)	Modelo 1	D(%)	Modelo 2	D(%)
3, 1	0,158644	0,17	0,155413	2,21	0,157983	0,59
6, 2	0,158310	0,38	0,158850	0,04	0,158337	0,37
12, 4	0,158618	0,19	0,159474	0,35	0,158629	0,18
24, 8	0,158773	0,09	0,159397	0,30	0,158774	0,09
48, 16	0,158846	0,05	0,159519	0,38	0,158846	0,05
96, 32	0,158882	0,02	0,159534	0,39	0,158882	0,02

Tabela 7.6: Valores aproximados do fluxo total saindo pela região  $\partial\Omega_{s2} = [1/2, 3/4] \times \{0\}$ .

### 7.2.4 Comentários

De acordo com os resultados obtidos nas tabelas e figuras anteriores tem-se as seguintes observações:

Na região onde a solução apresenta singularidade,  $\partial\Omega_{s1} = [0, 1/4] \times \{0\}$ , nota-se que o Método Direto de pós-processamento apresentou um desempenho inferior comparado com o método da função de extração, Modelos 1, 2 e 3. Os Modelos 2 e 3 apresentaram melhor desempenho comparado ao Modelo 1 quando  $p = 1$  e  $p = 2$ . Já para  $p = 3$  e  $p = 4$ , este último foi melhor que os dois anteriores.

Na região  $\partial\Omega_{s2} = [1/2, 3/4] \times \{0\}$ , para  $p = 1$ ,  $p = 2$  e  $p = 3$  o Método Direto de pós-processamento apresentou um melhor desempenho, menor diferença, comparado ao método da função de extração, sendo que os Modelos 2 e 3 foram melhores que o Modelo 1. Para  $p = 4$  os Modelos 2 e 3 apresentaram melhor desempenho comparado ao Método Direto e o Modelo 1.

# Capítulo 8

## Conclusões

Neste trabalho foi realizado o estudo de dois métodos para o pós-processamento da solução por elementos finitos, a estratégia de adaptatividade *goal-oriented* e o método da função de extração, com objetivo de se obter uma precisão desejável na aproximação das quantidades de interesse. Em particular, a quantidade de interesse representa o fluxo total de fluido saindo por uma região do contorno no domínio estipulado.

Com os resultados obtidos na Seção 6.6 observa-se que o método de estimativa *goal-oriented* gera um problema dual com singularidade muito forte na região de interesse. Portanto, este método torna-se um processo caro na estimativa do erro na aproximação do valor do fluxo, no problema definido.

A partir dos resultados obtidos na Seção 7.2, conclui-se que o método da função de extração para aproximação da quantidade de interesse, apresentado em [3, 4, 5], apresenta vantagens em relação ao método direto em regiões que apresentam pontos de singularidades, como é o caso da região  $\partial\Omega_{s1} = [0, 1/4] \times \{0\}$  do problema (7.14) e (7.15). Em regiões que não apresentam pontos de singularidades, o método direto de pós-processamento apresenta melhor desempenho, comparado ao método de extração, exceto quando o grau  $p = 4$ . Os Modelos 2 e 3, Equações (7.22) e (7.24), do método da função extração, os quais usam função geradora  $\varphi$  analítica, apresentaram melhor desempenho comparado com o desempenho do Modelo 1, (7.18), o qual usa funções geradoras aproximadas.

Conclui-se que o método de extração deu resultados similares ao método do cálculo direto. Isto se deve ao fato de que a função geradora utilizada,  $\varphi$ , possui a mesma ordem de suavidade da função  $u$  e isto está diretamente relacionado com a taxa de convergência de  $\tilde{L}(\tilde{u})$ . Portanto, necessita-se de uma função  $\varphi$  com mais suavidade em relação a função  $u$  para se obter uma maior taxa de convergência.

Ressalta-se ainda o grande esforço dedicado a este trabalho, no qual foi possível no prazo do mestrado implementar os métodos *goal oriented* e da função de extração. Além disso, a utilização do ambiente PZ permitiu implementar e verificar a complexidade dessas técnicas.

# Referências Bibliográficas

- [1] R. S. CARVALHO e J. A. D. Xavier A. J. ROSA. *Engenharia de Reservatórios de Petróleo*. Rio de Janeiro, Brasil, 2006.
- [2] M. AINSWORTH and J. T. ODEN. *A posteriori error estimation in finite element analysis*. A Wiley-interscience publication, 2000.
- [3] I. BABUSKA and A. MILLER. The post-processing approach in the finite element method - part 1: Calculation of displacements, stresses and other higher derivatives of the displacements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20:1085–1109, 1984.
- [4] I. BABUSKA and A. MILLER. The post-processing approach in the finite element method - part 2: The calculation of stress intensity factors. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20:1111–1129, 1984.
- [5] I. BABUSKA and A. MILLER. The post-processing approach in the finite element method - part 3: A posteriori error estimates and adaptive mesh selection. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20:2311–2324, 1984.
- [6] I. BABUSKA and W. C. RHEINBOLDT. A posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 12:1597–1615, 1978.
- [7] G. F. CAREY and J. T. ODEN. *FINITE ELEMENTS: A Second Course*, volume II of *The Texas Finite Element Series*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.
- [8] P. R. B. DEVLOO. Pz -object oriented finite element software. Technical report, 2005.
- [9] A. C. F. CORREA e A. J. ROSA. Análise de testes de pressão em poços. Technical report, CEPETRO-Unicamp, 1987.
- [10] G. F. CAREY E. B. BECKER and J. T. ODEN. *Finite elements: An introduction*, volume 1. Prentice-Hall, 1981.

- [11] J. T. ODEN and G. F. CAREY. *FINITE ELEMENTS: Mathematical Aspects*, volume 4. Prentice Hall, 1983.
- [12] R. A. GREENKORN. *Flow Phenomena in Porous Media-fundamentals and applications in petroleum, water and food production*. Marcel Dekker, Inc., 1983.
- [13] C. JOHNSON. *Numerical solution of partial differential equation by the finite element method*. Cambridge, USA, 1990.
- [14] S. D. JOSHI. *Horizontal Well Technology*. Tulsa, Oklahoma, USA, 1991.
- [15] V. R. PENMATCHA K. AZIS and S. ARBABI. Effects of pressure drop in horizontal wells and optimum well length. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 4(3):215–223, September 1999.
- [16] B. SENIOR K. HARRIMAN, P. HOUSTON and E. SÜLI. hp-version discontinuous galerkin methods with interior penalty for partial differential equations with nonnegative characteristic form. Technical report, 1991.
- [17] E. KREYSZIG. *An Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley, 1989.
- [18] C. A. MOURA. *Análise funcional para aplicações-posologia*. Rio de Janeiro, 2002.
- [19] J. NECAS. *Les Méthodes en Théorie des Équations Elliptique*. Masson, Paris, 1967.
- [20] J. T. ODEN. *Applied Functional Analysis*. Prentice-Hall, Inc., 1979.
- [21] J. T. ODEN and S. PRUDHOMME. Goal-oriented error estimation and adaptivity for the finite element method. Technical report, Texas Institute for Computation and Applied Mathematics the University of Texas at Austin, 1999.
- [22] D. W. PEACEMAN. *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*. Oxford, New York, 1977.
- [23] J. N. REDDY. *An introduction to the finite element method*. McGraw-Hill Book Company, 1984.
- [24] E. C. RYLO. *Auto-adaptividade hp utilizando biblioteca de padrões de refinamento com estimativa de erro e avaliação de padrões hp em paralelo*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas-Faculdade de Engenharia Civil, 2007.

- [25] B. SZABÓ and I. BABUSKA. *Finite element analysis*. JOHN WILEY and SONS. INC., 1991.



# Apêndice A

## Espaço Vetorial e Espaço Normado

### A.1 Espaço Vetorial

**Definição A.1** *Um espaço vetorial é um conjunto  $X = (X, +, \cdot)$ , não vazio, de elementos  $u, v, \dots$  munido de duas operações algébricas (adição e multiplicação por escalar).*

- *adição  $+ : X \times X \rightarrow X$*
- *multiplicação por escalar  $\cdot : \mathbb{K} \times X \rightarrow X$ ,  $\mathbb{K}$  é um corpo ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ )*

**Propriedades 2 (da adição)** *Para todo  $u, v$  e  $w \in X$ , tem-se*

- *Comutativa:  $u + v = v + u$*
- *Associativa:  $u + (v + w) = (u + v) + w$*
- *Elemento Neutro:  $\forall u \in X, \exists \theta \in X$  tal que  $\theta + u = u$*
- *Oposto:  $\forall u \in X, \exists -u \in X$  tal que  $u + (-u) = \theta$*

**Propriedades 3 (da multiplicação por escalar)** *Sendo  $u$  e  $v \in X$ ,  $\alpha$  e  $\beta \in \mathbb{K}$ , tem-se:*

- *$\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u$*
- *$\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \beta \cdot v$*
- *$1 \cdot u = u$*
- *$(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$*

## A.2 Espaço Normado

**Definição A.2 (Norma)** Norma é uma função,  $\| \cdot \|: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ , definida em um espaço vetorial  $X = (X, +, \cdot)$  com as seguintes propriedades:

$$(N1) \quad \|u\| \geq 0, \forall u \in X; \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

$$(N2) \quad \|c \cdot u\| = |c| \|u\|, \forall c \in \mathbb{K} \text{ e } \forall u \in X$$

$$(N3) \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

**Definição A.3 (Espaço Normado)** Um espaço normado é um espaço vetorial com uma norma.

### Definições em Espaços Normados

**Definição A.4 (Convergência)** Uma sequência  $(u_n)$  em um espaço normado  $X = (X, \| \cdot \|)$  é convergente se existe  $u \in X$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0$$

$u$  é chamado de limite de  $(u_n)$  e é representado por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$$

ou, simplesmente,

$$u_n \rightarrow u$$

**Definição A.5 (Fechado, Aberto, Ponto Aderente e Fecho)** Seja  $X = (X, \| \cdot \|)$  um espaço normado e sejam  $F \subset X$ ,  $A \subset X$  e  $M \subset X$ .

O subconjunto  $F$  é **fechado** se para toda sequência  $(u_n)$  em  $X$  tal que  $u_n \in F$ ,  $\forall n$ , e  $u_n \rightarrow u$  tem-se  $u \in F$ .

Diz-se que o subconjunto  $A \subset X$  é **aberto** se seu complementar  $X - A$  é fechado.

Sejam  $M \subset X$  e  $y \in X$ , diz-se que  $y$  é **aderente** a  $M$  se existe uma sequência  $(u_n)$  de elementos de  $M$  que converge para  $y$ .

O **fecho**  $\bar{M}$  do subconjunto  $M \subset X$  é o conjunto de todos os pontos aderentes de  $M$ . Por construção  $\bar{M}$  é fechado.

**Definição A.6 (Denso)** Sejam  $B, M \subset X = (X, \| \cdot \|)$ . Diz-se que  $B$  é denso em  $M$  se dado  $y \in M$  qualquer, existe uma sequência  $(u_n)$  de elementos de  $B$  tal que  $u_n \rightarrow y$ . Em outras palavras,  $B$  é denso em  $M$  se todo ponto de  $M$  é aderente a  $B$ .

**Definição A.7 (Sequência de Cauchy)** *A sequência  $(u_n)$  em um espaço normado é uma sequência de Cauchy se para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  tal que*

$$\|u_n - u_m\| < \varepsilon, \forall n, m > n_0$$

**Definição A.8 (Compacidade)** *Um subconjunto  $M \subset X = (X, \|\cdot\|)$  é compacto se toda sequência  $(u_n)$ ,  $u_n \in M$ , possui uma subsequência convergente para um ponto  $u_0 \in M$ .*

**Definição A.9 (Espaço Completo)** *Um espaço normado  $X = (X, \|\cdot\|)$  é completo se toda sequência de Cauchy for convergente.*

**Propriedades 4** *Tem-se que:*

- (1) *Todo espaço normado de dimensão finita é completo.*
- (2) *Todo subconjunto completo é fechado.*
- (3) *Todo subconjunto fechado de um completo é completo.*

**Definição A.10 (Espaço de Banach)** *Seja  $X = (X, \|\cdot\|)$  um espaço normado. Se  $X$  for completo ele é chamado de espaço de Banach.*

**Definição A.11 (Completamento)** *Seja  $X = (X, \|\cdot\|)$  um espaço normado. Simplificadamente, um completamento  $\bar{X}$  do espaço normado  $X$  trata-se de um processo geral que nos permite introduzir um contexto no qual todas as sequências de Cauchy, em  $\bar{X}$ , são convergentes. Para maiores detalhes ver [18, 20, 17].*

### Exemplos Importantes

**Exemplo A.1** *Seja o espaço vetorial  $C([a, b])$ , o conjunto constituído de todas as funções de valores reais definidas e contínuas em  $[a, b]$ . Munido da norma*

$$\|u\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |u(t)|,$$

*este espaço vetorial é de Banach.*

**Exemplo A.2** *O Espaço vetorial  $C([a, b])$  de todas funções contínuas de valor real, definidas em  $[a, b]$ , munido da norma*

$$\|u\|_2 = \left( \int_a^b |u(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

*não é um espaço de Banach.*

**Observação:** No espaço  $C([a, b])$ , a definição de soma e multiplicação por escalar é dada por:

$$(u + v)(t) = u(t) + v(t), \quad \forall u, v \in C[a, b],$$

$$(\lambda \cdot u)(t) = \lambda \cdot u(t), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \forall u \in C[a, b]$$

**Exemplo A.3** O espaço vetorial  $L^2([a, b], \| \cdot \|_2)$  é definido como o completamento do espaço  $C([a, b], \| \cdot \|_2)$  do Exemplo 2.

# Apêndice B

## Notações

### B.1 Notação de *Laurent Schwartz*

Seja  $n \geq 1$  fixo. Dados  $n$  inteiros não negativos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  denota-se  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  e  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ . Diz que  $\alpha$  é um multi-índice e, por exemplo,  $a_\alpha = a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ . Por simplicidade o símbolo  $D_j$  representará o operador de derivação parcial  $\partial/\partial x_j$ , com  $1 \leq j \leq n$ , de forma que  $D$  estará denotando o vetor gradiente

$$D = (D_1, D_2, \dots, D_n) \quad (\text{B.1})$$

e

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}. \quad (\text{B.2})$$

Por exemplo,  $D^{(1,2,3)} f = \partial^6 f / \partial x_1 \partial x_2^2 \partial x_3^3$ ,  $D^{(0,1)} f = \partial f / \partial x_2$ ,  $D^{(0,0)} f = f$ , em que  $f$  é uma função suave em um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

### B.2 Operadores Diferenciais

#### Divergente

Dado um vetor  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ , o seu *divergente*,  $\nabla \cdot \vec{u}$  ou  $\text{div} \vec{u}$ , é o operador diferencial dado por

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{B.3})$$

### Gradiente

Seja agora a função escalar  $u : R^3 \rightarrow R$ , o seu *gradiente*,  $\nabla u$ , é o operador

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right). \quad (\text{B.4})$$

### Laplaciano

É a combinação entre o divergente e o gradiente,

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

de uma função escalar  $u$  que é representado pelo operador

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (\text{B.5})$$

Este operador é chamado de *Laplaciano de  $u$* .

### Fórmula de Green

A fórmula de Green nos diz que: se  $u$  e  $v$  são campos escalares, então

$$\int_{\Omega} \text{div}(v\nabla u) = \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla u + v\Delta u) d\tau = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \quad (\text{B.6})$$

em que  $\vec{n}$  é o versor normal à  $\partial\Omega$ .