

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR FÁBIO DALMAZZO  
SANCHES E APROVADA  
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 28.1.07.1.2008  
  
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

# **Identificação de Parâmetros de Mancal através de Análise de Correlações**

Autor: **Fábio Dalmazzo Sanches**  
Orientador: **Robson Pederiva**

53/2008

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

# **Identificação de Parâmetros de Mancal através de Análise de Correlações**

Autor: **Fábio Dalmazzo Sanches**  
Orientador: **Robson Pederiva**

Curso: Engenharia Mecânica  
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado acadêmico apresentado à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2008  
S.P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

Sa55i Sanches, Fábio Dalmazzo  
Identificação de parâmetros de mancal através de  
análise de correlações / Fábio Dalmazzo Sanches. --  
Campinas, SP: [s.n.], 2008.

Orientador: Robson Pederiva  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Identificação de sistemas. 2. Estimativa de  
parâmetro. 3. Dinâmica das máquinas. I. Pederiva,  
Robson. II. Universidade Estadual de Campinas.  
Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Bearing parameters identification through correlation analysis

Palavras-chave em Inglês: Parametric identification, Correlation analysis,

Machinery dynamics

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Airton Nabarrete, Pablo Siqueira Meirelles

Data da defesa: 28/07/2008

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO**

**Identificação de Parâmetros de Mancal através  
de Análise de Correlações**

**Autor: Fábio Dalmazzo Sanches**

**Orientador: Robson Pederiva**



---

**Prof. Dr. Robson Pederiva, Presidente**  
UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas



---

**Prof. Dr. Airton Nabarrete**  
ITA – Instituto Tecnológico de Aeronáutica



---

**Prof. Dr. Pablo Siqueira Meirelles**  
UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas

Campinas, 28 de julho de 2008

## **Dedicatória:**

Dedico este trabalho aos meus pais Hélio e Nerli, aos meus irmãos Fernando e Alessandra e à minha namorada Fabiana pelo apoio sempre presente.

## Agradecimentos

Este trabalho contou com a valiosa ajuda de muitas pessoas, seja no aspecto técnico seja no companheirismo do dia-a-dia no convívio acadêmico. Agradeço sinceramente:

Ao professor Robson, pela orientação, aprendizado, amizade e oportunidade dada para que esse mestrado tivesse êxito. Obrigado pela orientação sempre presente e verdadeira.

Aos amigos Alberto, Flávio, Labaki, Ilson e Ricardo pela amizade, companheirismo e pelas discussões sobre modelagem computacional.

Aos meus tios Celso e João Carlos por terem me mostrado um novo caminho profissional através das “vibrações”.

Ao Marcel *kamikase* pela amizade e valiosa ajuda na confecção dos desenhos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro.

Por fim, a Deus pelas oportunidades que recebo na minha vida.

*“Trabalhar mais, não desistir nunca,  
agüentar firme e aprender a partir de  
todo erro que venha a cometer”*

*Ayrton Senna*

## Resumo

SANCHES, Fábio Dalmazzo, *Identificação de Parâmetros de Mancal através de Análise de Correlações*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2008. 94 p. Dissertação (Mestrado)

Este trabalho apresenta uma metodologia de identificação dos parâmetros de rigidez e amortecimento dos mancais de rolamento de um sistema mecânico rotativo. O método proposto é baseado na equação matricial de Ljapunov e na representação do sistema na forma de espaço de estados. Através da definição de correlações, inserida na equação matricial, monta-se um estimador que relaciona os parâmetros físicos do sistema com as matrizes de correlações das variáveis medidas no domínio do tempo, não sendo necessário o conhecimento da excitação. O objetivo do trabalho é fazer um estudo teórico da aplicação dessa metodologia de identificação em sistemas reais. São feitas simulações considerando-se um sistema rotativo de vinte graus de liberdade excitado aleatoriamente, caso estático, e por desbalanceamento em diversas frequências de rotação e de características de mancal. Os resultados numéricos demonstram que o método proposto é robusto e viável, podendo ser aplicado na identificação de uma máquina real.

### *Palavras Chave*

Identificação Paramétrica, Análise de Correlações, Equação Matricial de Ljapunov.



## **Abstract**

SANCHES, Fábio Dalmazzo, *Bearing Parameters Identification through Correlation Analysis*, Campinas, : Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2008. 94 p. Dissertação (Mestrado)

This work presents an identification methodology of stiffness and damping parameters of rolling bearings in a rotor-bearing system. The proposed method is based on Ljapunov matrix equation and state space representation. Through the definition of correlations used in matrix equation, it is possible to generate an algorithm that relates system physical parameters to the correlation matrixes of the measured variables in time domain without the knowledge of the external input forces. The purpose of this work is to make a theoretical study of the viability of this methodology used in real systems. Simulations were performed considering a rotating system with twenty degrees of freedom excited by random forces, system at rest, and by unbalance forces considering several rotation frequencies and bearing characteristics. The numerical results show the proposed method is feasible and it can be used to identify real machines.

### *Key Words*

Parametric Identification, Correlation Analysis, Ljapunov Matrix Equation.

# Índice

<b>Lista de Figuras</b>	xi
<b>Lista de Tabelas</b>	xii
<b>Nomenclatura</b>	xiii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos do trabalho	2
1.2 Divisão do trabalho	2
<b>2 Revisão Bibliográfica</b>	<b>5</b>
2.1 Técnicas de identificação	5
2.1.1 Excitação por desbalanceamento	5
2.1.2 Excitação controlada	7
2.1.3 Métodos com excitação impulsiva	9
2.1.4 Métodos com excitação desconhecida	11
2.1.5 Método por correlações	11
<b>3 Modelagem Matemática do Sistema Mecânico</b>	<b>15</b>
3.1 Elemento de disco	16
3.2 Elemento de eixo	17
3.3 Elemento de mancal	21
3.4 Forças de desbalanceamento	22
3.5 Elementos finitos dos componentes do rotor	24

3.5.1 Modelagem do disco	24
3.5.2 Modelagem do eixo	25
3.5.3 Modelagem dos mancais	30
3.5.4 Modelagem do desbalanceamento	30
3.6 Estrutura das matrizes globais do sistema rotativo	31
<b>4 Relação Entrada-Saída em Sistemas Mecânicos</b>	<b>35</b>
4.1 Representação no espaço de estados	35
4.2 Controlabilidade e observabilidade	39
4.3 Formas normais da equação de estado	40
4.4 Discretização da equação de estado no tempo	43
<b>5 Equação Matricial de Ljapunov</b>	<b>47</b>
5.1 Resposta de sistemas excitados estocasticamente	47
5.2 Resposta de sistemas excitados por forças harmônicas e estocásticas	51
5.3 Diminuição do número de variáveis medidas	55
5.3.1 Medição de metade do vetor de estado	55
5.3.2 Medição de $\frac{1}{4}$ do vetor de estado	62
<b>6 Procedimentos e Resultados de Simulação Numérica</b>	<b>67</b>
6.1 Descrição do sistema dinâmico	67
6.2 Medição de todos os deslocamentos	71
6.2.1 Excitação por desbalanceamento	72
6.2.2 Excitação aleatória	78
6.3 Medição apenas dos deslocamentos lineares	78
<b>7 Conclusões</b>	<b>87</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>89</b>

## Lista de Figuras

3.1 Sistemas de coordenadas eixo/disco em um rotor	16
3.2 Seção transversal do eixo	18
3.3 Rigidez e amortecimento do mancal	22
3.4 Representação do desbalanceamento	23
3.5 Elemento finito de eixo	25
5.1 Representação esquemática da atuação do filtro	55
6.1 Sistema dinâmico rotor/mancais	68
6.2 Representação do modelo de elementos finitos	69
6.3 Frequências naturais do sistema rotativo	70

## Lista de Tabelas

6.1 Dados do sistema dinâmico	68
6.2 Parâmetros identificados em 1500 Rpm	74
6.3 Parâmetros identificados em 1800 Rpm	74
6.4 Parâmetros identificados em 3600 Rpm	75
6.5 Parâmetros identificados em 4500 Rpm	75
6.6 Parâmetros identificados com rigidez 10X menor	76
6.7 Parâmetros identificados com rigidez 10X maior	76
6.8 Parâmetros identificados com amortecimento 10X maior	77
6.9 Parâmetros identificados com amortecimento 100X maior	77
6.10 Parâmetros identificados com excitação aleatória	78
6.11 Parâmetros identificados com a equação 6.38	84
6.12 Parâmetros identificados com a equação 6.39	84
6.13 Parâmetros identificados com a equação 6.38 para novas propriedades de mancal	85
6.14 Parâmetros identificados com a equação 6.39 para novas propriedades de mancal	85

## Nomenclatura

### *Letras Latinas*

$d$	excentricidade do desbalanceamento	[m]
$E$	módulo de Young	[N/m <sup>2</sup> ]
$F$	força	[N]
$F_o$	força axial	[N]
$G$	módulo de cisalhamento	[N/m <sup>2</sup> ]
$I_o$	tensor de inércia do disco	[Kg m <sup>2</sup> ]
$I_{Dx}, I_{Dy}, I_{Dz}$	componentes do tensor de inércia do disco nas direções x, y e z	[Kg m <sup>2</sup> ]
$M$	massa do elemento	[Kg]
$m_u$	massa desbalanceadora	[Kg]
$q$	coordenada generalizada	
R (xyz)	sistema de referência móvel fixo ao rotor	
R <sub>o</sub> (XYZ)	sistema de referência inercial	
$U$	energia potencial de deformação	[J]
$I$	momento de inércia de área do eixo	[m <sup>4</sup> ]
$J$	energia cinética	[J]
$L$	comprimento do elemento de eixo	[m]
$S$	área da seção transversal do eixo	[m <sup>2</sup> ]
$V$	velocidade	[m/s]
$u, w$	coordenadas horizontal e vertical no sistema inercial	[m]
$\dot{u}, \dot{w}$	velocidades lineares nas direções horizontal e vertical no sistema inercial	[m/s]
$u^*, w^*$	coordenadas horizontal e vertical no sistema móvel	[m]

$t$	tempo	[s]
$k$	rigidez do mancal	[N/m]
$c$	amortecimento do mancal	[Ns/m]
$[M]$	matriz de massa	
$[G]$	matriz giroscópica	
$[K]$	matriz de rigidez	
$[C_m]$	matriz de amortecimento do mancal	
$[P]$	matriz de amortecimento	
$[P_f]$	matriz de entrada do sistema filtro	
$[S]$	matriz de entradas ou excitações	
$[A]$	matriz do sistema ou de estado	
$[B]$	matriz de entradas	
$[C]$	matriz de saída ou de medidas	
$[H]$	matriz de entradas harmônica	
$[I]$	matriz identidade	
$[\bar{M}]$ e $[\tilde{M}]$	matrizes auxiliares	
$[N]$	matriz do sistema filtro	
$[T]$	matriz transformação de coordenadas	
$[R]$	matriz de correlações	
$\{u(t)\}$	vetor de entradas	
$\{x(t)\}$	vetor de estado	
$\{y(t)\}$	vetor de variáveis medidas	
$\{n(t)\}$	vetor de excitação harmônica	
$r$	vetor de correlações	

### ***Letras Gregas***

$\phi, \theta, \psi$	ângulos de rotação	[rad]
$\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \omega$	velocidades angulares	[rad/s]
$\omega_{R/R_0}$	velocidade angular do sistema R em relação ao $R_0$	[rad/s]

$\Omega$	velocidade angular do eixo	[rad/s]
$\rho$	massa por unidade de volume do eixo	[Kg/m <sup>3</sup> ]
$\varepsilon$	deformação longitudinal da seção transversal do eixo	[m]
$\delta$	deslocamentos nodais	[m]
$\delta_d$	função delta de Dirac	
$\sigma$	tensão	[N/m <sup>2</sup> ]
$\delta W$	trabalho virtual	
$\nu$	coeficiente de Poisson	
$\xi(t), \dot{\xi}(t), \ddot{\xi}(t)$	deslocamento, velocidade e aceleração, respectivamente	m, m/s, m/s <sup>2</sup>
$\Phi$	matriz fundamental do sistema	
$[\Xi]$	matriz de controlabilidade	
$[\Omega]$	matriz de observabilidade	
$[\Theta]e^{[\bar{\Theta}]}$	matriz dos parâmetros procurados	
$\varepsilon\{\}$	esperança matemática	
$\mu$	valor médio	
$\Psi$	matriz intensidade de ruído	
$\tau$	defasagem temporal	s
$\eta_i$	i-ésima saída do filtro	
$\beta$	ângulo de fase	rad

### ***Superescritos***

$T$	transposição de matrizes
*	vetores ou matrizes submetidos à transformação de coordenadas $[T]$

### ***Subscritos***

$D$	disco
$E$	eixo
$i$	i-ésimo



$l$	linear
$q$	coordenada generalizada
$nl$	não linear
$xx, zz$	termos diretos nas direções x e z, respectivamente
$xz, zx$	termos cruzados
$u, w$	direções horizontal e vertical
$mu$	massa de desbalanceamento
$k$	índice de discretização
1, 2	discos 1 e 2, respectivamente
$G$	índice de matrizes globais do sistema
$m$	mancal

### ***Abreviações***

**FRFs**      funções de resposta em frequência

# Capítulo 1

## Introdução

No parque industrial, a demanda por equipamentos de alta potência e velocidade é cada vez maior. A precisão da estimativa e o controle do comportamento dinâmico (resposta ao desbalanceamento, velocidades críticas e instabilidade) é outro requisito de vital importância. Os mancais são componentes essenciais em qualquer equipamento rotativo e o conhecimento de suas propriedades físicas é fundamental para a previsão do comportamento e características de uma máquina, já que os sistemas rotor-mancais têm um papel de destaque em muitos campos da engenharia, tais como: turbinas, compressores, bombas centrífugas, exaustores, geradores, etc.

Apesar de existirem muitos métodos computacionais para analisar o comportamento dinâmico de máquinas rotativas, a utilização desses métodos é prejudicada pela falta de informações confiáveis sobre as características dinâmicas dos mancais (Chen e Lee, 1997). Tiwari *et al.* (2004) ressaltam que, historicamente, a estimação teórica dos parâmetros dos mancais tem sido fonte de erros na determinação do comportamento dinâmico de sistemas rotor-mancais e enfatizam que a necessidade de estimativas mais confiáveis devem ser obtidas através de métodos experimentais. Conclusão semelhante foi apontada bem antes por Morton (1965) e posteriormente por Dowson e Taylor (1980), ou seja, a importância de análises experimentais sobre o tema e a necessidade de desenvolvimento de novas técnicas para o estudo do efeito dos mancais na resposta do rotor.

## **1.1 Objetivos do trabalho**

Este trabalho tem por objetivo o desenvolvimento de um procedimento de identificação paramétrica de sistemas mecânicos excitados aleatoriamente e por desbalanceamento. Considera-se o acesso apenas às variáveis de saída do sistema, que foram consideradas sem perturbação nas medidas. Deseja-se fazer um estudo teórico da aplicabilidade do método de análise de correlações na identificação dos parâmetros físicos dos mancais em um sistema dinâmico.

Essa linha de pesquisa faz parte dos estudos do Laboratório de Vibrações e Controle da Unicamp que começou com o trabalho de Pederiva (1992), no qual um sistema mecânico excitado estocasticamente foi identificado por análise de correlações. Posteriormente, Chiarello (1998) utilizou análise de correlações para detectar e identificar falhas em um sistema mecânico. Eduardo (2003) usou a equação matricial de Ljapunov e redes neurais artificiais para detectar defeitos em sistemas mecânicos rotativos. O presente trabalho expande a metodologia proposta por Pederiva (1992) para um sistema mecânico com mais graus de liberdade e considerando a modelagem via elementos finitos de um sistema rotativo com massa distribuída. Também enfoca-se o problema do desbalanceamento desconhecido e seus efeitos sobre o processo de identificação dos parâmetros de mancal.

## **1.2 Divisão do trabalho**

No Capítulo 2, é feita uma revisão da literatura. Várias técnicas de identificação de sistemas são abordadas, mostrando a importância do tema no estudo da dinâmica de rotores.

O Capítulo 3 apresenta a descrição da modelagem matemática de um rotor via elementos finitos. Este capítulo é a base da montagem das matrizes globais de massa, rigidez e amortecimento do sistema, permitindo a visualização dos parâmetros dos mancais dentro dessas matrizes globais.

O Capítulo 4 discute as relações entrada-saída de um sistema mecânico representado na forma de espaço de estados. São apresentados alguns conceitos e definições e discute-se a

transformação de coordenadas quando se deseja uma representação diferente para o sistema em estudo.

O Capítulo 5 apresenta a derivação da equação matricial de Ljapunov, nos quais os parâmetros físicos do sistema aparecem correlacionados aos vetores de estado medidos e são apresentadas as formas dessa equação quando se conhece todo o vetor de estado e quando é feita uma redução do número de variáveis medidas. São considerados também os efeitos da excitação por ruído branco e por desbalanceamento nas equações de estimação dos parâmetros dos mancais.

Os resultados de simulação numérica são apresentados no Capítulo 6. São apresentados diversos resultados com excitação aleatória e por desbalanceamento. Também são testadas algumas configurações físicas dos mancais de modo a testar a robustez do método proposto.

O Capítulo 7 traz as conclusões gerais sobre o trabalho e sugestões para desenvolvimentos de futuras pesquisas sobre o tema.

## Capítulo 2

### Revisão Bibliográfica

A influência dos mancais no desempenho e estabilidade de máquinas rotativas é reconhecida e vem sendo objeto de estudos durante vários anos por muitos pesquisadores. De uma forma geral, os métodos de identificação dos parâmetros dinâmicos dos mancais (rigidez e amortecimento) diferem quanto ao domínio, tempo ou frequência, e quanto ao tipo de excitação utilizada. Pode-se considerar que, geralmente, tais métodos requerem a medição dos sinais de entrada (forças) e de saída (deslocamentos, velocidades, acelerações) do sistema dinâmico. Portanto os parâmetros desconhecidos são calculados com base na relação existente entre excitação e resposta (Tiwari *et al.*, 2004).

#### 2.1 Técnicas de identificação

##### 2.1.1 Excitação por desbalanceamento

Como ressaltam Tiwari *et al.* (2004), do ponto de vista prático, a utilização das forças de desbalanceamento trata-se de um método simples de excitar o sistema, já que não é necessário nenhum equipamento sofisticado de excitação. O problema é que as informações são limitadas à resposta síncrona.

Sahinkaya e Burrows (1984) apresentaram um método no domínio do tempo para estimar os coeficientes dinâmicos de mancais hidrodinâmicos a partir da resposta síncrona do rotor. O maior problema é que o método requer o conhecimento do desbalanceamento ou a adição de massas conhecidas para a excitação e só pode ser usado em rotores rígidos.

Muszynska e Bently (1990) defendem a utilização de excitação harmônica não síncrona para a identificação de forças causadas pelo fluido em mancais hidrodinâmicos. A excitação é gerada por uma massa excêntrica rotativa que poderá girar na mesma direção ou na direção contrária em relação ao giro da máquina, permitindo a identificação de modos diretos ou retrógrados. Posteriormente, Muszynska *et al.* (1993) utilizaram um sistema auxiliar desbalanceado para introduzir excitação não síncrona em uma bancada experimental. Através da excitação em diversos pontos do rotor, a rigidez dinâmica do sistema foi determinada. Além disso, o método permite a identificação do acoplamento torsional lateral causado pela anisotropia do eixo.

Chen e Lee (1995 e 1997) estimaram as características dinâmicas de mancais anisotrópicos sem a medição da excitação externa. O sistema é modelado usando-se o método dos elementos finitos e o estimador é construído a partir de relações existentes entre a transformada de Fourier das respostas ao desbalanceamento e parâmetros conhecidos do sistema para calcular os coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais pelo método dos mínimos quadrados. A vantagem do método é que o rotor foi considerado flexível e as estimativas foram obtidas a partir de condições normais de operação do sistema, porém os parâmetros de mancal foram linearizados e foi necessário que as frequências de rotação estivessem próximas da primeira velocidade crítica para que houvesse uma boa relação entre a resposta medida e o ruído nas medições.

Edwards *et al.* (2000) propuseram um método capaz de identificar os parâmetros de suportes flexíveis, de desbalanceamento e de empeno de eixo através de uma única partida ou parada da máquina. Para tanto, os resultados experimentais mostraram que, somente com excitação por desbalanceamento, são necessárias pelo menos duas partidas/paradas do equipamento. O algoritmo foi testado em várias configurações do rotor, obtendo-se bons resultados, além de permitir uma utilização prática, já que a máquina pode ser balanceada com dados obtidos por uma única partida/parada do equipamento.

Tiwari *et al.* (2002) estimaram os parâmetros dinâmicos de mancais flexíveis utilizando a resposta do sistema a um desbalanceamento conhecido em duas direções de medição e com duas configurações de desbalanceamento, uma com o rotor girando no sentido horário e outra no

sentido anti-horário. Isso faz com que a estimação de parâmetros para mancais isotrópicos torne-se um problema bem condicionado. Foi usado o domínio da frequência e o estimador não dispensa o conhecimento da excitação, além de ter sido adicionado ruído para testar a eficiência do algoritmo, que foi validado experimentalmente. Posteriormente, Tiwari (2005) incorpora a estimação do desbalanceamento residual, mas restringiu-se ao campo da simulação.

Kim *et al.* (2007) propuseram um método de identificação de mancais baseado em otimização global a partir da resposta ao desbalanceamento. Utilizam-se algoritmos genéticos e redes neurais para minimizar as diferenças entre as respostas ao desbalanceamento analítico e o medido experimentalmente, todos em precessão direta. Os parâmetros do mancal de molas foram identificados experimentalmente utilizando diferenças logarítmicas como função objetivo. O procedimento de identificação também é capaz de estimar o desbalanceamento.

De Santiago e San Andrés (2007b) ressaltaram que, em casos reais, os coeficientes dinâmicos diferem até mesmo em caso de mancais idênticos. Para simular essa situação, contruíram uma bancada experimental na qual o mancal perto do motor é do tipo segmentado e o mancal da extremidade livre é hidrodinâmico plano. Para identificar os parâmetros de massa e rigidez desses componentes, utilizaram duas configurações de desbalanceamento conhecidas e respostas síncronas. O método traz a limitação de que o rotor deve ser rígido e é muito sensível à presença de ruídos nas medições, especialmente em baixas rotações.

### **2.1.2 Excitação controlada**

Morton (1971) foi um dos pioneiros no estudo do comportamento dinâmico de máquinas de grande porte. Em seu trabalho, é construída uma bancada experimental para identificar as características de mancais hidrodinâmicos com mais de 50 cm de diâmetro. A técnica utilizou excitação senoidal e o método dos coeficientes de receptância, o mancal opera em regime laminar.

Burrows e Stanway (1977) utilizaram excitação do tipo seqüência binária pseudo-aleatória (PRBS) para identificar oito coeficientes de rigidez e amortecimento de mancais hidrodinâmicos.

A partir da representação do sistema na forma de espaço de estados, um estimador de regressão múltipla foi desenvolvido no domínio discreto do tempo usando o método de diferenças finitas. O método proposto não se apresentou robusto em relação ao ruído nas medições.

Burrows e Stanway (1980) apresentam uma investigação analítica para estimar os parâmetros de mancais hidrodinâmicos usando o princípio da identificação estrutural para determinar o número de pontos que o sistema deve ser excitado para produzir informações confiáveis. É feita uma comparação das excitações impulsiva, degrau unitário e harmônica, mostrando que a utilização de uma seqüência binária pseudo-aleatória (PRBS) possui vantagens sobre os outros métodos de excitação. Posteriormente, Burrows e Sahinkaya (1982) utilizam a excitação PRBS e domínio da freqüência para estimar os parâmetros de mancais de um sistema de múltiplos graus de liberdade. O algoritmo pode ser usado para rotores rígidos e flexíveis.

Rouvas e Childs (1993) desenvolveram um método para determinar os coeficientes dinâmicos de mancais hidrostáticos que elimina as forças geradas pelo filme de óleo, utilizando densidade espectral de potência. O método é baseado no fato de que a excitação aplicada ao sistema é estatisticamente independente das forças geradas pelo fluido. Os parâmetros do mancal foram obtidos pelo ajuste das FRFs medidas através do método dos mínimos quadrados e foi usada excitação pseudo-aleatória periódica na validação experimental.

Chatterjee e Vyas (2003) continuam o estudo de Khan e Vyas (1999) utilizando excitação harmônica e séries de Volterra para estimar parâmetros de rigidez não linear de um sistema rotor-mancal suportado por mancais de rolamento. Os resultados obtidos no modelo foram comparados aos experimentais com boa aproximação. Entretanto, o mancal foi considerado isolado do sistema e o amortecimento era linear e viscoso.

Wang e Maslen (2006) propõem um método para identificar os parâmetros de componentes de máquinas rotativas difíceis de serem modelados e que são dependentes da freqüência, tais como certos tipos de mancais, selos e fundações. O método não paramétrico apresentado baseia-se nas FRFs analíticas geradas pelo modelo e nas FRFs obtidas através de medições reais no equipamento. Essas informações serão usadas para estimar as FRFs dos componentes a serem



identificados. Os resultados foram todos simulados e o efeito da velocidade de rotação nos parâmetros estimados não foi levado em consideração.

### **2.1.3 Métodos com excitação impulsiva**

A excitação impulsiva possui a vantagem de excitar uma ampla faixa de frequências em um único experimento, o que aumenta a confiabilidade das estimativas dos coeficientes dos mancais, reduzindo o esforço experimental e o tempo para a identificação do sistema.

Nordmann (1984) aperfeiçoou a metodologia da análise modal clássica e adaptou a técnica para sistemas rotativos com efeitos não conservativos. Os parâmetros modais do sistema foram obtidos através de ajuste de curvas (FRF's) teórica e experimental pelo método dos mínimos quadrados. Os resultados obtidos mostraram-se bastante satisfatórios.

Kraus *et al.* (1987) extraíram os parâmetros de rigidez e amortecimento de mancais de rolamento através da combinação do modelo matemático do sistema com análise modal experimental. O estudo foi realizado estaticamente e dinamicamente, procurando investigar também os efeitos da velocidade de rotação e da pré-carga na rigidez e no amortecimento do sistema. Os resultados foram mais precisos para a rigidez, a estimativa do amortecimento mostrou-se apenas razoável, porém o modelo tinha apenas dois graus de liberdade.

Ellis *et al.* (1988) propuseram a identificação paramétrica de um amortecedor de filme de óleo usando o método SVF (*state variable filter*) a partir da resposta transiente do sistema e com o auxílio de uma bancada experimental. O modelo continha apenas um grau de liberdade e não havia acoplamento nas direções de movimento

Marsh e Yantek (1997) propuseram uma configuração experimental para identificar a rigidez de mancal a partir da medição da resposta à excitação de forças conhecidas. As estimativas foram feitas para mancais de rolamento de uma máquina de precisão a partir das FRF's. O trabalho chama a atenção por ressaltar a importância da quantidade de medições

necessárias à identificação, a localização dos pontos de excitação e resposta e a calibração dos acelerômetros no processo de identificação.

Qiu e Tieu (1997) obtiveram os coeficientes dinâmicos de dois mancais hidrodinâmicos não simétricos a partir do uso de funções de transferência e método dos mínimos quadrados. Todos os parâmetros foram englobados pelo estimador proposto e puderam ser identificados simultaneamente. O modelo foi validado experimentalmente para um rotor rígido e foi capaz de identificar as frequências nas quais ocorre instabilidade do filme de óleo. Para uma melhor exatidão, é sugerida a utilização de várias funções de transferência em frequências próximas à rotação do eixo.

Caldiron (2004) otimiza rotinas computacionais de um método de estimação de rigidez de mancais através de um processo de ajuste de modelo, utilizando análise de sensibilidade dos autovalores com relação à variação da rigidez dos mancais de um rotor. O ajuste foi feito com base na minimização da diferença entre os autovalores experimentais, obtidos por análise modal, e os autovalores obtidos do modelo matemático. O método foi efetuado com várias rotações e mostrou-se bastante confiável e os parâmetros foram obtidos com poucas iterações.

Tiwari e Chakravarthy (2006) elaboraram um algoritmo no domínio da frequência capaz de identificar simultaneamente o desbalanceamento residual e os parâmetros de rigidez e amortecimento dos mancais para um sistema rotor-mancal com múltiplos graus de liberdade modelados via elementos finitos. O algoritmo proposto utiliza respostas impulsivas e FRF's analíticas, que dependem dos coeficientes dinâmicos dos mancais, para estimar os parâmetros via ajuste iterativo. O algoritmo foi testado na presença de ruído e os resultados dos parâmetros identificados foram bons quando comparados aos valores assumidos.

De Santiago e San Andrés (2007a) identificam os coeficientes do mancal a partir de relações entre as excitações e respostas impulsivas nas direções vertical e horizontal a partir da estimativa da matriz de impedância do sistema. Os resultados foram verificados experimentalmente em um sistema composto por mancais segmentados e um amortecedor com

filme de óleo montado em série ao mancal. Quanto maior o número de excitações, melhor a convergência dos resultados, porém o método restringe-se a rotores rígidos.

#### **2.1.4 Métodos com excitação desconhecida**

Nos equipamentos em geral, principalmente os situados em plantas industriais, a aplicação de forças controladas é de difícil execução. Sempre existirão forças inerentes ao sistema: desbalanceamento residual, desalinhamento, roçamento entre rotor e estator, instabilidade do filme de óleo, etc., tornando a estimativa da excitação bastante difícil e justificando que alguns pesquisadores trabalhem com excitação aleatória.

Tiwari e Vyas (1995) desenvolveram uma técnica de estimação de parâmetros de rigidez não linear para mancais de rolamento. Esses coeficientes foram calculados a partir da resposta aleatória dos mancais e o sistema total foi considerado perfeitamente balanceado. As excitações são geradas pelas imperfeições no mancal e erros de montagem e foram processadas através de um algoritmo de *curve fitting* para a obtenção dos parâmetros desejados. Essa técnica possui a vantagem de não ser necessário o conhecimento das forças de excitação e trabalha somente com as resposta medidas, que foram comparadas com o modelo analítico proposto. O rotor foi considerado rígido e com 1 grau de liberdade apenas. Posteriormente, o método foi estendido a um sistema flexível de múltiplos graus de liberdade (Tiwari e Vyas, 1997, 1998).

Khan e Vyas (1999) propuseram um estudo sobre a possibilidade de estimar parâmetros não lineares usando a teoria de Volterra e Kiener no domínio da frequência. O sistema foi considerado como de um grau de liberdade e a rigidez não linear era uma função cúbica, enquanto que o amortecimento foi considerado linear. Os parâmetros foram obtidos por simulação e o método mostrou-se viável na estimativa de parâmetros lineares e não lineares.

#### **2.1.5 Método por correlações**

Outra maneira de determinar as características dinâmicas dos mancais é utilizando a análise de correlações. Uma das vantagens do método é que os parâmetros são identificados através da

matriz de correlações entre as respostas do sistema medidas em diversos instantes de tempo, sem a necessidade do conhecimento da excitação, que muitas vezes não está disponível para medição.

Apesar de não ser necessária a medição da excitação, não se pode generalizar a identificação para qualquer sistema mecânico tendo como base apenas a matriz de correlações. Através da utilização de filtros aplicados às variáveis medidas, é obtido um aproveitamento de mais informações contidas nos dados medidos (Pederiva, 1992).

Isermann *et al.* (1974) fizeram uma comparação de seis métodos de identificação e ressaltam algumas vantagens da análise de correlações: baixo esforço computacional, bom nos casos em que a estrutura do modelo é pouco conhecida e a não exigência de valores iniciais para os parâmetros a serem estimados.

Apesar das vantagens do método, a estimativa para a matriz de correlações fica incorreta quando ocorrem perturbações nas medidas. Como consequência, não se tem nenhuma consistência na estimação paramétrica. Para que o estimador tenha consistência na aplicação em sistemas mecânicos, Roether e Pederiva (1986) propuseram que a matriz de correlações seja estimada com defasagem no tempo.

Desforges *et al.* (1995) mostraram que as funções de correlação estimam melhor os parâmetros modais de sistemas, utilizando somente as respostas à excitação aleatória do tipo ruído branco. Cooper *et al.* (1995) atestam a qualidade do método também para a excitação desconhecida do tipo ruído colorido.

Uma maneira de representar um sistema dinâmico é colocá-lo na forma de espaço de estados, muito útil para sistemas complexos que possuem múltiplas entradas e saídas com muitos graus de liberdade. Assim, a identificação de sistemas passa a ser um problema de identificação de parâmetros e estimação de estado (El-Sherief, 1984, Ogata, 1998).

El-Sherief (1981) descreveu um algoritmo para estimar parâmetros de um sistema a partir das funções de correlação das variáveis de estado medidas. Pederiva (1992) utilizou análise de correlações das variáveis de estado medidas e equação matricial de Ljapunov para identificar os

parâmetros de um sistema rotor-mancal de 6 graus de liberdade. Chiarello (1998) estendeu o método proposto por Pederiva (1992) para o problema de detecção e localização de falhas em sistemas mecânicos.

Posteriormente, Eduardo (2003) utilizou a equação matricial de Ljapunov aliada à técnica de redes neurais artificiais para detectar defeitos em sistemas mecânicos rotativos excitados por desbalanceamento e forças estocásticas do tipo ruído colorido.

Sanches e Pederiva (2008) identificam, a partir da equação matricial de Ljapunov, os parâmetros físicos de rolamento para um sistema mecânico de 40 graus de liberdade excitado estocasticamente. Diferentemente do trabalho de Pederiva (1992), o sistema é modelado por parâmetros distribuídos através de elementos finitos.

## Capítulo 3

### Modelagem Matemática do Sistema Mecânico

Os modelos matemáticos são ferramentas importantes no estudo da dinâmica de rotores, principalmente nos casos em que o estudo experimental é difícil de ser realizado. Os elementos básicos de um rotor são: o(s) disco(s), o eixo e os mancais. O desbalanceamento residual deve ser considerado através de massas desbalanceadoras, visto que existirá sempre em sistemas rotativos. Eixo, discos e massas desbalanceadoras são caracterizados por expressões de energia cinética. O eixo flexível deve ser caracterizado também por sua energia de deformação, enquanto que as forças exercidas pelos mancais são utilizadas no cálculo do trabalho virtual para que as forças correspondentes que atuam no eixo sejam obtidas (Lalanne e Ferraris, 1990).

As equações de movimento do rotor são deduzidas aplicando-se a equação de Lagrange (Equação 3.1) nas expressões das energias cinéticas ( $J$ ) e potenciais ( $U$ ) dos componentes:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial J}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial J}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Fq_i \quad (3.1)$$

onde  $q_i$  é a  $i$ -ésima coordenada generalizada,  $Fq_i$  é a  $i$ -ésima força generalizada atuando na coordenada  $q_i$ .



Sejam  $u$  e  $w$  as coordenadas do centro de massa do disco (O) no sistema  $R_o$ , considerando a coordenada ao longo de  $Y$  constante. Considera-se que a massa do disco seja  $M_D$  e o seu tensor de inércia em O, tendo  $xyz$  como direções principais de inércia, é:

$$I_O = \begin{bmatrix} I_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dz} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

### 3.2 Elemento de eixo

O eixo é considerado como uma viga de Timoshenko e, dessa forma, o efeito da rotação é levado em consideração. Para um elemento de eixo de comprimento  $L$ , a energia cinética é dada por:

$$J_E = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2\rho I L \Omega \int_0^L \dot{\psi} \theta dy \quad (3.5)$$

onde  $\rho$  é a massa por unidade de volume,  $S$  é a área da seção transversal do eixo e  $I$  é o momento de inércia de área da seção transversal do eixo em relação ao eixo neutro.

A primeira integral da Equação 3.5 é a expressão clássica para uma viga em flexão; a segunda integral representa o efeito da inércia rotatória; o termo  $\rho I L \Omega^2$  é constante e não influencia as equações e a última integral representa o efeito giroscópico (Lalanne e Ferraris, 1990).

O eixo é um elemento flexível, portanto a energia de deformação também deve ser considerada. A Figura 3.2 mostra a seção transversal do eixo deformada no plano XZ. O ponto C representa o centro geométrico e o ponto B ( $x,z$ ) é um ponto qualquer da seção transversal.



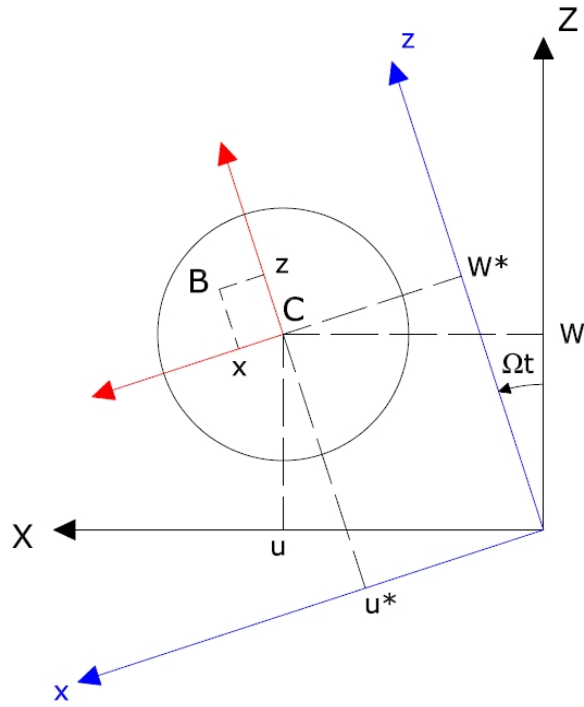


Figura 3.2 – Seção transversal do eixo

Se termos de segunda ordem são incluídos, a deformação longitudinal do ponto B é dada por:

$$\varepsilon = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \quad (3.6)$$

sendo que

$$\varepsilon = \varepsilon_l + \varepsilon_{nl} \quad (3.7)$$

onde  $\varepsilon$  é a deformação,  $\varepsilon_l$  representa os termos lineares,  $\varepsilon_{nl}$  são os termos não lineares,  $u^*$  e  $w^*$  são os deslocamentos do centro geométrico em relação aos eixos x e z respectivamente.

A energia de deformação é dada por:

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon^T \sigma d\tau \quad (3.8)$$

sendo  $\sigma$  a tensão e ' $T$ ' o símbolo de transposição de matrizes. A relação entre tensão e deformação é:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.9)$$

onde  $E$  é o módulo de Young do material. Então, a Equação 3.8 pode ser reescrita:

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_{\tau} (\varepsilon_l^2 + 2\varepsilon_l \varepsilon_{nl} + \varepsilon_{nl}^2) d\tau \quad (3.10)$$

A simetria da seção transversal da viga com relação aos eixos x e z resulta em

$$\int_{\tau} \varepsilon_l \varepsilon_{nl} d\tau = 0 \quad (3.11)$$

O terceiro termo da integral na Equação 3.10 é de segunda ordem e pode ser desprezado. A energia de deformação assume a seguinte forma (Lalanne e Ferraris, 1990):

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left( -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dS dy \quad (3.12)$$

Reescrevendo a Equação 3.12:

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left[ x^2 \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] dS dy \quad (3.13)$$

O terceiro termo da Equação 3.13 é nulo devido à simetria do eixo. Introduzindo os momentos de inércia da seção transversal em relação à x e z, tem-se:

$$I_x = \int_S z^2 dS \quad (3.14)$$

$$I_z = \int_S x^2 dS \quad (3.15)$$

A expressão da energia de deformação será:

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \left[ I_z \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.16)$$

Se o eixo for submetido à uma força axial constante  $F_o$ , haverá uma outra contribuição para a energia de deformação do eixo, dada por (Lalanne e Ferraris, 1990):

$$U_2 = \int_0^L \frac{F_o}{S} (\varepsilon_l + \varepsilon_{nl}) d\tau \quad (3.17)$$

onde  $S$  é a área da seção transversal do eixo.

Devido à simetria da seção transversal, o primeiro termo da integral desaparecerá. Usando as Equações 3.6 e 3.7, a Equação 3.17 pode ser escrita da seguinte forma:

$$U_2 = \frac{F_o}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (3.18)$$

A energia total de deformação ( $U_S$ ) é dada pela soma das parcelas  $U_1$  e  $U_2$ :

$$U_s = \frac{E}{2} \int_0^L \left[ I_z \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_o}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (3.19)$$

Se a equação anterior for escrita no sistema inercial  $R_o$ , pode-se deduzir, a partir da Figura 3.2, as seguintes relações:

$$u^* = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \quad (3.20)$$

$$w^* = u \sin \Omega t + w \cos \Omega t \quad (3.21)$$

A Equação 3.19 será escrita como:

$$U_s = \frac{E}{2} \int_0^L \left[ I_z \left( \cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left( \sin \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_o}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (3.22)$$

Em caso de eixos simétricos ( $I_x=I_z=I$ ), a Equação 3.22 torna-se:

$$U_s = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_o}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (3.23)$$

### 3.3 Elemento de mancal

A Figura 3.3 mostra esquematicamente o modelo do mancal adotado com os termos diretos e cruzados de rigidez e amortecimento mostrados esquematicamente, sendo os efeitos de flexão

desconsiderados. O trabalho virtual  $\delta W$  das forças que atuam no eixo é dado por (Lalanne e Ferraris, 1990):

$$\delta W = -k_{xx}u\delta u - k_{xz}w\delta u - k_{zx}u\delta w - k_{zz}w\delta w - c_{xx}\dot{u}\delta u - c_{xz}\dot{w}\delta u - c_{zx}\dot{u}\delta w - c_{zz}\dot{w}\delta w \quad (3.24)$$

ou então,

$$\delta W = F_u\delta u + F_w\delta w \quad (3.25)$$

onde  $F_u$  e  $F_w$  são as componentes das forças generalizadas. Na forma matricial, combinando as Equações 3.24 e 3.25:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

no qual a segunda matriz  $[C_m]$  representa a matriz de amortecimento do mancal.

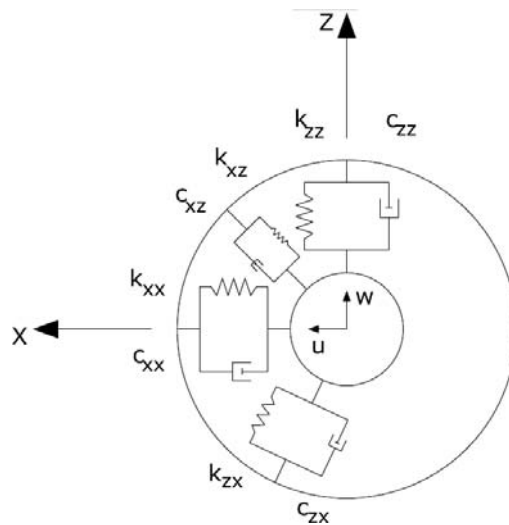


Figura 3.3 – Rigidez e amortecimento do mancal

### 3.4 Forças de desbalanceamento

O desbalanceamento é uma fonte de excitação importante, visto que as máquinas rotativas possuem um desbalanceamento residual gerado tanto por imperfeições na fabricação dos componentes rotativos como por erros de montagem. É definido como uma massa  $m_u$  situada a uma distância  $d$  do centro geométrico do eixo, conforme mostra a Figura 3.4.

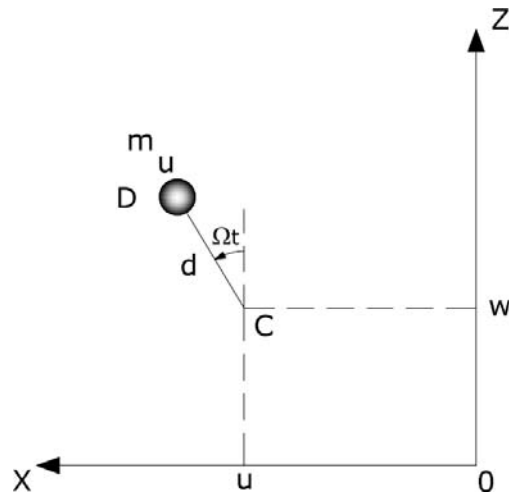


Figura 3.4 – Representação do desbalanceamento

A massa  $m_u$  permanece no plano perpendicular ao eixo Y e sua coordenada ao longo desse eixo é considerada constante. No sistema inercial  $R_o$  (XYZ), as coordenadas podem ser escritas como:

$$OD_{m_u} = \begin{Bmatrix} u + d \sin \Omega t \\ \text{constante} \\ w + d \cos \Omega t \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

A velocidade é obtida derivando-se a equação acima:

$$V_{m_u} = \frac{dOD}{dt} = \begin{Bmatrix} \dot{u} + d\Omega \cos \Omega t \\ 0 \\ \dot{w} - d\Omega \sin \Omega t \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

A expressão da energia cinética da massa de desbalanceamento situada no disco é (Lalanne e Ferraris, 1990):

$$J_{mu} = \frac{m_u}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega \dot{u} d \cos \Omega t - 2\Omega \dot{w} d \sin \Omega t) \quad (3.29)$$

O termo  $m_u \Omega^2 d^2 / 2$  é constante e não influencia as equações. Como a massa  $m_u$  é muito menor que a massa do rotor, a Equação 3.29 torna-se (Lalanne e Ferraris, 1990):

$$J_u \cong m_u \Omega d (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \quad (3.30)$$

### 3.5 Elementos finitos dos componentes do rotor

Com o avanço tecnológico dos computadores digitais, o método dos elementos finitos destaca-se como uma ferramenta de modelagem bastante útil no estudo da dinâmica de rotores. Neste trabalho serão utilizados os elementos propostos por Lalanne e Ferraris (1990), que se encontram em maiores detalhes no trabalho de Tapia (2003).

#### 3.5.1 Modelagem do disco

Os nós do disco possuem quatro graus de liberdade: dois deslocamentos  $u$  e  $w$  nas direções horizontal (X) e vertical (Z), respectivamente; e duas rotações  $\theta$  e  $\psi$  em torno dos eixos X e Z, respectivamente. Dessa forma, o vetor de deslocamentos nodais do disco é:

$$\delta = [u, w, \theta, \psi]^T \quad (3.31)$$

aplicando a equação de Lagrange e após linearização, tem-se (Lalanne e Ferraris, 1990):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial J_D}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial J_D}{\partial \delta} = \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

### 3.5.2 Modelagem do eixo

O eixo é considerado como uma viga de seção transversal circular constante. O elemento finito possui dois nós, portanto a matriz elementar é de ordem oito, incluindo quatro deslocamentos e quatro rotações conforme mostrado na Figura 3.5.

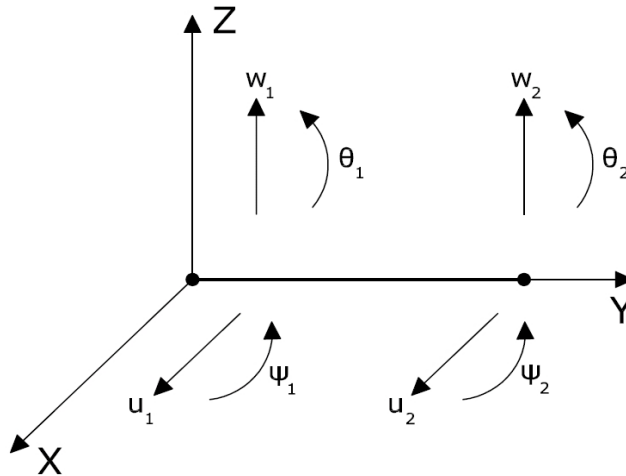


Figura 3.5 – Elemento finito de eixo

As relações entre os deslocamentos e os ângulos são:

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.33)$$

$$\psi = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.34)$$



e o vetor de deslocamentos nodais é dado por:

$$\delta = [u_1, w_1, \theta_1, \psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \psi_2]^T \quad (3.35)$$

que incluem os deslocamentos  $\delta u$  e  $\delta w$  correspondentes ao movimento nas direções X e Z respectivamente. Esses deslocamentos são representados da seguinte forma:

$$\delta u = [u_1, \psi_1, u_2, \psi_2]^T \quad (3.36)$$

$$\delta w = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2]^T \quad (3.37)$$

O elemento finito é construído a partir das relações:

$$u = N_1(y)\delta u \quad (3.38)$$

$$w = N_2(y)\delta w \quad (3.39)$$

sendo que as funções  $N_1(y)$  e  $N_2(y)$  são funções de forma típicas de uma viga submetida à flexão:

$$N_1(y) = \left[ 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (3.40)$$

$$N_2(y) = \left[ 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (3.41)$$

A energia cinética do eixo, expressa pela Equação 3.5, pode ser reescrita de outro modo:

$$\begin{aligned}
J_E = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L \left[ \delta \dot{u}^T N_1^T N_1 \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T N_2^T N_2 \delta \dot{w} \right] dy + \\
& + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left[ \delta \dot{u}^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta \dot{w} \right] dy - \\
& - 2\rho I \Omega \int_0^L \delta \dot{u}^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta w dy + \rho I L \Omega^2
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Substituindo as Equações 3.40 e 3.41 na equação acima, obtém-se o resultado após integração (Lalanne e Ferraris, 1990):

$$\begin{aligned}
J_E = & \frac{1}{2} \delta \dot{u}^T [M_1] \delta \dot{u} + \frac{1}{2} \delta \dot{w}^T [M_2] \delta \dot{w} + \frac{1}{2} \delta \dot{u}^T [M_3] \delta \dot{u} + \\
& + \frac{1}{2} \delta \dot{w}^T [M_4] \delta \dot{w} + \Omega \delta \dot{u}^T [M_5] \delta w + \rho I L \Omega^2
\end{aligned} \tag{3.43}$$

onde  $[M_1]$  e  $[M_2]$  são as matrizes clássicas de massa,  $[M_3]$  e  $[M_4]$  são referentes à inércia rotatória e  $[M_5]$  expressa o efeito giroscópico do eixo. Aplicando a equação de Lagrange na Equação 3.43:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial J_E}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial J_E}{\partial \delta} = [M + M_s] \{\ddot{\delta}\} + G \{\dot{\delta}\} \tag{3.44}$$

A matriz  $[M]$  é obtida de  $[M_1]$  e  $[M_2]$ ,  $[M_s]$  de  $[M_3]$  e  $[M_4]$ , e  $[G]$ , de  $[M_5]$ . A matriz de massa  $[M]$  é dada por:

$$[M] = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

a matriz  $[M_s]$  de inércia rotatória pode ser escrita como:

$$[M_s] = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

e a matriz giroscópica é dada por:

$$[G] = \frac{\rho I \Omega}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

A energia de deformação do eixo é obtida das Equações 3.6, 3.7 e 3.23, resultando em:

$$\begin{aligned}
U_s = & \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \delta u^T \frac{d^2 N_1^T}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} \delta u + \delta w^T \frac{d^2 N_2^T}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \delta w \right] dy + \\
& + \frac{F_o}{2} \int_0^L \left[ \delta u^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta u + \delta w^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta w \right] dy
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Após integração, a expressão acima se torna:

$$U_s = \frac{1}{2} \delta u^T K_1 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^T K_2 \delta w + \frac{1}{2} \delta u^T K_3 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^T K_4 \delta w \tag{3.49}$$

onde  $[K_1]$  e  $[K_2]$  são as matrizes de rigidez clássicas,  $[K_3]$  e  $[K_4]$  são matrizes de rigidez devido à força axial. O efeito do cisalhamento deve ser levado em consideração e é caracterizado pelo coeficiente abaixo:

$$a = \frac{12EI}{GS_r L^2} \tag{3.50}$$

$S_r$  ( $\cong S$ ) é a área da seção transversal reduzida do eixo e  $G$  é o módulo de cisalhamento, que pode ser calculado por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{3.51}$$

$\nu$  é o coeficiente de Poisson.

Aplicando a equação de Lagrange na Equação 3.49:

$$\frac{\partial U_s}{\partial \delta} = [K] \delta \tag{3.52}$$

onde  $[K] = [K_c] + [K_f]$ .  $[K_c]$  é a matriz clássica de rigidez e é originada de  $[K_1]$  e  $[K_2]$ ,  $[K_f]$  é devido às forças axiais e é originada de  $[K_3]$  e  $[K_4]$ . As matrizes são dadas por:

$$[K_c] = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$[K_f] = \frac{F_o}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

### 3.5.3 Modelagem dos mancais

Na modelagem dos mancais, o efeito da flexão e os momentos de rotação serão desprezados. As matrizes de rigidez e amortecimento são obtidas diretamente da Equação 3.26, onde a primeira matriz é a matriz de rigidez e a segunda, a matriz de amortecimento.

### 3.5.4 Modelagem do desbalanceamento

Aplicando a equação de Lagrange na Equação 3.30:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial J_u}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial J_u}{\partial \delta} = -m_u d \Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

com  $\delta = [u, w]^T$ .

A Equação 3.55 considera que a massa desbalanceadora  $m_u$  está localizada sobre o eixo Z no instante  $t=0$ . Se a massa estiver em outra posição angular  $\alpha$ , o vetor das forças de desbalanceamento é escrito como:

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = m_u d \Omega^2 \begin{bmatrix} \sin(\Omega t + \alpha) \\ \cos(\Omega t + \alpha) \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

### 3.6 Estrutura das matrizes globais do sistema rotativo

A partir da descrição da seção anterior, montam-se as matrizes globais de massa, rigidez e amortecimento do sistema. A representação esquemática das matrizes globais é fiel ao modelo matemático que será descrito em detalhes no capítulo seguinte e é referente ao sistema rotativo descrito no Capítulo 6. A estrutura da matriz global de massa (eixo + disco) é:

$$[M_G] = [K_{EG}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 5 & 10 & 15 & 20 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 5 \\ 10 \\ 15 \\ 20 \end{matrix} & \begin{matrix} \blacksquare & & & & \\ \blacksquare & \blacksquare & & & \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & & \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{matrix} \end{matrix} \quad (3.57)$$

Pode-se observar que a matriz global de massa não é uma matriz cheia e os seus termos estão localizados em torno da diagonal principal. Deve-se ressaltar que essa matriz é simétrica e todos os termos são conhecidos e dados pelas Equações 3.32, 3.45 e 3.46.

A estrutura da matriz global de rigidez do eixo é semelhante à estrutura da matriz de massa, sendo também uma matriz simétrica de e de termos conhecidos gerados pelo modelo de elementos finitos.

A estrutura da matriz de rigidez global dos mancais vem da Equação 3.26, que trata do elemento de mancal, e é da seguinte forma:

$$[K_{mG}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 5 & 10 & 15 & 20 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 5 \\ 10 \\ 15 \\ 20 \end{matrix} & \begin{matrix} \blacksquare & & & & \\ & \blacksquare & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \blacksquare \end{matrix} \end{matrix} \quad (3.58)$$

Pode-se notar que os termos estão distribuídos apenas em posições bastante específicas dentro da matriz global do sistema, que correspondem às posições nas quais os mancais estão montados fisicamente no sistema rotativo e que serão mostradas no Capítulo 6. Como a matriz de rigidez global do sistema  $[K_G]$  é dada pela soma das Equações 3.57 e 3.58, nota-se que os termos de mancal são perfeitamente identificáveis dentro dessa matriz, sendo essa uma informação bastante relevante na montagem de um estimador desses parâmetros.

A estrutura da matriz giroscópica global dos elementos disco + eixo, dada pela soma das equações dos elementos (3.32) e (3.47), é da forma:

$$\Omega[G_G] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 5 & 10 & 15 & 20 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 5 \\ 10 \\ 15 \\ 20 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{Matrix structure with black and gray blocks} \\ \end{matrix} \end{matrix} \quad (3.59)$$

A matriz giroscópica é uma matriz anti-simétrica na qual os termos estão dispostos em torno da diagonal da matriz e são todos determinados pelo modelo de elementos finitos. Os termos positivos estão em cinza e os negativos em preto.

A matriz de amortecimento global total do sistema é dada pela equação:

$$[P] = [C_G] + \Omega[G_G] \quad (3.60)$$

sendo  $[C_G]$  a matriz global de amortecimento dos mancais.

Como o elemento de mancal também está descrito pela Equação 3.26, a matriz de amortecimento global dos mancais também possui a mesma estrutura da matriz global de rigidez dos mancais dada por (3.58), sendo que também os termos de amortecimento de mancal estão situados apenas em posições específicas dentro da matriz  $[P]$ , facilitando a elaboração de um algoritmo de estimação.



É preciso ressaltar que o objetivo de (3.57), (3.58) e (3.59) é mostrar as estruturas das matrizes globais, que serão válidas para todo sistema rotativo modelado via elementos finitos. Todas as representações mostradas são do sistema rotativo em estudo (Capítulo 6) e foram aproveitadas para mostrar a simetria das matrizes de massa e rigidez e a anti-simetria da matriz giroscópica.

## Capítulo 4

### Relação Entrada-Saída em Sistemas Mecânicos

O sistema rotor-mancais pertence à classe de sistemas mecânicos que podem ser descritos por uma equação diferencial não homogênea, a qual, após ser feito o equilíbrio das várias forças externas que atuam no sistema, relaciona os parâmetros físicos de massa, rigidez e amortecimento às variáveis do sistema (deslocamentos, velocidades e acelerações).

Dessa forma, conclui-se que os parâmetros podem ser determinados através da observação das forças e das variáveis do sistema. Esse processo é conhecido como identificação paramétrica do sistema. Como ressalta Pederiva (1992), os parâmetros de um modelo são determinados através do desenvolvimento de algoritmos que operam as variáveis do sistema e as forças externas, fornecendo estimativas para os parâmetros físicos desejados.

#### 4.1 Representação no espaço de estados

A representação em espaço de estados é uma forma bastante poderosa para tratar sistemas mecânicos lineares, não lineares, variantes ou invariantes no tempo, utilizando a combinação do conceito de estado com a capacidade de solução de equações diferenciais através de um computador digital (Ogata, 1998).

Define-se como estado o menor conjunto de variáveis (variáveis de estado), tais que o conhecimento dessas variáveis em um instante inicial  $t = t_0$ , juntamente com o conhecimento das entradas (forças externas) para  $t \geq t_0$ , determina o comportamento do sistema para qualquer instante  $t \geq t_0$ .

Seja um sistema mecânico com  $n$  graus de liberdade, linear e invariante no tempo descrito pela equação diferencial matricial:

$$[M]\{\ddot{\xi}(t)\} + [P]\{\dot{\xi}(t)\} + [K]\{\xi(t)\} = [S]\{u(t)\} \quad (4.1)$$

no qual

$[M]_{(n,n)}$  é uma matriz denominada matriz de massa;

$[P]_{(n,n)}$  é a matriz de amortecimento e está relacionada às forças proporcionais à velocidade;

$[K]_{(n,n)}$  é a matriz de rigidez relacionada às forças proporcionais ao deslocamento;

$[S]_{(n,p)}$  é a matriz de entradas ou excitações;

$\{u(t)\}$  é um vetor  $p$ -dimensional das excitações ou entradas;

$\xi(t), \dot{\xi}(t), \ddot{\xi}(t)$  representam os vetores  $n$  dimensionais correspondentes aos deslocamentos, velocidades e acelerações, respectivamente.

O vetor de estado  $\{x(t)\}$  é escrito da seguinte forma:

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} \xi(t) \\ \dots \\ \dot{\xi}(t) \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

A Equação 4.1 pode ser reescrita como:

$$\{\dot{x}(t)\} = [A]\{x(t)\} + [B]\{u(t)\} \quad (4.3)$$

com

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{(n,n)} & I_{(n,n)} \\ A_{1(n,n)} & A_{2(n,n)} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

e

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{(n,p)} \\ B_{1(n,p)} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Dessa forma,  $[A]$  é uma matriz quadrada de ordem  $f = 2n$  e é denominada matriz do sistema ou matriz de estado, é formada por quatro submatrizes representadas na Equação 4.4;  $[B]$  é uma matriz  $(2n,p)$  denominada matriz de entrada. A submatriz  $[I_{(n,n)}]$  representa a matriz identidade, enquanto que  $[0_{(n,n)}]$  é a matriz nula.

A equação das medidas (saídas) do sistema descrito pela Equação 4.3 é dada por:

$$\{y(t)\} = [C]\{x(t)\} \quad (4.6)$$

sendo que  $[C]$  é a matriz de saída ou de medidas e  $\{y(t)\}$  é um vetor  $m$ -dimensional das variáveis medidas.

A solução da Equação 4.3 é dada por (Melsa e Sage, 1973):

$$\{x(t)\} = \Phi(t, t_0)\{x_0\} + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)[B]\{u(\tau)\}d\tau \quad (4.7)$$

com  $\{x_0\} = \{x(t_0)\}$  e a matriz fundamental  $\Phi(t, t_0)$  satisfazendo a equação matricial diferencial homogênea:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = [A]\Phi(t, t_0) \quad (4.8)$$

tendo a seguinte a condição inicial

$$\Phi(t_0, t_0) = [I] \quad (4.9)$$

A matriz fundamental possui as seguintes propriedades:

$$\Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t_2, t_0), \forall t_0, t_1, t_2, \quad (4.10)$$

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t), \forall t, t_0 \quad (4.11)$$

A solução para a matriz fundamental é dada por uma função exponencial matricial:

$$\Phi(t, t_0) = e^{[A](t-t_0)} \quad (4.12)$$

que pode ser representada por uma série de potência convergente:

$$e^{[A]t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{([A]t)^k}{k!} \quad (4.13)$$

Existem diversas maneiras de se calcular a Equação 4.13. Alguns métodos são abordados por Ogata (2003).

## 4.2 Controlabilidade e observabilidade

Seja o sistema dinâmico descrito pelas Equações 4.3 e 4.6. Diz-se que um sistema é controlável no instante  $t_0$  se for possível, por meio de um vetor de controle não limitado ( $\{u(t)\}$ ), transferir o sistema de qualquer estado inicial  $\{x(t_0)\}$  para qualquer outro estado, em um intervalo de tempo finito (Ogata, 2003). Em outras palavras, a controlabilidade refere-se à influência do vetor de entradas no vetor de estado (Eduardo, 2003). Se todo estado for controlável, o sistema é considerado completamente controlável.

**Teorema 1:** O sistema descrito pela equação 4.3 é completamente controlável se, e somente se, o posto da matriz  $[\Xi]$  for igual a  $f$

$$[\Xi] = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{f-1}B] \quad (4.14)$$

sendo  $f = 2n$ ,  $n$  é o número de graus de liberdade.

O sistema é dito observável no instante  $t_0$  se, com o sistema no estado  $\{x(t_0)\}$ , for possível determinar esse estado a partir da observação da saída  $\{y(t)\}$  durante um intervalo de tempo finito (Ogata, 2003). Se todo estado  $\{x(t_0)\}$  puder ser determinado pela observação de  $\{y(t)\}$  durante o intervalo finito  $t_0 \leq t \leq t_1$ , o sistema é completamente observável.

O conceito de observabilidade é útil quando surge a necessidade de, a partir de variáveis mensuráveis, estimar variáveis de estado que não podem ser medidas na prática por alguma limitação do sistema.

**Teorema 2:** O sistema descrito pela Equação 4.3 é completamente observável se, e somente se, o posto da matriz de observabilidade  $[\Omega]$  for igual a  $f$ .

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} [C] \\ [C][A] \\ [C][A]^2 \\ \vdots \\ [C][A]^{f-1} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Se existirem  $f$  linhas linearmente independentes em  $[\Omega]$ , a dinâmica do sistema em estudo pode ser observada completamente a partir das variáveis medidas  $y(t)$ .

**Definição 1:** Um sistema completamente observável é chamado exatamente observável se, e somente se, as primeiras  $f$  linhas da matriz de observabilidade  $[\Omega]$  forem linearmente independentes (Shafai e Carroll, 1984).

### 4.3 Formas normais da equação de estado

Sistemas dinâmicos descritos na forma das Equações 4.3 e 4.6 podem ser representados de diferentes maneiras efetuando-se uma mudança de coordenadas do vetor de estado. Essas diferentes formas de representação são chamadas de formas normais da equação de estado, ou seja, formas com diferentes bases de coordenadas (Pederiva, 1992). Dessa forma, a descrição entrada-saída do sistema é alterada, assim como as matrizes do sistema, de entrada e de medidas.

Através de uma base de coordenadas adequadas, é possível conseguir outras matrizes  $[A^*]$ ,  $[B^*]$  e  $[C^*]$  com estruturas internas particulares que, em um processo de identificação, poderão ter estruturas simples do ponto de vista da elaboração de algoritmos computacionais para a estimação de parâmetros. Essas estruturas especiais são obtidas através da escolha de determinadas bases a partir de uma transformação de coordenadas.

Seja um sistema dinâmico exatamente observável, de ordem  $f$ , descrito pelas Equações 4.3 e 4.6. A partir da matriz de observabilidade, as primeiras  $f$  linhas dessa matriz são escolhidas para a montagem da matriz transformação de coordenadas  $[T]$ . Sendo o sistema exatamente observável,  $[T]$  não é singular e pode ser invertida.

Fazendo a transformação de coordenadas:

$$\{x^*\} = [T]\{x\} \quad (4.16)$$

pode-se reescrever o sistema da seguinte maneira:

$$\{\dot{x}^*(t)\} = [A^*]\{x^*(t)\} + [B^*]\{u(t)\} \quad (4.17)$$

e

$$\{y^*(t)\} = [C^*]\{x^*(t)\}. \quad (4.18)$$

Das Equações 4.16, 4.17 e 4.18 obtêm-se as seguintes relações:

$$[A^*] = [T][A][T]^{-1} \quad (4.19)$$

$$[B^*] = [T][B] \quad (4.20)$$

$$[C^*] = [C][T]^{-1} \quad (4.21)$$

As matrizes  $[A^*]$  e  $[C^*]$  possuem as seguintes estruturas internas (Shafai e Carroll, 1984):

$$[A^*] = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(f-m,m)} & I_{(f-m,f-m)} \\ A_{1(m,m)}^* & A_{2(m,f-m)}^* \end{bmatrix} \quad (4.22)$$



$$[C^*] = \begin{bmatrix} I_{(m,m)} & \vdots & 0_{(m,f-m)} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

A demonstração dessas propriedades está baseada no fato da matriz de transformação ser formada pelas primeiras  $f$  linhas da matriz de observação. A partir das Equações 4.19 e 4.21, encontram-se as estruturas acima. A nova matriz  $[B^*]$  não apresenta nenhuma estrutura interna particular (Pederiva, 1992).

Quando  $m=n$ , ou seja, todos os deslocamentos são medidos, a estrutura interna de  $[A^*]$  é idêntica a de sistemas descritos pelas Equações 4.3 e 4.4. Aplicando a transformação de coordenadas a esse sistema e substituindo  $m$  por  $n$  na equação 4.23, a matriz transformação de coordenadas  $[T]$ , formada a partir das primeiras  $f$  linhas da matriz de observabilidade, será:

$$[T] = \begin{bmatrix} I_{(n,n)} & 0_{(n,n)} \\ 0_{(n,n)} & I_{(n,n)} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

e pode-se notar que o sistema permanece inalterado.

Caso a submatriz  $[I]$  presente na Equação 4.23 fosse de ordem maior que  $n$ , a observabilidade exata do sistema não seria mais garantida e a matriz  $[T]$  seria singular, demonstrando que medidas de deslocamentos e das correspondentes velocidades são redundantes e observam subespaços semelhantes em sistemas mecânicos (Pederiva, 1992). Portanto, apenas com as medições dos deslocamentos em sistemas mecânicos, a observabilidade completa do sistema é garantida.

Os algoritmos de identificação paramétrica serão montados tendo como base as Equações 4.22 e 4.23, ou seja, os parâmetros das matrizes  $[A_1^*]$  e  $[A_2^*]$  devem ser estimados. Caso sejam medidos todos os deslocamentos, essas matrizes são as mesmas  $[A_1]$  e  $[A_2]$  que contêm os parâmetros físicos. Por outro lado, se houver uma variação na estrutura da matriz de medidas, as matrizes  $[A_1^*]$  e  $[A_2^*]$  podem não apresentar uma relação tão simples como a da matriz mostrada

na Equação 4.4. Neste caso, as estruturas mostradas nas Equações 4.22 e 4.23 deverão ser utilizadas juntamente com uma transformação inversa para que se retorne ao sistema original.

Dessa forma, a matriz de transformação não seria conhecida, visto que ela também depende da matriz do sistema  $[A]$ , porém a sua regra de formação é conhecida, já que é formada a partir da matriz de observabilidade. A partir da Equação 4.19, tem-se a seguinte relação:

$$[T][A] = [A^*][T]. \quad (4.25)$$

Para o cálculo da matriz  $[A]$ , assume-se que  $[A^*]$  é estimada por métodos de identificação paramétrica e trabalha-se sobre a Equação 4.25 para que sejam extraídas relações que permitam a determinação única dos parâmetros da matriz  $[A]$  original. Tais termos podem ser lineares ou não lineares nos parâmetros físicos, dependendo do nível de redução no número de parâmetros obtidos com a transformação dada pela Equação 4.16 (Pederiva, 1992).

#### 4.4 Discretização da equação de estado no tempo

Toda a abordagem feita até aqui foi para sistemas descritos em tempo contínuo. Para o processamento digital, o vetor de estado medido estará na forma discretizada, portanto o sistema como um todo deverá ser descrito em tempo discreto.

Considera-se o intervalo de tempo de análise compreendido entre os instantes  $t_k$  e  $t_{k+1}$ , no qual

$$t_k = t(k\Delta t), k = 0, 1, \dots, n \quad (4.26)$$

sendo  $\Delta t$  o tempo de discretização do sinal medido.

O vetor de entradas  $u(t)$ , mostrado na Equação 4.3, é considerado constante no intervalo  $(t_k, t_{k+1})$  de forma que esse vetor possa ser escrito da seguinte forma:

$$\{u(t)\} = \{u(t_k)\} = \{u(k)\}, \text{ com } t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (4.27)$$

A solução do sistema neste intervalo é dada pela Equação 4.7, que na forma discretizada pode ser escrita como:

$$\{x(t_{k+1})\} = e^{[A]\Delta t} \{x(t_k)\} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{[A](t_{k+1}-s)} [B] \{u(s)\} ds. \quad (4.28)$$

Pode-se escrever a Equação 4.28 da seguinte forma (Pederiva, 1992):

$$\{x(t_{k+1})\} = [F] \{x(t_k)\} + [G] \{u(t_k)\} \quad (4.29)$$

sendo que

$$[F] = e^{[A]\Delta t} \quad (4.30)$$

e

$$[G] = \int_0^{\Delta t} e^{[A](\Delta t-s)} ds [B] \quad (4.31)$$

Como a matriz  $[A]$  é regular, então:

$$[G] = [A]^{-1} ([F] - [I]) [B] \quad (4.32)$$

Métodos convencionais no domínio do tempo estimam as matrizes  $[F]$  e  $[G]$ . As Equações 4.30 e 4.31 representam operações não lineares que causam deterioração na estrutura da matriz

[A]. Isso representa uma grande desvantagem já que, como visto no capítulo anterior, apenas os termos de mancal são desconhecidos e se encontram em posições bem definidas na matriz do sistema. A estimação de parâmetros via matriz fundamental não será abordada nessa dissertação e pode ser encontrada no trabalho de Pederiva (1992).

O método utilizado neste trabalho aproveita diretamente a estrutura da matriz [A] na estimação dos parâmetros dos mancais. Para isso, matrizes de correlação devem ser estimadas e é possível trabalhar com o modelo contínuo no tempo, conforme mostrará o capítulo seguinte.

## Capítulo 5

### Equação Matricial de Ljapunov

Neste capítulo, apresentam-se as respostas de sistemas dinâmicos lineares sob três tipos de excitação diferentes: aleatória tipo ruído branco, ruído colorido (ruído branco que passa por um sistema filtro) e excitação harmônica por desbalanceamento. Considera-se também a obtenção de modelos com características especiais através de transformação de coordenadas.

#### 5.1 Resposta de sistemas excitados estocasticamente

O comportamento de muitos sistemas mecânicos pode ser descrito como a resposta a uma excitação aleatória. A excitação exercida pela água em contato com a estrutura de uma bomba ou a excitação do ar nas asas de um avião são exemplos desse fenômeno.

Considera-se que o sistema mecânico seja descrito na forma da Equação 4.3. O vetor de entradas  $\{u(t)\}$  representa um processo estocástico do tipo ruído branco com as seguintes características:

$$\varepsilon\{u(t)\} = 0, \quad (5.1)$$

$$\varepsilon\{u(t_1)u^T(t_2)\} = R_{uu}(t_1, t_2) = \Psi_{uu}(t_1)\delta_d(t_1 - t_2), \quad (5.2)$$

no qual  $\varepsilon$  representa a esperança matemática,  $R_{uu}$  é a matriz de correlação do ruído  $u(t)$  entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ ,  $\Psi_{uu}(t_1)$  é uma matriz de intensidade de ruído e  $\delta_d$  é a função delta de Dirac.

Melsa e Sage (1973) formularam analiticamente uma equação que relaciona as matrizes de entrada de um sistema linear com as funções de correlação do sistema. Dessa forma, relações entre os parâmetros físicos e as matrizes de correlações das variáveis medidas podem ser obtidas.

Como ressalta Eduardo (2003), a função de correlação estabelece a influência dos valores de uma determinada grandeza sobre os valores dessa mesma grandeza em instantes de tempo futuros, permitindo o conhecimento de como os valores medidos estão relacionados entre si.

Calculando-se o valor médio dos dois lados da Equação 4.7, obtém-se:

$$\mu_x(t) = \varepsilon \{x(t)\} = \Phi(t, t_0) \mu_x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) [B] \mu_u(\tau) d\tau, \quad (5.3)$$

que pode ser considerada a solução da equação diferencial:

$$\{\dot{\mu}_x(t)\} = [A] \{\mu_x(t)\} + [B] \{\mu_u(t)\} \quad (5.4)$$

A expressão da matriz de correlações é obtida diretamente da definição:

$$[R_{xx}(t, t + \tau)] = [R_{xx}(\tau)] = \varepsilon \left\{ \{x(t)\} \{x^T(t + \tau)\} \right\} \quad (5.5)$$

Da expressão acima, pode-se obter outra função de correlação:

$$[R_{uu}(t, t + \tau)] = [R_{uu}(\tau)] = \varepsilon \left\{ \{u(t)\} \{u^T(t + \tau)\} \right\} \quad (5.6)$$

Assumindo que não exista correlação entre  $\{x_0\}$  e  $\{u(t)\}$  e utilizando as Equações 5.5 e 4.7 para  $t \geq t_0$ , obtém-se (Melsa e Sage, 1973):

$$\begin{aligned} [R_{xx}(t)] &= \Phi(t, t_0)[R_{xx}(t_0)]\Phi^T(t + \tau, t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t+\tau} \Phi(t_1, s_1)[B][R_{uu}(s_1, s_2)][B]\Phi^T(t + \tau, s_2) ds_1 ds_2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Através das regras de integração da função delta de Dirac e sob a hipótese de que  $\{u(t)\}$  é um ruído branco, a Equação 5.7 torna-se (Pederiva, 1992):

$$\begin{aligned} [R_{xx}(t)] &= \Phi(t, t_0)[R_{xx}(t_0)]\Phi^T(t + \tau, t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^t \Phi(t, s)[B]\Psi_{uu}(s)[B]^T \Phi^T(t + \tau, s) ds, \end{aligned} \quad (5.8)$$

para  $\tau > 0$ .

Diferenciando (5.8), obtém-se a *Equação Matricial de Ljapunov* generalizada (Melsa e Sage, 1973):

$$[A][R_{xx}(\tau)] + [R_{xx}(\tau)][A]^T + [B]\Psi_{uu}(t)[B]^T e^{[A]^T \tau} = [\dot{R}_{xx}(\tau)] \quad (5.9)$$

Considera-se  $\{u(t)\}$  um processo aleatório estacionário, portanto a derivada do lado direito de (5.9) é igual a zero e

$$\Psi_{uu}(t) = \Psi_{uu} = \text{constante} \quad (5.10)$$

Portanto,

$$[A][R_{xx}(\tau)] + [R_{xx}(\tau)][A]^T = -[B]\Psi_{uu}(t)[B]^T e^{[A]^T \tau} \quad (5.11)$$

que pode ser expandida na forma (Pederiva, 1992):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{\xi\xi}(\tau_i) & R_{\xi\dot{\xi}}(\tau_i) \\ R_{\dot{\xi}\xi}(\tau_i) & R_{\dot{\xi}\dot{\xi}}(\tau_i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{\xi\xi}(\tau_i) & R_{\xi\dot{\xi}}(\tau_i) \\ R_{\dot{\xi}\xi}(\tau_i) & R_{\dot{\xi}\dot{\xi}}(\tau_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A_1^T \\ I & A_2^T \end{bmatrix} = \\ = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \Psi_{uu} B_1^T \end{bmatrix} e^{[A]^T \tau_i} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Efetuada-se as multiplicações acima, obtém-se a equação que relaciona os parâmetros físicos com as correlações do sinal medido:

$$R_{\dot{\xi}\dot{\xi}}(\tau_i) + R_{\xi\xi}(\tau_i)A_1^T + R_{\xi\dot{\xi}}(\tau_i)A_2^T = 0 \quad (5.13)$$

É importante ressaltar que a Equação 5.13 é válida quando todo o vetor de estado (deslocamentos e velocidades) é conhecido.

Com a escolha de diferentes  $\tau_i$ 's, tem-se um número suficiente de equações para estimar a matriz  $[A]$ . Um estimador pode ser montado da seguinte forma, para duas defasagens temporais  $\tau_1$  e  $\tau_2$ :

$$[\Theta] = -[Z]^{-1}[\hat{Y}], \quad (5.14)$$

com



$$[\Theta] = \begin{bmatrix} A_1^T \\ A_2^T \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

$$[\hat{Y}] = \begin{bmatrix} R_{\xi\xi}(\tau_1) \\ R_{\xi\xi}(\tau_2) \end{bmatrix}, \quad (5.16)$$

e

$$[Z] = \begin{bmatrix} R_{\xi\xi}(\tau_1) & R_{\xi\xi}(\tau_1) \\ R_{\xi\xi}(\tau_2) & R_{\xi\xi}(\tau_2) \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

## 5.2 Resposta de sistemas excitados por forças harmônicas e estocásticas

Tendo o sistema um desbalanceamento residual, essa forma de excitação deve ser levada em consideração na resposta dinâmica. Assim, a Equação 4.1 é reescrita acrescentando-se ao lado da excitação estocástica  $\{u(t)\}$  uma excitação harmônica  $\{n(t)\}$  da seguinte maneira:

$$[M] \{\ddot{\xi}(t)\} + [P] \{\dot{\xi}(t)\} + [K] \{\xi(t)\} = [S] \{u(t)\} + [H] \{n(t)\} \quad (5.18)$$

sendo  $[S]$  a matriz de entradas aleatória,  $[H]$  a matriz de entradas harmônica e  $\{n(t)\}$  o vetor de entradas do sinal harmônico com frequência  $\Omega$  e fase  $\beta$ , que pode ser escrito da forma:

$$\{n(t)\} = \begin{Bmatrix} \text{sen}(\Omega t + \beta) \\ \text{cos}(\Omega t + \beta) \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

A matriz  $[H]$  apresenta a seguinte estrutura:

$$[H] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ m_u d \Omega^2 & 0 \\ 0 & m_u d \Omega^2 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

no qual  $m_u$  é a massa desbalanceadora e  $d$  é a excentricidade dessa massa, conforme detalhado no capítulo 3.

Reescrevendo a Equação 5.18 na forma de espaço de estados:

$$\{\dot{x}(t)\} = [A]\{x(t)\} + [B]\{u(t)\} + [E]\{n(t)\} \quad (5.21)$$

no qual

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ M^{-1}S \end{bmatrix} \text{ e } [E] = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ M^{-1}H \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Da definição em (5.5), pode-se concluir que

$$[\dot{R}_{xx}(t, t + \tau)] = \varepsilon \left\{ \{\dot{x}(t)\} \{x^T(t + \tau)\} \right\} + \varepsilon \left\{ \{x(t)\} \{\dot{x}^T(t + \tau)\} \right\} \quad (5.23)$$

Transpondo a Equação 5.21 no instante  $t + \tau$ :

$$\{\dot{x}^T(t + \tau)\} = \{x^T(t + \tau)\}[A]^T + \{u^T(t + \tau)\}[B]^T + \{n^T(t + \tau)\}[E]^T \quad (5.24)$$

Substituindo (5.21) e (5.24) em (5.23) e admitindo que o processo aleatório seja estacionário, tem-se (Eduardo, 2003):

$$[A][R_{xx}(\tau_i)] + [R_{xx}(\tau_i)][A]^T + [E][R_{nx}(\tau_i)] + [R_{xn}(\tau_i)][E]^T = -[B]\Psi_{uu}[B]^T e^{[A]^T \tau_i} \quad (5.25)$$

Se o sistema for excitado apenas por desbalanceamento, a equação acima torna-se:

$$[A][R_{xx}(\tau_i)] + [R_{xx}(\tau_i)][A]^T + [E][R_{nx}(\tau_i)] + [R_{xn}(\tau_i)][E]^T = 0 \quad (5.26)$$

Define-se uma matriz auxiliar composta pela matriz identidade e pela matriz de massa do sistema da seguinte forma:

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} I_{(n,n)} & 0 \\ 0 & -M_{(n,n)} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Pré-multiplicando (5.26) por (5.27) e depois pós-multiplicando o resultado por  $[\bar{M}]^T$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ K & P \end{bmatrix} [R_{xx}] [\bar{M}]^T + [\bar{M}] [R_{xx}] \begin{bmatrix} 0 & K^T \\ I & P^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -H \end{bmatrix} [R_{nx}] [\bar{M}]^T + [\bar{M}] [R_{xn}] \begin{bmatrix} 0 & -H^T \end{bmatrix} = 0 \quad (5.28)$$

Sabe-se que a matriz de correlações é dada por:

$$[R_{xx}(\tau_i)] = \begin{bmatrix} R_{\xi\xi}(\tau_i) & R_{\xi\dot{\xi}}(\tau_i) \\ R_{\dot{\xi}\xi}(\tau_i) & R_{\dot{\xi}\dot{\xi}}(\tau_i) \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Resolvendo a Equação 5.28, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} R_{\dot{\xi}\dot{\xi}}(\tau_i) + R_{\xi\xi}(\tau_i) & -R_{\dot{\xi}\dot{\xi}}(\tau_i)M + R_{\xi\xi}(\tau_i)K^T + R_{\xi\xi}(\tau_i)P^T \\ -MR_{\dot{\xi}\dot{\xi}}(\tau_i) + KR_{\xi\xi}(\tau_i) + PR_{\xi\xi}(\tau_i) & -KR_{\dot{\xi}\dot{\xi}}(\tau_i)M - MR_{\dot{\xi}\dot{\xi}}(\tau_i)K^T - PR_{\dot{\xi}\dot{\xi}}(\tau_i)M - MR_{\dot{\xi}\dot{\xi}}P^T \end{bmatrix} = \\ & = - \begin{bmatrix} 0 & T_1 \\ T_2 & T_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Se  $T_1 = 0$ , obtém-se uma equação semelhante à Equação 5.13, na qual os parâmetros físicos do sistema aparecem junto com as correlações do vetor de estado. A obtenção de  $T_1$  é proveniente do produto:

$$[\bar{M}][R_{xn}][0 \quad -H^T] \quad (5.31)$$

Escrevendo  $[R_{xn}]$ , que é uma matriz cheia, na forma de quatro submatrizes:

$$[R_{xn(f,2)}] = \begin{bmatrix} R_{1(n,1)} & R_{2(n,1)} \\ R_{3(n,1)} & R_{4(n,1)} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Usando (5.32) e substituindo no produto (5.31):

$$\begin{bmatrix} R_{1(n,1)} & R_{2(n,1)} \\ -M_{(n,n)}R_{3(n,1)} & -M_{(n,n)}R_{4(n,1)} \end{bmatrix} [0_{(2,n)} \quad -H_{(2,n)}^T] = \begin{bmatrix} 0_{(n,n)} & T_{1(n,n)} \\ 0_{(n,n)} & T_{2(n,n)} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Pode-se observar através de (5.20) que a matriz  $[H]$  possui uma estrutura bastante especial: todos os termos são nulos exceto nas posições dos discos. Isso ocorre porque  $[H]$  é a matriz de entradas harmônica e considera-se que a excitação é causada pelo desbalanceamento dos discos.

Portanto,  $[T_1]$  apresentará termos apenas nas colunas correspondentes às posições dos discos dadas pelo modelo de elementos finitos. Nas posições do mancal, os termos são nulos e a Equação 5.13 continua válida.

### 5.3 Diminuição do número de variáveis medidas

Até agora foi considerado que todo o vetor de estado pode ser medido, porém isso é um fato que não ocorre na prática, já que nem todos os graus de liberdade estão disponíveis por dificuldades de acesso ou risco à integridade física do analista.

Dessa forma, serão analisados os casos em que se tem metade do vetor de estado (todos os deslocamentos) e, posteriormente, uma redução ainda maior para caso em que só os deslocamentos lineares são medidos (1/4 do vetor de estado).

#### 5.3.1 Medição de metade do vetor de estado

A matriz de saída dada pela Equação 4.6 adquire a seguinte forma:

$$[C] = [I_{(n,n)} \quad \vdots \quad 0_{(n,n)}] \quad (5.34)$$

Dessa forma, as velocidades não podem ser utilizadas nas Equações 5.13 e 5.30. Portanto, relações adicionais deverão ser produzidas para que o sistema possa ser estimado. Pederiva (1992) propõe a utilização de um sistema filtro de ordem 3 para gerar correlações adicionais, substituindo as matrizes  $[R_{\xi\xi}]$  e  $[R_{\xi\dot{\xi}}]$ . A Figura 5.1 mostra como o filtro atua no sistema mecânico em estudo, considerando a excitação por desbalanceamento.

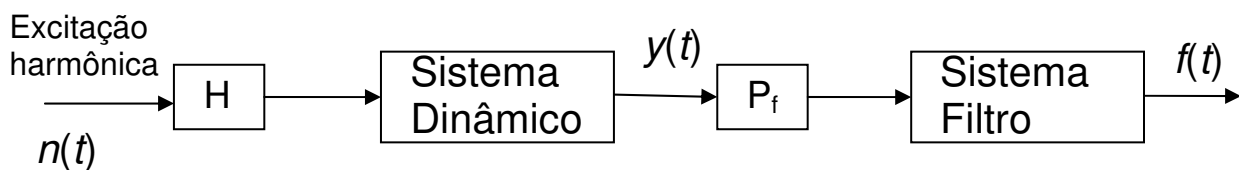


Figura 5. 1 – Representação esquemática da atuação do filtro

O sistema filtro é representado por:

$$\{\dot{f}(t)\} = [N]\{f(t)\} + [P_f]\{y(t)\} \quad (5.35)$$

com

$$\{f^T(t)\} = \{\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3\} \quad (5.36)$$

sendo  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  e  $\eta_3$  as saídas do filtro.

As matrizes do sistema filtro  $[N]$  e de entradas  $[P_f]$  são escritas da seguinte forma (Pederiva, 1992):

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

no qual  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$  são parâmetros do filtro escolhidos de forma a garantir a estabilidade do sistema e

$$[P_f] = \begin{bmatrix} 0_{(1,n)} \\ 0_{(1,n)} \\ P_{(1,n)} \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

sendo  $P_{(1,n)}$  composta por parâmetros de entrada do filtro.

Na Equação 5.35,  $\{y(t)\}$  é o vetor  $n$ -dimensional de medidas do sistema dinâmico dado pelas Equações 4.6 e 5.34. Substituindo essas relações na Equação 5.35:

$$\{\dot{f}(t)\} = [N]\{f(t)\} + [P_f][C]\{x(t)\} \quad (5.39)$$

Juntando-se a Equação 5.39 com a Equação 4.3, a equação de estado expandida pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{f}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{(f,f)} & \mathbf{0}_{(f,3)} \\ P_f C & N_{(3,3)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{(f,p)} \\ \mathbf{0}_{(3,p)} \end{bmatrix} \{n(t)\} \quad (5.40)$$

A nova equação de correlações para o sistema expandido (sistema dinâmico + filtro) é dada por (Eduardo, 2003):

$$[\bar{A}][\bar{R}_{xx}(\tau_i)] + [\bar{R}_{xx}(\tau_i)][\bar{A}]^T + [\bar{E}][\bar{R}_{n\bar{x}}(\tau_i)] + [\bar{R}_{n\bar{x}}(\tau_i)][\bar{E}]^T = 0 \quad (5.41)$$

que mostra os parâmetros do sistema contidos na matriz  $[\bar{A}]$  e as correlações do novo vetor de estado com ele mesmo e com o vetor de entradas harmônico. Sendo que:

$$\{\bar{x}(t)\} = \begin{Bmatrix} x(t) \\ f(t) \end{Bmatrix}, [\bar{A}] = \begin{bmatrix} A_{(f,f)} & \mathbf{0}_{(f,3)} \\ P_f C & N_{(3,3)} \end{bmatrix}, [\bar{E}] = \begin{bmatrix} E_{(f,p)} \\ \mathbf{0}_{(3,p)} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Define-se uma matriz auxiliar da seguinte forma:

$$[\tilde{M}] = \begin{bmatrix} I_{(n,n)} & \vdots & \mathbf{0}_{(n,n)} & \vdots & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \mathbf{0}_{(f,3)} \\ \mathbf{0}_{(n,n)} & \vdots & -M_{(n,n)} & \vdots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{(1,n)} & \vdots & \mathbf{0}_{(1,n)} & \vdots & \\ \mathbf{0}_{(1,n)} & \vdots & \mathbf{0}_{(1,n)} & \vdots & I_{(3,3)} \\ \mathbf{0}_{(1,n)} & \vdots & \mathbf{0}_{(1,n)} & \vdots & \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Pré-multiplicando a Equação 5.41 por  $[\tilde{M}]$  e depois pós-multiplicando o resultado por  $[\tilde{M}]^T$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n,n)} & \vdots & I_{(n,n)} & \vdots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & & & \\ K_{(n,n)} & \vdots & P_{(n,n)} & \vdots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \\ \mathbf{0}_{(1,n)} & \vdots & \mathbf{0}_{(1,n)} & \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}_{(1,n)} & \vdots & \mathbf{0}_{(1,n)} & \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \tilde{c}_1 \dots \tilde{c}_n & \vdots & \mathbf{0}_{(1,n)} & \vdots & n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{\xi\xi(n,n)} & \vdots & -R_{\xi\xi}M & \vdots & R_{\xi f(n,3)} & & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \\ R_{\xi\xi(n,n)} & \vdots & -R_{\xi\xi}M & \vdots & R_{\xi f(n,3)} & & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \\ r_{\eta_1\xi(1,n)} & \vdots & -r_{\eta_1\xi}M & \vdots & & & \\ r_{\eta_2\xi(1,n)} & \vdots & -r_{\eta_2\xi}M & \vdots & R_{ff(3,3)} & & \\ r_{\eta_3\xi(1,n)} & \vdots & -r_{\eta_3\xi}M & \vdots & & & \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} R_{\xi\xi(n,n)} & \vdots & R_{\xi\xi(n,n)} & \vdots & R_{\xi f(n,3)} & & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \\ -MR_{\xi\xi(n,n)} & \vdots & -MR_{\xi\xi} & \vdots & -MR_{\xi f(n,3)} & & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \\ r_{\eta_1\xi(1,n)} & \vdots & r_{\eta_1\xi(1,n)} & \vdots & & & \\ r_{\eta_2\xi(1,n)} & \vdots & r_{\eta_2\xi(1,n)} & \vdots & R_{ff(3,3)} & & \\ r_{\eta_3\xi(1,n)} & \vdots & r_{\eta_3\xi(1,n)} & \vdots & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \tilde{c}_1 & \vdots & \\ \mathbf{0}_{(n,n)} & \vdots & K^T & \vdots & \mathbf{0}_{(n,2)} & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \tilde{c}_n \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \\ I_{(n,n)} & \vdots & P^T & \vdots & \mathbf{0}_{(n,3)} & \vdots & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & n_1 \\ \mathbf{0}_{(3,f)} & \vdots & \mathbf{1} & \mathbf{0} & n_2 & & \\ \vdots & \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{1} & n_3 & & \end{bmatrix} =
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n,n)} & \vdots & D_{1(n,n)} & \vdots & \mathbf{0}_{(n,3)} & & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \\ D_{2(n,n)} & \vdots & D_{3(n,n)} & \vdots & D_{4(n,n)} & & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \mathbf{0}_{(3,n)} & \vdots & D_{5(3,n)} & \vdots & \mathbf{0}_{(3,3)} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

no qual as submatrizes  $[D_1]$ ,  $[D_2]$ ,  $[D_3]$ ,  $[D_4]$  e  $[D_5]$  são matrizes genéricas cheias, os  $r_{\eta_i\xi}$ 's representam a correlação entre as saídas do filtro e o vetor de estado medido. Na equação anterior, todas as correlações se referem a uma defasagem no tempo de  $\tau_i$ .

Pela multiplicação das duas últimas linhas da Equação 5.44, pode-se extrair as seguintes relações:

$$r_{\eta_2\xi}(\tau_i) + r_{\eta_1\xi}(\tau_i) = \mathbf{0}_{(1,n)} \quad (5.45)$$



$$r_{\eta_3\xi}(\tau_i) + r_{\eta_2\xi}(\tau_i) = \mathbf{0}_{(1,n)} \quad (5.46)$$

$$-r_{\eta_2\xi}(\tau_i)M + \left\{ r_{\eta_1\xi}(\tau_i) \quad \vdots \quad r_{\eta_n\xi}(\tau_i) \right\} \begin{bmatrix} K^T \\ P^T \end{bmatrix} = D_{5(1,n)} \quad (5.47)$$

Substituindo as Equações 5.45 e 5.46 em 5.47:

$$\left\{ r_{\eta_1\xi}(\tau_i) \quad \vdots \quad -r_{\eta_2\xi}(\tau_i) \right\} [\bar{\Theta}] = r_{\eta_3\xi}(\tau_i)M + D_{5(1,n)} \quad (5.48)$$

sendo  $[\bar{\Theta}]$  a matriz de parâmetros físicos composta por  $K^T$  e  $P^T$ , como mostrada em (5.47).

A submatriz  $[D_5]$  é muito importante para o processo de estimação e merece uma análise mais detalhada. A matriz  $[\bar{E}]$  é dada por:

$$[\bar{E}] = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n,2)} \\ \dots \\ M^{-1}H \\ \dots \\ \mathbf{0}_{(3,2)} \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

Chamando  $[W]$  o resultado da multiplicação, que corresponde ao segundo membro da Equação 5.44:

$$[W] = [\tilde{M}] [\bar{E}] [\bar{R}_{n\bar{x}}(\tau_i)] [\tilde{M}]^T + [\tilde{M}] [\bar{R}_{\bar{y}n}(\tau_i)] [\bar{E}]^T [\tilde{M}]^T \quad (5.50)$$

Sendo que:

$$[\tilde{M}][\bar{E}][\bar{R}_{n\bar{x}}(\tau_i)] = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n,f+3)} \\ \dots \\ -HR_{n\bar{x}}(\tau_i)_{(n,f+3)} \\ \dots \\ \mathbf{0}_{(3,f+3)} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

Pós multiplicando (5.51) por  $[\tilde{M}]^T$ , obtém-se:

$$[\tilde{M}][\bar{E}][\bar{R}_{n\bar{x}}(\tau_i)][\tilde{M}]^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n,n)} & \vdots & \mathbf{0}_{(n,n)} & \vdots & \mathbf{0}_{(n,3)} \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ W_{1(n,n)} & \vdots & W_{2(n,n)} & \vdots & W_{3(n,3)} \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{0}_{(3,n)} & \vdots & \mathbf{0}_{(3,n)} & \vdots & \mathbf{0}_{(3,3)} \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

no qual as submatrizes  $[W_1]$ ,  $[W_2]$  e  $[W_3]$  são cheias de ordem  $n$ .

Sabe-se que:

$$[[\tilde{M}][E]]^T = [E]^T [\tilde{M}]^T \quad (5.53)$$

portanto,

$$[E]^T [\tilde{M}]^T = [\mathbf{0}_{(2,n)} \quad \vdots \quad -H^T_{(2,n)} \quad \vdots \quad \mathbf{0}_{(2,3)}] \quad (5.54)$$

Pode-se reescrever a matriz cheia  $[R_{\bar{y}n}]_{(f+3,2)}$  na forma de seis submatrizes cheias da seguinte maneira:

$$[R_{\bar{x}n}]_{(f+3,2)} = \begin{bmatrix} R_{1(n,1)} & \vdots & R_{2(n,1)} \\ \dots & \vdots & \dots \\ R_{3(n,1)} & \vdots & R_{4(n,1)} \\ \dots & \vdots & \dots \\ R_{5(3,1)} & \vdots & R_{6(3,1)} \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

Pré-multiplicando (5.55) por  $[\tilde{M}]$ :

$$[\tilde{M}][R_{\bar{x}n}] = \begin{bmatrix} R_1 & \vdots & R_2 \\ \dots & \vdots & \dots \\ -MR_3 & \vdots & -MR_4 \\ \dots & \vdots & \dots \\ R_5 & \vdots & R_6 \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

Multiplicando as Equações 5.56 por 5.54:

$$[\tilde{M}][\bar{R}_{\bar{x}n}(\tau_i)][\bar{E}]^T[\tilde{M}]^T = \begin{bmatrix} 0_{(n,n)} & \vdots & [\bar{R}_1 H^T]_{(n,n)} & \vdots & 0_{(n,3)} \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 0_{(n,n)} & \vdots & [\bar{R}_2 H^T]_{(n,n)} & \vdots & 0_{(n,3)} \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 0_{(3,n)} & \vdots & [\bar{R}_3 H^T]_{(3,n)} & \vdots & 0_{(3,3)} \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

no qual  $[\bar{R}_1]$  é uma submatriz formada pelas  $n$  primeiras de (5.56),  $[\bar{R}_2]$  é uma submatriz formada das linhas  $n+1$  até  $2n$  e  $[\bar{R}_3]$  é formada pelas últimas três linhas de (5.56).

Somando-se as Equações 5.52 e 5.57, encontra-se que:

$$[D_5] = [\bar{R}_3 H^T] \quad (5.58)$$

Devido à estrutura especial de  $[H]$ , mostrada pela Equação 5.20, só existirão termos nas posições das colunas em que aparece o desbalanceamento, sendo nulos os demais elementos.

Portanto, nas posições dos mancais, a matriz  $[D_5]$  não causa nenhuma influência na estimação dos parâmetros e pode-se usar o método dos mínimos quadrados para o cálculo dos coeficientes de massa e rigidez dos mancais. Se a excitação for um ruído branco,  $[D_5]=0$ , visto que não existe correlação entre a entrada e a saída do sistema.

### 5.3.2 Medição de $\frac{1}{4}$ do vetor de estado

Na seção anterior, tratou-se das estimativas com metade do vetor de estado. Pretende-se estudar o caso de estimação de parâmetros em que uma redução maior no sistema é proposta, ou seja, o número de medidas disponíveis é menor do que o abordado na seção anterior. Sendo assim, propõe-se a medição apenas dos deslocamentos lineares, ou seja,  $\frac{1}{4}$  do vetor de estado.

Como o número de medidas disponíveis foi muito reduzido, é preciso garantir a observabilidade do sistema. Para isso, a representação em espaço de estados deve sofrer uma transformação de coordenadas baseada na matriz de observabilidade em (4.15). Se o sistema for exatamente observável, a matriz transformação de coordenadas  $[T]$  será formada pelas  $f$  primeiras linhas de (4.15), sendo a nova representação do sistema dada pelas Equações 4.16, 4.17 e 4.18.

Da mesma forma que no caso anterior, é necessário um sistema auxiliar (filtro) para gerar correlações adicionais que possibilitem a identificação do sistema, sendo as entradas do sistema filtro formadas pelos componentes medidos do vetor de estado.

Para a identificação do sistema, considera-se um sistema filtro de ordem  $q$ , assintoticamente estável, controlável e descrito de acordo com a Equação 5.32. O vetor de estado do filtro é dado por:

$$\{f^T(t)\} = \{\eta_1 \quad \eta_2 \quad \dots \quad \eta_q\} \quad (5.59)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & \cdots & n_q \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

e

$$[P_f] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_m \end{bmatrix}, \quad (5.61)$$

com os valores de  $p_1$  a  $p_m$  sendo os parâmetros de entrada do filtro.

A equação de estado expandida é escrita da seguinte maneira:

$$\{\dot{x}_e(t)\} = [A_e]\{x_e(t)\} + [B_e]\{n(t)\}, \quad (5.62)$$

com

$$\{x_e\} = \begin{Bmatrix} x^* \\ \cdots \\ f \end{Bmatrix}, \quad (5.63)$$

$$[A_e] = \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ P_f C^* & N_{(q,q)} \end{bmatrix}, \quad (5.64)$$

e



$$[Q'] = \begin{bmatrix} & & & \vdots & 0_{(n,q)} \\ & D_{1(f,f)} & & \vdots & \dots \\ & & & \vdots & D_{2(n,q)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_{(q,n)} & \vdots & D_{3(q,n)} & \vdots & 0_{(q,q)} \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

Os termos da submatriz  $[D_3]$  contêm correlações da saída do filtro com a entrada (excitação) do sistema multiplicada por termos de desbalanceamento. Caso a excitação fosse por ruído branco, os termos dessa submatriz seriam todos iguais a zero, visto que não existe correlação entre a entrada e a saída do sistema. Para a excitação harmônica, os termos de mancal estão acoplados aos termos do desbalanceamento, tornando a estimativa dos parâmetros mais complicada.

O acoplamento de parâmetros foi causado pela matriz transformação de coordenadas e o problema de estimação de parâmetros torna-se um problema de estimação não linear para a excitação por desbalanceamento, pois existe correlação entre a entrada e a saída. Dessa forma, aparecem potências dos termos de rigidez e amortecimento, bem como termos de rigidez multiplicados por termos de amortecimento e de desbalanceamento.

## Capítulo 6

### Procedimentos e Resultados de Simulação Numérica

Neste capítulo, são analisadas diferentes situações nas quais os métodos de identificação descritos no capítulo anterior são testados.

As análises estão divididas em três etapas; na primeira, a excitação é harmônica para metade do vetor de estado. Nesse caso, são feitas várias simulações variando as velocidades de rotação e os parâmetros do mancal para testar a robustez do método.

Na segunda etapa, considera-se que todos os deslocamentos são medidos ( $1/2$  vetor de estado) e a excitação é por ruído branco.

Na terceira, considera-se que estão disponíveis apenas os deslocamentos lineares ( $1/4$  do vetor de estado) e a excitação é por ruído branco. Serão variados os parâmetros de rigidez e amortecimento para uma melhor validação do procedimento de identificação.

#### 6.1 Descrição do sistema dinâmico

O Laboratório de Vibrações e Controle possui uma bancada experimental que foi utilizada na elaboração de diversos trabalhos científicos, porém todos eles usaram valores fictícios para os parâmetros de rigidez e amortecimento dos mancais. Para que se amplie a abrangência de pesquisa desses trabalhos, é necessária a correta identificação dos parâmetros físicos da bancada experimental (sistema rotativo).



Como passo inicial, através deste trabalho, faz-se um estudo teórico da aplicabilidade do método de análise de correlações na identificação desta bancada experimental. O sistema dinâmico em estudo é mostrado pela Figura 6.1. É composto por um eixo, dois discos e três mancais de rolamento. Os dados sobre esses três elementos são apresentados na Tabela 6.1.



Figura 6.1 – Sistema dinâmico rotor/mancais

Tabela 6.1 – Dados do sistema dinâmico

Disco		
	Material	Aço 1020
	Diâmetro interno (m)	$17.10^{-3}$
	Diâmetro externo (m)	0,177
	Massa - $M_d$ (Kg)	4
	Momento de inércia na direção X - $I_{dx}$ ( $\text{Kg.m}^2$ )	$80,378.10^{-4}$
	Momento de inércia na direção Y - $I_{dy}$ ( $\text{Kg.m}^2$ )	$15,809.10^{-3}$
Eixo		
	Material	Aço 4340 retificado
	Diâmetro (m)	$17.10^{-3}$
	Comprimento (m)	0,78
	Densidade $\rho$ ( $\text{Kg/m}^3$ )	7800
	Momento de inércia $I$ ( $\text{m}^4$ )	$40,998.10^{-8}$
	Área da seção transversal $S$ ( $\text{m}^2$ )	$22,698.10^{-3}$
	Módulo de Young $E$ ( $\text{N/m}^2$ )	$2,1.10^{11}$
	Módulo de cisalhamento $G$ ( $\text{N/m}^2$ )	$8,0769.10^{10}$
	Coefficiente de Poisson $\nu$	0,3

O sistema mostrado pela Figura 6.1 foi discretizado em elementos finitos em elementos de eixo, elementos de mancal e elementos de disco, conforme a Figura 6.2. O elemento de eixo foi discretizado em cinco nós, totalizando 20 graus de liberdade. A posição dos elementos de mancal coincide com os nós 1, 2 e 5 do eixo, enquanto que os elementos de disco coincidem com os nós 3 e 4, as cotas estão em mm.

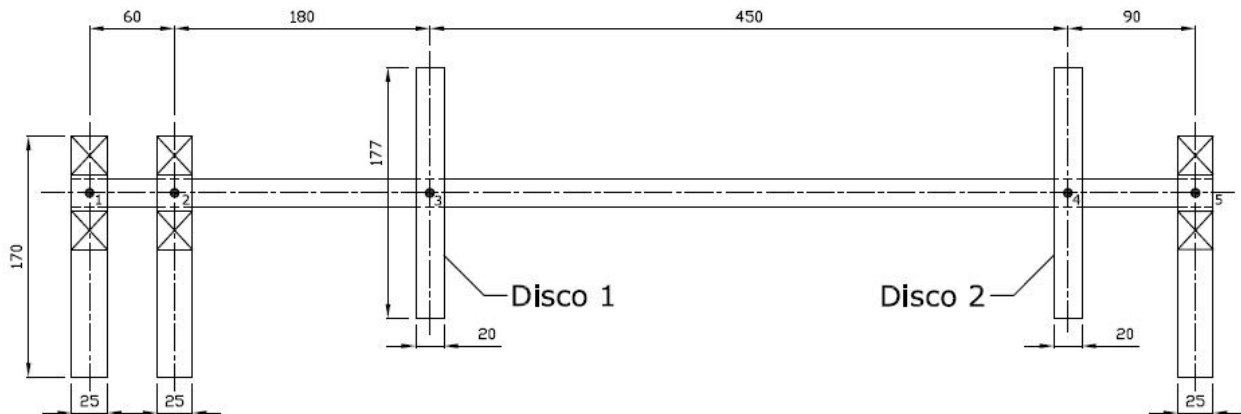


Figura 6.2 – Representação do modelo de elementos finitos

As simulações foram feitas no software *Matlab* para todos os casos. Na situação em que são conhecidos apenas os deslocamentos lineares, o software *Mathematica* foi usado para uma melhor visualização da estrutura das matrizes dinâmica e de entradas do conjunto sistema + filtro, possibilitando a verificação da forma na qual os parâmetros de mancal estão acoplados com a excitação no caso do sistema excitado por desbalanceamento.

Como os sinais simulados estão digitalizados, fato que ocorre em uma aquisição de dados real, os pontos medidos do sinal de resposta estão igualmente espaçados de um valor chamado de *tempo de discretização* ( $\Delta t$ ).

O sinal medido  $y(t)$  é representado por uma seqüência  $y_1(k)$ , onde  $k$  representa o instante  $t_k$ , sendo que

$$t_k = k \cdot \Delta t \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.1)$$

A matriz de correlação é dada por:

$$[R_{yy}(\tau_i)] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-i} \{y(k)\} \{y^T(k+i)\}, \quad (6.2)$$

sendo  $N$  o número total de pontos medidos e

$$\tau_i = i\Delta t \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (6.3)$$

Nas simulações, considerou-se que todos os mancais de rolamento são do mesmo tipo e possuem os mesmos parâmetros de rigidez e amortecimento, cujos valores de referência são:

- $K_{xx} = 30 \times 10^7$  N/m (direção horizontal)
- $K_{zz} = 2,5 \times 10^7$  N/m (direção vertical)
- $C_{xx} = 70.000$  Ns/m (direção horizontal)
- $C_{zz} = 10.000$  Ns/m (direção vertical)

Com estes parâmetros, as duas primeiras freqüências naturais do sistema rotativo são mostradas na Figura 6.3:

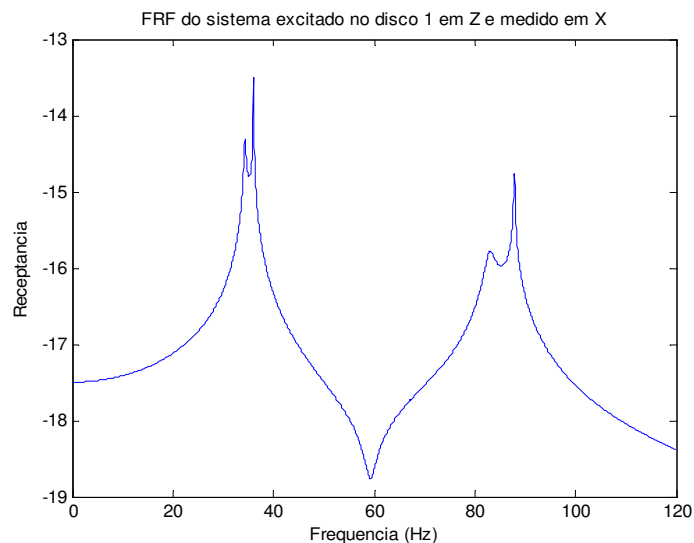


Figura 6.3 – Frequências naturais do sistema rotativo

A Figura 6.3 representa uma FRF teórica (receptância), considerando os mancais anisotrópicos cujos valores de rigidez e amortecimento são os valores de referência mostrados anteriormente. Devido à diferença de rigidez nas direções horizontal e vertical, pode-se observar frequências naturais distintas nessas direções. O sistema foi considerado parado, ou seja, com rotação nula ( $\Omega=0$ ). Com o auxílio do software *Matlab*, determinou-se que os valores das duas primeiras frequências naturais do sistema encontram-se em torno de 34.3 Hz e 83 Hz.

Os parâmetros de referência foram escolhidos baseados em medições de campo da FRF do sistema através de excitação impulsiva. Os valores adotados foram os que mais fizeram a curva de FRF teórica se aproximar da curva experimental, que mostrou que o sistema possui frequências naturais distintas nas direções  $x$  e  $z$ .

As simulações foram feitas para um tempo total de aquisição de dados igual a 20 segundos, sendo os sinais discretizados em 50.000 pontos. Os dados obtidos foram truncados na quarta casa decimal, pois o objetivo é estudar a aplicabilidade do método proposto a um sistema real e os termos cruzados de rigidez e amortecimento dos mancais não foram levados em consideração. Os erros foram considerados até a quarta casa decimal.

## 6.2 Medição de todos os deslocamentos

Para a identificação paramétrica do sistema, é necessário o auxílio de um filtro, conforme descrito na seção 5.3.1. As características desse sistema auxiliar são dadas pelas Equações 5.35 e 5.36, sendo as matrizes do sistema e de entradas dadas por:

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

e

$$[P_f] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_{19} & p_{20} \end{bmatrix}_{(3,20)} \quad (6.5)$$

Os seguintes valores são adotados para as Equações 6.4 e 6.5, baseados na estabilidade do sistema e na frequência de corte superior a 85 Hz:

- $n_1 = -0.1 \times 10^{14}$
- $n_2 = -0.7 \times 10^8$
- $n_3 = -0.2 \times 10^8$
- $p_1 = p_2 = \dots = p_{20} = 1$

Com estes parâmetros propostos no trabalho de Pederiva (1992), o filtro de ordem 3 possui primeira frequência em 112,53 Hz.

### 6.2.1 Excitação por desbalanceamento

Neste caso, assume-se que os discos possuam massas desbalanceadoras  $m_{u1}$  e  $m_{u2}$  correspondentes aos discos 1 e 2, respectivamente, e estão localizadas a uma distância  $d_1$  e  $d_2$  do centro geométrico de cada disco. Foi considerado que os desbalanceamentos apresentam fases distintas  $\beta_1$  e  $\beta_2$ . Os valores adotados são:

- $m_{u1} = 1 \times 10^{-3}$  Kg
- $m_{u2} = 1,5 \times 10^{-3}$  Kg
- $d_1 = 40 \times 10^{-3}$  m
- $d_2 = 17 \times 10^{-3}$  m
- $\beta_1 = 2$  rad
- $\beta_2 = 5$  rad

A força de desbalanceamento total do sistema é dada por:



Tabela 6.2 – Parâmetros identificados em 1500 Rpm

Defasagem	$K_{xx}$	$K_{zz}$	$C_{xx}$	$C_{zz}$
2 $\tau$ 's Erro	$30,001 \times 10^7$ (0,0033%)	$2,5 \times 10^7$ (0%)	70.042,67 (0,061%)	10.004,67 (0,047%)
3 $\tau$ 's Erro	$30,001 \cdot 10^7$ (0,0033%)	$2,5 \times 10^7$ (0%)	70.040,67 (0,058%)	10.009,33 (0,093%)

2º Caso: velocidade de rotação em 1800 Rpm (frequência de rotação 30 Hz):

O objetivo desta simulação é testar como o método de estimação se comporta no caso da frequência de giro ser bastante próxima da primeira frequência natural do sistema. Os valores identificados estão mostrados na Tabela 6.3:

Tabela 6.3 – Parâmetros identificados em 1800 Rpm

Defasagem	$K_{xx}$	$K_{zz}$	$C_{xx}$	$C_{zz}$
2 $\tau$ 's Erro	$29,99 \times 10^7$ (0,03%)	$2,5 \times 10^7$ (0%)	70.054 (0,077%)	10.006 (0,06%)
3 $\tau$ 's Erro	$29,99 \times 10^7$ (0,03%)	$2,5 \times 10^7$ (0%)	70.053,33 (0,076%)	10.006 (0,06%)

3º Caso: velocidade de rotação em 3600 Rpm (frequência de rotação 60 Hz):

Essa rotação é de interesse por ser próxima da rotação nominal de placa do motor (3570 rpm) e estar entre as duas primeiras frequências naturais do sistema. Os valores identificados estão mostrados na Tabela 6.4:

Tabela 6.4 – Parâmetros identificados em 3600 Rpm

Defasagem	$K_{xx}$	$K_{zz}$	$C_{xx}$	$C_{zz}$
2 $\tau$ 's Erro	$30,00 \times 10^7$ (0%)	$2,4998 \times 10^7$ (0,008%)	70.096,33 (0,138%)	10.019,33 (0,193%)
3 $\tau$ 's Erro	$30,00 \times 10^7$ (0%)	$2,4998 \times 10^7$ (0,008%)	70.040,67 (0,058%)	10.019,33 (0,193%)

4º Caso: velocidade de rotação em 4500 Rpm (frequência de rotação 75 Hz):

O objetivo é verificar a robustez do método para uma frequência de giro próxima da segunda frequência natural do sistema. O resultado da identificação está mostrado na Tabela 6.5:

Tabela 6.5 – Parâmetros identificados em 4500 Rpm

Defasagem	$K_{xx}$	$K_{zz}$	$C_{xx}$	$C_{zz}$
2 $\tau$ 's Erro	$29,9998 \times 10^7$ (0,0007%)	$2,4997 \times 10^7$ (0,012%)	70.190 (0,27%)	10.028,33 (0,28%)
3 $\tau$ 's Erro	$29,998 \times 10^7$ (0,0007%)	$2,4997 \cdot 10^7$ (0,012%)	70.098,67 (0,141%)	10.028,33 (0,28%)

Pode-se observar que as estimativas são muito boas para as diferentes rotações, desde que sejam conhecidos todos os deslocamentos (angulares e lineares), inclusive no caso de uma frequência de rotação próxima da primeira frequência natural do sistema. É preciso ressaltar que todos os parâmetros foram obtidos usando-se apenas uma única velocidade de rotação.

Nos casos a seguir, investiga-se a robustez do método de identificação proposto variando-se os parâmetros de rigidez e amortecimento dos mancais e utilizando as respostas aos desbalanceamentos dos discos, cujos valores serão mantidos constantes.



### 5º Caso: variação dos parâmetros de rigidez

São simuladas duas situações: rigidez nos mancais 10 vezes menor e 10 vezes maior em relação aos parâmetros de rigidez de referência descritos na seção 6.1. Os valores de amortecimento permanecem os mesmos e a velocidade de rotação simulada é 3600 Rpm para os dois casos.

- a) Identificação com rigidez 10X menor:  $K_{xx} = 30 \times 10^6$  N/m e  $K_{zz} = 2,5 \times 10^6$  N/m

Tabela 6.6 – Parâmetros identificados com rigidez 10X menor

Defasagem	$K_{xx}$	$K_{zz}$	$C_{xx}$	$C_{zz}$
2 $\tau$ 's Erro	$30,005 \times 10^6$ (0,0167%)	$2,4997 \times 10^6$ (0,012%)	70.134 (0,19%)	10.018 (0,18%)
3 $\tau$ 's Erro	$30,005 \times 10^6$ (0,0167%)	$2,4997 \times 10^6$ (0,012%)	70.134 (0,19%)	10.018 (0,18%)

- b) Identificação com rigidez 10X maior:  $K_{xx} = 30 \times 10^8$  N/m e  $K_{zz} = 2,5 \times 10^8$  N/m

Tabela 6.7 – Parâmetros identificados com rigidez 10X maior

Defasagem	$K_{xx}$	$K_{zz}$	$C_{xx}$	$C_{zz}$
2 $\tau$ 's Erro	$29,994 \times 10^8$ (0,02%)	$2,4997 \times 10^8$ (0,012%)	70.431,67 (0,617%)	10.050,33 (0,50%)
3 $\tau$ 's Erro	$29,995 \times 10^8$ (0,0178%)	$2,4997 \times 10^8$ (0,012%)	70.434,33 (0,62%)	10.049 (0,49%)

### 6º Caso: variação dos parâmetros de amortecimento

O método de identificação é testado variando-se o amortecimento dos mancais, sendo os parâmetros de rigidez mantidos constantes e iguais aos valores de referência dados na seção 6.1. Como o amortecimento é sempre um problema na identificação do sistema, o método é testado em duas situações: o amortecimento é aumentado em 10 vezes e depois em 100 vezes em relação aos valores de referência. A frequência de rotação é 60 Hz (3600 Rpm) para os dois casos.

a) Identificação com amortecimento 10X maior:  $C_{xx} = 7 \times 10^5$  Ns/m e  $C_{zz} = 1 \times 10^5$  Ns/m

Tabela 6.8 – Parâmetros identificados com amortecimento 10X maior

Defasagem	$K_{xx}$	$K_{zz}$	$C_{xx}$	$C_{zz}$
2 $\tau$ 's Erro	$30,005 \times 10^7$ (0,0167%)	$2,5005 \times 10^7$ (0,02%)	$7,0126 \times 10^5$ (0,18%)	$1,0018 \times 10^5$ (0,18%)
3 $\tau$ 's Erro	$30,005 \times 10^7$ (0,0167%)	$2,5005 \times 10^7$ (0,02%)	$7,0126 \times 10^5$ (0,18%)	$1,0018 \times 10^5$ (0,18%)

b) Identificação com amortecimento 100X maior:  $C_{xx} = 7 \times 10^6$  Ns/m e  $C_{zz} = 1 \times 10^6$  Ns/m

Tabela 6.9 – Parâmetros identificados com amortecimento 100X maior

Defasagem	$K_{xx}$	$K_{zz}$	$C_{xx}$	$C_{zz}$
2 $\tau$ 's Erro	$30,0183 \times 10^7$ (0,061%)	$2,511 \times 10^7$ (0,44%)	$7,0117 \times 10^6$ (0,17%)	$1,002 \times 10^6$ (0,2%)
3 $\tau$ 's Erro	$30,022 \times 10^7$ (0,0733%)	$2,511 \times 10^7$ (0,44%)	$7,0116 \times 10^6$ (0,166%)	$1,002 \times 10^6$ (0,2%)

Pode-se observar das Tabelas 6.6, 6.7, 6.8 e 6.9 que o método continua bastante preciso com variação dos parâmetros de rigidez e amortecimento dos mancais, considerando a medição de metade do vetor de estado.

### 6.2.2 Excitação aleatória

Nesta seção, considera-se a identificação do sistema para uma excitação por ruído branco. As simulações foram feitas utilizando-se os valores de rigidez e amortecimento de referência dados na seção 6.1 e com o sistema estático.

Tabela 6.10 – Parâmetros identificados com excitação aleatória

Defasagem	$K_{xx}$	$K_{zz}$	$C_{xx}$	$C_{zz}$
2 $\tau$ 's Erro	$29,998 \times 10^7$ (0,0067%)	$2,499 \times 10^7$ (0,04%)	70323,67 (0,462%)	10042,33 (0,423%)
3 $\tau$ 's Erro	$29,998 \times 10^7$ (0,0067%)	$2,499 \times 10^7$ (0,04%)	70321,33 (0,459%)	10042,67 (0,427%)

Pode-se concluir que o estimador continua bastante robusto mesmo quando a excitação é alterada para ruído branco, desde que se conheça metade do vetor de estado.

### 6.3 Medição apenas dos deslocamentos lineares

Em uma situação de medição prática, é muito difícil medir os deslocamentos angulares. Dessa forma, propõe-se um método de identificação no qual são conhecidos apenas os deslocamentos lineares (1/4 do vetor de estado), que são facilmente obtidos através de transdutores de deslocamento.

Considera-se que o sistema em estudo seja representado pelas Equações 4.3 e 4.6. Nesse caso em que apenas 1/4 do vetor de estado é obtido através de medições, a matriz de medidas em (4.6) é dada da seguinte forma:

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & & & & & & & & & & & & & & & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & & & & & & & & & & & & & & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & & & & & & & & & & & & & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & & & & & & & & & & & & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & & & & & & & & & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & & & & & & & & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & & & & & & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & & & & & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & & & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & & & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(10,40)} \quad (6.9)$$

É preciso garantir que, com apenas os deslocamentos lineares, o sistema continue observável. Para isso, é feita uma transformação de coordenadas baseada na matriz de observabilidade, considerando que o sistema seja exatamente observável. Essa transformação é mostrada pelas equações 4.16, 4.19, 4.20 e 4.21, de forma que:

$$[T] = \begin{bmatrix} C \\ C.A \\ C.A^2 \\ C.A^3 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Para o procedimento de estimação, propõe-se um filtro de ordem 6 da seguinte forma:

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & n_6 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

$$\left[ P_f \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_1 & p_2 & \dots & p_9 & p_{10} \end{bmatrix}_{(6,10)} \quad (6.12)$$

Os seguintes valores são adotados para as Equações 6.11 e 6.12, baseados na estabilidade do sistema e para uma frequência de corte superior à segunda frequência natural do sistema que é em torno de 85 Hz:

- $n_1 = -2,5469 \times 10^{19}$
- $n_2 = -3,3293 \times 10^{14}$
- $n_3 = -2,9132 \times 10^{13}$
- $n_4 = -2,244 \times 10^8$
- $n_5 = -1,02 \times 10^7$
- $n_6 = -30$
- $p_1 = p_2 = \dots = p_{10} = 1$

Com estes parâmetros, o filtro de ordem 6 possui primeira frequência em 227,82 Hz.

Como comentado no capítulo anterior, existe um acoplamento entre os parâmetros físicos dos mancais e o desbalanceamento. Sendo assim, o processo de identificação será feito apenas para a excitação por ruído branco em dois casos: com os valores de referência da seção 6.1 e com outros valores de rigidez e amortecimento dos mancais.

Dessa forma, os termos da Equação 5.66, utilizando a transformação de coordenadas em (6.10), são dados por:

$$[A'] = \begin{bmatrix} 0_{(30,10)} & \vdots & I_{(30,30)} & \vdots & & & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & & & & & & 0_{(40,6)} & \\ A_{01(10,10)}^* & \vdots & A_{02(10,30)}^* & \vdots & & & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ & \vdots & & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0_{(5,10)} & \vdots & & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ & \vdots & 0_{(6,30)} & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ & \vdots & & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \dots & \vdots & & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \tilde{c}_{(1,10)} & \vdots & & \vdots & n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & n_6 & \end{bmatrix}, \quad (6.13)$$

$$[R'] = \begin{bmatrix} & & & & & & & \vdots & & & \\ & & & R_{x^*x^*(40,40)}(\tau_i) & & & & \vdots & R_{x^*f(40,6)}(\tau_i) & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \\ r_{\eta_1x^*} & \vdots & r_{1,1} & \vdots & r_{1,2} & \vdots & r_{1,3} & \vdots & & & \\ r_{\eta_2x^*} & \vdots & r_{2,1} & \vdots & r_{2,2} & \vdots & r_{2,3} & \vdots & R_{ff(6,6)}(\tau_i) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ r_{\eta_6x^*} & \vdots & r_{6,1} & \vdots & r_{6,2} & \vdots & r_{6,3} & \vdots & & & \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

$$[A']^T = \begin{bmatrix} 0_{(10,30)} & \vdots & A_{01(10,10)}^{*T} & \vdots & & 0_{(10,5)} & \vdots & \tilde{c}_{(10,1)}^T & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ I_{(30,30)} & \vdots & A_{02(30,10)}^{*T} & \vdots & & 0_{(30,6)} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_1 & \\ & & & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_2 & \\ & & 0_{(6,40)} & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & n_3 & \\ & & & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & n_4 & \\ & & & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & n_5 & \\ & & & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & n_6 & \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

e

$$[Q'] = \begin{bmatrix} & & & \vdots & & \\ & D_{(40,40)} & & \vdots & 0_{(40,6)} & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \\ & 0_{(6,40)} & & \vdots & 0_{(6,6)} & \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

Trabalhando com as linhas 41 a 45 e as colunas 1 a 40 da Equação 5.66, utilizando (6.13), (6.14), (6.15) e (6.16), obtêm-se diversas equações que irão gerar a equação do estimador de parâmetros. Multiplicando as linhas citadas pelas colunas 1 a 10:

$$r_{\eta_2 x^*} + r_{1,1} = 0 \quad (6.17)$$

$$r_{\eta_3 x^*} + r_{2,1} = 0 \quad (6.18)$$

$$r_{\eta_4 x^*} + r_{3,1} = 0 \quad (6.19)$$

$$r_{\eta_5 x^*} + r_{4,1} = 0 \quad (6.20)$$

$$r_{\eta_6 x^*} + r_{5,1} = 0 \quad (6.21)$$

Fazendo as multiplicações com as colunas 11 a 20:

$$r_{2,1} + r_{1,2} = 0 \quad (6.22)$$

$$r_{3,1} + r_{2,2} = 0 \quad (6.23)$$

$$r_{4,1} + r_{3,2} = 0 \quad (6.24)$$

$$r_{5,1} + r_{4,2} = 0 \quad (6.25)$$

$$r_{6,1} + r_{5,2} = 0 \quad (6.26)$$

Multiplicando pelas colunas 21 a 30:

$$r_{2,2} + r_{1,3} = 0 \quad (6.27)$$

$$r_{3,2} + r_{2,3} = 0 \quad (6.28)$$

$$r_{4,2} + r_{3,3} = 0 \quad (6.29)$$

$$r_{5,2} + r_{4,3} = 0 \quad (6.30)$$

$$r_{6,2} + r_{5,3} = 0 \quad (6.31)$$

Multiplicando pelas colunas 31 a 40:

$$r_{2,3} + \left\{ r_{\eta_1 x^*} \quad \vdots \quad r_{1,1} \quad \vdots \quad r_{1,2} \quad \vdots \quad r_{1,3} \right\} [\Theta^*] = \{0\} \quad (6.32)$$

$$r_{3,3} + \left\{ r_{\eta_2 x^*} \quad \vdots \quad r_{2,1} \quad \vdots \quad r_{2,2} \quad \vdots \quad r_{2,3} \right\} [\Theta^*] = \{0\} \quad (6.33)$$

$$r_{4,3} + \left\{ r_{\eta_3 x^*} \quad \vdots \quad r_{3,1} \quad \vdots \quad r_{3,2} \quad \vdots \quad r_{3,3} \right\} [\Theta^*] = \{0\} \quad (6.34)$$

$$r_{5,3} + \left\{ r_{\eta_4 x^*} \quad \vdots \quad r_{4,1} \quad \vdots \quad r_{4,2} \quad \vdots \quad r_{4,3} \right\} [\Theta^*] = \{0\} \quad (6.35)$$

$$r_{6,3} + \left\{ r_{\eta_5 x^*} \quad \vdots \quad r_{5,1} \quad \vdots \quad r_{5,2} \quad \vdots \quad r_{5,3} \right\} [\Theta^*] = \{0\} \quad (6.36)$$

sendo que

$$[\Theta^*] = \begin{bmatrix} A_{01}^{*T} \\ A_{02}^{*T} \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

Usando as Equações 6.17 a 6.31 e substituindo em (6.32) e (6.33), encontram-se duas relações de estimação envolvendo os parâmetros físicos do sistema e as correlações entre as saídas do filtro e os deslocamentos lineares medidos:

$$-r_{\eta_5 x^*} + \left\{ r_{\eta_1 x^*} \quad \vdots \quad -r_{\eta_2 x^*} \quad \vdots \quad r_{\eta_3 x^*} \quad \vdots \quad -r_{\eta_4 x^*} \right\} [\Theta^*] = \{0\} \quad (6.38)$$



$$-r_{\eta_6 x^*} + \left\{ r_{\eta_2 x^*} \quad \vdots \quad -r_{\eta_3 x^*} \quad \vdots \quad r_{\eta_4 x^*} \quad \vdots \quad -r_{\eta_5 x^*} \right\} [\Theta^*] = \{0\} \quad (6.39)$$

Aplicando o método dos mínimos quadrados nas duas equações acima, os parâmetros físicos do sistema podem ser estimados.

### 1º Caso: valores de referência

Os parâmetros de mancal são identificados usando as Equações 6.38 e 6.39, ambas com 2 e 3 instantes de defasagem na resposta medida ( $\tau$ 's).

Tabela 6.11 – Parâmetros identificados com a equação 6.38

Defasagem	$K_{xx}$	$K_{zz}$	$C_{xx}$	$C_{zz}$
2 $\tau$ 's Erro	29,973x10 <sup>7</sup> (0,09%)	2,4814x10 <sup>7</sup> (0,74%)	69260 (1,057%)	7128,7 (28,71%)
3 $\tau$ 's Erro	29,972x10 <sup>7</sup> (0,093%)	2,4876x10 <sup>7</sup> (0,49%)	68645 (1,94%)	9015,9 (9,84%)

Tabela 6.12 – Parâmetros identificados com a equação 6.39

Defasagem	$K_{xx}$	$K_{zz}$	$C_{xx}$	$C_{zz}$
2 $\tau$ 's Erro	29,522x10 <sup>7</sup> (1,59%)	2,4337x10 <sup>7</sup> (2,65%)	70582 (0,83%)	11898 (18,98%)
3 $\tau$ 's Erro	29,566x10 <sup>7</sup> (1,45%)	2,4302x10 <sup>7</sup> (2,79%)	70478 (0,68%)	11902 (19,02%)

2º Caso: variação nos parâmetros físicos dos mancais

Considera-se que as correlações são calculadas a partir da resposta do sistema cujos mancais possuem as seguintes propriedades:

- $K_{xx} = 30 \times 10^6$  N/m (direção horizontal)
- $K_{zz} = 4 \times 10^7$  N/m (direção vertical)
- $C_{xx} = 60.000$  Ns/m (direção horizontal)
- $C_{zz} = 15.000$  Ns/m (direção vertical)

Tabela 6.13 – Parâmetros identificados com a equação 6.38 para novas propriedades de mancal

Defasagem	$K_{xx}$	$K_{zz}$	$C_{xx}$	$C_{zz}$
2 $\tau$ 's Erro	$29,987 \times 10^6$ (0,043%)	$3,9975 \times 10^7$ (0,063%)	60038 (0,063%)	15463 (3,08%)
3 $\tau$ 's Erro	$29,982 \times 10^6$ (0,06%)	$3,9973 \times 10^7$ (0,068%)	60133 (0,22%)	15339 (2,26%)

Tabela 6.14 – Parâmetros identificados com a equação 6.39 para novas propriedades de mancal

Defasagem	$K_{xx}$	$K_{zz}$	$C_{xx}$	$C_{zz}$
2 $\tau$ 's Erro	$29,529 \times 10^6$ (1,57%)	$3,8953 \times 10^7$ (2,62%)	60035 (0,058%)	15967 (6,45%)
3 $\tau$ 's Erro	$29,478 \times 10^6$ (1,74%)	$3,8904 \times 10^7$ (2,74%)	60000 (0%)	15980 (6,53%)

Observa-se, pelos exemplos dados, que o modelo de identificação ainda é robusto para o caso de ¼ do vetor de estado, porém quanto maior a redução dos graus de liberdade medidos, maior será o erro na estimação dos parâmetros físicos dos mancais. Isso se deve ao efeito da matriz de transformação de coordenadas, que gera uma concentração dos parâmetros físicos sobre o sistema dinâmico.

De um modo geral, não existem diferenças significativas nas estimativas usando  $2\tau$ s ou  $3\tau$ s, mas nota-se uma grande melhora no cálculo do amortecimento na direção vertical ( $C_{zz}$ ) quando este foi aumentado em relação ao valor de referência no caso de  $1/4$  do vetor de estado, indicando que o algoritmo parece ser mais robusto quando se tem amortecimentos maiores no sistema. Esse fato é bastante curioso, visto que, de forma geral, os algoritmos de estimação não são muito precisos nos casos de um grande amortecimento presente no sistema dinâmico.

Os filtros são sistemas auxiliares na geração de correlações, substituindo os dados que não podem ser medidos. Dessa forma, as frequências dos filtros foram escolhidas de modo a não atenuar nenhuma resposta do sistema rotativo até a segunda frequência natural desse sistema.

Os erros nas estimativas dos amortecimentos são grandes no caso das medições de  $1/4$  do vetor de estado. A influência do amortecimento na dinâmica do sistema precisa ser melhor estudada para que tais erros de estimação sejam compreendidos e possam ser contornados.

## Capítulo 7

### Conclusões

O trabalho tratou da identificação paramétrica de um sistema rotor-mancal excitado aleatoriamente e por desbalanceamento. Todo o processo foi feito considerando-se apenas as medições das variáveis de estado, não sendo utilizadas as medições das excitações estocásticas ou harmônicas (desbalanceamento).

O método de identificação proposto é baseado na equação matricial de Ljapunov, na qual as equações de identificação são obtidas e mostram que os parâmetros físicos do sistema podem ser obtidos a partir das correlações do vetor de estado medido.

Foi discutida a utilização de um sistema filtro quando o vetor de estado é reduzido, fato que ocorre em sistemas reais devido à impossibilidade de se obter as medições de todos os graus de liberdade. Neste caso, o filtro gera medições que substituirão as respostas que foram excluídas por causa da redução do número de medidas realmente disponíveis para um sistema de aquisição.

Diversas simulações foram feitas de modo a testar a robustez do método proposto, mostrando que o sistema pode ser identificado seja por excitação aleatória, seja por excitação harmônica, e que é possível estimar os parâmetros dos mancais mesmo não sendo possível a utilização dos dados do vetor de estado completo. Devido às características da excitação por ruído branco, a identificação é possível quando se tem apenas as medições dos deslocamentos lineares. Se a excitação for por desbalanceamento, os parâmetros físicos estão acoplados aos parâmetros da excitação e maiores estudos devem ser feitos na determinação das características dos mancais.

Foi demonstrada uma característica bastante interessante do método que é a capacidade de identificação independentemente da rotação do sistema e usando apenas uma única rotação de cada vez, diferindo dos métodos baseados em FRF's que necessitam de várias rotações para determinar o comportamento dinâmico do sistema rotativo.

Nos casos estudados, não é necessário o conhecimento do desbalanceamento para identificar o sistema. Isso reduz bastante o número de variáveis que o modelo opera, facilitando o processo de cálculo.

As estruturas especiais que as matrizes possuem possibilitaram a identificação do sistema apenas usando as medidas de deslocamento, que podem ser obtidas diretamente através de transdutores.

Como desvantagem, a redução do número de medidas disponíveis para medição acarreta a diminuição da precisão do estimador, principalmente em relação ao amortecimento, e o acoplamento entre a saída e a entrada no caso de sistemas excitados por desbalanceamento.

A estrutura do modelo de elementos finitos faz com que os nós possuam relação apenas com seus vizinhos. Se as medidas forem tomadas em nós localizados longe do mancal, não é possível estimar os coeficientes dos mancais usando essa abordagem.

Para o prosseguimento deste trabalho, sugere-se:

- Explorar mais detalhadamente o modelo teórico para permitir a identificação do sistema utilizando menos medições,
- Identificar os parâmetros de mancal com sinais adquiridos experimentalmente,
- Identificar o desbalanceamento do sistema,
- Verificar a utilização de processos iterativos para melhorar a precisão do estimador no caso da estimação não linear do sistema excitado por desbalanceamento,
- Identificar o efeito dos erros de medição na precisão das estimativas
- Verificar a influência do filtro nos parâmetros medidos.

## Referências Bibliográficas

Burrows, C. R., Sahinkaya, M. N. Parameter estimation of multi-mode rotor-bearing systems. *Proceedings of the Royal Society of London*, v.A379, n 1777, pp367-387, 1982.

Burrows, C. R., Stanway, R. Identification of journal bearing characteristics. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, v.99, (3), pp.167-173, 1977.

Burrows, C. R., Stanway, R. A coherent strategy for estimating linearized oil-film coefficients. *Proceedings of the Royal Society of London*, v.A370, n 1740, pp.89-105, 1980.

Caldiron, Leonardo. *Estimação de Rigidezes de Mancais de Rotores por Análise de Sensibilidade*. Ilha Solteira: Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, 2004, 82 p. Dissertação (Mestrado).

Chatterjee, A., Vyas, N. S. Nonlinear parameter estimation in rotor-bearing system using volterra series and method of harmonic probing. *Journal of Vibration and Acoustics*, v.125, (3), pp.299-306, 2003.

Chen, J. H., Lee, A. C. Estimation of linearized dynamic characteristics of bearings using synchronous response. *International Journal of Mechanical Science*, v.37, (2), pp.197-219, 1995.

Chen, J. H., Lee, A. C. Identification of linearized dynamic characteristics of rolling element bearings. *Journal of Vibration and Acoustics*, v.119, pp.60-69, 1997.

- Chiarello, André Garcia. *Detecção e Localização de Falhas em Sistemas Mecânicos Estacionários através de Funções de Correlação*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998, 158 p. Tese (Doutorado).
- Cooper, J. E., Desforges, M. J., Wright, J. R. Modal parameter identification using an unknown coloured random input. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v.9, (6), pp.685-695, 1995.
- De Santiago, O. C., San Andrés, L. Field methods for identification of bearing support parameters-part I: identification from transient rotor dynamic response due to impacts. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, v.129, pp.205-212, 2007a.
- De Santiago, O. C., San Andrés, L. Field methods for identification of bearing support parameters – part II: identification from rotor dynamic response due to imbalances. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, v.129, pp.213-219, 2007b.
- Desforges, M. J., Cooper, J. E., Wright, J. R. Spectral and modal parameter estimation from output-only measurements. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v.9, (2), pp.169-186, 1995.
- Dowson, D., Taylor, C. M. The state of knowledge in the field of bearing influenced rotor dynamics. *Tribology International*, v.13, (5), pp.196-198, 1980.
- Eduardo, Alexandre Carlos. *Diagnóstico de Defeitos em Sistemas Mecânicos Rotativos através da Análise de Correlações e Redes Neurais Artificiais*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2003, 138 p. Tese (Doutorado).
- Edwards, S., Lees, A. W., Friswell, M. I. Experimental identification of excitation and support parameters of a flexible rotor-bearings-foundation system from a single run-down. *Journal of Sound and Vibration*, v.232, (5), pp.963-992, 2000.

- Ellis, J., Roberts, J. B., Sianaki, A. H. A comparison of identification methods for estimating squeeze-film damper coefficients. *Journal of Tribology*, v.110, (1), pp.119-127, 1988.
- El-Sherief, H. Multivariable system structure and parameter identification using the correlation method. *Automatica*, v.17, (2), pp.541-544, 1981.
- El-Sherief, H. State and parameter estimation of linear stochastic multivariable sampled data systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, v.14, (6), pp.911-919, 1984.
- Isermann, R., Baur, U., Bamberger, W., Kneppo, P., Siebert, H. Comparison of six on-line identification and parameter estimation methods. *Automatica*, v.10, pp.81-103, 1974.
- Khan, A. A., Vyas, N. S. Non-linear parameter estimation using volterra and wiener theories. *Journal of Sound and Vibration*, v.221, (5), pp.805-821, 1999.
- Kim, Y. H., Yang, B. S., Tan, A. C. C. Bearing parameter identification of rotor-bearing system using clustering-based hybrid evolutionary algorithm. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.33, (6), pp.493-506, 2007.
- Kraus, J., Blech, J. J., Braun, S. G., In situ determination of rolling bearing stiffness and damping by modal analysis. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, v.109, (3), pp.235-240, 1987.
- Lalanne, M., Ferraris, G. *Rotordynamics prediction in engineering*. 1<sup>st</sup> edition, West Sussex: John Wiley & Sons, England, 1990, 198 p.
- Marsh, E. R., Yantek, D. S. Experimental measurement of precision bearing dynamic stiffness. *Journal of Sound and Vibration*, v.202, (1), pp.55-66, 1997.



- Melsa, J. L., Sage, A. P. *An introduction to probability and stochastic processes*. 1.ed. Prentice-Hall, 1973, Cap. 6, Linear system response to stochastic processes, pp.245-299.
- Morton, P. G. On the dynamics of large turbo-generator rotors. *Proceedings of Institution of Mechanical Engineers*, v.180, pp.296-312, 1965.
- Morton, P. G. Measurement of the dynamic characteristics of a large sleeve bearing. *Journal of Lubrication Technology*, v.93, pp. 143-150, 1971.
- Muszynska, A., Bently, D. E. Frequency-swept rotating input perturbation techniques and identification of the fluid force models in rotor/bearing/seal systems and fluid handling machines. *Journal of Sound and Vibration*, v.143, (1), pp.103-124, 1990.
- Muszynska, A., Bently, D. E., Franklin, W. D., Grant, J. W., Goldman, P. Applications of sweep frequency rotating force perturbation methodology in rotating machinery for dynamic stiffness identification. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, v.115, (2), pp.266-271, 1993.
- Nordmann, R. Identification of modal parameters of an elastic rotor with oil film bearings. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, v.106, pp.107-112, 1984.
- Ogata, K. *System dynamics*. 3.ed. Prentice Hall, 1998, Cap.10, Mathematical modeling of dynamic systems in state space, pp.559-628.
- Ogata, K. *Engenharia de controle moderno*. 4.ed. Pearson Prentice Hall, 2003, Cap.11, Análise de sistemas de controle no espaço de estados, pp.616-649.
- Pederiva, Robson. *Identificação Paramétrica de Sistemas Mecânicos Excitados Estocasticamente*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1992, 110 p. Tese (Doutorado).

- Qiu, Z. L., Tieu, A. K. Identification of sixteen force coefficients of two journal bearings from impulse responses. *Wear*, v.212, pp.206-212, 1997.
- Roether, F, Pederiva, R. Identifikation mechanischer systeme mittels korrelationsanalyse. *Z. Angew. Math. Mech*, v.66, 1986.
- Rouvas, C., Childs, D. W. A parameter identification method for the rotordynamic coefficients of a high Reynolds number hydrostatic bearing. *Journal of Vibration and Acoustics*, v.115, pp.264-270, 1993.
- Sahinkaya, M. N, Burrows, C. R. Estimation of linearized oil-film parameters from the out-of-balance response. *Proceedings of Institution of Mechanical Engineers; Part C*, v.198, (8), pp.131-135, 1984.
- Sanches, F. D., Pederiva, R. Identificação de parâmetros de mancal usando a equação matricial de Ljapunov. In: V Congresso Nacional de Engenharia Mecânica – CONEM, Salvador-BA. *Anais: Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas*, 2008, CON08-1185.
- Shafai, B., Carroll, R. L. Comments on “On the application of matrix generalized inverses to the design of observer for time-varying and time-invariant linear systems”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. AC-29, (12), pp.1125-1126, 1984.
- Tapia, Abdón Tadeo. *Modelagem dos Acoplamentos Mecânicos nos Sistemas Horizontais Rotor-Acoplamento-Mancal*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2003, 250 p.Tese (Doutorado).
- Tiwari, R. Conditioning of regression matrices for simultaneous estimation of the residual unbalance and bearing dynamic parameters. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v.19, pp.1082-1095, 2005.

- Tiwari, R., Chakravarthy, V. Simultaneous identification of residual unbalances and bearing dynamic parameters from impulse responses of rotor-bearing systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v.20, pp.1590-1614, 2006.
- Tiwari, R., Lees, A. W., Friswell, M. I. Identification of speedy-dependent bearing parameters. *Journal of Sound and Vibration*, v.254, (5), pp.967-986, 2002.
- Tiwari, R., Lees, A. W., Friswell, M. I. Identification of dynamic bearing parameters: a review. *The Shock and Vibration Digest*, v.36, (2), pp.99-124, 2004.
- Tiwari, R., Vyas, N. S. Estimation of non-linear stiffness parameters of rolling element bearings from random response of rotor-bearing systems. *Journal of Sound and Vibration*, v.187, (2), pp.229-239, 1995.
- Tiwari, R., Vyas, N. S. Non-linear bearing stiffness parameter extraction from random response in flexible rotor-bearing systems. *Journal of Sound and Vibration*, v.203, (3), pp.389-408, 1997.
- Tiwari, R., Vyas, N.S. Stiffness estimation from random response in multi-mass rotor bearing systems. *Probabilistic Engineering Mechanics*, v.13, (4), pp.255-268, 1998.
- Wang, Q., Maslen, E. H. Identification of frequency-dependent parameters in a flexible rotor system. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, v.128, pp.670-676, 2006.