DESIGUALDADE EM NORMAS COM PESOS PARA A INTEGRAÇÃO FRACIONÁRIA

Maria Cristina de C. Vieira

ORIENTADOR
PROF.DR. CARLOS SEGOVIA FERNÁNDEZ

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Este trabalho foi realizado com o auxílio financeiro da Financiadora Nacional de Estudos e Projetos (FINEP) e da Coordenadoria de Aperfeiçoamento do Pessoal do Ensino Superior. (CAPES)

A meus pais e Elisa

Agradeço:

Ao Prof. Carlos F. Segóvia, meu orientador, por ter-me proposto este trabalho e me acompanhado durante todo o período de elaboração com atenção e simpatia que lhe são características.

Aos amigos e demais professores pelo incentivo, especialmente ao Prof. Roberto A. Macias que acompanhou mais de perto este trabalho.

Aos meus pais pelo apoio e incentivo.

Às instittuições FINEP e CAPES pelo apoio financeiro.

INTRODUÇÃO

Temos como objetivo principal a Teoria da Integração Fracionária, dando destaque especial às desigualdades em normas com peso.

Para atingirmos o nosso propósito, dividimos este trabalho em quatro partes.

No capítulo I, estudamos as funções de peso que satisfazem a condição A_p, dando destaque ao fato de que se uma função de peso u satisfaz a condição A_p então u satisfaz a condição $A_{p'}$ com $p' < p$. Para este capítulo citamos as referências [1] e [2].

No capítulo II com o auxílio do teorema de interpolação de Marcinkiewcz [4], provamos o teorema de Hardy-Litlewood [3] para a função maximal f^* definido em $L^p(R^n, u(x)dx)$, que nos dá uma condição necessária e suficiente para que f^* seja do tipo forte (p,p).

No capítulo III, provamos um teorema de limitação para o operador maximal $(M_\alpha f)(x) = \sup_{Q \subset R^n} |Q|^{\alpha/n-1} \int_Q |f(y)|dy$; isto é: provamos que se u é uma função de peso que pertence ao $A_{p,q}$ com $1 < p < n/\alpha$ e $1/q = 1/p - \alpha/n$ então $\|(M_\alpha f)v\|_q \leqslant C\|fv\|_p$. Também estudamos o caso em que $p = 1$ e v pertence a $A_{1,q}$. Para este capítulo podemos citar as referências [5] e [6].

É no capítulo IV que abordamos o tema central deste trabalho. Com auxílio de resultados anteriores mostramos um teorema de limitação para o operador integração fracionária; ou seja, para $0 < \alpha < n, 1/q = 1/p - \alpha/n$, $1 < p < \alpha/n$ e v pertencente ao $A_{p,q}$ temos a seguinte desigualdade: $\|(T_\alpha f)v\|_q \leqslant C \; \|fv\|_p$. Os casos $p = 1$ e $q = \infty$ também são vistos neste capítulo. Podemos citar a referência [6].

NOTAÇÕES

R^n denota o espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$; se $x \in R^n$ denotamos a norma de x por $|x| = (\sum_{i=1}^{n} x_i)^{1/2}$.

Se E é um subconjunto do R^n, $|E| = m(E)$ denota a medida de Lebesgue de E.

C e C' denotam constantes positivas, nem sempre as mesmas.

Se $1 < p < \infty$ p' é o seu conjugado $p' = p/(p-1)$.

Neste trabalho, adotaremos as seguintes convenções:

i) $0 . \infty = 0$;

ii) para $p = 1$, $[\int_Q [v(x)]^{-1/(p-1)} dx]^{p-1}$, representa sup.es. $\{[v(x)]^{-1}; x \in Q\}$.

CAPÍTULO I

Neste capítulo estudaremos, principalmente, as funções de peso (funções não negativas) que satisfazem a condição A_p. Veremos a definição do espaço $L^p(R^n, d\mu)$, cujas funções são objeto de nosso estudo, e, também outras definições importantes para nosso trabalho.

Definição 1: Para $1 \leq p < \infty$, $L^p(R^n, d\mu)$ é o espaço das funções mensuráveis f, tais que:

$$\int_{R^n} |f(x)|^p \, d\mu < \infty \quad .$$

Para $p = \infty$, $L^\infty(R^n, d\mu)$ é o espaço das funções limitadas, ou das funções limitadas com exceção de um conjunto de medida nula.

Definição 2: Para $1 \leq p < \infty$, definimos *norma* de uma função f pertencente ao $L^p(R^n, d\mu)$ por:

$$\|f\|_p = \left[\int_{R^n} |f(x)|^p \, d\mu\right]^{1/p} ;$$

e para $p = \infty$ a *norma* de uma função f pertencente ao $L^\infty(R^n, d\mu)$ é definida por:

$$\|f\|_\infty = \inf\{\alpha : \mu\{t: f(t) > \alpha\} = 0\}$$

Podemos observar que, com a norma assim definida, o espaço $L^p(R^n, d\mu)$ com $1 \leq p < \infty$ é um espaço vetorial normado.

A desigualdade de Hölder: se p e q são dois números não negativos tais que: $1/p + 1/q = 1$, se $f \in L^p(R^n, d\mu)$ e $g \in L^q(R^n, d\mu)$ então:

$$\int_{R^n} |f(x)\ g(x)|\ d\mu \leq \|f\|_p\ \|g\|_q$$

A desigualdade de Minkowski: se $f_n (n = 1,2,...)$ são funções pertencentes ao $L^p(R^n, d\mu)$ temos:

$$\Big\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \Big\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \|_p \quad .$$

DEFINIÇÃO 3: Seja g uma função definida no R^n, α um número qualquer. Consideremos o conjunto $E_\alpha = \{x: |g(x)| > \alpha\}$. A função $\lambda: R_+ \to R_+$, definida por $\lambda(\alpha) = m(E_\alpha)$ é a *função distribuição* de $|g|$.

Uma aplicação importante da função distribuição $\lambda(\alpha)$ é que qualquer quantidade que trabalhe somente com o tamanho de g, pode ser expressa em termos de λ. Por exemplo: Se $g \in L^p(R^n, dx)$, com $1 \leq p < \infty$:

$$(1.1) \qquad \int_{R^n} |g(y)|^p dy = p\int_0^\infty \alpha^{p-1} m\{x: |g(x)| > \alpha\} d\alpha \quad ,$$

e se $g \in L^\infty(R^n, dx)$:

(1.2) $\|g\|_\infty = \inf\{\alpha : \lambda(\alpha) = 0\}$.

A igualdade (1.2) decorre imediatamente da definição de $\|g\|_\infty$. Para mostrarmos (1.1) necessitamos do seguinte resultado:

LEMA 1: Seja $\psi: R_+ \to R_+$ tal que possamos definir $\psi(x) = \int_0^x \psi'(\alpha)d\alpha$. Seja $g: R^n \to R_+$, então:

$$\int_{R^n}\psi(g(x))dx = \int_0^\infty \psi'(\alpha)m\{x: g(x) > \alpha\}\ d\alpha \quad .$$

DEMONSTRAÇÃO: Definimos

$$h(x,\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \alpha > g(x) \\ 1 & \text{se} \quad \alpha \leq g(x) \end{cases}$$

Observemos que: $\chi_{\{x: g(x)>\alpha\}}(x) = h(x,\alpha)$; então

$$\int_{R^n}\psi(g(x))dx = \int_{R^n}\int_0^{g(x)} \psi'(\alpha)d\alpha\ dx$$

$$= \int_{R^n}\int_0^\infty h(x,\alpha)\psi'(\alpha)d\alpha\ dx$$

$$= \int_{R^n}\int_0^\infty \chi_{\{x: g(x)>\alpha\}}(x)\psi'(\alpha)d\alpha dx$$

$$= \int_0^\infty \psi'(\alpha) \int_{R^n}\chi_{\{x: g(x)>\alpha\}}(x)dx d\alpha$$

$$= \int_0^\infty \psi'(\alpha) m\{x : g(x) > \alpha\} \; d\alpha \quad .$$

(A mudança na ordem de integração é permitida pelo teorema de Tonelli).

Agora, para mostrarmos (1.1), basta definirmos $\psi: R_+ \to R_+$ por $\psi(x) = x^p$ e aplicarmos o lema 1.

DEFINIÇÃO 4: Para $1 < p < \infty$, dizemos que uma função de peso v *satisfaz à condição A_p com constante k* se:

$$(1.3) \qquad \left[|Q|^{-1}\int_Q v(x)\,dx\right]\left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{-1/(p-1)}dx\right]^{p-1} \leq k \quad ,$$

para todo cubo Q contido em R^n.

Para p = 1, esta condição se torna:

$$(1.4) \quad |Q|^{-1}\int_Q v(x)\;dx \leq k \;.\; \text{inf.es.}\ \{v(y) : y \in Q\} \quad .$$

Para mostrarmos propriedades importantes das funções que satisfazem a condição A_p, necessitamos do seguinte *lema de Calderon-Zygmund.*

LEMA 2: (ver [1]). Seja Q um cubo do R^n, w uma função não negativa, integrável em Q; e, λ uma constante positiva tal que: $\lambda > m_Q(w)$, onde $m_Q(w) = |Q|^{-1}\int_Q w(x)dx$. Então existe uma sucessão de cubos $Q_i \subseteq Q$ com interiores disjuntos tais que:

(1.5) $w(x) \leq \lambda$ para quase todo x que não pertence à $\bigcup_i Q_i$,

(1.6) existem constantes c e C que dependem de n tais que:

$$c\lambda < |Q_i|^{-1}\int_{Q_i} w(x)\,dx = m_{Q_i}(w) \leq C\lambda$$

Observação: Este lema é válido para qualquer medida μ tal que: $\mu(2Q)/\mu(Q) \leq C$, para todo cubo Q.

LEMA 3: (ver [2]). Se w é uma função não negativa que satisfaz a condição A_p com constante k, então:

$$(1.7) \qquad \left|\{x \in Q: w(x) \geq \beta\, m_Q(w)\}\right| > \alpha\, |Q| \qquad ,$$

para constantes α e β com $o < \alpha$, $\beta < 1$ independentes de Q.

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos o conjunto $E'=\{x\varepsilon Q: w(x) \leq \beta m_Q(w)\}$, observemos que:

$$\beta^{-1}\left[\frac{|E'|}{|Q|}\right]^{p-1} = m_Q(w)\left[|Q|^{-1}\int_{E'}[\beta m_Q(w)]^{-1/(p-1)}dx\right]^{p-1}$$

$$\leq m_Q(w)\left[|Q|^{-1}\int_{E'}[w(x)]^{-1/(p-1)}dx\right]^{p-1}$$

$$\leq m_Q(w)\left[|Q|^{-1}\int_{Q}[w(x)]^{-1/(p-1)}dx\right]^{p-1} \leq k \quad ;$$

(esta última desigualdade é dada pela condição A_p). Logo

$|E'| \leq k^{1/(p-1)} |Q| \; \beta^{1/(p-1)}$, tomando β arbitrariamente pequeno teremos $|E'|$ tende à zero; e, portanto existe $0 < \alpha < 1$ tal que (1.7) é válida.

LEMA 4: Seja w uma função não negativa, integrável em um cubo $\tilde{Q} \subset R^n$ tal que, para todo cubo $Q \subseteq \tilde{Q}$ a desigualdade (1.7) é válida. Então existem $\gamma > 0$ e C' que dependem unicamente de α, β e n tais que para todo $\lambda > m_Q(w)$

$$(1.8) \qquad \int_{\{x\varepsilon Q: w(x) > \lambda\}} w(x)\,dx \leq C'\lambda \; \left|\{x\varepsilon Q: w(x) > \gamma\lambda\}\right| \quad .$$

DEMONSTRAÇÃO: Fixamos um cubo Q; seja λ tal que $\lambda > m_Q(w)$. Pelo lema de Calderon-Zygmund, existe uma sucessão de cubos $Q_i \subseteq Q$ de interiores disjuntos tais que (1.5) e (1.6) são válidas. Por (1.5), $\{x \; \varepsilon \; Q: w(x) > \lambda\} = \bigcup_i Q_i$; pela hipótese e (1.6) temos:

$$|Q_i| \leq \alpha^{-1} \; \left|\{x \; \varepsilon \; Q_i : w(x) > \beta \; m_{Q_i}(w)\}\right|$$

$$\leq \alpha^{-1} \; \left|\{x \; \varepsilon \; Q: w(x) > \beta \; c \; \lambda\}\right| \qquad ,$$

usando estas duas conclusões obtemos:

$$\int_{\{x\varepsilon Q:\; w(x) > \lambda\}} w(x)\,dx = \int_{\cup Q_i} w(x)\; dx$$

$$\leq \sum_i \int_{Q_i} w(x)\,dx = \sum_i |Q_i| \, m_{Q_i}(w)$$

$$\leq \sum_i |Q_i| \; C\,\lambda \leq C.\alpha^{-1} \sum_i \left|\{x \in Q:\ w(x) > \beta\, c\, \lambda\}\right| ,$$

tomando $C' = C\ .\ \alpha^{-1}$ e $\gamma = c\beta$ obtemos (1.8).

LEMA 5: Seja w uma função não negativa; se existem α e β com $0 < \alpha,\ \beta < 1$ tais que para todo cubo Q, (1.7) é válida então existem $\delta > 0$ e C tais que, para todo cubo Q é válida

$$(1.9)\qquad \left[|Q|^{-1} \int_Q [w(x)]^{1+\delta} dx\right]^{1/(1+\delta)} \leq C|Q|^{-1} \int_Q w(x)\,dx$$

DEMONSTRAÇÃO: Usando o lema 4 e a função distribuição (ver def. 3) de w em Q temos:

$$(1.10)\qquad \int_{m_Q}^{\infty} \lambda^{\delta-1} \int_{\{x\in Q:w(x)>\lambda\}} w(x)\ dx\ d\lambda$$

$$\leq C' \int_{m_Q}^{\infty} \lambda^{\delta} \left|\{x \in Q:\ w(x) > \gamma\lambda\}\right| d\lambda$$

$$\leq C' \int_0^{\infty} \lambda^{\delta} \left|\{x \in Q:\ w(x) > \gamma\lambda\}\right| d\lambda$$

$$= C'\,\gamma^{-(1+\delta)} \int_0^{\infty} \alpha^{\delta} \left|\{x \in Q:\ w(x) > \alpha\}\right| d\alpha$$

$$= C'\,\gamma^{-(1+\delta)} (1+\delta)^{-1} \int_Q [w(x)]^{1+\delta} dx \qquad ;$$

por outro lado,

$$(1.11)\quad \int_{m_Q}^{\infty} \lambda^{\delta-1} \int_{\{x\,\varepsilon\,Q:\ w(x)\,>\,\lambda\}} w(x)\ dx\ d\lambda$$

$$\geq \int_0^{\infty} \lambda^{\delta-1} \int_{\{x\,\varepsilon\,Q:\ w(x)\,>\,\lambda\}} w(x)\ dx\ d\lambda\ -$$

$$\int_0^{m_Q} \lambda^{\delta-1} \int_Q w(x)\ dx\ d\lambda \quad ,$$

mas,

$$(1.12)\quad \int_0^{\infty} \lambda^{\delta-1} \int_{\{x\,\varepsilon\,Q:\ w(x)\,>\,\lambda\}} w(x)\ dx\ d\lambda$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda^{\delta-1} \int_Q w(x)\ \chi_{\{x\,\varepsilon\,Q:\ w(x)\,>\,\lambda\}}(x)\ dx\ d\lambda$$

$$= \int_Q w(x) \int_0^{\infty} \lambda^{\delta-1}\ \chi_{\{\lambda:\,\lambda\,<\,w(x)\}}(\lambda)\ d\lambda\ dx$$

$$= \int_Q w(x) \int_0^{w(x)} \lambda^{\delta-1}\ d\lambda\ dx$$

$$= \delta^{-1} \int_Q [w(x)]^{1+\delta}\ dx \quad .$$

$$(1.13)\quad \int_0^{m_Q} \lambda^{\delta-1} \int_Q w(x)\ dx\ d\lambda = \delta^{-1}|Q|\ [m_Q w]^{1+\delta}$$

Agora, usando (1.12), (1.13) em (1.11), e aplicando (1.10) obtemos:

$$\left[\frac{1}{\delta} - \frac{C'}{\gamma^{1+\delta}(1+\delta)}\right]\left[\ |Q|^{-1}\int_Q [w(x)]^{1+\delta} dx\right] \leq$$

$$\delta^{-1}\left[|Q|^{-1}\int_Q w(x)\,dx\right]^{1+\delta}$$

Assim (1.9) se deduz da desigualdade anterior se tomarmos δ suficientemente pequeno tal que $\left[\frac{1}{\delta} - \frac{C'}{\gamma^{1+\delta}(1+\delta)}\right] \geq 1$ e $C = \delta^{-1}$.

LEMA 6: A desigualdade anti-Hölder, (ver [2]). Se w é uma função não negativa que satisfaz a condição A_p com constante K, então existem $\delta > 0$ e C que dependem unicamente de K e de p, tais que:

$$(1.14)\qquad \left[|Q|^{-1}\int_Q [w(x)]^{1+\delta}dx\right]^{1/(1+\delta)} \leq C|Q|^{-1}\int_Q w(x)dx \quad .$$

DEMONSTRAÇÃO: Basta aplicarmos os lemas 3, 4 e 5 para obtermos o resultado acima.

LEMA 7: Se $1 < p < \infty$, w satisfaz a condição A_p com constante K; então existem constantes r e L que dependem de p e K tais que $1 < r < p$ e w satisfaz a condição A_r com constante L.

DEMONSTRAÇÃO: Como w satisfaz A_p com constante k, é trivial que $w^{-1/(p-1)}$ satisfaz $A_{p'}$, com constante $K' = K^{p'-1}$ onde $p' = p/(p-1)$. Portanto, pelo lema 6, existem $\delta > 0$ e C que dependem unicamente de K' e p' (portanto de K e p) tais que:

$$(1.15) \qquad \left[|Q|^{-1} \int_Q [w(x)]^{-u/(p-1)} \, dx \right]^{1/u}$$

$$\leq C.|Q|^{-1} \int_Q [w(x)]^{-1/(p-1)} \, dx \qquad ,$$

onde $u = 1 + \delta$.

Seja $r = 1 + (p-1)/u$, substituindo em (1.15),

$$(1.16) \qquad \left[|Q|^{-1} \int_Q [w(x)]^{-1/(r-1)} \, dx \right]^{r-1}$$

$$\leq C^{r-1} \left[|Q|^{-1} \int_Q [w(x)]^{-1/(p-1)} \, dx \right]^{p-1} \qquad ;$$

logo

$$\left[|Q|^{-1} \int_Q w(x) \, dx \right] \left[|Q|^{-1} \int_Q [w(x)]^{-1/(r-1)} \, dx \right]^{r-1}$$

$$\leq C^{r-1} \left[|Q|^{-1} \int_Q w(x) \, dx \right] \left[|Q|^{-1} \int_Q [w(x)]^{-1/(p-1)} \, dx \right]^{p-1}$$

$$\leq C^{r-1} . K = L$$

(a última desigualdade é dada pela condição A_p).

LEMA 8: Seja $1 \leq p < \infty$, w satisfaz A_p com constante K; então existem constantes s e M que dependem de p e K tais que $s > 1$ e w^s satisfaz A_p com constante M.

DEMONSTRAÇÃO: 1º caso, $p > 1$: Aplicando o lema 6, existem $u > 1$ e C que dependem de K e p, tais que (1.14) é válida. Se $\gamma < u$, pela desigualdade de Hölder temos:

$$\left[|Q|^{-1}\int_Q [w(x)]^{\gamma}\, dx\right]^{1/\gamma} \leq |Q|^{-1/\gamma}\left[\int_Q [w(x)^{\gamma}]^{u/\gamma} dx\right]^{1/\gamma\,\gamma/u} |Q|^{(u-\gamma)/\gamma u}$$

$$=\left[|Q|^{-1}\int_Q [w(x)]^{u}\, dx\right]^{1/u}$$

$$\leq C\ |Q|^{-1}\int_Q w(x)\ dx \qquad ,$$

logo (1.14) é válida para todo $\gamma < u$. Aplicando o lema 6 para $w^{-1/(p-1)}$ existem $t > 1$ e C' tais que:

$$\left[|Q|^{-1}\int_Q [w(x)]^{-t/(p-1)}\, dx\right]^{1/t}$$

$$\leq C'.|Q|^{-1}\int_Q [w(x)]^{-1/(p-1)}\, dx \qquad ;$$

é fácil ver que esta desigualdade é válida para todo $\beta < t$. Assim, tomamos $s = \min\,\{u,t\}$ e,

$$\left[|Q|^{-1}\int_Q [w(x)]^{s}\, dx\right]\left[|Q|^{-1}\int_Q [w(x)]^{-s/(p-1)}\, dx\right]^{p-1}$$

$$\leq C.C'\left[|Q|^{-1}\int_Q w(x)\,dx\right]\left[|Q|^{-1}\int_Q [w(x)]^{-1/(p-1)} dx\right]^{p-1}$$

$$\leq K.C.C' \qquad ,$$

se $M = (K.C.C')^s$, obtemos que w^s satisfaz A_p com constante M.

2º caso: $p = 1$:

Se w satisfaz A_1, w satisfaz A_2 pois pela definição de A_1,

$$\left[|Q|^{-1}\int_Q w(x)dx\right]\left[|Q|^{-1}\int_Q [w(x)]^{-1}\, dx\right]$$

$$\leq K.\text{inf.es. } \{w(y): y \in Q\}.\text{sup.es.}\{[w(y)]^{-1}: y \in Q\} = K.$$

Portanto, podemos aplicar o lema 6, isto é, existem $u > 1$ e C tais que (1.14) é válida. Logo se $1 < s < u$ temos

$$|Q|^{-1}\int_Q [w(x)]^s dx \leq C^s\left[|Q|^{-1}\int_Q w(x)dx\right]^s \leq C^s K^s \text{inf.es.}\{w(y)^s : y \in Q\} ,$$

logo w^s satisfaz A_1 com constante $M = C^s.K^s$.

CAPÍTULO II

Neste capítulo, consideraremos o problema de determinar as funções não negativas u, para as quais existe uma constante C tal que:

$$(2.1)\quad \int_{R^n} [f^*(x)]^p\, u(x)dx \leq C \int_{R^n} [f(x)]^p u(x)dx \quad ,$$

onde C é independente de f, $1 < p < \infty$ e f^* é a *função maximal de Hardy*, ou seja:

$$f^*(x) = \sup_{Q \subset R^n} |Q|^{-1} \int_Q |f(t)|\, dt \quad .$$

DEFINIÇÃO 1: Dizemos que um operador $T: L^p(R^n, d\mu) \to L^q(R^n, d\mu')$, é um *operador do tipo fraco (p,q)* se existe uma constante C independente de α e f tal que:

$$\mu' \{x: Tg(x) > \alpha\} \leq C \left[\alpha^{-1} \|g\|_p\right]^q \quad .$$

DEFINIÇÃO 2: Dizemos que um operador $T: L^p(R^n, d\mu) \to L^q(R^n, d\mu')$ é um *operador do tipo forte (p,q)* se existe uma constante C independente de f tal que:

$$\|Tg\|_q \leq C \|g\|_p$$

Para a demonstração do teorema 1, necessitamos do seguinte lema:

LEMA 1: (ver [1]). Seja E um subconjunto mensurável do R^n, com uma cobertura de bolas $\{B_j\}$ de diâmetro limitado. Então, dessa família podemos selecionar uma sequência (finita ou não) de bolas B_i disjuntas tais que $E \subset \bigcup_i B_i^*$, onde B_i^* tem o mesmo centro que B_i, mas o diâmetro cinco vezes maior.

TEOREMA 1: (ver [3]). Seja $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \infty$, u e v funções não negativas. Dada uma função f definida no R^n, seja $E_\alpha = \{x: f^*(x) > \alpha\}$; então existe uma constante B independente de f e α tal que:

$$(2.2) \quad \int_{E_\alpha} u(x)dx \leq B.\alpha^{-p}\int_{R^n} |f(x)|^p \, v(x) \, dx \quad ,$$

se e somente se, existe uma constante K tal que:

$$(2.3) \quad \left[|Q|^{-1}\int_Q u(x)\,dx\right]\left[|Q|^{-1}\int_Q \left[v(x)\right]^{-1/(p-1)} dx\right]^{p-1} \leq K \quad ,$$

para todo cubo Q do R^n. (se u = v, (2.3) se torna a condição A_p).

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos (2.3) verdadeira.

1º caso: f não é integrável.

Usando a desigualdade de Hölder temos:

$$\infty = \int_{R^n} |f(x)|\,dx = \int_{R^n} |f(x)|\,[v(x)]^{1/p}[v(x)]^{-1/p}\,dx$$

$$\leq \left[\int_{R^n} |f(x)|^p\; v(x)\,dx\right]^{1/p} \left[\int_{R^n} [v(x)]^{-1/(p-1)}\; dx\right]^{p/(p-1)}$$

$$\leq \left[\int_{R^n} |f(x)|^p\; v(x)\,dx\right]^{1/p} \left[\int_{R^n} [v(x)]^{-1/(p-1)}\; dx\right]^{p-1} ,$$

como $f \in L^p(R^n,\ v(x)dx)$, temos $\int_{R^n} |f(x)|^p v(x)dx<\infty$; logo $\left[\int_{R^n} [v(x)]^{-1/(p-1)} dx\right]^{p-1} = \infty$, mas por (2.3) isto implica que $u(x) = 0$ para quase todo x; sendo assim (2.2) é válida para qualquer $B > 0$.

2º caso: f é integrável:

Seja $E_\alpha = \{x \in R^n\colon f^*(x) > \alpha\}$; para cada x de E_α existe Q_x tal que:

$$(2.4) \qquad \int_{Q_x} |f(t)|\,dt > \alpha \quad .$$

A família $\{Q_x\}$ é uma cobertura de E_α; pelo lema 1, existem $Q_i (i=1,2,\ldots)$ com interiores disjuntos tais que $E_\alpha \subset \bigcup_i Q_i^*$, logo

$$(2.5) \qquad \mu(E_\alpha) \leq \mu(\bigcup_i Q_i^*) \leq \sum_i \mu(Q_i^*) \quad ,$$

usando $\mu(x) = u(x)dx$, (2.4), a desigualdade de Hölder, e (2.3) obtemos:

$$\int_{E_\alpha} u(x)\,dx \leq \sum_i \left[\int_{Q_i^*} u(x)\,dx\right]\left[(|Q_i|\alpha)^{-1}\int_{Q_i} |f(t)|\,dt\right]^p$$

$$\leq \sum_i (|Q_i|\alpha)^{-p}\left[\int_{Q_i} |f(t)|^p v(t)\,dt\right]\left[\int_{Q_i} [v(x)]^{-1/(p-1)}\,dx\right]^{p-1}\left[\int_{Q_i^*} u(x)\,dx\right]$$

$$\leq \sum_i (|Q_i|\alpha)^{-p}\left[\int_{Q_i} |f(t)|^p v(t)\,dt\right]\left[\int_{Q_i^*} [v(x)]^{-1/(p-1)}\,dx\right]^{p-1}\left[\int_{Q_i^*} u(x)\,dx\right]\left[\frac{|Q_i^*|}{|Q_i^*|}\right]^p$$

$$= 5^{np}\alpha^{-p}\sum_i\left[\int_{Q_i} |f(t)|^p v(t)\,dt\right]\left[|Q_i^*|^{-1}\int_{Q_i^*}[v(x)]^{-1/(p-1)}\,dx\right]^{p-1}\left[Q_i^*\int_{Q_i^*} u(x)\,dx\right]$$

$$\leq K.5^{np}\alpha^{-p}\sum_i\int_{Q_i} |f(t)|^p\, v(t)\,dt$$

$$\leq K.5^{np}\alpha^{-p}\int_{R^n} |f(t)|^p\, v(t)\,dt \qquad ,$$

obtemos (2.2) com $B = 5^{np}K$.

Suponhamos, agora, que (2.2) é verdadeira, então:

$$(2.6)\quad \int_{\{x:f^*(x)\geq\alpha\}} u(x)\,dx \leq B\alpha^{-p}\int_{R_n} |f(x)|^p\, v(x)\,dx \qquad ,$$

dado Q em R^n, seja $A = \int_Q [v(x)]^{-1/(p-1)}\,dx$,

i) Se $A = 0$ então (2.3) é verdadeira para todo K.

ii) Se $0 < A < \infty$ definimos

$$f(x) = \begin{cases} [v(x)]^{-1/(p-1)} & \text{se } x \in Q \\ 0 & \text{se } x \notin Q \end{cases}$$

Notemos que se $x \in Q$, $f^*(x) \geq A/|Q|$. Seja $\alpha = A/|Q|$, assim $\{x: f^*(x) \geq \alpha\} = Q$, logo (2.6) se torna

$$(2.7) \int_Q u(x)\,dx \leq B\left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{-1/(p-1)}dx\right]^{-p}\left[\int_{R_n} |f(x)|^p v(x)\,dx\right] \quad ,$$

multiplicando os dois lados de (2.7) por A^{p-1} e considerando a definição de f:

$$\left[\int_Q u(x)\,dx\right]\left[\int_Q [v(x)]^{-1/(p-1)}dx\right]^{p-1} \leq$$

$$B\left[\int_Q [v(x)]^{-1/(p-1)}dx\right]^{p-1}\left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{-1/(p-1)}dx\right]^{-p}\left[\int_Q [v(x)]^{-1/(p-1)}dx\right]$$

$$= B\ |Q|^p \quad ,$$

logo obtemos (2.3) com $K \leq B$.

iii) Se $A = \infty$ temos que $v^{-1/p}$ não pertence ao $L^{p'}(Q,dx)$; assim por uma consequência imediata do teorema de Banach-Steinhaus (ver [4]), existe $g \in L^p(Q,dx)$ tal que:

$$(2.8) \qquad \int_Q g(x)\ [v(x)]^{-1/p}\,dx = \infty \quad , \qquad e$$

$$(2.9) \qquad \int_Q |g(x)|^p\,dx = \int_Q |g(x)v(x)^{-1/p}|^p v(x)\,dx < \infty \quad ;$$

definimos $f(x) = \begin{cases} g(x)\,[v(x)]^{-1/p} & \text{se } x \in Q \\ 0 & \text{se } x \notin Q \end{cases}$

com esta definição, $f^*(x) = \infty$ para todo $x \in R^n$, ou seja $\alpha = \infty$. Assim por (2.6) podemos concluir que $u(x) = 0$ para quase todo $x \in R^n$ e (2.3) é válida para todo K.

Terminamos assim, a demonstração do teorema 1.

TEOREMA 2: Teorema de interpolação de Marcinkiewcz, (ver [4]): Seja T uma transformação sub-aditiva definida em $L^{p_0}(R^n, d\mu) + L^{p_1}(R^n, d\mu)$. Suponhamos que T é simultaneamente dos tipos fracos (p_0, q_0) e (p_1, q_1). Se $0 < \theta < 1$ e $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, $1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$ então T é do tipo forte (p,q).

TEOREMA 3: (ver [3]). Seja u uma função não negativa definida no R^n; $1 < p < \infty$; f definida no R^n. Então existe uma constante C independente de f tal que (2.1) é válida, se e somente se, existe uma constante K independente de Q tal que u(x) satisfaz a condição A_p com constante K.

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que (2.1) é válida então (2.2) também vale com B = C e, pelo teorema 1, u(x) satisfaz a condição A_p com constante K.

Suponhamos, agora, que u(x) satisfaz a condição A_p com constante K. Aplicando o lema 7 existem $1 < r < p$ e L tal que u(x) satisfaz a condição A_r com constante L, logo pelo teorema 1, $f^*(x)$ é do tipo fraco (r,r). Por outro lado, usando a condição A_p e a desigualdade de Hölder, vemos que $u(x)$ satisfaz a condição A_{2p} com constante K, assim, também pelo teorema 1 $f^*(x)$ é do tipo fraco $(2p, 2p)$. Usando o teorema 2 concluimos que $f^*(x)$ é do tipo forte (p,p); isto é, existe uma constante C independente de f tal que (2.1) é verdadeira.

CAPÍTULO III

Nossos interesses, neste capítulo, resumem-se no operador maximal definido por:

$$(M_\alpha f)(x) = \sup_{Q \subset R^n} |Q|^{-1(1-\alpha/n)} \int_Q |f(y)|dy \quad ,$$

onde $0 \leq \alpha < n$; Q é um cubo n-dimensional centrado em x.

O problema é determinar condições para funções não negativas v para que tenhamos:

$$(3.1) \left[\int_{R^n} |(M_\alpha f)(x)v(x)|^q \, dx \right]^{1/q} \leq C \left[\int_{R^n} |f(x)v(x)|^p \, dx \right]^{1/p} \quad ,$$

onde C é uma constante independente de f e $1 < p < n/\alpha$, $1/q = 1/p - \alpha/n$.

Notemos que se $\alpha = 0$, teremos $p = q$ e o problema acima se reduz no teorema de Hardy-Litlewood, já estudado no capítulo II, agora com $u(x) = [v(x)]^q$.

Também vemos o caso em que $p = 1$ e $1/q = 1 - \alpha/n$.

DEFINIÇÃO 1: Para $1 < p < \infty$, dizemos que uma função não negativa v definida no R^n *pertence ao* $A_{p,q}$ se:

$$(3.2) \quad \left[|Q|^{-1} \int_Q [v(x)]^q \, dx \right]^{1/q} \left[|Q|^{-1} \int_Q [v(x)]^{-p'} \, dx \right]^{1/p'} \leq K < \infty \, ,$$

onde $p' = p/(p-1)$ e Q é um cubo n-dimensional no R^n com lados paralelos ao sistema padrão de eixos, e centrado em x.

Para $p = 1$, esta condição se torna:

$$(3.3) \quad \left[|Q|^{-1} \int_Q [v(x)]^q \, dx \right]^{1/q} \leq k \text{ inf.es.}\{v(y) : y \in Q\} \quad .$$

Para $q = \infty$ temos:

$$(3.4) \quad \left[|Q|^{-1} \int_Q [v(x)]^{-p'} \, dx \right]^{1/p'} \leq K \text{ inf.es.}\{[v(y)]^{-1} : y \in Q\} \ .$$

LEMA 1: Se $v \in A_{p,q}$, existem p_1 e q_1 tais que $1 < p_1 < p$, $1/q_1 = 1/p_1 - \alpha/n$ e $v \in A_{p_1,q_1}$.

DEMONSTRAÇÃO: Vejamos primeiro que $v \in A_{p,q}$ implica v^p satisfaz à condição A_p.

$$\left[|Q|^{-1} \int_Q [v(x)]^p dx \right] \left[|Q|^{-1} \int_Q [v(x)]^{-p'} dx \right]^{1/p'} \leq \left[|Q|^{-1} \int_Q [v(x)]^q \, dx \right]^{p/q}$$

$$\left[|Q|^{-1} \int_Q [v(x)]^{-p'} dx \right]^{1/p'} \leq K^p \quad ,$$

mas v^p satisfaz A_p se e somente se $v^{-p/(p-1)}$ satisfaz $A_{p'}$; assim aplicamos o lema 6 (cap. I) em $v^{-p/(p-1)}$, ou seja, existe $\varepsilon > 0$ e C tais que:

$$(3.5) \quad \left[|Q|^{-1} \int_Q [v(x)]^{-p(1+\varepsilon)/(p-1)} dx \right]^{1/(1+\varepsilon)} \leq C |Q|^{-1} \int_Q [v(x)]^{-p/(p-1)} dx \ ;$$

seja $q_1 < q$, pela desigualdade de Hölder:

$$(3.6)\quad \left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{q_1}dx\right]^{1/q_1} \leq \left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{q}dx\right]^{1/q} \quad ;$$

definimos p_1 por $p(1+\varepsilon)/(p-1) = p_1/(p_1-1)$, então $p' < p_1'$, ou seja $p > p_1$, e seja q_1 definido por $1/q_1 = 1/p_1 - \alpha/n$. Usando estas definições, (3.3) e (3.4) obtemos:

$$\left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{q_1}dx\right]^{1/q_1}\left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{-p_1'}dx\right]^{1/p_1'} \leq KC^{p'} < \infty \quad ,$$

logo $v \in A_{p_1,q_1}$.

LEMA 2: Se $v \in A_{p,q}$, existem p_2 e q_2 tais que $p < p_2$, $1/q_2 = 1/p_2 - \alpha/n$ e $v \in A_{p_2,q_2}$.

DEMONSTRAÇÃO: Provemos primeiro que v^q satisfaz A_q. Como $p < q$ então $p' > q'$ e usando a desigualdade de Hölder:

$$\left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{q}dx\right]\left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{-q'}\,dx\right]^{q-1} \leq$$

$$\left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{q}dx\right]\left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{-p'}\,dx\right]^{q/p'} \leq K^q \quad .$$

Assim, aplicamos o lema 6 (cap. I), existem $\delta > 0$ e C tais que:

$$(3.7)\quad \left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{q(1+\delta)}dx\right]^{1/(1+\delta)} \leq C|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{q}\,dx \quad ;$$

definimos $q(1+\delta) = q_2$, logo $q < q_2$; e p_2 por $1/p_2 = 1/q_2+\alpha/n$, logo $p' > p_2'$.

Usando estas definições, (3.7) e a desigualdade de Hölder:

$$\left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{q_2}dx\right]^{1/q_2}\left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{-p_2'}dx\right]^{1/p_2} \leq C^q\ K \quad ,$$

logo $v \in A_{p_2,q_2}$.

LEMA 3: Se $v \in A_{p,q}$, o operador Tg definido em $L^p(R^n, v(x)^q dx)$ por $Tg(x) = (M_\alpha(g\ v^{\alpha q/n}))(x)$ é do tipo fraco (p,q), (def. 1, cap. II).

DEMONSTRAÇÃO: Seja $E_\alpha = \{x : Tg(x) > \alpha\}$. Para cada $x \in E_\alpha$ existe Q_x tal que

$$(3.8)\quad |Q_x|^{-1}\int_{Q_x} |g(y)|\ [v(y)]^{\alpha q/n}\ dy > \alpha \quad .$$

A família $\{Q_x\}_{x\in E_\alpha}$ é uma cobertura de E_α; pelo lema 1 (cap. II), existem Q_i $(i=1,2,3\ldots)$ dessa família, com interiores disjuntos tais que $E_\alpha \subset \bigcup_i Q_i^*$, logo $\mu(E_\alpha) \leq \sum_i \mu(Q_i)$. Usando $d\mu = [v(x)]^q dx$, $p/q < 1$ e (3.8) obtemos:

$$\left[\int_{E_\alpha}[v(x)]^q dx\right]^{p/q} \leq \left[\sum_i\left(\int_{Q_i^*}[v(x)]^q dx\right)\right]^{p/q} \leq$$

$$\leq \sum_i \left[\int_{Q_i^*} [v(x)]^q dx\right]^{p/q} \left[\alpha |Q_i|^{1-\alpha/n}\right]^{-p} \left[\int_{Q_i} |g(y)| [v(y)]^{\alpha q/n} dy\right]^p$$

$$= \sum_i \left[\int_{Q_i^*} [v(x)]^q dx\right]^{p/q} \left[\alpha |Q_i|^{1-\alpha/n}\right]^{-p} \left[\int_{Q_i} |g(y)| [v(y)]^{\alpha q/n} v(y) [v(y)]^{-1} dy\right]^p$$

$$\leq \sum_i \left[\alpha |Q|^{1-\alpha/n}\right]^{-p} \left[\int_{Q_i} [v(x)]^q dx\right]^{p/q} \left[\int_{Q_i^*} [v(x)]^{-p'} dx\right]^{p-1} \left[\int_{Q_i} |g(y)|^p [v(y)]^{p(1+\alpha q/n)} dy\right]$$

$$\leq \sum_i \left[\alpha |Q_i|^{1-\alpha/n}\right]^{-p} |Q_i^*|^{(p-1)+p/q} \quad |Q_i^*|^{-1} \int_{Q_i^*} [v(x)]^q dx^{\ p/q}$$

$$\left[|Q_i^*|^{-1} \int_{Q_i^*} [v(x)]^{-p'} dx\right]^{p-1} \left[\int_{Q_i} |g(y)|^p [v(y)]^q dy\right]$$

$$\leq \alpha^{-p} 5^n K^p \sum_i \int_{Q_i} |g(y)|^p [v(y)]^q dy$$

$$\leq \alpha^{-p} 5^n K^p \int_{R^n} |g(y)|^p [v(y)]^q dy \qquad ,$$

logo $\int_{E_\alpha} [v(x)]^q dx \leq \alpha^{-q} C \left[\int_{R^n} |g(y)|^p [v(y)]^q dy\right]^{q/p}$ e temos provado que Tg é do tipo fraco (p,q).

TEOREMA 1: (ver [6]. Assuma que $0 < \alpha < n$, $1 < p < n/\alpha$, $1/q = 1/p - \alpha/n$ e $v \in A_{p,q}$. Então existe uma constante C independente de f tal que a desigualdade (3.1) é válida.

DEMONSTRAÇÃO: Vimos nos lemas 1 e 2 que se $v \in A_{p,q}$ então existem p_i e q_i (i=1,2) tais que $v \in A_{p_i,q_i}$; logo pelo lema 3 Tg é do tipo fraco (p_i,q_i) e pelo teorema de interpolação de Marcinkiewcz Tg é do tipo forte (p,q), isto é:

$$(3.9)\quad \left[\int_{R^n} |Tg(x)v(x)|^q dx\right]^{1/q} \leq C \left[\int_{R^n} |g(x)|^p [v(x)]^q dx\right]^{1/p} .$$

Seja $g(x) = f(x)[v(x)]^{-\alpha q/n}$; usando a definição de Tg e de g, a integral à esquerda em (3.9) se torna:

$$(3.10)\qquad \int_{R^n} |(M_\alpha f)(x)|^q [v(x)]^q \, dx \qquad ;$$

e a integral à direita:

$$(3.11)\qquad \int_{R^n} |f(x)|^p [v(x)]^p \, dx \qquad ,$$

Assim (3.10) e (3.11) nos dão (3.1).

TEOREMA 2: (ver [6] , Assuma que $p = 1$, $1/q = 1-\alpha/n$, $v \in A_{1,q}$, f tem suporte numa bola B; e que

$$\int_B |f(x)| \log^+ |f(x)[v(x)]^{1-q}| v(x) \, dx < \infty \qquad .$$

Então:

$$(3.12)\quad \left[\int_B |(M_\alpha f)(x)v(x)|^q dx\right]^{1/q} \leq C\left[w(B)+\int_B |f(x)|\log^+|f(x)[v(x)]^{1-q}|v(x)dx\right],$$

onde $w(B) = \int_B [v(x)]^q dx$.

DEMONSTRAÇÃO: Mostremos inicialmente que existem p_o e q_o tais que $p_o > 1$, $1/q_o = 1/p_o - \alpha/n$ e $v \in A_{p_o,q_o}$. Se $v \in A_{1,q}$ então v^q satisfaz à condição A_1, logo pelo lema 6 (cap. I) existem $\varepsilon > 0$ e C tais que:

$$(3.13)\quad \left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{q(1+\varepsilon)} dx\right]^{1/(1+\varepsilon)} \leq C|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^q\, dx \qquad ,$$

definimos $q_o = q(1+\varepsilon)$ e $1/p_o = 1/q_o + \alpha/n$, temos assim $1<p_o<n/\alpha$; usando (3.13) e a condição $A_{1,q}$:

$$\left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{q_o} dx\right]^{1/q_o} \left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{-p_o'} dx\right]^{1/p_o'}$$

$$\leq \left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^q dx\right]^{1/q} \text{sup.es.}\ \{[v(y)]^{-1} : y \in Q\} \leq K \qquad ,$$

logo $v \in A_{p_o,q_o}$.

Definimos: $g(x) = f(x)[v(x)]^{-\alpha q/n}$;

$$E_k(x) = \{x \in B:\ 2^k \leq |g(x)| \leq 2^{k+1}\} \qquad ;$$

$$g_k(x) = g(x)\,\chi_{E_k}(x) \ ;\ 1/p_k = t_k + (1-t_k)/p_o \qquad ;$$

$$1/q_k = 1/p_k - \alpha/n \quad ; \quad t_k = (k+1)/(k+2) \qquad .$$

Pelo que temos provado no lema 3 deste capítulo, Tg é do tipo fraco (1,q) e tipo fraco (p_o, q_o), logo pelo teorema de interpolação de Marcinkiewcz, Tg é do tipo forte (p_k, q_k), assim podemos usar a desigualdade (3.9).

Pela definição de g_k temos: $g = g_{-1} + g_o + \sum_{k=1}^{\infty} g_k$, assim

$$(3.14) \quad \|Tg\|_q \leq \|Tg_{-1}\|_q + \|Tg_o\|_q + \|\sum_1^{\infty} g_k\|_q \qquad ,$$

onde g_{-1} é a restrição de g em $\{x: 0 \leq |g(x)| < 1\}$; e g_o é a restrição de g em $\{x: 1 \leq |g(x)| < 2\}$.

i) $|Tg_{-1}(x)| = \sup_{Q \subset R^n} |Q|^{-(1-\alpha/n)} \int_{Q\cap B} |g(y)| [v(y)]^{\alpha q/n} dy$

$$\leq \sup_{Q \subset R^n} |Q|^{-(1-\alpha/n)} \int_{Q\cap B} [v(y)]^{\alpha q/n} \, dy$$

$$= \sup_{Q \subset R^n} |Q|^{-1/q} \int_{Q\cap B} [v(y)]^{q-1} \, dy$$

$$\leq \sup_{Q \subset R^n} |Q|^{-1/q} \sup.es.\{[v(y)]^{-1} : y \in Q\} \int_{Q\cap B} [v(y)]^{q} \, dy$$

$$\leq \sup_{Q\subset R^n} |Q|^{-1/q} K \left[|Q|^{-1} \int_Q [v(y)]^q \, dy\right]^{-1/q} \left[\int_{Q\cap B} [v(y)]^q \, dy\right]$$

$$\leq K \left[\int_B [v(y)]^q \, dy\right]^{1-1/q} \quad ;$$

logo:

$$(3.15) \qquad \left[\int_B |Tg_{-1}(x) \; v(x)|^q \, dx\right]^{1/q} \leq K \; \omega(B) \quad .$$

ii) Fazendo de modo análogo com Tg_0, obtemos:

$$(3.16) \qquad \left[\int_B |Tg_0 \,(x) \; v(x)|^q \, dx\right]^{1/q} \leq 2K \; \omega(B) \quad .$$

iii) Usando a desigualdade de Minkowski, a desigualdade de Hölder e (3.9) temos:

$$(3.17) \qquad \|\sum_1^\infty Tg_k\|_q \leq \sum_1^\infty \|Tg_k\|_q =$$

$$= \sum_1^\infty \left[\int_B |Tg_k(x) \; v(x)|^q \, dx\right]^{1/q}$$

$$\leq \sum_1^\infty \left[\int_B |Tg_k(x)|^{q_k} \; [v(x)]^q \, dx\right]^{1/q_k} \left[\int_B [v(x)]^q \, dx\right]^{1-1/p_k}$$

$$\leq \sum_1^\infty [\omega(B)]^{1-1/p_k} \, C_{t_k} \left[\int_B |g_k(x)|^{p_k} [v(x)]^q \, dx\right]^{1/p_k}$$

$$= D\ \omega(B) \sum_{1}^{\infty} \omega(B)^{-1/p_k}(k+2) \left[\int_{E_k} |g(x)|^{p_k} [v(x)]^q\, dx \right]^{1/p_k}$$

$$\leq D\ \omega(B) \sum_{1}^{\infty} \omega(B)^{-1/p_k}(k+2)\ 2^{k+1} \left[\frac{\omega(E_k)}{\omega(B)} \right]^{1/p_k} .$$

Seja $K = \{k \in N: \left[\frac{\omega(E_k)}{\omega(B)}\right]^{1/p_k} \leq 3^{-(k+1)}$,

e K' o complementar de K em N; é natural que $\omega(E_k)/\omega(B) \leq 1$ uma vez que $E_k \subseteq B$ logo existe uma constante M tal que: $\left[\frac{\omega(B)}{\omega(E_k)}\right]^{(p_k-1)^k} \leq M$. Temos também que $k + 2 \leq 3k$ para $k = 1,2,\ldots.$ Usando estes fatos em (3.17) temos:

$$\left\| \sum_{1}^{\infty} Tg_k \right\|_q \leq D\omega(B) + \sum_{k\in K} (k+2)(2/3)^{k+1} + DM \sum_{k\in K'} (k+2)2^{(k+1)}\ \omega(E_k)$$

$$\leq D'\ \omega(B) + 6DM \sum k\ 2^k\ \omega(E_k)$$

$$\leq M' \left[\omega(B) + \sum 2^k \log^+ 2^k\ \omega(E_k) \right]$$

$$\leq M' \left[\omega(B) + \sum |g(x)| \log^+ |g(x)|\, \omega(E_k) \right]$$

$$= M' \left[\omega(B) + \int_B |g(x)| \log^+ |g(x)|\, [v(x)]^q\, dx \right]$$

Logo, usando (3.15), (3.16) e esta última desigualdade em (3.14) obtemos:

$$\|T_g\|_q \leq C\left[\omega(B) + \int_B \log^+|g(x)|\,[v(x)]^q\,dx\right] \quad .$$

Sabendo que $Tg(x) = (M_\alpha(g\,v^{\alpha q/n}))(x)$ e $g(x)=f(x)\,[v(x)]^{-\alpha q/n}$ obtemos [3.12].

CAPÍTULO IV

É exatamente neste capítulo que veremos o objetivo principal deste trabalho.

DEFINIÇÃO 1: Seja f uma função pertencente ao $L^p(R^n, dx)$, $0 < \alpha < n$; definimos o *operador integração fracionária* de ordem α de f por:

$$T_\alpha f(x) = C(\alpha) \int_{R^n} f(y) \, |x-y|^{\alpha-n} \, dx \qquad .$$

O operador integração fracionária está definido apenas para $0 < \alpha < n$ e $1 < p < n/\alpha$; provemos isso:

$$\begin{aligned} T_\alpha f(x) &= C(\alpha) \int_{R^n} f(y) \, |x-y|^{\alpha-n} \, dy \\ &= C(\alpha) \int_{R^n} f(x-y) \, |y|^{\alpha-n} \, dy \\ &= C(\alpha) \left[\int_{|y|<1} f(x-y) \, |y|^{\alpha-n} \, dy + \int_{|y|\geq 1} f(x-y) |y|^{\alpha-n} \, dy \right] \\ &= C(\alpha) \, [I_1(x) + I_2(x)] \qquad . \end{aligned}$$

Para $0 < \alpha < n$ temos $I_1(x) < \infty$. Em I_2 aplicamos a desigualdade Hölder; para isto sejam p e q tais que $1 = 1/p + 1/q$;

$$I_2(x) \leq \left[\int_{|y|\geq 1} |f(x-y)|^p dy \right]^{1/p} \left[\int_{|y|\geq 1} |y|^{(\alpha-n)q} dy \right]^{1/q}$$

$$\leq \left[\int_{R^n} |f(x-y)|^p dy \right]^{1/p} \left[\int_{|y|\geq 1} |y|^{(\alpha-n)q} dy \right]^{1/q}$$

$$\leq C \left[\int_{|y|\geq 1} |y|^{(\alpha-n)q} dy \right]^{1/q} ,$$

logo para que $I_2(x) < \infty$ devemos ter $(n-\alpha)q > n$ ou seja $q > n/(n-\alpha)$, como $1/q = 1 - 1/p$, p deve ser tal que $1 < p < n/\alpha$. Assim para que $T_\alpha f$ seja finita é necessário que $0 < \alpha < n$ e $1 < p < n/\alpha$.

É fácil ver que T_α é uma transformação sub-aditiva.

TEOREMA 1: (ver [6]). Assumimos que $0 < \alpha < n$, $1 < p < n/\alpha$, $1/q = 1/p - \alpha/n$ e $v \in A_{p,q}$. Então existe uma constante c, independente de f tal que:

$$\left[\int_{R^n} |T_\alpha f(x) \; v(x)|^q dx \right]^{1/q} \leq C \left[\int_{R^n} |f(x) v(x)|^p dx \right]^{1/p} . \tag{4.1}$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\delta > 0$;

$$T_\alpha f(x) = \int_{|x-y|<\delta} f(y) \; |x-y|^{\alpha-n} dy + \int_{|x-y|\geq\delta} f(y) |x-y|^{\alpha-n} dy$$

$$= I_1(x) + I_2(x)$$

Sejam $R_i = \{y : 2^{-i-1}\delta \leq |x-y| < 2^{-i}\delta\}$; e $B_i = \{y : |x-y| \leq 2^{-i}\delta\}$ com $i \in Z$.

$$(4.2) \qquad |I_1(x)| = \left[\int_{\cup R_i} f(y)\, |x-y|^{\alpha-n}\, dy\right]$$

$$\leq \sum_i \int_{R_i} |f(y)|\,|x-y|^{\alpha-n}\, dy$$

$$\leq \sum_i (2^{-i-1}\delta)^{\alpha-n} \int_{R_i} |f(y)|\, dy$$

$$\leq \sum_i \frac{2^{n-\alpha}(2^{-i}\delta)^{\alpha-n}2^{-i\varepsilon}\delta^{\varepsilon}}{2^{-i\varepsilon}\,\delta^{\varepsilon}} \int_{B_i} |f(y)|\, dy$$

$$\leq \sum_i 2^{n-\alpha}2^{-i\varepsilon}\delta^{\varepsilon} \sup_{B\subset R^n} |B|^{-(1-(\alpha-\varepsilon)/n)} \int_{B_i} |f(y)|\, dy$$

$$\leq \sum_i 2^{n-\alpha}\delta^{\varepsilon}(M_{\alpha-\varepsilon}f)(x)(1/2)^{i\varepsilon}$$

$$\leq \delta^{\varepsilon} A_{\varepsilon}\, (M_{\alpha-\varepsilon}f)(x) \quad .$$

Procedendo de modo análogo com $I_2(x)$ obtemos:

$$(4.3) \qquad |I_2(x)| \leq \delta^{-\varepsilon} A_{\varepsilon}\, (M_{\alpha+\varepsilon}f)(x) \quad .$$

Agora, escolhemos δ tal que $\delta^{\varepsilon} = [(M_{\alpha+\varepsilon}f)(x)/(M_{\alpha-\varepsilon}f)(x)]^{1/2}$; assim por (4.2) e (4.3):

$$(4.4) \qquad |T_{\alpha}f(x)| \leq A\left[(M_{\alpha+\varepsilon}f)(x)(M_{\alpha-\varepsilon}f)(x)\right]^{1/2} .$$

Sejam $1/q_{\varepsilon} = 1/p - (\alpha+\varepsilon)/n$ e $1/\overline{q_{\varepsilon}} = 1/p - (\alpha+\varepsilon)/n$.

Mostremos que $v \in A_{p,q}$ implica que $v \in A_{p,\overline{q_{\varepsilon}}}$. Usando a desigualdade de Hölder temos

$$\left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{\overline{q\varepsilon}}\,dx\right]^{1/\overline{q_{\varepsilon}}}\left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{-p'}\,dx\right]^{1/p'} \leq$$

$$\left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{q}\,dx\right]^{1/q}\left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{-p'}\,dx\right]^{1/p'} \leq K .$$

Mostremos, também, que $v \in A_{p,q}$ implica $v \in A_{p,q_{\varepsilon}}$: como $v \in A_{p,q}$ v^{q} satisfaz A_q, assim pelo lema 6 (cap. I) existe $\delta > 0$ tal que:

$$\left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{q(1+\delta)}\,dx\right]^{1/(1+\delta)} \leq C|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{q}\,dx ,$$

definimos $q_{\varepsilon} = q + q\delta$, assim $1/q_{\varepsilon} = 1/q - \varepsilon/n$ e,

$$\left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{q_{\varepsilon}}\,dx\right]^{1/q_{\varepsilon}}\left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{-p'}\,dx\right]^{1/p'} \leq$$

$$C\left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^q\, dx\right]^{1/q} \quad |Q|^{-1}\left[\int_Q [v(x)]^{-p'}\, dx\right]^{1/p'} \leq$$

$$C\ K \quad .$$

Deste modo podemos aplicar o teorema 1 (capítulo III) aos operadores $M_{\alpha+\varepsilon}$ e $M_{\alpha-\varepsilon}$. Sejam $p_1 = 2\, q_\varepsilon/q$ e $p_2 = 2\, \overline{q_\varepsilon}/q$, então a desigualdade de Hölder e o teorema citado nos dão:

$$\int_{R^n} |T_\alpha f(x)\ v(x)|^q\, dx \leq C_1 \int_{R^n} \left[(M_{\alpha+\varepsilon} f)(x)(M_{\alpha-\varepsilon} f)(X) v(x)\right]^q dx \leq$$

$$C_1\left[\int_{R^n} [(M_{\alpha+\varepsilon} f)(x) v(x)]^{qp_1/2}\, dx\right]^{1/p_1}\left[\int_{R^n} [(M_{\alpha-\varepsilon} f)(x) v(x)]^{qp_2/2}\, dx\right]^{1/p_2}$$

$$\leq C_1\left[\int_{R^n} [(M_{\alpha+\varepsilon} f)(x) v(x)]^{q_\varepsilon}\, dx\right]^{1/p_1}\left[\int_{R^n} [(M_{\alpha-\varepsilon} f)(x) v(x)]^{\overline{q_\varepsilon}}\, dx\right]^{1/p_2}$$

$$\leq C_1 C_2\left[\int_{R^n} |f(x) v(x)|^p dx\right]^{q_\varepsilon/pp_1}\left[\int_{R^n} |f(x) v(x)|^p dx\right]^{\overline{q_\varepsilon}/pp_2}$$

$$= C\left[\int_{R^n} |f(x) v(x)|^p dx\right]^{q/p}$$

TEOREMA 2: (ver [6]). Seja $p = 1$, $0 < \alpha < n$, $1/q = 1 - \alpha/n$ e $v \in A_{1,q}$. Então existe uma constante C independente de f tal que:

$$(4.4)\left[\int_B |T_\alpha f(x)\, v(x)|^q dx\right]^{1/q} \leq C\left[\omega(B)+\int_B [f(x)]\log^+ |f(x)\,[v(x)]^{1-q}|v(x)dx\right],$$

onde

$$\omega(B) = \int_B [v(x)]^q\, dx\ .$$

DEMONSTRAÇÃO: Sem perda de generalização provaremos (4.4) para uma função limitada; pois se f é ilimitada nós definimos: $f_N(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| \leq N \\ 0 & \text{se } |f(x)| > N; \end{cases}$ temos que: $T_\alpha f(x) = \lim_{N\to\infty} T_\alpha f_N(x) =$

$$C\left[\omega(B) + \int_B |f(x)|\ \log^+ |f(x)\ [v(x)]^{1-q}|v(x)\ dx|\right]$$

$$= \lim_{N\to\infty} C\left[\omega(B) + \int_B |f_N(x)|\log^+|f_N(x)\,[v(x)]^{1-q}|v(x)\ dx\right]\ .$$

Consideremos f tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in R^n$. De modo análogo ao teorema anterior:

$$(4.5)\ \int_B |T_\alpha f(x)\ v(x)|^q dx \leq C_1\int_B [(M_{\alpha-\varepsilon}f)(x)(M_{\alpha+\varepsilon}f)(x)v(x)]^q\ dx\quad ,$$

onde ε é convenientemente escolhido. Definimos $1/q_\varepsilon = 1-(\alpha+\varepsilon)/n$ e $1/\overline{q_\varepsilon} = 1-(\alpha-\varepsilon)/n$.

i) Se $v \in A_{1,q}$ então $v \in A_{p_o,q_o}$, onde $1/p_o = 1 - \varepsilon/n$ e $q_o = q_\varepsilon$.

Se $v \in A_{1,q}$ então v^q satisfaz A_1 (pela própria definição de

$A_{1,q}$) logo pelo lema 6 (cap. I) existe $\delta > 0$ tal que:

$$\left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{q(1+\delta)}dx\right]^{1/(1+\delta)} \leq C\,|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^q\,dx \quad ,$$

definimos $q_o = q(1+\delta) = q + \varepsilon'$ e p_o tal que $1/p_o = 1/q_o + \alpha/n =$ $= 1-\varepsilon/n$; usando estas definições na desigualdade acima e a condição $A_{1,q}$ temos:

$$\left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{q_o}dx\right]^{1/q_o}\left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{-p_o'}dx\right]^{1/p_o'} \leq$$

$$C_2\left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{q}dx\right]^{1/q} \text{sup.es. } \{[v(y)]^{-1} : y \in Q\}$$

$$\leq C_2\,K < \infty \qquad ;$$

portanto $v \in A_{p_o,q_o}$ e também $v \in A_{p_o,q_o+\eta}$, onde $1/(q_o+\eta) =$ $1/p_o - (\alpha+\varepsilon)/\eta$.

ii) É imediato ver que se $v \in A_{1,q}$ então $v \in A_{1,\overline{q_\varepsilon}}$; (basta aplicar a desigualdade de Hölder).

iii) $|f(x)v(x)|^{p_o} \leq M\,v(x)[v(x)]^{-\varepsilon/n} \leq M\,v(x)\,\text{inf.}[v(x)]^{-\varepsilon/n}$

iv) Para qualquer γ, $\log^+|f(x)[v(x)]^{1-\overline{q_\varepsilon}}| \leq C_\gamma\left[|f(x)v(x)^{1-\overline{q_\varepsilon}}|\right]$; sendo assim $|f(x)|\,\log^+|f(x)[v(x)]^{1-\overline{q_\varepsilon}}| \leq M^{1+\gamma}C_\gamma[v(x)]^{(1-\overline{q_\varepsilon})\gamma}$;

escolhemos γ tal que $(1-\overline{q_\varepsilon})\gamma < 0$.

Agora, i) nos permite usar (3.1) em $M_{\alpha+\varepsilon}$; ii) nos permite usar

(3.12) em $M_{\alpha-\varepsilon}$; iii) e iv) nos permitem usar o teorema de convergência de Lesbegue (ver [7]). Definimos $p_1 = 2\, q_\varepsilon/q$ e $p_2 = 2\, \overline{q_\varepsilon}/q$, e de (4.5) obtemos:

$$\left[\int_B |T_\alpha f(x)\ v(x)|^q\, dx\right]^{1/q} \leq$$

$$\left[\int_B [(M_{\alpha+\varepsilon}f)(x)v(x)]^{q_\varepsilon} dx\right]^{1/p_1} \left[\int_B [(M_{\alpha-\varepsilon}f)(x)v(x)]^{\overline{q}_\varepsilon} dx\right]^{1/p_2}$$

$$\leq \left[\int_B [(M_{\alpha+\varepsilon}f)(x)v(x)]^{q_\varepsilon+\eta} dx\right]^{q_\varepsilon/p_1(q_\varepsilon+\eta)} |B|^{\eta/(q_\varepsilon+\eta)}$$

$$\left[\int_B [(M_{\alpha-\varepsilon}f)(x)v(x)]^{\overline{q}_\varepsilon} dx\right]^{1/p_2}$$

$$\leq C_1 C_2 \left[\int_B |f(x)v(x)|^{p_o} dx\right]^{q_\varepsilon/p_1 p_o} |B|^{\eta/q_\varepsilon+\eta}$$

$$\left[w(B) + \int_B |f(x)|\log^+ |f(x)[v(x)]^{1-\overline{q}_\varepsilon}|v(x)\,dx\right] ,$$

tomando o limite quando ε tende à zero:

$$(4.6)\ \left[\int_B |T_\alpha f(x)v(x)|^q dx\right]^{1/q} \leq C_1 C_2 \left[\int_B |f(x)v(x)|\,dx\right]\left[w(B)+\int_B |f(x)|\log^+|f(x)\right.$$

$$\left.[v(x)]^{1-q}|v(x)\,dx\right] \quad ;$$

mas se $E = \{x \in B:\ |f(x)[v(x)]^{1-q}| > e\}$ e $E' = \{x \in B:\ |f(x)[v(x)]^{1-q}| < e\} =$

$$\{x \in B: |f(x)\ v(x)| < e[v(x)]^q \quad ,$$

$$\int_B |f(x)v(x)|dx = \int_{B\cap E} |f(x)v(x)|dx + \int_{B\cap E'} |f(x)\ v(x)|dx$$

$$\leq \int_B |f(x)|\log^+|f(x)[v(x)]^{1-q}\ dx \ + w(B) \qquad ;$$

usando esta desigualdade em (4.6) obtemos (4.4).

TEOREMA 3: (ver [6]). Seja f uma função com suporte numa bola B de raio R. Seja Q o menor cubo contendo B. Consideramos $q = \infty$; $n = p\alpha$, $1 < p < \infty$ e $v \in A_{p,\infty}$. Então para $\varepsilon > 0$, $1 < q < \infty$ e $m = \text{inf.es.}\ \{v(x): x \in Q\}$, existe uma constante - $C = C(\varepsilon, q)$ tal que:

$$(4.7) \quad \int_B \exp.\left[n/w_{n-1}\left|\frac{m|T_\alpha f(x)|}{\|f\ v\|_p} - \varepsilon\right|^{p'}\right][v(x)]^q dx \leq C\ R^n\ m^q \quad ,$$

onde w_{n-1} é a área da superfície da bola unitária em R^{n-1}.

DEMONSTRAÇÃO: Mostremos que se $v \in A_{p,\infty}$ então - $v \in A_{p,q}$ com $p < q < \infty$: da condição $A_{p,\infty}$ temos:

$$\left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^q\ dx\right]^{1/q}\left[|Q|^{-1}\int_Q [v(x)]^{-p'}\right]dx^{1/p'} \leq$$

$$K\ \text{sup.es.}\{v(x): x \in Q\}.\text{inf.es.}\{[v(y)]^{-1} : y \in Q\} = K \quad .$$

Para q dado, definimos σ por $1/q = 1/p - (\alpha - \sigma)/n$. Seja $\delta > 0$ e assumimos que $\|fv\|_p \leq m$. Como na demonstração anterior $T_\alpha f(x) = I_1(x) + I_2(x)$, e $|I_1(x)| \leq A_\sigma \delta^\sigma (M_{\alpha-\sigma} f)(x)$. Para $x \in B$ temos:

$$|I_2(x)| = \int_{|x-y|\geq\delta} f(y)\,|x-y|^{\alpha-n} v(y)\,[v(y)]^{-1}\,dy$$

$$\leq \left[\int_{|x-y|\geq\delta} |f(y)v(y)|^p dy\right]^{1/p} \left[\int_{|x-y|\geq\delta} \left(|x-y|^{\alpha-n}[v(y)]^{-1}\right)^{p/(p-1)} dy\right]^{(p-1)/p}$$

$$\leq \|fv\|_p \ \text{sup.es}\{|v(y)|^{-1} : y\in Q\} \left[\int_{|x-y|\geq\delta} |x-y|^{(\alpha-n)p/(p-1)} dy\right]^{(p-1)/p} ,$$

usando uma mudança de variável e logo em seguida uma mudança para coordenadas polares obtemos:

$$|I_2(x)| \leq \left[w_{n-1} \log(2R/\delta)\right]^{1/p'} .$$

Seja δ tal que $\delta^\sigma = \min \{\varepsilon[A_\sigma(M_{\alpha-\sigma}f)(x)]^{-1}, R^\sigma\}$ então:

$$|T_\alpha f(x)| \leq A_\sigma \delta^\sigma (M_{\alpha-\sigma} f)(x) \left[w_{n-1} \log (2R/\delta)\right]^{1/p'}$$

$$\leq \varepsilon + \left\{ w_{n-1} \log^+ (2R/\delta) \varepsilon^{-1/\sigma} \left[A_\sigma (M_{\alpha-\sigma} f)(x)\right]^{1/\sigma} \right\}^{1/p'} ,$$

ou seja,

$$\left| |T_\alpha f(x)| - \varepsilon \right|^{p'} \leq w_{n-1}/n \log^+ (2R)^n \varepsilon^{-q} \left[A_\sigma (M_{\alpha-\sigma} f)(x)\right]^q ,$$

$$(4.9) \quad \int_B \exp |n/w_{n-1}| |T_\alpha f(x)| - \varepsilon|^{p'} \left[v(x)\right]^q dx \leq (2R)^n \varepsilon^{-q} A_\sigma^q \int_B |(M_{\alpha-\sigma} f)(x) v(x)|^q dx$$

$$\leq C R^n \|fv\|_p ,$$

(na última desigualdade usamos (3.1)).

Para obtermos (4.7) usamos (4.9) com a função $g(x) = f(x) m \|fv\|_p^{-1}$.

REFERÊNCIAS

M. Stein, Singular Integrals and Differentiability roperties of Functions, Princeton, 1970.

R.R. Coifman e C. Fefferman, Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, Studia Math. 51 (1974), 241-250.

3. B. Muckenhoupt, Weighted norm inequalities for the hardy maximal function, Trans. Amer. Math. Soc. 165 (1972), 207-226.

4. A. Zygmund, Trigonometric series, 2ª edição, Cambridge Univ. Press, 1959.

5. B. Muckenhoupt e R.L. Wheeden, Weighted norm inequalities for fractional integrals, Trans. Amer. Math. Soc. 192 (1974), 261-274.

6. G.V. Welland, Weighted norm inequalities for fractional integrals, Proc. Amer. Math. Soc. 51 (1975), 143-148.

7. H.L. Royden, Real Analysis, 2ª edição, Stanford University.