Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Andrea Genovese de Oliveira

Um Sistema de Equações Parabólicas de Reação-Difusão Modelando Quimiotaxia

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP, para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Boldrini

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pela aluna Andrea Genovese de Oliveira e orientada pelo Prof. Dr. José Luiz Boldrini.

Assinatura do Orientador

Campinas, 2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
MARIA FABIANA BEZERRA MÜLLER - CRB8/6162
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Oliveira, Andrea Genovese de, 1986-
OL4s Um sistema de equações parabólicas de reação-difusão modelando quimiotaxia / Andrea Genovese de Oliveira. - Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: José Luiz Boldrini.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Equações diferenciais parabólicas. 3. Equações de reação-difusão. 4. Quimiotaxia. 5. Galerkin, Métodos de. I. Boldrini, José Luiz. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: A system of parabolic reaction-diffusion equations modeling chemotaxis
Palavras-chave em inglês:
Partial differential equations
Parabolic differential equations
Diffusion-reaction equations
Chemotaxis
Galerkin methods
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
José Luiz Boldrini [Orientador]
Ademir Pastor Ferreira
Bianca Morelli Rodolfo Calsavara
Data da defesa: 13-02-2012
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 13 de fevereiro de 2012 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

____

Prof.(a). Dr(a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI

____

Prof. (a). Dr (a). ADEMIR PASTOR FERREIRA

____

Prof. (a). Dr (a). BIANCA MORELLI RODOLFO CALSAVARA

Agradecimentos

A formação de uma pessoa é feita por uma comunidade inteira. E é com esse espírito que gostaria de agradecer às pessoas que marcaram minha trajetória.

Aos professores que sempre acreditaram e tiveram a paciência, sabedoria e humildade para ensinar. Entre eles está, em especial, o meu mentor e orientador Prof. Dr. José Luiz Boldrini, a quem tanto admiro. Agradeço também ao Prof. Dr. Célius Antônio Magalhães pelos sábios conselhos que inspiram coragem e confiança e ao Prof. Dr. Nigel John Edward Pitt por dispor da clareza tão necessária ao meu aprendizado inicial de Análise.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro durante a duração do mestrado.

Agradeço aos meus heróis e pais — Miguel Angel Genovese Linares e Eunir Soares de Genovese, por terem feito todos os sacrifícios imagináveis para me abençoar com a melhor educação possível. Agradeço por terem a coragem de aproveitar as oportunidades a eles dadas em cada momento da vida, assim trilhando uma história de vida tão formidável. Aos meus irmãos Marcelo Genovese Soares e Miguel E. Genovese Soares pelo apoio e os sábios conselhos.

Finalmente, gostaria de agradecer ao meu marido e companheiro Kleyton Cordeiro de Oliveira, por ter embarcado comigo nesta viagem cheia de sacrifícios, exibindo todo o amor, paciência e bom humor de sempre. Sem ele, nada disso seria possível.

Resumo

Analisamos um sistema não linear parabólico de reação-difusão com duas equações definidas em $]0,T[\times\Omega$, ($0 < T < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado) e condições de fronteira do tipo Neumann. Tal sistema foi proposto para modelar o movimento de uma população de amebas unicelulares e tem como base o processo de locomoção chamado quimiotaxia positiva, na qual as amebas se movimentam em direção à região de alta concentração de uma certa substância química, que, neste caso, é produzida pelas próprias amebas.

Embora adicionando os detalhes técnicos, este trabalho seguiu livremente o método de resolução proposto no artigo de A. Boy, *Analysis for a System of Coupled Reaction-Diffusion Parabolic Equations Arising in Biology*, *Computers Math. Applic.* Vol. 32, No. 4, páginas 15-21, 1996.

Abstract

We will be analyzing a nonlinear parabolic reaction diffusion system with two equations, defined in $]0, T[\times\Omega$, ($0 < T < \infty$ and $\Omega \subset \mathbb{R}^3$) with Neumann boundary conditions. This system was proposed in order to model the movement of a population of single-cell amoebae and is based on the process of movement called chemotaxis, in which the amoebae move in the direction of the region of high concentration of a certain chemical substance, which, in this case, is produced by the amoebae themselves.

While adding the technical details, this dissertation followed freely the solution method proposed in the paper: A. Boy, *Analysis for a System of Coupled Reaction-Diffusion Parabolic Equations Arising in Biology*, *Computers Math. Applic.* Vol. 32, No. 4, pages 15-21, 1996.

Sumário

Introdução

Nesta dissertação iremos investigar um modelo matemático analisado em Boy [3] que descreve o movimento de uma população de amebas unicelulares. Estas passam por um processo de locomoção chamado quimiotaxia positiva, na qual elas se movimentam em direção à região de alta concentração de uma substância química, chamada AMP-cíclico, que é produzida pelas próprias amebas. Este modelo foi proposto por Keller e Segel ([16], páginas 406-407; [17], páginas 258-260) e outros modelos similares foram analisados por Alt [2], Schaaf [18] e Jüger e Luckhaus [10].

O modelo consiste de um sistema não linear parabólico de reação-difusão que possui duas incógnitas: a densidade populacional e a concentração química. Primeiro, formulamos um problema variacional com base no sistema original, com o intuito de buscar uma solução fraca para o sistema original. Para tanto, precisaremos considerar um truncamento que depende de alguma constante $M > 0$ e definir uma versão truncada do problema variacional, que chamaremos de problema auxiliar.

Provaremos então a existência e unicidade global de solução do problema auxiliar usando o método de Faedo-Galerkin. Além disso, mostraremos que esta é de fato uma solução forte e contínua do problema auxiliar. Assim, fixando um M apropriado, a continuidade implicará na existência local de uma única solução forte do problema original. Finalmente, usaremos um argumento de prolongamento para provar que de fato existe uma única solução global forte do problema original se limitarmos um dos dados iniciais em alguma norma a ser especificada.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Espaços funcionais e teoremas de imersão

No desenvolver desta pesquisa precisaremos de algumas definições e de alguns resultados que apresentaremos aqui com suas devidas referências.

Para tanto, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio suave e limitado com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ de classe $C^{3,1}$, $T > 0$, $Q_t = [0,t] \times \Omega$, $t \leq T$, e $z = (t,x) \in Q_T$ com $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$. Como usual, $L^p(\Omega)$ denota o espaço de Banach das classes de funções mensuráveis f, definidas sobre Ω, tais que

$$\int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x < \infty,$$

com norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Além disso, $L^\infty(\Omega)$ denota o espaço de Banach das classes de funções mensuráveis f, definidas sobre Ω, que são essencialmente limitadas, com norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

Se $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Denotaremos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço de Banach de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que, para todo $j = (j_1, j_2, j_3) \in (\mathbb{N} \cup 0)^3$, $|j| = j_1 + j_2 + j_3 \leq m$ temos $D^j u \in L^p(\Omega)$, sendo $D^j u$ a derivada no sentido das distribuições (ver Seção 1.6), munido da norma

$$\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|j| \leq m} \|D^j u\|^p_{L^p(\Omega)}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

e, se $p = \infty$,

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|j| \leq m} \|D^j u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Quando $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|j| \leq m} (D^j u, D^j v) \tag{1.1}$$

e a norma de $W^{m,2}(\Omega)$. Definimos também os espaços de Hilbert $H^s(\mathbb{R}^n)$ e $H^s(\Omega)$, com s real não negativo como sendo

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in S'(\mathbb{R}^n) : (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

$$H^s(\Omega) = \{u = v|_\Omega : v \in H^s(\mathbb{R}^n)\},$$

onde $S'(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das distribuições temperadas e $\widehat{u}$ é a transformada de Fourier de u. Consideramos em $H^s(\mathbb{R}^n)$ e $H^s(\Omega)$ as normas

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|(1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \inf\{\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} : v|_\Omega = u\},$$

respectivamente. É possível provar que esta definição é compatível com a definição dada acima para $m = s$, se s é inteiro. (Ver Medeiros [13], páginas 16-20 e 86-98).

Usaremos a notação $X \hookrightarrow Y$ para significar que a imersão de X em Y é contínua, i.e. que existe um $C > 0$ tal que $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$, $\forall x \in X$. Assim, temos que

Teorema 1.1 *(Medeiros-Miranda [13], página 75) Seja Ω um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 2)$, de classe $\mathcal{C}^m$ e $1 \leq p < \infty$, então*

i) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \frac{np}{n-mp}$, se $mp < n$;

ii) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$, *se* $mp = n$;

iii) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$, $mp > n$.

No caso (iii), k *é um inteiro verificando* $k < m - \frac{n}{p} \leq k+1$ *e* λ *um real satisfazendo* $0 < \lambda \leq m - k - \frac{n}{p} = \lambda_0$, *se* $\lambda_0 < 1$ *e* $0 < \lambda < 1$ *se* $\lambda_0 = 1$.

Afirmamos também que

Teorema 1.2 *Se* $\infty > s > r \geq 0$, *então a imersão de* $H^s(\Omega)$ *em* $H^r(\Omega)$ *é contínua e compacta.*

Prova: A demonstração é imediata da Proposição 2.6 de Medeiros [13] na página 96, e do Teorema 1.4.3.2 de Grisvard [8] na página 26. □

Agora, seja X um espaço de Banach, equipado com uma norma $\|\cdot\|_X$. Definimos o espaço $L^p(0,T;X)$ como sendo o conjunto das funções $u : [0,T] \to X$ que satisfazem

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, \mathrm{d}t \right)^{1/p} < \infty,$$

para $1 \leq p < \infty$, e

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} := \operatorname*{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X < \infty,$$

se $p = \infty$.

Por outro lado, definimos também o espaço $C(0,T;X)$ como sendo o espaço das funções contínuas $u : [0,T] \to X$ tais que

$$\|u\|_{C(0,T;X)} := \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X < \infty.$$

Similarmente, definimos $C([0,T[;X)$ e $C(]0,T[;X)$. Note que assim temos, pela definição do máximo e do supremo essencial, que

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} \leq \|u\|_{C(0,T;X)}$$

e logo $C(0,T;X) \hookrightarrow L^\infty(0,T;X)$.

1.2 Desigualdades

Deixaremos aqui especificadas algumas desigualdades que usaremos. (Ver Evans [6], páginas 705-709.)

Proposição 1.3 (Desigualdade de Cauchy)

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

Prova: De fato, $0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$. $\square$

Corolário 1.4 *Se $a, b, c \in \mathbb{R}$, então $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ e $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$.*

Prova: De fato, a desigualdade de Cauchy implica que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + (a^2+b^2) + b^2 = 2(a^2+b^2)$. Analogamente, $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \leq a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2)+(a^2+c^2)+(b^2+c^2) = 3(a^2+b^2+c^2)$. $\square$

Proposição 1.5 (Desigualdade de Young) *Seja $1 < p, q < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (a, b > 0).$$

Prova: Como $x \mapsto e^x$ é convexa, pois $(e^x)'' = e^x > 0 \ \forall x$, então

$$ab = e^{\log a + \log b} = e^{\frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q} \leq \frac{1}{p}e^{\log a^p} + \frac{1}{q}e^{\log b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

$\square$

Proposição 1.6 (Desigualdade de Young com ϵ) *Sejam $a, b, \epsilon > 0$. Então,*

$$ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon) b^q \ \text{com} \ C(\epsilon) = (\epsilon p)^{-q/p} q^{-1}.$$

Prova: Para tanto, escreva $ab = ((\epsilon p)^{1/p} a)\left(\frac{b}{(\epsilon p)^{1/p}}\right)$ e aplique a proposição anterior para os termos em parêntesis. $\square$

Vale lembrar que a proposição anterior com $p = q = 2$ nos fornece

Proposição 1.7 (Desigualdade de Cauchy com ϵ)

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon} \qquad (a, b > 0, \epsilon > 0)$$

Também temos:

Proposição 1.8 (Desigualdade de Hölder) *Seja* $1 \leq p, q \leq \infty$ *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então, se* $u \in L^p(U)$, $v \in L^q(U)$, *temos que*

$$\int_U |uv| \,\mathrm{d}x \leq \|u\|_{L^p(U)} \|v\|_{L^q(U)}.$$

Prova: Como $u \in L^p(U)$, $v \in L^q(U)$, podemos definir $w = u/\|u\|_{L^p(U)}$, $z = v/\|v\|_{L^q(U)}$ e temos que $\|w\|^p_{L^p(U)} = \|z\|^q_{L^q(U)} = 1$. Então, pela desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|u\|_{L^p(U)}\|v\|_{L^q(U)}} \int_U |uv| = \int_U |wz| \,\mathrm{d}x &\leq \frac{1}{p}\int_U |w|^p \,\mathrm{d}x + \frac{1}{q}\int_U |z|^q \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{p}\|w\|^p_{L^p(U)} + \frac{1}{q}\|z\|^q_{L^q(U)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.\end{aligned}$$

Logo, multiplicando por $\|u\|_{L^p(U)}\|v\|_{L^q(U)}$, temos que $\int_U |uv| \leq \|u\|_{L^p(U)}\|v\|_{L^q(U)}$. □

E, generalizando a proposição anterior:

Proposição 1.9 (Desigualdade de Hölder Geral) *Seja* $1 \leq p_1, \ldots, p_m \leq \infty$ *com* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_m} = 1$ *e suponha que* $u_k \in L^{p_k}(U)$ *para* $k = 1, \ldots, m$. *Então*

$$\int_U |u_1 \ldots u_m| \,\mathrm{d}x \leq \prod_{k=1}^{m} \|u_k\|_{L^{p_k}(U)}$$

Prova: Este é demonstrado usando indução e a desigualdade de Hölder da proposição anterior. □

Agora, a desigualdade de Hölder e a desigualdade triangular implicam na:

Proposição 1.10 ***(Desigualdade de Minkowski)*** *Se* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $u, v \in L^p(U)$, *então*

$$\|u + v\|_{L^p(U)} = \|u\|_{L^p(U)} + \|v\|_{L^p(U)}.$$

Prova: De fato, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\|u+v\|^p_{L^p(U)} &= \int_U |u+v|^p \,\mathrm{d}x \leq \int_U |u+v|^{p-1}\big(|u| + |v|\big) \,\mathrm{d}x \\ &\leq \left(\int_U |u+v|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\left(\int_U |u|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_U |v|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\ &= \|u+v\|^{p-1}_{L^p(U)}\big(\|u\|_{L^p(U)} + \|v\|_{L^p(U)}\big), \end{aligned} \tag{1.2}$$

e portanto, multiplicando a desigualdade acima por $\|u+v\|_{L^p(U)}^{1-p}$, concluimos que

$$\|u+v\|_{L^p(U)} \leq \|u\|_{L^p(U)} + \|v\|_{L^p(U)}.$$

□

Daí, podemos afirmar que:

Proposição 1.11 ***(Desigualdade de Minkowski em** $H^m(\Omega)$**)*** *Se* $m \geq 1$ *inteiro, então existe* $C > 0$ *tal que*

$$\|u+v\|_{H^m(\Omega)} \leq C(\|u\|_{H^m(\Omega)} + \|v\|_{H^m(\Omega)}).$$

Prova: De fato, pela definição da norma em $H^m(\Omega)$, o Corolário 1.4, e a desigualdade de Minkowski, temos

$$\begin{aligned}\|u+v\|_{H^m(\Omega)}^2 &= \sum_{|j|\leq m} \|D^j u + D^j v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{|j|\leq m} \big(\|D^j u\|_{L^2(\Omega)} + \|D^j v\|_{L^2(\Omega)}\big)^2 \\ &\leq \sum_{|j|\leq m} 2\big(\|D^j u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|D^j v\|_{L^2(\Omega)}^2\big) = 2\big(\|u\|_{H^m(\Omega)}^2 + \|v\|_{H^m(\Omega)}^2\big).\end{aligned}$$

Note também que $a^2+b^2 \leq a^2+b^2+2ab = (a+b)^2 \Longrightarrow (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} \leq a+b$ se $a, b \geq 0$. Portanto, tomando a raiz quadrada na desigualdade acima, temos que

$$\|u+v\|_{H^m(\Omega)} \leq \sqrt{2}\big(\|u\|_{H^m(\Omega)}^2 + \|v\|_{H^m(\Omega)}^2\big)^{1/2} \leq \sqrt{2}\big(\|u\|_{H^m(\Omega)} + \|v\|_{H^m(\Omega)}\big).$$

□

A desigualdade de Young com ϵ da Proposição 1.6 e a desigualdade de Hölder geral da Proposição 1.9 serão usadas inúmeras vezes durante o texto tanto para $U = \Omega$ quanto para $U = Q_T$ e portanto, por simplicidade, serão chamadas de desigualdade de Young e desigualdade de Hölder, respectivamente. O mesmo vale para as desigualdades de Minkowski em $L^p(\Omega)$ e $H^m(\Omega)$ das Proposições 1.10 e 1.11, respectivamente.

Outra desigualdade que será usada varias vezes é a:

Proposição 1.12 ***(Desigualdade de Gronwall)***
Sejam z, w, p funções integráveis não negativas definidas em $[0,T]$, $C \geq 0$ e $t \leq T$ tais que

$$z(t) + \int_0^t w(s)\,\mathrm{d}s \leq C + \int_0^t p(s)z(s)\,\mathrm{d}s.$$

Então

$$z(t) \leq Ce^{\int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s} \qquad e \qquad \int_0^t w(s)\,\mathrm{d}s \leq Ce^{\int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s}$$

Prova: De fato, defina

$$y(t) = C + \int_0^t p(s)z(s)\,\mathrm{d}s.$$

Como $w \geq 0$, temos por hipótese que $z(t) \leq z(t) + \int_0^t w(s)\,\mathrm{d}s \leq y(t)$, o que implica que $y'(t) = p(t)z(t) \leq p(t)y(t)$, pois $p \geq 0$. Então, $y'(t) - p(t)y(t) \leq 0$ e, portanto, multiplicando por $e^{-\int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s} \geq 0$, temos que

$$\frac{d}{dt}\Big[y(t)e^{-\int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s}\Big] = \Big[y'(t) - p(t)y(t)\Big]e^{-\int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s} \leq 0.$$

Integrando em $[0,t]$ e multiplicando por $e^{\int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s}$ podemos observar que

$$y(t) \leq y(0)e^{\int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s} = Ce^{\int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s}.$$

Assim, como $w \geq 0$ e $z \geq 0$, pela hipótese e a desigualdade anterior, concluímos que

$$z(t) \leq z(t) + \int_0^t w(s)\,\mathrm{d}s \leq C + \int_0^t p(s)z(s)\,\mathrm{d}s = y(t) \leq Ce^{\int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s}, \text{ e}$$

$$\int_0^t w(s)\,\mathrm{d}s \leq z(t) + \int_0^t w(s)\,\mathrm{d}s \leq C + \int_0^t p(s)z(s)\,\mathrm{d}s = y(t) \leq Ce^{\int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s}. \qquad \square$$

Com estas desigualdades e as definições da Seção 1.1, podemos provar que

Proposição 1.13 *As seguintes aplicações são lineares e contínuas*

a) $\nabla : H^m(\Omega) \longrightarrow H^{m-1}(\Omega)^3$, *$m = 1, 2, 3$, e $m = 2 - \alpha$, com $0 < \alpha < 1$;*

b) $\Delta : H^m(\Omega) \longrightarrow H^{m-2}(\Omega)$, *$m = 2, 3$;*

c) $\nabla\Delta : H^3(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)^3$.

Prova: A demonstração é feita analisando cada caso separadamente e utilizando a definição de cada norma. A fim de tornar a leitura mais fluida e natural, omitimos a demonstração neste ponto. Porém, o leitor pode encontrar esta demonstração em detalhes no Apêndice A, onde foi colocada para referência. $\square$

Além disso, a proposição anterior implica que

Proposição 1.14 *Se $1 \leq r \leq \infty$, as seguintes aplicações são lineares e contínuas:*

1. $\nabla : L^r(0,T;H^m(\Omega)) \longrightarrow L^r(0,T;H^{m-1}(\Omega)^3)$, *$m = 1,2,3$, e* $m = 2-\alpha$, *com* $0 < \alpha < 1$;
2. $\Delta : L^r(0,T;H^m(\Omega)) \longrightarrow L^r(0,T;H^{m-2}(\Omega))$, $m = 2,3$;
3. $\nabla\Delta : L^r(0,T;H^3(\Omega)) \longrightarrow L^r(0,T;L^2(\Omega)^3)$.

1.3 Resultados de regularidade

Com as definições dos espaços $L^p(0,T;X)$, podemos provar as seguintes propriedades:

Proposição 1.15 *Se $w \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e $\nabla w \in L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$, temos que $w \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ e*

$$\|w\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} = \|w\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla w\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}. \tag{1.3}$$

E analogamente:

Proposição 1.16 *Se $w \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ e $\nabla w \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, temos que $w \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$ e*

$$\|w\|^2_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} = \|w\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla w\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3)}. \tag{1.4}$$

Prova: De fato, pelo Lema A.3, podemos ver que, para quase todo $t \in [0,T]$,

$$\|w(t)\|^2_{H^1(\Omega)} = \|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3}. \tag{1.5}$$

Assim, integrando em $[0,T]$ ou tomando o supremo essencial, temos as Proposições 1.15 e 1.16, respectivamente. $\square$

Seguindo desta forma, a intuição nos leva a crer que existe uma limitação de w, ∇w e Δw que implica $w \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$ ou $w \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$. Mas, para provar tal resultado, precisamos do seguinte teorema, que é uma forma particular daquele encontrado em Mikhailov [15], página 217: *

Teorema 1.17 *Se $f \in H^k(\Omega)$ então as soluções generalizadas u da equação de Poisson $\Delta u = f$ com condições de Neumann homogêneas pertencem a $H^{k+2}(\Omega)$ e satisfazem à desigualdade*

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^k(\Omega)},$$

onde $C \geq 0$ independe de f, se $\int_\Omega u \, \mathrm{d}x = 0$.

Com o teorema acima em mãos, podemos provar a seguinte proposição:

Proposição 1.18 *Seja $w \in L^2(\Omega)$ tal que $\Delta w =: g \in H^k(\Omega)$ e $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ em Γ. Então, $w \in H^{k+2}(\Omega)$ e existe $K > 0$ independente de g tal que*

$$\|w\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq K(\|g\|_{H^k(\Omega)} + \|w\|_{L^2(\Omega)}). \tag{1.6}$$

Prova: Como Ω é limitado, podemos definir $u = |\Omega|w - \int_\Omega w$. Então, temos que

$$\int_\Omega u \, \mathrm{d}x = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = |\Omega| \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_\Gamma = 0, \qquad \Delta u = |\Omega|\Delta w = |\Omega| g \in H^k(\Omega).$$

Logo, podemos aplicar o Teorema 1.17 para u, com $f = |\Omega|g \in H^k(\Omega)$, para obter $C > 0$ independente de f (e portanto de g) tal que

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^k(\Omega)} = C|\Omega|\|g\|_{H^k(\Omega)}.$$

Daí, usando a desigualdade de Minkowski na definição de u, encontramos um $K_0 > 0$ independente de g tal que

$$\begin{aligned}\|w\|_{H^{k+2}(\Omega)} &\leq \frac{K_0}{|\Omega|}\|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} + \frac{K_0}{|\Omega|}\left\| \int_Q w \, \mathrm{d}x \right\|_{H^{k+2}(\Omega)} \\ &\leq K_0 C\|g\|_{H^k(\Omega)} + \frac{K_0}{|\Omega|}\left\| \int_Q w \, \mathrm{d}x \right\|_{H^{k+2}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

*É possível chegar às conclusões das proposições seguintes usando um processo análogo ao usado na demonstração dos Lemas 8.1 e 8.2 nas páginas 171 e 175 de Ladyzhenskaya [11]. Ver também o comentário nas páginas 181-182 do mesmo livro.

No entanto, como $\int_\Omega w\,\mathrm{d}x$ é constante em Ω, pela desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned}\left\|\int_\Omega w\,\mathrm{d}x\right\|_{H^{k+2}(\Omega)} &= \left\|\int_\Omega w\,\mathrm{d}x\right\|_{L^2(\Omega)} = \left|\int_\Omega w\,\mathrm{d}x\right|\|1\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|w\|_{L^2(\Omega)}\|1\|^2_{L^2(\Omega)} = \|w\|_{L^2(\Omega)}|\Omega|. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Então, se $K = \max(K_0C, K_0)$, as desigualdades (1.7) e (1.8) nos permitem concluir que

$$\|w\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq K_0C\|g\|_{H^k(\Omega)} + K_0\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq K(\|g\|_{H^k(\Omega)} + \|w\|_{L^2(\Omega)}).$$

Além disso, como C e K_0 independem de g, então K também independe de g. □

A proposição acima implica que:

Proposição 1.19 *Se $\Delta w \in L^2(0,T;H^k(\Omega))$ e $w \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, com $\frac{\partial w(t)}{\partial n} = 0$ em Γ para quase todo $t \in [0,T]$, então $w \in L^2(0,T;H^{k+2}(\Omega))$ e existe K independente de $\Delta w(t)$ tal que*

$$\|w\|^2_{L^2(0,T;H^{k+2}(\Omega))} \leq 2K^2(\|\Delta w\|^2_{L^2(0,T;H^k(\Omega))} + \|w\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}),$$

e, analogamente:

Proposição 1.20 *Se $\Delta w \in L^\infty(0,T;H^k(\Omega))$ e $w \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, com $\frac{\partial w(t)}{\partial n} = 0$ em Γ para quase todo $t \in [0,T]$, então $w \in L^\infty(0,T;H^{k+2}(\Omega))$ e existe K independente de $\Delta w(t)$ tal que*

$$\|w\|^2_{L^\infty(0,T;H^{k+2}(\Omega))} \leq 2K^2(\|\Delta w\|^2_{L^\infty(0,T;H^k(\Omega))} + \|w\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}).$$

Prova: De fato, como $a \leq K(b+c)$ implica que $a^2 \leq 2K^2(b^2+c^2)$ (ver Proposição 1.4), a Proposição 1.18 implica que para quase todo $0 \leq t \leq T$, vale

$$\|w(t)\|^2_{H^{k+2}(\Omega)} \leq 2K^2(\|\Delta w(t)\|^2_{H^k(\Omega)} + \|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}).$$

Integrando em $[0,T]$, ou tomando o supremo essencial na igualdade acima, obtemos respectivamente as Proposições 1.19 e 1.20. □

Juntando as Proposições 1.15, 1.16, 1.19 e 1.20, no caso específico $k = 1$, temos que

Proposição 1.21 *Seja $r = 2$ ou $r = \infty$. Se $\nabla\Delta w \in L^r(0,T;L^2(\Omega)^3)$, $\Delta w \in L^r(0,T;L^2(\Omega))$ e $w \in L^r(0,T;L^2(\Omega))$, com $\frac{\partial w(t)}{\partial n} = 0$ em Γ para quase todo $t \in [0,T]$, então $w \in L^r(0,T;H^3(\Omega))$ e existe K independente de $\Delta w(t)$ tal que*

$$\|w\|^2_{L^r(0,T;H^3(\Omega))} \leq 2K^2(\|\nabla\Delta w\|^2_{L^r(0,T;L^2(\Omega)^3)} + \|\Delta w\|^2_{L^r(0,T;L^2(\Omega))} + \|w\|^2_{L^r(0,T;L^2(\Omega))}).$$

Finalmente, apresentamos um último resultado de regularidade que precisaremos na Seção 4.2. Este decorre do Teorema 9.26 e da Observação 24 na página 299 de Brezis [4].

Teorema 1.22 *Sejam $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$, m inteiro não negativo, com $f \in H^m(\Omega)$ e $a \in H^1(\Omega)$ tais que*

$$c_0 \int_\Omega \nabla a \nabla \varphi \, \mathrm{d}x + c_1 \int_\Omega a\varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f\varphi \, \mathrm{d}x \qquad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

Então, $a \in H^{m+2}(\Omega)$ e existe $C = C(\Omega) > 0$ tal que

$$\|a\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^m(\Omega)}.$$

1.4 Topologia fraca

Agora, seja E um espaço de Banach com norma $\|\ \ \|$ e E' o espaço dual de E, i.e., o espaço de todos os funcionais lineares contínuos em E. Fixe em E' a norma

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)|,$$

para $f \in E'$ e denote por $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$ o funcional linear $\varphi_f(x) := f(x) =: \langle f, x \rangle$. Definimos a topologia fraca no conjunto E como a topologia mais grossa tal que φ_f é contínua em E para todo $f \in E'$. Logo, dizemos que uma sequência x_n converge fracamente a x se esta converge na topologia fraca e denotamos este fato por $x_n \rightharpoonup x$, símbolo análogo ao da convergência forte ($x_n \to x$). Com estas definições, temos a seguinte proposição da página 58 de Brezis [4]:

Teorema 1.23 *Seja (x_n) uma sequência em E. Então*

1. $x_n \rightharpoonup x \ \Leftrightarrow \ [\,\langle f, x_n\rangle \ \to \ \langle f, x\rangle \ \ \forall f \in E'\,]$.
2. *Se* $x_n \to x$*, então* $x_n \rightharpoonup x$.
3. *Se* $x_n \rightharpoonup x$*, então* $(\|x_n\|)$ *é limitado e* $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.
4. *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em* E *e* $f_n \to f$ *em* E'*, então* $\langle f_n, x_n\rangle \ \to \ \langle f, x\rangle$.

Com o teorema acima, podemos então provar as seguintes proposições:

Proposição 1.24 *Se* $X \hookrightarrow Y$ *e* $x_n \rightharpoonup x$ *em* X*, então* $x_n \rightharpoonup x$ *em* Y.

Prova: De fato, pela Proposição 1.23, $x_n \rightharpoonup x$ em X implica que para todo $f \in X'$ temos $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$. Mas $X \hookrightarrow Y$ implica por dualidade que $Y' \hookrightarrow X'$. Então, em particular, para todo $f \in Y' \subset X'$ temos $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$ e, portanto, $x_n \rightharpoonup x$ em Y. □

Obviamente, existe a versão forte da proposição anterior:

Proposição 1.25 *Se* $X \hookrightarrow Y$ *e* $x_n \to x$ *em* X*, então* $x_n \to x$ *em* Y.

Prova: De fato, se $X \hookrightarrow Y$, então existe $C > 0$ tal que $\|w\|_Y \leq C\|w\|_X$, $\forall w \in X$. Em particular, $\|x_n - x\|_Y \leq C\|x_n - x\|_X$. Mas por hipótese a última desigualdade tende a zero e portanto $x_n \to x$ em Y. □

Agora, buscamos uma caracterização da topologia fraca em $L^p(\Omega)$ e $L^p(Q_T)$. Para tanto, precisaremos do:

Teorema 1.26 ***(Teorema de representação de Riesz-Fréchet)***

(a) (Brezis [4], página 135) Sejam H *um espaço de Hilbert com produto escalar* $(\ ,\ )$ *e* $\varphi \in H'$*. Então existe um único* $f \in H$ *tal que*

$$\langle \varphi, u\rangle = (f, u), \qquad \forall u \in H.$$

Além disso, $\|f\|_H = \|\varphi\|_{H'}$.

(b) *(Brezis [4], páginas 97 e 99; Folland [7], página 190) Sejam* $1 \leq p < \infty$ *e* $1 < q \leq \infty$, *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *e* $\phi \in (L^p(W))'$. *Então, existe uma única* $u \in L^q(W)$ *tal que*

$$\langle \phi, f \rangle = \int_W u(z) f(z)\, \mathrm{d}z, \qquad \forall f \in L^p(W).$$

Além disso, $\|u\|_{L^q(W)} = \|\phi\|_{L^p(W)'}$.

Portanto, podemos usar as identificações $L^p(Q_T)' = L^q(Q_T)$ e $L^p(\Omega)' = L^q(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Além disso, podemos provar que

Proposição 1.27 *Sejam* $1 \leq p < \infty$ *e* $1 < q \leq \infty$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então,* $v_n \rightharpoonup v$ *em* $L^p(\Omega)$ *se e somente se*

$$\int_\Omega w(x) v_n(x)\, \mathrm{d}x \longrightarrow \int_\Omega w(x) v(x)\, \mathrm{d}x, \ \forall w \in L^q(\Omega).$$

Prova: De fato, sabemos que $v_n \rightharpoonup v$ em $L^p(\Omega)$ se e somente se $\langle w, v_n \rangle \to \langle w, v \rangle$ para todo $w \in L^p(\Omega)' = L^q(\Omega)$. No entanto, pelo teorema de Riesz-Frechet 1.26, existe um único $\widetilde{w} \in L^q(\Omega)$ tal que

$$\langle w, v_n \rangle = \int_\Omega \widetilde{w}(x) v_n(x)\, \mathrm{d}x, \qquad\qquad \langle w, v \rangle = \int_\Omega \widetilde{w}(x) v(x)\, \mathrm{d}x,$$

e $\|\widetilde{w}\|_{L^q(\Omega)} = \|w\|_{L^p(\Omega)'} = \|w\|_{L^q(\Omega)}$. Logo, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_\Omega \widetilde{w}(x) v(x)\, \mathrm{d}x - \int_\Omega w(x) v(x)\, \mathrm{d}x \right| = \left| \int_\Omega \big(\widetilde{w}(x) - w(x)\big) v(x)\, \mathrm{d}x \right| \\ &\leq \|\widetilde{w} - w\|_{L^q(\Omega)} \|v\|_{L^p(\Omega)} \leq \Big| \|\widetilde{w}\|_{L^q(\Omega)} - \|w\|_{L^q(\Omega)} \Big| \|v\|_{L^p(\Omega)} = 0 \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \langle w, v_n \rangle &= \int_\Omega \widetilde{w}(x) v_n(x)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega w(x) v_n(x)\, \mathrm{d}x \\ \langle w, v \rangle &= \int_\Omega \widetilde{w}(x) v(x)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega w(x) v(x)\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Então, $\langle w, v_n \rangle \to \langle w, v \rangle$ $\forall w \in L^q(\Omega)$ equivale a dizer que

$$\int_\Omega w(x) v_n(x)\, \mathrm{d}x \to \int_\Omega w(x) v(x)\, \mathrm{d}x$$

para todo $w \in L^q(\Omega)$. $\square$

Analogamente,

Proposição 1.28 *Sejam* $1 \leq p < \infty$ *e* $1 < q \leq \infty$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então,* $v_n \rightharpoonup v$ *em* $L^p(Q_T)$ *se e somente se*

$$\int_{Q_T} w(z)v_n(z)\,\mathrm{d}z \longrightarrow \int_{Q_T} w(z)v(z)\,\mathrm{d}z, \ \ \forall w \in L^q(Q_T).$$

Em particular, temos que:

Proposição 1.29 *Sejam* $1 \leq p < \infty$ *e* $1 < q \leq \infty$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então,* $f(t) \rightharpoonup f(t_1)$ *em* $L^p(\Omega)$ *quando* $t \to t_1$ *se e somente se*

$$\int_{\Omega} w(x)f(t,x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow \int_{\Omega} w(x)f(t_1,x)\,\mathrm{d}x, \ \ \forall w \in L^q(\Omega).$$

Prova: Basta aplicar a proposição 1.27 para $v_n := f(s_n)$ com $s_n \subset [0,T]$ qualquer sequência arbitrária tal que $s_n \to t_1$ e $v := f(t_1)$. $\square$

O estudo da topologia fraca tem a finalidade de nos fornecer uma topologia em que conseguiremos, em espaços reflexivos, extrair de sequências limitadas uma subsequência convergente. Para tanto, precisaremos do teorema de Kakutani, especificado abaixo, com algumas aplicações importantes:

Teorema 1.30 (Kakutani) *Seja* E *um espaço de Banach. Então* E *é reflexivo se, e somente se,* $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ *é compacto na topologia fraca. (Brezis [4], página 67)*

Corolário 1.31 *Se* E *é espaço de Banach reflexivo e* x_n *sequência limitada em* E*, então existe uma subsequência* x_{n_k} *que converge na topologia fraca. (Brezis [4], páginas 69 e 76)*

Observação 1.32 *Note que* $H^m(\Omega)$ $(m \geq 0)$ *é um espaço de Hilbert com o produto* $(\ ,\ )_{H^m(\Omega)}$ *definido na equação* (1.1)*. Portanto, aplicando o item (a) do Teorema de Riesz Frechet 1.26 duas vezes (de* $H^m(\Omega)$ *para* $H^m(\Omega)'$ *e de* $H^m(\Omega)'$ *para* $H^m(\Omega)''$*) é possível provar que* $H^m(\Omega)$ *é reflexivo. Então, pelo corolário anterior, podemos extrair de qualquer sequência limitada em* $H^m(\Omega)$ *uma subsequência convergente na topologia fraca.*

Analogamente, se X *é reflexivo e* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *com* $1 \leq p < \infty$, *temos que* $L^p(0,T;X)' = L^q(0,T;X')$ *(Moura [14], página 109), e se* $p \neq 1$ *isto implica que*

$$L^p(0,T;X)'' = L^q(0,T;X')' = L^p(0,T;X'') = L^p(0,T;X).$$

Logo, temos que se X *é reflexivo e* $1 < p < \infty$, *então* $L^p(0,T;X)$ *é reflexivo também e portanto podemos extrair de qualquer sequência limitada em* $L^p(0,T;X)$ *uma subsequência convergente em* $L^p(0,T;X)$ *na topologia fraca.*

1.5 Topologia fraca estrela

Seja E um espaço de Banach e, para cada $x \in E$, considere o funcional linear $\varphi_x : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $\varphi_x(f) = \langle f, x \rangle$ para $f \in E'$. A topologia fraca* é a topologia mais grossa tal que φ_x é contínua em E' para todo $x \in E$. Usaremos a notação $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ para denotar convergência nesta topologia. Como na topologia fraca, temos o seguinte teorema (Brezis [4], página 63):

Teorema 1.33 *Seja* (f_n) *uma sequência em* E'. *Então*

1. $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f \;\; \Leftrightarrow \;\; [\,\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle \;\; \forall x \in E\,]$.
2. *Se* $f_n \to f$, *então* $f_n \rightharpoonup f$.
   Se $f_n \rightharpoonup f$, *então* $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* E'.
3. *Se* $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$, *então* $(\|f_n\|)$ *é limitado e* $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.
4. *Se* $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* E' *e* $x_n \to x$ *em* E, *então* $\langle f_n, x_n\rangle \;\to\; \langle f, x\rangle$.

Usaremos um caso especial do último item do Teorema 1.33:

Proposição 1.34 *Se* $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* $L^\infty(Q_T)$ *e* $w_n \to w$ *em* $L^1(Q_T)$, *então*

$$\int_{Q_T} f_n(z) w_n(z)\,\mathrm{d}z \to \int_{Q_T} f(z) w(z)\,\mathrm{d}z.$$

Prova: De fato, pelo Teorema de Representação de Riesz - Frechet (1.26), $f, f_n \in L^\infty(Q_T) = (L^1(Q_T))'$ implicam que existem $g, g_n \in L^\infty(Q_T)$ tais que

$$\big\langle f_n, w \big\rangle = \int_{Q_T} g_n(z) w(z)\, \mathrm{d}z \qquad \text{e} \qquad \|g_n\|_{L^\infty(Q_T)} = \|f_n\|_{L^\infty(Q_T)}$$
$$\big\langle f, w \big\rangle = \int_{Q_T} g(z) w(z)\, \mathrm{d}z \qquad \text{e} \qquad \|g\|_{L^\infty(Q_T)} = \|f\|_{L^\infty(Q_T)}$$

para todo $w \in L^1(Q_T)$ e $n \in \mathbb{N}$. Logo, $g_n = f_n$ e $g = f$, quase sempre em Q_T e

$$\big\langle f_n, w \big\rangle = \int_{Q_T} g_n(z) w(z)\, \mathrm{d}z = \int_{Q_T} f_n(z) w(z)\, \mathrm{d}z \qquad \forall w \in L^1(Q_T)$$
$$\big\langle f, w \big\rangle = \int_{Q_T} g(z) w(z)\, \mathrm{d}z = \int_{Q_T} f(z) w(z)\, \mathrm{d}z \qquad \forall w \in L^1(Q_T)$$

e portanto a hipótese e o último item do teorema anterior implicam que

$$\int_{Q_T} f_n(z) w_n(z)\, \mathrm{d}z = \big\langle f_n, w_n \big\rangle \quad \longrightarrow \quad \big\langle f, w \big\rangle = \int_{Q_T} f(z) w(z)\, \mathrm{d}z.$$

$\square$

O estudo da topologia fraca* tem um propósito parecido com o do estudo da topologia fraca. Esta topologia nos permite extrair subsequências convergentes de sequências limitadas em qualquer espaço dual de um espaço de Banach separável. Formalizamos esta afirmação enunciando o teorema de Alaoglu e sua versão sequencial:

Teorema 1.35 (Teorema de Alaoglu) *Seja E um espaço de Banach. Então, a bola fechada unitária $B_{E'} = \{f \in E' : \|f\| \leq 1\}$ é compacta na topologia fraca*. (Brezis [4], página 66)*

Corolário 1.36 (Alaoglu Sequencial) *Se E é um espaço de Banach separável, e (f_n) sequência limitada em E', então existe uma subsequência (f_{n_k}) que converge em E' na topologia fraca*. (Brezis [4], página 76)*

Observação 1.37 *Para passar o limite nas aproximações de Galerkin, precisaremos obter subsequências convergentes na topologia fraca* de sequências limitadas em $L^\infty(Q_T)$ e $L^\infty(0,T;H^k(\Omega))$, $k = 0,1,2,3$. Pelo raciocínio acima, como $L^1(Q_T)' = L^\infty(Q_T)$ e $L^1(0,T;H^k(\Omega)')' = L^\infty(0,T;H^k(\Omega))$, basta provar que $L^1(Q_T)$ e $L^1(0,T;H^k(\Omega)')$ são separáveis para poder utilizar o corolário anterior.*

Para tanto, lembre que:

Teorema 1.38 *Os seguintes espaços são separáveis:*

a) $L^p(\Omega)$ *e* $L^p(Q_T)$, *se* $1 \leq p < \infty$. *(Brezis [4], página 98)*

b) $H^k(\Omega)$, *se* $k \in \mathbb{N}$. *(Adams [1], página 58)*

c) E *Banach, se* E' *é separável. (Brezis [4], página 72)*

Teorema 1.39 $H^k(\Omega)'$ *é separável para todo* $k \in \mathbb{N}$.

Prova: De fato, sabemos que $H^k(\Omega)'$ é um espaço de Banach. Além disso, $H^k(\Omega)'' = H^k(\Omega)$ é separável pelo item (b) do teorema anterior. Portanto, o item (c) do mesmo teorema implica que $H^k(\Omega)'$ também é separável. $\square$

Com isto, podemos provar que:

Proposição 1.40 *Se* B *é um espaço de Banach real e separável, então* $L^1(0,T;B)$ *é separável.*

Prova:

Como no caso das funções $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, podemos provar que $C_0^\infty(\mathbb{R};B)$ é denso em $L^p(\mathbb{R};B)$, se $1 \leq p < \infty$ (ver, por exemplo, Medeiros [13] página 9, Brezis [4] página 116, Hille [9] Capítulo 3, e Carl [5] página 54). Daí, se $f \in L^1(0,T;B)$, defina

$$f_{ext}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{se } t \in [0,T] \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então $f_{ext} \in L^1(\mathbb{R};B)$ e portanto, por densidade, dado $m \in \mathbb{N}$ existe $f_{ext}^m \in C_0^\infty(\mathbb{R};B)$ tal que $\|f_{ext}^m - f_{ext}\|_{L^1(\mathbb{R};B)} \leq \frac{1}{m}$. Em particular, se $f^m = f_{ext}^m\big|_{[0,T]}$, temos que

$$\|f^m - f\|_{L^1(0,T;B)} \leq \|f_{ext}^m - f_{ext}\|_{L^1(\mathbb{R};B)} \leq \frac{1}{m}.$$

Por outro lado, para cada $m, N \in \mathbb{N}$ fixo, defina

$$f_N^m(t) = \sum_{i=1}^{N} f^m(t_{i-1}^N)\chi_{I_i^N}(t), \quad I_i^N = [t_{i-1}^N, t_i^N] = \left[\frac{T}{N}(i-1), \frac{T}{N}i\right], \quad i = 1, 2, \ldots N,$$

com

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in A \\ 0 & \text{se } t \notin A. \end{cases}$$

Como $f^m \in C^\infty(0,T;B) \subset C(0,T;B)$ para todo $m \in \mathbb{N}$, temos que $f_N^m \longrightarrow f^m$ em $L^1(0,T;B)$ quando $N \to \infty$.

Daí, dado $\epsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m_0} < \frac{\epsilon}{4}$ e um $N_0 = N_0(m_0) \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\|f_{N_0}^{m_0} - f^{m_0}\|_{L^1(0,T;B)} \leq \frac{\epsilon}{4}$. Com isto, vemos que

$$\begin{aligned} \|f_{N_0}^{m_0} - f\|_{L^1(0,T;B)} &\leq \|f_{N_0}^{m_0} - f^{m_0}\|_{L^1(0,T;B)} + \|f^{m_0} - f\|_{L^1(0,T;B)} \\ &\leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{1}{m_0} < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Como B é separável, existe $F = \{w_i : i \in \mathbb{N}\}$ um conjunto denso enumerável em B. Daí, afirmamos que

$$D = \left\{ \sum_{i=1}^{N} w_{k_i}^N \chi_{I_i^N}(t) : w_{k_i}^N \in F, k_i, N \in \mathbb{N}, I_i^N = \left[\frac{T}{N}(i-1), \frac{T}{N}i\right] \right\}$$

é um conjunto enumerável e denso em $L^1(0,T;B)$. A enumerabilidade é óbvia. Agora, pela primeira parte, vimos que se $f \in L^1(0,T;B)$ e $\epsilon > 0$, então existe $f_{N_0}^{m_0} = \sum_{i=1}^{N_0} f^{m_0}(t_{i-1}^{N_0})\chi_{I_i^{N_0}}(t)$ tal que $\|f_{N_0}^{m_0} - f\|_{L^1(0,T;B)} < \frac{\epsilon}{2}$. Agora, para cada $i = 1, 2 \ldots N_0$, existe $w_{i-1}^{N_0} \in F$ tal que $\|w_{i-1}^{N_0} - f(t_{i-1}^{N_0})\|_B \leq \frac{\epsilon}{2TN_0}$, por densidade. Seja então $\widetilde{f} = \sum_{i=1}^{N_0} w_{i-1}^{N_0}\chi_{I_i^{N_0}}(t) \in D$. Logo,

$$\begin{aligned} \|\widetilde{f} - f\|_{L^1(0,T;B)} &\leq \|\widetilde{f} - f_{N_0}^{m_0}\|_{L^1(0,T;B)} + \|f_{N_0}^{m_0} - f\|_{L^1(0,T;B)} \\ &\leq \int_0^T \left\| \sum_{i=1}^{N_0} \left(w_{i-1}^{N_0} - f^{m_0}(t_{i-1}^{N_0})\right)\chi_{I_i^{N_0}}(t) \right\|_B \mathrm{d}s + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \int_0^T \sum_{i=1}^{N_0} \left\|w_{i-1}^{N_0} - f^{m_0}(t_{i-1}^{N_0})\right\|_B \mathrm{d}s + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \int_0^T \sum_{i=1}^{N_0} \frac{\epsilon}{2TN_0} \mathrm{d}s + \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Logo, D é denso e enumerável em $L^1(0,T;B)$ e portanto $L^1(0,T;B)$ é separável. □

Daí, pela Observação 1.37, o Teorema 1.38, e o teorema anterior, temos que

Corolário 1.41 *Se (f_n) é uma sequência limitada em $L^\infty(0,T;H^k(\Omega))$ com $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, então existe uma subsequência convergente em $L^\infty(0,T;H^k(\Omega))$ na topologia fraca*.*

Analogamente, se (f_n) é uma sequência limitada em $L^\infty(Q_T)$, então existe uma subsequência convergente em $L^\infty(Q_T)$ na topologia fraca*.

Provaremos duas últimas propriedades da topologia fraca*.

Proposição 1.42 *Se X é reflexivo, então $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $L^\infty(0,T;X)$ implica que $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $L^2(0,T;X)$.*

Prova: Como X é reflexivo, temos que $L^\infty(0,T;X) = L^1(0,T;X')'$ e $L^2(0,T;X) = L^2(0,T;X')'$ pela Observação 1.32. Então, $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $L^\infty(0,T;X)$ implica que $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$ para todo $x \in L^1(0,T;X')$. Mas $L^2(0,T;X') \hookrightarrow L^1(0,T;X')$, pela desigualdade de Hölder (ver Observação 1.50), e então $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$ para todo $x \in L^2(0,T;X')$. Logo, $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $L^2(0,T;X)$. $\square$

Proposição 1.43 *Se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $L^\infty(Q_T)$, então $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $L^2(Q_T)$.*

Prova: De fato, como $L^\infty(Q_T) = L^1(Q_T)'$, $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $L^\infty(Q_T)$ implica que $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$ para todo $x \in L^1(Q_T)$. Em particular, $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$ para todo $x \in L^2(Q_T)$, pois $L^2(Q_T) \hookrightarrow L^1(Q_T)$. Logo, $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $L^2(Q_T)$. $\square$

1.6 Distribuições e resultados de convergência

Defina $C_0^\infty(Q)$ o espaço vetorial das funções numéricas definidas em Q com suporte compacto, que possuem em Q derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Adicione a este espaço a seguinte noção de convergência: (φ_ν) converge a zero se os suportes de todas estas funções φ_ν estão contidos em um compacto fixo K e, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $(D^\alpha \varphi_\nu)$ converge para zero uniformemente. Desta forma, temos que (φ_ν) em $C_0^\infty(Q)$ converge para φ em $C_0^\infty(Q)$ quando $(\varphi_\nu - \varphi)$ converge para zero no sentido dado acima. Então, denominamos o espaço $C_0^\infty(Q)$ com esta noção de convergência o espaço das funções testes em Q, denotado por $\mathcal{D}(Q)$.

Agora, definamos uma distribuição T sobre Q como uma forma linear sobre $\mathcal{D}(Q)$ que é contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}(Q)$. O espaço vetorial das distribuições então é representado por $\mathcal{D}'(Q)$ e consideramos nele a seguinte convergência: (T_ν) converge para zero quando para toda função teste $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$, $\big(\langle T_\nu, \varphi\rangle\big)$ converge para zero em $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.44 *Seja Q aberto do $\mathbb{R}^n$ e $u \in L^1_{loc}(Q)$. Então, a forma linear T_u sobre $\mathcal{D}(Q)$ definida por*

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_Q u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = (u, \varphi)$$

é uma distribuição.

Em particular, temos uma importante propriedade de T_u que usaremos posteriormente:

Lema 1.45 ***(Lema de Du Bois Raymond)*** *Seja $u \in L^1_{loc}(Q)$. Então, $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Q. (Medeiros [13], página 10).*

Com a definição das funções testes, das distribuições e de suas convergências, podemos provar a seguinte proposição:

Proposição 1.46 *Seja $Q \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto limitado. Então,*

1. *$\mathcal{D}(Q) \subset L^2(Q) \subset \mathcal{D}'(Q)$ e $\mathcal{D}''(Q) \subset L^2(Q)$. Além disso, $\mathcal{D}(Q) \subset H^1(Q)$.*
2. *Se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $L^2(Q)$, então $f_n \to f$ em $\mathcal{D}'(Q)$.*
3. *Se $f_n \to f$ em $L^2(Q)$, então $f_n \to f$ em $\mathcal{D}'(Q)$.*
4. *Se $x_n \rightharpoonup x$ em $L^2(Q)$, então $x_n \to x$ em $\mathcal{D}'(Q)$.*

Prova: **(1)** Se $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$, então temos que $\varphi \in C_0^\infty(Q) \subset L^\infty(Q)$, por definição. Logo, como Q é limitado,

$$\int_Q |\varphi|^2 \leq \|\varphi\|^2_{L^\infty(Q)}|Q| < \infty,$$

de onde concluímos que $\varphi \in L^2(Q)$ e portanto $\mathcal{D}(Q) \subset L^2(Q)$. Por dualidade, esta inclusão implica que $L^2(Q) = L^2(Q)' \subset \mathcal{D}'(Q)$ e também $\mathcal{D}''(Q) \subset L^2(Q)' = L^2(Q)$.

Logo, se $\psi \in \mathcal{D}(Q)$, então $\psi \in L^2(Q)$. Agora, por definição, sabemos que $\psi_{x_i} \in C^\infty(Q)$, para todo $i = 1, \dots m$. E, como o suporte de ψ_{x_i} está contido no suporte de ψ, temos que de fato $\psi_{x_i} \in C_0^\infty(Q)$ e portanto $\psi_{x_i} \in \mathcal{D}(Q) \subset L^2(Q)$. Logo, $\nabla\psi \in L^2(Q)^3$ e portanto $\psi \in H^1(Q)$, pela igualdade (1.5). Então, vale o primeiro item da proposição.

(2) Sejam $f_n, f \in L^2(Q)' = L^2(Q) \subset \mathcal{D}'(Q)$ tais que $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $L^2(Q)$. Então,

$$\big\langle f_n, x\big\rangle \quad \longrightarrow \quad \big\langle f, x\big\rangle \qquad\qquad \forall x \in L^2(Q). \tag{1.11}$$

Em particular, $\mathcal{D}(Q) \subset L^2(Q)$ implica que a convergência acima vale para todo $x \in \mathcal{D}(Q)$. Daí, temos que $f_n \to f$ em $\mathcal{D}'(Q)$ pela definição de convergência nos espaço das distribuições.

(3) e (4) Se $f_n \to f$ e $x_n \rightharpoonup x$ em $L^2(Q)$, então o Teorema 1.33 implica que $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ e $x_n \overset{\star}{\rightharpoonup} x$ em $L^2(Q)$. Logo, pelo item anterior, $f_n \to f$ e $x_n \to x$ em $\mathcal{D}'(Q)$. □

Além desta proposição, precisaremos da definição de derivada no espaço das distribuições. Seja T uma distribuição sobre Q e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Então, a derivada de ordem α de T é por definição a forma linear $\mathcal{D}^\alpha T$ definida por:

$$\big\langle \mathcal{D}^\alpha T, \varphi\big\rangle = (-1)^{|\alpha|}\big\langle T, D^\alpha\varphi\big\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(Q)$$

Com a definição acima, podemos provar a seguinte proposição:

Proposição 1.47 *A derivada $\mathcal{D}^\alpha : \mathcal{D}'(Q) \to \mathcal{D}'(Q)$ é contínua em $\mathcal{D}'(Q)$.*

Prova: Para tanto, tome $w_n \to w$ em $\mathcal{D}'(Q)$, então, por definição, temos que

$$\big\langle w_n, \psi\big\rangle \quad \longrightarrow \quad \big\langle w, \psi\big\rangle, \quad \forall\psi \in \mathcal{D}(Q). \tag{1.12}$$

Em particular, dado $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$, temos que $\varphi \in C_0^\infty(Q)$ e portanto $D^\alpha\varphi \in C_0^\infty(Q)$ e $D^\alpha\varphi \in \mathcal{D}(Q)$. Logo, tomando $\psi = D^\alpha\varphi$, temos que a convergência em (1.12) e a definição da derivada implicam que

$$\begin{aligned}
\big\langle w_n, D^\alpha\varphi\big\rangle \quad &\longrightarrow \quad \big\langle w, D^\alpha\varphi\big\rangle & \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(Q)\\
(-1)^{|\alpha|}\big\langle w_n, D^\alpha\varphi\big\rangle \quad &\longrightarrow \quad (-1)^{|\alpha|}\big\langle w, D^\alpha\varphi\big\rangle & \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(Q)\\
\big\langle \mathcal{D}^\alpha w_n, \varphi\big\rangle \quad &\longrightarrow \quad \big\langle \mathcal{D}^\alpha w, \varphi\big\rangle & \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(Q)
\end{aligned}$$

e portanto $\mathcal{D}^\alpha w_n \to \mathcal{D}^\alpha w$ em $\mathcal{D}'(Q)$. □

Observação 1.48 *Com estas duas últimas proposições, vamos poder utilizar a cadeia de implicações*

$$[u_n \to u \text{ em } L^2(Q_T)] \implies [u_n \to u \text{ em } \mathcal{D}'(Q_T)] \implies [u_{n,t} \to u_t \text{ em } \mathcal{D}'(Q_T)]$$

Finalmente apresentaremos um último resultado de convergência, encontrado na página 85 de Simon [19].

Teorema 1.49 (Lema de Aubin - Lions) *Sejam X, B e Y espaços de Banach tais que $X \subset B \subset Y$ com imersão compacta $X \hookrightarrow B$.*

1. *Seja $\mathbb{F}$ uma família de funções limitadas em $L^p(0,T;X)$, onde $1 \leq p < \infty$ com $\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial t} = \{f_t : f \in \mathbb{F}\}$ limitada em $L^1(0,T;Y)$. Então $\mathbb{F}$ é relativamente compacta em $L^p(0,T;B)$.*

2. *Seja $\mathbb{F}$ uma família de funções limitadas em $L^\infty(0,T;X)$, com $\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial t}$ limitada em $L^r(0,T;Y)$, onde $r > 1$. Então $\mathbb{F}$ é relativamente compacta em $C(0,T;B)$.*

Observação 1.50 *Note que se $T < \infty$, então $L^2(0,T;H^m(\Omega)) \hookrightarrow L^1(0,T;H^m(\Omega))$ para todo $m \geq 0$. De fato, se $u \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$ a desigualdade de Hölder implica que*

$$\int_0^T \|u\|_{H^m(\Omega)} \,\mathrm{d}s \leq \left(\int_0^T 1^2 \,\mathrm{d}s\right)^{1/2} \left(\int_0^T \|u\|^2_{H^m(\Omega)} \,\mathrm{d}s\right)^{1/2} = T^{1/2}\|u\|_{L^2(0,T;H^m(\Omega))}.$$

Logo usaremos também uma variação do primeiro item do teorema anterior: Se $\mathbb{F}$ é limitada em $L^2(0,T;X)$, com $\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial t}$ limitada em $L^2(0,T;Y)$, então $\mathbb{F}$ é relativamente compacta em $L^2(0,T;B)$.

1.7 Resultados de continuidade

Como buscaremos uma solução forte do nosso problema, no sentido de satisfazer as condições de regularidade do enunciado do Teorema 4.2, precisaremos provar a continuidade da solução em certos espaços. Para tanto, serão necessários os resultados que enunciamos a seguir.

Teorema 1.51 (Evans [6], página 304) *Tome m um inteiro não negativo. Suponha que $u \in L^2(0,T;H^{m+2}(\Omega))$ e $u_t \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$.*

1. *Então $u \in C(0,T;H^{m+1}(\Omega))$ (após possivelmente sendo redefinida em um conjunto de medida nula).*

2. *Além disso, temos a estimativa*

$$\max_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_{H^{m+1}(\Omega)} \leq C(\|u\|_{L^2(0,T;H^{m+2}(\Omega))} + \|u_t\|_{L^2(0,T;H^m(\Omega))}) \tag{1.13}$$

   onde $C = C(T,\Omega,m)$.

Precisaremos também do seguinte teorema, de Teman [20], página 260:

Teorema 1.52 *Sejam $V \hookrightarrow H = H' \hookrightarrow V'$ espaços de Hilbert com inclusões contínuas e cada espaço denso no seguinte. Se uma função u pertence a $L^2(0,T;V)$ e sua derivada u' pertence a $L^2(0,T;V')$, então u é quase sempre igual a uma função contínua de $[0,T]$ em H e temos a seguinte igualdade, que vale no sentido escalar de distribuição em $(0,T)$:*

$$\frac{d}{dt}|u|^2 = 2\langle u', u\rangle.$$

Definição: Defina então o seguinte espaço de Hilbert:

$$W(0,T) := \{v \in L^2(0,T;H^1(\Omega)), v_t \in L^2(0,T;H^1(\Omega)')\}, \tag{1.14}$$

com a norma

$$\|v\|_W^2 = \int_0^T \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \,\mathrm{d}t + \int_0^T \|v_t\|_{H^1(\Omega)'}^2.$$

Buscaremos posteriormente uma solução no espaço $W(0,T)$ e, portanto, vale notar que o teorema acima garante que $W(0,T) \subset C(0,T;L^2(\Omega))$, pois $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) = L^2(\Omega)' \hookrightarrow H^1(\Omega)'$ (Teoremas 1.1, 1.26).

Depois de um pouco de esforço, provaremos que tal solução é contínua de $[0,T]$ em $H^2(\Omega)$, com a topologia fraca em $H^2(\Omega)$, usando o seguinte lema de Lions-Magenes [12], página 297:

Lema 1.53 *Sejam X e Y dois espaços de Banach, $X \hookrightarrow Y$, X reflexivo. Defina*

$$C_s(0,T;Y) = \{g \in L^\infty(0,T;Y) : g \text{ contínua com a topologia fraca em } Y\}, \quad (1.15)$$

$$C_s(0,T;X) = \{g \in L^\infty(0,T;X) : g \text{ contínua com a topologia fraca em } X\}. \quad (1.16)$$

Então

$$L^\infty(0,T;X) \cap C_s(0,T;Y) = C_s(0,T;X).$$

Tendo definido os espaços $C(0,T;X)$ e $C_s(0,T;X)$, podemos afirmar algumas propriedades que relacionam $C(0,T;X)$ e $C_s(0,T;X)$:

Proposição 1.54 *Se X é um espaço de Banach, então $C(0,T;X) \subset C_s(0,T;X)$.*

Prova: De fato, se $t \to t_1$ e $f \in C(0,T;X)$, então $f(t) \to f(t_1)$ em X, e portanto $f(t) \rightharpoonup f(t_1)$ em X, pelo Teorema 1.23. Logo, $f \in C_s(0,T;X)$. $\square$

Proposição 1.55 *Se $X \hookrightarrow Y$, então $C_s(0,T;X) \subset C_s(0,T;Y)$.*

Prova: De fato, se $t \to t_1$ e $f \in C_s(0,T;X)$, então $f(t) \rightharpoonup f(t_1)$ em X. Daí $X \hookrightarrow Y$ implica que $f(t) \rightharpoonup f(t_1)$ em Y, pela Proposição 1.24, e portanto $f \in C_s(0,T;Y)$. $\square$

Além disso, temos uma versão forte da proposição anterior:

Proposição 1.56 *Se $X \hookrightarrow Y$, então $C(0,T;X) \hookrightarrow C(0,T;Y)$.*

Prova: Como $X \hookrightarrow Y$, temos que existe um $C > 0$ tal que $\|w\|_Y \leq C\|w\|_X$ $\forall w \in X$ e, portanto,

$$\|w\|_{C(0,T;Y)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|w(t)\|_Y \leq C \max_{0 \leq t \leq T} \|w(t)\|_X = C\|w\|_{C(0,T;X)}.$$

Logo, a inclusão é contínua. $\square$

Além das proposições acima, precisaremos de um resultado sobre o produto de funções contínuas:

Proposição 1.57

a) Se $f_0 \in C(0,T;L^\infty(\Omega))$ *e* $g_0 \in C(0,T;L^\infty(\Omega))$, *então* $f_0g_0 \in C(0,T;L^\infty(\Omega))$.

b) Se $f_1 \in C_s(0,T;L^2(\Omega))$ *e* $g_1 \in C(0,T;L^\infty(\Omega))$, *então* $f_1g_1 \in C_s(0,T;L^2(\Omega))$.

c) Se $f_2 \in C_s(0,T;L^6(\Omega))$ *e* $g_2 \in C(0,T;L^6(\Omega))$, *então* $f_2g_2 \in C_s(0,T;L^3(\Omega))$.

Prova: (a) Sejam $t, t_1 \in [0,T]$, com $t \to t_1$. Então somando e subtraindo $f_0(t)g_0(t_1)$ a $f_0(t)g_0(t) - f_0(t_1)g_0(t_1)$, obtemos pela desigualdade de Minkowski que

$$\begin{aligned}
&\big\|f_0(t)g_0(t) - f_0(t_1)g_0(t_1)\big\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\qquad \le \big\|f_0(t)\big(g_0(t) - g_0(t_1)\big)\big\|_{L^\infty(\Omega)} + \big\|\big(f_0(t) - f_0(t_1)\big)g_0(t_1)\big\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\qquad \le \|f_0(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\|g_0(t) - g_0(t_1)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f_0(t) - f_0(t_1)\|_{L^\infty(\Omega)}\|g_0(t_1)\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\qquad \le \|f_0\|_{C(0,T;L^\infty(\Omega))}\|g_0(t) - g_0(t_1)\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\qquad + \|f_0(t) - f_0(t_1)\|_{L^\infty(\Omega)}\|g_0\|_{C(0,T;L^\infty(\Omega))} \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

pois $f_0, g_0 \in C(0,T;L^\infty(\Omega))$. Logo, $f_0g_0 \in C(0,T;L^\infty(\Omega))$.

(b) De fato, pela Proposição 1.29, precisamos provar que para todo $\phi \in L^2(\Omega)' = L^2(\Omega)$ temos

$$\left|\int_\Omega \phi[f_1(t)g_1(t) - f_1(t_1)g_1(t_1)]\,\mathrm{d}x\right| \to 0,$$

quando $t \to t_1$. Mas, somando e subtraindo $f_1(t)g_1(t_1)$, pela desigualdade triangular temos que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \phi[f_1(t)g_1(t) - f_1(t_1)g_1(t_1)]\,\mathrm{d}x\right| \\
&\qquad = \left|\int_\Omega \phi[f_1(t)(g_1(t) - g_1(t_1)) + (f_1(t) - f_1(t_1))g_1(t_1)]\,\mathrm{d}x\right| \\
&\qquad \le \left|\int_\Omega \phi f_1(t)(g_1(t) - g_1(t_1))\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_\Omega \phi(f_1(t) - f_1(t_1))g_1(t_1)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\qquad \le \left|\int_\Omega \phi f_1(t)\,\mathrm{d}x\right|\|g_1(t) - g_1(t_1)\|_{L^\infty(\Omega)} + \left|\int_\Omega \phi g_1(t_1)(f_1(t) - f_1(t_1))\,\mathrm{d}x\right|.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Afirmamos que $\|f_1(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$ para todo $t \in [0,T]$. Para provar tal afirmação, fixe $t_0 \in [0,T]$ arbitrário. Como $f_1 \in C_s(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, temos que existe um conjunto denso D em $[0,T]$ tal que

$$\|f_1(s)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}, \qquad \forall s \in D.$$

Por outro lado, D denso em $[0,T]$ implica que existe $s_n \in D$ tal que $s_n \to t_0$. No entanto, como $f_1 \in C_s(0,T;L^2(\Omega))$ e $s_n \to t_0$, temos que $f_1(s_n) \rightharpoonup f_1(t_0)$ em $L^2(\Omega)$ e portanto

$$\|f_1(t_0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \liminf \|f_1(s_n)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))},$$

pois $s_n \in D$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\|f_1(t_0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$ e portanto, pela arbitrariedade de $t_0 \in [0,T]$,

$$\|f_1(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}, \qquad \forall t \in [0,T].$$

Daí, como $\phi \in L^2(\Omega)$ e $f_1 \in C_s(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, temos pela desigualdade de Cauchy, que

$$\left| \int_\Omega \phi f_1(t)\,\mathrm{d}x \right| \leq \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \|f_1(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \|f_1\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} < \infty, \tag{1.18}$$

e então $g_1 \in C(0,T;L^\infty(\Omega))$ implica que $\left| \int_\Omega \phi f_1(t)\,\mathrm{d}x \right| \|g_1(t) - g_1(t_1)\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ quando $t \to t_1$.

Por outro lado, note que $g_1 \in C(0,T;L^\infty(\Omega))$ e $\phi \in L^2(\Omega)$ implicam que

$$\|\phi g_1(t_1)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \|g_1(t_1)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \|g_1\|_{C(0,T;L^\infty(\Omega))} < \infty.$$

Então, a hipótese $f_1 \in C_s(0,T;L^2(\Omega))$ nos permite concluir que

$$\left| \int_\Omega \phi g_1(t_1)(f_1(t) - f_1(t_1))\,\mathrm{d}x \right| \to 0$$

quando $t \to t_1$, pela Proposição 1.29. Logo, pela desigualdade (1.17), temos que $f_1(t)g_1(t) \rightharpoonup f_1(t_1)g_1(t_1)$ em $L^2(\Omega)$ quando $t \to t_1$ e portanto $f_1 g_1 \in C_s(0,T;L^2(\Omega))$.

(c) Como feito acima, na equação (1.17), (trocando $f_1 \leftrightarrow f_2$ e $g_1 \leftrightarrow g_2$), vemos que

$$\begin{aligned}\left| \int_\Omega \phi[f_2(t)g_2(t) - f_2(t_1)g_2(t_1)]\,\mathrm{d}x \right| & \\ \leq \left| \int_\Omega \phi f_2(t)(g_2(t) - g_2(t_1))\,\mathrm{d}x \right| &+ \left| \int_\Omega \phi g_2(t_1)(f_2(t) - f_2(t_1))\,\mathrm{d}x \right|. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Seja agora $\phi \in L^3(\Omega)' = L^{3/2}(\Omega)$ e lembre que $L^6(\Omega)' = L^{6/5}(\Omega)$. Por um raciocínio análogo ao feito no item anterior, vemos que $f_2 \in C_s(0,T;L^6(\Omega))$ implica que

$$\|f_2(t)\|_{L^6(\Omega)} \leq \|f_2\|_{L^\infty(0,T;L^6(\Omega))}, \qquad \forall t \in [0,T].$$

Portanto, a desigualdade de Hölder (com $\frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1$), implica que

$$\begin{aligned}\|\phi f_2(t)\|_{L^{6/5}(\Omega)} = \left(\int |\phi|^{6/5} |f_2(t)|^{6/5}\,\mathrm{d}x \right)^{5/6} &\leq \|\phi\|_{L^{3/2}(\Omega)} \|f_2(t)\|_{L^6(\Omega)} \\ &\leq \|\phi\|_{L^{3/2}(\Omega)} \|f_2\|_{L^\infty(0,T;L^6(\Omega))} < \infty, \qquad \forall t \in [0,T].\end{aligned}$$

Logo, $g_2 \in C(0,T;L^6(\Omega))$ e a desigualdade de Hölder (com $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$) implicam que

$$\left| \int_\Omega \phi f_2(t)(g_2(t) - g_2(t_1))\,\mathrm{d}x \right| \leq \|\phi f_2(t)\|_{L^{6/5}(\Omega)} \|g_2(t) - g_2(t_1)\|_{L^6(\Omega)} \to 0 \tag{1.20}$$

quando $t \to t_1$.

Analogamente, pela desigualdade de Hölder (com $\frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1$), temos que

$$\begin{aligned}\|\phi g_2(t_1)\|_{L^{6/5}(\Omega)} = \left(\int |\phi|^{6/5} |g_2(t_1)|^{6/5}\,\mathrm{d}x \right)^{5/6} &\leq \|\phi\|_{L^{3/2}(\Omega)} \|g_2(t_1)\|_{L^6(\Omega)} \\ &\leq \|\phi\|_{L^{3/2}(\Omega)} \|g_2\|_{C(0,T;L^6(\Omega))} < \infty,\end{aligned}$$

pois $g_2 \in C(0,T;L^6(\Omega))$ e $\phi \in L^{3/2}(\Omega)$. Portanto $f_2 \in C_s(0,T;L^6(\Omega))$ e $\phi g_2(t_1) \in L^6(\Omega)' = L^{6/5}(\Omega)$ implicam pela Proposição 1.29 que

$$\left| \int_\Omega \phi g_2(t_1)(f_2(t) - f_2(t_1))\,\mathrm{d}x \right| \to 0 \tag{1.21}$$

quando $t \to t_1$. Logo, pela desigualdade (1.19) e a Proposição 1.29, temos que $f_2(t)g_2(t) \rightharpoonup f_2(t_1)g_2(t_1)$ em $L^3(\Omega)$ se $t \to t_1$. Então, $f_2 g_2 \in C_s(0,T;L^3(\Omega))$. $\square$

Precisaremos também do seguinte teorema:

Proposição 1.58 *Se* $u \in C_s(0,T;H^2(\Omega))$, *então* $\nabla u \in C_s(0,T;H^1(\Omega)^3)$ *e* $\Delta u \in C_s(0,T;L^2(\Omega))$.

Analogamente, se $a \in C_s(0,T;H^3(\Omega))$, *então* $\nabla a \in C_s(0,T;H^2(\Omega)^3)$, $\Delta a \in C_s(0,T;H^1(\Omega))$, *e* $\nabla\Delta a \in C_s(0,T;L^2(\Omega)^3)$.

Para demonstrar isto, lembramos a definição do operador adjunto (Brezis [4], página 43). Sejam E, F dois espaços de Banach e $A : D(A) \subset E \to F$ um operador linear definido em $D(A)$, denso em E. Defina primeiro o conjunto

$$D(A^*) = \{v \in F' : \exists c \geq 0 \text{ tal que } |\langle v, Au\rangle| \leq c\|u\|, \quad \forall u \in D(A)\}.$$

Dado v em $D(A^*)$, seja $g : D(A) \to \mathbb{R}$ a aplicação tal que $g(u) = \langle v, Au\rangle$. Então, $|g(u)| \leq c\|u\|$, $\forall u \in D(A)$ e portanto o teorema de Hahn-Banach (Brezis [4], página 1) garante que existe uma aplicação linear $f : E \to \mathbb{R}$ que estende g de forma que $|f(u)| \leq c\|u\|$, $\forall u \in E$. Em particular, $f \in E'$ e esta extensão é única, pela densidade de $D(A)$. Logo, podemos definir o operador adjunto A^* de A como a aplicação $A^* : D(A^*) \subset F' \to E'$ tal que $A^* v = f$. Então,

$$\langle v, Au\rangle_{F',F} = \langle A^*v, u\rangle_{E',E} \qquad \forall u \in D(A) \qquad \forall v \in D(A^*).$$

Agora, enunciamos um lema que implicará na Proposição 1.58:

Lema 1.59 *Sejam* B_1, B_2 *dois espaços de Banach e* $A : B_1 \to B_2$ *contínua linear. Logo, se* $u \in C_s(0,T;B_1)$, *então* $Au \in C_s(0,T;B_2)$.

Prova (Lema 1.59): De fato, temos que provar que, se $t \to t_1$, então $\langle f, Au(t)\rangle \to \langle f, Au(t_1)\rangle$ para todo $f \in B_2'$. Mas, pela definição do operador adjunto, isto equivale a provar que $\langle A^*f, u(t)\rangle \to \langle A^*f, u(t_1)\rangle$ para todo $f \in B_2'$. Por outro lado, como $u \in C_s(0,T;B_1)$, temos que $\langle g, u(t)\rangle \to \langle g, u(t_1)\rangle$ para todo $g \in B_1'$ e, em particular, para $g = A^*f \in B_1'$. Logo, $Au(t) \rightharpoonup Au(t_1)$ em B_2 e portanto $Au \in C_s(0,T;B_2)$. □

Prova (Proposição 1.58): Agora, para demonstrar a Proposição 1.58, note que $\nabla : H^2(\Omega) \to H^1(\Omega)^3$ e $\Delta : H^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ são contínuas lineares, pela Proposição 1.13. Portanto se $u \in C_s(0,T;H^2(\Omega))$, o lema implica que $\nabla u \in C_s(0,T;H^1(\Omega)^3)$ e $\Delta u \in C_s(0,T;L^2(\Omega))$. O caso de a é absolutamente análogo. □

Finalmente, enunciamos um último resultado, encontrado em Brezis [4], página 61, seguido de duas aplicações importantes:

Teorema 1.60 *Sejam E e F dois espaços de Banach e T um operador linear de E em F. Se T é contínuo na topologia forte, então T é contínuo com a topologia fraca em E e F.*

Em particular, pelo Teorema 1.13, podemos afirmar que

Corolário 1.61 *As seguintes aplicações são contínuas na topologia fraca:*

1. $\nabla : H^m(\Omega) \longrightarrow H^{m-1}(\Omega)^3$, $m = 1, 2, 3$, *e* $m = 2 - \alpha$, *com* $0 < \alpha < 1$,

2. $\Delta : H^m(\Omega) \longrightarrow H^{m-2}(\Omega)$, $m = 2, 3$,

3. $\nabla\Delta : H^3(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)^3$.

O Teorema 1.60 também nos permite provar a continuidade fraca do operador traço γ_0. (Para definições e propriedades do operador traço, veja, por exemplo, Medeiros [13] páginas 99-121, Evans [6] páginas 271-275, Lions [12] páginas 42-53, Grisvard [8] páginas 36-62.) Inicialmente, afirmamos a seguinte versão simplificada do Teorema 1.5.1.2 de Grisvard [8], páginas 37-38:

Teorema 1.62 *Seja $\frac{1}{2} < s \leq 4$ tal que $s - \frac{1}{2}$ não é inteiro. Então, o operador traço*

$$\gamma_0 : H^s(\Omega) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

é linear e contínuo.

Daí, como a aplicação γ_0 é linear entre espaços de Banach, o Teorema 1.60 implica também que, nas mesmas condições do teorema anterior, γ_0 é contínuo na topologia fraca. Mais precisamente,

Corolário 1.63 *Seja $\frac{1}{2} < s \leq 4$ tal que $s - \frac{1}{2}$ não é inteiro. Então, o operador traço*

$$\gamma_0 : H^s(\Omega) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

é linear e contínuo na topologia fraca.

Capítulo 2

Formulação variacional; um problema auxiliar

$$
\begin{cases}
u_t - d_1\Delta u = -\operatorname{div}(u\nabla\psi(a)), \text{ em }]0,T[\times\Omega,\\
a_t - d_2\Delta a + k_2 a = k_1 u,\\
\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial\psi(a)}{\partial n} = 0 \text{ e } \frac{\partial a}{\partial n} = 0, \text{ em } \Gamma = \partial\Omega,\\
u(0,\cdot) = u_0,\ a(0,\cdot) = a_0,
\end{cases}
\tag{2.1}
$$

com $u_0 \geq 0$ e $a_0 \geq 0$ dados em $L^\infty(\Omega)$ e ψ, ψ' e ψ'' funções de Lipschitz em $\mathbb{R}$.

Neste sistema, u representa a densidade populacional e a representa a concentração química da substância atratora produzida pelas amebas. Na primeira equação, o fluxo é a soma do fluxo quimiotático $u\psi'(a)\nabla a$ e o fluxo de difusão $d_1\nabla u$. Neste modelo, pela escala de tempo envolvida no fenômeno, supõe-se que o crescimento da população é nulo e, portanto, não existe termo de proliferação nesta equação. Na segunda equação, as constantes $d_2 > d_1 > 0$ são os coeficientes de difusão de a e $k_1u - k_2a$ é o termo de reação, onde k_1u representa a produção do atrator, proporcional ao número de amebas, e $-k_2a$ representa a diminuição de atividade atrativa, com k_1 e k_2 constantes positivas. Tanto as constantes quanto o parâmetro ψ dependem da espécie analisada e podem ser estimados experimentalmente.

Observamos que as condições de contorno dadas implicam que

$$0 = \frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \psi(a)}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} - u\psi'(a)\frac{\partial a}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n}, \text{ em } \Gamma$$

e portanto o fluxo populacional $\frac{\partial u}{\partial n}$ é nulo em Γ. Por outro lado, $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial a}{\partial n} = 0$ em Γ implicam que

$$\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \psi(a)}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} - u\psi'(a)\frac{\partial a}{\partial n} = 0 \text{ em } \Gamma.$$

Portanto, são equivalentes

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \psi(a)}{\partial n} = 0 \text{ e } \frac{\partial a}{\partial n} = 0 \text{ em } \Gamma\right] \qquad \text{e} \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ e } \frac{\partial a}{\partial n} = 0 \text{ em } \Gamma\right].$$

Formulação variacional e solução fraca:

Primeiramente, formularemos um problema variacional associado ao sistema original (2.1) com o intuito de, em um primeiro momento, buscar uma solução fraca.

Para isto, trabalhamos formalmente, supondo que todas as contas seguintes são justificáveis. Iniciamos multiplicando a primeira equação do sistema por $\varphi_1 \in H^1(\Omega)$ e a segunda por $\varphi_2 \in H^1(\Omega)$. A seguir integramos os resultados em Ω e utilizamos as fórmulas de Green (Evans [6], página 712) para obtermos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} u \in W(0,T) \cap L^\infty(Q_T), a \in W(0,T), \\ \forall \varphi_1,\ \varphi_2 \in H^1(\Omega),\ \text{e qtp } t \in]0,T[, \\ \langle u_t, \varphi_1 \rangle + d_1 \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_1 \, \mathrm{d}x = \int_\Omega u \nabla \psi(a) \nabla \varphi_1 \, \mathrm{d}x, \\ \langle a_t, \varphi_2 \rangle + d_2 \int_\Omega \nabla a \nabla \varphi_2 \, \mathrm{d}x + k_2 \int_\Omega a\varphi_2 \, \mathrm{d}x = k_1 \int_\Omega u\varphi_2 \, \mathrm{d}x, \\ u(0,\cdot) = u_0 \text{ e } a(0,\cdot) = a_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Lembramos que $W(0,T)$ está definido em (1.14). Além disso, como $W(0,T) \subset C(0,T; L^2(\Omega))$ (ver Teorema 1.52), $u(0,\cdot)$ e $a(0,\cdot)$ estão bem definidas. No entanto, para que a formulação acima faça sentido, é necessário garantir que

$$\left| \int_\Omega u(t,x) \nabla \psi(a(t,x)) \nabla \varphi_1(x) \, \mathrm{d}x \right| < \infty, \qquad \text{q.t.p } t \in [0,T].$$

Para tanto, note que é suficiente garantir que $u\nabla\psi(a) \in L^2(Q_T)^3$, pois isto implicaria pela desigualdade de Cauchy que

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T\int_\Omega u\nabla\psi(a)\nabla\varphi_1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right| &\leq \|u\nabla\psi(a)\|_{L^2(Q_T)^3}\|\nabla\varphi_1\|_{L^2(Q_T)^3}\\ &\leq \sqrt{T}\|u\nabla\psi(a)\|_{L^2(Q_T)^3}\|\nabla\varphi_1\|_{L^2(\Omega)^3}\\ &\leq \sqrt{T}\|u\nabla\psi(a)\|_{L^2(Q_T)^3}\|\varphi_1\|_{H^1(\Omega)} < \infty\end{aligned}$$

e portanto

$$\left|\int_\Omega u(t,x)\nabla\psi(a(t,x))\nabla\varphi_1(x)\,\mathrm{d}x\right| < \infty, \qquad \text{q.t.p } t \in [0,T].$$

Para provar que de fato $u\nabla\psi(a) = u\psi'(a)\nabla a \in L^2(Q_T)^3$, note primeiramente que como ψ é Lipschitziana temos $\psi'(a) \in L^\infty(Q_T)$. De fato, ψ Lipschitz implica que existe um $L_1 > 0$ tal que $|\psi(y) - \psi(x)| \leq L_1|x-y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Logo, pela definição da derivada (em $\mathbb{R}$), temos para cada $a = a(t,x) \in \mathbb{R}$

$$|\psi'(a)| = \left|\lim_{h\to 0}\frac{\psi(a+h)-\psi(a)}{h}\right| \leq \lim_{h\to 0}\frac{|\psi(a+h)-\psi(a)|}{|h|} \leq L_1\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{|h|} = L_1.$$

Analogamente, aplicando o mesmo raciocínio a ψ' e ψ'', temos que se ψ' e ψ'' são Lipschitz com constantes $L_2 > 0$ e $L_3 > 0$, respectivamente então $|\psi''(a)| \leq L_2$ e $|\psi'''(a)| \leq L_3$. Portanto, podemos concluir que existe $L := \max(L_1, L_2, L_3) > 0$ tal que $|\psi'(a)| \leq L$, $|\psi''(a)| \leq L$ e $|\psi'''(a)| \leq L$.

Por outro lado, note que $a \in W(0,T)$ implica que $a \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ e portanto $\nabla a \in L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ (Proposição 1.14). Além disso, como $u \in L^\infty(Q_T)$, então $u\nabla\psi(a) \in L^2(Q_T)^3$, pois

$$\int_0^T\int_\Omega |u\nabla\psi(a)|^2 = \int_0^T\int_\Omega |u|^2|\psi'(a)|^2|\nabla a|^2 \leq L^2\|u\|^2_{L^\infty(Q_T)}\|\nabla a\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} < \infty.$$

Porém, observamos que para dados arbitrários é difícil provar que $u \in L^\infty(Q_T)$, o que sugere a necessidade de se introduzir primeiramente um problema auxiliar que não requeira tal exigência. Isto será feito a seguir.

Problema auxiliar:

Como dissemos, para evitar a dificuldade causada pelo termo não linear, introduziremos um problema auxiliar utilizando um método de truncamento.

Para tanto, sendo $M > 0$, definimos o seguinte truncamento:

$$\beta(u)(t,x) = \beta_M(u)(t,x) = \begin{cases} -\frac{3M}{2} & \text{se } u(t,x) \leq -2M, \\ \frac{u^2}{2M} + 2u + \frac{M}{2} & \text{se } -2M \leq u(t,x) \leq -M, \\ u(t,x) & \text{se } |u(t,x)| \leq M \\ -\frac{u^2}{2M} + 2u - \frac{M}{2} & \text{se } M \leq u(t,x) \leq 2M, \\ \frac{3M}{2} & \text{se } u(t,x) \geq 2M. \end{cases} \tag{2.3}$$

Note que $\|\beta(u)\|_{L^\infty(Q_T)} \leq \frac{3M}{2} =: \widetilde{M}$ e $\|\beta'(u)\|_{L^\infty(Q_T)} \leq 1$ (ver apêndice (B.1)). Com isso, podemos definir uma versão truncada do problema variacional (2.2):

$$\begin{cases} u \in W(0,T),\ a \in W(0,T), \\ \forall \varphi_1,\ \varphi_2 \in H^1(\Omega),\ \text{ e qtp } t \in]0,T[, \\ \left\langle u_t, \varphi_1 \right\rangle + d_1 \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_1 \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \beta(u) \nabla \psi(a) \nabla \varphi_1 \, \mathrm{d}x, \\ \left\langle a_t, \varphi_2 \right\rangle + d_2 \int_\Omega \nabla a \nabla \varphi_2 \, \mathrm{d}x + k_2 \int_\Omega a \varphi_2 \, \mathrm{d}x = k_1 \int_\Omega u \varphi_2 \, \mathrm{d}x, \\ u(0,\cdot) = u_0 \text{ e } a(0,\cdot) = a_0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Resumo da ideias a serem seguidas nesta dissertação:

Com respeito ao problema auxiliar, provaremos no Capítulo 3 a existência global e a unicidade da solução de (2.4), para cada $M \geq 1$ arbitrário, via o método de Faedo-Galerkin. Obteremos várias estimativas para as soluções aproximadas, que permitirão provar que existe uma única soluçaão do problema auxiliar, a qual é contínua no tempo com valores em um espaço de Sobolev de ordem suficientemente alta para implicar que a solução é também contínua no tempo com valores em $L^\infty(\Omega)$.

A seguir, na Seção 4.1, pela escolha de um M apropriado, a continuidade referida no parágrafo anterior implicará que a solução do problema auxiliar é de fato uma solução do problema original (2.1) em $[0,t_0] \times \Omega$, para algum $t_0 \leq T$. Além disso, pelas estimativas obtidas, concluiremos também que ela é de fato uma solução local forte de (2.1) no sentido de que ela satisfaz as condições de regularidade enunciadas no Teorema 4.1 em seu domínio de definição.

Finalmente, na Seção 4.2, usaremos um argumento de prolongamento para poder provar que de fato existe uma única solução global em $[0, T] \times \Omega$ do problema inicial (2.1) se um dos dados iniciais for suficientemente pequeno em uma norma a ser especificada (veja o enunciado do Teorema 4.2.)

Capítulo 3

Resolução do problema auxiliar

Tentaremos resolver o sistema (2.4) utilizando o método de Faedo-Galerkin. Para tanto, seja $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma base ortonormal de $H^1(\Omega)$ composta de autofunções de $-\Delta$ com autovalores $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ e condição de contorno $\frac{\partial w_k}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, defina $W_m = \operatorname{span}\{w_1, \dots w_m\}$ e fixe um $m \in \mathbb{N}$. Então, temos que encontrar $u_m : [0,T] \longrightarrow W_m$ e $a_m : [0,T] \longrightarrow W_m$ nas formas

$$u_m(t) = \sum_{k=1}^{m} z_k^{(1)}(t) w_k$$
$$a_m(t) = \sum_{k=1}^{m} z_k^{(2)}(t) w_k$$

tais que $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in W_m$ temos em $[0,T]$

$$\big\langle u_{m,t}, \varphi_1 \big\rangle + d_1 \int_\Omega \nabla u_m \nabla \varphi_1 \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \beta(u_m) \nabla \psi(a_m) \nabla \varphi_1 \, \mathrm{d}x, \tag{3.1}$$

$$\big\langle a_{m,t}, \varphi_2 \big\rangle + d_2 \int_\Omega \nabla a_m \nabla \varphi_2 \, \mathrm{d}x + k_2 \int_\Omega a_m \varphi_2 \, \mathrm{d}x = k_1 \int_\Omega u_m \varphi_2 \, \mathrm{d}x, \tag{3.2}$$

e $u_m(0) = P_m(u_0)$ e $a_m(0) = P_m(a_0)$, onde $P_m : H^1(\Omega) \longrightarrow W_m$ é a projeção canônica de $H^1(\Omega)$ sobre W_m.

Neste caso, note que $\frac{\partial w_k}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ implica que $\forall t \in [0, T]$,

$$\frac{\partial u_m}{\partial n}(t)\Big|_\Gamma = \left(\sum_{k=1}^m z_k^{(1)}(t)\frac{\partial w_k}{\partial n}\right)\Big|_\Gamma = \sum_{k=1}^m z_k^{(1)}(t)\frac{\partial w_k}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0, \qquad \forall m \in \mathbb{N} \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial a_m}{\partial n}(t)\Big|_\Gamma = \left(\sum_{k=1}^m z_k^{(2)}(t)\frac{\partial w_k}{\partial n}\right)\Big|_\Gamma = \sum_{k=1}^m z_k^{(2)}(t)\frac{\partial w_k}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0, \qquad \forall m \in \mathbb{N} \tag{3.4}$$

e portanto quando tomarmos o limite das aproximações de Galerkin u_m e a_m teremos que os limites vão também satisfazer as condições de contorno.

Observamos agora que

$$\langle u_{m,t}, \varphi_1\rangle = \frac{d}{dt}\langle u_m, \varphi_1\rangle \qquad \text{e} \qquad \langle a_{m,t}, \varphi_2\rangle = \frac{d}{dt}\langle a_m, \varphi_1\rangle.$$

Portanto, usando as identidades de Green, vemos que buscamos soluções (u_m, a_m) tais que $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in W_m$ temos em $[0, T]$

$$\frac{d}{dt}\langle u_m, \varphi_1\rangle - d_1(\Delta u_m, \varphi_1) = -(\nabla[\beta(u_m)\nabla\psi(a_m)], \varphi_1), \tag{3.5}$$

$$\frac{d}{dt}\langle a_m, \varphi_2\rangle - d_2(\Delta a_m, \varphi_2) + k_2(a_m, \varphi_2) = k_1(u_m, \varphi_2). \tag{3.6}$$

Daí, tomando sucessivamente $\varphi_1 = w_1, w_2, \ldots$ e $\varphi_2 = w_1, w_2, \ldots$, a ortonormalidade de $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ e as desigualdades (3.5) e (3.6) fornecem um sistema de equações diferenciais para os coeficientes $z_k^{(1)}(t)$ e $z_k^{(2)}(t)$, $k = 1, 2 \ldots m$, para qual vale o teorema de existência e unicidade local. Então, existe para cada $m \in \mathbb{N}$ um $t_m > 0$ tal que há uma única solução em $[0, t_m)$ para os respectivos problemas aproximados descritos anteriormente. Portanto, cada uma dessas soluções está definida pelo menos em um intervalo maximal $[0, t_m^*)$, com $t_m \leq t_m^* \leq T$.

O fato das soluções dos problemas aproximados serem globais, no sentido de estarem definidas no intervalo $[0, T]$, será consequência do argumento de outro resultado de equações diferenciais que garante que, nas condições do teorema de existência e unicidade local, se $t_m^* < T$, teríamos

$$\lim_{t \to t_m^* -} \|u_m(t)\|_u + \|a_m(t)\|_a = +\infty, \tag{3.7}$$

onde $\|\cdot\|_u$ e $\|\cdot\|_a$ denotam normas arbitrárias, já que cada problema aproximado está definido em um espaço de dimensão finita e nele todas as normas são equivalentes.

Portanto, concluiremos que para cada solução aproximada teremos $t_m^* = T$ e, assim, elas estarão definidas pelo menos em $[0,T)$ e de fato, por um argumento padrão, estarão definidas em $[0,T]$, se mostrarmos que (3.7) não ocorre. Isto será garantido se conseguirmos mostrar que quaisquer normas de $u_m(t)$ e $a_m(t)$ são finitas para $t \in [0, t_m^*)$.

Para isso, buscaremos estimativas das normas de $u_m(t)$ e $a_m(t)$. De fato, provaremos resultados mais fortes. Mostraremos não apenas que tais estimativas são limitadas para cada m, mas, além disso, que certas normas são acotadas por constantes independentes de m. Isto permitirá que usemos argumentos de compacidade para tomar o limite em certas topologias quando $m \to +\infty$, a menos de subsequências, e assim encontrar soluções do problema auxiliar (2.4).

3.1 Estimativas a priori

Inicialmente, note que $\forall i, j \in \mathbb{N}$ e para cada $t \in [0,T]$

$$\Delta^i u_m(t) = (-1)^i \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^i z_k^{(1)}(t) w_k \in W_m$$
$$\Delta^i \frac{\partial^j u_m}{\partial t^j}(t) = (-1)^i \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^i \frac{d^j z_k^{(1)}}{dt^j}(t) w_k \in W_m,$$

e analogamente $\Delta^i a_m(t)$ e $\Delta^i \frac{\partial^j a_m}{\partial t^j}(t)$ pertencem a W_m. Portanto, estas funções podem ser escolhidas para φ_1 e φ_2 nas equações (3.1) e (3.2). Fazendo tais escolhas, provaremos nesta seção que se $a_0 \in H^3(\Omega)$ e $u_0 \in H^2(\Omega)$, então existe um $C > 0$ independente de m tal que

$$\|a_m\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))} \le C \qquad \|a_{m,t}\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \le C$$
$$\|a_{m,t}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \le C \qquad \|a_{m,t,t}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \le C$$

e

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \le C \qquad \|u_{m,t}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \le C \qquad \|u_{m,t}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \le C.$$

Começamos buscando a limitação de a_m em $L^\infty(0, t_m^*; H^3(\Omega))$, onde $[0, t_m^*)$ é o intervalo maximal onde existe a solução de (3.1) e (3.2). Considere inicialmente

$\varphi_2 = a_m$ em (3.2). Então temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|a_m\|^2_{L^2(\Omega)} + d_2\|\nabla a_m\|^2_{L^2(\Omega)^3} + k_2\|a_m\|^2_{L^2(\Omega)} = k_1\int_\Omega u_m a_m \,\mathrm{d}x$$
$$\leq k_1\int_\Omega |u_m||a_m|\,\mathrm{d}x \leq k_1\epsilon\int_\Omega |a_m|^2\,\mathrm{d}x + k_1 C(\epsilon)\int_\Omega |u_m|^2\,\mathrm{d}x.$$

Escolhendo $\epsilon = \frac{k_2}{2k_1}$ na desigualdade acima, temos que $C(\epsilon) = \frac{k_1}{2k_2}$ e daí

$$\frac{d}{dt}\|a_m\|^2_{L^2(\Omega)} + 2d_2\|\nabla a_m\|^2_{L^2(\Omega)^3} + k_2\|a_m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{k_1^2}{k_2}\|u_m\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.8}$$

Analogamente, considere $\varphi_1 = u_m$ em (3.1). Então, como $\psi'(a_m)$ e $\beta(u_m)$ são limitadas em $L^\infty(0, t_m^*; L^\infty(\Omega))$, temos pela desigualdade de Young que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|^2_{L^2(\Omega)} + d_1\|\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)^3} = \int_\Omega \beta(u_m)\psi'(a_m)\nabla a_m \nabla u_m\,\mathrm{d}x$$
$$\leq \int_\Omega |\beta(u_m)||\psi'(a_m)||\nabla a_m||\nabla u_m|\,\mathrm{d}x$$
$$\leq \widetilde{M}L\int_\Omega |\nabla a_m||\nabla u_m|\,\mathrm{d}x$$
$$\leq \widetilde{M}L\,\epsilon\int_\Omega |\nabla u_m|^2\,\mathrm{d}x + \widetilde{M}L\,C(\epsilon)\int_\Omega |\nabla a_m|^2\,\mathrm{d}x.$$

Escolhendo $\epsilon = \frac{d_1}{2\widetilde{M}L}$ na desigualdade anterior, temos $C(\epsilon) = \frac{\widetilde{M}L}{2d_1}$, que substituindo nos fornece

$$\frac{d}{dt}\|u_m\|^2_{L^2(\Omega)} + d_1\|\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)^3} \leq \frac{\widetilde{M}^2L^2}{d_1}\|\nabla a_m\|^2_{L^2(\Omega)^3}. \tag{3.9}$$

Multiplicando a desigualdade (3.8) por $\frac{\widetilde{M}^2L^2}{d_1d_2}$ e somando a (3.9), temos que

$$\frac{d}{dt}\Big(\|u_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\widetilde{M}^2L^2}{d_1d_2}\|a_m\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) + d_1\|\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)^3}$$
$$+ \frac{\widetilde{M}^2L^2}{d_1}\|\nabla a_m\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \frac{\widetilde{M}^2L^2k_2}{d_1d_2}\|a_m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{k_1^2\widetilde{M}^2L^2}{k_2d_1d_2}\|u_m\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

E, integrando a desigualdade acima de 0 a t, com $t \le t_m^*$, temos

$$\begin{aligned}
&\|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\widetilde{M}^2 L^2}{d_1 d_2}\|a_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + \int_0^t \left(d_1 \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \frac{\widetilde{M}^2 L^2}{d_1}\|\nabla a_m\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \frac{\widetilde{M}^2 L^2 k_2}{d_1 d_2}\|a_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \mathrm{d}s \\
&\quad \le \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\widetilde{M}^2 L^2}{d_1 d_2}\|a_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{k_1^2 \widetilde{M}^2 L^2}{k_2 d_1 d_2}\int_0^t \|u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \,\mathrm{d}s \\
&\quad \le \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\widetilde{M}^2 L^2}{d_1 d_2}\|a_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + \frac{k_1^2 \widetilde{M}^2 L^2}{k_2 d_1 d_2}\int_0^t \left(\|u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\widetilde{M}^2 L^2}{d_1 d_2}\|a_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

que, pela desigualdade de Gronwall implica que $\forall t < t_m^*$

$$\begin{aligned}
&\|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\widetilde{M}^2 L^2}{d_1 d_2}\|a_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\qquad \le \left(\|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\widetilde{M}^2 L^2}{d_1 d_2}\|a_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) e^{\int_0^t \frac{k_1^2 \widetilde{M}^2 L^2}{k_2 d_1 d_2}\,\mathrm{d}s} \\
&\qquad \le \left(\|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\widetilde{M}^2 L^2}{d_1 d_2}\|a_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) e^{\frac{k_1^2 \widetilde{M}^2 L^2}{k_2 d_1 d_2} T},
\end{aligned} \tag{3.10}$$

e

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left(d_1 \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \frac{\widetilde{M}^2 L^2}{d_1}\|\nabla a_m\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \frac{\widetilde{M}^2 L^2 k_2}{d_1 d_2}\|a_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \mathrm{d}s \\
&= d_1 \int_0^t \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \,\mathrm{d}s + \frac{\widetilde{M}^2 L^2}{d_1}\int_0^t \|\nabla a_m\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \,\mathrm{d}s + \frac{\widetilde{M}^2 L^2 k_2}{d_1 d_2}\int_0^t \|a_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \,\mathrm{d}s \\
&\le \left(\|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\widetilde{M}^2 L^2}{d_1 d_2}\|a_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) e^{\frac{k_1^2 \widetilde{M}^2 L^2}{k_2 d_1 d_2} T}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Agora, note que, como $\|P_m(c)\|_{L^2(\Omega)} \le \|c\|_{L^2(\Omega)}$ para todo $c \in L^2(\Omega)$, a hipótese $u_0 \in H^2(\Omega)$ implica que $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\|u_m(0)\|_{H^2(\Omega)}^2 &= \sum_{|\alpha|\le 2} \|D^\alpha u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha|\le 2} \|D^\alpha P_m(u_0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \sum_{|\alpha|\le 2} \|P_m(D^\alpha u_0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \le \sum_{|\alpha|\le 2} \|D^\alpha u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2 < \infty.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Por um raciocínio análogo, $a_0 \in H^3(\Omega)$ nos permite provar

$$\|a_m(0)\|_{H^3(\Omega)} \leq \|a_0\|_{H^3(\Omega)} < \infty, \qquad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.13}$$

Logo, as desigualdades (3.10) e (3.11) e as inclusões $a_0 \in H^3(\Omega)$ e $u_0 \in H^2(\Omega)$ implicam que existe $C > 0$ constante independente de m, tal que $\forall t \in [0, t_m^*)$ e $\forall m \in \mathbb{N}$ temos

$$\|u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \Rightarrow \|u_m\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))} \leq C \tag{3.14}$$

$$\|a_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \Rightarrow \|a_m\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))} \leq C \tag{3.15}$$

e também

$$\|\nabla u_m\|^2_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^3)} = \int_0^t \|\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s \leq C \tag{3.16}$$

$$\|\nabla a_m\|^2_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^3)} = \int_0^t \|\nabla a_m\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s \leq C \tag{3.17}$$

$$\|a_m\|^2_{L^2(0,t;L^2(\Omega))} = \int_0^t \|a_m\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s \leq C. \tag{3.18}$$

Faremos um abuso de notação chamando de C qualquer constante positiva que independe de m. Esta escolha é justificada, pois basta tomar o máximo de todas as constantes encontradas no processo (finito) de majoração de normas feito aqui. Assim, com esta linguagem, pelas desigualdades (3.15) e (3.14), temos que

$$\lim_{t \to t_m^* -} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C < \infty$$

$$\lim_{t \to t_m^* -} \|a_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C < \infty$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e portanto, pela discussão feita no final da seção anterior, temos que $t_m^* = T$, $\forall m$ e as soluções (u_m, a_m) estão definidas em $[0, T]$. Daí, as estimativas (3.14) - (3.18) são válidas para todo $t \leq T$. Então, pela Proposição 1.15, existe C tal que para todo $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|u_m\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} = \int_0^T \|u_m\|^2_{H^1(\Omega)}\,\mathrm{d}s &= \int_0^T \|u_m\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s + \int_0^T \|\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s \\ &\leq T\|u_m\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla u_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} \leq C, \end{aligned} \tag{3.19}$$

e

$$\|a_m\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} = \|a_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla a_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} \leq C. \tag{3.20}$$

Agora, escolha $\varphi_2 = a_{m,t}$ em (3.2). Então, pela desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}\|a_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{d_2}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla a_m\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \frac{k_2}{2}\frac{d}{dt}\|a_m\|^2_{L^2(\Omega)} &= k_1 \int_\Omega u_m a_{m,t}\,\mathrm{d}x \\ &\leq k_1 \int_\Omega |u_m||a_{m,t}|\,\mathrm{d}x \\ &\leq k_1\epsilon \int_\Omega |a_{m,t}|^2\,\mathrm{d}x + C(\epsilon)k_1 \int_\Omega |u_m|^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

e, escolhendo $\epsilon = \frac{1}{2k_1}$ na desigualdade anterior, temos $C(\epsilon) = \frac{k_1}{2}$ e, portanto,

$$\|a_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{d}{dt}\left(k_2\|a_m\|^2_{L^2(\Omega)} + d_2\|\nabla a_m\|^2_{L^2(\Omega)^3}\right) \leq k_1^2\|u_m\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Além disso, integrando de 0 a t, por (3.14) e $a_0 \in H^3(\Omega)$ e $u_0 \in H^2(\Omega)$, temos que existe $C > 0$ tal que para todo $t \leq T$ e $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\begin{aligned}\int_0^t \|a_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}x + k_2\|a_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + d_2\|\nabla a_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3}& \\ \leq k_2\|a_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + d_2\|\nabla a_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + k_1^2\int_0^t \|u_m\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}x& \\ \leq k_2\|a_0\|^2_{L^2(\Omega)} + d_2\|\nabla a_0\|^2_{L^2(\Omega)^3} + k_1^2 T\|u_m\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C,&\end{aligned} \tag{3.21}$$

e portanto

$$\|a_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \Rightarrow \|a_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C, \tag{3.22}$$

$$\|\nabla a_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} \leq C \Rightarrow \|\nabla a_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3)} \leq C \tag{3.23}$$

e

$$\|a_{m,t}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \int_0^t \|a_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}x \leq C. \tag{3.24}$$

Logo, pelas desigualdades (3.15), (3.23) e a Proposição 1.16, temos que

$$\|a_m\|^2_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} = \|a_m\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla a_m\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3)} \leq C. \tag{3.25}$$

Analogamente, escolha $\varphi_2 = -\Delta a_m$ em (3.2). Então, integrando por partes, pela desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla a_m\|^2_{L^2(\Omega)^3} + d_2\|\Delta a_m\|^2_{L^2(\Omega)} + k_2\|\nabla a_m\|^2_{L^2(\Omega)^3} &\leq k_1\int_\Omega |u_m||\Delta a_m|\,\mathrm{d}x \\ &\leq k_1\epsilon\|\Delta a_m\|^2_{L^2(\Omega)} + k_1 C(\epsilon)\|u_m\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Escolhendo $\epsilon = \frac{d_2}{2k_1}$ na desigualdade anterior, temos $C(\epsilon) = \frac{k_1}{2d_2}$ e

$$\frac{d}{dt}\|\nabla a_m\|^2_{L^2(\Omega)^3} + d_2\|\Delta a_m\|^2_{L^2(\Omega)} + 2k_2\|\nabla a_m\|^2_{L^2(\Omega)^3} \leq \frac{k_1^2}{d_2}\|u_m\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Então, integrando a desigualdade acima de 0 a t, por (3.14), temos que existe $C > 0$ tal que para todo $t \leq T$ e $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\begin{aligned}\|\nabla a_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + d_2\int_0^t \|\Delta a_m\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s + 2k_2\int_0^t \|\nabla a_m\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s \\ \leq \|\nabla a_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \frac{k_1^2}{d_2}\int_0^t \|u_m\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s \quad \leq \quad C,\end{aligned}$$

e logo

$$\|\nabla a_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} \leq C \Rightarrow \|\nabla a_m\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3)} \leq C \tag{3.26}$$

$$\|\Delta a_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \int_0^t \|\Delta a_m\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s \leq C \tag{3.27}$$

$$\|\nabla a_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} = \int_0^t \|\nabla a_m\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s \leq C. \tag{3.28}$$

Em particular, as estimativas (3.27) e (3.18), junto com a Proposição 1.19 implicam que

$$\|a_m\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C(\|\Delta a_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|a_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}) \leq C. \tag{3.29}$$

Finalmente, escolha $\varphi_2 = \Delta^2 a_m \in W_m$ na equação (3.2). Então, pela desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta a_m\|^2_{L^2(\Omega)} + d_2\|\nabla\Delta a_m\|^2_{L^2(\Omega)^3} + k_2\|\Delta a_m\|^2_{L^2(\Omega)} &= k_1\int_\Omega u_m\Delta^2 a_m\,\mathrm{d}x \\ = -k_1\int_\Omega \nabla u_m\nabla\Delta a_m\,\mathrm{d}x &\leq k_1\epsilon\|\nabla\Delta a_m\|^2_{L^2(\Omega)^3} + k_1 c(\epsilon)\|\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)^3}\end{aligned}$$

e escolhendo $\epsilon = \frac{d_2}{2k_1}$ acima, temos que $C(\epsilon) = \frac{k_1}{2d_2}$ e

$$\frac{d}{dt}\|\Delta a_m\|^2_{L^2(\Omega)} + d_2\|\nabla\Delta a_m\|^2_{L^2(\Omega)^3} + 2k_2\|\Delta a_m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{k_1^2}{d_2}\|\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)^3}.$$

Integrando a desigualdade anterior de 0 a t, a desigualdade (3.16), $a_0 \in H^3(\Omega)$ e $u_0 \in H^2(\Omega)$ implicam que existe $C > 0$ tal que $\forall t \leq T, m \in \mathbb{N}$ e temos

$$\begin{aligned}\|\Delta a_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + d_2\int_0^t \|\nabla\Delta a_m\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s + 2k_2\int_0^t \|\Delta a_m\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s \\ \leq \|\Delta a_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{k_1^2}{d_2}\int_0^t \|\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s \leq C.\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\Delta a_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \Rightarrow \|\Delta a_m\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \tag{3.30}$$

$$\|\nabla\Delta a_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} = \int_0^t \|\nabla\Delta a_m\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s \leq C \tag{3.31}$$

$$\|\Delta a_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \int_0^t \|\Delta a_m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C. \tag{3.32}$$

Então, pelas desigualdades (3.30), (3.15) e a Proposição 1.20, temos que $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\|a_m\|^2_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \leq C(\|\Delta a_m\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|a_m\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}) \leq C. \tag{3.33}$$

Analogamente, pelas estimativas (3.31), (3.27), (3.18) e a Proposição 1.21, temos que $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|a_m\|^2_{L^2(0,T;H^3(\Omega))} \leq C\big(&\|\nabla\Delta a_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} + \|\Delta a_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ &+ \|a_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\big) \leq C.\end{aligned} \tag{3.34}$$

Finalmente, para provar que existe C positivo que não depende de m tal que $\|a_m\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))} \leq C$ precisaremos da seguinte proposição:

Proposição 3.1 *Se $a_0 \in H^3(\Omega)$ e $u_0 \in H^2(\Omega)$, temos que existe $C > 0$ tal que:*

a) $\|\nabla[\beta(u_m)\nabla\psi(a_m)]\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C(1 + \|\nabla u_m \nabla a_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))})$, $\forall m \in \mathbb{N}$,

b) $\|u_m\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C$ *e* $\|u_m\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leq C$ $\forall m \in \mathbb{N}$.

Prova: **(a)** Primeiramente, lembremos que C denota qualquer real positivo que independe de m. Inicialmente, note que

$$\begin{aligned}\nabla[\beta(u_m)\nabla\psi(a_m)] = \nabla[\beta(u_m)\psi'(a_m)\nabla a_m] &= \beta'(u_m)\nabla u_m\psi'(a_m)\nabla a_m \\ &+ \beta(u_m)\psi''(a_m)|\nabla a_m|^2 + \beta(u_m)\psi'(a_m)\Delta a_m. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Além disso, observe que para todo $m \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned} \|\beta(u_m)\|_{L^\infty(Q_T)} \le \widetilde{M} \qquad \|\beta'(u_m)\|_{L^\infty(Q_T)} \le 1 \\ \|\psi'(a_m)\|_{L^\infty(Q_T)} \le L \qquad \|\psi''(a_m)\|_{L^\infty(Q_T)} \le L. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Por um lado, as majorações acima, junto com a desigualdade (3.27), implicam que existe $C > 0$ independente de m tal que

$$\|\beta(u_m)\psi'(a_m)\Delta a_m\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \le \widetilde{M}L\|\Delta a_m\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \le C. \tag{3.37}$$

Analogamente, temos que existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|\beta(u_m)\psi''(a_m)|\nabla a_m|^2\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &\le \widetilde{M}^2L^2\||\nabla a_m|^2\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ &= \widetilde{M}^2L^2\int_0^T\int_\Omega |\nabla a_m|^4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\ &\le C\widetilde{M}^2L^2\int_0^T \|\nabla a_m\|^4_{L^4(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Mas o Teorema 1.1 afirma que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ e portanto existe uma constante $K_1 > 0$ (independente de m) tal que $\|\nabla a_m\|^4_{L^4(\Omega)^3} \le K_1\|\nabla a_m\|^4_{H^1(\Omega)^3}$. Portanto a desigualdade acima, a Proposição 1.13 e a estimativa (3.33) implicam que

$$\begin{aligned} \|\beta(u_m)\psi''(a_m)|\nabla a_m|^2\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &\le CK_1\widetilde{M}^2L^2\int_0^T \|\nabla a_m\|^4_{H^1(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s \\ &\le CK_1\widetilde{M}^2L^2\int_0^T \|a_m\|^4_{H^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s \\ &\le CK_1\widetilde{M}^2L^2T\|a_m\|^4_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \le C. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Desta forma, tomando a norma em (3.35), a desigualdade de Minkowski e as desigualdades (3.36), (3.37) e (3.39) implicam que

$$\begin{aligned}
\|\nabla[\beta(u_m)\nabla\psi(a_m)]\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &\leq \|\beta'(u_m)\nabla u_m\psi'(a_m)\nabla a_m\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\quad + \|\beta(u_m)\psi''(a_m)|\nabla a_m|^2\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\quad + \|\beta(u_m)\psi'(a_m)\Delta a_m\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\leq L\|\nabla u_m\nabla a_m\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + 2C.
\end{aligned}$$

Logo, elevando a desigualdade acima ao quadrado, a desigualdade de Cauchy nos permite escolher um $C > 0$ suficientemente grande tal que

$$\|\nabla[\beta(u_m)\nabla\psi(a_m)]\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C(1 + \|\nabla u_m\nabla a_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))})$$

(b) Agora, escolha $\varphi_1 = -\Delta u_m$ na igualdade (3.1). Então,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)^3} + d_1\|\Delta u_m\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \beta(u_m)\nabla\psi(a_m)\nabla(-\Delta u_m)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \nabla[\beta(u_m)\nabla\psi(a_m)]\Delta u_m\,\mathrm{d}x \\
&\leq \epsilon\|\Delta u_m\|^2_{L^2(\Omega)} + C(\epsilon)\|\nabla[\beta(u_m)\nabla\psi(a_m)]\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Escolhendo $\epsilon = \frac{d_1}{2}$ na desigualdade anterior, temos $C(\epsilon) = \frac{1}{2d_1}$ e

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)^3} + d_1\|\Delta u_m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{d_1}\|\nabla[\beta(u_m)\nabla\psi(a_m)]\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Integrando a desigualdade acima de 0 a t e utilizando a parte (a) da proposição, temos que

$$\begin{aligned}
&\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + d_1\int_0^t \|\Delta u_m\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s \\
&\qquad \leq \|\nabla u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \frac{1}{d_1}\|\nabla[\beta(u_m)\nabla\psi(a_m)]\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\qquad \leq \|\nabla u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \frac{C}{d_1}(1 + \|\nabla u_m\nabla a_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}) \\
&\qquad = \frac{C}{d_1} + \|\nabla u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \frac{C}{d_1}\int_0^t\int_\Omega |\nabla u_m|^2|\nabla a_m|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&\qquad \leq \frac{C}{d_1} + \|\nabla u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \frac{C}{d_1}\int_0^t \|\nabla a_m\|^2_{L^\infty(\Omega)^3}\|\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Por um lado, aplicando a desigualdade de Gronwall na desigualdade acima, temos

$$\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} \leq \left(\frac{C}{d_1} + \|\nabla u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3}\right) e^{\frac{C}{d_1}\int_0^t \|\nabla a_m\|^2_{L^\infty(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s}$$

e

$$d_1 \int_0^t \|\Delta u_m\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s \leq \left(\frac{C}{d_1} + \|\nabla u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3}\right) e^{\frac{C}{d_1}\int_0^t \|\nabla a_m\|^2_{L^\infty(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s}.$$

Por outro lado, veja que a estimativa (3.34), a Proposição 1.14 e a inclusão contínua $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ implicam que existe $K_2 > 0$ independente de m tal que

$$\|\nabla a_m\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega)^3)} \leq K_2 \|\nabla a_m\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega)^3)} \leq CK_2 \|a_m\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega))} \leq C.$$

Então, juntando as últimas três desigualdades, dado que $a_0 \in H^3(\Omega)$ e $u_0 \in H^2(\Omega)$, vemos que existe um $C > 0$ tal que $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\|\nabla u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3)} \leq C \tag{3.40}$$

$$\|\Delta u_m\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C. \tag{3.41}$$

Como feito anteriormente, temos que a Proposição 1.16 e as desigualdades (3.40) e (3.14) implicam que:

$$\|u_m\|^2_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} = \|\nabla u_m\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3)} + \|u_m\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C, \ \ \forall m \in \mathbb{N}$$

e analogamente, pela Proposição 1.19 e as estimativas (3.41), (3.14), vemos que

$$\begin{aligned}\|u_m\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} &\leq C(\|\Delta u_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|u_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}) \\ &\leq C(\|\Delta u_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + T\|u_m\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}) \leq C\end{aligned}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e portanto vale o item (b). □

Proposição 3.2 *Se $a_0 \in H^3(\Omega)$ e $u_0 \in H^2(\Omega)$, existe $C > 0$ tal que:*

$$\|a_m\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))} \leq C \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Prova: De fato, para provar tal afirmação, escolha $\varphi_2 = -\Delta^3 a_m \in W_m$ na igualdade (3.2). Então, pela desigualdade de Young, temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\Delta a_m\|^2_{L^2(\Omega)^3} + d_2\|\Delta^2 a_m\|^2_{L^2(\Omega)} + k_2\|\nabla\Delta a_m\|^2_{L^2(\Omega)^3}& \\ = k_1\int_\Omega u_m(-\Delta^3 a_m)\,\mathrm{d}x &= k_1\int_\Omega \Delta u_m(-\Delta^2 a_m)\,\mathrm{d}x \\ &\le k_1\epsilon\|\Delta^2 a_m\|^2_{L^2(\Omega)} + k_1 C(\epsilon)\|\Delta u_m\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Se $\epsilon = \frac{d_2}{2k_1}$ na desigualdade acima, então $C(\epsilon) = \frac{k_1}{2d_2}$ e

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\Delta a_m\|^2_{L^2(\Omega)^3} + d_2\|\Delta^2 a_m\|^2_{L^2(\Omega)} + 2k_2\|\nabla\Delta a_m\|^2_{L^2(\Omega)^3} \le \frac{{k_1}^2}{d_2}\|\Delta u_m\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Integrando a desigualdade anterior em $[0,t]$, pelo item (b) da Proposição 3.1, temos que $a_0 \in H^3(\Omega)$ e $u_0 \in H^2(\Omega)$ implicam que

$$\begin{aligned}\|\nabla\Delta a_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + d_2\int_0^t \|\Delta^2 a_m\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s + 2k_2\int_0^t \|\nabla\Delta a_m\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s& \\ \le \|\nabla\Delta a_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \frac{{k_1}^2}{d_2}\|\Delta u_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \le C,&\end{aligned}$$

e portanto $\|\nabla\Delta a_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3)} \le C$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Daí, pela Proposição 1.21 e as desigualdades (3.30), (3.15) temos que

$$\begin{aligned}\|a_m\|^2_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))} &\le C(\|\nabla\Delta a_m\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3)} + \|\Delta a_m\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\quad + \|a_m\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}) \le C.\end{aligned}$$

□

Note que já provamos assim o fato de que existe $C > 0$ independente de m tal que

$$\begin{aligned}\|a_m\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))} &\le C \qquad \text{(Proposição 3.2)}\\ \|u_m\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} &\le C \qquad \text{(Proposição 3.1)}\\ \|u_m\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} &\le C \qquad \text{(Proposição 3.1).}\end{aligned}$$

Agora, partimos para provar as limitações sobre as normas de $u_{m,t}$ e $a_{m,t}$ que afirmamos no início desta seção (3.1) para somente então provar que existe $C > 0$ independente de m tal que $\|u_m\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \le C$.

Proposição 3.3 *Se $a_0 \in H^3(\Omega)$ e $u_0 \in H^2(\Omega)$, existe $C > 0$ tal que:*

a) $\|\nabla[\beta(u_m)\nabla\psi(a_m)]\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \qquad \forall m \in \mathbb{N}$,

b) $\|a_{m,t}\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C \qquad \forall m \in \mathbb{N}$.

Prova: **(a)** De fato, pela Proposição 3.1, temos que existe $C > 0$ independente de m tal que

$$\|\nabla[\beta(u_m)\nabla\psi(a_m)]\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C(1 + \|\nabla u_m \nabla a_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}).$$

Por outro lado, a inclusão contínua $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ e a proposição anterior implicam que existe $K > 0$ independente de m tal que,

$$\|\nabla a_m\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^3)} \leq K\|\nabla a_m\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega)^3)} \leq CK\|a_m\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))} \leq C. \quad (3.42)$$

Além disso, as proposições 1.14 e 3.1 implicam que

$$\|\nabla u_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} \leq \|u_m\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq T\|u_m\|^2_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leq C \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Portanto, juntando as três últimas desigualdades, temos que

$$\begin{aligned}\|\nabla[\beta(u_m)\nabla\psi(a_m)]\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &\leq C\big(1 + \|\nabla u_m \nabla a_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\big) \\ &\leq C\big(1 + \|\nabla a_m\|^2_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^3)}\|\nabla u_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}\big) \\ &\leq C \qquad \forall m \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

(b) Agora, para provar o item (b), escolha $\varphi_2 = \Delta^2 a_{m,t}$ na igualdade (3.2). Então,

$$\begin{aligned}\|\Delta a_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{d_2}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\Delta a_m\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \frac{k_2}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta a_m\|^2_{L^2(\Omega)} &= k_1\int_\Omega u_m \Delta^2 a_{m,t}\,\mathrm{d}x \\ = k_1\int_\Omega \Delta u_m \Delta a_{m,t}\,\mathrm{d}x &\leq k_1\epsilon\|\Delta a_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)} + k_1 C(\epsilon)\|\Delta u_m\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

pela desigualdade de Young. Assim, escolhendo $\epsilon = \frac{1}{2k_1}$ e $C(\epsilon) = \frac{k_1}{2}$ na desigualdade acima, obtemos

$$\|\Delta a_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)} + d_2\frac{d}{dt}\|\nabla\Delta a_m\|^2_{L^2(\Omega)^3} + k_2\frac{d}{dt}\|\Delta a_m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq k_1^2\|\Delta u_m\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Integrando a desigualdade acima de 0 a t e usando (3.41), temos que

$$\int_0^t \|\Delta a_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s + d_2\|\nabla\Delta a_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + k_2\|\Delta a_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq d_2\|\nabla\Delta a_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + k_2\|\Delta a_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + k_1^2\|\Delta u_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C$$

e, em particular,

$$\|\Delta a_{m,t}\|^2_{L^2(0,t;L^2(\Omega))} = \int_0^t \|\Delta a_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s \leq C \qquad \forall t \leq T, m \in \mathbb{N}. \tag{3.43}$$

Por outro lado, pela Proposição 1.19 e as desigualdades (3.43) e (3.24), temos que

$$\|a_{m,t}\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C(\|\Delta a_{m,t}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|a_{m,t}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}) \leq C$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e assim a proposição está demonstrada. □

Tendo isto, podemos demonstrar o seguinte:

Proposição 3.4 *Se $a_0 \in H^3(\Omega)$ e $u_0 \in H^2(\Omega)$, existe $C > 0$ constante tal que*

$$\|u_{m,t}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Prova: De fato, escolha $\varphi_1 = u_{m,t}$ na equação (3.1). Então, pela desigualdade de Cauchy,

$$\begin{aligned}
\|u_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{d_1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)^3} &= \int_\Omega \beta(u_m)\nabla\psi(a_m)\nabla u_{m,t}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_\Omega \nabla[\beta(u_m)\nabla\psi(a_m)]u_{m,t}\,\mathrm{d}x \\
&\leq \left|\int_\Omega \nabla[\beta(u_m)\nabla\psi(a_m)]u_{m,t}\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\|u_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\nabla[\beta(u_m)\nabla\psi(a_m)]\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

e portanto

$$\|u_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)} + d_1\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)^3} \leq \|\nabla[\beta(u_m)\nabla\psi(a_m)]\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Integrando a desigualdade acima de 0 a t, graças ao item (a) da proposição anterior e $u_0 \in H^2(\Omega)$, temos

$$\int_0^t \|u_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s + d_1\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} \le d_1\|\nabla u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|\nabla[\beta(u_m)\nabla\psi(a_m)]\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \le C,$$

o que implica que

$$\|u_{m,t}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \le C. \tag{3.44}$$

□

Para as próximas estimativas, precisaremos da seguinte proposição:

Proposição 3.5 *Se $a_0 \in H^3(\Omega)$ e $u_0 \in H^2(\Omega)$, então existe $C > 0$ tal que*

a) $\|\nabla[\beta(u_m(0))\nabla\psi(a_m(0))]\|_{L^2(\Omega)} \le C \qquad \forall m \in \mathbb{N}$

b) $\|u_{m,t}(0)\|_{L^2(\Omega)} \le C \qquad \forall m \in \mathbb{N}$

c) $\|a_{m,t}(0)\|_{H^1(\Omega)} \le C \qquad \forall m \in \mathbb{N}$.

Prova: **(a)** Inicialmente, note que para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ temos $(a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2)$, pois $2xy \le x^2 + y^2$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ (Proposições 1.4 e 1.3). Daí, as desigualdades em (3.36) e a igualdade (3.35) avaliadas em $t = 0$ implicam que

$$\begin{aligned}\|\nabla[\beta(u_m(0))\nabla\psi(a_m(0))]\|^2_{L^2(\Omega)} \le{} & 3L^2\|\nabla a_m(0)\|^2_{L^\infty(\Omega)^3}\|\nabla u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3} \\ & + 3\widetilde{M}^2L^2|\Omega|\|\nabla a_m(0)\|^4_{L^\infty(\Omega)^3} \\ & + 3\widetilde{M}^2L^2\|\Delta a_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \forall m \in \mathbb{N}.\end{aligned} \tag{3.45}$$

Mas, como $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ (Teorema 1.1), temos pela Proposição 1.13, que existe $C > 0$ tal que

$$\|\nabla a_m(0)\|_{L^\infty(\Omega)^3} \le C\|\nabla a_m(0)\|_{H^2(\Omega)^3} \le C\|a_m(0)\|_{H^3(\Omega)} \le C\|a_0\|_{H^3(\Omega)}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \tag{3.46}$$

pela desigualdade (3.13). Analogamente, pela inclusão $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$ (Teorema 1.2), a desigualdade (3.12) e a Proposição 1.13, temos que existe $C > 0$ tal que

$$\|\nabla u_m(0)\|_{L^2(\Omega)^3} \le \|u_m(0)\|_{H^1(\Omega)} \le C\|u_m(0)\|_{H^2(\Omega)} \le C\|u_0\|_{H^2(\Omega)}, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.47}$$

Finalmente, como $H^3(\Omega) \hookrightarrow H^2(\Omega)$, a Proposição 1.13 e a desigualdade (3.13) implicam que existe um $C > 0$ tal que

$$\|\Delta a_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|a_m(0)\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|a_m(0)\|_{H^3(\Omega)} \leq C\|a_0\|_{H^3(\Omega)}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \tag{3.48}$$

e portanto as desigualdades (3.45), (3.46), (3.47), (3.48) implicam que existe $C > 0$ tal que

$$\|\nabla[\beta(u_m(0))\nabla\psi(a_m(0))]\|_{L^2(\Omega)} \leq C \qquad \forall m \in \mathbb{N},$$

pois $a_0 \in H^3(\Omega)$ e $u_0 \in H^2(\Omega)$.

(b) Agora, para provar (b) e (c), note que as equações (3.1) e (3.2) valem em $t = 0$ e, portanto, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in W_m$ temos:

$$\big\langle u_{m,t}(0), \varphi_1\big\rangle + d_1\int_\Omega \nabla u_m(0)\nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \beta(u_m(0))\nabla\psi(a_m(0))\nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}x \tag{3.49}$$

$$\big\langle a_{m,t}(0), \varphi_2\big\rangle + d_2\int_\Omega \nabla a_m(0)\nabla\varphi_2 \,\mathrm{d}x + k_2\int_\Omega a_m(0)\varphi_2 \,\mathrm{d}x = k_1\int_\Omega u_m(0)\varphi_2 \,\mathrm{d}x. \tag{3.50}$$

Daí, escolhendo $\varphi_1 = u_{m,t}(0)$ em (3.49), obtemos pela identidade de Green e a desigualdade de Young, que

$$\begin{aligned}
\|u_{m,t}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} &= -d_1\int_\Omega \nabla u_m(0)\nabla u_{m,t}(0)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \beta(u_m(0))\nabla\psi(a_m(0))\nabla u_{m,t}(0)\,\mathrm{d}x \\
&= d_1\int_\Omega \Delta u_m(0)u_{m,t}(0)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla[\beta(u_m(0))\nabla\psi(a_m(0))]u_{m,t}(0)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \epsilon(d_1+1)\|u_{m,t}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + C(\epsilon)\Big[d_1\|\Delta u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+ \|\nabla[\beta(u_m(0))\nabla\psi(a_m(0))]\|^2_{L^2(\Omega)}\Big].
\end{aligned}$$

Portanto, escolhendo $\epsilon = \frac{1}{2(d_1+1)}$ na desigualdade acima, $C(\epsilon) = \frac{d_1+1}{2}$ e, reagrupando os termos, vemos que

$$\begin{aligned}
\|u_{m,t}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq (d_1+1)\Big[d_1\|\Delta u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla[\beta(u_m(0))\nabla\psi(a_m(0))]\|^2_{L^2(\Omega)}\Big] \\
&\leq (d_1+1)\Big(d_1\|u_0\|^2_{H^2(\Omega)} + C\Big), \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

pelo item (a) e a Proposição 1.13. Então, $u_0 \in H^2(\Omega)$ e a desigualdade acima implicam que vale a afirmação (b).

(c) Agora, escolha $\varphi_2 = a_{m,t}(0)$ em (3.50). Analogamente, a identidade de Green e a desigualdade de Young implicam que

$$\begin{aligned}\|a_{m,t}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} &= -d_2 \int_\Omega \nabla a_m(0) \nabla a_{m,t}(0)\,\mathrm{d}x - k_2 \int_\Omega a_m(0) a_{m,t}(0)\,\mathrm{d}x \\ &+ k_1 \int_\Omega u_m(0) a_{m,t}(0)\,\mathrm{d}x = d_2 \int_\Omega \Delta a_m(0) a_{m,t}(0)\,\mathrm{d}x \\ &- k_2 \int_\Omega a_m(0) a_{m,t}(0)\,\mathrm{d}x + k_1 \int_\Omega u_m(0) a_{m,t}(0)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \epsilon(d_2 + k_2 + k_1)\|a_{m,t}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + C(\epsilon)\Big[d_2\|\Delta a_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &+ k_2\|a_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + k_1\|u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\Big].\end{aligned}$$

Defina então $K = d_2 + k_1 + k_2 > 0$ para simplificar a notação. Note primeiramente que K independe de m. Além disso, se escolhemos $\epsilon = \frac{1}{2K}$ na desigualdade acima, então $C(\epsilon) = \frac{K}{2}$ e portanto a Proposição 1.13 implica que

$$\begin{aligned}\|a_{m,t}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq K\Big[d_2\|\Delta a_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + k_2\|a_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + k_1\|u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\Big] \\ &\leq CK\Big[d_2\|a_m(0)\|^2_{H^2(\Omega)} + k_2\|a_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + k_1\|u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\Big] \\ &\leq CK\Big[d_2\|a_0\|^2_{H^2(\Omega)} + k_2\|a_0\|^2_{L^2(\Omega)} + k_1\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}\Big] \leq C, \end{aligned} \tag{3.52}$$

pois $a_0 \in H^3(\Omega) \hookrightarrow H^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e $u_0 \in H^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ (Teoremas 1.2 e 1.1).

Finalmente, escolha $\varphi_2 = -\Delta a_{m,t}(0)$ na igualdade (3.50). Então, pela identidade de Green e a desigualdade de Young, temos que

$$\begin{aligned}\|\nabla a_{m,t}(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3} &= d_2 \int_\Omega \nabla a_m(0) \nabla \Delta a_{m,t}(0)\,\mathrm{d}x + k_2 \int_\Omega a_m(0) \Delta a_{m,t}(0)\,\mathrm{d}x \\ &- k_1 \int_\Omega u_m(0) \Delta a_{m,t}(0)\,\mathrm{d}x = d_2 \int_\Omega \nabla \Delta a_m(0) \nabla a_{m,t}(0)\,\mathrm{d}x \\ &- k_2 \int_\Omega \nabla a_m(0) \nabla a_{m,t}(0)\,\mathrm{d}x + k_1 \int_\Omega \nabla u_m(0) \nabla a_{m,t}(0)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \epsilon(d_2 + k_2 + k_1)\|\nabla a_{m,t}(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + C(\epsilon)\Big[d_2\|\nabla \Delta a_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3} \\ &+ k_2\|\nabla a_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + k_1\|\nabla u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3}\Big].\end{aligned}$$

Logo, escolhendo $\epsilon = \frac{1}{2K}$ na desigualdade acima e aplicando a Proposição 1.13, temos que $C(\epsilon) = \frac{K}{2}$ e $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|\nabla a_{m,t}(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3} &\leq K\Big[d_2\|\nabla\Delta a_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + k_2\|\nabla a_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3} \\ &\quad + k_1\|\nabla u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3}\Big] \leq K\Big[d_2 C\|a_m(0)\|^2_{H^3(\Omega)} \\ &\quad + k_2\|a_m(0)\|^2_{H^1(\Omega)} + k_1\|u_m(0)\|^2_{H^1(\Omega)}\Big] \\ &\leq K\Big[Cd_2\|a_0\|^2_{H^3(\Omega)} + k_2\|a_0\|^2_{H^1(\Omega)} + k_1\|u_0\|^2_{H^1(\Omega)}\Big] \leq C, \qquad (3.53)\end{aligned}$$

pois $a_0 \in H^3(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$ e $u_0 \in H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$ (Teorema1.2). Concluímos então, pela Proposição 1.15 e as desigualdades (3.52), (3.53), que existe um $C > 0$ tal que

$$\|a_{m,t}(0)\|^2_{H^1(\Omega)} = \|\nabla a_{m,t}(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|a_{m,t}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

□

Agora, para o resto das estimativas, precisaremos derivar as equações (3.1) e (3.2) em relação a t. Para tanto, note que ao derivar obtemos

$$\begin{aligned}\big\langle u_{m,t,t}, \varphi_1\big\rangle + d_1\int_\Omega \nabla u_{m,t}\nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \frac{d}{dt}[\beta(u_m)\nabla\psi(a_m)]\nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \beta'(u_m)u_{m,t}\psi'(a_m)\nabla a_m\nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_\Omega \beta(u_m)\psi''(a_m)a_{m,t}\nabla a_m\nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_\Omega \beta(u_m)\psi'(a_m)\nabla a_{m,t}\nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}x \qquad (3.54)\end{aligned}$$

e

$$\big\langle a_{m,t,t}, \varphi_2\big\rangle + d_2\int_\Omega \nabla a_{m,t}\nabla\varphi_2 \,\mathrm{d}x + k_2\int_\Omega a_{m,t}\varphi_2 \,\mathrm{d}x = k_1\int_\Omega u_{m,t}\varphi_2 \,\mathrm{d}x. \qquad (3.55)$$

Tendo isto, podemos demonstrar o seguinte resultado:

Proposição 3.6 *Se $a_0 \in H^3(\Omega)$ e $u_0 \in H^2(\Omega)$, existe $C > 0$ tal que:*

$$\|u_{m,t}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C \text{ e } \|u_{m,t}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Prova: Escolha $\varphi_1 = u_{m,t}$ na equação (3.54). Então, as estimativas em (3.36) e a Proposição 3.2 implicam que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)} + d_1\|\nabla u_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)^3} = \int_\Omega \beta'(u_m)u_{m,t}\psi'(a_m)\nabla a_m \nabla u_{m,t}\,\mathrm{d}x \\
&+ \int_\Omega \beta(u_m)\psi''(a_m)a_{m,t}\nabla a_m \nabla u_{m,t}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \beta(u_m)\psi'(a_m)\nabla a_{m,t}\nabla u_{m,t}\,\mathrm{d}x \\
&\leq L\|\nabla a_m\|_{L^\infty(Q_T)^3}\int_\Omega |u_{m,t}||\nabla u_{m,t}|\,\mathrm{d}x + \widetilde{M}L\|\nabla a_m\|_{L^\infty(Q_T)^3}\int_\Omega |a_{m,t}||\nabla u_{m,t}|\,\mathrm{d}x \\
&+ \widetilde{M}L\int_\Omega |\nabla a_{m,t}||\nabla u_{m,t}|\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Agora, pela desigualdade (3.42), existe um $K > 0$ suficientemente grande que independe de m e que satisfaz

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)} + d_1\|\nabla u_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)^3} \leq K\bigg[&\int_\Omega |u_{m,t}||\nabla u_{m,t}|\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |a_{m,t}||\nabla u_{m,t}|\,\mathrm{d}x \\
&+ \int_\Omega |\nabla a_{m,t}||\nabla u_{m,t}|\,\mathrm{d}x\bigg].
\end{aligned}$$

Então, pela desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)} + d_1\|\nabla u_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)^3} \leq K\bigg[&3\epsilon\|\nabla u_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)^3} + C(\epsilon)\|u_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+ C(\epsilon)\|a_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)} + C(\epsilon)\|\nabla a_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)^3}\bigg].
\end{aligned}$$

Daí, escolhendo $\epsilon = \frac{d_1}{6K}$ e $C(\epsilon) = \frac{3K}{2d_1}$ na desigualdade acima, temos

$$\frac{d}{dt}\|u_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)} + d_1\|\nabla u_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)^3} \leq \frac{3K^2}{d_1}\left[\|u_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|a_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla a_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)^3}\right].$$

Integrando a desigualdade anterior de 0 a t, vemos que, pelas proposições 3.5(b), 3.4, 3.3(c), existe $C > 0$ independente de m tal que

$$\begin{aligned}
\|u_{m,t}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + d_1\int_0^t \|\nabla u_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)^3} \leq \|u_{m,t}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{3K^2}{d_1}\bigg[&\|u_{m,t}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
+ \|a_{m,t}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla a_{m,t}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}\bigg] \leq C
\end{aligned} \tag{3.56}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\|u_{m,t}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} &\leq C \\
\|\nabla u_{m,t}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} &\leq C \qquad \forall m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Logo, juntando esta última estimativa com as proposições 3.4 e 1.15, temos que

$$\|u_{m,t}\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} = \|\nabla u_{m,t}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} + \|u_{m,t}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

□

Agora, para provar que existe $C > 0$ independente de m tal que

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \leq C,$$

temos que melhorar a majoração feita na Proposição 3.3 (a) e provar que:

Proposição 3.7 *Se $a_0 \in H^3(\Omega)$ e $u_0 \in H^2(\Omega)$, existe $C > 0$ tal que:*

$$\|\nabla[\beta(u_m)\nabla\psi(a_m)]\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \qquad \forall m.$$

Prova: Inicialmente, lembre que

$$\begin{aligned}\nabla[\beta(u_m)\nabla\psi(a_m)] = \nabla[\beta(u_m)\psi'(a_m)\nabla a_m] &= \beta'(u_m)\nabla u_m\psi'(a_m)\nabla a_m \\ &+ \beta(u_m)\psi''(a_m)|\nabla a_m|^2 + \beta(u_m)\psi'(a_m)\Delta a_m.\end{aligned}$$

Assim, pela desigualdade triangular, temos quase sempre em $[0, T]$ que

$$\begin{aligned}\|\nabla[\beta(u_m(t))\nabla\psi(a_m(t))]\|_{L^2(\Omega)} &= \|\nabla[\beta(u_m(t))\psi'(a_m(t))\nabla a_m(t)]\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\beta'(u_m(t))\nabla u_m(t)\psi'(a_m(t))\nabla a_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \|\beta(u_m(t))\psi''(a_m(t))|\nabla a_m(t)|^2\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \|\beta(u_m(t))\psi'(a_m(t))\Delta a_m(t)\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Daí, pelas limitações descritas em 3.36, podemos majorar a desigualdade acima da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\|\nabla[\beta(u_m(t))\nabla\psi(a_m(t))]\|_{L^2(\Omega)} &\leq L\|\nabla u_m(t)\nabla a_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + \widetilde{M}L\||\nabla a_m(t)|^2\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \widetilde{M}L\|\Delta a_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq L\|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)^3}\|\nabla a_m(t)\|_{L^\infty(\Omega)^3} \\ &+ \widetilde{M}L\|\nabla a_m(t)\|^2_{L^\infty(\Omega)^3}|\Omega|^{1/2} + \widetilde{M}L\|\Delta a_m(t)\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.57}$$

Então, tomando o supremo essencial em $[0,T]$ na desigualdade acima, obtemos que

$$\begin{aligned}\|\nabla[\beta(u_m)\nabla\psi(a_m)]\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} &\leq L\|\nabla u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3)}\|\nabla a_m\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^3)}\\ &+\widetilde{M}L\|\nabla a_m\|^2_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^3)}|\Omega|^{1/2}\\ &+\widetilde{M}L\|\Delta a_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\leq C \quad \forall m\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

pelas desigualdades (3.42), (3.30) e (3.40). □

Com esta proposição, já podemos provar que:

Proposição 3.8 *Se $a_0 \in H^3(\Omega)$ e $u_0 \in H^2(\Omega)$, existe $C > 0$ tal que:*

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \leq C \qquad \forall m.$$

Prova: Escolha $\varphi_1 = -\Delta u_m \in W_m$ em (3.1). Então,

$$\left\langle u_{m,t}, -\Delta u_m\right\rangle + d_1\int_\Omega \nabla u_m\nabla(-\Delta u_m)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \beta(u_m)\nabla\psi(a_m)\nabla(-\Delta u_m)\,\mathrm{d}x$$

quase sempre em $[0,T]$. No entanto, $u_{m,t} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ (Proposição 3.6) e $u_m \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$ (Proposição 3.1) implicam que $u_{m,t} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e $\Delta u_m \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e portanto $\left\langle u_{m,t}, -\Delta u_m\right\rangle = (u_{m,t}, -\Delta u_m)$ quase sempre em $[0,T]$. Daí, a igualdade acima equivale a

$$d_1\int_\Omega \nabla u_m\nabla(-\Delta u_m)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u_{m,t}\Delta u_m\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \beta(u_m)\nabla\psi(a_m)\nabla(-\Delta u_m)\,\mathrm{d}x.$$

Assim, aplicando a identidade de Green e a desigualdade de Cauchy na igualdade acima, temos que

$$\begin{aligned}d_1\|\Delta u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \|u_{m,t}(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\\ &+\|\nabla[\beta(u_m(t))\nabla\psi(a_m(t))]\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

quase sempre em $[0,T]$. Logo, se $\|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$, então

$$d_1\|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_{m,t}(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla[\beta(u_m(t))\nabla\psi(a_m(t))]\|_{L^2(\Omega)}.$$

Mas, como a desigualdade acima obviamente também vale se $\|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$ esta é válida em $[0,T]$ quase sempre. Então, tomando o supremo essencial, temos que $\forall m \in \mathbb{N}$

$$d_1\|\Delta u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \|u_{m,t}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla[\beta(u_m)\nabla\psi(a_m)]\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C$$

pelas proposições 3.6 e 3.7. Assim a proposição de regularidade 1.20 e a Proposição 3.1 nos permitem concluir que existe $C > 0$ independente de m tal que

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \leq C.$$

□

Finalmente, apresentamos as últimas estimativas:

Proposição 3.9 *Se $a_0 \in H^3(\Omega)$ e $u_0 \in H^2(\Omega)$, temos que existe $C > 0$ tal que*

$$\|a_{m,t,t}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \text{ e } \|a_{m,t}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leq C \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Prova: Escolha $\varphi_2 = a_{m,t,t}$ na igualdade (3.55). Então, pela desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}\|a_{m,t,t}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{d_2}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla a_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \frac{k_2}{2}\frac{d}{dt}\|a_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)} &= k_1 \int_\Omega u_{m,t} a_{m,t,t}\,\mathrm{d}x \\ &\leq k_1 \epsilon \|a_{m,t,t}\|^2_{L^2(\Omega)} + k_1 C(\epsilon)\|u_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

e escolhendo acima $\epsilon = \frac{1}{2k_1}$ temos $C(\epsilon) = \frac{k_1}{2}$ e

$$\|a_{m,t,t}\|^2_{L^2(\Omega)} + d_2 \frac{d}{dt}\|\nabla a_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)^3} + k_2 \frac{d}{dt}\|a_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq {k_1}^2 \|u_{m,t}\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Como feito anteriormente, se integramos a desigualdade acima, a proposições 3.4 e 3.5 implicam que

$$\begin{aligned}\int_0^t \|a_{m,t,t}\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s + d_2\|\nabla a_{m,t}(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + k_2\|a_{m,t}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq d_2 \|\nabla a_{m,t}(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3} \\ + k_2\|a_{m,t}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + {k_1}^2\|u_{m,t}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &\leq C \end{aligned} \tag{3.58}$$

e portanto

$$\begin{aligned}\|a_{m,t,t}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &\leq C \\ \|\nabla a_{m,t}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3)} &\leq C \\ \|a_{m,t}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} &\leq C \qquad \forall m \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 1.16 e as duas últimas desigualdades, podemos concluir que

$$\|a_{m,t}\|^2_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} = \|\nabla a_{m,t}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3)} + \|a_{m,t}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

□

Resumimos o resultado obtido nesta seção em um teorema:

Teorema 3.10 *Se $a_0 \in H^3(\Omega)$ e $u_0 \in H^2(\Omega)$, então existe $C > 0$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ valem*

$$\|a_m\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))} \leq C \qquad \|a_{m,t,t}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C$$
$$\|a_{m,t}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leq C \qquad \|a_{m,t}\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C$$

e

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \leq C \qquad \|u_{m,t}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \qquad \|u_{m,t}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C.$$

3.2 Existência de solução fraca

Para provar a existência da solução do problema auxiliar (2.4), precisamos inicialmente tomar o limite das aproximações de Galerkin, a menos de subsequências, e depois provar que tais limites são de fato soluções do problema auxiliar (2.4). Para tanto, note que, pelas desigualdades obtidas no Teorema 3.10, o Lema de Aubin-Lions implica que existem subsequências a_k e u_k de a_m, u_m tais que

$$a_k \to a \text{ em } C(0,T;H^2(\Omega)) \tag{3.59}$$
$$a_{k,t} \to w(= a_t) \text{ em } C(0,T;L^2(\Omega)) \text{ e } L^2(0,T;H^1(\Omega)) \tag{3.60}$$
$$u_k \to u \text{ em } C(0,T;H^{2-\alpha}(\Omega)) \text{ e } C(0,T;L^\infty(\Omega)), 0 < \alpha \leq 1. \tag{3.61}$$

Afirmação: Existe a_k subsequência de a_m tal que $a_k \to a$ em $C(0,T;H^2(\Omega))$.

De fato, seja $\mathbb{F}_1 = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$. Então, pelo Teorema 3.10, $\mathbb{F}_1$ é limitado em $L^\infty(0,T;H^3(\Omega))$ e $\frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial t}$ é limitado em $L^2(0,T;H^2(\Omega))$. Como $H^3(\Omega) \hookrightarrow H^2(\Omega)$ é uma inclusão compacta (Teorema 1.2), podemos então aplicar o Lema de Aubin-Lions e concluir que $\mathbb{F}_1$ é relativamente compacta em $C(0,T;H^2(\Omega))$, i.e, existe uma subsequência a_k de a_m tal que $a_k \to a$ em $C(0,T;H^2(\Omega))$.

Afirmação: Existe u_k subsequência de u_m tal que $u_k \to u$ em $C(0,T;H^{2-\alpha}(\Omega))$ e em $C(0,T;L^\infty(\Omega))$, com $0 < \alpha \leq 1$.

Seja $\mathbb{F}_2 = \{u_m : m \in I \subset \mathbb{N}\}$. Sabemos que se $0 < \alpha \leq 1$, então $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^{2-\alpha}(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$, com $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^{2-\alpha}(\Omega)$ sendo uma inclusão compacta (Teoremas 1.2 e 1.1). Logo, como $\mathbb{F}_2$ é limitado em $L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$ e $\frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial t}$ é limitado em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ (Teorema 3.10), o Lema de Aubin Lions implica que existe uma subsequência u_k de u_m tal que $u_k \to u$ em $C(0,T;H^{2-\alpha}(\Omega))$. Além disso, note que se escolhemos $\alpha = 1$, temos que $u_k \to u$ em $C(0,T;H^1(\Omega))$, convergência que usaremos constantemente nesta seção. Por outro lado, escolhendo $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, temos que a inclusão contínua $H^{2-\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ (Teorema 1.1) implica que $u_k \to u$ em $C(0,T;L^\infty(\Omega))$.

Afirmação: Existe a_k subsequência de a_m tal que $a_{k,t} \to a_t$ em $C(0,T;L^2(\Omega))$ e em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$.

Finalmente, do Teorema 3.10 também decorre que $\mathbb{F}_3 := \frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial t}$ é limitado nas normas de $L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$ e $L^2(0,T;H^2(\Omega))$ e $\frac{\partial \mathbb{F}_3}{\partial t}$ é limitado em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Daí, $(a_{k,t}) \subset \mathbb{F}_3$ e $(a_{k,t,t}) \subset \frac{\partial \mathbb{F}_3}{\partial t}$ também são limitadas nestes espaços. Então, como $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$ são compactos e $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, temos que $(a_{k,t})$ é relativamente compacto em $C(0,T;L^2(\Omega))$ e $L^2(0,T;H^1(\Omega))$, pelo Lema de Aubin-Lions e a Observação 1.50. Então, passando para uma subsequência se necessário, $a_{k,t} \to v$ em $C(0,T;L^2(\Omega))$ e $a_{k,t} \to w$ em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Mas, como $C(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(Q_T)$ e $L^2(0,T;H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(Q_T)$, $a_{k,t} \to v$ e $a_{k,t} \to w$ em $L^2(Q_T)$. Daí, a unicidade do limite em $L^2(Q_T)$ implica que $v = w$.

Agora, precisamos provar que $w = a_t$. De fato, como $a_k \to a$ em $C(0,T;H^2(\Omega))$, temos que $a_k \to a$ em $L^2(Q_T)$, pois $C(0,T;H^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(Q_T)$. Logo, $a_{k,t} \to a_t$ em $\mathcal{D}'(Q_T)$ pela Observação 1.48. Por outro lado, $a_{k,t} \to w$ em $C(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(Q_T)$ implica que $a_{k,t} \to w$ em $L^2(Q_T)$ e portanto em $\mathcal{D}'(Q_T)$ (Proposição 1.46). Logo, pela unicidade do limite, temos que $a_t = w$.

Extraindo subsequências convergentes nas topologias fraca e fraca*

Por outro lado, pelo Teorema de Kakutani, seu Corolário 1.31 e a Observação 1.32, as desigualdades do Teorema 3.10 também implicam na existência de subsequências a_{k_j} e u_{k_j} de a_k e u_k tais que

$$a_{k_j} \rightharpoonup w_1(= a) \text{ em } L^2(0,T;H^3(\Omega)) \tag{3.62}$$

$$a_{k_j,t} \rightharpoonup w_2(= a_t) \text{ em } L^2(0,T;H^2(\Omega)) \tag{3.63}$$

$$a_{k_j,t,t} \rightharpoonup w_3(= a_{t,t}) \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.64}$$

$$u_{k_j} \rightharpoonup w_4(= u) \text{ em } L^2(0,T;H^2(\Omega)) \tag{3.65}$$

$$u_{k_j,t} \rightharpoonup w_5(= u_t) \text{ em } L^2(0,T;H^1(\Omega)). \tag{3.66}$$

pois $L^\infty(0,T;H^k(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H^k(\Omega))$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, tomando novamente uma subsequência, podemos supor que as subsequências acima também satisfazem

$$a_{k_j} \overset{\star}{\rightharpoonup} w_1'(= a) \text{ em } L^\infty(0,T;H^3(\Omega)) \tag{3.67}$$

$$a_{k_j,t} \overset{\star}{\rightharpoonup} w_2'(= a_t) \text{ em } L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \tag{3.68}$$

$$u_{k_j} \overset{\star}{\rightharpoonup} w_4'(= u) \text{ em } L^\infty(0,T;H^2(\Omega)) \tag{3.69}$$

$$u_{k_j,t} \overset{\star}{\rightharpoonup} w_5'(= u_t) \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.70}$$

pelo teorema de Alaoglu 1.35, seu Corolário 1.41 e o Teorema 3.10.

Além disso, $\|a_k\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))} \leq C$ $\forall k$ e $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ implicam que

$$\|\nabla a_k\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^3)} \leq C\|\nabla a_k\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega)^3)} \leq C\|a_k\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))} \leq C$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ (Proposição 1.14 e Teorema 1.1). Daí, passando para uma subsequência novamente podemos garantir que a_{k_j} também satisfaz

$$\nabla a_{k_j} \overset{\star}{\rightharpoonup} w_6(= \nabla a) \text{ em } L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^3) = L^\infty(Q_T)^3, \tag{3.71}$$

além das convergências acima. (O propósito desta última convergência será evidenciado na Proposição 3.12.)

Afirmação: $w_i = w_i'$, para $i = 1, 2, 4, 5$.

De fato, como $a_{k_j} \overset{\star}{\rightharpoonup} w_1'$ em $L^\infty(0,T;H^3(\Omega))$, a Proposição 1.42 garante que $a_{k_j} \overset{\star}{\rightharpoonup} w_1'$ em $L^2(0,T;H^3(\Omega))$. Por outro lado, $a_{k_j} \rightharpoonup w_1$ em $L^2(0,T;H^3(\Omega))$ implica que $a_{k_j} \overset{\star}{\rightharpoonup} w_1$ em $L^2(0,T;H^3(\Omega))$ (Teorema 1.33). Portanto, pela unicidade do limite, $w_1 = w_1'$.

Analogamente, como $a_{k_j,t} \overset{\star}{\rightharpoonup} w_2'$ em $L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$, temos que $a_{k_j,t} \overset{\star}{\rightharpoonup} w_2'$ em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ (Proposição 1.42). Por outro lado, $a_{k_j,t} \rightharpoonup w_2$ em $L^2(0,T;H^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H^1(\Omega))$ (Teorema 1.2) implica que $a_{k_j,t} \rightharpoonup w_2$ em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$, pela Proposição 1.24. Então, como a convergência na topologia fraca implica a convergência na topologia fraca estrela, temos que $a_{k_j,t} \overset{\star}{\rightharpoonup} w_2$ em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Daí, da unicidade do limite temos $w_2 = w_2'$.

Os casos $w_4 = w_4'$ e $w_5 = w_5'$ são inteiramente análogos.

Afirmação: $w_1 = a$, $w_2 = a_t$, $w_3 = a_{t,t}$, $w_4 = u$, $w_5 = u_t$ e $w_6 = \nabla a$.

Precisamos agora mostrar que os w_i são como esperamos, ou seja que vale a afirmação acima. De fato, como $a_k \to a$ em $C(0,T;H^2(\Omega))$ e a_{k_j} é subsequência de a_k, temos que $a_{k_j} \to a$ em $C(0,T;H^2(\Omega))$ e portanto em $L^2(Q_T)$, pois $C(0,T;H^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(Q_T)$ (Proposição 1.1). Logo, a_{k_j} converge fracamente para a em $L^2(Q_T)$ (Teorema 1.23). Por outro lado, $a_{k_j} \rightharpoonup w_1$ em $L^2(0,T;H^3(\Omega)) \hookrightarrow L^2(Q_T)$ e portanto $a_{k_j} \rightharpoonup w_1$ em $L^2(Q_T)$ (Proposição 1.24). Então, a unicidade do limite fraco implica que $w_1 = a$ como queríamos.

Como visto acima, $a_{k_j} \to a$ em $L^2(Q_T)$ e então a_{k_j} converge para a em $\mathcal{D}'(Q_T)$ (Proposição 1.46), o que implica que $a_{k_j,t} \to a_t$ em $\mathcal{D}'(Q_T)$, (Proposição 1.47). Por outro lado, $a_{k_j,t} \rightharpoonup w_2$ em $L^2(0,T;H^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(Q_T)$ implica que $a_{k_j,t} \rightharpoonup w_2$ em $L^2(Q_T)$ e portanto $a_{k_j,t} \to w_2$ em $\mathcal{D}'(Q_T)$ (Proposições 1.24 e 1.46). Finalmente, pela unicidade do limite, temos que $w_2 = a_t$.

Analogamente, $a_{k,t} \to a_t$ em $C(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(Q_T)$ implica que $a_{k,t,t} \to a_{t,t}$ em $\mathcal{D}'(Q_T)$ pela Observação 1.48. Por outro lado, $a_{k,t,t} \rightharpoonup w_3$ em $L^2(Q_T)$ implica que $a_{k,t,t} \to w_3$ em $\mathcal{D}'(Q_T)$ pela Proposição 1.46. Logo, $w_3 = a_{t,t}$.

Finalmente, como $\nabla a_k \overset{\star}{\rightharpoonup} w_6$ em $L^\infty(Q_T)^3$, então $\nabla a_k \overset{\star}{\rightharpoonup} w_6$ em $L^2(Q_T)^3$, por um argumento análogo ao da Proposição 1.43. Por outro lado, $a_k \to a$ em $C(0,T;H^2(\Omega))$ implica que $\nabla a_k \to \nabla a$ em $C(0,T;H^1(\Omega)^3)$. Daí, $\nabla a_k \to \nabla a$ em

$L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$, pois $C(0,T;H^1(\Omega)^3) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$, e portanto $\nabla a_k \overset{\star}{\rightharpoonup} \nabla a$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$, pela Proposição 1.33. Mas, $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3) = L^2(Q_T)^3$, e então $w_6 = \nabla a$ pela unicidade do limite.

Os casos $w_4 = u$ e $w_5 = u_t$ são análogos.

Conclusão:

Tendo provado isto, faremos um abuso de notação denotando a_{k_j} simplesmente por a_k, no intuito de preservar a simplicidade da simbologia. Então, temos assim que valem as convergências (3.59) – (3.71) para a_k e u_k e, portanto:

Teorema 3.11 *Se $a_0 \in H^3(\Omega)$ e $u_0 \in H^2(\Omega)$, então, $a \in L^\infty(0,T;H^3(\Omega))$, $a_t \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega))$, $a_{t,t} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $u \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$, e $u_t \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Além disso, temos $a \in C(0,T;H^2(\Omega))$, $u \in C(0,T;L^\infty(\Omega)) \cap C(0,T;H^{2-\alpha}(\Omega))$, com $0 < \alpha \leq 1$, e $a_t \in C(0,T;H^1(\Omega))$.*

Prova: Provaremos dois casos e os outros são inteiramente análogos. Como $a_k \overset{\star}{\rightharpoonup} a$ em $L^\infty(0,T;H^3(\Omega))$, o Teorema 1.33 implica que $(\|a_k\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))})$ é limitada e $\|a\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))} \leq \liminf \|a_k\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, existe $C > 0$ tal que $\|a\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))} \leq \liminf \|a_k\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))} \leq C$ e portanto $a \in L^\infty(0,T;H^3(\Omega))$. Analogamente, como $a_{k_j,t,t} \rightharpoonup w_3$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, o Teorema 1.23 nos permite seguir o mesmo raciocínio usado acima.

Além disso, as continuidades seguem trivialmente das convergências fortes de (u_k, a_k) afirmadas no início desta seção, exceto a inclusão $a_t \in C(0,T;H^1(\Omega))$ que segue do teorema de continuidade 1.51 e das estimativas obtidas na primeira parte deste teorema. $\square$

Com isto, já podemos passar o limite no termo não linear.

Proposição 3.12 *As subsequências (u_k), (a_k) de (u_m) e (a_m) encontradas acima satisfazem*

$$\int_0^T \int_\Omega \beta(u_k)\psi'(a_k)\nabla a_k \nabla\varphi_1 \theta(s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \to \int_0^T \int_\Omega \beta(u)\psi'(a)\nabla a \nabla\varphi_1 \theta(s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s$$

para todo $\theta \in L^2(0,T)$ e $\varphi_1 \in H^1(\Omega)$, quando $k \to \infty$.

Prova: Como $\nabla a_k \overset{\star}{\rightharpoonup} \nabla a$ em $L^\infty(Q_T)^3$, por construção, basta provar que

$$\beta(u_k)\psi'(a_k)\nabla\varphi_1\theta(s) \to \beta(u)\psi'(a)\nabla\varphi_1\theta(s) \text{ em } L^1(Q_T)^3$$

e, portanto, o resultado seguirá da Proposição 1.34.

Para tanto, precisaremos do seguinte lema:

Lema 3.13 *Existe uma constante $C_0 > 0$ tal que*

$$|\beta(u_1) - \beta(u_2)| \leq C_0|u_1 - u_2|$$

para todo $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$.

Para provar isto, basta considerar cada caso separadamente e utilizar a definição de β. Por ser uma demonstração longa e mecânica, deixamos a demonstração para o Apêndice B.

Com isto, somando e subtraindo parcelas apropriadas, podemos usar a desigualdade triangular e a desigualdade de Hölder para ver que

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} |[\beta(u_k)\psi'(a_k) - \beta(u)\psi'(a)]\nabla\varphi_1\theta| \,\mathrm{d}z \\
&\quad= \int_{Q_T} \Big|\beta(u_k)[\psi'(a_k) - \psi'(a)] + \psi'(a)[\beta(u_k) - \beta(u)]\Big|\Big|\nabla\varphi_1\theta\Big| \,\mathrm{d}z \\
&\quad\leq \int_{Q_T} |\beta(u_k)||\psi'(a_k) - \psi'(a)||\nabla\varphi_1\theta| \,\mathrm{d}z + \int_{Q_T} |\psi'(a)||\beta(u_k) - \beta(u)||\nabla\varphi_1\theta| \,\mathrm{d}z \\
&\quad\leq \widetilde{M}L \int_{Q_T} |a_k - a||\nabla\varphi_1\theta| \,\mathrm{d}z + LC_0 \int_{Q_T} |u_k - u||\nabla\varphi_1\theta| \,\mathrm{d}z \\
&\quad\leq \widetilde{M}L\|a_k - a\|_{L^2(Q_T)}\|\nabla\varphi_1\theta\|_{L^2(Q_T)^3} + LC_0\|u_k - u\|_{L^2(Q_T)}\|\nabla\varphi_1\theta\|_{L^2(Q_T)^3}
\end{aligned} \tag{3.72}$$

pois ψ' Lipschitz de constante L implica que $|\psi'(a_k) - \psi'(a)| \leq L|a_k - a|$ $\forall k$. Note também que $\varphi_1 \in H^1(\Omega)$ e $\theta \in L^2(0,T)$ implicam que

$$\int_0^T \int_\Omega |\nabla\varphi_1\theta|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}s = \int_0^T |\theta|^2 \int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}s = \|\theta\|^2_{L^2(0,T)}\|\nabla\varphi_1\|^2_{L^2(\Omega)^3} < \infty.$$

Então, as convergências $a_k \to a$ em $C(0,T;H^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(Q_T)$ e $u_k \to u$ em $C(0,T;H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(Q_T)$ implicam que a desigualdade (3.72) tende a zero. Portanto, $\beta(u_k)\psi'(a_k)\nabla\varphi_1\theta(s) \to \beta(u)\psi'(a)\nabla\varphi_1\theta(s)$ em $L^1(Q_T)^3$ e vale a proposição pela discussão inicial. $\square$

Teorema 3.14 *Os limites a e u das subsequências a_k e u_k são de fato soluções do problema auxiliar* (2.4).

Prova: O Teorema 3.11 e a cadeia $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)'$ implicam que $a, u \in W(0,T)$. Além disso, por definição, temos

$$a(0,\cdot) = \lim_{k\to\infty} P_k(a_0) = a_0$$

$$u(0,\cdot) = \lim_{k\to\infty} P_k(u_0) = u_0.$$

Logo, basta provar que

$$\left\langle u_t, \varphi_1 \right\rangle + d_1 \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_1 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \beta(u)\nabla\psi(a)\nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}x, \text{ e} \tag{3.73}$$

$$\left\langle a_t, \varphi_2 \right\rangle + d_2 \int_\Omega \nabla a \nabla \varphi_2 \,\mathrm{d}x + k_2 \int_\Omega a\varphi_2 \,\mathrm{d}x = k_1 \int_\Omega u\varphi_2 \,\mathrm{d}x, \tag{3.74}$$

para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega)$ e quase todo $t \in]0,T[$.

Para tanto, sabemos que para todo $\widetilde{\varphi_1}, \widetilde{\varphi_2} \in W_k$, vale

$$\left\langle u_{k,t}, \widetilde{\varphi_1} \right\rangle + d_1 \int_\Omega \nabla u_k \nabla \widetilde{\varphi_1} \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \beta(u_k)\nabla\psi(a_k)\nabla\widetilde{\varphi_1} \,\mathrm{d}x, \text{ e} \tag{3.75}$$

$$\left\langle a_{k,t}, \widetilde{\varphi_2} \right\rangle + d_2 \int_\Omega \nabla a_k \nabla \widetilde{\varphi_2} \,\mathrm{d}x + k_2 \int_\Omega a_k\widetilde{\varphi_2} \,\mathrm{d}x = k_1 \int_\Omega u_k\widetilde{\varphi_2} \,\mathrm{d}x. \tag{3.76}$$

Então, temos que se $\theta \in L^2(0,T)$,

$$\int_0^T \left\langle u_{k,t}, \widetilde{\varphi_1} \right\rangle \theta \,\mathrm{d}s + d_1 \int_{Q_T} \nabla u_k \nabla \widetilde{\varphi_1}\theta \,\mathrm{d}z = \int_{Q_T} \beta(u_k)\nabla\psi(a_k)\nabla\widetilde{\varphi_1}\theta \,\mathrm{d}z, \text{ e} \tag{3.77}$$

$$\int_0^T \left\langle a_{k,t}, \widetilde{\varphi_2} \right\rangle \theta \,\mathrm{d}s + d_2 \int_{Q_T} \nabla a_k \nabla \widetilde{\varphi_2}\theta \,\mathrm{d}z + k_2 \int_{Q_T} a_k\widetilde{\varphi_2}\theta \,\mathrm{d}z = k_1 \int_{Q_T} u_k\widetilde{\varphi_2}\theta \,\mathrm{d}z. \tag{3.78}$$

De fato, por um lado, temos para $i = 1, 2$ que

$$\int_{Q_T} |\widetilde{\varphi}_i\theta|^2 \,\mathrm{d}z = \|\widetilde{\varphi}_i\|^2_{L^2(\Omega)} \|\theta\|^2_{L^2(0,T)} \leq \|\widetilde{\varphi}_i\|^2_{H^1(\Omega)} \|\theta\|^2_{L^2(0,T)} < \infty$$

$$\int_{Q_T} |\nabla\widetilde{\varphi}_i\theta|^2 \,\mathrm{d}z = \|\nabla\widetilde{\varphi}_i\|^2_{L^2(\Omega)^3} \|\theta\|^2_{L^2(0,T)} \leq \|\widetilde{\varphi}_i\|^2_{H^1(\Omega)} \|\theta\|^2_{L^2(0,T)} < \infty.$$

Por outro lado, o Teorema 3.10 garante em particular que $u_{k,t}$, $a_{k,t}$, a_k, $u_k \in L^2(Q_T)$, e ∇u_k, $\beta(u_k)\nabla\psi(a_k)$, $\nabla a_k \in L^2(Q_T)^3$, que são limitações suficientes para garantir que as integrais em (3.77) e (3.78) sejam finitas. Para provar isto, basta usar a desigualdade de Hölder termo a termo.

Agora, para passar o limite $k \to \infty$, fixe inicialmente $\overline{m} \in \mathbb{N}$ e $\widetilde{\varphi_1}, \widetilde{\varphi_2} \in W_{\overline{m}}$. Assim, temos pela definição dos espaços W_k que $\widetilde{\varphi_1}, \widetilde{\varphi_2} \in W_{\overline{m}} \subset W_k$ para todo $k \geq \overline{m}$ e, em particular, valem as igualdades (3.77) e (3.78) $\forall k \geq \overline{m}$. Logo, podemos tomar o limite nestas igualdades se consideramos $k \geq \overline{m}$.

Já sabemos, pela Proposição 3.12, que para todo $\theta \in L^2(0,T)$,

$$\int_{Q_T} \beta(u_k)\nabla\psi(a_k)\nabla\widetilde{\varphi_1}\theta \, \mathrm{d}z \longrightarrow \int_{Q_T} \beta(u)\nabla\psi(a)\nabla\widetilde{\varphi_1}\theta \, \mathrm{d}z,$$

então, basta provar que os outros termos também convergem como esperado. De fato, como $u_k \to u$ em $C(0,T;H^1(\Omega))$, em particular, temos $u_k \to u$ em $L^2(Q_T)$ e $\nabla u_k \to \nabla u$ em $L^2(Q_T)^3$ (Proposição 1.14) e, portanto, pela desigualdade de Hölder

$$\left| \int_{Q_T} \big(u_k - u\big)\widetilde{\varphi_2}\theta \, \mathrm{d}z \right| \leq \|\widetilde{\varphi_2}\theta\|_{L^2(Q_T)} \|u_k - u\|_{L^2(Q_T)} \to 0$$
$$\left| \int_{Q_T} \nabla(u_k - u)\nabla\widetilde{\varphi_1}\theta \, \mathrm{d}z \right| \leq \|\nabla\widetilde{\varphi_1}\theta\|_{L^2(Q_T)^3} \|\nabla(u_k - u)\|_{L^2(Q_T)^3} \to 0.$$

Analogamente, $a_k \to a$ em $C(0,T;H^2(\Omega))$ implica em particular que $a_k \to a$ em $L^2(Q_T)$ e $\nabla a_k \to \nabla a$ em $L^2(Q_T)^3$ (Proposição 1.14) e, portanto, pela desigualdade de Hölder

$$\left| \int_{Q_T} (a_k - a)\widetilde{\varphi_2}\theta \, \mathrm{d}z \right| \leq \|\widetilde{\varphi_2}\theta\|_{L^2(Q_T)} \|a_k - a\|_{L^2(Q_T)} \to 0$$
$$\left| \int_{Q_T} \nabla(a_k - a)\nabla\widetilde{\varphi_2}\theta \, \mathrm{d}z \right| \leq \|\nabla\widetilde{\varphi_2}\theta\|_{L^2(Q_T)^3} \|\nabla(a_k - a)\|_{L^2(Q_T)^3} \to 0.$$

Finalmente, como $u_{k,t} \rightharpoonup u_t$ em $L^2(0,T;H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(Q_T)$ e também $a_{k,t} \rightharpoonup a_t$ em $L^2(0,T;H^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(Q_T)$, a Proposição 1.28 e $\widetilde{\varphi}_i\theta \in L^2(Q_T)$, $\forall i = 1,2$ implicam que

$$\left| \int_0^T \big\langle u_t, \widetilde{\varphi_1}\big\rangle\theta \, \mathrm{d}s - \int_0^T \big\langle u_{k,t}, \widetilde{\varphi_1}\big\rangle\theta \, \mathrm{d}s \right| = \left| \int_{Q_T} (u_t - u_{k,t})\widetilde{\varphi_1}\theta \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s \right| \to 0$$
$$\left| \int_0^T \big\langle a_t, \widetilde{\varphi_2}\big\rangle\theta \, \mathrm{d}s - \int_0^T \big\langle a_{k,t}, \widetilde{\varphi_2}\big\rangle\theta \, \mathrm{d}s \right| = \left| \int_{Q_T} (a_t - a_{k,t})\widetilde{\varphi_2}\theta \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s \right| \to 0.$$

Logo, tomando o limite $k \to \infty$ nas igualdades (3.77) e (3.78), vemos que

$$\int_0^T \langle u_t, \widetilde{\varphi_1} \rangle \theta \,\mathrm{d}s + d_1 \int_{Q_T} \nabla u \nabla \widetilde{\varphi_1} \theta \,\mathrm{d}z = \int_{Q_T} \beta(u) \nabla \psi(a) \nabla \widetilde{\varphi_1} \theta \,\mathrm{d}z, \text{ e} \tag{3.79}$$

$$\int_0^T \langle a_t, \widetilde{\varphi_2} \rangle \theta \,\mathrm{d}s + d_2 \int_{Q_T} \nabla a \nabla \widetilde{\varphi_2} \theta \,\mathrm{d}z + k_2 \int_{Q_T} a \widetilde{\varphi_2} \theta \,\mathrm{d}z = k_1 \int_{Q_T} u \widetilde{\varphi_2} \theta \,\mathrm{d}z \tag{3.80}$$

para todo $\widetilde{\varphi_1}, \widetilde{\varphi_2} \in W_{\overline{m}}$ e $\theta \in L^2(0,T)$. Mas note que estas igualdades independem de $\overline{m}$. Além disso, como $\overline{m}$ é arbitrária, temos que o processo pode ser repetido para qualquer $m \in \mathbb{N}$. Portanto, obtemos assim que as igualdades (3.79) e (3.80) valem para todo $\widetilde{\varphi_1}, \widetilde{\varphi_2} \in W := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} W_m$ e $\theta \in L^2(0,T)$.

Finalmente, provaremos que as igualdades (3.79) e (3.80) valem para todo $\varphi_1 \in H^1(\Omega)$ e $\varphi_2 \in H^1(\Omega)$. Para tanto, sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega)$ quaisquer. Como W é denso em $H^1(\Omega)$, existem $\{\varphi_\nu^1\}_{\nu=1}^\infty \subset W$ e $\{\varphi_\nu^2\}_{\nu=1}^\infty \subset W$ tais que $\varphi_\nu^1 \to \varphi_1$ e $\varphi_\nu^2 \to \varphi_2$ em $H^1(\Omega)$ se $\nu \to \infty$. Desta forma, $\{\varphi_\nu^1\}_{\nu=1}^\infty \subset W$ e $\{\varphi_\nu^2\}_{\nu=1}^\infty \subset W$, implicam que φ_ν^1 e φ_ν^2 satisfazem às igualdades (3.79) e (3.80) para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Faremos agora com φ_ν^1 e φ_ν^2 um processo análogo ao feito com as sequências $\{u_k\}$ e $\{a_k\}$ com o intuito de passar o limite $\nu \to \infty$ em

$$\int_0^T \langle u_t, \varphi_\nu^1 \rangle \theta \,\mathrm{d}s + d_1 \int_{Q_T} \nabla u \nabla \varphi_\nu^1 \theta \,\mathrm{d}z = \int_{Q_T} \beta(u) \nabla \psi(a) \nabla \varphi_\nu^1 \theta \,\mathrm{d}z, \tag{3.81}$$

$$\int_0^T \langle a_t, \varphi_\nu^2 \rangle \theta \,\mathrm{d}s + d_2 \int_{Q_T} \nabla a \nabla \varphi_\nu^2 \theta \,\mathrm{d}z + k_2 \int_{Q_T} a \varphi_\nu^2 \theta \,\mathrm{d}z = k_1 \int_{Q_T} u \varphi_\nu^2 \theta \,\mathrm{d}z. \tag{3.82}$$

Para tanto, usamos a desigualdade de Hölder repetidamente para provar que:

$$\left| \int_0^T \langle u_t, \varphi_\nu^1 - \varphi_1 \rangle \theta \,\mathrm{d}s \right| \le \|\theta\|_{L^2(0,T)} \|\varphi_\nu^1 - \varphi_1\|_{L^2(\Omega)} \|u_t\|_{L^2(Q_T)}$$

$$\left| \int_0^T \langle a_t, \varphi_\nu^2 - \varphi_2 \rangle \theta \,\mathrm{d}s \right| \le \|\theta\|_{L^2(0,T)} \|\varphi_\nu^2 - \varphi_2\|_{L^2(\Omega)} \|a_t\|_{L^2(Q_T)}$$

$$\left| \int_{Q_T} \nabla u \nabla (\varphi_\nu^1 - \varphi_1) \theta \,\mathrm{d}z \right| \le \|\theta\|_{L^2(0,T)} \|\varphi_\nu^1 - \varphi_1\|_{H^1(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(Q_T)^3}$$

$$\left| \int_{Q_T} \nabla a \nabla (\varphi_\nu^2 - \varphi_2) \theta \,\mathrm{d}z \right| \le \|\theta\|_{L^2(0,T)} \|\varphi_\nu^2 - \varphi_2\|_{H^1(\Omega)} \|\nabla a\|_{L^2(Q_T)^3}$$

$$\left| \int_{Q_T} \beta(u) \nabla \psi(a) \nabla (\varphi_\nu^1 - \varphi_1) \theta \,\mathrm{d}z \right| \le C \|\theta\|_{L^2(0,T)} \|\varphi_\nu^1 - \varphi_1\|_{H^1(\Omega)} \|\nabla a\|_{L^\infty(Q_T)^3}$$

$$\left|\int_{Q_T} a(\varphi_\nu^2 - \varphi_2)\theta \,\mathrm{d}z\right| \leq \|\theta\|_{L^2(0,T)}\|\varphi_\nu^2 - \varphi_2\|_{L^2(\Omega)}\|a\|_{L^2(Q_T)}$$
$$\left|\int_{Q_T} u(\varphi_\nu^2 - \varphi_2)\theta \,\mathrm{d}z\right| \leq \|\theta\|_{L^2(0,T)}\|\varphi_\nu^2 - \varphi_2\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(Q_T)}$$

e portanto o Teorema 3.11 e as convergências $\varphi_\nu^1 \to \varphi_1$ e $\varphi_\nu^2 \to \varphi_2$ em $H^1(\Omega)$ implicam que de fato podemos passar o limite $\nu \to \infty$ nas equações (3.81) e (3.82) para obter, pela unicidade do limite:

$$\int_0^T \langle u_t, \varphi_1\rangle\theta \,\mathrm{d}s + d_1 \int_{Q_T} \nabla u \nabla\varphi_1\theta \,\mathrm{d}z = \int_{Q_T} \beta(u)\nabla\psi(a)\nabla\varphi_1\theta \,\mathrm{d}z, \text{ e} \tag{3.83}$$
$$\int_0^T \langle a_t, \varphi_2\rangle\theta \,\mathrm{d}s + d_2 \int_{Q_T} \nabla a \nabla\varphi_2\theta \,\mathrm{d}z + k_2\int_{Q_T} a\varphi_2\theta \,\mathrm{d}z = k_1\int_{Q_T} u\varphi_2\theta \,\mathrm{d}z \tag{3.84}$$

para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega)$ e $\theta \in L^2(0,T)$.

Agora, afirmamos que

$$\big\langle u_t, \varphi_1\big\rangle + d_1 \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \beta(u)\nabla\psi(a)\nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}x \in L^1(0,T) \text{ e} \tag{3.85}$$
$$\big\langle a_t, \varphi_2\big\rangle + d_2 \int_\Omega \nabla a \nabla\varphi_2 \,\mathrm{d}x + k_2\int_\Omega a\varphi_2 - k_1\int_\Omega u\varphi_2 \,\mathrm{d}x \in L^1(0,T). \tag{3.86}$$

De fato, para provar isto, basta tomar a integral do módulo de cada termo acima em $[0,T]$ e aplicar a desigualdade de Hölder. Então, o teorema 3.11 junto com o fato de que $\varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega)$ implicam que cada termo está em $L^1(0,T)$ e, portanto, valem as inclusões (3.85) e (3.86). Daí, como $\mathcal{D}(0,T) \subset L^2(0,T)$, as igualdades (3.83) e (3.84) valem para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e assim o Lema de Du Bois Raymond implica que

$$\big\langle u_t, \varphi_1\big\rangle + d_1 \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \beta(u)\nabla\psi(a)\nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}x$$
$$\big\langle a_t, \varphi_2\big\rangle + d_2 \int_\Omega \nabla a \nabla\varphi_2 \,\mathrm{d}x + k_2\int_\Omega a\varphi_2 = k_1\int_\Omega u\varphi_2 \,\mathrm{d}x$$

quase sempre em $]0,T[$ para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega)$ e logo (u,a) é de fato solução do problema auxiliar (2.4). $\square$

Em suma, nesta seção chegamos ao seguinte resultado:

Teorema 3.15 *Se $a_0 \in H^3(\Omega)$ e $u_0 \in H^2(\Omega)$, então existe uma solução (u, a) do problema auxiliar* (2.4). *Além disso,*

$$\begin{aligned}
u &\in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)) \cap C(0,T;H^{2-\alpha}(\Omega)) \cap C(0,T;L^\infty(\Omega)) \\
u_t &\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)) \\
a &\in L^\infty(0,T;H^3(\Omega)) \cap C(0,T;H^2(\Omega)) \\
a_t &\in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap C(0,T;H^1(\Omega)) \\
a_{t,t} &\in L^2(0,T;L^2(\Omega)).
\end{aligned}$$

3.3 Unicidade de solução fraca

Tendo demonstrado a existência de uma solução do problema auxiliar, é possível provar a unicidade de tal solução, que implicará na unicidade da solução local e posteriormente na unicidade da solução em Q_T do problema original (2.1). Para tanto, sejam (u, a) e $(\widehat{u}, \widehat{a})$ duas soluções do problema auxiliar (2.4), com condições iniciais (u_0, a_0) e $(\widehat{u}_0, \widehat{a}_0)$, respectivamente. Então, em particular, $a, \widehat{a} \in C(0,T;H^2(\Omega))$, $u, \widehat{u} \in C(0,T;H^1(\Omega))$ (Teorema 3.11) e temos

$$\left\langle u_t, \varphi_1 \right\rangle + d_1 \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_1 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \beta(u) \nabla \psi(a) \nabla \varphi_1 \,\mathrm{d}x \tag{3.87}$$

$$\left\langle \widehat{u}_t, \varphi_1 \right\rangle + d_1 \int_\Omega \nabla \widehat{u} \nabla \varphi_1 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \beta(\widehat{u}) \nabla \psi(\widehat{a}) \nabla \varphi_1 \,\mathrm{d}x \tag{3.88}$$

$$\left\langle a_t, \varphi_2 \right\rangle + d_2 \int_\Omega \nabla a \nabla \varphi_2 \,\mathrm{d}x + k_2 \int_\Omega a \varphi_2 \,\mathrm{d}x = k_1 \int_\Omega u \varphi_2 \,\mathrm{d}x \tag{3.89}$$

$$\left\langle \widehat{a}_t, \varphi_2 \right\rangle + d_2 \int_\Omega \nabla \widehat{a} \nabla \varphi_2 \,\mathrm{d}x + k_2 \int_\Omega \widehat{a} \varphi_2 \,\mathrm{d}x = k_1 \int_\Omega \widehat{u} \varphi_2 \,\mathrm{d}x \tag{3.90}$$

$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega)$ qtp $t \in]0, T[$ e

$$\begin{aligned}
u(0,\cdot) &= u_0 \qquad & a(0,\cdot) &= a_0 \\
\widehat{u}(0,\cdot) &= \widehat{u}_0 \qquad & \widehat{a}(0,\cdot) &= \widehat{a}_0.
\end{aligned}$$

Logo, subtraindo (3.90) de (3.89), temos para todo $\varphi_2 \in H^1(\Omega)$

$$\left\langle (a - \widehat{a})_t, \varphi_2 \right\rangle + d_2 \int_\Omega \nabla (a - \widehat{a}) \nabla \varphi_2 \,\mathrm{d}x + k_2 \int_\Omega (a - \widehat{a}) \varphi_2 \,\mathrm{d}x = k_1 \int_\Omega (u - \widehat{u}) \varphi_2 \,\mathrm{d}x$$

quase sempre em $]0,T[$. Agora, note que $a, \widehat{a} \in C(0,T;H^2(\Omega))$ e, portanto, $a(t) - \widehat{a}(t) \in H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$ para todo $t \in]0,T[$. Assim, podemos escolher $\varphi_2 = a(t) - \widehat{a}(t)$ na igualdade anterior e obter, pela desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|a-\widehat{a}\|^2_{L^2(\Omega)} + d_2\|\nabla(a-\widehat{a})\|^2_{L^2(\Omega)^3} + k_2\|a-\widehat{a}\|^2_{L^2(\Omega)} &= k_1\int_\Omega (u-\widehat{u})(a-\widehat{a})\,\mathrm{d}x\\ &\leq k_1\epsilon\|a-\widehat{a}\|^2_{L^2(\Omega)} + k_1C(\epsilon)\|u-\widehat{u}\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \text{qtp } t\in]0,T[.\end{aligned}$$

Então, escolhendo $\epsilon = \frac{k_2}{2k_1}$ na desigualdade anterior, temos $C(\epsilon) = \frac{k_1}{2k_2}$ e

$$\frac{d}{dt}\|a-\widehat{a}\|^2_{L^2(\Omega)} + 2d_2\|\nabla(a-\widehat{a})\|^2_{L^2(\Omega)^3} + k_2\|a-\widehat{a}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{{k_1}^2}{k_2}\|u-\widehat{u}\|^2_{L^2(\Omega)},$$

e em particular, reagrupando temos

$$\|\nabla(a-\widehat{a})\|^2_{L^2(\Omega)^3} \leq \frac{{k_1}^2}{2d_2k_2}\|u-\widehat{u}\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2d_2}\frac{d}{dt}\|a-\widehat{a}\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{k_2}{2d_2}\|a-\widehat{a}\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.91}$$

Por outro lado, fazendo o mesmo processo sobre as equações (3.88) e (3.87), temos

$$\left\langle (u-\widehat{u})_t, \varphi_1\right\rangle + d_1\int_\Omega \nabla(u-\widehat{u})\nabla\varphi_1\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \Big[\beta(u)\nabla\psi(a) - \beta(\widehat{u})\nabla\psi(\widehat{a})\Big]\nabla\varphi_1\,\mathrm{d}x.$$

Já provamos que $u, \widehat{u} \in C(0,T;H^1(\Omega))$ e assim $u(t) - \widehat{u}(t) \in H^1(\Omega)$ para todo $t \in [0,T]$. Logo, escolhendo $\varphi_1 = u(t) - \widehat{u}(t)$, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u-\widehat{u}\|^2_{L^2(\Omega)} + d_1\|\nabla(u-\widehat{u})\|^2_{L^2(\Omega)^3} = \int_\Omega \Big[\beta(u)\nabla\psi(a) - \beta(\widehat{u})\nabla\psi(\widehat{a})\Big]\nabla(u-\widehat{u})\,\mathrm{d}x \tag{3.92}$$

quase sempre.

Agora, note que somando e subtraindo parcelas apropriadas podemos chegar à seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Big[\beta(u)\nabla\psi(a) - \beta(\widehat{u})\nabla\psi(\widehat{a})\Big]\nabla(u-\widehat{u})\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \beta(u)\psi'(a)\nabla(a-\widehat{a})\nabla(u-\widehat{u})\,\mathrm{d}x\\ &+ \int_\Omega \beta(u)(\psi'(a)-\psi'(\widehat{a}))\nabla\widehat{a}\nabla(u-\widehat{u})\,\mathrm{d}x\\ &+ \int_\Omega (\beta(u)-\beta(\widehat{u}))\nabla\psi(\widehat{a})\nabla(u-\widehat{u})\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Então, pela desigualdade de Young, segue da desigualdade acima que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Big[\beta(u)\nabla\psi(a) - \beta(\widehat{u})\nabla\psi(\widehat{a})\Big]\nabla(u-\widehat{u})\,\mathrm{d}x&\\ \leq 3\epsilon\|\nabla(u-\widehat{u})\|^2_{L^2(\Omega)^3} + C(\epsilon)\Big(&\|\beta(u)\psi'(a)\nabla(a-\widehat{a})\|^2_{L^2(\Omega)^3}\\ + \|\beta(u)(\psi'(a)-\psi'(\widehat{a}))\nabla\widehat{a}\|^2_{L^2(\Omega)^3} &+ \|(\beta(u)-\beta(\widehat{u}))\nabla\psi(\widehat{a})\|^2_{L^2(\Omega)^3}\Big).\end{aligned} \tag{3.93}$$

No entanto, observe que pela definição do truncamento e por ψ e ψ' serem Lipschitz, temos

$$\begin{aligned}\|\beta(u)\|_{L^\infty(Q_T)} \leq \widetilde{M} \qquad \|\psi'(a)\|_{L^\infty(Q_T)} \leq L\\ \|\beta'(u)\|_{L^\infty(Q_T)} \leq 1 \qquad \|\psi''(a)\|_{L^\infty(Q_T)} \leq L\\ \|\psi'(a)-\psi'(\widehat{a})\|_{L^2(\Omega)} \leq L\|a-\widehat{a}\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Além disso, pelo Lema 3.13, existe $C_0 > 0$ tal que

$$\|\beta(u)-\beta(\widehat{u})\|_{L^2(\Omega)} \leq C_0\|u-\widehat{u}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Utilizando as majorações apresentadas acima, a desigualdade (3.93) implica que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Big[\beta(u)\nabla\psi(a) - \beta(\widehat{u})\nabla\psi(\widehat{a})\Big]\nabla(u-\widehat{u})\,\mathrm{d}x&\\ \leq 3\epsilon\|\nabla(u-\widehat{u})\|^2_{L^2(\Omega)^3} + C(\epsilon)\Big(&\widetilde{M}^2L^2\|\nabla(a-\widehat{a})\|^2_{L^2(\Omega)^3}\\ + \widetilde{M}^2L^2\|\nabla\widehat{a}\|^2_{L^\infty(\Omega)^3}\|a-\widehat{a}\|^2_{L^2(\Omega)} &+ {C_0}^2L^2\|\nabla\widehat{a}\|^2_{L^\infty(\Omega)^3}\|u-\widehat{u}\|^2_{L^2(\Omega)}\Big).\end{aligned} \tag{3.94}$$

Juntando (3.92), (3.91) e (3.94) podemos concluir que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Bigg[\|u-\widehat{u}\|^2_{L^2(\Omega)} + C(\epsilon)\frac{\widetilde{M}^2L^2}{d_2}\|a-\widehat{a}\|^2_{L^2(\Omega)}\Bigg]&\\ + C(\epsilon)\frac{\widetilde{M}^2L^2k_2}{2d_2}&\|a-\widehat{a}\|^2_{L^2(\Omega)} + d_1\|\nabla(u-\widehat{u})\|^2_{L^2(\Omega)^3}\\ \leq 3\epsilon&\|\nabla(u-\widehat{u})\|^2_{L^2(\Omega)^3}\\ + C(\epsilon)&\Bigg[\Bigg(\frac{\widetilde{M}^2L^2{k_1}^2}{2d_2k_2} + {C_0}^2L^2\|\nabla\widehat{a}\|^2_{L^\infty(\Omega)^3}\Bigg)\|u-\widehat{u}\|^2_{L^2(\Omega)}\\ + \widetilde{M}^2&L^2\|\nabla\widehat{a}\|^2_{L^\infty(\Omega)^3}\|a-\widehat{a}\|^2_{L^2(\Omega)}\Bigg].\end{aligned}$$

Agora, defina $K := \max(\frac{3L^2}{d_1}, \frac{2d_2}{C_0{}^2})$ e escolha $\epsilon = \frac{d_1}{6}$. Então, $C(\epsilon) = \frac{3}{2d_1}$ e segue da desigualdade acima que

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\|u-\widehat{u}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{3\widetilde{M}^2L^2}{2d_1d_2}\|a-\widehat{a}\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \\
&\qquad + \frac{3\widetilde{M}^2L^2k_2}{2d_1d_2}\|a-\widehat{a}\|^2_{L^2(\Omega)} + d_1\|\nabla(u-\widehat{u})\|^2_{L^2(\Omega)^3} \\
&\qquad \le K\left(\frac{\widetilde{M}^2{k_1}^2}{2d_2k_2} + {C_0}^2\|\nabla\widehat{a}\|^2_{L^\infty(\Omega)^3}\right)\left(\|u-\widehat{u}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{3\widetilde{M}^2L^2}{2d_1d_2}\|a-\widehat{a}\|^2_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned}
$$

Finalmente, integrando a desigualdade anterior em $[0,t]$, temos

$$
\begin{aligned}
&\|u(t)-\widehat{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{3\widetilde{M}^2L^2}{2d_1d_2}\|a(t)-\widehat{a}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \frac{3\widetilde{M}^2L^2k_2}{2d_1d_2}\int_0^t \|a-\widehat{a}\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s + d_1\int_0^t \|\nabla(u-\widehat{u})\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s \\
&\quad \le \|u_0-\widehat{u}_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{3\widetilde{M}^2L^2}{2d_1d_2}\|a_0-\widehat{a}_0\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + K\int_0^t \left(\frac{\widetilde{M}^2{k_1}^2}{2d_2k_2} + {C_0}^2\|\nabla\widehat{a}\|^2_{L^\infty(\Omega)^3}\right)\left(\|u-\widehat{u}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{3\widetilde{M}^2L^2}{2d_1d_2}\|a-\widehat{a}\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

e aplicando a desigualdade de Gronwall, concluimos que

$$
\begin{aligned}
&\|u(t)-\widehat{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{3\widetilde{M}^2L^2}{2d_1d_2}\|a(t)-\widehat{a}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad \le \left(\|u_0-\widehat{u}_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{3\widetilde{M}^2L^2}{2d_1d_2}\|a_0-\widehat{a}_0\|^2_{L^2(\Omega)}\right)e^{K\int_0^t\left(\frac{\widetilde{M}^2{k_1}^2}{2d_2k_2} + {C_0}^2\|\nabla\widehat{a}\|^2_{L^\infty(\Omega)^3}\right)\mathrm{d}s}.
\end{aligned}
\tag{3.95}
$$

Agora, note que $a \in L^\infty(0,T;H^3(\Omega))$ implica que $\nabla a \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)^3)$ e portanto $\nabla a \in L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^3)$, pois $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ (Teorema 1.1). Então, existe $C>0$ independente de t e das condições iniciais $a_0, \widehat{a}_0, u_0$ e $\widehat{u}_0$ tal que

$$
K\int_0^t \Big(\frac{\widetilde{M}^2{k_1}^2}{2d_2k_2} + {C_0}^2\|\nabla\widehat{a}\|^2_{L^\infty(\Omega)^3}\Big)\,\mathrm{d}s \le KT\frac{\widetilde{M}^2{k_1}^2}{2d_2k_2} + {C_0}^2T\|\nabla\widehat{a}\|^2_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^3)} \le C.
\tag{3.96}
$$

Então, as desigualdades (3.95) e (3.96) implicam que

$$\|u(t)-\widehat{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \le C\bigg(\|u_0-\widehat{u}_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{3\widetilde{M}^2L^2}{2d_1d_2}\|a_0-\widehat{a}_0\|^2_{L^2(\Omega)}\bigg)$$

e

$$\|a(t)-\widehat{a}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \le C\frac{2d_1d_2}{3\widetilde{M}^2L^2}\bigg(\|u_0-\widehat{u}_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{3\widetilde{M}^2L^2}{2d_1d_2}\|a_0-\widehat{a}_0\|^2_{L^2(\Omega)}\bigg).$$

Em suma, com as duas desigualdades acima, vemos que se $a_0 = \widehat{a}_0$ e $u_0 = \widehat{u}_0$ em $L^2(\Omega)$, então $a(t) = \widehat{a}(t)$ e $u(t) = \widehat{u}(t)$ em $L^2(\Omega)$ para quase todo $t \in]0,T[$. Logo, a solução (u,a) do problema auxiliar é única em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$.

3.4 Existência e unicidade de solução forte

Para provar que (u,a) é solução forte, mostraremos que $u \in C_s(0,T;H^2(\Omega))$ e $a \in C_s(0,T;H^3(\Omega))$ e que

$$\begin{aligned} &u_t - d_1\Delta u = -\operatorname{div}[\beta(u)\nabla\psi(a)] \text{ em } C_s(0,T;L^2(\Omega)) \\ &a_t - d_2\Delta a + k_2 a = k_1 u \text{ em } C(0,T;L^2(\Omega)) \text{ e } C_s(0,T;H^1(\Omega)), \end{aligned}$$

onde $C_s(0,T;X)$, com X Banach, é o espaço das funções em $L^\infty(0,T;X)$ que são contínuas de $[0,T] \to X$ quando se considera a topologia fraca em X. (Ver Lema 1.53.)

Para tanto, começamos com a seguinte proposição:

Proposição 3.16 *Se $a_0 \in H^3(\Omega)$ e $u_0 \in H^2(\Omega)$, então*

$$\begin{aligned} &u_t - d_1\Delta u = -\operatorname{div}[\beta(u)\nabla\psi(a)] \ \textit{em}\ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \\ &a_t - d_2\Delta a + k_2 a = k_1 u \ \textit{em}\ C(0,T;L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Prova: De fato, no Teorema 3.14 provamos que (u,a) satisfaz

$$\langle u_t, \varphi_1\rangle + d_1\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi_1\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \beta(u)\nabla\psi(a)\nabla\varphi_1\,\mathrm{d}x$$

quase sempre em $]0,T[$ para todo $\varphi_1 \in H^1(\Omega)$. Além disso, pelo Teorema 3.11, temos que $u_t \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ e então $\big\langle u_t, \varphi_1 \big\rangle = (u_t, \varphi_1)$ quase sempre em $]0,T[$. Logo, pela identidade de Green,

$$\int_\Omega \big[u_t - d_1\Delta u + \operatorname{div}[\beta(u)\nabla\psi(a)]\big]\varphi_1 \,\mathrm{d}x = 0 \tag{3.97}$$

quase sempre em $]0,T[$, para todo $\varphi_1 \in H^1(\Omega)$ e, em particular, para todo $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega)$, pois $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ (Proposição 1.46).

Por outro lado, via um cálculo análogo ao da Proposição 3.7 (trocando (u_m, a_m) por (u,a)), as regularidades de (u,a) provadas no Teorema 3.11 implicam que $u_t - d_1\Delta u + \operatorname{div}[\beta(u)\nabla\psi(a)] \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ e, portanto,

$$u_t(t) - d_1\Delta u(t) + \operatorname{div}[\beta(u(t))\nabla\psi(a(t))] \in L^2(\Omega)$$

quase sempre em $]0,T[$.

Então, existe um $N \subset]0,T[$ de medida nula tal que em $]0,T[\backslash N$ temos

$$\int_\Omega \big[u_t(t) - d_1\Delta u(t) + \operatorname{div}[\beta(u(t))\nabla\psi(a(t))]\big]\varphi_1 \,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall\varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega), \text{ e}$$
$$u_t(t) - d_1\Delta u(t) + \operatorname{div}[\beta(u(t))\nabla\psi(a(t))] \in L^2(\Omega).$$

Logo, pelo Lema de Du Bois Raymond, podemos concluir que

$$u_t(t) - d_1\Delta u(t) = -\operatorname{div}[\beta(u(t))\nabla\psi(a(t))]$$

quase sempre em Ω para todo $t \in]0,T[\backslash N$, ou seja,

$$u_t - d_1\Delta u = -\operatorname{div}[\beta(u)\nabla\psi(a)] \text{ quase sempre em } [0,T]\times\Omega.$$

No entanto, cada termo na igualdade acima está contido em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ (Teorema 3.11) e então a igualdade de fato vale em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$.

Analogamente, pela regularidade de a e u provadas no Teorema 3.11, temos que $a_t - d_2\Delta a + k_2 a - k_1 u \in C(0,T;L^2(\Omega))$ e assim $a_t(t) - d_2\Delta a(t) + k_2 a(t) - k_1 u(t) \in L^2(\Omega)$ para todo $t \in]0,T[$. Então, podemos aplicar o mesmo raciocínio usado acima para concluir que

$$a_t - d_2\Delta a + k_2 a = k_1 u \text{ quase sempre em } [0,T]\times\Omega.$$

Mas, como todas as parcelas na igualdade acima estão em $C(0,T;L^2(\Omega))$, então a igualdade vale em $C(0,T;L^2(\Omega))$. $\square$

Além disso, pelo Lema 1.53 e as regularidades já provadas podemos concluir que:

Proposição 3.17 *Se* $a_0 \in H^3(\Omega)$, $u_0 \in H^2(\Omega)$, *então* $u \in C_s(0,T;H^2(\Omega))$ *e* $a \in C_s(0,T;H^3(\Omega))$.

Prova: Lembre que, pelo Lema 1.53,

$$L^\infty(0,T;H^2(\Omega)) \cap C_s(0,T;H^1(\Omega)) = C_s(0,T;H^2(\Omega)),$$

pois $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$ (Teorema 1.2) e $H^2(\Omega)$ é reflexivo. Além disso, o Teorema 3.11 e a Proposição 1.54 implicam que $u \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$ e $u \in C(0,T;H^1(\Omega)) \subset C_s(0,T;H^1(\Omega))$. Logo, pela igualdade de conjuntos acima, temos que de fato $u \in C_s(0,T;H^2(\Omega))$.

O caso de a é análogo, pois

$$\begin{aligned} a &\in L^\infty(0,T;H^3(\Omega)) \cap C(0,T;H^2(\Omega)) \\ &\subset L^\infty(0,T;H^3(\Omega)) \cap C_s(0,T;H^2(\Omega)) = C_s(0,T;H^3(\Omega)), \end{aligned}$$

pelo mesmo raciocínio utilizado no parágrafo anterior. $\square$

Então, com a proposição anterior podemos provar que [*]:

Proposição 3.18 *Se* $a_0 \in H^3(\Omega)$, $u_0 \in H^2(\Omega)$ *e* $M \geq 1$, *então a solução* (u,a) *do problema auxiliar satisfaz*

$$u_t - d_1\Delta u = -\operatorname{div}[\beta(u)\nabla\psi(a)] \text{ em } C_s(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.98}$$

$$a_t - d_2\Delta a + k_2 a = k_1 u \text{ em } C_s(0,T;H^1(\Omega)). \tag{3.99}$$

Prova: A igualdade (3.99) resulta das regularidades que já provamos. De fato, note que $a \in C_s(0,T;H^3(\Omega))$ implica que $\Delta a \in C_s(0,T;H^1(\Omega))$, pela Proposição 1.58, e então vale a igualdade (3.99), pois a_t, a e u estão contidos em $C(0,T;H^1(\Omega)) \subset C_s(0,T;H^1(\Omega))$ (Teorema 3.11, Proposição 1.55).

[*]Note que supondo $M \geq 1$ na Proposição 3.18 perdemos generalidade. No entanto, no Teorema 4.1, fixamos $M = 1 + \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \geq 1$ e então temos que é uma perda de generalidade insignificante para os nossos propósitos.

Agora, provaremos (3.98). Da proposição anterior, temos $u \in C_s(0,T;H^2(\Omega))$ e portanto $\Delta u \in C_s(0,T;L^2(\Omega))$ (Proposição 1.58). Logo, como

$$u_t = d_1 \Delta u - \operatorname{div}[\beta(u)\nabla\psi(a)] \text{ quase sempre em } [0,T]\times\Omega,$$

basta provar que $\operatorname{div}[\beta(u)\nabla\psi(a)] \in C_s(0,T;L^2(\Omega))$ pois daí concluiremos que $u_t \in C_s(0,T;L^2(\Omega))$, e portanto que a igualdade acima será válida em $C_s(0,T;L^2(\Omega))$.

Agora, para provar que $\operatorname{div}[\beta(u)\nabla\psi(a)] \in C_s(0,T;L^2(\Omega))$, precisaremos do seguinte lema, demonstrado no Apêndice B:

Lema 3.19 *Se $M \geq 1$, as aplicações β e β' são Lipschitzianas e portanto $u \in C(0,T;L^\infty(\Omega))$ implica que $\beta(u), \beta'(u) \in C(0,T;L^\infty(\Omega))$.*

O mesmo raciocínio pode ser usado para provar que $\psi'(a) \in C(0,T;L^\infty(\Omega))$ pois ψ' é também Lipschitz e $a \in C(0,T;H^2(\Omega)) \hookrightarrow C(0,T;L^\infty(\Omega))$ (Teorema 3.11 e Proposição 1.56). De fato, para $t, t_1 \in [0,T]$, temos que

$$\|\psi'(a(t)) - \psi'(a(t_1))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq L\|a(t) - a(t_1)\|_{L^\infty(\Omega)}$$

e assim, se $t \to t_1$, temos por continuidade que $a(t) \to a(t_1)$ em $L^\infty(\Omega)$. Logo, a desigualdade acima implica que $\psi'(a(t)) \to \psi'(a(t_1))$ em $L^\infty(\Omega)$ e, então, $\psi'(a) \in C(0,T;L^\infty(\Omega))$. Pelo mesmo procedimento, garantimos que $\psi''(a) \in C(0,T;L^\infty(\Omega))$ pois ψ'' também é Lipschitz.

Em suma, $\beta(u)$, $\beta'(u)$, $\psi'(a)$, $\psi''(a) \in C(0,T;L^\infty(\Omega))$ e portanto os produtos $\beta'(u)\psi'(a)$, $\beta(u)\psi''(a)$ e $\beta(u)\psi'(a)$ estão contidos em $C(0,T;L^\infty(\Omega))$ pelo item (a) da Proposição 1.57. Daí, lembrando que

$$\operatorname{div}[\beta(u)\nabla\psi(a)] = \beta'(u)\nabla u\psi'(a)\nabla a + \beta(u)\psi''(a)|\nabla a|^2 + \beta(u)\psi'(a)\Delta a,$$

é fácil ver, pelo item (b) da Proposição 1.57, que basta provar que $\nabla u \nabla a$, $|\nabla a|^2$ e Δa estão contidos em $C_s(0,T;L^2(\Omega))$ e assim garantiremos que $\operatorname{div}[\beta(u)\nabla\psi(a)] \in C_s(0,T;L^2(\Omega))$.

Afirmação: $\Delta a \in C_s(0,T;L^2(\Omega))$

Note que $a \in C(0,T;H^2(\Omega))$ implica que $\Delta a \in C(0,T;L^2(\Omega)) \subset C_s(0,T;L^2(\Omega))$, pelas Proposições 1.14 e 1.54. Portanto, $\Delta a \in C_s(0,T;L^2(\Omega))$.

Afirmação: $|\nabla a|^2 \in C_s(0,T;L^2(\Omega))$

Como $a \in C(0,T;H^2(\Omega))$, temos que $\nabla a \in C(0,T;H^1(\Omega)^3)$, pela Proposição 1.14, e portanto

$$\left\|\frac{\partial a}{\partial x_i}(t) - \frac{\partial a}{\partial x_i}(t_1)\right\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \sum_{i=1}^{3}\left\|\frac{\partial a}{\partial x_i}(t) - \frac{\partial a}{\partial x_i}(t_1)\right\|^2_{H^1(\Omega)}$$
$$= \|\nabla a(t) - \nabla a(t_1)\|^2_{H^1(\Omega)^3} \to 0,$$

quando $t \to t_1$, e $i \in \{1,2,3\}$. Logo,

$$\frac{\partial a}{\partial x_i} \in C(0,T;H^1(\Omega)) \hookrightarrow C(0,T;L^6(\Omega)) \subset C_s(0,T;L^6(\Omega)) \tag{3.100}$$

para $i \in \{1,2,3\}$, pela Proposição 1.54 e o Teorema 1.1. Então,

$$|\nabla a|^2 = \sum_{i=1}^{3}\left|\frac{\partial a}{\partial x_i}\right|^2 \in C_s(0,T;L^3(\Omega))$$

pelo item (c) da Proposição 1.57. Por outro lado, a Proposição 1.55 afirma que $L^3(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ implica na inclusão $C_s(0,T;L^3(\Omega)) \subset C_s(0,T;L^2(\Omega))$. Portanto, $|\nabla a|^2 \in C_s(0,T;L^2(\Omega))$.

Afirmação: $\nabla a \nabla u \in C_s(0,T;L^2(\Omega))$

Finalmente, note que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : H^2(\Omega) \to H^1(\Omega), \qquad i \in \{1,2,3\}$$

é obviamente linear e também contínua pelo Lema A.1. Portanto, a inclusão $u \in C_s(0,T;H^2(\Omega))$ implica que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in C_s(0,T;H^1(\Omega)) \subset C_s(0,T;L^6(\Omega)), \qquad \forall i = 1,2,3,$$

pelo Lema 1.59, a Proposição 1.55, e o Teorema 1.1. Logo, o item (c) da Proposição 1.57 implica que

$$\nabla a \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial a}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} \in C_s(0,T;L^3(\Omega)),$$

pois $\frac{\partial a}{\partial x_i} \in C(0,T;L^6(\Omega))$, para $i \in \{1,2,3\}$. (Ver inclusão (3.100).) Então, como $C_s(0,T;L^3(\Omega)) \subset C_s(0,T;L^2(\Omega))$, temos que $\nabla a \nabla u \in C_s(0,T;L^2(\Omega))$.

Portanto, $\operatorname{div}[\beta(u)\nabla\psi(a)] \in C_s(0,T;L^2(\Omega))$, $u_t \in C_s(0,T;L^2(\Omega))$ e de fato a igualdade (3.98) vale em $C_s(0,T;L^2(\Omega))$. $\square$

Finalmente, resumimos os nossos resultados no:

Teorema de Existência e Unicidade Global do Problema Auxiliar

Teorema 3.20 *Se $a_0 \in H^3(\Omega)$, $u_0 \in H^2(\Omega)$ então existe única (u,a) tal que*

$$\begin{aligned} &u \in C(0,T;H^{2-\alpha}(\Omega)) \cap C(0,T;L^\infty(\Omega)) \cap C_s(0,T;H^2(\Omega)),\ \textit{e} \\ &a \in C(0,T;H^2(\Omega)) \cap C_s(0,T;H^3(\Omega)),\ \textit{com}\ 0 < \alpha \leq 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{cases} u_t - d_1\Delta u = -\operatorname{div}[\beta(u)\nabla\psi(a)]\ \textit{em}\ C_s(0,T;L^2(\Omega)) \\ a_t - d_2\Delta a + k_2 a = k_1 u\ \textit{em}\ C(0,T;L^2(\Omega))\ \textit{e}\ C_s(0,T;H^1(\Omega)), \\ u(0,\cdot) = u_0,\ a(0,\cdot) = a_0. \end{cases} \tag{3.101}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} u_t &\in C_s(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)) \\ a_t &\in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap C(0,T;H^1(\Omega)) \\ a_{t,t} &\in L^2(0,T;L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Prova: Pelo que já fizemos, basta justificar a unicidade de (u,a). Lembramos da seção anterior que se (u,a) e $(\widehat{u},\widehat{a})$ são soluções do problema auxiliar 2.4, então $u = \widehat{u}$ e $a = \widehat{a}$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Em particular, $u = \widehat{u}$ e $a = \widehat{a}$ quase sempre em $[0,T] \times \Omega$. Logo, como

$$\begin{aligned} &u, \widehat{u} \in C(0,T;H^{2-\alpha}(\Omega)) \cap C(0,T;L^\infty(\Omega)) \cap C_s(0,T;H^2(\Omega)),\ \text{e} \\ &a, \widehat{a} \in C(0,T;H^2(\Omega)) \cap C_s(0,T;H^3(\Omega)),\ \text{com}\ 0 < \alpha \leq 1, \end{aligned}$$

pelo Teorema 3.15 e a Proposição 3.17, então de fato

$$\begin{aligned} &u = \widehat{u}\ \text{em}\ C(0,T;H^{2-\alpha}(\Omega)) \cap C(0,T;L^\infty(\Omega)) \cap C_s(0,T;H^2(\Omega)),\ \text{e} \\ &a = \widehat{a}\ \text{em}\ C(0,T;H^2(\Omega)) \cap C_s(0,T;H^3(\Omega)),\ \text{com}\ 0 < \alpha \leq 1. \end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 4

Resolução do problema original

4.1 Teorema de existência e unicidade local

Provaremos a existência de uma solução local única do problema original (2.1), utilizando a inclusão $u \in C(0, T; L^\infty(\Omega))$ da solução do problema auxiliar (2.4). Lembramos que a definição dos espaços do tipo $C_s(0, t, X)$, X Banach, é dada no Lema 1.53.

Teorema 4.1 ***(Teorema de Existência e Unicidade Local)***

Suponha que $a_0 \in H^3(\Omega)$ *tal que* $\frac{\partial a_0}{\partial n} = 0$ *em* $H^{3/2}(\Gamma)$ *e* $u_0 \in H^2(\Omega)$ *tal que* $\frac{\partial u_0}{\partial n} = 0$ *em* $H^{1/2}(\Gamma)$*. Então, existem* $0 < t_0 \leq T$ *e* (u, a) *solução única do problema original* (2.1) *em* $[0, t_0] \times \Omega$*, com*

$$u \in C(0, t_0; H^{2-\alpha}(\Omega)) \cap C(0, t_0; L^\infty(\Omega)) \cap C_s(0, t_0; H^2(\Omega)) \ e$$
$$a \in C(0, t_0; H^2(\Omega)) \cap C_s(0, t_0; H^3(\Omega)), \ com \ 0 < \alpha \leq 1,$$

no sentido que

$$\begin{cases} u_t - d_1\Delta u = -\operatorname{div}(u\nabla\psi(a)), \ \ em \ C_s(0,t_0;L^2(\Omega)) \\ a_t - d_2\Delta a + k_2 a = k_1 u, \ \ em \ C(0,t_0;L^2(\Omega)) \ e \ C_s(0,t_0;H^1(\Omega)), \\ \frac{\partial u}{\partial n}(t) = 0 \ em \ H^{\frac{1}{2}-\alpha_1}(\Gamma), \ \ \forall t\in[0,t_0], 0<\alpha_1<\frac{1}{2}, \\ \frac{\partial a}{\partial n}(t) = 0 \ em \ H^{1/2}(\Gamma), \ \ \forall t\in[0,t_0], \\ u(0,\cdot)=u_0, \ a(0,\cdot)=a_0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} a_t &\in L^2(0,t_0;H^2(\Omega))\cap C(0,t_0;H^1(\Omega)) \\ u_t &\in C_s(0,t_0;L^2(\Omega))\cap L^2(0,t_0;H^1(\Omega)) \\ a_{t,t} &\in L^2(0,t_0;L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Prova: Seja $M_0 = 1 + \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$. Pelo que já fizemos, como $M_0 \geq 1$, temos que para todo $T>0$ existe uma solução do problema auxiliar (2.4), com $\beta(u) = \beta_{M_0}(u)$, $u(0,\cdot) = u_0$, e $a(0,\cdot) = a_0$, que satisfaz às condições de regularidade descritas no Teorema 3.20. Em particular, $u \in C(0,T;L^\infty(\Omega))$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $0 < t_0 \leq T$ tal que para todo $t \leq t_0$ temos

$$\|u(t,\cdot) - u_0\|_{L^\infty(\Omega)} < \epsilon.$$

Assim, escolhendo $\epsilon = 1$, a desigualdade de Minkowski junto com a desigualdade acima implicam que para todo $t \leq t_0$

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} - \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u(t,\cdot) - u_0\|_{L^\infty(\Omega)} < \epsilon = 1.$$

Portanto, para todo $t \leq t_0$ e quase todo $x \in \Omega$, temos

$$|u(t,x)| \leq \|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} < \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + 1 = M_0.$$

No entanto, pela definição de $\beta_{M_0}(u)$, esta desigualdade significa que $\beta_{M_0}(u)(t,x) = u(t,x)$, $\forall t \in [0,t_0]$ e quase todo $x \in \Omega$. Logo, pelo teorema anterior,

$$\begin{aligned} u_t - d_1\Delta u &= -\operatorname{div}[u\nabla\psi(a)] \text{ em } C_s(0,t_0;L^2(\Omega)) \\ a_t - d_2\Delta a + k_2 a &= k_1 u \text{ em } C(0,t_0;L^2(\Omega)) e C_s(0,t_0;H^1(\Omega)). \end{aligned}$$

Além disso, é possível provar que $\frac{\partial u}{\partial n}(t) = 0$ em $H^{\frac{1}{2}-\alpha_1}(\Gamma)$, com $0 < \alpha_1 < \frac{1}{2}$, para todo $t \in [0, t_0]$. De fato, sabemos pela seção 3.2 que $u_k \to u$ em $C(0, t_0; H^{2-\alpha}(\Omega))$, com $0 < \alpha \leq 1$. Portanto, para todo $t \in [0, t_0]$

$$\|u_k(t) - u(t)\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \leq \max_{0 \leq t \leq t_0} \|u_k(t) - u(t)\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} = \|u_k - u\|_{C(0,t_0;H^{2-\alpha}(\Omega))} \to 0.$$

Logo, $u_k(t) \to u(t)$ em $H^{2-\alpha}(\Omega)$ e então $\nabla u_k(t) \to \nabla u(t)$ em $H^{1-\alpha}(\Omega)^3$ para todo $t \in [0, t_0]$, pelo Teorema 1.13. Em particular, para $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(t) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(t) \right\|^2_{H^{1-\alpha}(\Omega)} &\leq \sum_{i=1}^{3} \left\| \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(t) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(t) \right\|^2_{H^{1-\alpha}(\Omega)} \\ &= \|\nabla u_k(t) - \nabla u(t)\|^2_{H^{1-\alpha}(\Omega)^3} \to 0.\end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i}(t) \to \frac{\partial u}{\partial x_i}(t) \text{ em } H^{1-\alpha}(\Omega), \text{ para todo } t \in [0, t_0].$$

Daí, escolhendo $0 < \alpha = \alpha_1 < \frac{1}{2}$, a continuidade de γ_0 em $H^{1-\alpha_1}(\Omega)$ implica que

$$\gamma_0\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}(t)\right) \to \gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\right) \text{ em } H^{\frac{1}{2}-\alpha_1}(\Gamma), \text{ para todo } t \in [0, t_0].$$

(Ver Teorema 1.62.) Então, aplicando o operador traço coordenada a coordenada, vemos que $\gamma_0(\nabla u_k(t)) \to \gamma_0(\nabla u(t))$ em $H^{\frac{1}{2}-\alpha_1}(\Gamma)^3$ e consequentemente

$$\frac{\partial u_k}{\partial n}(t) = \gamma_0(\nabla u_k(t)) \cdot \vec{n} \longrightarrow \gamma_0(\nabla u(t)) \cdot \vec{n} = \frac{\partial u}{\partial n}(t)$$

em $H^{\frac{1}{2}-\alpha_1}(\Gamma)$ para todo $t \in [0, t_0]$. Agora, lembre que $\frac{\partial u_k}{\partial n} = 0$ em $[0, t_0] \times \Gamma$ para todo $k \in \mathbb{N}$, pela igualdade 3.3. Logo, a convergência acima implica que $\frac{\partial u}{\partial n}(t) = 0$ em $H^{\frac{1}{2}-\alpha_1}(\Gamma)$ para todo $t \in [0, t_0]$.

Analogamente, é possível provar que $\frac{\partial a}{\partial n}(t) = 0$ em $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ para todo $t \in [0, t_0]$. Basta trocar u por a no argumento do parágrafo anterior e designar $\alpha = \alpha_1 = 0$. Assim, a convergência $a_k \to a$ em $C(0, t_0; H^2(\Omega))$ e a continuidade do gradiente em $H^2(\Omega)$ e do operador traço em $H^1(\Omega)$ implicarão que $\frac{\partial a}{\partial n}(t) = 0$ em $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ para todo $t \in [0, t_0]$, pela igualdade 3.4 .

Além disso, pela unicidade da solução do problema auxiliar 2.4, esta solução é de fato única e então provamos assim o teorema. $\square$

4.2 Teorema de existência e unicidade global

Inicialmente, para simplificar a notação, defina o conjunto:

$$P = \{t \in [0,T] : \text{t satisfaz o Teorema 4.1 de existência e unicidade local}\}.$$

Pelo Teorema 4.1, existe um $t_0 \in P$, logo P é não vazio e podemos então definir $t^* := \sup P$. Desta forma, o nosso objetivo nesta seção é provar que com certas condições sobre os dados iniciais (u_0, a_0) podemos garantir que de fato $t^* = T$.

Para tanto, vamos supor que $t^* < T$ e mostrar que existe o limite (u^*, a^*) de $(u(t), a(t))$ quando $t \to t^{*-}$ e que $u^* \in H^2(\Omega)$ com $\frac{\partial u^*}{\partial n} = 0$ em $H^{1/2}(\Gamma)$, e $a^* \in H^3(\Omega)$ com $\frac{\partial a^*}{\partial n} = 0$ em $H^{3/2}(\Gamma)$. Daí, aplicaremos o teorema de existência e unicidade local 4.1 para os dados iniciais (u^*, a^*) para obter assim uma solução em $[t^*, t^* + \epsilon] \times \Omega$, $\epsilon > 0$. Desta forma, pela continuidade das soluções em $[0, t^*] \times \Omega$ e $[t^*, t^* + \epsilon] \times \Omega$, será possível construir uma extensão de (u, a) que é solução única do problema original (2.1) em $[0, t^* + \epsilon] \times \Omega$, com as mesmas regularidades provadas no Teorema 4.1. Portanto, chegaremos a um absurdo, pois isto implicará que $t^* + \epsilon \in P$, o que contradiz a maximalidade de t^*. Então, t^* será de fato igual a T. Enunciamos então o

Teorema 4.2 *(**Teorema de Existência e Unicidade em** $[0,T] \times \Omega$)*

Seja $0 < T < \infty$ e suponha que $a_0 \in H^3(\Omega)$ tal que $\frac{\partial a_0}{\partial n} = 0$ em $H^{3/2}(\Gamma)$ e $u_0 \in H^2(\Omega)$ tal que $\frac{\partial u_0}{\partial n} = 0$ em $H^{1/2}(\Gamma)$. Existem constantes $K_0, K_1, L, C_2 > 0$ tais que, se

$$\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} < \frac{1}{T+1} e^{-\left(\frac{K_0 K_1 L^2}{d_1} \|a_0\|^2_{H^2(\Omega)} + C_2\right)}$$

então existe (u, a) solução única do problema original (2.1) em $[0,T] \times \Omega$ no sentido especificado no teorema de existência e unicidade local 4.1. Ou seja, existe (u, a) única com

$$u \in C(0,T; H^{2-\alpha}(\Omega)) \cap C(0,T; L^\infty(\Omega)) \cap C_s(0,T; H^2(\Omega)) \text{ e}$$
$$a \in C(0,T; H^2(\Omega)) \cap C_s(0,T; H^3(\Omega)), \text{ com } 0 < \alpha \leq 1,$$

tal que

$$\begin{cases} u_t - d_1\Delta u = -\operatorname{div}(u\nabla\psi(a)), \ \ em\ C_s(0,T;L^2(\Omega)) \\ a_t - d_2\Delta a + k_2 a = k_1 u, \ \ em\ C(0,T;L^2(\Omega)) \ e\ C_s(0,T;H^1(\Omega)), \\ \frac{\partial u}{\partial n}(t) = 0 \ em\ H^{\frac{1}{2}-\alpha_1}(\Gamma), \ \ \forall t\in[0,T], 0<\alpha_1<\frac{1}{2}, \\ \frac{\partial a}{\partial n}(t) = 0 \ em\ H^{1/2}(\Gamma), \ \ \forall t\in[0,T], \\ u(0,\cdot)=u_0, \ a(0,\cdot)=a_0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} a_t &\in L^2(0,T;H^2(\Omega))\cap C(0,T;H^1(\Omega)) \\ u_t &\in C_s(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H^1(\Omega)) \\ a_{t,t} &\in L^2(0,T;L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Prova:

Parte 1: Primeiramente, precisamos justificar a origem das constantes K_0, K_1, L, $C_2 > 0$ e daí mostrar que, se

$$\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} < \frac{1}{T+1} e^{-\left(\frac{K_0K_1L^2}{d_1}\|a_0\|^2_{H^2(\Omega)}+C_2\right)},$$

então (u,a) é limitada em $[0,t]$ para qualquer $t\in P$. Para tanto, seja $t_1\in P$ arbitrário e (u,a) a solução do problema (2.1) em $[0,t_1]\times\Omega$, nas condições do Teorema 4.1.

Antes de prosseguir, façamos algumas observações notacionais importantes.

Observações notacionais:

(i) Com o objetivo descrito acima, e também para simplificar a notação no que segue, notaremos por $C>0$ qualquer constante arbitrária que independe de t_1. Como antes, para obter a constante final em uma sequência de argumentos, basta tomar o máximo de todas as constantes encontradas a cada passo do processo.

(ii) Também para facilitar a notação no que segue, definimos

Notação: Sendo B_{t_1} um espaço de Banach que depende de um parâmetro t_1, com norma $\|\cdot\|_{B_{t_1}}$, denotaremos por

$$b \,\underline{\in}\, B_{t_1}$$

se existir $C > 0$ independe de t_1 tal que $\|b\|_{B_{t_1}} \leq C$.

Nos argumentos que seguem, os espaços B_{t_1} serão da forma $L^p(0, t_1; H^k(\Omega))$.

Com esta notação, provaremos que a hipótese do Teorema 4.2 garante que

$$
\begin{aligned}
u &\Subset L^\infty(0, t_1; H^2(\Omega)) \qquad & u_t &\Subset L^\infty(0, t_1; L^2(\Omega)) \\
a &\Subset L^\infty(0, t_1; H^3(\Omega)) \qquad & a_t &\Subset L^\infty(0, t_1; H^1(\Omega)).
\end{aligned}
$$

Dividiremos esta demonstração em itens:

(1.a) $u \Subset L^\infty(0, t_1; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, t_1; H^1(\Omega))$;
$a \Subset L^\infty(0, t_1; H^2(\Omega)) \cap L^2(0, t_1; H^3(\Omega))$; $a_t \Subset L^2(0, t_1; H^1(\Omega))$

Sabemos, pelo teorema de existência local (Teorema 4.1), que a satisfaz

$$a_t - d_2 \Delta a + k_2 a = k_1 u \tag{4.3}$$

em $C(0, t_1; L^2(\Omega))$ e que $a_t \in L^2(0, t_1; H^2(\Omega))$. Então, podemos multiplicar a igualdade (4.3) por a_t e integrar em Q_t, $t \leq t_1$, pois obteremos assim somente integrais finitas. Daí, fazendo um cálculo idêntico ao feito para obter a equação (3.21) (substituindo a_m por a e u_m por u), obtemos que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \|a_t\|^2_{L^2(\Omega)} \, \mathrm{d}s + k_2 \|a(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + d_2 \|\nabla a(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} \\
&\qquad \leq k_2 \|a_0\|^2_{L^2(\Omega)} + d_2 \|\nabla a_0\|^2_{L^2(\Omega)^3} + {k_1}^2 \int_0^t \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \, \mathrm{d}s \\
&\qquad \leq C \|a_0\|^2_{H^2(\Omega)} + C \int_0^t \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \, \mathrm{d}s \qquad \forall t \leq t_1.
\end{aligned}
$$

Em particular, $\forall t \leq t_1$

$$\|a_t\|^2_{L^2(0,t;L^2(\Omega))} \leq C \|a_0\|^2_{H^2(\Omega)} + C \int_0^t \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \, \mathrm{d}s, \tag{4.4}$$

$$\|a\|^2_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))} \leq C \|a_0\|^2_{H^2(\Omega)} + C \int_0^t \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \, \mathrm{d}s. \tag{4.5}$$

Da mesma forma, como $a_t \in L^2(0, t_1; H^2(\Omega))$, temos que $\Delta a_t \in L^2(Q_{t_1})$ e portanto podemos multiplicar a equação (4.3) por $-\Delta a_t$ e integrar em Q_t, $t \leq t_1$. Para tanto, integrando inicialmente em Ω, temos pela identidade de Green e a desigualdade de Young, que

$$\begin{aligned}\|\nabla a_t\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \frac{d_2}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta a\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{k_2}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla a\|^2_{L^2(\Omega)^3} &= -k_1\int_\Omega u\Delta a_t \,\mathrm{d}x \\ &= k_1\int_\Omega \nabla u\nabla a_t\,\mathrm{d}x \leq k_1\epsilon\|\nabla a_t\|^2_{L^2(\Omega)^3} + k_1 C(\epsilon)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3}.\end{aligned}$$

Então, escolhendo $\epsilon = \frac{1}{2k_1}$ na desigualdade acima, temos $C(\epsilon) = \frac{k_1}{2}$ e

$$\|\nabla a_t\|^2_{L^2(\Omega)^3} + d_2\frac{d}{dt}\|\Delta a(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{d}{dt}k_2\|\nabla a(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} \leq k_1^2\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3}.$$

Agora, integrando a desigualdade anterior em $[0,t]$, com $t \leq t_1$, temos

$$\begin{aligned}\int_0^t \|\nabla a_t\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s + d_2\|\Delta a(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + k_2\|\nabla a(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3}& \\ \leq d_2\|\Delta a_0\|^2_{L^2(\Omega)} + k_2\|\nabla a_0\|^2_{L^2(\Omega)^3} + k_1^2\int_0^t \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s& \\ \leq C\|a_0\|^2_{H^2(\Omega)} + C\int_0^t \|u\|^2_{H^1(\Omega)}\,\mathrm{d}s.& \qquad (4.6)\end{aligned}$$

Em particular, $\forall t \leq t_1$

$$\|\nabla a_t\|^2_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^3)} \leq C\|a_0\|^2_{H^2(\Omega)} + C\int_0^t \|u\|^2_{H^1(\Omega)}\,\mathrm{d}s \qquad (4.7)$$

$$\|\Delta a\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C\|a_0\|^2_{H^2(\Omega)} + C\int_0^t \|u\|^2_{H^1(\Omega)}\,\mathrm{d}s. \qquad (4.8)$$

Daí, pelas proposições de regularidade 1.20 e 1.15 e as desiguadades (4.8), (4.5), (4.7) e (4.4), podemos concluir que

$$\begin{aligned}\|a\|_{L^\infty(0,t;H^2(\Omega))} &\leq C\Big(\|\Delta a\|^2_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))} + \|a\|^2_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))}\Big) \\ &\leq C\|a_0\|^2_{H^2(\Omega)} + C\int_0^t \|u\|^2_{H^1(\Omega)}\,\mathrm{d}s, \qquad \forall t \leq t_1, \qquad (4.9)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|a_t\|^2_{L^2(0,t;H^1(\Omega))} &= \|\nabla a_t\|^2_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^3)} + \|a_t\|^2_{L^2(0,t;L^2(\Omega))} \\ &\leq C\|a_0\|^2_{H^2(\Omega)} + C\int_0^t \|u\|^2_{H^1(\Omega)}\,\mathrm{d}s \qquad \forall t \leq t_1. \qquad (4.10)\end{aligned}$$

Agora, note que a igualdade (4.3) implica que para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$ e $t \in [0, t_1]$, temos

$$-d_2 \int_\Omega \nabla a \nabla \varphi \,\mathrm{d}x + k_2 \int_\Omega a\varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega (k_1 u - a_t)\varphi \,\mathrm{d}x. \tag{4.11}$$

Além disso, como $u \in C(0, t_1; H^1(\Omega))$ e $a_t \in C(0, t_1; H^1(\Omega))$, temos que $f(t) := k_1 u(t) - a_t(t) \in H^1(\Omega)$ para todo $t \in [0, t_1]$. Então, para cada $t \in [0, t_1]$ estamos nas condições do Teorema 1.22 e, portanto, podemos concluir que para todo $t \in [0, t_1]$,

$$\|a(t)\|^2_{H^3(\Omega)} \leq C\|k_1 u(t) - a_t(t)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq 2C\Big(k_1^2\|u(t)\|^2_{H^1(\Omega)} + \|a_t(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\Big)$$

e integrando a desigualdade acima, em $[0, t]$, com $t \leq t_1$, temos

$$\|a\|^2_{L^2(0,t;H^3(\Omega))} \leq 2Ck_1^2 \int_0^t \|u(s)\|^2_{H^1(\Omega)} \,\mathrm{d}s + 2C\|a_t\|^2_{L^2(0,t;H^1(\Omega))}.$$

Finalmente, substituindo a desigualdade (4.10) na desigualdade acima, concluímos que

$$\|a\|^2_{L^2(0,t;H^3(\Omega))} \leq C\|a_0\|^2_{H^2(\Omega)} + C\int_0^t \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \,\mathrm{d}s \qquad \forall t \leq t_1. \tag{4.12}$$

Então, recapitulando, por (4.9), (4.10), e (4.12), existe um $K_0 := C > 0$ independente de t_1 tal que $\forall t \leq t_1$

$$\|a\|_{L^\infty(0,t;H^2(\Omega))} \leq K_0\|a_0\|^2_{H^2(\Omega)} + K_0\int_0^t \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \,\mathrm{d}s \tag{4.13}$$

$$\|a_t\|^2_{L^2(0,t;H^1(\Omega))} \leq K_0\|a_0\|^2_{H^2(\Omega)} + K_0\int_0^t \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \,\mathrm{d}s \tag{4.14}$$

$$\|a\|^2_{L^2(0,t;H^3(\Omega))} \leq K_0\|a_0\|^2_{H^2(\Omega)} + K_0\int_0^t \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \,\mathrm{d}s. \tag{4.15}$$

Desta forma, é fácil ver que necessitamos provar que $u \in L^2(0, t_1; H^1(\Omega))$, pois daí poderemos concluir que

$$\begin{aligned} a &\in L^\infty(0, t_1; H^2(\Omega)) &&\text{(desigualdade (4.13))}\\ a_t &\in L^2(0, t_1; H^1(\Omega)) &&\text{(desigualdade (4.14))}\\ a &\in L^2(0, t_1; H^3(\Omega)) &&\text{(desigualdade (4.15))} \end{aligned}$$

visto que $\|a_0\|_{H^2(\Omega)}$ é finita e independente de t_1.

Para provar que $u \in L^2(0, t_1; H^1(\Omega))$, defina

$$Eq(t) := \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + d_1 \int_0^t \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3}\, \mathrm{d}s$$
$$y(t) := \int_0^t \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\, \mathrm{d}s + d_1 \int_0^t \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3}\, \mathrm{d}s$$

Provaremos primeiramente algumas propriedades de $Eq(t)$ e $y(t)$.

Lema 4.3 ***(Propriedades de** $Eq(t)$ **e** $y(t)$**)***

i) *$Eq(t)$ é contínua em $[0, t_1]$.*

ii) *Existem $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$ independentes de t_1 tais que $Eq(t) \leq C_1 e^{C_2 y(t)}$ para todo $t \in [0, t_1]$.*

iii) *Existe um $\delta_T > 0$ independente de t_1 tal que se $\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} < \delta_T$, então $Eq(t) < \frac{1}{T+1}$ para todo $t \in [0, t_1)$.*

Prova do Lema: **(i)** Sejam $s, s_1 \in [0, t_1]$. Então, pela desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned}
|Eq(s_1) - Eq(s)| &= \left| \|u(s_1)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \pm d_1 \int_s^{s_1} \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3}\, \mathrm{d}s \right| \\
&\leq \left| \|u(s_1)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \right| + d_1 \left| \int_s^{s_1} \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3}\, \mathrm{d}s \right|. \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Mas, por outro lado, pela desigualdade triangular e a desigualdade de Cauchy, vemos que

$$\begin{aligned}
\left| \|u(s_1)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \right| &= \left| \int_\Omega \left(|u(s_1)|^2 - |u(s)|^2 \right) \mathrm{d}s \right| \\
&\leq \int_\Omega \Big| |u(s_1)| - |u(s)| \Big| \cdot \Big| |u(s_1)| + |u(s)| \Big|\, \mathrm{d}x \\
&\leq 2\|u\|_{L^\infty(Q_{t_1})} \int_\Omega |u(s_1) - u(s)|\, \mathrm{d}x \\
&\leq 2\|u\|_{L^\infty(Q_{t_1})} |\Omega|^{1/2} \|u(s_1) - u(s)\|_{L^2(\Omega)}, \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

e então $u \in L^\infty(0,t_1;H^2(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(Q_{t_1})$ implica que existe $0 < C < \infty$ tal que

$$|Eq(s_1) - Eq(s)| \leq C\|u(s_1) - u(s)\|_{L^2(\Omega)} + d_1\left|\int_s^{s_1} \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s\right|,$$

pelas desigualdades (4.16) e (4.17).

Logo, como $u \in C(0,t_1;H^1(\Omega)) \hookrightarrow C(0,t_1;L^2(\Omega))$ (Teorema 4.1), se $s \to s_1$, então $u(s) \to u(s_1)$ em $L^2(\Omega)$ e portanto, pela desigualdade acima, temos que $Eq(s) \to Eq(s_1)$ em $\mathbb{R}$. Então, $Eq(t)$ é contínua em $[0,t_1]$.

(ii) Pelo teorema de existência de solução local, sabemos que

$$u_t - d_1\Delta u = -\operatorname{div}[u\nabla\psi(a)] \tag{4.18}$$

quase sempre em $L^\infty(0,t_1;L^2(\Omega))$. Logo, como $u \in L^\infty(0,t_1;H^2(\Omega))$, podemos multiplicar a equação (4.18) por u e integrar em Q_{t_1}. Inicialmente, integrando em Ω, pela identidade de Green e a desigualdade de Young, temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + d_1\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3} &= -\int_\Omega \nabla[u\nabla\psi(a)]u\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u\nabla\psi(a)\nabla u\,\mathrm{d}x\\ &\leq \epsilon\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3} + C(\epsilon)\|u\nabla\psi(a)\|^2_{L^2(\Omega)^3}.\end{aligned}$$

Agora, escolhendo $\epsilon = \frac{d_1}{2}$ na desigualdade acima, temos $C(\epsilon) = \frac{1}{2d_1}$, e

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + d_1\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3} &\leq \frac{1}{d_1}\|u\nabla\psi(a)\|^2_{L^2(\Omega)^3} = \frac{1}{d_1}\int_\Omega |u|^2|\psi'(a)|^2|\nabla a|^2\,\mathrm{d}x\\ &\leq \frac{L^2}{d_1}\|\nabla a\|^2_{L^\infty(\Omega)^3}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{4.19}$$

Agora, como $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ (Teorema 1.1), pela Proposição 1.13 temos que existem $K_1, K_2 > 0$ constantes independentes de t_1 tais que

$$\|\nabla a\|^2_{L^\infty(\Omega)^3} \leq K_2\|\nabla a\|^2_{H^2(\Omega)^3} \leq K_1\|a\|^2_{H^3(\Omega)}$$

e portanto isto implica que

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + d_1\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3} \leq \frac{L^2}{d_1}\|\nabla a\|^2_{L^\infty(\Omega)^3}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{L^2K_1}{d_1}\|a\|^2_{H^3(\Omega)}\|u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

pela desigualdade (4.19).

Integrando a desigualdade acima em $[0,t]$, $t \leq t_1$, obtemos:

$$\begin{aligned} Eq(t) &= \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + d_1 \int_0^t \|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\Omega)^3} \,\mathrm{d}s \\ &\leq \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{L^2 K_1}{d_1} \int_0^t \|a(s)\|^2_{H^3(\Omega)} \|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \,\mathrm{d}s \\ &\leq \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{L^2 K_1}{d_1} \int_0^t \|a(s)\|^2_{H^3(\Omega)} Eq(s) \,\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{4.20}$$

pois

$$\|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + d_1 \int_0^s \|\nabla u(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)^3} \,\mathrm{d}\tau = Eq(s), \quad \forall s \leq t_1.$$

Finalmente, aplicando a desigualdade de Gronwall na desigualdade (4.20), temos

$$Eq(t) \leq \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} e^{\frac{L^2 K_1}{d_1} \|a\|^2_{L^2(0,T;H^3(\Omega))}}.$$

Mas, pela desigualdade (4.12), a desigualdade acima implica que

$$\begin{aligned} Eq(t) &\leq \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} e^{\frac{K_1 L^2}{d_1} \|a\|^2_{L^2(0,T;H^3(\Omega))}} \leq \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} e^{\frac{K_0 K_1 L^2}{d_1} \left(\|a_0\|^2_{H^2(\Omega)} + \int_0^t \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \,\mathrm{d}s \right)} \\ &= \left(\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} e^{\frac{K_0 K_1 L^2}{d_1} \|a_0\|^2_{H^2(\Omega)}} \right) e^{\frac{K_0 K_1 L^2}{d_1} \int_0^t \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \,\mathrm{d}s}. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela Proposição 1.15, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \frac{K_0 K_1 L^2}{d_1} \int_0^t \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \,\mathrm{d}s &= \frac{K_0 K_1 L^2}{d_1} \int_0^t \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \,\mathrm{d}s \\ &\quad + \frac{K_0 K_1 L^2}{d_1^2} d_1 \int_0^t \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3} \,\mathrm{d}s \leq C_2 y(t), \end{aligned}$$

se definimos $C_2 = \max\left(\frac{K_0 K_1 L^2}{d_1}, \frac{K_0 K_1 L^2}{d_1^2} \right)$. Portanto, $C_1 = \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} e^{\frac{K_0 K_1 L^2}{d_1} \|a_0\|^2_{H^2(\Omega)}}$ satisfaz $Eq(t) \leq C_1 e^{C_2 y(t)}$, $\forall t \leq t_1$.

(iii) Defina

$$\delta_T = \frac{1}{T+1} e^{-\left(\frac{K_0 K_1 L^2}{d_1} \|a_0\|^2_{H^2(\Omega)} + C_2 \right)},$$

com C_2 e K_1 constantes (independentes de t_1) encontradas no item (ii), e K_0 proveniente da desigualdade (4.15). Provaremos que a afirmação vale para δ_T. Para tanto, suponha por absurdo que $\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} < \delta_T$, mas a conclusão do item (iii) não vale para tal δ_T escolhido. Então, pela continuidade de $Eq(t)$ (i) e o fato de que $Eq(0) = \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} < \delta_T < \frac{1}{T+1}$, temos que existe $0 < t_2 < t_1$ tal que $Eq(t_2) = \frac{1}{T+1}$ e $Eq(t) < \frac{1}{T+1}$ para todo $t < t_2$. Em particular,

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + d_1 \int_0^t \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3}\, \mathrm{d}s = Eq(t) \leq \frac{1}{T+1}, \quad \forall t \leq t_2$$

$$d_1 \int_0^t \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3} \leq \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + d_1 \int_0^t \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3}\, \mathrm{d}s = Eq(t) \leq \frac{1}{T+1}, \quad \forall t \leq t_2.$$

Então, as duas desigualdades anteriores implicam que

$$y(t_2) = \int_0^{t_2} \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\, \mathrm{d}s + d_1 \int_0^{t_2} \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3}\, \mathrm{d}s \leq \frac{1}{T+1}(t_2 + 1) \leq 1,$$

pois $t_2 \leq T$. Portanto, o item (ii) e a desigualdade acima implicam que

$$\begin{aligned} \frac{1}{T+1} &= Eq(t_2) \leq C_1 e^{C_2 y(t_2)} \leq C_1 e^{C_2} \\ &= \left(\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} e^{\frac{K_0 K_1 L^2}{d_1} \|a_0\|^2_{H^2(\Omega)}} \right) e^{C_2} \end{aligned}$$

Mas, por hipótese, temos que $\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} < \delta_T = \frac{1}{T+1} e^{-\left(\frac{K_0 K_1 L^2}{d_1} \|a_0\|^2_{H^2(\Omega)} + C_2\right)}$ e, portanto, a última desigualdade nos permite concluir que

$$\frac{1}{T+1} < \delta_T e^{\frac{K_0 K_1 L^2}{d_1} \|a_0\|^2_{H^2(\Omega)} + C_2} = \frac{1}{T+1},$$

o que é um absurdo pela desigualdade estrita. Logo, não existe tal t_2 e portanto $Eq(t) < \frac{1}{T+1}$ para todo $t < t_1$. $\square$

Com o último item do lema anterior, conseguiremos provar que

$$\|u_0\|_{L^2(\Omega)} < \frac{1}{T+1} e^{-\left(\frac{K_0 K_1 L^2}{d_1} \|a_0\|^2_{H^2(\Omega)} + C_2\right)} = \delta_T$$

implica que

$$u \Subset L^\infty(0, t_1; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, t_1; H^1(\Omega)).$$

De fato, se $\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} < \delta_T$, temos pela propriedade (iii) que para todo $0 \leq t < t_1$

$$Eq(t) = \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + d_1 \int_0^t \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3}\, \mathrm{d}s < \frac{1}{T+1}.$$

Em particular,

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} < \frac{1}{T+1} \;\; \forall t < t_1 \Rightarrow \|u\|^2_{L^\infty(0,t_1;L^2(\Omega))} < \frac{1}{T+1} \tag{4.21}$$

$$d_1 \int_0^t \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s < \frac{1}{T+1} \;\; \forall t < t_1 \Rightarrow \|\nabla u\|^2_{L^2(0,t_1;L^2(\Omega)^3)} < \frac{1}{d_1(T+1)}. \tag{4.22}$$

Assim, pela desigualdade (4.21), podemos concluir também que

$$\|u\|^2_{L^2(0,t_1;L^2(\Omega))} = \int_0^{t_1} \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s \le t_1 \|u\|^2_{L^\infty(0,t_1;L^2(\Omega))} < \frac{T}{T+1}. \tag{4.23}$$

Daí, as desigualdades (4.22) e (4.23) e a Proposição 1.15 implicam que

$$\|u\|^2_{L^2(0,t_1;H^1(\Omega))} = \|\nabla u\|^2_{L^2(0,t_1;L^2(\Omega)^3)} + \|u\|^2_{L^2(0,t_1;L^2(\Omega))} < \frac{1+d_1T}{d_1(T+1)}. \tag{4.24}$$

Então,

$$\|u_0\|_{L^2(\Omega)} < \frac{1}{T+1} e^{-\left(\frac{K_0K_1L^2}{d_1}\|a_0\|^2_{H^2(\Omega)}+C_2\right)}$$

garante, que

$$u \,\underline{\in}\, L^\infty(0,t_1;L^2(\Omega)) \qquad \text{(desigualdade (4.21))} \tag{4.25}$$

$$u \,\underline{\in}\, L^2(0,t_1;H^1(\Omega)) \qquad \text{(desigualdade (4.24)).} \tag{4.26}$$

Além disso, pela discussão do final da página 90, temos que $u \,\underline{\in}\, L^2(0,t_1;H^1(\Omega))$ implica que

$$a \,\underline{\in}\, L^\infty(0,t_1;H^2(\Omega)) \cap L^2(0,t_1;H^3(\Omega)) \text{ e } a_t \,\underline{\in}\, L^2(0,t_1;H^1(\Omega)).$$

A partir deste ponto, então, suponha que $\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} < \delta_T$. Assim temos que de fato são válidas as inclusões seguintes, além das inclusões provadas em (1.a).

(1.b) $u \,\underline{\in}\, L^2(0,t_1;H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,t_1;H^1(\Omega))$

Lembre que a igualdade (4.18) é satisfeita em $L^\infty(0,t_1;L^2(\Omega))$ (Teorema 3.16). Logo, $u \in L^\infty(0,t_1;H^2(\Omega))$ e portanto $-\Delta u \in L^\infty(0,t_1;L^2(\Omega))$ implica que podemos multiplicar a equação (4.18) por $-\Delta u$ e integrar em Q_t, com $t \le t_1$. Inicialmente, integrando em Ω e usando também a desigualdade de Young, podemos ver que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3} + d_1\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \nabla[u\nabla\psi(a)]\Delta u\,\mathrm{d}x \\ &\le \epsilon\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + C(\epsilon)\|\nabla[u\nabla\psi(a)]\|^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

e logo, escolhendo $\epsilon = \frac{d_1}{2}$ na desigualdade acima, temos $C(\epsilon) = \frac{1}{2d_1}$ e

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3} + d_1\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{d_1}\|\nabla[u\nabla\psi(a)]\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{4.27}$$

No entanto, note que $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ (Proposição 1.4) e, portanto,

$$\begin{aligned}
\|\nabla[u\nabla\psi(a)]\|^2_{L^2(\Omega)} &= \|\nabla u\psi'(a)\nabla a + u\psi''(a)|\nabla a|^2 + u\psi'(a)\Delta a\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \Big[\|\nabla u\psi'(a)\nabla a\|_{L^2(\Omega)} + \|u\psi''(a)|\nabla a|^2\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ \|u\psi'(a)\Delta a\|_{L^2(\Omega)}\Big]^2 \leq 3\Big[\|\nabla u\psi'(a)\nabla a\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+ \|u\psi''(a)|\nabla a|^2\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\psi'(a)\Delta a\|^2_{L^2(\Omega)}\Big] \\
&= 3\Big[\int_\Omega |\nabla u|^2|\psi'(a)|^2|\nabla a|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |u|^2|\psi''(a)|^2|\nabla a|^4\,\mathrm{d}x \\
&+ \int_\Omega |u|^2|\psi'(a)|^2|\Delta a|^2\,\mathrm{d}x\Big] \leq 3L^2\Big[\int_\Omega |\nabla u|^2|\nabla a|^2\,\mathrm{d}x \\
&+ \int_\Omega |u|^2|\nabla a|^4\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |u|^2|\Delta a|^2\,\mathrm{d}x\Big],
\end{aligned} \tag{4.28}$$

pelas limitações sobre ψ', ψ''. Então, concluímos pelas desigualdades (4.27) e (4.28) que:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3} + d_1\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad\leq \frac{3L^2}{d_1}\Big[\int_\Omega |\nabla a|^2|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |u|^2|\nabla a|^4\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |u|^2|\Delta a|^2\,\mathrm{d}x\Big].
\end{aligned}$$

Portanto, podemos afirmar pela desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3} + d_1\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{3L^2}{d_1}\Big[\|\nabla a\|^2_{L^\infty(\Omega)^3}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3} \\
&+ C\|u\|^2_{L^6(\Omega)}\|\nabla a\|^4_{L^6(\Omega)^3} + \|u\|^2_{L^4(\Omega)}\|\Delta a\|^2_{L^4(\Omega)}\Big].
\end{aligned} \tag{4.29}$$

quase sempre em $[0,t_1]$. Por outro lado, lembre que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ (Teorema 1.1). Logo, existe um $K > 0$ constante (independente de t_1) tal que, integrando a desigualdade acima em $[0,t]$, $t \leq t_1$, temos

$$\begin{aligned}
&\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + d_1 \int_0^t \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s \\
&\qquad \leq \|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \frac{3L^2}{d_1}\bigg[\int_0^t \|\nabla a\|^2_{L^\infty(\Omega)^3}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s \\
&\qquad + KC\int_0^t \|u\|^2_{H^1(\Omega)}\|\nabla a\|^4_{H^1(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s + K\int_0^t \|u\|^2_{H^1(\Omega)}\|\Delta a\|^2_{L^4(\Omega)}\,\mathrm{d}s\bigg].
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Agora, pela parte (1.a), temos que $u \in L^2(0,t_1;H^1(\Omega))$ e $a \in L^\infty(0,t_1;H^2(\Omega))$ e, portanto, $\nabla a \in L^\infty(0,t_1;H^1(\Omega)^3)$ (Proposição 1.14) e

$$\int_0^t \|u\|^2_{H^1(\Omega)}\|\nabla a\|^4_{H^1(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s \leq \|\nabla a\|^4_{L^\infty(0,t;H^1(\Omega)^3)}\|u\|^2_{L^2(0,t;H^1(\Omega))} \leq C. \tag{4.31}$$

Por outro lado, como $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ (Teorema 1.1), temos que existe $K > 0$ independente de t_1 tal que

$$\|\Delta a\|^2_{L^4(\Omega)} \leq K\|\Delta a\|^2_{H^1(\Omega)} \leq CK\|a\|^2_{H^3(\Omega)},$$

pela Proposição 1.13 e portanto o termo final da desigualdade (4.30) pode ser majorado pela igualdade (1.5) e a desigualdade acima, nos fornecendo

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|u\|^2_{H^1(\Omega)}\|\Delta a\|^2_{L^4(\Omega)}\,\mathrm{d}s &= \int_0^t \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\|\Delta a\|^2_{L^4(\Omega)}\,\mathrm{d}s + \int_0^t \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3}\|\Delta a\|^2_{L^4(\Omega)}\,\mathrm{d}s \\
&\leq CK\|u\|^2_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))}\|a\|^2_{L^2(0,t;H^3(\Omega))} \\
&\quad + \int_0^t \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3}\|\Delta a\|^2_{L^4(\Omega)}\,\mathrm{d}s \\
&\leq C + \int_0^t \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3}\|\Delta a\|^2_{L^4(\Omega)}\,\mathrm{d}s,
\end{aligned} \tag{4.32}$$

pois $a \in L^2(0,t_1;H^3(\Omega))$ e $u \in L^\infty(0,t_1;L^2(\Omega))$, por (1.a). Portanto, pelas desigualdades (4.30), (4.31) e (4.32), vemos que existe C suficientemente grande e independente de t_1 tal que

$$\begin{aligned}
&\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + d_1\int_0^t \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s \leq \|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)^3} + C \\
&\qquad + \frac{3L^2C}{d_1}\int_0^t \Big(\|\nabla a\|^2_{L^\infty(\Omega)^3} + \|\Delta a\|^2_{L^4(\Omega)}\Big)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s, \qquad \forall t \leq t_1.
\end{aligned}$$

Logo, aplicando a desigualdade de Gronwall acima, temos que

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \leq (\|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + C)e^{\frac{3L^2C}{d_1}\left[\int_0^t \|\nabla a\|_{L^\infty(\Omega)^3}^2 \,\mathrm{d}s + \int_0^t \|\Delta a\|_{L^4(\Omega)}^2 \,\mathrm{d}s\right]} \tag{4.33}$$

e

$$d_1 \int_0^t \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 \,\mathrm{d}s \leq (\|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + C)e^{\frac{3L^2C}{d_1}\left[\int_0^t \|\nabla a\|_{L^\infty(\Omega)^3}^2 \,\mathrm{d}s + \int_0^t \|\Delta a\|_{L^4(\Omega)}^2 \,\mathrm{d}s\right]}. \tag{4.34}$$

Mas, por (1.a) temos que $a \in L^2(0, t_1; H^3(\Omega))$ e então $\nabla a \in L^2(0, t_1; H^2(\Omega)^3) \hookrightarrow L^2(0, t_1; L^\infty(\Omega))$ e $\Delta a \in L^2(0, t_1; H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, t_1; L^4(\Omega))$ (Proposição 1.14, Teorema 1.1). Por outro lado, note que $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$ implica que existe $C > 0$ tal que $\|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \|u_0\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|u_0\|_{H^2(\Omega)} < \infty$, por hipótese. Daí, como u_0 independe de t_1, as desigualdades (4.33) e (4.34) acima implicam que existe um $C > 0$ independente de t_1 tal que

$$\begin{aligned}
&\|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)^3} \leq C, \qquad \forall t \leq t_1 \\
&\|\Delta u\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))} \,\mathrm{d}s \leq C, \qquad \forall t \leq t_1.
\end{aligned}$$

Daí, concluímos que $\nabla u \in L^\infty(0, t_1; L^2(\Omega)^3)$ e $\Delta u \in L^2(0, t_1; L^2(\Omega))$ e, portanto, pela parte (1.a) e as proposições de regularidade 1.16 e 1.19, temos $u \in L^\infty(0, t_1; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, t_1; H^2(\Omega))$.

(1.c) $u_t \in L^2(0, t_1; L^2(\Omega))$

Faremos um processo análogo ao feito na seção (1.b). De fato, como $u_t \in L^\infty(0, t_1; L^2(\Omega))$ (Teorema 4.1) e a igualdade (4.18) vale em $L^\infty(0, t_1; L^2(\Omega))$, podemos multiplicar (4.18) por u_t e integrar em Q_t, com $t \leq t_1$. Incialmente, integrando em Ω e usando a desigualdade de Cauchy, podemos chegar à seguinte desigualdade:

$$\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d_1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \leq \frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla[u\psi'(a)\nabla a]\|_{L^2(\Omega)^3}^2$$

e, reagrupando, temos que

$$\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_1\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \leq \|\nabla[u\psi'(a)\nabla a]\|_{L^2(\Omega)^3}^2.$$

Daí, expandindo o último termo, como feito para obter a desigualdade (4.28) e usando as majorações sobre ψ', ψ'', obtemos

$$\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} + d_1 \frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3} \leq 3L^2\bigg(\int_\Omega |\nabla u|^2 |\nabla a|^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |u|^2 |\nabla a|^4 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |u|^2 |\Delta a|^2 \,\mathrm{d}x \bigg).$$

Assim, pela regularidade de (u, a) provada no Teorema 4.1, a desigualdade de Hölder e as inclusões contínuas $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ e $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ (teo 1.1), vemos que existe $K > 0$ suficientemente grande (independente de t_1) tal que

$$\begin{aligned} \|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} + d_1 \frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3} &\leq 3L^2\Big(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3} \|\nabla a\|^2_{L^\infty(\Omega)^3} + C\|u\|^2_{L^6(\Omega)} \|\nabla a\|^4_{L^6(\Omega)^3} \\ &\quad + \|u\|^2_{L^4(\Omega)} \|\Delta a\|^2_{L^4(\Omega)} \Big) \leq 3KL^2 \Big(\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \|a\|^2_{H^3(\Omega)} + \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \|a\|^4_{H^2(\Omega)} \\ &\quad + \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \|\Delta a\|^2_{L^4(\Omega)} \Big). \end{aligned}$$

quase sempre em $[0, t_1]$. Logo, integrando a desigualdade anterior em $[0, t]$, $t \leq t_1$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^t \|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} \,\mathrm{d}s + d_1 \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} &\leq d_1 \|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)^3} \\ &\quad + 3KL^2 \bigg(\int_0^t \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \|a\|^2_{H^3(\Omega)} \,\mathrm{d}s + \int_0^t \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \|a\|^4_{H^2(\Omega)} \,\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_0^t \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \|\Delta a\|^2_{L^4(\Omega)} \,\mathrm{d}s \bigg) \leq d_1 \|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)^3} \\ &\quad + 3KL^2 \|u\|^2_{L^\infty(0,t;H^1(\Omega))} \bigg(\int_0^t \|a\|^2_{H^3(\Omega)} \,\mathrm{d}s + \int_0^t \|a\|^4_{H^2(\Omega)} \,\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_0^t \|\Delta a\|^2_{L^4(\Omega)} \,\mathrm{d}s \bigg). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Agora, pela parte (1.b) e (1.a), temos $u \in L^\infty(0, t_1; H^1(\Omega))$, $a \in L^2(0, t_1; H^3(\Omega)) \cap L^\infty(0, t_1; H^2(\Omega))$ e, então, $\Delta a \in L^2(0, t_1; H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, t_1; L^4(\Omega))$. Portanto, como $\|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)^3} < \infty$ por hipótese, então a desigualdade acima implica que existe um $C > 0$ independente de t_1 tal que para todo $t \leq t_1$, $\|u_t\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))} \leq C$. Logo, $u_t \in L^2(0, t_1; L^2(\Omega))$.

(1.d) $a_t \Subset L^\infty(0,t_1;H^1(\Omega))$

Agora, derivando a equação (4.3), temos

$$a_{t,t} - d_2\Delta a_t + k_2 a_t = k_1 u_t. \tag{4.36}$$

Note que a igualdade acima vale em $L^2(Q_{t_1})$, pela regularidade de (u,a) (Teorema 4.1). Então, como $a_{t,t} \in L^2(Q_{t_1})$, podemos multiplicar a desigualdade acima por $a_{t,t}$ e integrar em Q_t, com $t \leq t_1$. Assim, via um cálculo semelhante ao feito na Proposição 3.9 (trocando (u_m,a_m) por (u,a)), podemos obter uma desigualdade análoga à (3.58):

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|a_{t,t}\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s &+ d_2\|\nabla a_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + k_2\|a_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq d_2\|\nabla a_t(0))\|^2_{L^2(\Omega)^3} + k_2\|a_t(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + k_1^2\int_0^t \|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s \\
&\leq (d_2+k_2)\|a_t(0)\|^2_{H^1(\Omega)} + k_1^2\int_0^t \|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Afirmamos que existe um $C > 0$ independente de t_1 tal que $\|a_t(0)\|_{H^1(\Omega)} \leq C$. Para provar tal afirmação, primeiro mostraremos que:

$$a_t(0) = d_2\Delta a_0 - k_2 a_0 + k_1 u_0 \text{ em } H^1(\Omega).$$

Inicialmente, lembre que a igualdade 4.3 vale em $C_s(0,t_1;H^1(\Omega))$, pois $t_1 \in P$. (Ver Teorema 4.1.) Em particular, como $C_s(0,t_1;H^1(\Omega)) \subset L^\infty(0,t_1;H^1(\Omega))$, (4.3) vale em $L^\infty(0,t_1;H^1(\Omega))$. Portanto, existe um $D \subset [0,t_1]$ denso tal que

$$a_t(t) = d_2\Delta a(t) - k_2 a(t) + k_1 u(t) \text{ em } H^1(\Omega),\ \ \forall t \in D.$$

Então, pela densidade de D, existe uma sequência $t_n \subset D$ tal que $t_n \to 0$. Daí, como (4.3) vale em $C_s(0,t_1;H^1(\Omega))$, então $t_n \to 0$ implica que $a_t(t_n) \rightharpoonup a_t(0)$ em $H^1(\Omega)$ e

$$d_2\Delta a(t_n) - k_2 a(t_n) + k_1 u(t_n) \rightharpoonup d_2\Delta a_0 - k_2 a_0 + k_1 u_0 \text{ em } H^1(\Omega).$$

No entanto, como $t_n \subset D$, vale a igualdade

$$a_t(t_n) = d_2\Delta a(t_n) - k_2 a(t_n) + k_1 u(t_n) \text{ em } H^1(\Omega),\ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, a unicidade do limite implica que

$$a_t(0) = d_2\Delta a_0 - k_2 a_0 + k_1 u_0 \text{ em } H^1(\Omega).$$

Então, tomando a norma $H^1(\Omega)$ na igualdade anterior, e aplicando a desigualdade de Minkowski, vemos que existe $C > 0$ independente de t_1 tal que

$$\begin{aligned}
\|a_t(0)\|_{H^1(\Omega)} &= \|d_2\Delta a_0 - k_2 a_0 + k_1 u_0\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq C\Big(d_2\|\Delta a_0\|_{H^1(\Omega)} + k_2\|a_0\|_{H^1(\Omega)} + k_1\|u_0\|_{H^1(\Omega)} \Big) \\
&\leq C\Big(\|a_0\|_{H^3(\Omega)} + \|u_0\|_{H^2(\Omega)} \Big) \leq C < \infty,
\end{aligned}$$

pois a_0 e u_0 independem de t_1. Daí, como $u_t \underline{\in} L^2(Q_{t_1})$, a desigualdade (4.37) e a Proposição 1.16 implicam que $a_t \underline{\in} L^\infty(0, t_1; H^1(\Omega))$.

(1.e) $a \underline{\in} L^\infty(0, t_1; H^3(\Omega))$

Lembre que a igualdade (4.3) vale em $C_s(0, T; H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0, t_1; H^1(\Omega))$. Portanto,

$$d_2\nabla\Delta a = \nabla a_t - k_1\nabla u + k_2\nabla a$$

vale em $L^\infty(0, t_1; L^2(\Omega)^3)$. Assim, como

$$\begin{aligned}
a_t \underline{\in} L^\infty(0, t_1; H^1(\Omega)) \text{ (1.d) } &\Rightarrow \nabla a_t \underline{\in} L^\infty(0, t_1; L^2(\Omega)^3) \\
u \underline{\in} L^\infty(0, t_1; H^1(\Omega)) \text{ (1.b) } &\Rightarrow \nabla u \underline{\in} L^\infty(0, t_1; L^2(\Omega)^3) \\
a \underline{\in} L^\infty(0, t_1; H^2(\Omega)) \text{ (1.a) } &\Rightarrow \nabla a \underline{\in} L^\infty(0, t_1; H^1(\Omega)^3) \\
&\Rightarrow \nabla a \underline{\in} L^\infty(0, t_1; L^2(\Omega)^3),
\end{aligned}$$

pelo teoremas 1.1, 1.2 e a Proposição 1.16, temos também pela desigualdade de Minkowski que existe um $C > 0$ (independente de t_1) tal que

$$\begin{aligned}
\|d_2\nabla\Delta a\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega)^3)} = \|\nabla a_t - k_1\nabla u + k_2\nabla a\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega)^3)} &\leq \|\nabla a_t\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega)^3)} \\
+ k_1\|\nabla u\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega)^3)} + k_2\|\nabla a\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega)^3)} &\leq C
\end{aligned}$$

para todo $t \leq t_1$. Logo, $\nabla\Delta a \underline{\in} L^\infty(0, t_1; L^2(\Omega)^3)$. Daí, como $a \underline{\in} L^\infty(0, t_1; H^2(\Omega))$ (1.a), a Proposição 1.21 nos permite concluir que $a \underline{\in} L^\infty(0, t_1; H^3(\Omega))$.

Observação 4.4 *Lembre que na Seção 3.2 encontramos uma solução* (u, a) *do problema auxiliar com constante de truncamento* $M \geq 1$. *No entanto, por simplicidade, no começo da demonstração do teorema de existência e unicidade global 4.2 escolhemos denotar também por* (u, a) *a solução local do problema original* (2.1) *em* $[0, t_1] \times \Omega$. *Daí, por questões de clareza, chamaremos daqui em diante de* $(\widetilde{u}_M, \widetilde{a}_M)$ *a solução do problema auxiliar* (2.4) *em* $[0, T] \times \Omega$ *com constante de truncamento* $M > 0$.

(1.f) $u_t \in L^\infty(0, t_1; L^2(\Omega))$

Sejam (u_m, a_m) as aproximações de Galerkin do problema auxiliar com constante de truncamento $M_1 = 1 + \|u\|_{C(0,t_1;L^\infty(\Omega))}$. Como $M_1 \geq 1$, o raciocínio da Seção 3.2 garante que existe uma solução $\widetilde{u}_{M_1}$ do problema auxiliar em $[0, T] \times \Omega$ e uma subsequência (u_k) de (u_m) tal que que $u_k \to \widetilde{u}_{M_1}$ em $C(0, T; L^\infty(\Omega))$. Assim, tomando a restrição em $[0, t_1] \times \Omega$, temos que

$$u_k\Big|_{[0,t_1]\times\Omega} \longrightarrow \widetilde{u}_{M_1}\Big|_{[0,t_1]\times\Omega} \text{ em } C(0, t_1; L^\infty(\Omega)).$$

Por outro lado, como u e $\widetilde{u}_{M_1}\big|_{[0,t_1]\times\Omega}$ são ambas soluções em $[0, t_1]\times\Omega$, a unicidade da solução local implica que $\widetilde{u}_{M_1}\big|_{[0,t_1]\times\Omega} = u$. Daí, $u_k\big|_{[0,t_1]\times\Omega} \to u$ em $C(0, t_1; L^\infty(\Omega)$. No entanto, note que $\|u\|_{C(0,t_1;L^\infty(\Omega))} = M_1 - 1 < M_1$. Então, a convergência $u_k|_{[0,t_1]\times\Omega} \to u$ em $C(0, t_1; L^\infty(\Omega)$ implica que existe $k_0 > 0$ tal que para todo $k \geq k_0$, $\|u_k\|_{C(0,t_1;L^\infty(\Omega))} \leq M_1$ e portanto

$$|u_k(t, x)| \leq \|u_k(t, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_k\|_{C(0,t_1;L^\infty(\Omega))} \leq M_1$$

i.e. $\beta_{M_1}(u_k)(t, x) = u_k(t, x)$ para todo $t \in [0, t_1]$, $k \geq k_0$ e quase todo $x \in \Omega$. Daí,

$$\langle u_{k,t}, \varphi_1 \rangle + d_1 \int_\Omega \nabla u_k \nabla \varphi_1 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega u_k \nabla\psi(a_k) \nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}x \tag{4.38}$$

para todo $t \in [0, t_1]$, $k \geq k_0$, $\varphi_1 \in W_k$. Assim, derivando com relação a t, temos que

$$\langle u_{k,t,t}, \varphi_1 \rangle + d_1 \int_\Omega \nabla u_{k,t} \nabla \varphi_1 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{d}{dt}[u_k \nabla\psi(a_k)] \nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}x$$

para todo $t \in [0, t_1]$, $k \geq k_0$, $\varphi_1 \in W_k$. Portanto, escolhendo $\varphi_1 = u_{k,t} \in W_k$, temos pela desigualdade de Young que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{k,t}\|^2_{L^2(\Omega)} + d_1\|\nabla u_{k,t}\|^2_{L^2(\Omega)^3} &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}[u_k \nabla\psi(a_k)]\nabla u_{k,t}\,\mathrm{d}x \\ &\leq \epsilon\|\nabla u_{k,t}\|^2_{L^2(\Omega)^3} + C(\epsilon)\left\|\frac{\partial}{\partial t}[u_k\nabla\psi(a_k)]\right\|^2_{L^2(\Omega)^3}.\end{aligned}$$

Se escolhemos $\epsilon = \frac{d_1}{2}$, $C(\epsilon) = \frac{1}{2d_1}$ na desigualdade acima, temos

$$\frac{d}{dt}\|u_{k,t}\|^2_{L^2(\Omega)} + d_1\|\nabla u_{k,t}\|^2_{L^2(\Omega)^3} \leq \frac{1}{d_1}\left\|\frac{\partial}{\partial t}[u_k\nabla\psi(a_k)]\right\|^2_{L^2(\Omega)^3}, \ \ \forall k \geq k_0, t \in [0, t_1].$$

Finalmente, integrando a desigualdade anterior em $[0, t]$, com $t \leq t_1$, concluímos que

$$\begin{aligned}&\|u_{k,t}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + d_1\int_0^t \|\nabla u_{k,t}\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s \\ &\qquad \leq \|u_{k,t}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{d_1}\int_0^t \left\|\frac{\partial}{\partial t}[u_k\nabla\psi(a_k)]\right\|^2_{L^2(\Omega)^3}\mathrm{d}s \qquad (4.39)\end{aligned}$$

para todo $k \geq k_0$.

Agora, note que $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (Proposição 1.4), logo a desigualdade de Minkowski implica que

$$\begin{aligned}&\int_0^t \left\|\frac{\partial}{\partial t}[u_k\nabla\psi(a_k)]\right\|^2_{L^2(\Omega)^3}\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \left\|u_{k,t}\psi'(a_k)\nabla a_k + u_k\psi''(a_k)a_{k,t}\nabla a_k + u_k\psi'(a_k)\nabla a_{k,t}\right\|^2_{L^2(\Omega)^3}\mathrm{d}s \\ &\leq \int_0^t \Big(\|u_{k,t}\psi'(a_k)\nabla a_k\|_{L^2(\Omega)^3} + \|u_k\psi''(a_k)a_{k,t}\nabla a_k\|_{L^2(\Omega)^3} \\ &+ \|u_k\psi'(a_k)\nabla a_{k,t}\|_{L^2(\Omega)^3}\Big)^2\mathrm{d}s \leq 3\Big(\int_0^t \|u_{k,t}\psi'(a_k)\nabla a_k\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t \|u_k\psi''(a_k)a_{k,t}\nabla a_k\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s + \int_0^t \|u_k\psi'(a_k)\nabla a_{k,t}\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s\Big). \qquad (4.40)\end{aligned}$$

Então, basta limitar cada termo no lado direito das duas desigualdade acima por alguma constante independente de t_1 e k. Agora, note que se $t \leq t_1$ e $k \in \mathbb{N}$ qualquer,

$$\|a_k\|_{L^\infty(0,t;H^3(\Omega))} = \|P_k(a)\|_{L^\infty(0,t;H^3(\Omega))} \leq \|a\|_{L^\infty(0,t;H^3(\Omega))} \leq C,$$

por (1.e). Logo, existe um $C > 0$ independente de t_1 e de k tal que $\|a_k\|_{L^\infty(0,t;H^3(\Omega))} \leq C$ para todo $t \leq t_1$, $k \geq 0$. Da mesma forma, podemos obter as majorações análogas às obtidas em (1.a)-(1.e) para (u_k, a_k). Ou seja, existe $C > 0$ independente de t_1 e k tal que

$$\|a_k\|_{L^\infty(0,t_1;H^3(\Omega))} \leq C \tag{(1.e)'}$$

$$\|a_{k,t}\|_{L^\infty(0,t_1;H^1(\Omega))} \leq C \tag{(1.d)'}$$

$$\|u_k\|_{L^2(0,t_1;H^2(\Omega))} \leq C \tag{(1.b)'}$$

$$\|u_k\|_{L^\infty(0,t_1;H^1(\Omega))} \leq C \tag{(1.b)'}$$

$$\|u_{k,t}\|_{L^2(0,t_1;L^2(\Omega))} \leq C \tag{(1.c)'}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Assim, pela inclusão $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e o raciocínio empregado para provar a desigualdade (3.42), temos que existe um $K > 0$ suficientemente grande e independente de t_1, k tal que $\forall t \leq t_1, \ \forall k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\int_0^t \|u_{k,t}\psi'(a_k)\nabla a_k\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s &\leq L^2\|\nabla a_k\|^2_{L^\infty(0,t;L^\infty(\Omega)^3)}\|u_{k,t}\|^2_{L^2(0,t;L^2(\Omega))} \\ &\leq KL^2\|a_k\|^2_{L^\infty(0,t;H^3(\Omega))}\|u_{k,t}\|^2_{L^2(0,t;L^2(\Omega))} \leq C,\end{aligned} \tag{4.41}$$

por (1.e)' e (1.c)'.

Analogamente, pela desigualdade (3.42), a desigualdade de Hölder e as inclusões $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, existem $K, C > 0$ independentes de t_1 e k tais que para todo $t \leq t_1$

$$\begin{aligned}\int_0^t \|u_k\psi''(a_k)a_{k,t}\nabla a_k\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s &\leq L^2\|\nabla a_k\|^2_{L^\infty(Q_t)^3}\int_0^t\int_\Omega |u_k|^2|a_{k,t}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\ &\leq KL^2\|a_k\|^2_{L^\infty(0,t;H^3(\Omega))}\int_0^t \|u_k\|^2_{L^4(\Omega)}\|a_{k,t}\|^2_{L^4(\Omega)}\,\mathrm{d}s \\ &\leq KL^2\|a_k\|^2_{L^\infty(0,t;H^3(\Omega))}\int_0^t \|u_k\|^2_{H^2(\Omega)}\|a_{k,t}\|^2_{H^1(\Omega)} \\ &\leq KL^2\|a_k\|^2_{L^\infty(0,t;H^3(\Omega))}\|u_k\|^2_{L^2(0,t;H^2(\Omega))}\|a_{k,t}\|^2_{L^\infty(0,t;H^1(\Omega))} \leq C,\end{aligned} \tag{4.42}$$

por (1.e)', (1.b)' e (1.d)'. Finalmente, a Proposição 1.16 e a inclusão $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ (Teorema 1.1) implicam que $\forall t \leq t_1$ e $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|u_k\psi'(a_k)\nabla a_{k,t}\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s &\leq L^2\int_0^t\int_\Omega |u_k|^2|\nabla a_{k,t}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\\
&\leq L^2\int_0^t \|u_k\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla a_{k,t}\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,\mathrm{d}s\\
&\leq L^2\|\nabla a_{k,t}\|^2_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega)^3)}\|u_k\|^2_{L^2(0,t;L^\infty(\Omega))}\\
&\leq L^2\|a_{k,t}\|^2_{L^\infty(0,t;H^1(\Omega))}\|u_k\|^2_{L^2(0,t;L^\infty(\Omega))}\\
&\leq KL^2\|a_{k,t}\|^2_{L^\infty(0,t;H^1(\Omega))}\|u_k\|^2_{L^2(0,t;H^2(\Omega))} \leq C \qquad (4.43)
\end{aligned}$$

por (1.d)' e (1.b)'. Logo, as desigualdades (4.40), (4.41), (4.42) e (4.43) implicam que existe um $C > 0$ independente de t_1 tal que $\|\frac{\partial}{\partial t}[u_k\nabla\psi(a_k)]\|_{L^2(Q_{t_1})^3} \leq C$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Além disso, é possível provar que existe um $C > 0$ independente de t_1 tal que $\|u_{k,t}(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq C$ para todo $k \geq k_0$. De fato, como vale a igualdade (4.38) para todo $k \geq k_0$, por uma conta análoga a conta feita para obter a desigualdade (3.51) (substituindo $\beta(u) \leftrightarrow u$), é possível ver que existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|u_{k,t}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq (d_1+1)\Big[d_1\|\Delta u_k(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla[u_k(0)\nabla\psi(a_k(0))]\|^2_{L^2(\Omega)}\Big]\\
&\leq (d_1+1)\Big[d_1C\|u_0\|^2_{H^2(\Omega)} + \|\nabla[u_k(0)\nabla\psi(a_k(0))]\|^2_{L^2(\Omega)}\Big]
\end{aligned}$$

para todo $k \geq k_0$. Então, para provar nossa afirmação, como $u_0 \in H^2(\Omega)$ e independe de t_1, basta mostrar que existe $C > 0$ independente de t_1 tal que

$$\|\nabla[u_k(0)\nabla\psi(a_k(0))]\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \text{ para todo } k \geq k_0.$$

De fato, expandindo o termo, vemos que existe um $C > 0$ independente de t_1, tal que $\forall k \in \mathbb{N}$ vale

$$\begin{aligned}
\|\nabla[u_k(0)\nabla\psi(a_k(0))]\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\nabla u_k(0)\psi'(a_k(0))\nabla a_k(0)\|_{L^2(\Omega)}\\
&\quad + \|u_k(0)\psi''(a_k(0))|\nabla a_k(0)|^2\|_{L^2(\Omega)} + \|u_k(0)\psi'(a_k(0))\Delta a_k(0)\|_{L^2(\Omega)}\\
&\leq L\|\nabla a_k(0)\|_{L^\infty(\Omega)^3}\|\nabla u_k(0)\|_{L^2(\Omega)^3} + L\|\nabla a_k(0)\|^2_{L^\infty(\Omega)^3}\|u_k(0)\|_{L^2(\Omega)}\\
&\quad + L\|u_k(0)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\Delta a_k(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u_0\|_{H^2(\Omega)}\|a_0\|_{H^3(\Omega)} < \infty,
\end{aligned}$$

com a_0 e u_0 independentes de t_1.

Daí, a desigualdade (4.39) implica que existe um $C > 0$ independente de t_1 tal que

$$\|u_{k,t}(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \ \ \forall t \in [0, t_1], k \geq k_0 \Longrightarrow \|u_{k,t}\|_{L^\infty(0,t_1;L^2(\Omega))} \leq C \ \ \forall k \geq k_0.$$

Por outro lado, sabemos pela Seção 3.2 que $u_{k,t} \overset{\star}{\rightharpoonup} u_t$ em $L^\infty(0, t_1; L^2(\Omega))$. Em particular, tal convergência vale também para a subsequência $\{u_{k,t}\}_{k=k_0}^\infty$. Portanto, pelo Teorema 1.33 e a desigualdade anterior,

$$\|u_t\|_{L^\infty(0,t_1;L^2(\Omega))} \leq \liminf_{k \geq k_0} \|u_{k,t}\|_{L^\infty(0,t_1;L^2(\Omega))} \leq C,$$

de onde temos que $u_t \mathrel{\overline{\underline{\in}}} L^\infty(0, t_1; L^2(\Omega))$.

(1.g) $u \mathrel{\overline{\underline{\in}}} L^\infty(0, t_1; H^2(\Omega))$

Finalmente, como $u_t \mathrel{\overline{\underline{\in}}} L^\infty(0, t_1; L^2(\Omega))$ (1.f), a equação (4.18) implica que basta provar que $\nabla[u\psi'(a)\nabla a] \mathrel{\overline{\underline{\in}}} L^\infty(0, t_1; L^2(\Omega))$ para concluir que $u \mathrel{\overline{\underline{\in}}} L^\infty(0, t_1; H^2(\Omega))$. Mas, pela desigualdade (4.28), temos

$$\|\nabla[u\nabla\psi(a)]\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 3L^2 \left[\|\nabla u \nabla a\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u|\nabla a|^2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\Delta a\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]. \tag{4.44}$$

Após tomar o supremo essencial, analisaremos a desigualdade acima termo a termo. Inicialmente, note que

$$a \mathrel{\overline{\underline{\in}}} L^\infty(0, t_1; H^3(\Omega)) \Rightarrow \nabla a \mathrel{\overline{\underline{\in}}} L^\infty(0, t_1; H^2(\Omega)^3) \hookrightarrow L^\infty(Q_{t_1})^3 \tag{1.e}$$

$$u \mathrel{\overline{\underline{\in}}} L^\infty(0, t_1; H^1(\Omega)) \Rightarrow u \mathrel{\overline{\underline{\in}}} L^\infty(0, t_1; L^2(\Omega)) \tag{1.b}$$

$$u \mathrel{\overline{\underline{\in}}} L^\infty(0, t_1; H^1(\Omega)) \Rightarrow \nabla u \mathrel{\overline{\underline{\in}}} L^\infty(0, t_1; L^2(\Omega)^3) \tag{1.b}$$

pelo Teorema 1.1 e a Proposição 1.14. Logo,

$$\|\nabla u \nabla a\|_{L^\infty(0,t_1;L^2(\Omega))}^2 \leq \|\nabla a\|_{L^\infty(0,t_1;L^\infty(\Omega)^3)}^2 \|\nabla u\|_{L^\infty(0,t_1;L^2(\Omega)^3)}^2 \leq C \tag{4.45}$$

$$\|u|\nabla a|^2\|_{L^\infty(0,t_1;L^2(\Omega))}^2 \leq \|\nabla a\|_{L^\infty(0,t_1;L^\infty(\Omega)^3)}^4 \|u\|_{L^\infty(0,t_1;L^2(\Omega))}^2 \leq C, \tag{4.46}$$

e, portanto, $\nabla u \nabla a \Subset L^\infty(0,t_1;L^2(\Omega))$ e $u|\nabla a|^2 \Subset L^\infty(0,t_1;L^2(\Omega))$. Por outro lado, pela desigualdade de Hölder e a inclusão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ temos que existe um $K > 0$ independente de t_1 tal que

$$\|u\Delta a\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u|^2|\Delta a|^2 \,\mathrm{d}x \leq \|u\|^2_{L^4(\Omega)}\|\Delta a\|^2_{L^4(\Omega)} \leq K\|u\|^2_{H^1(\Omega)}\|\Delta a\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{4.47}$$

Analogamente, $a \Subset L^\infty(0,t_1;H^3(\Omega))$ (1.e) implica que $\Delta a \Subset L^\infty(0,t_1;H^1(\Omega))$. Além disso, tomando o supremo na desigualdade acima, $u \Subset L^\infty(0,t_1;H^1(\Omega))$ (1.b) implica que $u\Delta a \Subset L^\infty(0,t_1;L^2(\Omega))$. Portanto, pelas desigualdades (4.44), (4.45), (4.46) e (4.47) temos que $\nabla[u\nabla\psi(a)] \Subset L^\infty(0,t_1;L^2(\Omega))$. Daí, pela igualdade (4.18), como $u_t \Subset L^\infty(0,t_1;L^2(\Omega))$ (1.f), temos que existe $C > 0$ independente de t_1 tal que

$$\begin{aligned}\|d_1\Delta u\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))} &= \|u_t + \operatorname{div}[u\nabla\psi(a)]\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))} \\ &\leq \|u_t\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))} + \|\operatorname{div}[u\nabla\psi(a)]\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))} \leq C\end{aligned}$$

para todo $t \leq t_1$ e portanto $\Delta u \Subset L^\infty(0,t_1;L^2(\Omega))$. Logo, como $u \Subset L^\infty(0,t_1;H^1(\Omega))$ (1.b), a Proposição 1.20 nos permite concluir que de fato $u \Subset L^\infty(0,t_1;H^2(\Omega))$.

Parte 2: Note que o t_1 da primeira parte é arbitrário em P e as limitações obtidas em 1.a-1.g independem de t_1. Portanto, se (u,a) é a solução maximal em $[0,t^*)\times\Omega$, existe um $C > 0$ tal que para todo $t \in P$, temos

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^\infty(0,t;H^2(\Omega))} \leq C \qquad \|u_t\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))} \leq C \\ \|a\|_{L^\infty(0,t;H^3(\Omega))} \leq C \qquad \|a_t\|_{L^\infty(0,t;H^1(\Omega))} \leq C.\end{aligned}$$

Então, podemos provar que:

(2.a) A solução maximal (u,a) satisfaz $u \in C_s([0,t^*[;H^2(\Omega))$ e
$a \in C([0,t^*[;H^2(\Omega))$. Além disso, (u,a) possui em $[0,t^*)\times\Omega$ todas as outras regularidades descritas no teorema de existência local.

De fato, seja (t_n) sequência em P tal que $t_n \to t^{*-}$. Logo, pela definição de P, para cada n existe uma solução a^n em $[0,t_n]$ tal que $a^n \in C(0,t_n;H^2(\Omega))$ (Teorema

4.1) e esta é única e, portanto, $a\big|_{[0,t_n]} = a^n$. Por outro lado, dado $\epsilon > 0$, defina $x = t^* - \epsilon$. Proveremos que a é contínua em x. Como $t_n \to t^{*-}$, dado $\epsilon > 0$, existe um $N > 0$ tal que $t_n > t^* - \epsilon = x$ para todo $n \geq N$. Por outro lado, se x_k é uma sequência qualquer em $[0, t^*)$ tal que $x_k \to x$, existe um $k_0 > 0$ tal que $x_k < t_N$ para todo $k \geq k_0$. Assim, temos que $0 \leq x_k, x < t_N$ para todo $k \geq k_0$ e, portanto, $a^N \in C(0, t_N; H^2(\Omega))$ implica que $a^N(x_k) \to a^N(x)$ em $H^2(\Omega)$ para $k \geq k_0$. Logo, $\|a(x_k) - a(x)\|_{H^2(\Omega)} = \|a^N(x_k) - a^N(x)\|_{H^2(\Omega)} \to 0$ para $k \geq k_0$ implica que $a(x_k) \to a(x)$ em $H^2(\Omega)$. Portanto, $a \in C([0, t^*[; H^2(\Omega))$.

Agora, para provar que $u \in C_s([0, t^*[; H^2(\Omega))$, o raciocínio é análogo. De fato, pelo raciocínio acima, mantendo a mesma notação, temos que existem $k_0, N \in \mathbb{N}$ tal que $x, x_k \in [0, t_N]$ para todo $k \geq k_0$. Pela unicidade da solução, temos também que $u\big|_{[0,t_N]} = u^N$ e $u^N \in C_s(0, t_N; H^2(\Omega))$ pelo Teorema 4.1. Logo, se $x_k \to x$, então temos $u(x_k) = u^N(x_k) \rightharpoonup u^N(x) = u(x)$ em $H^2(\Omega)$ para todo $k \geq k_0$. Concluímos assim que $u(x_k) \rightharpoonup u(x)$ em $H^2(\Omega)$ e portanto $u \in C_s([0, t^*[; H^2(\Omega))$.

Em suma, se $\epsilon > 0$, como $t^* - \epsilon < t^*$ e $t_n \to t^{*-}$ em P, existe n_k tal que $t^* - \epsilon < t_{n_k}$, e todas as regularidades de (u, a) descritas no teorema de existência local podem ser garantidas em $[0, t^* - \epsilon] \times \Omega$ como consequência da regularidade de (u, a) em $[0, t_{n_k}] \times \Omega$. Daí, pela arbitrariedade de ϵ, todas as outras regularidades valem também para (u, a) em $[0, t^*) \times \Omega$.

(2.b) Existem $a^* \in H^3(\Omega)$ e $u^* \in H^2(\Omega)$ tais que

$$\lim_{t \to t^{*-}} a(t) = a^* \text{ em } H^1(\Omega) \qquad \text{e} \qquad \lim_{t \to t^{*-}} u(t) = u^* \text{ em } L^2(\Omega).$$

Faremos o caso de a, e o caso de u será análogo. Note que basta provar que existe um $a^* \in H^3(\Omega)$ tal que toda sequência $(x_n) \subset [0, t^*)$ que converge a t^* satisfaz $a(t_n) \to a^*$ em $H^1(\Omega)$. No entanto, $[0, t^*) \subset P$. De fato, se $q \in [0, t^*)$, então a restrição de (u, a) para $[0, q] \times \Omega$ é solução em $[0, q] \times \Omega$ e portanto $q \in P$. Daí, temos que é suficiente provar que existe um $a^* \in H^3(\Omega)$ tal que toda sequência $t_n \in P$ que converge a t^* satisfaz $a(t_k) \to a^*$ em $H^1(\Omega)$.

Para tanto, seja $t_n \in P$ tal que $t_n \to t^{*-}$ e, sem perda de generalidade, suponha $t_m \leq t_n$. Então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos que

$$a(t_n) - a(t_m) = \int_{t_m}^{t_n} a_t(s) \, \mathrm{d}s$$

e logo, tomando a norma em $H^1(\Omega)$, a primeira parte implica que existe um $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\|a(t_n) - a(t_m)\|_{H^1(\Omega)} &\leq \int_{t_m}^{t_n} \|a_t(s)\|_{H^1(\Omega)}\,\mathrm{d}s \leq \|a_t\|_{L^\infty(0,t_n;H^1(\Omega))}|t_n - t_m| \\ &\leq C|t_n - t_m| \leq C(|t_n - t^*| + |t^* - t_m|).\end{aligned}$$

Mas, $t_n, t_m \to t^*$ e então a desigualdade acima tende a zero quando $m, n \to \infty$. Portanto, $(a(t_n))$ é uma sequência de Cauchy em $H^1(\Omega)$ completo e, então, existe um $a^* \in H^1(\Omega)$ tal que $a(t_n) \to a^*$ em $H^1(\Omega)$.

Seja $(\overline{t_n})$ outra sequência em P tal que $\overline{t_n} \to t^{*-}$ e suponha, sem perda de generalidade, que $t_n \leq \overline{t_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos provar que $a(\overline{t_n}) \to a^*$ em $H^1(\Omega)$. De fato, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, a primeira parte e a desigualdade triangular implicam que

$$\begin{aligned}\|a(\overline{t_n}) - a(t_n)\|_{H^1(\Omega)} &\leq \left\| \int_{t_n}^{\overline{t_n}} a_t(s)\,\mathrm{d}s \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \int_{t_n}^{\overline{t_n}} \|a_t(s)\|_{H^1(\Omega)}\,\mathrm{d}s \\ &\leq \|a_t\|_{L^\infty(0,\overline{t_n};H^1(\Omega))}|\overline{t_n} - t_n| \leq C|\overline{t_n} - t_n| \\ &\leq C(|\overline{t_n} - t^*| + |t^* - t_n|) \to 0,\end{aligned}$$

pois $t_n, \overline{t_n} \to t^{*-}$. Daí, pela desigualdade de Minkowski e a convergência $a(t_n) \to a^*$, podemos concluir que existe $C > 0$ tal que

$$\|a(\overline{t_n}) - a^*\|_{H^1(\Omega)} \leq C\big(\|a(\overline{t_n}) - a(t_n)\|_{H^1(\Omega)} + \|a(t_n) - a^*\|_{H^1(\Omega)}\big) \to 0.$$

Logo, $a(\overline{t_n}) \to a^*$ em $H^1(\Omega)$ e portanto qualquer sequência t_n em P que converge a t^* pela esquerda satisfaz $a(t_n) \to a^*$ em $H^1(\Omega)$. Daí podemos concluir que existe $a^* \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\lim_{t \to t^{*-}} a(t) = a^* \text{ em } H^1(\Omega).$$

Agora, provaremos que $a^* \in H^3(\Omega)$. Primeiramente, mostraremos que

$$\|a(\tau)\|_{H^3(\Omega)} \leq \|a\|_{L^\infty(0,t^*;H^3(\Omega))} \qquad \forall \tau \in [0, t^*).$$

Por um lado, $a \in L^\infty(0,t^*;H^3(\Omega))$ implica que existe $M \subset [0,t^*]$ tal que $\mathrm{med}(M) = \mathrm{med}[0,t^*]$ e $\|a(t)\|_{H^3(\Omega)} \leq \|a\|_{L^\infty(0,t^*;H^3(\Omega))}$ para todo $t \in M$. Assim, pela densidade de M em $[0,t^*)$, dado $\tau \in [0,t^*)$ podemos tomar $(\tau_n) \subset M$ tal que $\tau_n \to \tau$. Em particular, como $\tau_n \in M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$\|a(\tau_n)\|_{H^3(\Omega)} \leq \|a\|_{L^\infty(0,t^*;H^3(\Omega))} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Daí, a inclusão $a \in C_s(0,t^*;H^3(\Omega))$ e $\tau_n \to \tau$ implicam que $a(\tau_n) \rightharpoonup a(\tau)$ em $H^3(\Omega)$ e

$$\|a(\tau)\|_{H^3(\Omega)} \leq \liminf \|a(\tau_n)\|_{H^3(\Omega)} \leq \|a\|_{L^\infty(0,t^*;H^3(\Omega))},$$

pelo Teorema 1.23 e a desigualdade anterior. Como τ é arbitrário em $[0,t^*)$, desta demonstração decorre que $\|a(\tau)\|_{H^3(\Omega)} \leq \|a\|_{L^\infty(0,t^*;H^3(\Omega))}$ para todo $\tau \in [0,t^*)$.

Em particular, se $(t_n) \subset [0,t^*)$ tal que $t_n \to t^{*-}$, então

$$\|a(t_n)\|_{H^3(\Omega)} \leq \|a\|_{L^\infty(0,t^*;H^3(\Omega))} \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, o Corolário 1.31 do teorema de Kakutani garante que existe uma subsequência t_k tal que $a(t_k) \rightharpoonup c^*$ em $H^3(\Omega)$. Provaremos que $c^* = a^*$. De fato, $a(t_k) \rightharpoonup c^*$ em $H^3(\Omega)$ implica pela Proposição 1.24 que $a(t_k) \rightharpoonup c^*$ em $H^1(\Omega)$. Por outro lado, como $t_k \to t^{*-}$, $a(t_k) \to a^*$ em $H^1(\Omega)$ pelo que já fizemos. Em particular, $a(t_k) \rightharpoonup a^*$ em $H^1(\Omega)$ (Teorema 1.23). Então, pela unicidade do limite, $c^* = a^*$. Além disso, $a(t_k) \rightharpoonup a^*$ em $H^3(\Omega)$ implica que

$$\|a^*\|_{H^3(\Omega)} \leq \liminf \|a(t_k)\|_{H^3(\Omega)} \leq \|a\|_{L^\infty(0,t^*;H^3(\Omega))} < \infty$$

pelo Teorema 1.23 e o parágrafo anterior. Então, $a^* \in H^3(\Omega)$.

O caso $u^* \in H^2(\Omega)$ é análogo. Basta trabalhar como feito acima, substituindo a por u, a norma de $H^1(\Omega)$ pela norma de $L^2(\Omega)$, e usar a inclusão $u \in C_s([0,t^*);H^2(\Omega))$ no lugar da $a \in C_s([0,t^*);H^3(\Omega))$. Daí, é possível encontrar $u^* \in H^2(\Omega)$ tal que

$$\lim_{t \to t^{*-}} u(t) = u^* \text{ em } L^2(\Omega)$$

e uma sequência s_k em P tal que $u(s_k) \rightharpoonup u^*$ em $H^2(\Omega)$.

(2.c) Existe uma solução única do problema (2.1), com as condições de regularidade do Teorema 4.1, que é um prolongamento para (u, a).

Por um raciocínio parecido ao feito na demonstração do Teorema 4.1, é possível provar que $\frac{\partial u^*}{\partial n} = 0$ em $H^{1/2}(\Gamma)$. De fato, seja s_k sequência em P tal que $u(s_k) \rightharpoonup u^*$ em $H^2(\Omega)$, cuja existência é garantida pelo raciocínio feito no item anterior. Por um lado,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : H^2(\Omega) \to H^1(\Omega) \qquad i \in \{1, 2, 3\}$$

é obviamente linear, pela linearidade da derivada, e contínuo pelo Lema A.1. Portanto, se $i \in \{1, 2, 3\}$, $\frac{\partial}{\partial x_i}$ é contínuo na topologia fraca pelo Teorema 1.60. Daí,

$$\left[u(s_k) \rightharpoonup u^* \text{ em } H^2(\Omega)\right] \Longrightarrow \left[\frac{\partial u}{\partial x_i}(s_k) \rightharpoonup \frac{\partial u^*}{\partial x_i} \text{ em } H^1(\Omega)\right].$$

Então, a continuidade fraca do operador traço em $H^1(\Omega)$ implica que

$$\gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(s_k)\right) \rightharpoonup \gamma_0\left(\frac{\partial u^*}{\partial x_i}\right) \text{ em } H^{1/2}(\Gamma).$$

(Ver Corolário 1.63). Portanto, aplicando γ_0 coordenada a coordenada, vemos que $\gamma_0(\nabla u(s_k)) \rightharpoonup \gamma_0(\nabla u^*)$ em $H^{1/2}(\Gamma)^3$ e

$$\frac{\partial u}{\partial n}(s_k) = \gamma_0(\nabla u(s_k)) \cdot \vec{n} \rightharpoonup \gamma_0(\nabla u^*) \cdot \vec{n} = \frac{\partial u^*}{\partial n} \text{ em } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Agora, lembre que $s_k \in P$ implica que $\frac{\partial u}{\partial n}(s_k) = 0$ em $H^{\frac{1}{2}-\alpha_1}(\Gamma)$, com $0 < \alpha_1 < \frac{1}{2}$, pela definição de P e o teorema de existência e unicidade local. Então, em particular, $\frac{\partial u}{\partial n}(s_k) = 0$ quase sempre em Γ, pois $H^{\frac{1}{2}-\alpha_1}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$. Logo, a convergência acima implica que $\frac{\partial u^*}{\partial n} = 0$ em $H^{1/2}(\Gamma)$.

Analogamente, é possível provar que $\frac{\partial a^*}{\partial n} = 0$ em $H^{3/2}(\Gamma)$. De fato, pelo item anterior, existe t_k sequência em P tal que $a(t_k) \rightharpoonup a^*$ em $H^3(\Omega)$. Então, trocando u por a, $H^2(\Omega)$ por $H^3(\Omega)$, e $H^{1/2}(\Gamma)$ por $H^{3/2}(\Gamma)$ no raciocínio feito acima, a afirmação segue da continuidade fraca do operador traço em $H^2(\Omega)$ e do fato que $\frac{\partial a}{\partial n}(t_k) = 0$ em $H^{1/2}(\Gamma)$ (Corolário 1.63 e Teorema 4.1).

Daí, como $u^* \in H^2(\Omega)$, $a^* \in H^3(\Omega)$, e $\frac{\partial u^*}{\partial n} = 0$ em $H^{1/2}(\Gamma)$ e $\frac{\partial a^*}{\partial n} = 0$ em $H^{3/2}(\Gamma)$, podemos aplicar o teorema de existência e unicidade local de soluções (Teorema 4.1) aos dados iniciais u^* e a^* e assim obter uma solução única (u^+, a^+) em $[t^*, t^* + \epsilon] \times \Omega$, para $\epsilon > 0$, com as condições de regularidade do Teorema 4.1. Então, se prologamos (u, a) desta forma, temos que este prolongamento é uma solução do problema em todos os pontos de $[0; t^* + \epsilon]$, exceto talvez em t^*. Portanto, temos que provar que a equação é satisfeita em $t = t^*$. Mas, de fato, pelo Teorema 4.1, temos que

$$u_t^+ - d_1 \Delta u^+ = \operatorname{div}(u^+ \nabla \psi(a^+)) \text{ em } C_s(t^*, t^* + \epsilon; L^2(\Omega)) \tag{4.48}$$

$$a_t^+ - d_2 \Delta a^+ + k_2 a^+ = k_1 u^+ \text{ em } C_s(t^*, t^* + \epsilon; H^1(\Omega)) \tag{4.49}$$

e que cada termo de (4.48) está em $C_s(t^*, t^* + \epsilon; L^2(\Omega))$ e cada termo de (4.48) está em $C_s(t^*, t^* + \epsilon; H^1(\Omega))$. Portanto, se $t \to t^*$ pela direita, cada termo das igualdades (4.48) e (4.49) tendem ao respectivo termo avaliado em $t = t^*$ na topologia fraca em $L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$, respectivamente. Assim, tomando o limite de $t \to t^*$ pela direita nas igualdades (4.48) e (4.49), temos pela continuidade de (u^+, a^+) e a unicidade do limite que

$$u_t^+(t^*, x) - d_1 \Delta u^+(t^*, x) = \operatorname{div}(u^+(t^*, x) \nabla \psi(a^+(t^*, x))) \text{ em } L^2(\Omega)$$
$$a_t^+(t^*, x) - d_2 \Delta a^+(t^*, x) + k_2 a^+(t^*, x) = k_1 u^+(t^*, x) \text{ em } H^1(\Omega).$$

Então, justapondo (u, a) e (u^+, a^+) em t^* obtemos uma solução única do problema original (2.1) que satisfaz por construção as condições de regularidade do Teorema 4.1 em $[0, t^* + \epsilon] \times \Omega$, com $\epsilon > 0$. Mas isto é um absurdo, pois desta forma temos que $t^* + \epsilon \in P$, contradizendo assim a maximalidade de t^*. Logo, $t^* = T$ e o teorema está provado.

$\square$

Demonstração da Proposição 1.13

Note que

Lema A.1 *Se* $s \geq |\alpha| \geq 0$*, então* $\|D^\alpha v\|^2_{H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^3)} \leq \|v\|^2_{H^s(\mathbb{R}^3)}$.

Prova: Para tanto, afirmamos que pela definição da Transformada de Fourier é possível provar que $\widehat{D^\alpha v} = i^{|\alpha|} x^\alpha \widehat{v}$. (Ver, por exemplo, Medeiros [13], página 19). Então, pela definição da norma em $H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^3)$, vemos que

$$\begin{aligned}
\|D^\alpha v\|^2_{H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^3)} &= \int_{\mathbb{R}^3} (1+\|x\|^2)^{s-|\alpha|} |\widehat{D^\alpha v}|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} (1+\|x\|^2)^{s-|\alpha|} |x^\alpha|^2 |\widehat{v}|^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} (1+\|x\|^2)^{s-|\alpha|} |x_1|^{2\alpha_1} |x_2|^{2\alpha_2} |x_3|^{2\alpha_3} |\widehat{v}|^2 \,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} (1+\|x\|^2)^{s-|\alpha|} \|x\|^{2|\alpha|} |\widehat{v}|^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^3} (1+\|x\|^2)^{s} |\widehat{v}|^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \|v\|^2_{H^s(\mathbb{R}^3)},
\end{aligned}$$

pois

$$|x_1|^{2\alpha_1} |x_2|^{2\alpha_2} |x_3|^{2\alpha_3} \leq \|x\|^{2\alpha_1} \|x\|^{2\alpha_2} \|x\|^{2\alpha_3} = \|x\|^{2|\alpha|} \leq (1+\|x\|^2)^{|\alpha|}$$

para todo $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, e $|\alpha| \geq 0$. $\square$

Com isto, podemos provar a Proposição 1.13 reiterada aqui:

Proposição A.2 *As seguintes aplicações são lineares e contínuas*

a) $\nabla : H^m(\Omega) \longrightarrow H^{m-1}(\Omega)^3$, *$m = 1, 2, 3$, e $m = 2 - \alpha$, com $0 < \alpha < 1$,*

b) $\Delta : H^m(\Omega) \longrightarrow H^{m-2}(\Omega)$, *$m = 2, 3$,*

c) $\nabla\Delta : H^3(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)^3$.

Prova: É fácil ver que estas aplicações estão bem definidas. Além disso, note que a linearidade é consequência da linearidade da derivada.

a) Seja $s \geq 1$. Então pelo lema anterior,

$$\|\nabla v\|^2_{H^{s-1}(\mathbb{R}^3)^3} = \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha v\|^2_{H^{s-1}(\mathbb{R}^3)} \leq 3\|v\|^2_{H^s(\mathbb{R}^3)}.$$

b) Analogamente, seja $s \geq 2$ inteiro. Então, a desigualdade de Minkowski em $H^{s-2}(\mathbb{R}^3)$, a Proposição 1.4, e o lema anterior implicam que

$$\begin{aligned}
\|\Delta v\|^2_{H^{s-2}(\mathbb{R}^3)} &= \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial {x_3}^2} \right\|^2_{H^{s-2}(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq \left(C\left(\left\| \frac{\partial^2 v}{\partial {x_1}^2} \right\|_{H^{s-2}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial {x_2}^2} \right\|_{H^{s-2}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial {x_3}^2} \right\|_{H^{s-2}(\mathbb{R}^3)} \right) \right)^2 \\
&\leq 3C^2 \sum_{i=1}^{3} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial {x_i}^2} \right\|^2_{H^{s-2}(\mathbb{R}^3)} \leq 9C^2 \|v\|^2_{H^s(\mathbb{R}^3)}
\end{aligned}$$

c) Finalmente, se $s \geq 3$ inteiro, os dois itens anteriores implicam que

$$\|\nabla\Delta v\|^2_{H^{s-3}(\mathbb{R}^3)^3} \leq 3\|\Delta v\|^2_{H^{s-2}(\mathbb{R}^3)} \leq 27C^2\|v\|^2_{H^s(\mathbb{R}^3)}.$$

Em particular, tomando as restrições de todas as $v \in H^s(\mathbb{R}^3)$ com $v|_\Omega = u$, então a definição da norma em $H^s(\Omega)$ e os itens (a)-(c) implicam que vale a Proposição 1.13. □

Note também que

Lema A.3 *Se $u, \nabla u \in L^2(\Omega)$, então $\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3}$.*

De fato, pelas definições dadas na Seção 1.1,

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq 1} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^3}.$$

□

Apêndice B

Propriedades do truncamento

O objetivo deste apêndice é provar algumas propriedades do truncamento β. Começamos com o Lema 3.13, aqui reiterado:

Lema B.1 (Lema 3.13) *Existe uma constante $C_0 > 0$ tal que*

$$|\beta(u_1) - \beta(u_2)| \leq C_0|u_1 - u_2|$$

para todo $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$.

Prova: Lembramos a equação (2.3):

$$\beta(u)(t,x) = \beta_M(u)(t,x) = \begin{cases} -\frac{3M}{2} & \text{se } u(t,x) \leq -2M, \\ \frac{u^2}{2M} + 2u + \frac{M}{2} & \text{se } -2M \leq u(t,x) \leq -M, \\ u(t,x) & \text{se } |u(t,x)| \leq M \\ -\frac{u^2}{2M} + 2u - \frac{M}{2} & \text{se } M \leq u(t,x) \leq 2M, \\ \frac{3M}{2} & \text{se } u(t,x) \geq 2M. \end{cases}$$

Para facilitar a notação, defina $A := (\infty, -2M]$, $B := [-2M, -M]$, $C := [-M, M]$, $D := [M, 2M]$ e $E := [2M, \infty)$. Em cada caso i ($i = 1, \dots 15$) encontraremos um $C_i > 0$ tal que vale $|\beta(u_1) - \beta(u_2)| \leq C_i|u_1 - u_2|$. Desta forma, se $C_0 := \max\{C_i : i = 1, \dots 15\}$, temos $|\beta(u_1) - \beta(u_2)| \leq C_0|u_1 - u_2|$ para todo $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$. Agrupamos alguns casos que são análogos por simetria.

<u>Casos 1 e 2</u>: Se $u_1, u_2 \in A$ ou $u_1, u_2 \in E$, então $|\beta(u_1) - \beta(u_2)| = 0 \leq |u_1 - u_2|$.

<u>Caso 3</u>: Se $u_1, u_2 \in C$, então $|\beta(u_1) - \beta(u_2)| = |u_1 - u_2|$.
<u>Casos 4 e 5</u>: Se $u_1, u_2 \in B$, então $|u_1 + u_2| \leq 4M$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
|\beta(u_1) - \beta(u_2)| &= \left| \frac{{u_1}^2}{2M} + 2u_1 + \frac{M}{2} - \left(\frac{{u_2}^2}{2M} + 2u_2 + \frac{M}{2} \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2M}(u_1 + u_2)(u_1 - u_2) + 2(u_1 - u_2) \right| \\
&\leq |u_1 - u_2| \left(\frac{1}{2M}|u_1 + u_2| + 2 \right) \\
&\leq 4|u_1 - u_2|
\end{aligned}$$

Se $u_1, u_2 \in D$, o caso é absolutamente análogo e obtemos também que

$$|\beta(u_1) - \beta(u_2)| \leq 4|u_1 - u_2|.$$

<u>Caso 6</u>: Se $u_1 \in A$ e $u_2 \in E$, então $|u_1 - u_2| \geq 4M$. Logo,

$$|\beta(u_1) - \beta(u_2)| = \left| -\frac{3M}{2} - \frac{3M}{2} \right| = 3M \leq 4M \leq |u_1 - u_2|$$

<u>Casos 7 e 8</u>: Se $u_1 \in A$ e $u_2 \in D$, temos que $|u_1 - u_2| \geq 3M$ e $|u_2| \leq 2M$. Logo

$$\begin{aligned}
|\beta(u_1) - \beta(u_2)| &= \left| -\frac{3M}{2} - \left(-\frac{u_2^2}{2M} + 2u_2 - \frac{M}{2} \right) \right| = \left| \frac{u_2^2}{2M} - 2u_2 - M \right| \\
&\leq 7M \leq 9M \leq 3(3M) \leq 3|u_1 - u_2|
\end{aligned}$$

O caso $u_1 \in E$ e $u_2 \in B$ é inteiramente análogo e obtemos também

$$|\beta(u_1) - \beta(u_2)| \leq 3|u_1 - u_2|.$$

<u>Casos 9 e 10</u>: Se $u_1 \in A$ e $u_2 \in C$, então $|u_1 - u_2| \geq M$ e $|u_2| \leq M$. Portanto,

$$|\beta(u_1) - \beta(u_2)| \leq \left| -\frac{3M}{2} - u_2 \right| \leq \frac{5M}{2} \leq 3M \leq 3|u_1 - u_2|$$

O caso $u_1 \in E$, $u_2 \in C$ é absolutamente análogo e obtemos também

$$|\beta(u_1) - \beta(u_2)| \leq 3|u_1 - u_2|$$

Caso 11: Se $u_1 \in B$ e $u_2 \in D$, então $|u_1 - u_2| \geq 2M$, $|u_1| \leq 2M$ e $|u_2| \leq 2M$ e, portanto,

$$\begin{aligned}|\beta(u_1) - \beta(u_2)| &\leq \left|\frac{u_1^2}{2M} + 2u_1 + \frac{M}{2} - \left(-\frac{u_2^2}{2M} + 2u_2 - \frac{M}{2}\right)\right| \\ &\leq 13M \leq 14M = 7(2M) \leq 7|u_1 - u_2|.\end{aligned}$$

Casos 12 e 13: Se $u_1 \in B$ e $u_2 \in C$, então $-M \leq u_2$ e portanto, subtraindo u_1 de ambos os lados, temos que $-M - u_1 \leq u_2 - u_1 \leq |u_1 - u_2|$. Por outro lado, é fácil ver que $u_1 \in B$ implica que

$$0 \leq \frac{u_1^2}{2M} + u_1 + \frac{M}{2} \leq \frac{1}{2}(-u_1 - M).$$

Logo, por estas desigualdades temos que

$$\begin{aligned}|\beta(u_1) - \beta(u_2)| &= \left|\frac{u_1^2}{2M} + 2u_1 + \frac{M}{2} - u_2\right| = \left|\frac{u_1^2}{2M} + u_1 + \frac{M}{2} + (u_1 - u_2)\right| \\ &\leq \left|\frac{u_1^2}{2M} + u_1 + \frac{M}{2}\right| + |u_1 - u_2| = \frac{u_1^2}{2M} + u_1 + \frac{M}{2} + |u_1 - u_2| \\ &\leq \frac{1}{2}(-M - u_1) + |u_1 - u_2| \leq \frac{1}{2}|u_1 - u_2| + |u_1 - u_2| \\ &= \frac{3}{2}|u_1 - u_2|.\end{aligned}$$

Analogamente, se $u_1 \in D$ e $u_2 \in C$, $-M \leq u_2 \to u_1 - M \leq u_1 - u_2 \leq |u_1 - u_2|$ e

$$0 \leq \frac{u_1^2}{2M} - u_1 + \frac{M}{2} \leq \frac{1}{2}(u_1 - M),$$

e portanto

$$\begin{aligned}|\beta(u_1) - \beta(u_2)| &= \left|-\frac{u_1^2}{2M} + 2u_1 - \frac{M}{2} - u_2\right| = \left|-\frac{u_1^2}{2M} + u_1 - \frac{M}{2} + (u_1 - u_2)\right| \\ &\leq \left|-\frac{u_1^2}{2M} + u_1 - \frac{M}{2}\right| + |u_1 - u_2| = \frac{u_1^2}{2M} - u_1 + \frac{M}{2} + |u_1 - u_2| \\ &\leq \frac{1}{2}(u_1 - M) + |u_1 - u_2| \leq \frac{1}{2}|u_1 - u_2| + |u_1 - u_2| = \frac{3}{2}|u_1 - u_2|.\end{aligned}$$

Casos 14 e 15: Seja $u_1 \in A$ e $u_2 \in B$ e defina $\Delta_1 = u_2 + 2M \geq 0$. Note que $|u_1 - u_2| \geq \Delta_1$. É fácil ver também que

$$0 \leq \frac{u_2^2}{2M} + 2u_2 + 2M \leq \frac{u_2}{2} + M = \frac{1}{2}\Delta.$$

Portanto, temos a desigualdade:

$$\begin{aligned}|\beta(u_1)-\beta(u_2)| &= \left| -\frac{3M}{2} - \left(\frac{u_2^2}{2M} + 2u_2 + \frac{M}{2}\right)\right| = \left| -\frac{u_2^2}{2M} - 2u_2 - 2M\right| \\ &= \frac{u_2^2}{2M} + 2u_2 + 2M \le \frac{u_2}{2} + M = \frac{1}{2}\Delta_1 \le \frac{1}{2}|u_1 - u_2|.\end{aligned}$$

Finalmente, de maneira análoga à feita acima, se $u_1 \in E$ e $u_2 \in D$, definimos $\Delta_2 = 2M - u_2 \ge 0$. Note que $|u_1 - u_2| \ge \Delta_2$ e

$$0 \le \frac{u_2^2}{2M} - 2u_2 + 2M \le -\frac{u_2}{2} + M = \frac{1}{2}\Delta.$$

Portanto, podemos concluir que

$$\begin{aligned}|\beta(u_1)-\beta(u_2)| &= \left|\frac{3M}{2} - \left(-\frac{u_2^2}{2M} + 2u_2 - \frac{M}{2}\right)\right| = \left|\frac{u_2^2}{2M} - 2u_2 + 2M\right| \\ &= \frac{u_2^2}{2M} - 2u_2 + 2M \le -\frac{u_2}{2} + M = \frac{1}{2}\Delta \le \frac{1}{2}|u_1 - u_2|\end{aligned}$$

Assim, esgotamos os casos e podemos afirmar que $C_0 = 7$ satisfaz o Lema 3.13.

□

Agora, derivando β, podemos obter o seguinte:

$$\beta'(u)(t,x) = \beta'_M(u)(t,x) = \begin{cases} \frac{u}{M} + 2 & \text{se } -2M \le u(t,x) \le -M, \\ 1 & \text{se } |u(t,x)| \le M \\ -\frac{u}{M} + 2 & \text{se } M \le u(t,x) \le 2M, \\ 0 & \text{se } |u(t,x)| \ge 2M. \end{cases} \tag{B.1}$$

Daí, temos que

Proposição B.2 *Supondo $M \ge 1$, existe um $C_1 > 0$ tal que*

$$|\beta'(u_1) - \beta'(u_2)| \le C_1|u_1 - u_2| \qquad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}.$$

Prova: A demonstração é feita considerando os casos e agrupando casos simetricamente análogos, como na proposição anterior.

Casos 1-4: Se $u_1, u_2 \in A, C$ ou E, temos que $|\beta'(u_1) - \beta'(u_2)| = 0 \le |u_2 - u_2|$. Analogamente, se $u_1 \in A$ e $u_2 \in E$, temos $|\beta'(u_1) - \beta'(u_2)| = 0 \le |u_2 - u_2|$.

Casos 5-6: Se $u_1, u_2 \in B$ ou $u_1, u_2 \in D$, temos que $|\beta'(u_1) - \beta'(u_2)| = \frac{1}{M}|u_1 - u_2|$.

Casos 7-8: Se $u_1 \in A$ e $u_2 \in D$ ou $u_1 \in E$ e $u_2 \in B$, temos que $|u_1 - u_2| \geq 3M$ e portanto $|\beta'(u_1) - \beta'(u_2)| = |\frac{u_2}{M} \mp 2| \leq 4 \leq 4M \leq 2(3M) \leq 2|u_1 - u_2|$.

Casos 9-10: Se $u_1 \in A$ e $u_2 \in C$ ou $u_1 \in C$ e $u_2 \in E$, temos que $|u_1 - u_2| \geq M$ e portanto $|\beta'(u_1) - \beta'(u_2)| = 1 \leq M \leq |u_1 - u_2|$.

Caso 11: Se $u_1 \in B$ e $u_2 \in D$, temos que $|u_1 - u_2| \geq 2M$ e portanto $|\beta'(u_1) - \beta'(u_2)| = \frac{1}{M}|u_1 + u_2| \leq 4 \leq 4M = 2(2M) \leq 2|u_1 - u_2|$.

Casos 12 e 13: Se $u_1 \in B$ e $u_2 \in C$, lembre do caso 12 da proposição anterior, que $0 \leq -M - u_1 \leq u_2 - u_1 \leq |u_1 - u_2|$. Portanto

$$|\beta'(u_1) - \beta'(u_2)| = \frac{1}{M}|u_1 + M| = \frac{1}{M}(-M - u_1) \leq \frac{1}{M}|u_1 - u_2|.$$

Analogamente, se $u_1 \in D$ e $u_2 \in C$, então pelo caso 13 anterior, $0 \leq u_1 - M \leq u_1 - u_2 \leq |u_1 - u_2|$ e portanto

$$|\beta'(u_1) - \beta'(u_2)| = \frac{1}{M}|M - u_1| = \frac{1}{M}(u_1 - M) \leq \frac{1}{M}|u_1 - u_2|.$$

Casos 14 e 15: Se $u_1 \in A$ e $u_2 \in B$, lembre que pelo caso 14 anterior, $0 \leq u_2 + 2M \leq |u_1 - u_2|$ e portanto

$$|\beta'(u_1) - \beta'(u_2)| = \frac{1}{M}|u_2 + 2M| = \frac{1}{M}(u_2 + 2M) \leq \frac{1}{M}|u_1 - u_2|.$$

Finalmente, pelo raciocínio do caso 15 anterior, se $u_1 \in E$ e $u_2 \in D$, então $0 \leq 2M - u_2 \leq |u_1 - u_2|$ e portanto

$$|\beta'(u_1) - \beta'(u_2)| = \frac{1}{M}|u_2 - 2M| = \frac{1}{M}(2M - u_2) \leq \frac{1}{M}|u_1 - u_2|.$$

Assim, esgotamos os casos e podemos afirmar que $C_1 = 2$ satisfaz à Proposição B.2.

□

Daí, podemos provar a seguinte proposição:

Proposição B.3 *Se $M \geq 1$ e $u \in C(0,T; L^\infty(\Omega))$, então $\beta(u) \in C(0,T; L^\infty(\Omega))$ e $\beta'(u) \in C(0,T; L^\infty(\Omega))$.*

Prova: De fato, seja $t, t_1 \in [0, T]$ arbitrários, então

$$\|\beta(u(t)) - \beta(u(t_1))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_0 \|u(t) - u(t_1)\|_{L^\infty(\Omega)}$$

e

$$\|\beta'(u(t)) - \beta'(u(t_1))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1 \|u(t) - u(t_1)\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Logo, se $t \to t_1$ em $[0, T]$, $u \in C(0, T; L^\infty(\Omega))$ implica que $u(t) \to u(t_1)$ em $L^\infty(\Omega)$ e, portanto, $\beta(u(t)) \to \beta(u(t_1))$ e $\beta'(u(t)) \to \beta'(u(t_1))$ em $L^\infty(\Omega)$ pelas desigualdades acima. Então, $\beta(u), \beta'(u) \in C(0, T; L^\infty(\Omega))$. □

Assim provamos o Lema 3.19:

Lema B.4 (Lema 3.19) *Se $M \geq 1$, as aplicações β e β' são Lipschitzianas e portanto $u \in C(0, T; L^\infty(\Omega))$ implica que $\beta(u), \beta'(u) \in C(0, T; L^\infty(\Omega))$.*

Referências Bibliográficas

[1] R. Adams, *Sobolev Spaces*, Acad. Press, 1975.

[2] W. Alt, *Orientation of cells migrating chemotactic gradient*, *Lecture Notes in Biomath*. New York, Springer-Verlag, 1980.

[3] A. Boy, *Analysis for a System of Coupled Reaction-Diffusion Parabolic Equations Arising in Biology*, *Computers Math. Applic.* Vol. 32, No. 4, páginas 15-21. Great Britain, Elsevier Science Ltd, 1996.

[4] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces, and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2011.

[5] S. Carl, V. K. Le, D. Motreanu, *Nonsmooth Variational Problems and their Inequalities-Comparison Principles and Applications*, Springer, New York, 2007.

[6] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, 2010.

[7] G. B. Folland, *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications, Second Edition*, John Wiley & Sons, New York, 1999.

[8] P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman Publishing, Boston, 1985.

[9] E. Hille, R. Phillips. *Functional Analysis and Semi-Groups*, AMS, Providence, 1957.

[10] W. Jäger, S. Luckhaus, *On explosions of solutions to a system of partial differential equations modelling chemotaxis*, *Transactions of American Mathematical Society* V. 329, #2, p. 819-824, AMS, New York, 1992.

[11] O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Academic Press, New York, 1968.

[12] J. L. Lions, M. Magenes, *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications, V. I*, Dunos, Paris, 1968.

[13] L. A. Medeiros, M. M. Miranda, *Espaços de Sobolev e Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos*, Rio de Janeiro, UFRJ. IM, 2000.

[14] C. A. Moura, *Análise Funcional para Aplicações*, Rio de Janeiro, Ed. Ciência Moderna, 2002.

[15] V. P. Mikhailov, *Partial Differential Equations*, Moscow, Mir Publishers, 1978.

[16] J. D. Murray, *Mathematical Biology I- An introduction*, 3a edição, New York, Springer, 2002.

[17] J. D. Murray, *Mathematical Biology II- Spatial Models and Biomedical Applications*, 3a edição, New York, Springer, 2003.

[18] R. Schaaf, *Global branches of one dimensional stationary solutions to chemotactixis systems and stability*, *Lecture Notes in Biomath* Vol 55, p. 351-349, New York, Springer, 1984.

[19] J. Simon, *Compact Sets in the Space* $L^p(0,T;B)$. *Annali di Matematica pura ed applicata*, Milão, (IV) Vol. CXLVI, p. 65-96, 1987.

[20] R. Temam, *Navier-Stokes Equations*, Vol 2. Amsterdã, North Holland, 1979.