

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR *Rafael Bittencourt*  
*Ferreira*..... E APROVADA  
PELA COMISSÃO JULGADORA EM *18 / 02 / 2009*.  
*Katia Lucchesi Cavalca* .  
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

# **Análise Numérica de Mancais Hidrodinâmicos Lisos e Ranhurados Utilizando o Método dos Volumes Finitos**

Autor: **Rafael Bittencourt Ferreira**  
Orientadora: **Katia Lucchesi Cavalca**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

# **Análise Numérica de Mancais Hidrodinâmicos Lisos e Ranhurados Utilizando o Método dos Volumes Finitos**

Autor: Rafael Bittencourt Ferreira  
Orientadora: Katia Lucchesi Cavalca

Curso: Engenharia Mecânica  
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2009  
S.P. – Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

F413a Ferreira, Rafael Bittencourt  
Análise numérica de mancais hidrodinâmicos lisos e  
ranhurados utilizando o método dos volumes finitos /  
Rafael Bittencourt Ferreira. --Campinas, SP: [s.n.], 2009.

Orientador: Katia Lucchesi Cavalca.  
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Mancais. 2. Método dos volumes finitos. 3.  
Superfícies (Tecnologia). I. Cavalca, Katia Lucchesi. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Numerical analysis of smooth and grooved journal bearings  
using the finite volume method

Palavras-chave em Inglês: Bearings, Finite volume method, Surfaces  
(Technology)

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Euclides de Mesquita Neto, Gilberto Pechoto de Melo

Data da defesa: 18/02/2009

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO**

**Análise Numérica de Mancais Hidrodinâmicos  
Lisos e Ranhurados Utilizando o Método dos  
Volumes Finitos**

Autor: Rafael Bittencourt Ferreira  
Orientador: Katia Lucchesi Cavalca

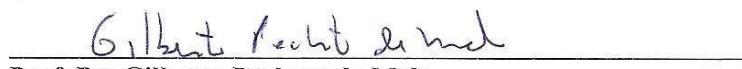
A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



Prof. Dra. Katia Lucchesi Cavalca, Presidente  
Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de Engenharia Mecânica



Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto  
Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de Engenharia Mecânica



Prof. Dr. Gilberto Pechoto de Melo  
Universidade Estadual de Paulista – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Campinas, 18 de fevereiro de 2009

## **Dedicatória:**

Dedico este trabalho aos meus pais.

## **Agradecimentos**

Aos meus pais Alaíde e Permínio pelo incondicional incentivo durante toda a minha vida e pela imensa ajuda para vencer cada etapa.

A minha noiva Eloisa pelo apoio e compreensão durante todos os dias que eu estive empenhado na conclusão deste estudo.

A minha orientadora Katia, que me ofertou o desafio e me auxiliou durante todas as etapas do trabalho de maneira correta e incentivadora.

Aos meus amigos Gregory, Rogério, Rafael, Hélio e Marcel com os quais pude compartilhar e ganhar muitos momentos de alegria e apoio.

Finalmente, agradeço ao Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica da Unicamp e a CAPES, pela bolsa de estudos concedida durante o período de pesquisa, sem a qual teria sido impossível concluir o trabalho.

*Viver é enfrentar um problema atrás do outro.  
O modo como você os encara é que faz toda a diferença.*

## Resumo

FERREIRA, Rafael Bittencourt, *Análise numérica de um mancal hidrodinâmico ranhurado pelo método dos volumes finitos*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2009. 112 p. Dissertação (Mestrado).

Desde os primeiros estudos numéricos sobre lubrificação em mancais hidrodinâmicos até a atualidade, existiram relativamente poucos trabalhos abordando o problema através do método dos volumes finitos. Na verdade, a maioria dos estudos, na área de lubrificação, utiliza a equação de Reynolds e o método das diferenças finitas para estabelecer o campo de pressão gerado no filme de óleo, mesmo sendo este tipo de abordagem inviável em certos casos, pois para geometrias mais complexas, ou com certas condições dinâmicas do sistema, a qualidade da discretização e a consistência dos resultados gerados pela equação de Reynolds se mostram insuficientes. Sendo assim, este trabalho trata da análise do campo de pressão em um filme gerado através do efeito hidrodinâmico em um mancal radial cilíndrico plano. Para tanto, o fluido de lubrificação é colocado em condição isotérmica e em regime de escoamento laminar. Para avaliar o campo de pressão é desenvolvido um algoritmo que determina a solução através do método dos volumes finitos para a equação simplificada de Reynolds em um domínio com duas dimensões, e segue com as seguintes etapas: construção da malha, integração das equações dentro dos volumes, definição das equações discretizadas, estabelecimento de condições iniciais e de contorno e avaliação do campo de pressão no domínio de cálculo. Outro ponto analisado é a influência de ranhuras nos mancais, as quais trazem novos elementos para o comportamento do mancal, tais como a redução da pressão no filme de óleo e a maior retenção do fluido entre o eixo e o mancal. Ao final, é possível concluir que a grande importância desta abordagem está na similaridade do método dos volumes finitos com a tradicional representação diferencial do escoamento em volumes de controle, tornando mais claros os conceitos físicos envolvidos, outro



ponto abordado é a comparação com o método das diferenças finitas e a solução analítica de Ocvirk, com esses resultados é possível avaliar as principais características e vantagens de cada método. Com respeito ao campo de pressão, também é possível chegar aos valores das forças de sustentação do eixo e ainda avaliar os coeficientes de rigidez do mancal, que são fundamentais no estudo da dinâmica de máquinas rotativas.

*Palavras Chave*

Mancais Hidrodinâmicos, Método dos Volumes Finitos, Ranhuras.

## Abstract

FERREIRA, Rafael Bittencourt, *Análise numérica de um mancal hidrodinâmico ranhurado pelo método dos volumes finitos*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2009. 112 p. Dissertação (Mestrado).

Since the first studies on hydrodynamic journal bearings using numerical methods until today, there has been relatively few studies addressing the problem through the Finite Volume Method. Indeed, the majority of studies in the area of lubrication use the equation of Reynolds and method of finite differences to establish the field of pressure generated in the oil film, even if this type of approach is not viable in certain cases, specially for complex geometries or for certain dynamic conditions of the system. Thus, this work deals with the analysis of the pressure distribution in a film generated by the hydrodynamic effect in a radial radial journal bearing. Wherefore, the fluid lubrication is placed in isotherm condition and laminar flow. To evaluate the pressure distribution an algorithm is developed to determine the solution through the Finite Volume Method for the simplified Reynolds equation in a field with two dimensions, and follows with the steps: construction of the mesh, integration of equations within the volumes, the definition of discrete equations, establishment of initial conditions and boundary conditions and finally the evaluation of pressure distribution in the calculation domain.

Another point analyzed is the influence of grooves in the bearings, these grooves bring new elements for the performance of journal bearings, such as to reduce the pressure in the oil film and the greater retention of the fluid between rotor and bearing, this study is highlight also the behavior of the stiffness of the oil film in certain conditions of operation, and this dynamic parameter has high importance in studies of rotative machines response. At the end, it is possible to conclude that the great importance of this approach is the similarity of the Finite Volume Method with the traditional differential representation in studies with fluid mechanics, making

clearer the physical concepts involved, another point raised is the comparison with the Ocvirk's analytical solution, allowing to evaluate the main characteristics and the results quality for this numerical method.

*Key Words*

Journal Bearing, Finite Volume Method, Grooves.

# Índice

Dedicatória: .....	iv
Agradecimentos.....	v
Resumo.....	vii
Abstract .....	ix
Índice.....	xi
Lista de Figuras .....	xiii
Lista de Tabelas.....	xv
Nomenclatura .....	xvii
1. Introdução.....	1
2. Revisão da Literatura.....	6
3. Modelagem Teórica.....	13
3.1. Introdução .....	13
3.2. Mecânica dos Fluidos e Lubrificação .....	21
3.3. Equação de Reynolds .....	24
3.4. Mancais Hidrodinâmicos Radiais .....	25
3.5 Solução Analítica para Mancais Lisos e Curtos.....	27
3.6. Rigidez do Filme de Óleo .....	30
3.7. Mancais Hidrodinâmicos Ranhurados .....	35
3.8. Método dos Volumes Finitos.....	37
3.9. Solução do Sistema Linear.....	39
4. Método dos Volumes Finitos aplicado a Mancais Hidrodinâmicos.....	45
4.1. Método Aplicado a Mancais Hidrodinâmicos .....	45
4.2 Condições de Contorno.....	48
4.3. Modelo Numérico para Mancais com Ranhuras.....	50
4.5. O Programa Computacional.....	55

5. Resultados e Discussões.....	56
5.2 Convergência do método TDMA para o sistema linear.....	64
5.3 Avaliação da influencia das ranhuras circunferenciais.....	66
6. Conclusões e Sugestões para Próximos Trabalhos.....	81
Referências Bibliográficas.....	83
Apêndice.....	88

## Lista de Figuras

1 -1 – Mancal hidrodinâmico segmentado – Fonte: Turbocare	02
1-2 – Mancal hidrodinâmico cilíndrico – Fonte: Turbocare	03
1-3 – Exemplo de máquina rotativa: turbina a vapor – Fonte: Siemens	04
1-4 – Exemplo de máquina rotativa: Compressor – Fonte: Siemens	05
1-5 – Exemplo de máquina rotativa: Turbocompressor para automóveis. Fonte: Saab	05
3-1: Volume de controle infinitesimal	15
3-2: Tensões atuantes no elemento fluido	16
3-3 – Placas paralelas com movimento relativo e separadas por um fluido	22
3.4 – Placas inclinadas com movimento relativo e separadas por um fluido	23
3-5 – Mancal cilíndrico hidrodinâmico.	25
3-6 – Posição de equilíbrio do centro do eixo em relação ao centro do mancal com a excentricidade adimensional variando.	31
3-7 – Distribuição de pressão em um mancal hidrodinâmico.	32
3-8 – Representação da rigidez de filme em um mancal hidrodinâmico	34
3-9 – Distribuição de pressão em um mancal hidrodinâmico.	35
3-10 – Tipos de ranhura encontrados em mancais hidrodinâmicos – Fonte: Miata Ltda	36
3-11 – Representação do domínio contínuo (esquerda) e discretizado (direita)	38
3-12 – Representação de um volume típico $P$ e dos volumes vizinhos.	38
3-13 – A) Fluxograma do Método B) Esquema representativo da varredura linha a linha.	43
4-1 – Domínio representativo do mancal discretizado.	47
4-2 – Domínio e local das condições de contorno.	49
4-3 – Detalhe da região de fronteira.	49

4-4 – Representação em corte das ranhuras circunferenciais.	53
4-5 – Mancal com ranhuras radiais.	54
5-1 – Curva de pressão [PSI] avaliada em um mancal liso ( Malha com 6400 volumes).	59
5-2 – Comparação entre MVF e Ocvirk (3600 volumes).	60
5-3 – Comparação entre MVF e Ocvirk (6400 volumes)	60
5-4 – Comparação entre MVF e Ocvirk (14400 volumes).	61
5-5 – Comparação entre MVF e Ocvirk (25600 volumes).	62
5-6 – Pontos de referência no domínio do filme de óleo do mancal.	63
5-7 – Pontos de referência no domínio do filme de óleo do mancal.	63
5-8 – Evolução do tempo com a variação do tamanho dos volumes na malha.	64
5-9 – Evolução do desvio com a variação do número de iterações.	65
5-10 – Evolução do tempo de processamento com a variação do número de iterações.	65
5-11 – Diferentes pressões para diferentes profundidades de ranhura	67
5-12 – Variação do número de Sommerfeld com a variação da prof. de ranhura.	67
5-13 – Mancal liso (14400 Volumes).	68
5-14 – A) Ranhuras Longitudinais – (B) Duas ranhuras no sentido circunferencial (14400 Volumes	69
5-15 – Mancal ranhurado – Duas ranhuras no sentido circunferencial (14400 Volumes). Relação entre a largura do mancal e seu diâmetro contra a pressão média.	70
5-16 – Mancal liso com variação da pressão média.	71
5-17 – Mancal ranhurado – Duas ranhuras no sentido circunferencial.	71
5-18 – (A) Ranhuras Axiais – (B) Excentricidade Adimensional $E=0,4$ (25600 Volumes)	73
5-19 – Ranhuras radiais – Excentricidade Adimensional $E=0,6$ (25600 Volumes)	74
5-20 – Ranhuras radiais – Excentricidade Adimensional $E=0,8$ (25600 Volumes)	74
5-21 – Mancal Ranhurado Radial - Pressão média RMS variando com a Excent. Adim.	75
5-22– Variação do número de Sommerfeld com a variação da excentricidade.	75
5-23 – Variação do número de Sommerfeld com o aumento da pressão média.	76
5-24 – Comparação entre as pressões para os diferentes tipos de mancais.	77
5-25 – Variação da rigidez para mancais lisos.	78

5-26 – Variação da rigidez para mancais com ranhuras circunferenciais.	78
5-27 – Variação da rigidez para mancais com ranhuras radiais.	79
5-28 – Variação da rigidez com o aumento da profundidade de ranhura.	80



## **Lista de Tabelas**

- |      |   |     |
|------|---|-----|
| 5.1. | Configuração dos mancais utilizados nas simulações para o caso 1.                           | 57. |
| 5.2. | Configuração dos mancais utilizados nas simulações para o caso de ranhuras circunferenciais | 65  |
| 5.3  | Configuração dos mancais utilizados nas simulações para o caso de ranhuras radiais          | 71  |

## Nomenclatura

### *Letras Latinas*

<b>d</b> - diâmetro do eixo	[m]
<b>e</b> - excentricidade dimensional do eixo	[m]
<b>h</b> - espessura do filme de óleo	[m]
<b>h<sub>0</sub></b> - profundidade da ranhura	[m]
<b>k</b> - rigidez do filme de óleo	[Nm]
<b>m</b> - número de volumes na direção x	
<b>n</b> - número de volumes na direção z ou velocidade de rotação	
<b>n<sub>g</sub></b> - número de ranhuras	
<b>p</b> - pressão no filme de óleo	[Pa]
<b>p'</b> - pressão no filme de óleo	[PSI]
<b>q</b> - fluxo de massa do volume de controle	[m <sup>3</sup> /s]
<b>r</b> - raio do eixo	[m]
<b>t</b> - tempo	[s]
<b><math>\dot{x}_p</math></b> - velocidade do centro do rotor na direção x.	[m/s]
<b><math>\dot{y}_p</math></b> - velocidade do centro do rotor na direção y.	[m/s]
<b>y<sub>p</sub></b> - posição y do centro do rotor	[m]
<b>x<sub>p</sub></b> - posição x do centro do rotor	[m]
<b>y<sub>p</sub></b> - posição y do centro do rotor	[m]
<b>x</b> - coordenada cartesiana ao longo do eixo x	
<b>y</b> - coordenada cartesiana ao longo do eixo y	
<b>z</b> - coordenada cartesiana ao longo do eixo z	
<b>A</b> - área	[m/s]
<b>A<sub>i</sub></b> - constante genérica dos métodos iterativos	[m/s]
<b>C<sub>d</sub></b> - folga diametral	[mm]
<b>C<sub>r</sub></b> - folga radial	[mm]
<b>F</b> - força resultante atuante no rotor	[N]
<b>F<sub>a</sub></b> - força de atrito	[N]
<b>F<sub>c</sub></b> - cisalhamento viscoso	[N]
<b>F<sub>x</sub></b> - força na direção x	[N]

$F_y$ - força na direção y	[N]
$F_p$ - força atuante na placa	[N]
$Ca$ - coeficiente de atrito	
$D$ - diâmetro do mancal	[m <sup>2</sup> ]
$K_{xx}$ - rigidez dos termos diretos	[N/m]
$K_{xy}$ - rigidez dos termos diretos	[N/m]
$K_{yy}$ - rigidez dos termos cruzados	[N/m]
$K_{yx}$ - rigidez dos termos cruzados	[N/m]
$L$ - largura do mancal	[m <sup>2</sup> ]
$N_{vol}$ - número de volumes da malha	
$O$ - centro do mancal	[m <sup>2</sup> ]
$O'$ - largura do rotor	[m <sup>2</sup> ]
$Q$ - variável para a varredura no algoritmo TDMA	
$R$ - variável para a varredura no algoritmo TDMA	
$So$ - número de Sommerfeld	
$S$ - termo fonte.	
$V$ - velocidade do fluido na parede do eixo	[m/s]
$U$ - velocidade de escoamento médio	[m/s]
$W$ - carga sobre o eixo	[N]
$W_d$ - largura da ranhura circunferencial	[N]

### *Letras Gregas*

$\epsilon$ - excentricidade adimensional	
$\mu$ - viscosidade	[kg / m s]
$\phi$ - ângulo de atitude	[ ° ]
$\phi_i$ - variável genérica	
$\theta$ - ângulo com referência ao eixo dos pontos	[ ° ]
$\theta_d$ - largura angular das ranhuras radiais	[ ° ]
$\rho$ - densidade do óleo	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\pi$ - constante geométrica pi.	[3,1416]
$\omega$ - rotação do eixo	[rad / s]
$\Gamma$ - termo difusivo genérico	

### *Superescritos*

**e, E** - propriedade avaliada a leste do volume de controle  
**w, W** - propriedade avaliada a oeste do volume de controle  
**n, N** - propriedade avaliada ao norte do volume de controle  
**s, S** - propriedade avaliada ao sul do volume de controle  
**p, P** - propriedade avaliada no próprio volume de controle em estudo  
**nb, NB** - propriedade avaliada nos volumes vizinhos

### ***Subscritos***

**x** - componente x da propriedade  
**y** - componente y da propriedade  
**R** - componente radial da propriedade  
**T** - componente tangencial da propriedade  
**xx** - propriedades diretas  
**xy** - propriedades diretas  
**yy** – propriedades cruzadas  
**yx** – propriedades cruzadas  
**med** - valor médio  
**max** - valor máximo

### ***Abreviações***

**FVM** - *Finite Volume Method* , método dos volumes finitos  
**L/D** - relação entre a largura e o diâmetro do mancal  
**TDMA** - *Tridiagonal matrix algorithm*, ou algoritmo de Thomas  
**RMS** – *Root Mean Square*, média através da raís dos quadrados  
**CFD** - *Computational Fluid Dynamic*

### ***Siglas***

**UNICAMP** – Universidade Estadual de Campinas  
**DPM** - Departamento de Projeto Mecânico  
**CAPES** - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

# Capítulo 1

## 1. Introdução

A condição operacional que confere às turbomáquinas altas densidades de energia e vazão é a velocidade do rotor, e elevadas velocidades inevitavelmente conduzem as máquinas a problemas potenciais de velocidade crítica de rotação, desbalanceamento e instabilidades na dinâmica do rotor. A velocidade crítica é uma propriedade inerente as máquinas rotativas, e está relacionada à rigidez e inércia das mesmas. O desbalanceamento é outra característica intrínseca, sendo determinado pela distribuição da massa nos rotores. Já a instabilidade é, em geral, causada pela combinação de fenômenos oriundos dos mancais, do sistema de selagem, ou ainda pelos efeitos aerodinâmicos das palhetas do rotor.

Diante deste conjunto de características que tornam os estudos nesta área um dos mais completos e abrangentes em termos de fenômenos de ordem física, é essencial a correta compreensão dos efeitos dinâmicos e estruturais que influenciam o comportamento vibracional das turbomáquinas. A dinâmica de rotores é a temática que envolve a solução e prevenção de potenciais problemas e deve ser levada em consideração desde as primeiras etapas de projeto de novas máquinas, passando pelos métodos de produção que garantam a qualidade de rotores e mancais, e que são partes constituintes do sistema dinâmico, até a definição das condições operacionais e procedimentos de manutenção.

Por rotor entende-se toda a parte móvel, rotativa, da máquina, assim, eixos e todos os elementos a ele acoplados e com movimento relativo rotacional, tais como: motores, acionadores, discos, lâminas, agitadores, hélices, palhetas, fitas, selos serão definidos como contidos no rotor.

A interface entre a parte móvel, que é o rotor, e a fixa, estrutura e fundação no solo, que é chamada de estrutura de montagem, é denominada mancal. Esse nome designa o elemento físico

responsável pelo suporte do rotor em certos sistemas e direciona o movimento lateral do rotor. Existem diversos tipos de mancais e inúmeras construções e configurações diferentes, alguns exemplos podem ser vistos nas Figuras 1-1, conhecido como mancal hidrodinâmico pivotado, e na Figura 1-2, um mancal hidrodinâmico liso de aplicação industrial variada. Mancais hidrodinâmicos são aqueles que operam de acordo com a teoria da lubrificação hidrodinâmica. Quando o rotor é colocado em operação, partindo do repouso, o filme de óleo existente entre sua superfície e a parte interna do mancal é o responsável por sua sustentação, contudo esta sustentação só é total a partir de certa velocidade mínima limite.

Assim, este trabalho tem por finalidade aplicar o método numérico dos volumes finitos em mancais com lubrificação de características hidrodinâmicas, com ou sem ranhuras, na superfície do mancal, ou seja, na superfície da parede fixa adjacente ao filme de óleo, obtendo desta forma as características dinâmicas e operacionais dos mancais em diferentes construções.



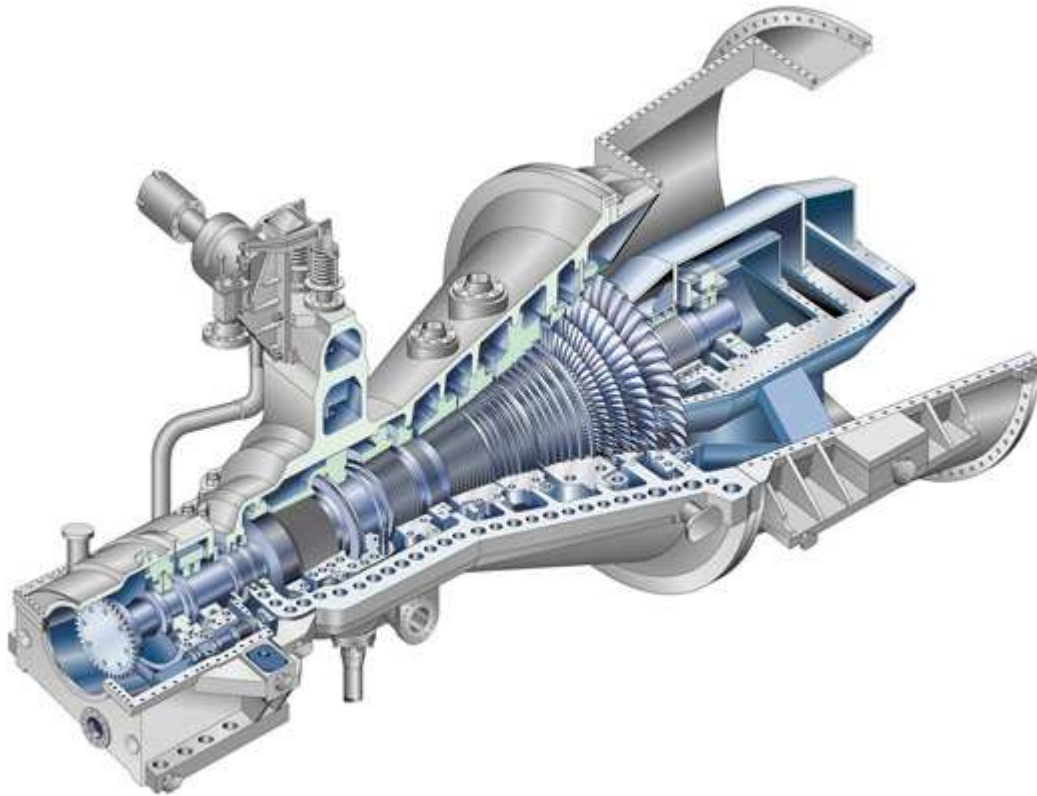
**Figura 1 -1 – Mancal hidrodinâmico pivotado – Fonte: Turbocare**



**Figura 1-2 – Mancal hidrodinâmico cilíndrico – Fonte: Turbocare**

A aplicação deste tipo de mancal é muito vasta, basicamente quase todo o tipo de máquina rotativa pode utilizar este tipo de mancal. Para citar alguns exemplos mais comuns, tem-se a aplicação em equipamentos de grande porte, tais como as turbinas a vapor, Figura 1-3, turbinas a gás, compressores, Figura 1-4, ou em equipamentos industriais, como máquinas-ferramenta, prensas e sistemas de mineração, ou ainda em equipamentos de menor porte como os utilizados na área automobilística, Figura 1-5. Dessa forma, evidencia-se que ter o conhecimento sobre o comportamento de equipamentos, caracterizados como máquinas rotativas e seus componentes, é muito importante para a engenharia e para o sistema produtivo energético de qualquer país.

Dentre os diversos tipos de mancais, o mancal cilíndrico radial foi escolhido devido à sua grande diversidade de aplicações, pois é um mancal de construção extremamente simples, e por ser versátil, apresenta um bom desempenho em uma vasta gama de aplicações.

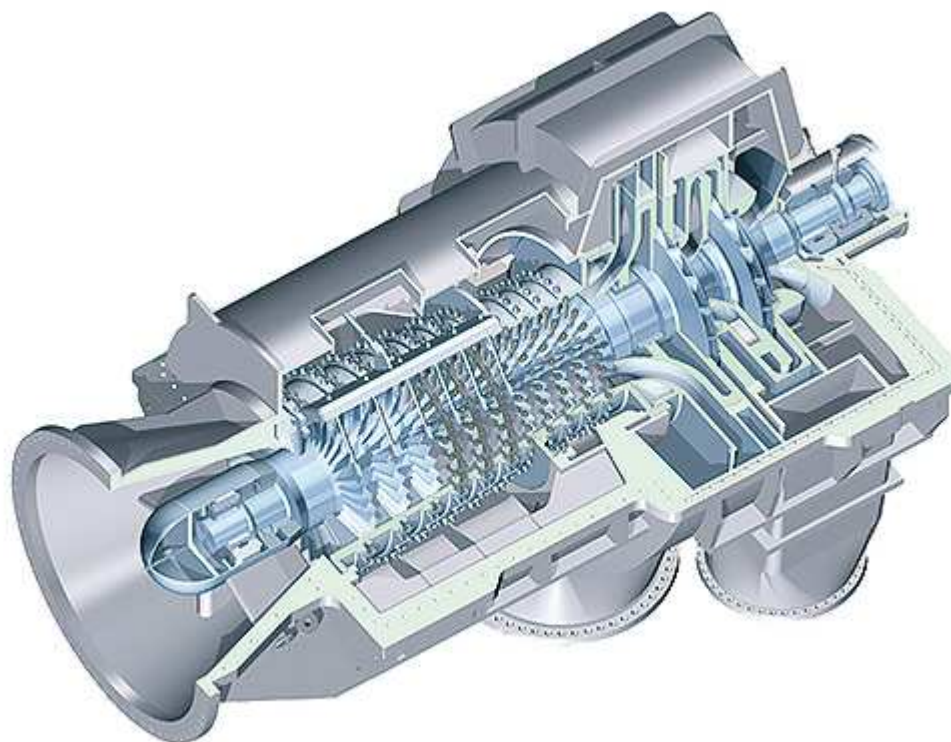


**Figura 1-3 – Exemplo de máquina rotativa: Turbina a vapor – Fonte: Siemens**

Apesar da grande utilização e possibilidades de aplicação, e dos diversos estudos já realizados, a compreensão sobre as características operacionais e construtivas dos mancais ainda possibilita um enorme campo de estudos, sobretudo na utilização de geometrias não convencionais ou nos estudos térmicos.

Estes estudos são de elevada importância, pois ganhos na qualidade de projeto podem auxiliar em economia energética considerável, visto que a perda mecânica proveniente do atrito responde por uma parcela elevada da contabilização da eficiência energética das máquinas, especialmente nas máquinas utilizadas na geração de energia.





**Figura 1-4 – Exemplo de máquina rotativa: Compressor – Fonte: Siemens**



**Figura 1-5 – Exemplo de máquina rotativa: Turbocompressor para automóveis. Fonte: Saab**

## Capítulo 2

### 2. Revisão da Literatura

Por volta dos anos de 1880, três trabalhos, com poucos anos de diferenças e de maneira independente, descobriram e explicaram o mecanismo de lubrificação hidrodinâmica: N.P. Petrov (1836-1920), B. Tower (1845-1904) e O. Reynolds (1842-1912). Tiveram em comum a percepção que o processo de lubrificação não era devido à interação mecânica entre duas superfícies sólidas, mas a dinâmica do filme de fluido que os separava. Esse é o aspecto fundamental da lubrificação hidrodinâmica e com curto período de três anos, 1883-1886, as fundamentações teóricas e experimentais foram estabelecidas.

A sedimentação do conceito começou com Nicolai Petrov, cujo principal interesse era na área do atrito. Ele postulou dois conceitos fundamentais: o primeiro mostra que a propriedade mais importante do fluido com respeito ao atrito não é a densidade, como se imaginava, mas sim a sua viscosidade, o segundo ponto é que a natureza do atrito em mancais não é resultado da fricção de duas superfícies sólidas, mas deriva do cisalhamento viscoso.

Seu interesse atingiu também as propriedades dos lubrificantes e materiais, assunto sobre o qual escreveu aproximadamente 80 artigos durante o período no qual foi professor do Instituto Técnico de São Petersburgo na Rússia.

É surpreendente que Petrov tenha falhado ao estender seus estudos para a capacidade de carga do mancal. Essa descoberta foi feita por Beauchamp Tower, que começou novamente as análises por causa da quase obsessão em estudar a fricção na história dos mancais. Petrov seguiu com a publicação de inúmeros trabalhos sobre as perdas por atrito em mancais. Da mesma maneira o Instituto de Engenharia Mecânica da Grã-Bretanha organizou um Comitê de Pesquisa

sobre o Atrito em Alta Velocidade, presidido por Tower que conduziu uma série de experimentos sobre o atrito nos mancais ferroviários. As ferrovias foram outra constante na história da tribologia. Beauchamp Tower foi, durante alguns anos, assistente de pesquisa de outros como Froude e Lorde Rayleigh, sendo o último amigo de Tower e membro muito influente no meio científico da época. A famosa série de experimentos que permitiu a descoberta da presença de pressões hidrodinâmicas no filme fluido foi feita entre 1883-1884. Ao invés de utilizar banho de óleo, Tower decidiu utilizar um novo procedimento. Nessa escolha, utilizou um furo de 0,5 polegada no centro do mancal. Ao iniciar a rotação, Tower notou que o óleo estava sendo bombeado para fora do mancal e para conter o escoamento, ele utilizou primeiro a uma rolha de cortiça e depois de madeira, colocando-as no furo, mas ambas foram ejetadas. Como conclusão sobre os fatos, Tower entendeu que o filme de óleo estava separando a bucha do mancal e o fluido estava sob alta pressão. Tower modificou a geometria do mancal na direção do que hoje conhecemos como correto modo para suprir lubrificante através de ranhuras axiais.

Tower então instalou um grupo de medidores de pressão na superfície do mancal e obteve o mapa com as diferentes pressões, que foram integradas sobre a superfície do mancal resultando na carga aplicada sobre o mesmo, resultados estes publicados em duas partes (1883-1885).

O conceito da lubrificação hidrodinâmica havia nascido, mas ambos, Petrov e Tower chegaram aos seus resultados de maneira experimental, faltando desta forma uma relação matemática teórica que ajudasse a prever o comportamento dos mancais. Isto foi conseguido por Osborne Reynolds simultaneamente com outros dois e sem que um soubesse do trabalho do outros. Durante uma reunião da Associação Britânica para o Avanço da Ciência, Reynolds, após ler dois artigos intitulados *Actions of Lubricants* e *On the Friction of Journal*, decidiu pela primeira vez publicar sua equação diferencial que explicava a natureza da lubrificação.

A mais importante descoberta após os estudos pioneiros do final do século XIX foi que o fluido não precisa ser somente óleo ou um líquido, mas poderia ser também um gás. Essa descoberta foi obtida por Albert Kingsbury (1863-1943) e, novamente, de forma acidental.

O amadurecimento da engenharia da lubrificação nos anos seguintes consistiu em tentar resolver a equação de Reynolds, que consiste numa equação não-homogênea parcialmente

diferenciada com coeficientes variáveis e de difícil resolução analítica, podendo ser resolvida somente para alguns casos especiais.

Duas importantes descobertas em relação aos mancais radiais, ambas com relação à dinâmica e estabilidade foram obtidas no início do século XX, a primeira foi feita por Stodola (1925), quando ele concluiu que o mancal não é um suporte rígido, mas que representa um conjunto de molas e amortecedores cujas características afetam o comportamento do rotor. A outra descoberta foi com relação à instabilidade induzida por Burt Newkirk, que trabalhava na empresa General Electric e estudou a vibração que não poderia ser atribuída ao desbalanceamento ou ao atrito interno, sendo isso feito através do desligamento do óleo para o mancal, descobrindo que a instabilidade cessava. Este fato acabou criando uma nova área para a lubrificação hidrodinâmica, e não somente para os mancais em geral, mas também para outras máquinas que se utilizavam de lubrificantes.

Seguindo o caminho dos trabalhos teóricos, com relação a solução de mancais cuja razão entre a largura (L) do mancal e o diâmetro (D),  $L/D \rightarrow 0$  (mancais infinitamente curtos) ocorreu primeiro a Michell (1929).

Cardullo em 1930 integrou a equação e chegou a expressão do campo de pressão. Em 1952, Orcvik propôs uma detalhada e completa solução para mancais curtos. Trata-se de uma solução muito simples, compacta e elegante e cujas manipulações analíticas resultaram na validade para razões  $L/D = 1/2$  ou menores, sendo esta a proporção mais utilizada nos mancais modernos.

Cameron e Wood em 1949 conseguiram a solução para mancais com razão  $L/D = \infty, 1/4$ , usando o método de relaxação de Southwell, utilizando o algoritmo de Gauss, resolveram para arcos de 180° e 360°. Ambos os métodos possuem grande quantidade de cálculos e podem ser considerados percussores da nova era caracterizada pelos computadores, que a partir da década de 1950 tiveram sua utilização aumentada exponencialmente até a atualidade.

O primeiro uso dos computadores para a solução da Equação de Reynolds com as condições de contorno corretas foi feita em 1956 por Pinkus. Ele obteve soluções não somente para mancais circulares, mas também para elípticos e tri lobulares para razões  $L/D$  no intervalo entre 1 – 0,5.

Outros autores possibilitaram o entendimento da dinâmica dos fluidos através da utilização de métodos numéricos mais elaborados na estimativa do campo de pressão e temperatura. Especificamente no caso de Singhal (1981), a sua contribuição veio através de um trabalho em que são feitas aplicações numéricas, objetivando a solução da equação de Reynolds em duas dimensões, utilizando o método das diferenças finitas.

A partir daí muitos foram os trabalhos que buscaram formular os problemas matematicamente ou relacioná-los com os resultados experimentais observados. Podemos assim, citar os trabalhos sobre mancais elípticos de Pinkus (1956), mancais cilíndricos finitos (Pinkus, 1958), e também sobre mancais tri-lobados também conduzidos por Pinkus(1959), há ainda o trabalho de Ruggieri (1976) em que o autor elabora um método aproximado para a resolução da equação de Reynolds para mancais de comprimento finito, e finalmente podemos citar os trabalhos de Capone (1986), em que é proposto um método numérico que considera as condições de não linearidade na dinâmica do lubrificante em condições de escoamento isotérmico e laminar. Um trabalho posterior de Capone (1991) leva em consideração os efeitos de inércia e turbulência no fluido para as características de estabilidade do sistema rotor-mancal para diferentes números de Reynolds. Pinkus analisou a distribuição de pressão em mancais elípticos (1956), de arco parcial (1958) e tri-lobados (1959), investigando experimentalmente a instabilidade destas geometrias. Lund (1964) relacionou as características físicas dos mancais hidrodinâmicos às forças proporcionais aos deslocamentos e velocidades, publicando um método para o cálculo de coeficientes de rigidez e amortecimento linearizados, a serem introduzidos na equação de movimento matricial do sistema rotativo. Capone apresentou em 1986 um procedimento para avaliação da força hidrodinâmica num mancal cilíndrico, montado sobre um rotor rígido, simétrico e horizontal.

A influência da temperatura do filme de óleo dentro da tribologia é também alvo de relevante importância, uma vez que sua variação é diretamente proporcional à variação da viscosidade do óleo e, em conseqüência, no fenômeno de lubrificação.

Em 1991, Capone aperfeiçoou o método anteriormente proposto em 1986, propondo uma solução numérica para as equações de movimento incluindo as forças hidrodinâmicas não-lineares nos mancais. Zhang (1991) desenvolveu procedimentos experimentais para identificação

dos coeficientes de rigidez e amortecimento de mancais hidrodinâmicos através do ajuste de curvas numérico-experimentais de resposta em frequência, e estabelecendo a relação entre estes coeficientes e o comportamento dinâmico do rotor.

Childs D. (1994) propõe soluções para diversos modelos de labirintos ou selos de fluxo e soluções para mancais hidrodinâmicos, com modelos lineares ou não-lineares, em seu livro *Turbomachinery Rotordynamics – phenomena modelling and analysis*, referência clássica na pesquisa relacionada a máquinas rotativas.

Continuando a tratar o estado da arte, agora em âmbito nacional, podemos citar Dedini et al. (1994) que utilizaram o método proposto por Capone (1991) para analisar o comportamento dinâmico de um sistema com um mancal hidrodinâmico cilíndrico, montado em um rotor vertical flexível. A posição orbital do rotor não carregado e, posteriormente, para as forças num mancal carregado. Os resultados da simulação numérica foram comparados aos experimentos realizados por Capone (1991) revelando coerência e concordância dos resultados.

Em 1995, Cavalca et al., verificaram experimentalmente os resultados obtidos por Dedini et al. (1994) para órbitas de rotores flexíveis verticais com mancal cilíndrico, comparando resultados analíticos e experimentais com boa concordância. Foi desenvolvido um procedimento analítico que possibilita a análise do comportamento dinâmico de rotores montados sobre mancais hidrodinâmicos do tipo pivotado (*Tilting Pad*), considerando-se toda a complexidade geométrica das pás deste tipo de mancal. Realizou-se também uma simulação numérica do mancal para o mesmo modelo de rotor apresentado por Dedini et al. (1994).

Também em 1994, Cavalca *et al.* aplicaram o mesmo desenvolvimento de Capone para mancais segmentados, apresentado verificações experimentais em 1997 e 1998. A partir destes estudos, Okabe e Cavalca desenvolveram em 2006 um modelo não-linear de mancais segmentados analítico com efeitos de pré-carga. Ainda na área de tribologia, o estudo experimental do fenômeno de fluidodinâmica de mancais pode ser estendido como validação e estudo dos modelos matemáticos.

Com relação aos trabalhos numéricos sobre a distribuição de pressão em mancais hidrodinâmicos, e que é o foco deste trabalho, podemos dizer que têm-se limitado, na maioria das vezes, a utilizar os métodos das diferenças finitas ou dos elementos finitos. Objetivamente, não

há vantagens ou desvantagens na escolha de um método ou outro, pois, todos atendem a finalidade de encontrar a solução da equação conservativa em um domínio discretizado. No entanto, as diferenças se tornam evidentes quando se avaliam as características ligadas às condições de utilização e facilidade de aplicação. Trabalhos como os conduzidos por Singhal ou Colin (1971) mostram a aplicabilidade do método de diferenças finitas em problemas de fluidodinâmica e lubrificação, especialmente pela possibilidade de discretização da equação de Reynolds através de nós. De maneira semelhante é a abordagem por elementos finitos, porém neste caso, a aplicação é mais complexa do ponto de vista matemático.

A utilização do método dos volumes finitos é menos usual pelos pesquisadores de tribologia, provavelmente devido a pouca difusão da técnica entre os estudiosos da mecânica dos sólidos.

Uma das principais referências sobre o método foi publicado por Patankar (1980), com abordagens simples e diretas traz os principais conceitos do método, e mesmo focando a utilização do método nos problemas de transferência de calor, Patankar não deixa de dedicar alguns capítulos aos problemas de mecânica dos fluidos e suas principais características não lineares. Ainda na linha mais conceitual do Método dos Volumes Finitos, nesta outra boa referência é o trabalho de Maliska (2004), com uma boa abordagem computacional e dos problemas que envolvem o desenvolvimento de programas computacionais para *CFD* (*Computational Fluid Dynamic*), ou o estudo da dinâmica dos fluidos computacional, ele supre praticamente todos os aspectos básicos para aqueles que querem desenvolver seus primeiros modelos utilizando o método.

Alguns dos trabalhos mais relevantes com *FVM* (*Finite Volume Method*), ou o método dos volumes finitos, aplicado a mancais hidrodinâmicos foram conduzidos por Castelli (1968), que fez uma revisão sobre os métodos numéricos para mancais e propôs algumas soluções e estudos. Já Athavale et al. (1992) propuseram uma solução para a obtenção dos coeficientes dinâmicos de selos e mancais pelo método dos volumes finitos. E mais recentemente, Arghir et al. (2001) trabalharam com a solução por volumes baseados em triângulos para o problema de filme de óleo em mancais. Em outro trabalho posterior, Arghir et al (2002) propuseram uma solução para problemas de descontinuidade no filme de óleo para mancais cilíndricos. Neste último, são

mostradas com clareza as características do posicionamento e construção de malhas em situações em que existem descontinuidades do filme de óleo, originadas pelas ranhuras nos mancais. No Brasil, Augusto (2002) propõe a análise computacional do comportamento dinâmico do fluido em um mancal hidrodinâmico pelo método dos elementos finitos e Galvão (2006) trabalha com a análise do comportamento operacional de mancais axiais hidrodinâmicos de sapatas setoriais pivotadas em uma abordagem experimental sobre o tema. As referências sobre malha para uma análise de fluxo nas fronteiras do domínio foram mostradas em um trabalho conduzido por Kogure et al. (1983). Já no caso do tratamento da transformação de coordenadas para uma malha adaptativa, Kang et al. (1996) pode ser citado por sua contribuição com a abordagem das descontinuidades em filmes de óleo.



## Capítulo 3

### 3. Modelagem Teórica

#### 3.1. Introdução

Como mostrado no primeiro capítulo, os mancais hidrodinâmicos são largamente empregados por permitirem altas cargas em altas velocidades, além disso, a vida de um mancal de deslizamento é, teoricamente, infinita, uma vez que não existe contato entre peças com movimento relativo, garantindo longa continuidade operacional.

Desta forma, este capítulo analisa a teoria básica da lubrificação e, a partir da Equação de Reynolds, estuda o mecanismo de formação da pressão de sustentação da carga dos mancais, determinando as propriedades operacionais e dinâmicas destes mancais. A metodologia numérica por volumes finitos também é abordada mostrando as etapas necessárias à formulação computacional que possibilitará a grande diversidade de análises, característica dos métodos numéricos aplicados a simulações.

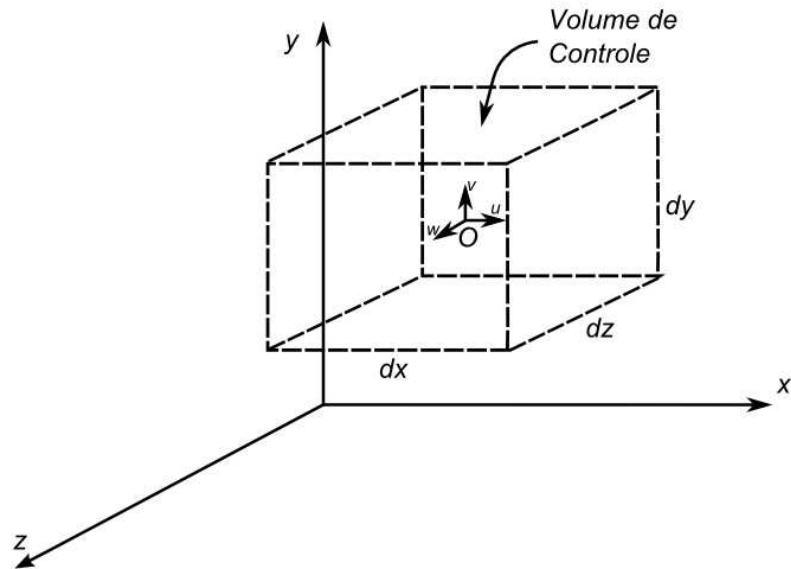
#### Equações Governantes dos Movimentos Fluidos

O tratamento diferencial do movimento dos fluidos trabalha com a caracterização ponto a ponto do comportamento de um escoamento, assim, esta abordagem trata justamente de sistemas e volumes de controle infinitesimais. A grande vantagem deste tipo de abordagem está na obtenção de estudos de fenômenos e comportamentos que o estudo na forma integral não conseguiria, e é justamente partindo destes princípios que as teorias com métodos computacionais

de solução das equações diferenciais puderam ser desenvolvidas, entre elas o método dos volumes finitos.

Lubrificantes em condição de lubrificação hidrodinâmica são usualmente considerados fluidos newtonianos. A deformação do fluido, neste caso, é linearmente proporcional a tensão cisalhante, e ao assumirmos essa condição também assumimos que o escoamento laminar existe. Navier (1823) derivou a equação do movimento fluido para essa condição partindo de considerações moleculares e pela introdução dos postulados de Newton para a física dos fluidos. Stokes (1845) também derivou as equações governantes do movimento para um fluido viscoso de diferentes maneiras, e as equações desenvolvidas por eles são hoje conhecidas como “Equações do Movimento de Navier-Stokes”. Essas equações podem ser obtidas ao considerarmos um equilíbrio dinâmico do elemento fluido, assim, as forças de inércia e superfície são mostradas com maiores detalhes a seguir. Outro tipo de força atuante são as forças de campo que no caso de fluidos newtonianos são devido ao campo gravitacional existente, em outros tipos de fluidos, que não são abordados neste trabalho, como, por exemplo, os magnetos-reativos, as forças de campo magnético devem ser consideradas na formulação.

Em sistemas retangulares, o volume de controle escolhido é um cubo infinitesimal com lados de comprimento  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$ , conforme a Figura 3-1. Assim, propriedades do fluido como a massa específica e velocidade são definidas, no caso da primeira, o centro do volume de controle (V.C.),  $O$ , é utilizado como referência, sendo que  $\rho$  representa esta propriedade, no caso da segunda, a velocidade pode ser avaliada como:



**Figura 3-1: Volume de controle infinitesimal**

## Forças de Superfície

A Figura 3-2 mostra as tensões na superfície de um elemento fluido em um escoamento viscoso e através de cada uma das três superfícies perpendiculares existem também três tensões, resultando em um total de nove atuantes, com as tensões normais sendo representada pela letra grega  $\sigma$  e as tensões cisalhantes por  $\tau$ .

As tensões na outras superfícies perpendiculares foram omitidas para evitar a sobreposição de vetores na figura, a primeira letra subscrita representa a direção perpendicular ao plano onde a tensão atua, e a segunda designa a direção coordenada na qual a tensão atua.

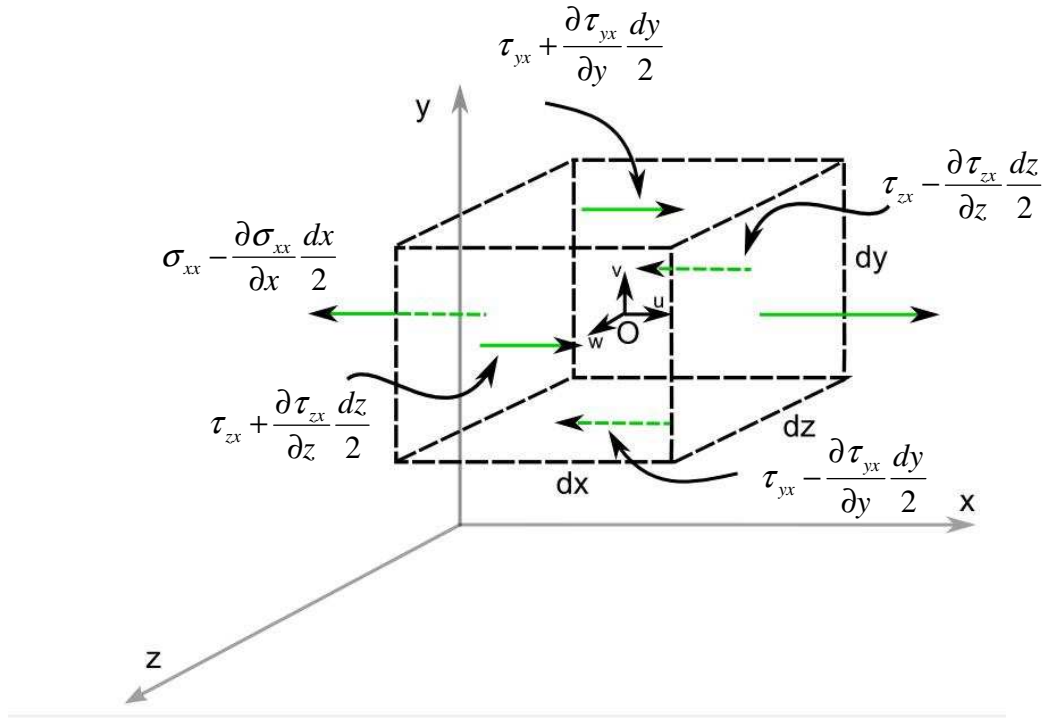


Figura 3-2: Tensões atuantes no elemento fluido.

Para obtermos a força resultante em cada direção coordenada, devemos realizar a soma de cada força atuante nas respectivas direções. Assim, para exemplificar usaremos a direção x, em que é obtida a relação da Equação 3.1. após simplificações.

$$dF_x = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad 3.1$$

De maneira análoga, a avaliação das forças atuantes sobre a partícula fluida nas direções y e z é mostrado abaixo pelas equações 3.2 e 3.3, respectivamente.

$$dF_y = \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad 3.2$$

$$dF_z = \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad 3.3$$

## Forças Inerciais

As três componentes relativas a aceleração do fluido são as três derivadas totais  $Du/Dt$ ,  $Dv/Dt$  e  $Dw/Dt$ . Essas derivadas podem ser representadas da seguinte forma:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad 3.4$$

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \quad 3.5$$

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad 3.6$$

As derivadas totais em relação ao tempo avaliam as mudanças com a velocidade de um elemento fluido conforme este se move no espaço. O termo  $\partial/\partial t$  é conhecido como a derivada local, pois esse mostra a variação da velocidade com o tempo em um ponto fixo. Os últimos três termos são agrupados e chamados de diferencial convectivo. Assim, a força necessária para acelerar o fluido pode ser mostrada por:

$$\rho \frac{Du}{Dt} dx dy dz \quad \rho \frac{Dv}{Dt} dx dy dz \quad \rho \frac{Dw}{Dt} dx dy dz \quad 3.7$$

As forças atuantes sobre o volume de controle do fluido estão em equilíbrio e podem agora ser expressas matematicamente. Quando o fator comum  $dx dy dz$  é eliminado de cada termo e a força de inércia resultante é colocada como igual à soma das forças de corpo e de superfície, as equações de Navier-Stokes podem ser expressas da seguinte forma padrão:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho X_a - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial \xi_a}{\partial x} \quad 3.8$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho Y_a - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial \xi_a}{\partial y} \quad 3.9$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho Z_a - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial \xi_a}{\partial z} \quad 3.10$$

Se a viscosidade for tratada como constante, e a densidade também, o último termo do lado direito da equação será nulo. O termo  $\xi_a$  é conhecido como dilatação, ou a medição de uma taxa que representa o fluxo do fluido entre cada ponto, isso é conhecido também como expansão do fluido. Então, se a densidade do fluido for constante, teremos  $\xi_a = 0$ .

## Equação da Continuidade

A equação de Navier-Stokes possui até aqui três equações e quatro incógnitas.  $u, v, w$  e  $p$ , a densidade e viscosidade podem ser descritas em função da pressão e temperatura. A quarta equação é conseguida através da teoria da continuidade ou conservação da massa.

A conservação da massa em um escoamento parte do pressuposto que o fluido é contínuo, ou seja, não existem descontinuidades de massa. Desta forma, todos os campos de propriedades deste fluido serão contínuos, e propriedades como a massa específica e a velocidade são relacionadas justamente através da equação da conservação da massa.

A fim de avaliar as propriedades em cada uma das seis faces da superfície de controle, usamos a série de Taylor para realizar a expansão em relação ao ponto central O. Desta forma, teremos o seguinte procedimento:

A massa específica na face direita:

$$\rho)_{x+dx/2} = \rho + \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} + \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \right) \frac{1}{2!} \left( \frac{dx}{2} \right)^2 + \dots \quad 3.11$$

Desprezando os termos de segunda ordem e ordens superiores:

$$\rho)_{x+dx/2} = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) \frac{dx}{2} \quad \text{E para a velocidade:} \quad u)_{x+dx/2} = u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{dx}{2}$$

Analogamente para a face esquerda:

$$\rho)_{x-dx/2} = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) \left(-\frac{dx}{2}\right) = \rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) \frac{dx}{2}$$

$$u)_{x-dx/2} = u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(-\frac{dx}{2}\right) = u - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{dx}{2}$$

Agora, é possível definir um enunciado para a conservação da massa.

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Taxa líquida de fluxo} \\ \text{de massa para fora da} \\ \text{superfície de controle.} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{Taxa de variação da} \\ \text{massa dentro do} \\ \text{volume de controle.} \end{array} \right] = 0$$

**1º Termo** **2º Termo**

A fim de avaliar o primeiro termo desta equação, é aconselhável fazer a seguinte integração sobre a superfície de controle:

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$\text{Esquerda } (-x) = -\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) \frac{dx}{2}\right] \left[u - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{dx}{2}\right] dydz = -\rho u dydz + \frac{1}{2} \left[u \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] dx dy dz$$

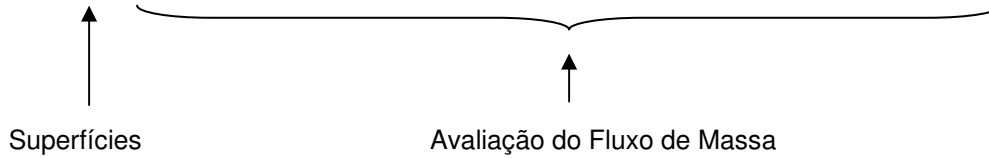
$$\text{Direita } (+x) = \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) \frac{dx}{2}\right] \left[u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{dx}{2}\right] dydz = \rho u dydz + \frac{1}{2} \left[u \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] dx dy dz$$

$$\text{Inferior } (-y) = -\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) \frac{dy}{2}\right] \left[v - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{dy}{2}\right] dx dz = -\rho v dx dz + \frac{1}{2} \left[v \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) + \rho \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] dx dy dz$$

$$\text{Superior } (+y) = \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) \frac{dy}{2}\right] \left[v + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{dy}{2}\right] dx dz = \rho v dx dz + \frac{1}{2} \left[v \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) + \rho \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] dx dy dz$$

$$\text{Posterior } (-z) = -\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \frac{dz}{2}\right] \left[w - \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) \frac{dz}{2}\right] dx dy = -\rho w dx dy + \frac{1}{2} \left[w \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + \rho \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] dx dy dz$$

$$\text{Frontal } (+z) = \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \frac{dz}{2}\right] \left[w + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) \frac{dz}{2}\right] dx dy = \rho w dx dy + \frac{1}{2} \left[w \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + \rho \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] dx dy dz$$



Portanto, após a soma de todos os valores em cada superfície, ou a integral na superfície pode ser dada pela seguinte expressão:

$$\int_{sc} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[ \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right] dx dy dz \quad 3.12$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \quad 3.13$$

O termo 3.13 representa a variação de massa dentro do volume com a variação do tempo. Com o segundo termo da equação representando a taxa líquida de fluxo de massa saindo volume



de controle. E a taxa de variação de massa dentro do volume de controle pode ser dada pela Equação 3.14.

Utilizando agora a notação com o operador vetorial  $\nabla$ , é possível chegar em uma formulação mais elegante para representar a equação da conservação da massa:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \longrightarrow \quad \nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad 3.14$$

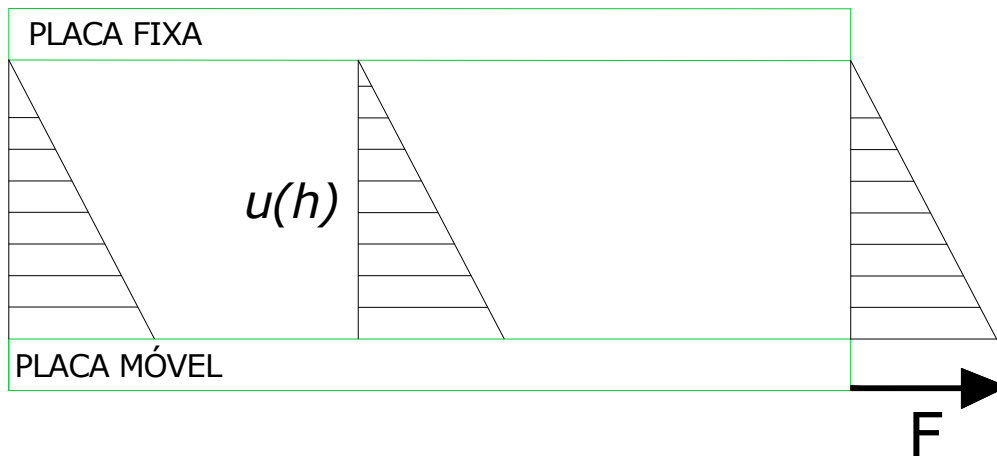
### 3.2. Mecânica dos Fluidos e Lubrificação

Os lubrificantes, no caso da análise de fenômenos hidrodinâmicos e em muitos casos de lubrificação elasto-hidrodinâmica, são considerados como fluidos com características newtonianas, ou seja, havendo a aplicação de uma tensão cisalhante, sua taxa de cisalhamento irá variar linearmente com a variação da própria tensão aplicada. Navier no século XIX derivou a equação do movimento fluido para estas condições partindo de considerações moleculares e dos trabalhos de Newton para fluidos viscosos. Stokes, no mesmo século e algum tempo depois, também determinou as equações governantes para um fluido viscoso, e esta equação básica é conhecida como Equação do movimento de Stokes. Posteriormente, a equação de Navier-Stokes, que é utilizada até hoje, pode ser considerada ao determinarmos o equilíbrio dinâmico de um elemento fluido com dimensões infinitesimais sob a ação de forças de superfície, ou mais precisamente as tensões cisalhantes e normais, forças de campo, como o gravitacional, e as forças inerciais, que são relacionadas às acelerações das massas de fluido existentes no escoamento. Esse equacionamento proposto por Navier e Stokes é a forma mais abrangente na caracterização de qualquer tipo de escoamento viscoso.

No entanto, a formulação referente ao fenômeno da lubrificação trata sempre do movimento relativo entre duas partes separadas por um fluido, tornando-se um caso especial, e a formulação de Navier-Stokes, que tem caráter geral para qualquer tipo de escoamento viscoso, deve ser modificada a fim de garantir a representação do fenômeno da lubrificação.

Assim, podemos finalmente definir a lubrificação como a interposição de um fluido lubrificante entre superfícies que possuem movimento relativo, objetivando reduzir o coeficiente de atrito, e evitando, conseqüentemente, o desgaste. Assim, a viscosidade torna-se uma das propriedades mais importantes de um lubrificante. Seu significado fundamental pode ser ilustrado considerando-se duas placas paralelas: uma fixa e outra móvel sob a ação de uma força  $P$ , paralela à placa fixa. As placas são separadas por uma película de lubrificante de espessura  $h$ , conforme ilustrado na Figura 3-3.

As partículas do lubrificante aderem às placas fixa e móvel. O movimento é acompanhado por um escorregamento linear ou cisalhamento das partículas do lubrificante através de toda a altura  $h$  da película.



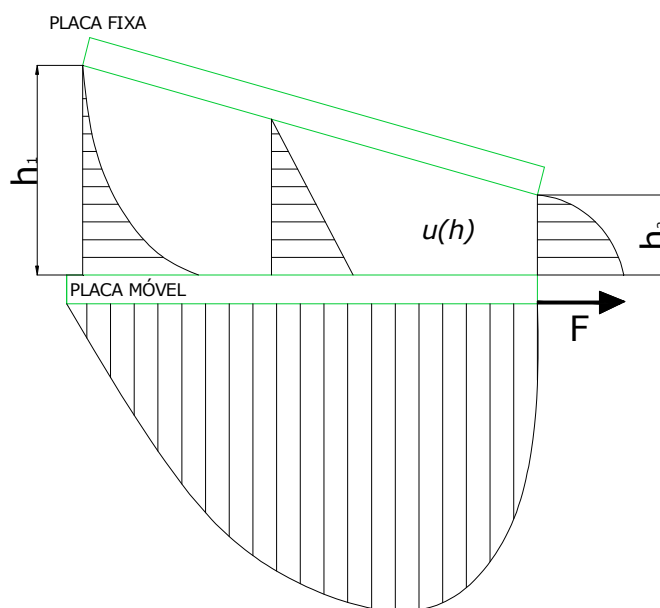
**Figura 3-3 – Placas paralelas com movimento relativo e separadas por um fluido.**

Esta tensão cisalhante varia de maneira diretamente proporcional à velocidade  $U$  da placa móvel e inversamente à espessura  $h$  da película, resultando na relação abaixo.

$$\mu = \frac{Fh}{UA} \quad 3.15$$

Com  $F$  sendo a força atuante na placa inferior e  $A$  a área de contato entre as placas e o filme de óleo, já a constante de proporcionalidade  $\mu$ , é conhecida como viscosidade, e relaciona justamente a tensão cisalhante com o gradiente de velocidade, assim, fluidos muito viscosos tem a característica de suportar elevadas forças cisalhantes, numerador, ou baixas velocidades de escoamento, denominador. Já os líquidos pouco viscosos, carregam menos tensão cisalhante, porém, maiores velocidades de escoamento podem ser alcançadas.

Se a placa fixa for inclinada de tal modo que a espessura da película varie, o gradiente de velocidade irá variar ao longo da placa. A curva representativa da variação da velocidade é côncava na entrada e convexa na saída, como mostrado na Figura 3.4. Os diagramas não são mais triangulares, mas devem ter todos a mesma área, desde que não haja fuga de lubrificante. Assim, a carga  $w$  será suportada pela pressão gerada entre as placas no filme fluido como indicado na Figura 3-4 também.



**Figura 3-4 – Placas inclinadas com movimento relativo e separadas por um fluido**

### 3.3. Equação de Reynolds

A formulação completa das equações de Navier-Stokes, incluídos os termos de inércia, corpo, pressão e viscosidade, é muito complexa para uma análise completa do fenômeno da lubrificação hidrodinâmica, e desta forma não será abordada neste trabalho. Assim, existe uma classe de escoamentos conhecidas como *slow viscous motion*, nas quais os termos de pressão e viscosidade são predominantes. E felizmente, os problemas de lubrificação por filme de óleo podem ser alocados nesta categoria, e ao utilizar essa abordagem para as equações de conservação, chega-se a uma equação conhecida por Equação de Reynolds, aqui representada conforme Cameron (1949) propôs.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\rho h V) + \rho \frac{\partial h}{\partial t} \quad 3.16$$

A equação de Reynolds na forma apresentada acima possui algumas condições, listadas na seqüência.

- 1) Não existem forças de campo agindo sobre o fluido.
- 2) A pressão é constante através da espessura do filme de óleo. Isto não é verdade para fluidos com características elásticas.
- 3) A curvatura da superfície é muito maior que a espessura do filme de óleo. As velocidades de superfície não precisam ser consideradas nas direções.
- 4) Condição de não deslizamento nas fronteiras. O fluido adjacente a fronteira tem a mesma velocidade que a fronteira.
- 5) O lubrificante é newtoniano. A tensão é proporcional a deformação.
- 6) Escoamento laminar.
- 7) A inércia do fluido é desprezível.
- 8) A viscosidade é constante.

### 3.4. Mancais Hidrodinâmicos Radiais

Como o escopo deste trabalho está apenas no estudo de mancais radiais trabalhando na condição de lubrificação hidrodinâmica, um detalhamento dos princípios de funcionamento destes mancais é necessário.

Um mancal radial é composto por um alojamento com superfície curva (cilíndrica, elíptica ou com várias cavidades, mais conhecida como multilobular) e um eixo em seu interior, ambos separados por um fluido lubrificante. A figura 3-3, mostra este mancal esquematicamente.

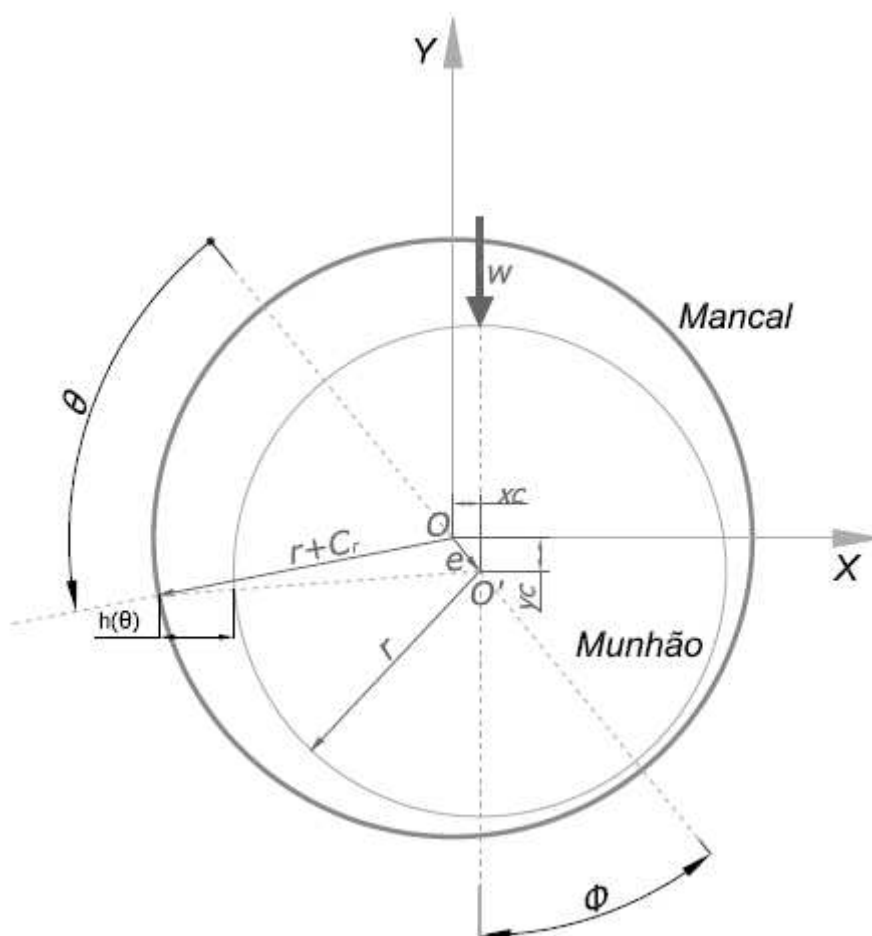


Figura 3-5 – Mancal cilíndrico hidrodinâmico.

O fluido é forçado para a região abaixo do munhão, e uma cunha de óleo é gerada pela folga existente, daí o mesmo fenômeno que surge no sistema com placas inclinadas produz gradientes de velocidade, gerando as altas pressões no filme de fluido na parte inferior ao eixo e criando a força resultante de sustentação.

Para representar matematicamente este fenômeno e associá-lo a teoria de Reynolds para a lubrificação, vamos considerar a seguinte configuração para o dispositivo mancal-eixo: um eixo circular de raio  $r$ , girando a uma velocidade rotacional  $n$ , medido em revoluções por minuto, em um mancal cilíndrico de raio  $r+Cr$ , em que  $Cr$  é o valor da folga radial entre o eixo e o mancal, e largura  $L$  na direção  $z$ . As coordenadas do centro  $O'$  do eixo são dadas por  $x_c$  e  $y_c$  em um sistema inercial com origem no centro do mancal:

$$Cr = (D - d) / 2 \quad 3.17$$

Na Equação 3.17, o diâmetro do mancal, parte fixa, é representado pela variável  $D$ , e o  $d$  representa o diâmetro do eixo, parte rotativa, com  $Cr$  representando a folga radial do mancal.

A distância entre o centro do eixo e o centro do mancal é definida como excentricidade  $e$ . Será definida uma coordenada angular  $\theta$ , medida a partir da posição de espessura máxima do filme até a posição limite formada pelo eixo entre o centro do mancal  $O$  e o centro do eixo  $O'$ . A posição em que ocorre o ponto de máxima espessura é localizada pela coordenada angular  $\phi$ , que é conhecida como ângulo de atitude e é medida a partir do eixo  $y$  no sentido anti horário.

A velocidade de parede  $V$ , que é a velocidade tangencial do eixo dentro do alojamento do mancal, é obtida diretamente da transformação da velocidade rotativa  $n$ , sendo esta usualmente expressa em revoluções por minuto, assim,  $V = \pi d n$ , onde  $V$  é a velocidade,  $d$  é o diâmetro do eixo e  $n$  o número de rotações por minuto.

A espessura do filme de óleo  $h$  é função da variação do ângulo de circunferência do mancal em relação ao ponto em que a espessura do filme é máxima. Essa espessura máxima é influenciada pela folga radial do mancal e pela excentricidade do eixo em relação ao centro do próprio mancal.

Assim, segue a definição da espessura do filme de óleo ao longo da circunferência do mancal e em função do ângulo referencial e sua derivada temporal que é utilizada no caso em que o mancal atua sob cargas dinâmicas são representados pelos termos  $\frac{\partial x}{\partial t}$  e  $\frac{\partial y}{\partial t}$ , considerando apenas um plano de movimento formado pelos eixos x e y, teremos:

$$h(\theta) = Cr - x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \quad 3.18$$

$$\frac{\partial h(\theta)}{\partial t} = Cr - \frac{\partial x}{\partial t} \cos(\theta) - \frac{\partial y}{\partial t} \sin(\theta) \quad 3.19$$

Outra definição importante é a excentricidade adimensional  $\varepsilon$ , que por ser obtida através da folga e da excentricidade, consegue representar melhor o deslocamento do eixo em relação ao mancal.

$$\varepsilon = \frac{e}{Cr} \quad 3.20$$

### 3.5 Solução Analítica para Mancais Lisos e Curtos

Mancais longos não são freqüentemente usados em projetos modernos por diversas razões e por convenção, entende-se por mancal curto aquele que possui largura menor que o seu diâmetro.

Pequenas deflexões do eixo, ou mesmo desalinhamentos, podem facilmente reduzir a folga radial a zero em um mancal longo, ao passo que considerações associadas a dimensões, geralmente requerem mancais curtos. As razões  $L / d$  mais comuns em mancais curtos estão na faixa de  $\frac{1}{4}$  a 1. A solução para mancal longo (*Sommerfeld*), assume que não há perdas de óleo nas extremidades do mancal. Porém, para relações  $L / d$  inferiores a unidade, estas perdas podem ser significantes. Ocvirk e Dubois resolveram uma forma da equação de Reynolds, que inclui o termo de perdas nas extremidades.

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\rho h V) \quad 3.21$$

Esta forma despreza o termo que representa o fluxo de óleo circunferencial ao redor do mancal, na premissa de que será pequeno se comparado ao fluxo na direção z (perdas laterais) em um mancal curto. A Equação pode ser integrada, para obtenção da expressão para a distribuição de pressão no filme de óleo, como uma função tanto de  $\theta$  como de z:

$$p = \frac{\eta V}{rc_r^2} \left( \frac{l^2}{4} - z^2 \right) \frac{3\epsilon \sin(\theta)}{(1 + \epsilon \cos(\theta))^3} \quad 3.22$$

A expressão acima é conhecida como a solução de Ocvirk, Norton (2006). É resolvida para o ângulo de referente ao eixo de máxima e mínima espessura de filme de óleo  $\theta = 0$  a  $\pi$ , com pressão nula para a outra metade da circunferência, pois nesta parte a pressão calculada é negativa, e neste caso, não possui significado físico para o estudo do mancal.

A posição  $\theta = 0$  é tomada em  $h = h_{max}$ , por ser a referência adotada, e o eixo de referencia  $\theta$  passa através de O e O'. A distribuição de pressão com relação a z, é parabólica e apresenta um valor máximo no centro do comprimento axial do mancal, sendo nula nas extremidades ( $z = \pm L/2$ ). A mesma pressão varia não - linearmente em  $\theta$ . O valor de  $\theta_{max}$  em  $p_{max}$  pode ser obtido analiticamente pela Equação 23.

$$\theta_{max} = \cos^{-1} \left( \frac{1 - \sqrt{1 + 24\epsilon^2}}{4\epsilon} \right) \quad 3.23$$

O valor de  $p_{max}$  é encontrado, substituindo  $z = 0$  e  $\theta = \theta_{max}$  na equação. O ângulo  $\theta_{max}$  é medido a partir do eixo de referência, estabelecido ao longo da linha que une os centros geométricos do mancal e do eixo.



O que determina o ângulo desta linha de excentricidade, entre os centros  $O$  e  $O'$  é, tipicamente, a linha de ação da força  $P$  aplicada ao eixo externamente e matematicamente pode ser expressa pela Equação 3.24. Esse ângulo  $\phi$  é conhecido como ângulo de atitude e além de unir os pontos  $O$  e  $O'$ , Figura 3-4, também une os pontos de máxima e mínima espessura de filme de óleo, por ser exclusivamente uma função da excentricidade adimensional, ou seja, depende apenas da excentricidade e da folga diametral entre o mancal e o eixo, seu cálculo é bastante simples e necessário para definirmos a posição de sustentação do rotor, a relação mostrada aqui é sugerida por Norton, 2006, e é um dos parâmetros de projeto mais utilizados na escolha destes elementos mecânicos.

Para este trabalho, a solução de Ocvirk, por já ser consagrada e largamente empregada nos projetos mecânicos que utilizam mancais, e desta forma, possuir boa aproximação com os valores de pressão obtidos experimentalmente, é utilizada como referência e, portanto, será um meio de validação dos resultados obtidos através do método dos volumes finitos.

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}{4\varepsilon}\right) \quad 3.24$$

Define-se, segundo Norton (2006), o número característico do mancal ou número de *Sommerfeld* mostrado a seguir:

$$S_o = \frac{\mu n R^2}{C_r^2 P} \quad 3.25$$

Esse número é muito útil, pois relaciona as principais variáveis características dos mancais, tanto construtivas quanto operacionais, e desta forma pode ser um bom meio de comparação, mesmo que esses elementos mecânicos sejam distintos.

### 3.6. Rigidez do Filme de Óleo

A equivalência entre o filme de óleo e conjuntos de molas e amortecedores equivalentes faz uso de equações linearizadas simples, cujas respostas obtidas coincidem, na maioria dos casos, com sistemas reais estudados.

Estas equações envolvem o conhecimento das forças de sustentação do eixo, que podem ser obtidas por integração numérica da distribuição de pressão:

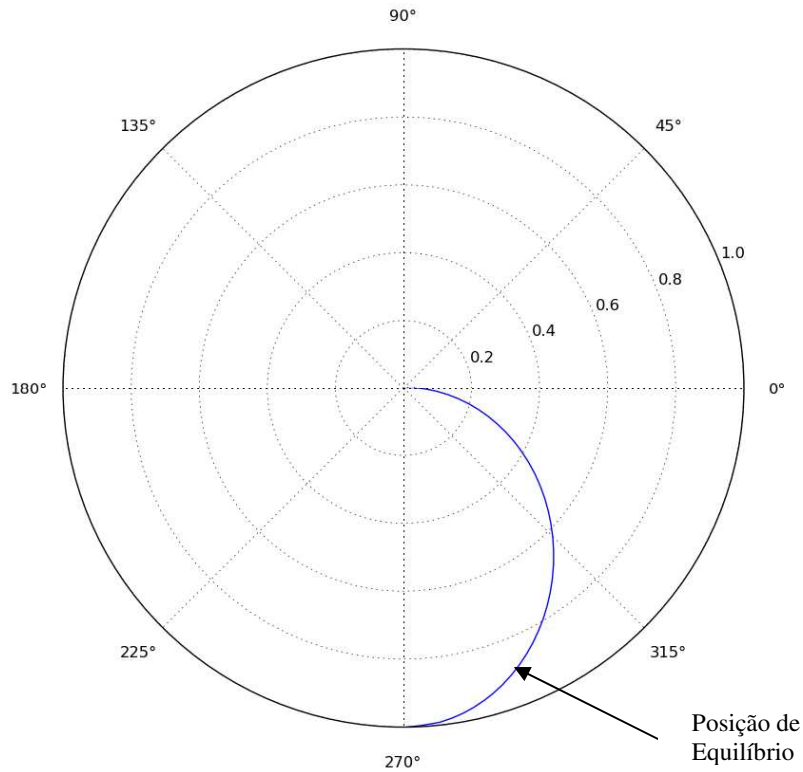
$$\vec{F} = \int_A p d\vec{A} \quad 3.26$$

Utilizando métodos iterativos de integração, tais como:

$$W = F = \sum p \Delta A \quad 3.27$$

$\Delta A \rightarrow$  Elemento de área da parede do mancal, ou seja,  $\Delta A = \Delta x \cdot \Delta z$ , que são as malhas de discretização do óleo.

Destas equações, o campo de forças que irão definir  $F_x$  e  $F_y$ .



**Figura 3-6 – Posição de equilíbrio do centro do eixo em relação ao centro do mancal com a excentricidade adimensional variando.**

As forças atuantes no eixo do mancal devem se equilibrar para que exista apenas o movimento rotativo. Neste caso, o peso do rotor é suportado por uma força resultante da pressão gerada no filme de óleo e a distância em relação ao centro do mancal deste ponto de equilíbrio varia conforme a excentricidade adimensional, assim a Figura 3-6, mostra a posição de equilíbrio com essa variação. Uma forma de determinar essas forças é avaliar a pressão distribuída sobre a área de suporte do mancal, então duas componentes podem ser definidas, uma tangencial e outra normal.

$$F_t = W_T = \int_0^\pi \int_{-L/2}^{L/2} p \sin(\theta) dz R d\theta \quad 3.28$$

$$F_r = W_R = \int_0^\pi \int_{-L/2}^{L/2} p \cos(\theta) dz R d\theta \quad 3.29$$

Ou para o caso do sistema cartesiano de coordenadas, as componentes da força nas direções X e Y poderão ser expressas ao fazer a transformada de coordenada a partir das forças  $F_t$  e  $F_r$ .

Neste ponto, para o cálculo dos coeficientes equivalentes de rigidez, optou-se por utilizar um método linearizado, ou seja, uma vez conhecido o campo de forças atuantes no fluido através da solução da equação de Reynolds, utiliza-se o método dos volumes finitos no cálculo das variações de força:

$$\delta F_x \cong \Delta F_x = F_x(x + \Delta x) - F_x \quad 3.30$$

$$\delta F_y \cong \Delta F_y = F_y(y + \Delta y) - F_y \quad 3.31$$

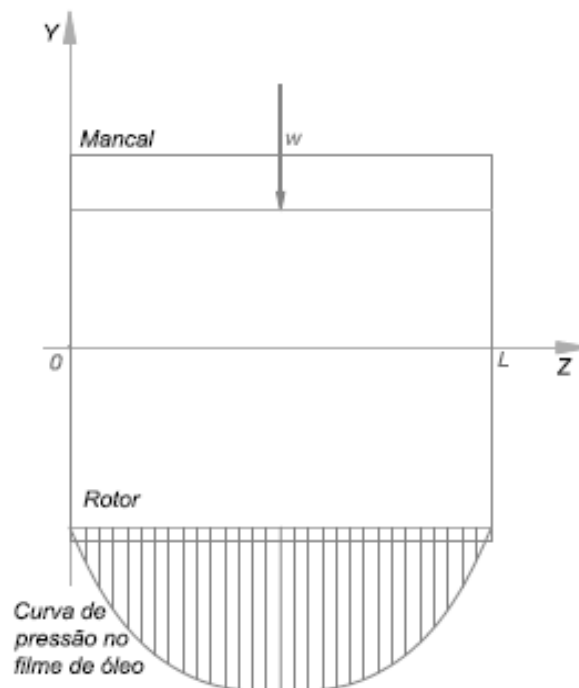


Figura 3-7 – Distribuição de pressão em um mancal hidrodinâmico

Sendo,

$x$  e  $y \rightarrow$  Posições do centro do eixo.

$\Omega \rightarrow$  Velocidade angular do eixo.

No equilíbrio estático do eixo, este é suportado somente pelo fluido. Portanto, temos que  $\dot{x} = \dot{y} = 0$ :

Expandindo as forças em torno do equilíbrio estático em uma série de Taylor, teremos que:

$$F_x = \Delta F_{x0} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} \right)_o x + \left( \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)_o y \quad 3.32$$

$$F_y = \Delta F_{y0} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} \right)_o x + \left( \frac{\partial F_y}{\partial y} \right)_o y \quad 3.33$$

$$K_{xx} = \frac{\partial F_x}{\partial x}$$

$$K_{xy} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

$$K_{yx} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

$$K_{yy} = \frac{\partial F_y}{\partial y}$$

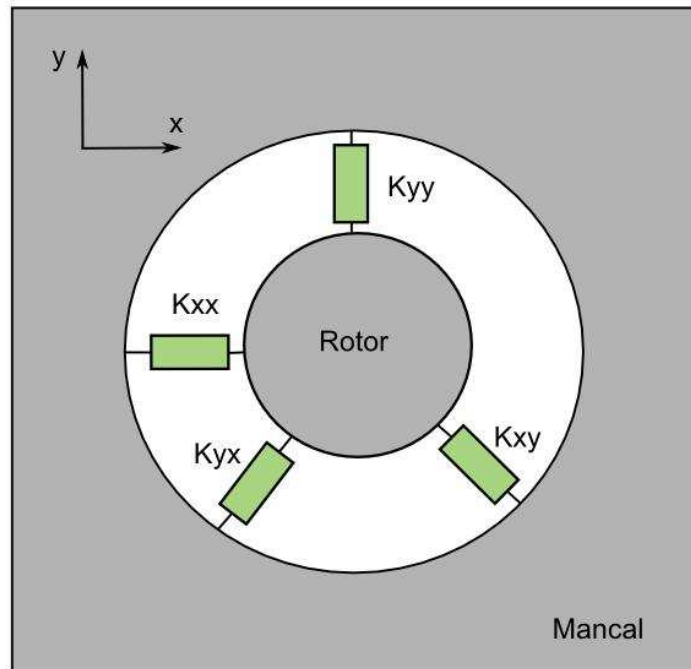


Figura 3-8 – Representação da rigidez de filme em um mancal hidrodinâmico.

Esta linearização é utilizada no cálculo dos coeficientes de rigidez equivalentes, a partir da posição de equilíbrio:

$$K_{xx} = \frac{\partial F_x}{\partial x} \sim \frac{F_{x+\Delta x} - F_x}{\Delta x} \quad 3.34$$

$$K_{xy} = \frac{\partial F_x}{\partial y} \sim \frac{F_{x+\Delta x} - F_x}{\Delta y} \quad 3.35$$

$$K_{yx} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \sim \frac{F_{y+\Delta y} - F_y}{\Delta x} \quad 3.36$$

$$K_{yy} = \frac{\partial F_y}{\partial y} \sim \frac{F_{y+\Delta y} - F_y}{\Delta y} \quad 3.37$$

Os termos  $K_{xx}$  e  $K_{yy}$  são chamados coeficientes diretos de rigidez, e os termos  $K_{xy}$  e  $K_{yx}$  são chamados coeficientes acoplados ou cruzados (“cross-coupling coefficients”).

### 3.7. Mancais Hidrodinâmicos Ranhurados

De uma maneira geral existem dois tipos de ranhuras mais utilizadas, axiais, ou seja, no sentido do eixo do mancal, e circunferenciais, que cobre toda a parte interna do mancal no sentido circular. Outras configurações geralmente apresentam geometrias muito complexas e sua utilização não é muito comum, justamente pelo fato de serem de fabricação muito mais complexa e, desta forma, com custos mais elevados. Dentre estes tipos, talvez o mais comum seja o chamado *Henrringbones*, mostrado na Figura 3-9. Os axiais distribuem o lubrificante ao longo da largura do mancal e as circunferenciais ao redor do eixo do mancal, sendo que esta última configuração, quando apresenta ranhuras próximas a borda lateral do mancal, trabalha como selos de fluxo, gerando uma barreira hidrodinâmica e retendo o lubrificante.

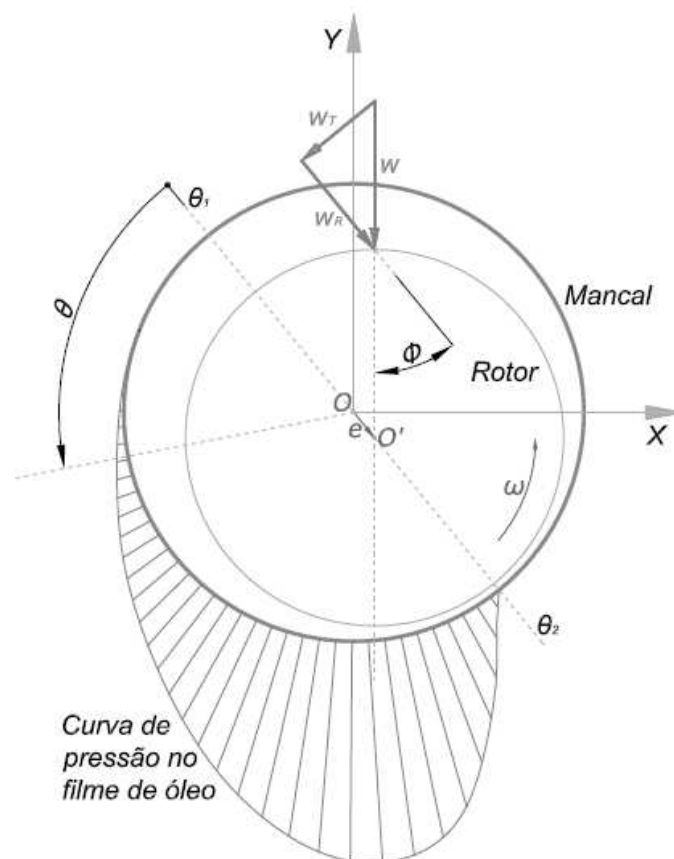
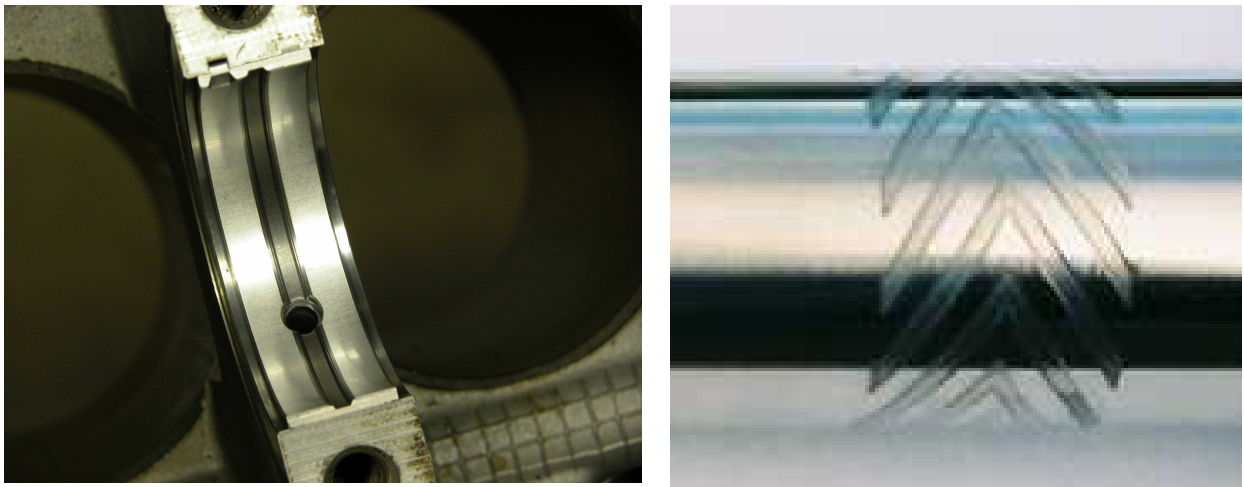


Figura 3-9 – Distribuição de pressão em um mancal hidrodinâmico.

Contudo, o projeto de mancais, ao longo do tempo, tem utilizado as ranhuras de maneira indiscriminada, visto que é muito difícil uma avaliação experimental apurada das condições de escoamento. Neste campo, as simulações numéricas tomam-se um ponto de destaque, visto a versatilidade de avaliação no pré-projeto destes mancais.

Uma prática muito comum nos projetos que envolvem mancais hidrodinâmicos é colocar uma ranhura circunferencial no centro do mancal, conforme a Figura 3-7, nessa construção o óleo é injetado por um orifício com saída na própria ranhura. Este procedimento é muito vantajoso, pois melhora a capacidade térmica do mancal ao oferecer menos temperaturas de trabalho, no entanto, a desvantagem vem do fato de surgir uma queda na capacidade de sustentação do mancal, pois a redução da largura efetiva do mancal é inevitável.



**Figura 3-10 – Tipos de ranhura encontrados em mancais hidrodinâmicos – Fonte: Miata Ltda.**

Essa inconsistência na utilização das ranhuras pode ser anulada por estudos mais específicos, avaliando os pontos em que há perda excessiva da capacidade do mancal, de sua vida ou na busca de melhores valores para temperatura de trabalho, ou mesmo buscando uma otimização com múltiplas variáveis a fim de adequar um mancal ao projeto, tanto por suas características quanto pelo tempo de vida que deverá ter.



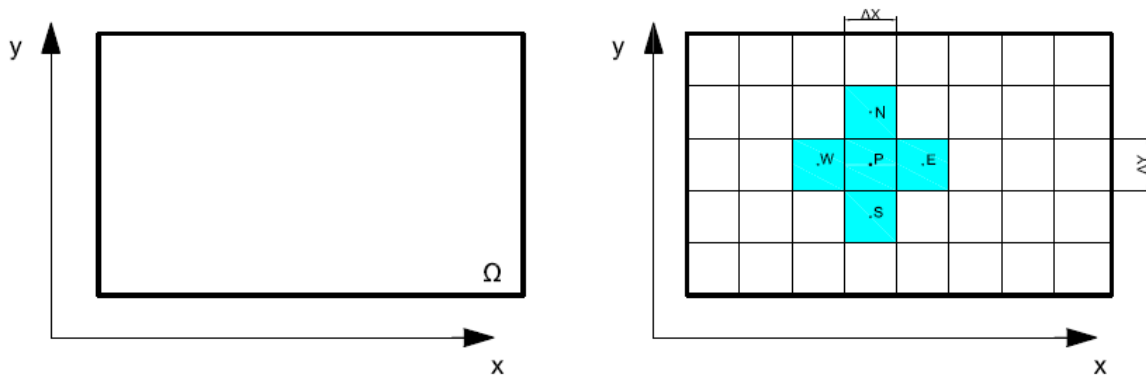
### 3.8. Método dos Volumes Finitos

Embora formem um sistema fechado, a forte não linearidade que caracteriza os termos advectivos da equação de Navier-Stokes impede a solução analítica do problema, exceto para alguns poucos casos particulares, onde simplificações importantes possam ser introduzidas nas equações governantes. Assim sendo, a solução de escoamentos no interior de regiões arbitrárias, e com condições de contorno gerais, só pode ser encontrada com o auxílio de métodos numéricos adequados.

De forma geral, a maioria dos métodos numéricos transforma a região contínua  $\Omega$  onde ocorre o escoamento, num domínio de cálculo discreto, constituído de malhas elementares, como ilustrado na Figura 3-8. Em seguida, através de transformações adequadas, as equações governantes são discretizadas no tempo e no espaço, para fornecer uma solução aproximada ao problema.

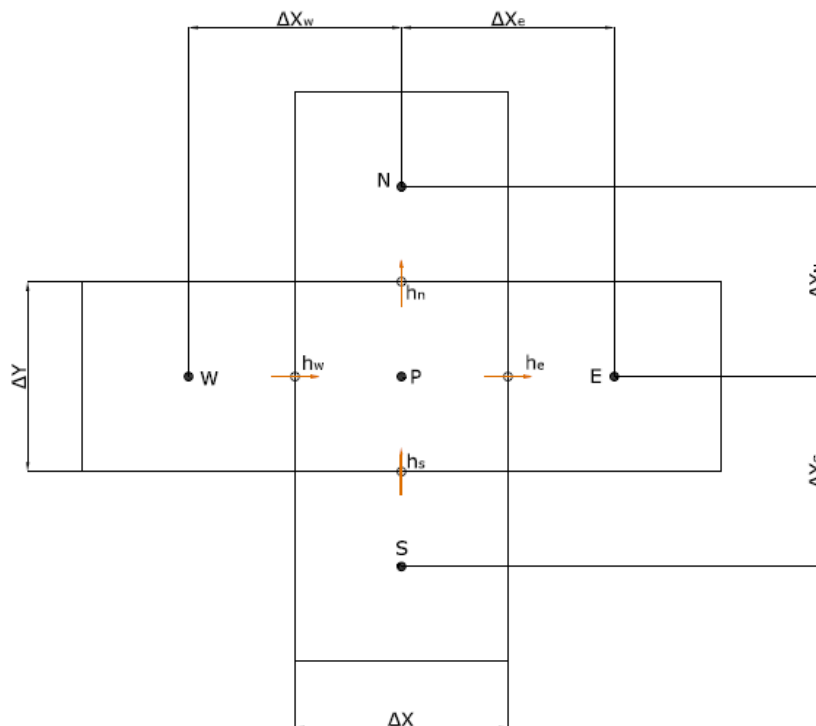
Dentre as diversas técnicas de discretização espacial existentes, o Método dos Volumes Finitos, utilizado no âmbito deste trabalho, destaca-se como um dos mais empregados na simulação numérica de problemas de dinâmica dos fluidos e transferência de calor.

A Figura 3.12 ilustra, em detalhes, uma pequena região do domínio numérico, contendo volumes elementares de dimensões  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , que estão orientados pelo sistema cartesiano, sobre os quais será realizada a discretização das equações do movimento. O volume principal está representado pela letra  $P$ , tendo como vizinhos os volumes  $E$  (leste),  $W$  (oeste),  $N$  (norte) e  $S$  (sul). Este padrão de representação é clássico na metodologia dos Volumes Finitos e será seguido no presente texto.



**Figura 3-11 – Representação do domínio contínuo (esquerda) e discretizado (direita).**

Existem duas maneiras para analisar a conservação de uma propriedade, e essas maneiras são similares, ou seja, utilizando uma ou outra, o resultado tende a ser o mesmo. Na primeira, é realizado o balanço das propriedades em questão nas fronteiras dos volumes elementares e na segunda, é realizada a integração sobre o volume elementar no espaço e no tempo das equações na forma conservativa.



**Figura 3-12 – Representação de um volume típico P e dos volumes vizinhos.**

Ao realizarmos a integração em todos os volumes elementares, teremos o sistema de equações algébricas equivalentes. É importante observar que a escolha usual do método de integração para a resolução de problemas de engenharia vem do fato de que nem todos os balanços são fáceis de serem feitos. O balanço de quantidade de movimento em volumes com geometria complexa não é uma tarefa fácil e muitas vezes inviável.

### 3.9. Solução do Sistema Linear

Com a discretização das equações diferenciais de conservação, há o surgimento de um sistema linear de equações, visto que a integração ocorre em cada volume do domínio, assim, o número de equações do sistema será o mesmo que o número de volumes do sistema. Desta forma, as variáveis dependentes podem ser encontradas resolvendo o sistema de equações por um dos diferentes métodos existentes. Estes métodos, por sua vez, são separados em duas categorias: métodos diretos e métodos indiretos:

Os métodos diretos trabalham com a matriz completa e necessitam de uma forma ou de outra de processos equivalentes à inversão da matriz completa. Um método fundamental nesta classe é a eliminação de Gauss, este método é adequado para matrizes cheias e não estruturadas, que não são encontradas em aplicações de CFD (*Computational Fluid Dynamics*). Outro método muito utilizado pertencente a esta classe é a decomposição LU, decomposição através das matrizes L e U, que é uma variação do método pela eliminação de Gauss.

Os métodos indiretos ou iterativos necessitam de uma estimativa inicial para dar prosseguimento à solução. Como na mecânica de fluidos computacional as matrizes são esparsas e com elementos nulos em grande parte da matriz, os métodos iterativos são os mais indicados, e levam vantagem também no tratamento das não linearidades e dos transientes distorcidos. Esses métodos podem ser ponto a ponto, linha a linha ou ainda *Multigrid*.

## Método de Jacobi

É um método ponto a ponto. Atua em cada equação, iterativamente, usando os valores das variáveis no nível anterior, métodos como este possuem convergência muito lenta, e praticamente não são utilizados na resolução de problemas de CFD, que tem a característica de possuir matrizes com elevado número de elementos.

- A) Estimar o campo inicial da variável
- B) Iterar em um contador k
- C) Calcular  $T_p$  usando a equação acima para todos os pontos
- D) Verificar a convergência
- E) Retornar se não estiver satisfeito

$$A_p T_p^{k+1} = \sum A_{nb} T_{NB}^k + B_p \quad 3.38$$

Sendo  $A_p$ ,  $A_{nb}$  os coeficientes do sistema, com  $A_p$  representando o coeficiente do volume sob estudo e  $A_{nb}$  os coeficientes dos volumes vizinhos, e  $B_p$  o termo fonte constante. A variável genérica  $T$  é utilizada para representar uma variável qualquer e que possa ser representada por um campo, tal como a temperatura, ou em nosso caso a pressão.

## Método de Gauss-Sidel

É um método parecido com o método de Jacobi, com a diferença de fazer uso de variáveis calculadas no mesmo ciclo iterativo, acelerando a convergência para a solução.

- A) Estimar o campo inicial da variável
- B) Iterar em um contador k
- C) Calcular  $T_p$  usando a equação abaixo para todos os pontos
- D) Checar a convergência
- E) Retornar se não estiver satisfeito

$$A_p T_P^{k+1} = \sum A_{nb} T_{NB}^{k+1} + A_e T_E^k + A_n T_N^k + A_f T_F^k + B_p \quad 3.39$$

Sendo  $A_p$ ,  $A_{nb}$  e  $A_i$  são os coeficientes do sistema e  $B_p$  o termo fonte constante. A variável genérica  $T$  é utilizada para representar uma variável qualquer e que possa ser representada por um campo, tal como a temperatura, ou em nosso caso a pressão, conforme já explicado anteriormente, e esse tratamento se repete para os próximos casos.

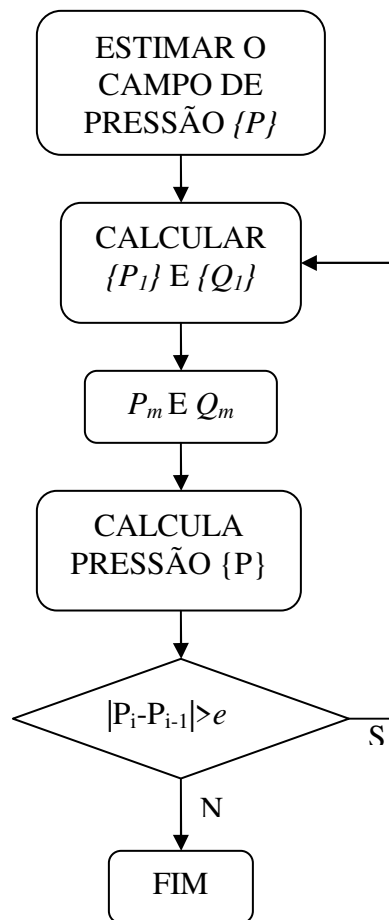
### **Método através do Algoritmo de Thomas (TDMA)**

Nos métodos linha a linha, como o TDMA (*Tridiagonal matrix algorithm*) a solução é feita diretamente em cada linha, ou seja, um problema unidimensional. Nos problemas bidimensionais e tridimensionais é feita uma análise linha por linha e coluna por coluna, isso faz com que ocorra um fluxo de informação entre a região de fronteira e as centrais. Como este é o método mais indicado para o tipo de sistema de equações gerado pelos problemas de mecânica dos fluidos, pois a matriz de coeficientes gerada é diagonal, a formulação do método que foi implementado será mostrada mais adiante.

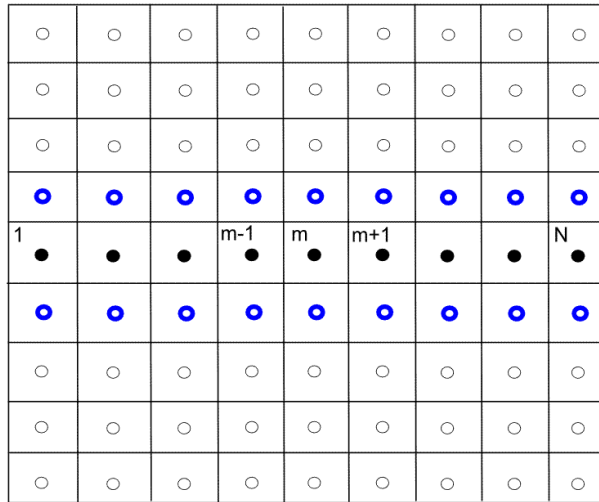
O método de solução mais conveniente para a equação é o algoritmo de Thomas ou TDMA. Neste método a solução é obtida por um processo iterativo com a varredura do domínio em linhas e colunas dos elementos partindo de 1 a N, conforme a Figura 3-13. Assim, ao fixarmos uma linha para o cálculo, é executado um processo para encontrar os coeficientes auxiliares  $P_m$  e  $Q_n$  em um sentido, e partindo destes coeficientes é feita a varredura no sentido contrário, retornando na mesma linha, e calculando as pressões  $P$  desta linha baseados nas linhas paralelas ou os vizinhos de cada elemento, conforme a Figura 3-13. Nessa varredura as informações são transferidas em todas as direções do domínio, assim os valores da fronteira são difundidos para o interior e os do interior para a fronteira. É importante mencionar que em problemas com duas dimensões a varredura é totalmente necessária também para as colunas e, neste caso, algumas considerações são necessárias. Para maiores informações trabalhos conduzidos por Patankar

(1980) e Maliska (2004) devem ser considerados. A seqüência de passos do método TDMA é mostrada a seguir, conforme proposto por Maliska (2004):

- A) Estimar o campo inicial da variável.
- B) Calcular  $P_1$  e  $Q_1$  através da *Equação 1*.
- C) Calcular todos os  $P_m$  e  $Q_m$ , com  $m$  variando de 2 a  $N$ .
- D) Fazer  $T_N=Q_N$ .
- E) Calcular as variáveis para os pontos  $N-1$  até 1.
- F) Checar a convergência
- G) Retornar ou alternar direção se não estiver satisfeito.



(A)



(B)

Figura 3-13 – A) Fluxograma do Método B) Esquema representativo da varredura linha a linha.

Sendo um sistema de equações discretizado para o método dos volumes finitos da seguinte forma:

$$A_p T_p = A_e T_e + A_w T_w + A_n T_n + A_s T_s + B_p \quad 3.40$$

Segue que, se reordenarmos:

$$A_m T_m + B_m T_{m+1} + C_m T_{m-1} = D_m \quad 3.41$$

De onde tiramos as relações auxiliares Q e P para a varredura das linhas, da seguinte forma, e com T sendo uma variável genérica aplicável a qualquer incógnita do sistema.

A) Coeficientes iniciais das linhas:

$$Q_1 = \frac{D_1}{A_1} \quad P_1 = -\frac{B_1}{A_1} \quad 3.42$$

B) Para o restante dos elementos nas linhas:

$$P_m = \frac{-B_m}{A_m + C_m P_{m-1}} \quad Q_m = \frac{D_m - C_m Q_{m-1}}{A_m + C_m P_{m-1}}$$

$$T_m = P_m T_{m+1} + Q_m \quad T_{m-1} = P_{m-1} T_m + Q_{m-1}$$

$$T_{m-1} = P_{m-1} T_m + Q_{m-1}$$

No caso de domínios simulados com duas dimensões, devemos ainda fazer a varreduras nas colunas, obedecendo aos mesmos princípios adotados no sentido horizontal.



## Capítulo 4

### 4. Método dos Volumes Finitos aplicado a Mancais Hidrodinâmicos

#### 4.1. Método Aplicado a Mancais Hidrodinâmicos

Na solução adotada para o método dos volumes finitos, o domínio, que é a circunferência do mancal, é planificado, e o sistema de coordenadas, que naturalmente deveria ser cilíndrico, é transformado. Neste plano bidimensional temos o eixo  $x$  e o eixo  $z$ , e várias divisões são feitas de maneira a termos um número finito de volumes com a mesma largura  $\Delta x$  e mesma largura  $\Delta z$ . Nesta condição, sendo o sistema cartesiano, faremos a integração da equação de Reynolds em cada volume de maneira a termos apenas a variação dimensional  $h$  ao longo do domínio. O número de volumes criado é obtido com a multiplicação das  $n$  colunas com as  $m$  linhas.

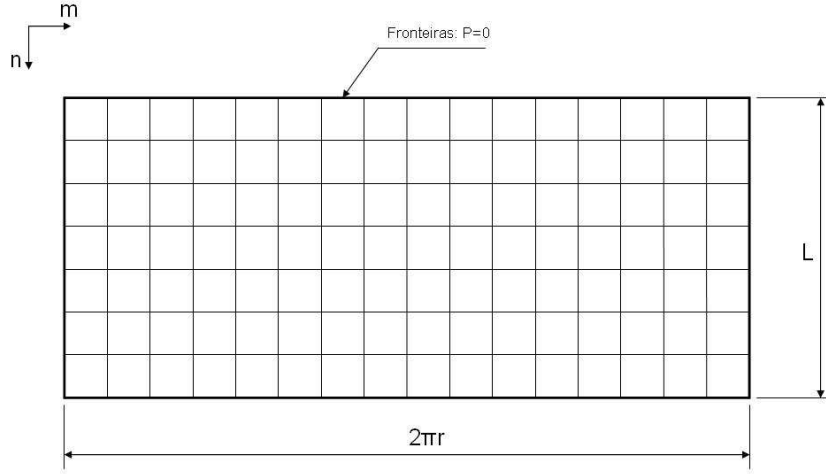


Figura 4-1 – Domínio representativo do mancal discretizado.

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx dz + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) dx dz - \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} (\rho h V) dx dz = 0 \quad 4.1$$

Fazendo a primeira integração:

$$\int_s^n \left( \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right)_e - \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right)_w \right) dz + \int_s^n \left( \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right)_n - \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right)_s \right) dx + \dots$$

$$\dots - \int_s^n ((\rho h V)_e - (\rho h V)_w) dz = 0 \quad 4.2$$

Fazendo  $\Gamma_k^\phi = \frac{\rho h^3}{12\mu}$ .

$$\Gamma_e^\phi \frac{(P_e - P_p) \Delta z}{\Delta x_e} - \Gamma_w^\phi \frac{(P_p - P_w) \Delta z}{\Delta x_w} + \Gamma_n^\phi \frac{(P_n - P_p) \Delta x}{\Delta z_n} - \Gamma_s^\phi \frac{(P_p - P_s) \Delta x}{\Delta z_s} + \dots$$

$$\dots - \rho V (h_e - h_w) \Delta z \Delta x + \rho V (h_n - h_s) \Delta x \Delta z \quad 4.3$$

Agora, agrupando as variáveis desconhecidas, teremos o seguinte arranjo:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\left( \frac{\Gamma_e^\phi \Delta z}{\Delta x_e} \right) P_e}_{A_e} - \underbrace{\left( \frac{\Gamma_e^\phi \Delta z}{\Delta x_e} \right) P_p}_{A_e} - \underbrace{\left( \frac{\Gamma_w^\phi \Delta z}{\Delta x_w} \right) P_p}_{A_w} + \underbrace{\left( \frac{\Gamma_w^\phi \Delta z}{\Delta x_w} \right) P_w}_{A_w} + \dots \\
 & \dots + \underbrace{\left( \frac{\Gamma_n^\phi \Delta x}{\Delta z_n} \right) P_n}_{A_n} - \underbrace{\left( \frac{\Gamma_n^\phi \Delta x}{\Delta z_n} \right) P_p}_{A_n} - \underbrace{\left( \frac{\Gamma_s^\phi \Delta x}{\Delta z_s} \right) P_p}_{A_s} + \underbrace{\left( \frac{\Gamma_s^\phi \Delta x}{\Delta z_s} \right) P_s}_{A_s} - \underbrace{\rho V (h_e - h_w + h_n - h_s) \Delta x \Delta z}_{S_p} = 0
 \end{aligned}$$

Após a integração da equação de Reynolds, teremos a seguinte equação discretizada para cada volume de controle:

$$A_p P_p = A_w P_w + A_e P_e + A_n P_n + A_s P_s + S_p \quad 4.4$$

Onde os coeficientes agrupados da integração são:

$$A_w = \frac{(h^3 / 12\eta)_w}{x_p - x_w} \quad A_e = \frac{(h^3 / 12\eta)_e}{x_E - x_p} \quad A_n = \frac{(h^3 / 12\eta)_n}{z_N - z_p} \quad A_s = \frac{(h^3 / 12\eta)_s}{z_p - z_s} \quad A_p = A_w + A_e + A_n + A_s$$

$$S_p = -V(h_e - h_w + h_n - h_s) / 2 \quad 4.5$$

Assim, após a determinação dos coeficientes, é possível montar um sistema linear, que possui característica diagonal. A matriz de coeficientes é composta pelos valores dos coeficientes de cada volume e seus respectivos coeficientes vizinhos à direita, à esquerda, acima e abaixo. Há ainda o vetor do termo fonte com os respectivos coeficientes associados conhecidos e o vetor pressão, que é a solução do sistema.

$$[A]\{P\} = \{S\} \quad 4.6$$

O método de solução utilizado neste trabalho para equação matricial 4.6 é o algoritmo de Thomas ou TDMA. Neste método a solução é conseguida por um processo iterativo com a varredura do domínio em linhas e colunas, já explicado anteriormente. Esta escolha se justifica-se pela existência da característica diagonal da matriz de coeficientes, matriz A, sendo o método adequado a este tipo de matriz com muitos elementos de valor nulo e com boa velocidade de convergência. Assim, ao fixarmos uma linha para o cálculo, é executado um processo de determinação de coeficientes auxiliares em um sentido, e no retorno na linha é avaliada pressão. Nessa varredura as informações são transferidas em todas as direções do domínio, assim os valores da fronteira são difundidos para o interior e os do interior para a fronteira. É importante mencionar que em problemas com duas dimensões a varredura é totalmente necessária também para as colunas e, neste caso, algumas considerações são necessárias.

## 4.2 Condições de Contorno

A condição de contorno para a solução numérica do mancal está baseada na teoria dos volumes fictícios na fronteira, desta forma, evitando surgirem volumes com tamanhos variados e que necessitariam de ajustes nas equações, volumes fictícios, com o mesmo tamanho dos volumes internos, pois nossa malha é constituída de volumes homogêneos. Esses volumes são adicionados ao sistema linear que é resolvido da mesma forma.

Como sabemos que a pressão nas fronteiras é nula, pois há a saída de fluido e esta se iguala a pressão externa do mancal, esses volumes fictícios terão valor de pressão conhecido e serão adicionados após a multiplicação com seus respectivos coeficientes ao termo S que é a solução dos sistema linear.

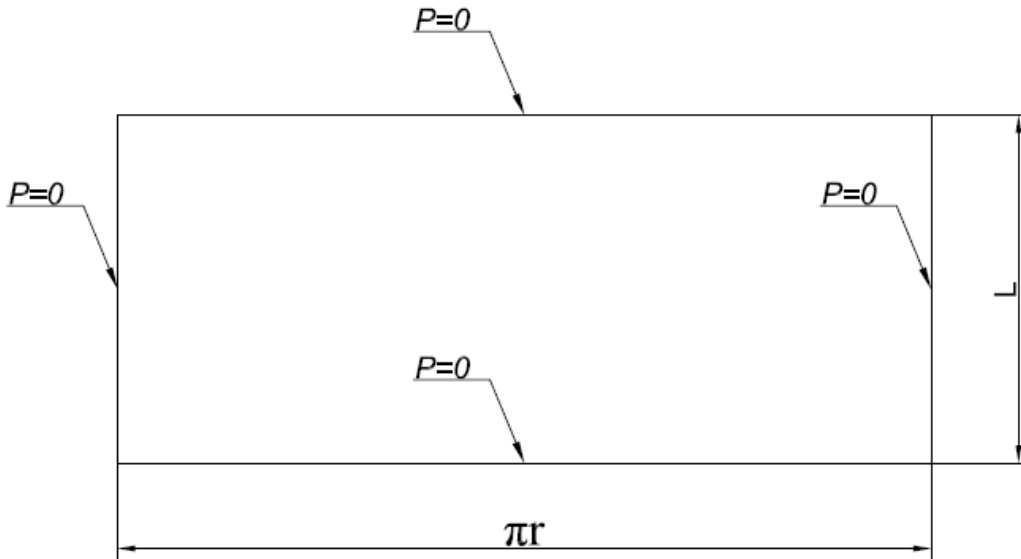


Figura 4-2 – Domínio e local das condições de contorno.

Numericamente, o valor conhecido da pressão na fronteira ( $P_f$ ) pode ser avaliado em ( $P_p$ ) se utilizarmos uma expansão em série de Taylor, que irá mostrar uma aproximação para a pressão no interior do volume. Daí, com esses valores conhecidos em toda a fronteira, é possível aplicar o método dos volumes finitos e solucionar o campo de pressão.

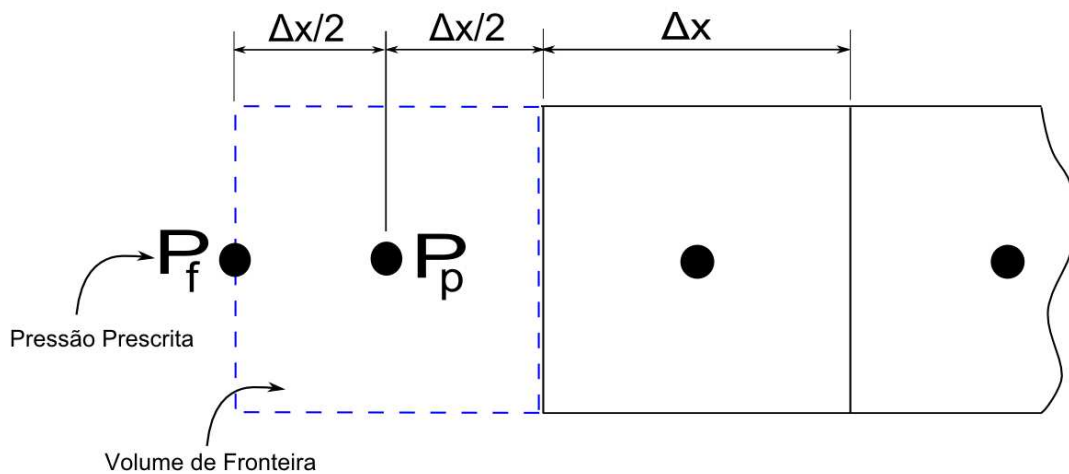


Figura 4-3 – Detalhe da região de fronteira.

### 4.3. Modelo Numérico para Mancais com Ranhuras

Na formulação para mancais com ranhuras, um ponto muito importante para a forma como é desenvolvida a modelagem, é justamente a alocação da malha sobre o domínio de forma que as ranhuras tenham suas fronteiras, ou seja, o local de transição passando sobre as fronteiras dos volumes. Essa necessidade vem da obrigação de garantir a conservação dos fluxos nas fronteiras, e caso estas não fossem alocadas no mesmo local, teríamos volumes com dimensões variáveis e isso tornaria a formulação inconsistente.

Assim, partindo do pressuposto que, para todos os volumes teremos o fluxo de saída de uma fronteira igual ao fluxo de entrada da sua vizinha imediata, segue que para o caso de uma dimensão apenas teremos:

$$q_i^e = q_{i+1}^w \quad 4.7$$

Isso mostra que o fluxo de saída do volume  $i$  é igual ao fluxo de entrada do seu vizinho da direção positiva  $x$ , que é representado por  $i+1$ .

$$q_{i+1}^w = - \left( \frac{h^3}{12\mu} \right)_{i+1}^w \frac{P_{i+1} - P_{i+1}^w}{x_{i+1} - x_{i+1/2}} + \frac{Vh_{i+1}^w}{2} \quad 4.8$$

Assim, sabemos que as pressões têm diferentes valores,  $P_i^e \neq P_{i+1}^w$ , pela descontinuidade da espessura de filme de óleo  $h$ .

$$- \left( \frac{h^3}{12\mu} \right)_{i+1}^e \frac{P_i^e - P_i}{x_{i+1/2} - x_i} + \frac{Vh_i^e}{2} = - \left( \frac{h^3}{12\mu} \right)_{i+1}^w \frac{P_{i+1} - P_{i+1}^w}{x_{i+1} - x_{i+1/2}} + \frac{Vh_{i+1}^w}{2} \quad 4.9$$

A relação acima pode, então, ser rearranjada da seguinte forma:

$$b_i^e P_i^e + b_{i+1}^w P_{i+1}^w = b_i^e P_i + b_{i+1}^w P_{i+1} + \frac{V(h_i^e - h_{i+1}^e)}{2}, \quad 4.10$$

$$b_i^e = -\frac{(h^3/12\mu)_i^e}{x_{i+1/2} - x_i}, \quad b_{i+1}^w = -\frac{(h^3/12\mu)_{i+1}^w}{x_{i+1} - x_{i+1/2}}, \quad 4.11$$

Uma segunda relação necessária para resolver o sistema pode ser obtida da equação generalizada de Bernoulli, conforme é demonstrado abaixo, tipicamente utilizada na descrição de rápidas variações de pressão em modelos teóricos de lubrificação, e deve ser escrita imediatamente antes e após a descontinuidade do filme.

$$P^- + \frac{\rho U^{-2}}{2} = P^+ + \frac{\rho U^{+2}}{2} + \xi \rho \frac{[\text{MAX}(U^-, U^+)]^2}{2} \quad 4.12$$

Nesta formulação, é considerado o maior valor entre as duas velocidades da fronteira, antes e após a variação da espessura do filme, assim, um coeficiente  $\xi$  também é considerado, para compensar as perdas de energia provenientes dos efeitos viscosos.

No caso da discretização computacional teremos:

$$P_i^e = P_i^w + A_{i+1/2} \quad 4.13$$

$$A_{i+1/2} = \frac{\rho(U_{i+1}^w)^2}{2} - \frac{\rho(U_i^e)^2}{2} + \frac{\xi \rho [\text{MAX}(U_i^e, U_{i+1}^w)]^2}{2} \quad 4.14$$

Sendo que as velocidades  $U$ , podem ser obtidas pela relação:

$$U_i^e = q_i^e / h_i^e, \quad U_{i+1}^w = q_{i+1}^w / h_{i+1}^w \quad 4.15$$

Assim, após alguns rearranjos, teremos a seguinte equação com seus coeficientes para cada volume de controle.

$$\tilde{n}_i P_i = \tilde{n}_{i-1} P_{i-1} + \tilde{n}_{i+1} P_{i+1} + S \quad 4.16$$

Sendo, os coeficientes representados da seguinte maneira:

$$\tilde{n}_i = \tilde{n}_{i-1} + \tilde{n}_{i+1} + \tilde{n}_{j-1} + \tilde{n}_{j+1} \quad 4.17$$

$$\tilde{n}_{i-1} = \frac{b_{i-1}^e b_i^w}{b_{i-1}^e + b_i^w}, \tilde{n}_{i+1} = \frac{b_i^e b_{i+1}^w}{b_i^e + b_{i+1}^w}, \tilde{n}_{i+1} = \frac{b_i^e b_{i+1}^w}{b_i^e + b_{i+1}^w}, \tilde{n}_{i+1} = \frac{b_i^e b_{i+1}^w}{b_i^e + b_{i+1}^w} \quad 4.18$$

$$S_i = -V \frac{(h_{i+1/2} - h_{i=1/2} + h_{j+1/2} - h_{j=1/2})}{2} - \frac{V}{2} \left[ (h_{i+1}^w - h_i^e) \frac{\tilde{n}_{i+1}}{b_{i+1}^w} + (h_i^w - h_{i-1}^e) \frac{\tilde{n}_{i-1}}{b_{i-1}^e} + (h_{j+1}^s - h_j^n) \frac{\tilde{n}_{j+1}}{b_{j+1}^w} + (h_i^s - h_{i-1}^n) \frac{\tilde{n}_{j-1}}{b_{j-1}^e} \right] + \dots$$

$$\dots + \tilde{n}_{i+1} A_{i+1/2} - \tilde{n}_{i-1} A_{i-1/2} + \tilde{n}_{j+1} A_{j+1/2} - \tilde{n}_{j-1} A_{j-1/2} \quad 4.19$$

A solução deste sistema linear gerado tem as mesmas características do mancal liso, com a matriz de coeficientes diagonal, e sendo assim, podemos utilizar o algoritmo de Thomas, TDMA, para resolver.

Neste trabalho, dois tipos de mancal ranhurado foram estudados, o mancal com ranhuras circunferenciais, Figura 4-4, e o mancal com ranhuras radiais, Figura 4-5. Em cada caso a formulação básica foi a mesma, e a única diferença trata da montagem da malha que deve respeitar a posição das ranhuras.

No caso do mancal com ranhuras circunferenciais a largura no sentido Z de cada ranhura é igual a  $Wd$ , definido da seguinte forma e com valores em milímetros:

$$Wd = \frac{L}{(2n_g + 1)} \quad 4.20$$



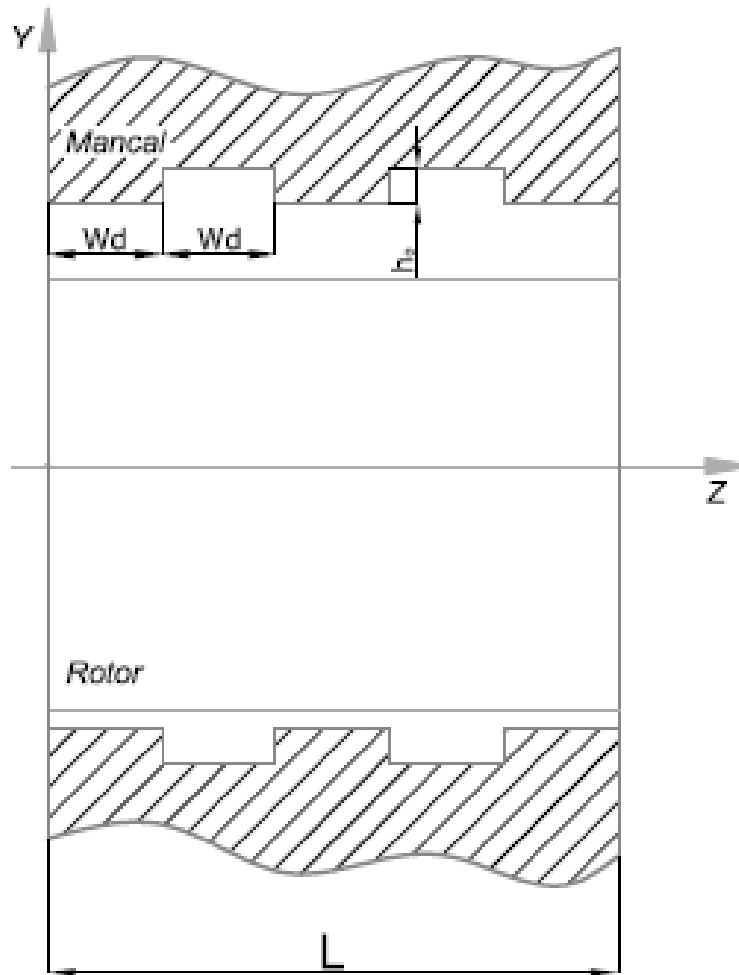
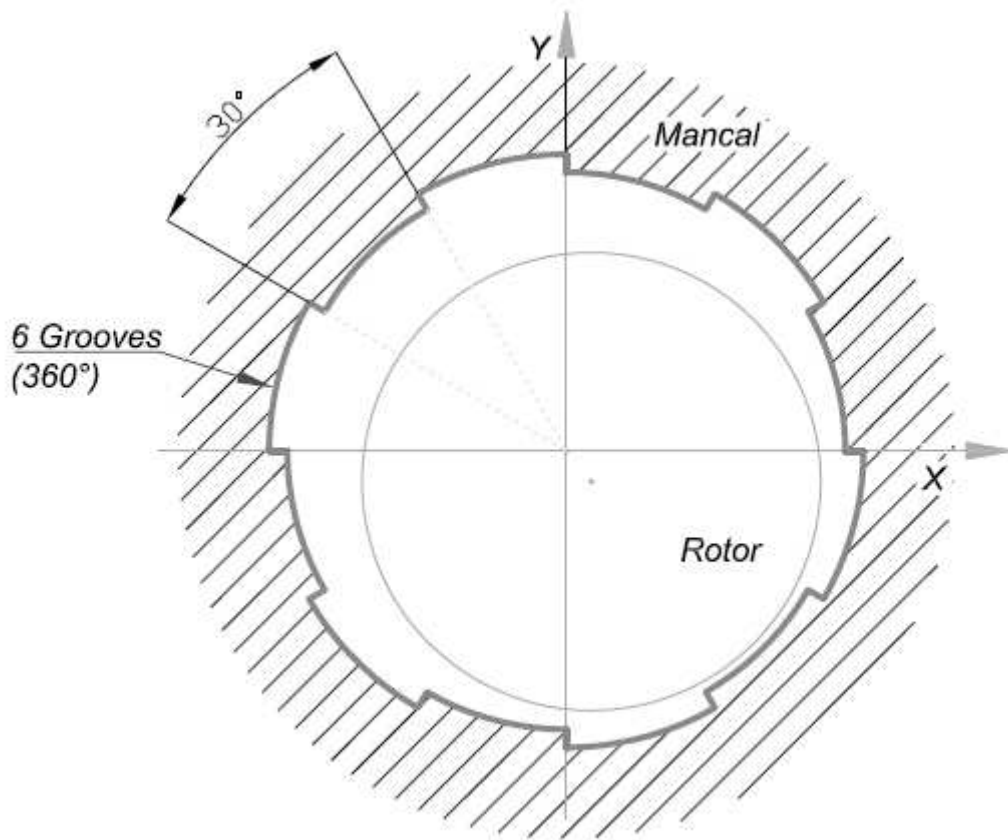


Figura 4-4 – Representação em corte das ranhuras circunferenciais.

Para o mancal com ranhuras radiais, a largura de cada *groove* será obtida ao definirmos a seguinte relação:

$$\theta_d = 360^\circ / 2n_g \quad 4.21$$

Observe que, neste caso, a largura do mancal será definida em graus, e  $360^\circ$  faz referência a um mancal completo, mesmo que nos cálculos seja utilizado apenas meio mancal.



**Figura 4-5 – Mancais com ranhuras radiais.**

Um ponto importante a observar é que, no caso da formulação para as ranhuras, a existência de uma nova equação, no caso, a equação de Bernoulli, traz a necessidade de uma estimativa inicial do campo de pressão com a conseqüente correção dos valores dentro de um processo iterativo. Nesse processo, a cada etapa, as novas velocidades são avaliadas e reintroduzidas no sistema, gerando um novo campo de pressão. A convergência se dará através da estabilidade do resultado comparado com a do passo anterior, e respeitando a conservação dos fluxos de massa de óleo dentro dos volumes.

#### **4.5. O Programa Computacional**

A tarefa de desenvolver um programa computacional para simulação numérica requer a harmonia entre o uso de ferramentas computacionais, linguagens, bibliotecas de interface e visualização, estratégias para desenvolvimento e depuração de erros e, principalmente, a correta interpretação dos resultados obtidos.

Neste trabalho, a parte que se relaciona com a parte de linguagem e codificação se valeu da utilização da linguagem Fortran 90 e do Microsoft Visual Studio 2003 com ferramenta de depuração do programa computacional. Esta escolha não foi aleatória, nem ocasional. A linguagem Fortran, criada durante as primeiras décadas da ciência computacional, é reconhecida por sua velocidade de processamento e por suas ótimas características no tratamento de equações e processos numéricos, elementos que estão diretamente relacionados com a criação da linguagem.

Assim, o programa desenvolvido processa os dados de entrada e cria como saída diversos arquivos texto com conteúdo formatado de maneira a possibilitar a leitura através de softwares gráficos, tais como o Matlab ou Python.

Outro ponto importante no programa foi a indexação de variáveis. Nesta fase, a abstração computacional e criação do algoritmo são postas em prática e uma boa maneira de tratar do mapeamento do domínio com duas dimensões é a criação de vetores para armazenar as características do escoamento.

Neste trabalho, a convergência sempre foi baseada na conservação da massa e convergência de valores, em que a massa que entra em um volume é a mesma que sai, e toda a avaliação é feita sob o ponto de vista de um erro relativo entre o passo atual e o passo anterior.

## Capítulo 5

### 5. Resultados e Discussões

Neste capítulo, serão apresentados os resultados para diferentes configurações, para tanto, são modificando os parâmetros geométricos e operacionais dos mancais nas simulações.

Outro ponto de interesse analisado trata do estudo de malha, com o qual são obtidos diversos resultados para vários tamanhos de volume e, conseqüentemente, o número de volumes. O próprio método de solução do sistema linear é avaliado, mostrando sua qualidade e condições de utilização e aplicabilidade nos estudos com lubrificação, visto que este método, amplamente utilizado na área da mecânica dos fluidos.

Além disso, foi feita a validação do modelo fazendo as comparações com a solução analítica de Ocvirk, por ser este método, como dito anteriormente, largamente utilizado e possuir ótima aproximação com os resultados obtidos por outros autores.

Podemos dividir as simulações em três grupos e etapas de estudo. Na primeira é feita a validação propriamente dita, com a comparação do método numérico utilizando o mancal liso e a solução analítica. Na segunda etapa uma avaliação da influência de ranhuras é obtida tanto para geometrias circunferenciais, quanto para radiais. E, finalmente, uma avaliação de parâmetros utilizados no dia-a-dia de projetistas e engenheiros, tais como a rigidez de filme de óleo, a perda de carga e o coeficiente de atrito presentes nos mancais.

O valor da pressão mostradas nas figuras está em PSI (libras/pol<sup>2</sup>), exatamente por ser a unidade mais utilizada nos estudos com lubrificação em mancais. Devido às condições de contorno, há o valor nulo de pressão, onde existe fluxo de perda de óleo ou onde temos valores máximos ou mínimos para a espessura do filme.

Outro ponto importante a mencionar é o fato de a malha utilizada ter avaliado a pressão em apenas metade do mancal, ou seja, entre os valores de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  para o  $\theta$ . Neste procedimento, utilizando apenas metade do mancal, ou  $180^\circ$ , é possível avaliar satisfatoriamente a pressão pelo fato da outra metade do mancal ter a pressão negativa, como a pressão negativa não possui significado físico, conforme já observado por Reynolds (1886), neste tipo de problema, é possível ignorá-la sem perdas na qualidade dos resultados.

### **5.1 Estudo da Malha (Quantidade de Volumes)**

Ao alterarmos a quantidade de volumes, em um mesmo tamanho de domínio, estamos, por consequência, alterando as dimensões destes volumes, e sendo assim, a própria natureza da teoria diferencial das equações mostra que quanto mais refinadas forem as malhas, mais próximos do resultado real estaremos. Ou seja, em teoria, se refinarmos cada vez mais a nossa malha, melhor será o resultado.

Contudo, na prática o refinamento da malha tem o revés de aumentar exponencialmente o tempo de processamento computacional e, a partir de certo ponto, os ganhos em qualidade não compensam o tempo despendido na busca da solução.

A seguir, o estudo da malha utilizando o algoritmo computacional implementado e sua validação em relação à solução analítica de Ocvirk é proposto. Para este estudo, as ranhuras não foram utilizadas, pois o próprio modelo de Ocvirk não contempla tais características. Na Tabela 5.1 são mostradas as configurações do mancal liso estudado e com características comuns de utilização, tais como diâmetro, rotação e viscosidade de óleo.

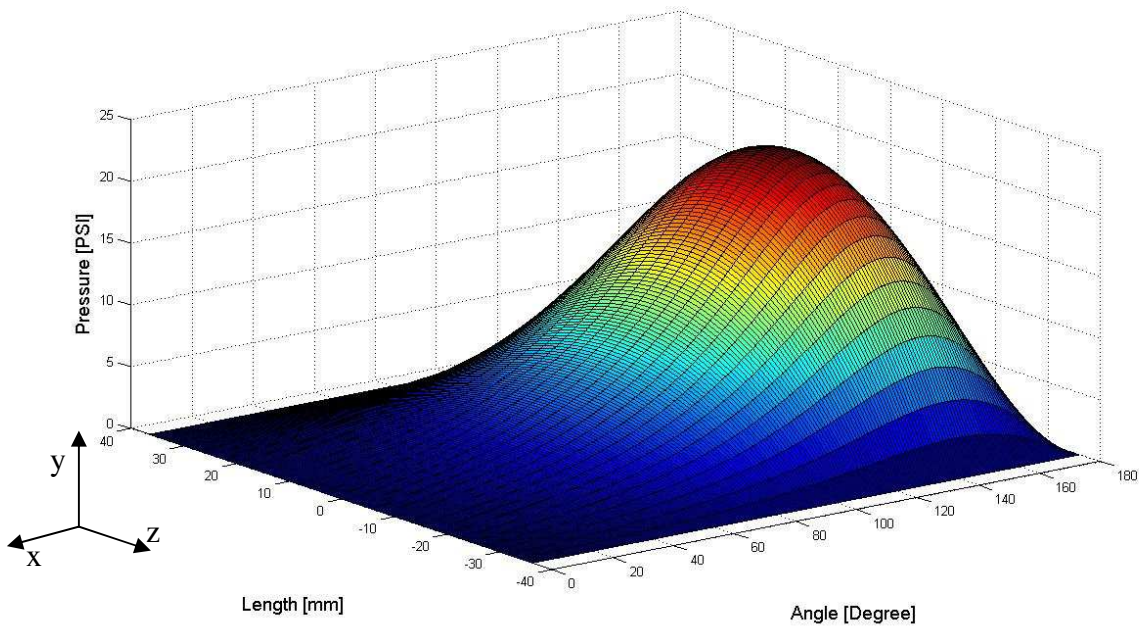
Tabela 5.1. Configuração dos mancais utilizados nas simulações para o caso 1.

<i>Variáveis</i>	<i>Mancal - Liso</i>
Diâmetro (d)	300 mm
Comprimento do Mancal (L)	75 mm
Razão L/d	0,25
Excentricidade Adimensional ( $\epsilon$ )	0,5
Viscosidade Dinâmica ( $\mu$ )	5,6E-3 Pa.s
Rotação do Eixo (n)	2000 r.p.m.
Razão de Folga ( $2C_r/d$ )	0,0013
Tipo de Ranhura	Nenhuma
Número de Ranhuras ( <i>Grooves</i> )	0
Profundidade da Ranhura ( $h_o$ )	0,0 mm
Largura da Ranhura	0,0 mm
Número de Volumes	57600
Iterações – Método TDMA	12000

Nas simulações numéricas foram determinadas as seguintes curvas de pressão para o mancal liso da Tabela 5.1: no gráfico da Figura 5-1 é mostrado o resultado para a curva de pressão no filme de óleo em um domínio bidimensional. O eixo z, que é o eixo perpendicular ao plano xy, conforme a Figura possui os valores da largura do mancal e estão em unidades de milímetro, variando de -37,5mm (-L/2) a 37,5mm (L/2), no eixo x estão os valores de referencia angular a partir do eixo Y, note que a contagem parte do valor ângulo de atitude  $\phi$ , conforme representado pela Figura 5-1.

Assim, nestas condições de operação, a pressão máxima obtida foi 21,4 PSI, ou 1,025 kPa, e ocorre em  $\theta \approx 145^\circ$ . A unidade PSI (libras/pol<sup>2</sup>), é adotada neste trabalho como padrão, pois é a referência adotada na quase totalidade dos trabalhos com mancais hidrodinâmicos.

Outro valor importante calculado é o ângulo de atitude, que indica a inclinação de um eixo imaginário que passa pelos pontos de mínima e máxima espessura de filme de óleo, este eixo é, inclusive, utilizado como referência na contagem do ângulo  $\theta$ , conforme já mostrado no capítulo 3 e pela Figura 3-3.



**Figura 5-1 – Curva de pressão [PSI] avaliada em um mancal liso ( Malha com 6400 volumes).**

Nas Figuras 5-2 a 5-5, os resultados obtidos com a variação do número de volumes foram comparados diretamente com a curva da solução analítica de Ocvirk, essa curva é avaliada na posição 0 do eixo z ou  $L/2$ .

É evidente notar que a diferença entre as curvas diminui conforme o aumento do número de volumes, ou melhor, com a diminuição dos volumes de controle. Em todos os casos o mancal da Tabela 1 foi utilizado, contudo com a excentricidade adimensional fixa com o valor de 0,5. No caso da utilização de 3600 volumes, a diferença é explícita e o método numérico traz valores muito abaixo dos obtidos com a solução analítica.

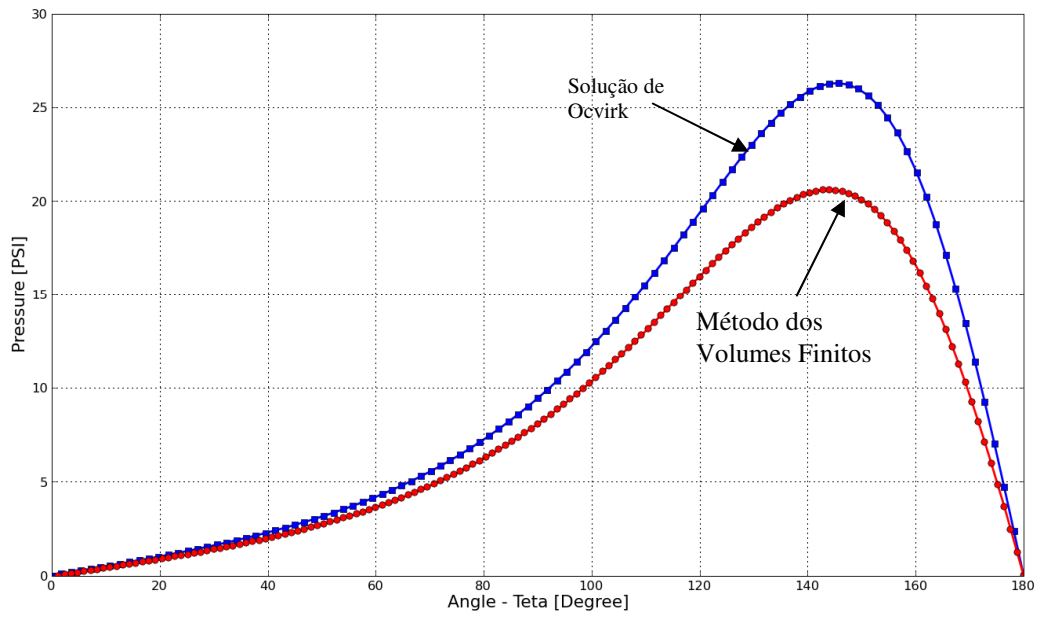


Figura 5-2 – Comparação entre MVF e Ocvirk (3600 volumes).

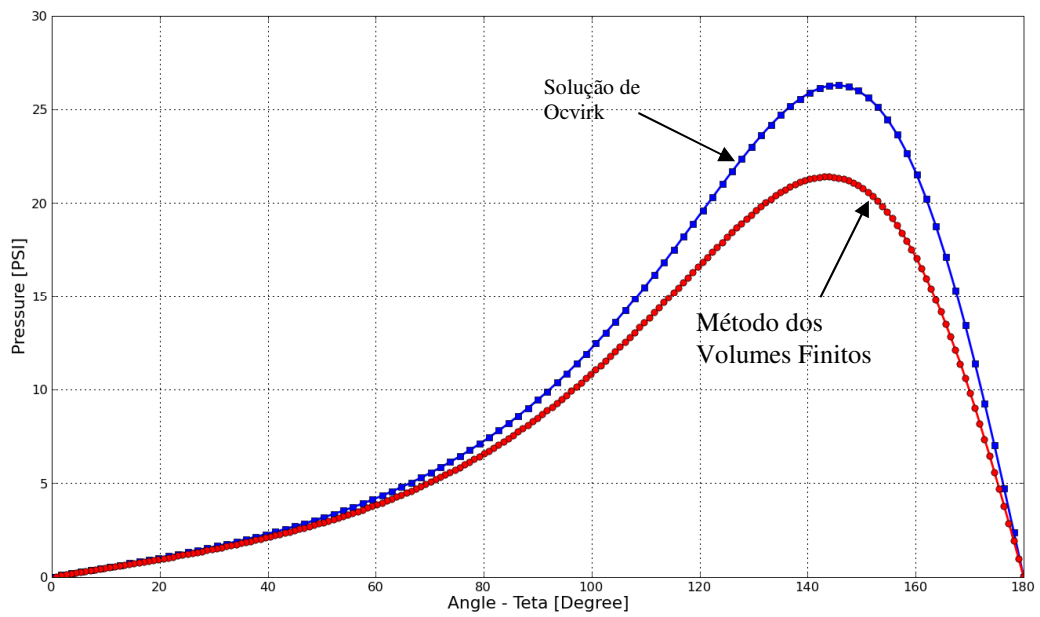
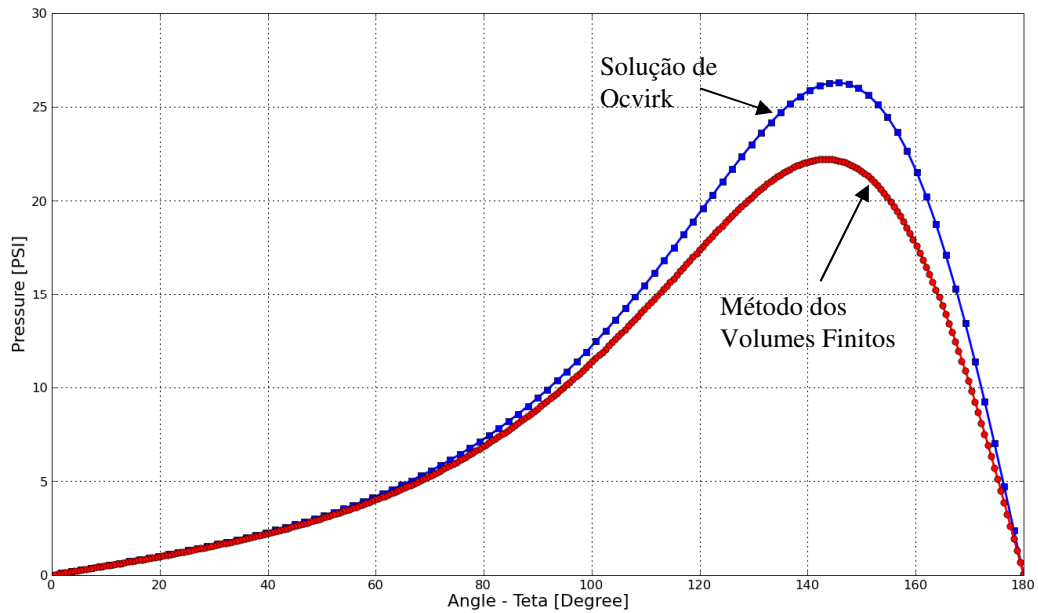


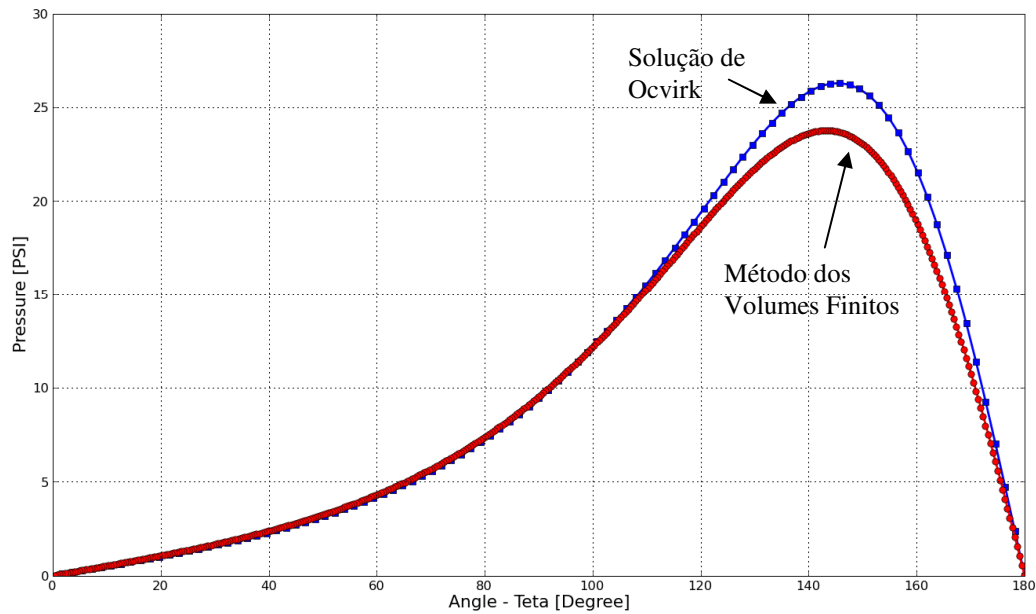
Figura 5-3 – Comparação entre MVF e Ocvirk (6400 volumes).



Ao utilizarmos a malha com 14400 volumes obtemos uma boa aproximação, tanto na forma do gráfico quanto nos valores obtidos por ele. Aqui é importante mencionar que o tempo de processamento aumentou consideravelmente em contrapartida ao ganho de qualidade de resultado.



**Figura 5-4 – Comparação entre MVF e Ocvirk (14400 volumes).**



**Figura 5-5 – Comparação entre MVF e Ocvirk (25600 volumes).**

Observando os quatro gráficos anteriores, a comparação entre os resultados obtidos pelo método de Ocvirk e o numérico pelos Volumes Finitos mostra que o número de volumes e seu tamanho alteram o resultado final da curva de pressão do filme de óleo, neste caso, a diminuição do tamanho dos volumes é necessária até o ponto em que se tenha aproximadamente 20000 volumes, especificamente para este tamanho de mancal. A seguir, a Figura 5-7 mostra o desvio relativo aos resultados analíticos tanto para a média RMS, quanto para três pontos escolhidos ao longo do domínio, e representados na Figura 5-6. A convergência da curva para valores de desvio na faixa de 0% a 10%, e praticamente a estabilidade dos resultados ocorre para valores de malha superiores a um número total de 20000 volumes, conforme mostrado pelos gráficos anteriores.

Note que na figura 5-7, os resultados mostram a tendência de maiores desvios em relação a solução analítica conforme a posição circunferencial cresce ao longo do ângulo  $\theta$ , e volta a cair rapidamente após a região de pressão máxima, assim, em ordem de crescimento de desvio, temos o ponto 2 com os melhores resultados, seguido pelo ponto 1 e finalmente pelo ponto 3, sendo que este último tem valores muito próximos aos da média RMS.

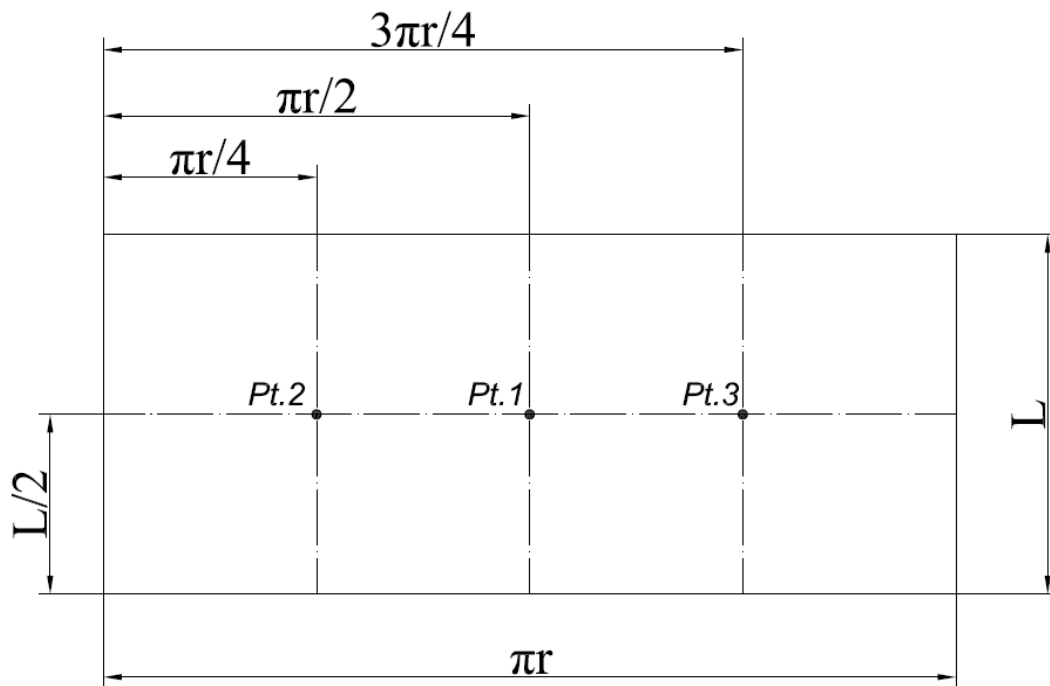


Figura 5-6 – Pontos de referência no domínio do filme de óleo do mancal.

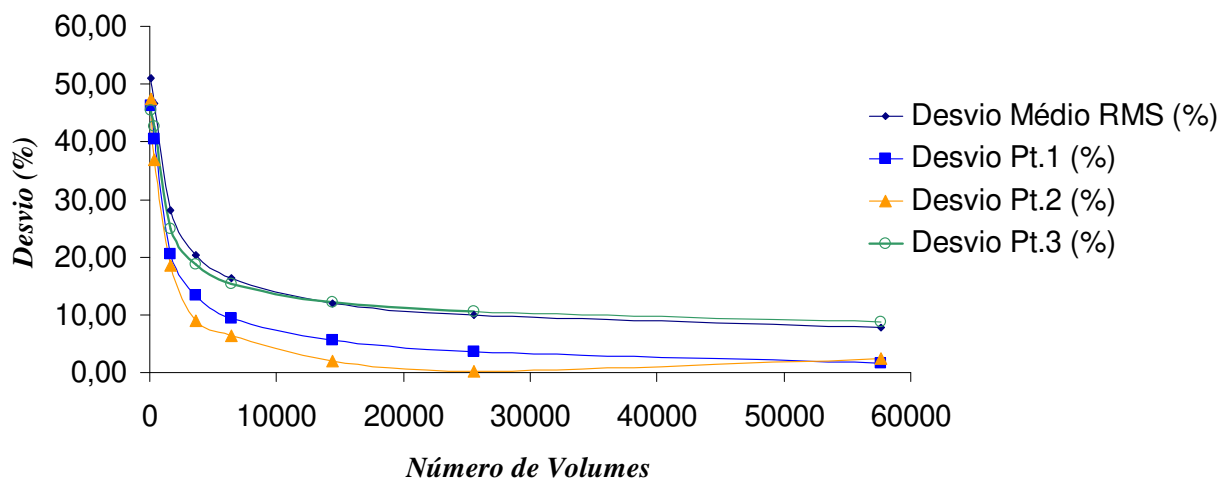
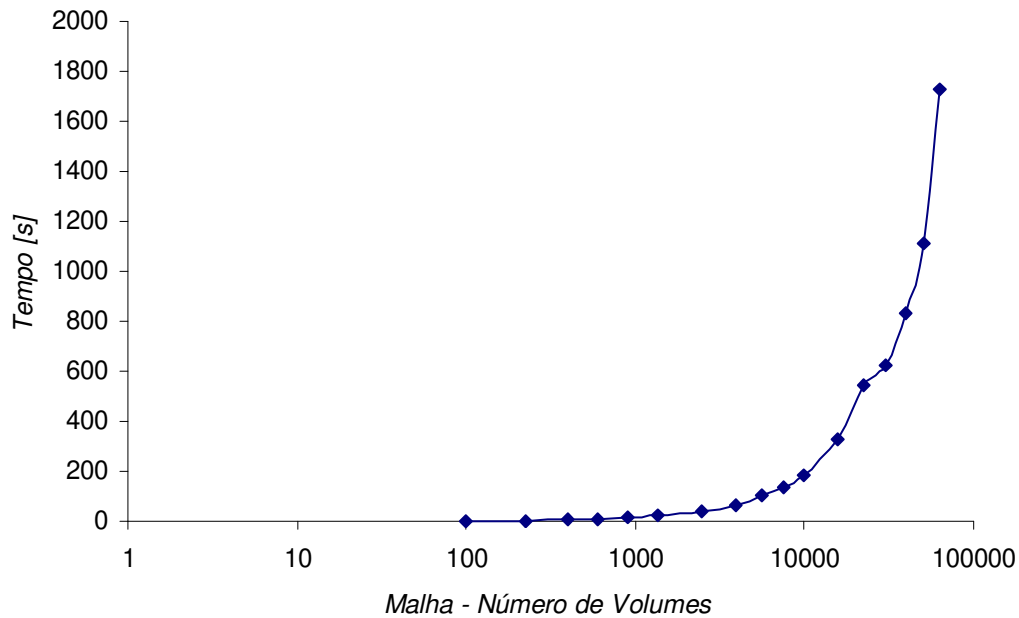


Figura 5-7 – Pontos de referência no domínio do filme de óleo do mancal.



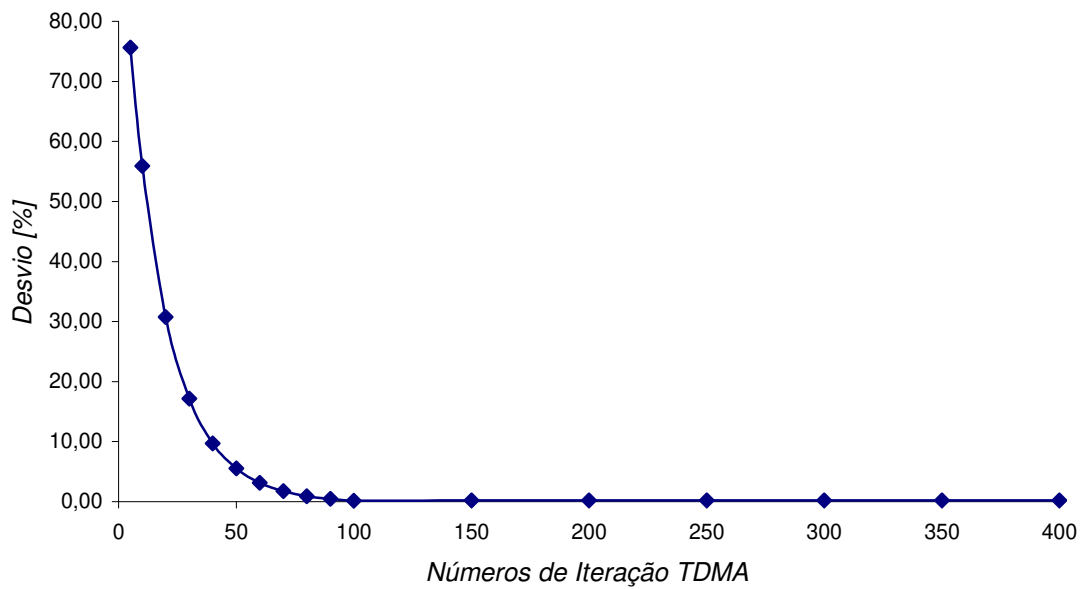
**Figura 5-8 – Evolução do tempo com a variação do tamanho dos volumes na malha.**

Outro ponto interessante é a evolução exponencial do tempo de processamento com o aumento do número de volumes a serem calculados, Figura 5-8, de fato, não há nenhuma surpresa aqui. Pois, uma das principais características deste tipo de solução numérica é justamente a evolução muito rápida do tempo com o refinamento da malha.

## **5.2 Convergência do método TDMA para o sistema linear**

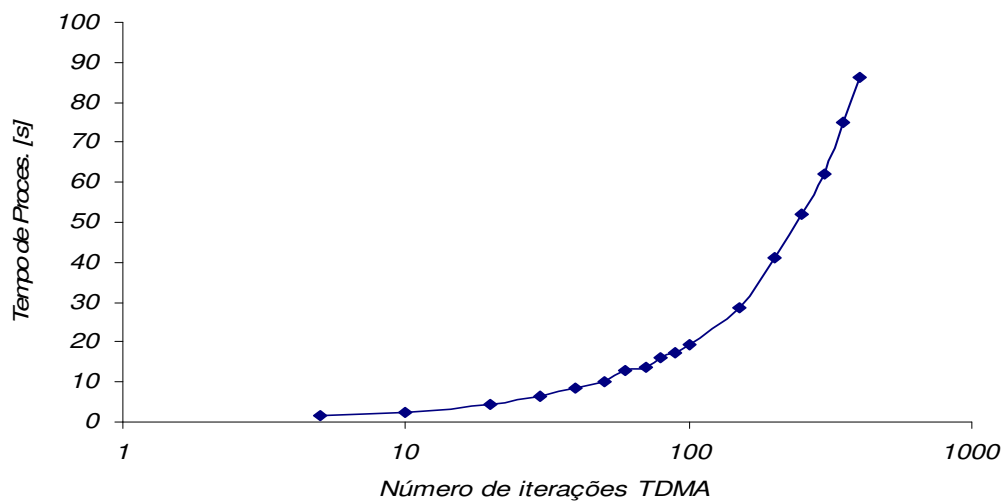
A ótima convergência obtida pelo método TDMA, mostrada abaixo, é observada ao fixarmos todos os outros parâmetros, tais como o número de volumes, a folga radial, a excentricidade, etc, e ao variarmos apenas o número de iterações do método, ou seja, o número de vezes que serão feitas as varreduras nas linhas e colunas da matriz de coeficientes.

Assim, para valores superiores a 100 iterações, o resultado se mostrou muito eficiente e estável, sendo que o desvio, nesses casos, não superou os 0,5% na comparação com a pressão média entre os dois métodos.



**Figura 5-9 – Evolução do desvio com a variação do número de iterações.**

O tempo computacional requerido também mostrou a mesma tendência exponencial característica nos métodos numéricos de análise de fluidos, com o tempo de processamento aumentando conforme cresce o número de iterações.



**Figura 5-10 – Evolução do tempo de processamento com a variação do número de iterações.**

Assim, partindo dos gráficos mostrados acima, é viável utilizar o método dos volumes finitos como meio de solução, Figura 5-10, porém, valores corretos de quantidade de volumes e iterações devem ser respeitados.

### 5.3 Avaliação da influencia das ranhuras circunferenciais.

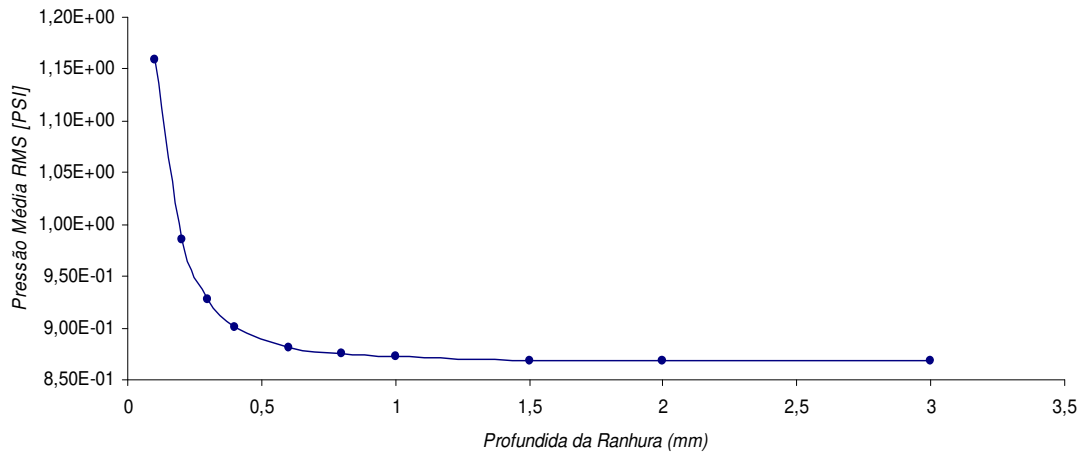
Na avaliação da capacidade de influencia das ranhuras circunferenciais no comportamento da lubrificação, especialmente na questão da profundidade de ranhura, foram feitas simulações utilizando mancais lisos e ranhurados circunferencialmente conforme a Tabela 5-2.

Tabela 5.2. Configuração dos mancais utilizados nas simulações para o caso de ranhuras circunferenciais.

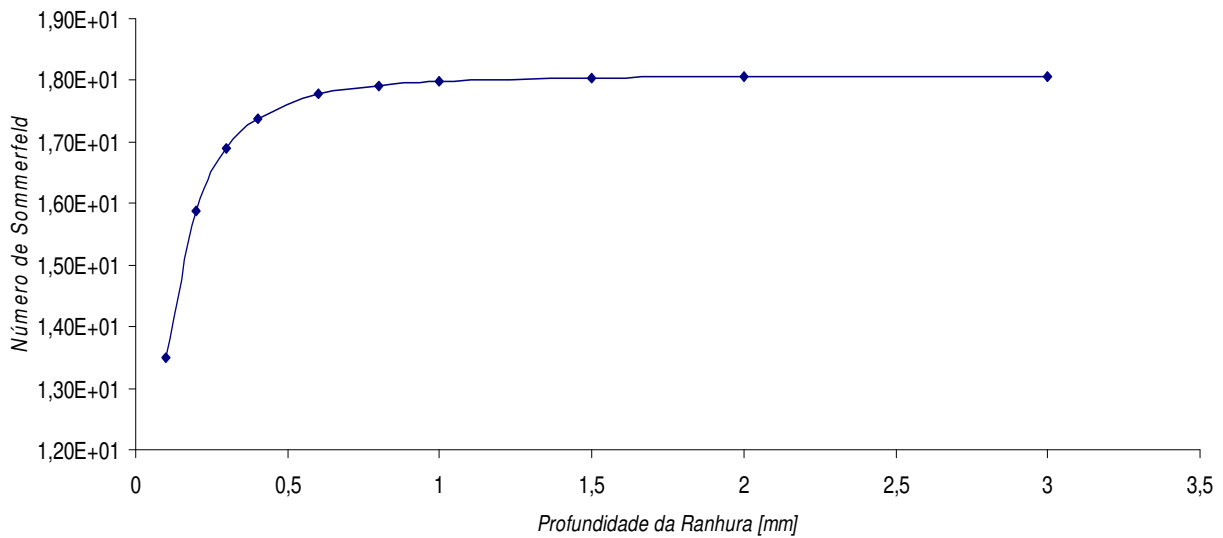
<i>Variáveis</i>	<i>Mancal 1 - Ranhurado</i>	<i>Mancal 1 - Liso</i>
Diâmetro (d)	300 mm	300 mm
Comprimento do Mancal (L)	75 mm	75 mm
Razão L/d	0,25	0,25
Excentricidade Adimensional ( $\epsilon$ )	0,5	0,5
Viscosidade Dinâmica ( $\mu$ )	5,6E-3 Pa.s	5,6E-3 Pa.s
Rotação do Eixo (n)	2000 r.p.m.	2000 r.p.m.
Razão de Folga ( $2C_r/d$ )	0,0013	0,0013
Tipo de Ranhura	Circunferencial	Nenhuma
Número de Ranhuras ( <i>Grooves</i> )	2	0
Profundidade da Ranhura ( $h_o$ )	0,5 mm	0,0 mm
Largura da Ranhura	15,0 mm	0,0 mm
Número de Volumes	57600	57600
Iterações – Método TDMA	12000	12000

O comportamento da pressão média pode ser vista na Figura 5-10, em que há uma queda acentuada da capacidade de sustentação do mancal, devido à menor pressão presente no filme de óleo. No entanto, a partir de certa profundidade, que no caso deste mancal ficou na ordem de 1 mm, a influencia na variação da pressão tornou-se inexpressiva. Isso se deve provavelmente a estagnação de óleo abaixo de certa profundidade, fenômeno que não modifica em nada a capacidade de sustentação do mancal. O número de *Sommerfeld*, um dos principais parâmetros

adimensionais para avaliar os mancais, é mostrado na Figura 5-11, com variação também assintótica conforme se aumenta a profundidade de ranhura.

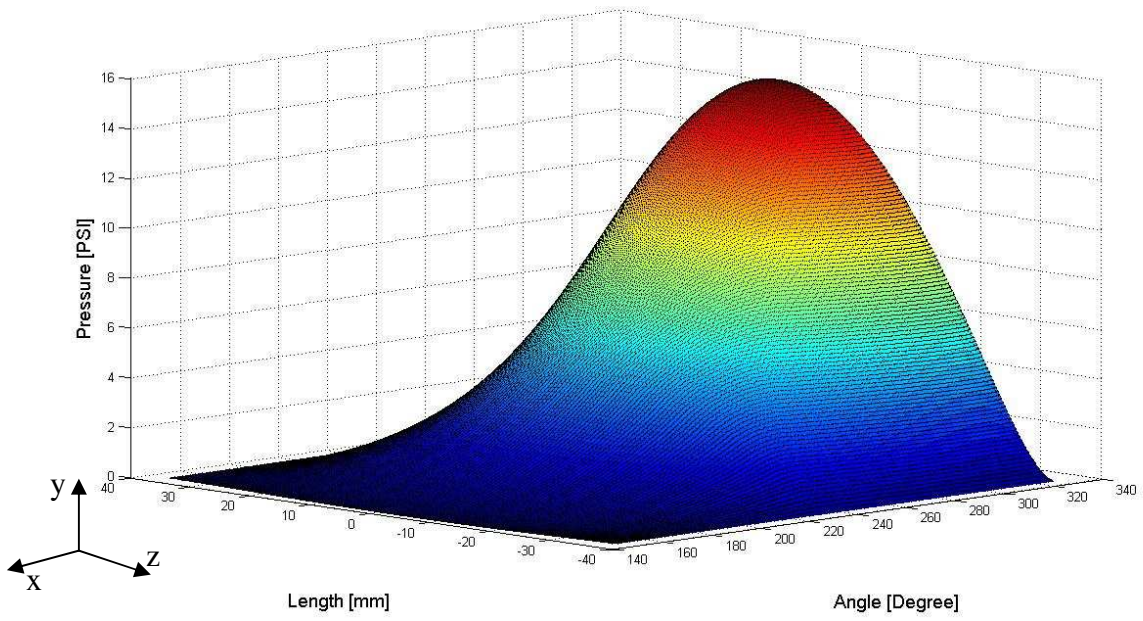


**Figura 5-11 – Diferentes pressões para diferentes profundidades de ranhura.**



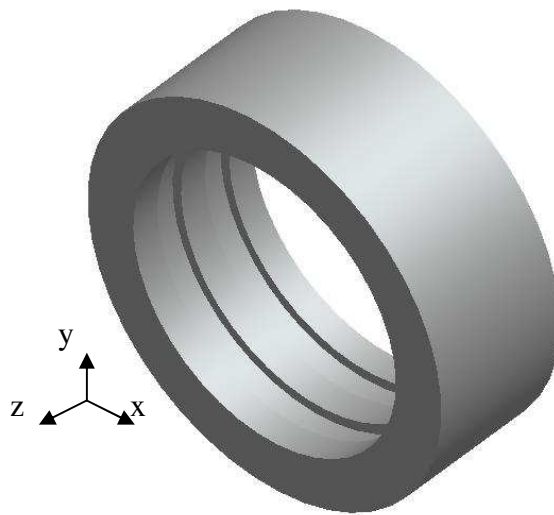
**Figura 5-12 – Variação do número de Sommerfeld com a variação da profundidade de ranhura.**

As Figuras 5-13 e 5-14 mostram, por sua vez, a mudança na forma da curva de pressão com a aplicação das ranhuras circunferenciais, é possível inclusive notar a presença destas com o surgimento de duas regiões que apresentam queda de pressão em comparação com o mancal liso.

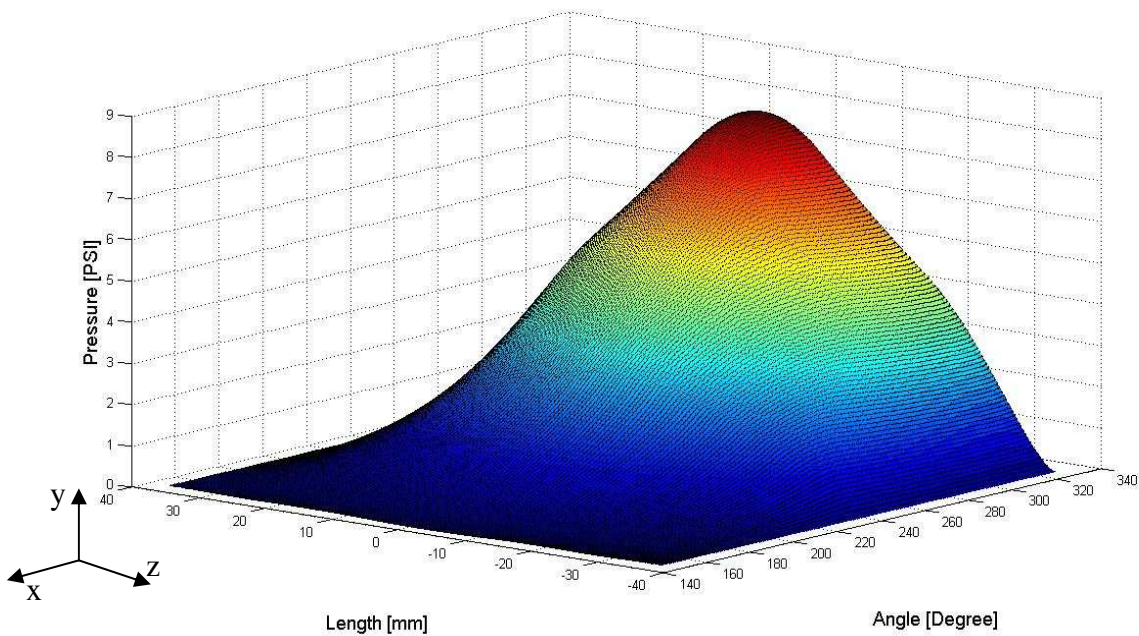


**Figura 5-13 – Mancal liso (14400 Volumes).**





(A)



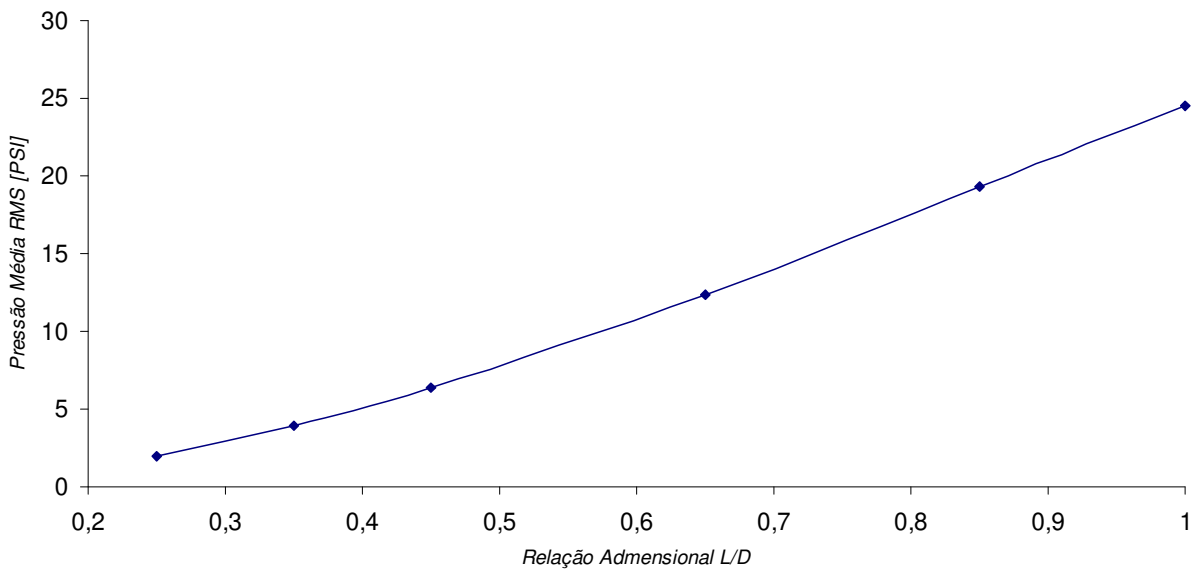
(B)

**Figura 5-14 – (A) Ranhuras Longitudinais – (B) Duas ranhuras no sentido circunferencial (14400 Volumes)**

No mancal utilizado, a largura das ranhuras circunferenciais está atrelada a própria largura do mancal, isto não é regra e é plenamente possível a utilização de mancais com ranhuras de largura fixa. Na Figura 5-15, é mostrado o gráfico que contém a variação da pressão média com a

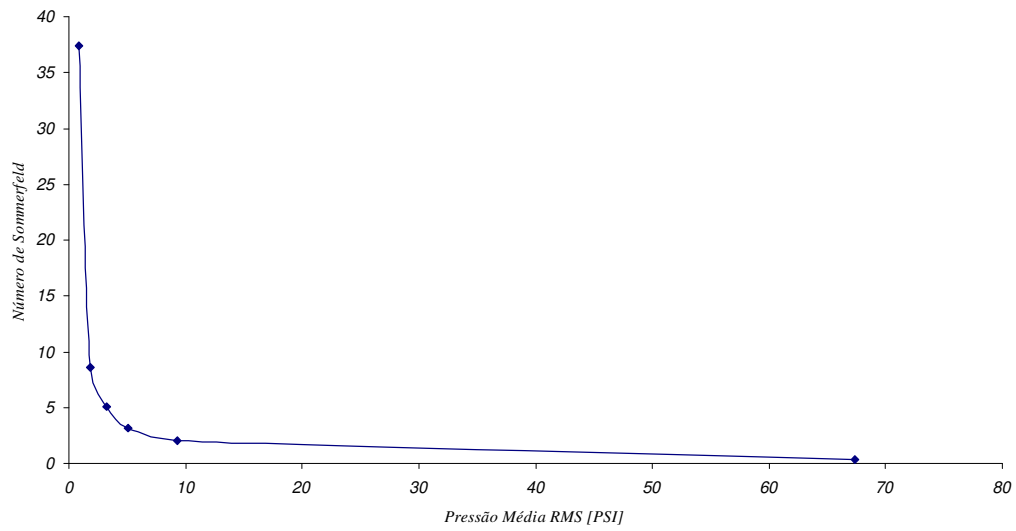
variação da relação  $L/D$ , note que esta variação é praticamente linear até  $L/D=1$ , observe que esta cresce linearmente com o aumento da relação, ou seja, com o aumento da largura do mancal.

Já na Figura 5-16, é o número de Sommerfeld que varia mostrando que a queda da pressão ocorre de maneira abrupta para a faixa avaliada no mancal liso. E como comparação, a Figura 5-17 mostra o mesmo estudo para o mesmo mancal, contudo com as duas ranhuras circunferenciais  $h_0=0,5$  mm, observe que a queda da pressão ocorre agora de forma não linear e mais suave.

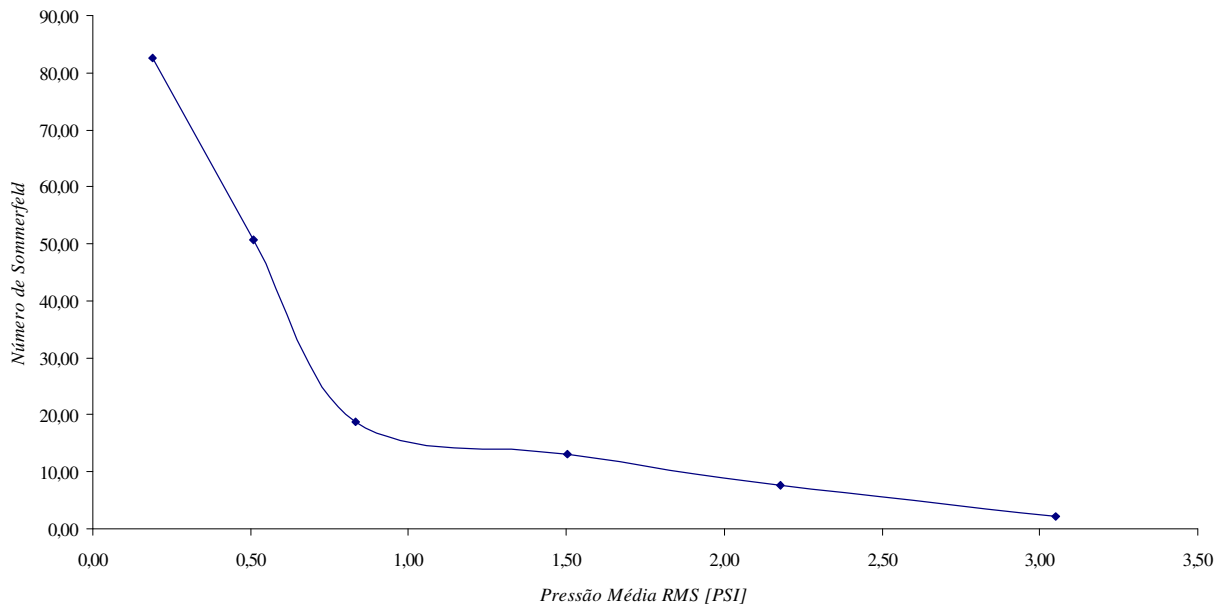


**Figura 5-15 – Mancal ranhurado – Duas ranhuras no sentido circunferencial (14400 Volumes). Relação entre a largura do mancal e seu diâmetro contra a pressão média.**

Na Figura 5-15 a variação da relação adimensional  $L/D$  causa uma mudança linear da pressão média, que tende a subir, algo perfeitamente esperado, visto que é necessária apenas uma das dimensões para modificar a relação.



**Figura 5-16 – Mancal liso com variação da pressão média.**



**Figura 5-17 – Mancal ranhurado – Duas ranhuras no sentido circunferencial.**

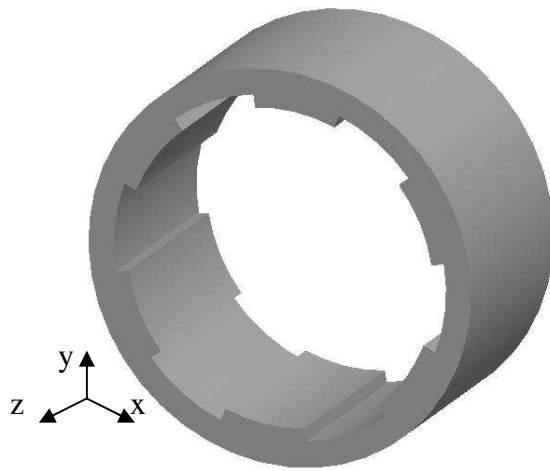
#### 5.4. Avaliação da influência das ranhuras radiais

De maneira análoga, os resultados para os mancais com ranhuras radiais são feitos conforme mostrado anteriormente para os mancais circunferenciais. Assim, segue a Tabela 5.3 com as especificações do mancal, nos casos em que não há a variação da profundidade da ranhura, a ranhura padrão é fixa em 0,5 mm. Apesar de a simulação ser feita em apenas meio mancal, os resultados obtidos nas três ranhuras dos 180° avaliados terão os mesmos valores do mancal completo, pois mesmo neste caso a parte contrária terá pressões negativas.

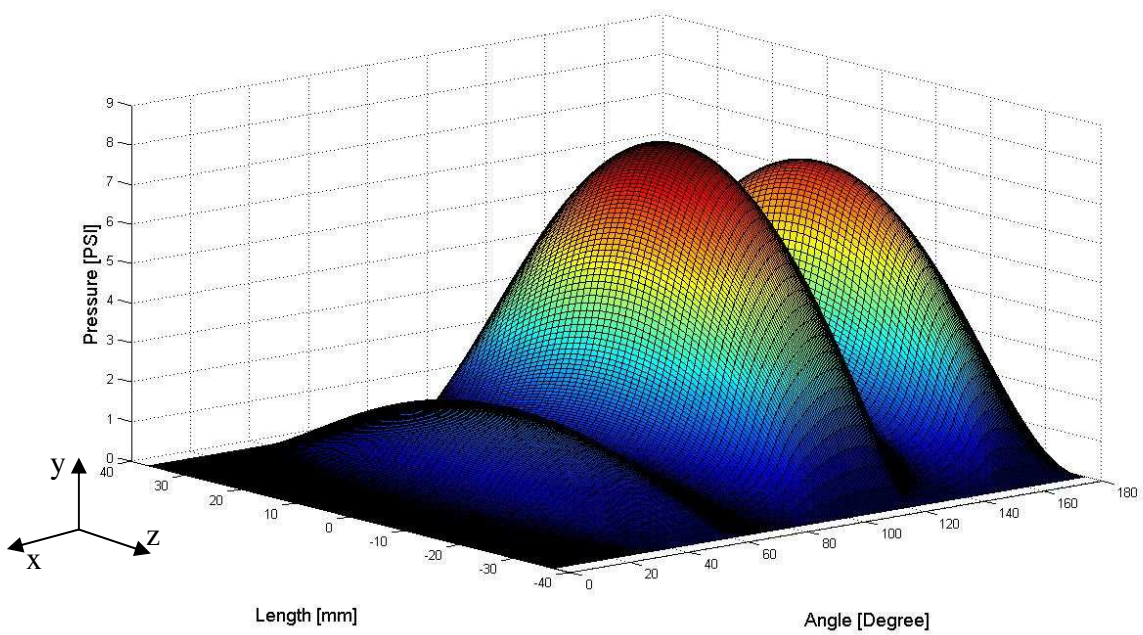
Tabela 5.3. Configuração dos mancais utilizados nas simulações para o caso de ranhuras radiais.

<i>Variáveis</i>	<i>Mancal 3 - Ranhurado</i>	<i>Mancal 1 - Liso</i>
Diâmetro (d)	300 mm	300 mm
Comprimento do Mancal (L)	75 mm	75 mm
Razão L/d	0,25	0,25
Viscosidade Dinâmica ( $\mu$ )	5,6E-3 Pa.s	5,6E-3 Pa.s
Rotação do Eixo (n)	2000 r.p.m.	2000 r.p.m.
Razão de Folga ( $2C_r/d$ )	0,013	0,013
Tipo de Ranhura	Radial	Nenhuma
Número de Ranhuras ( <i>Grooves</i> )	6	0
Profundidade da Ranhura ( $h_o$ )	0,5 mm	0,0 mm
Largura da Ranhura	30°	0°

Os gráficos das Figuras 5-18, 5-19 e 5-20 mostram a mudança na curva de pressão com o aumento da carga ou a diminuição da folga no mancal, assim, para essas duas situações, o aumento da excentricidade adimensional irá aumentar consideravelmente a pressão no filme de óleo e conseqüentemente a capacidade de sustentação do mancal. As ranhuras que deformam a curva para excentricidade de 0,4 ou menores, consideravelmente, acabam por perder sua influência à medida que se aumenta esse valor. Lembrando que a própria existência da ranhura atrapalha muito a formação de um filme de óleo que sustente um eixo de maneira satisfatória.

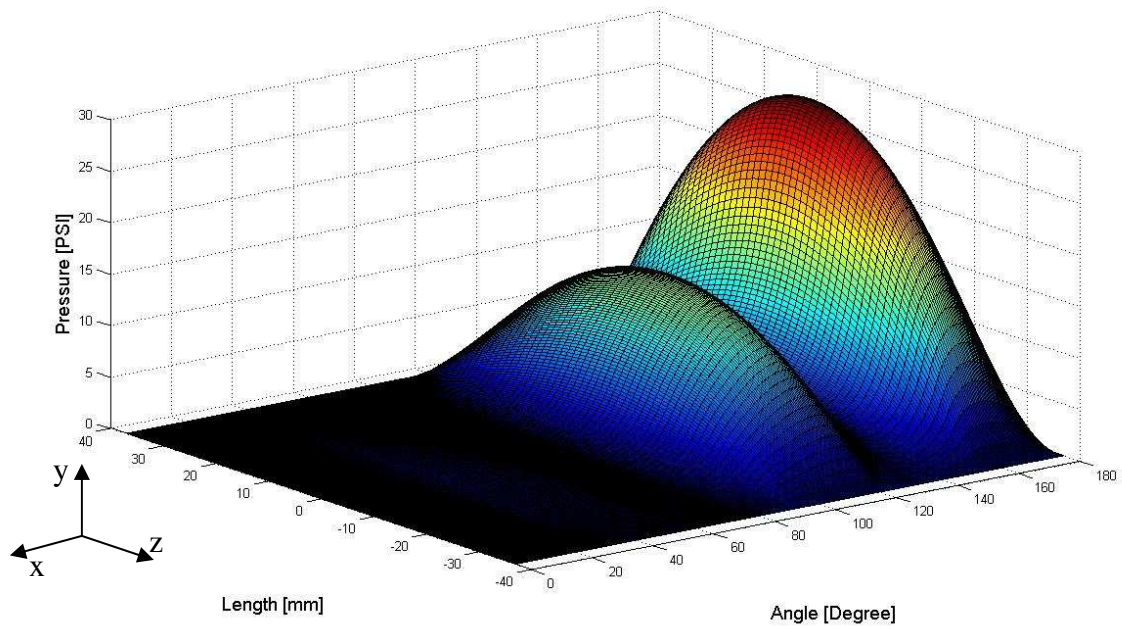


(A)

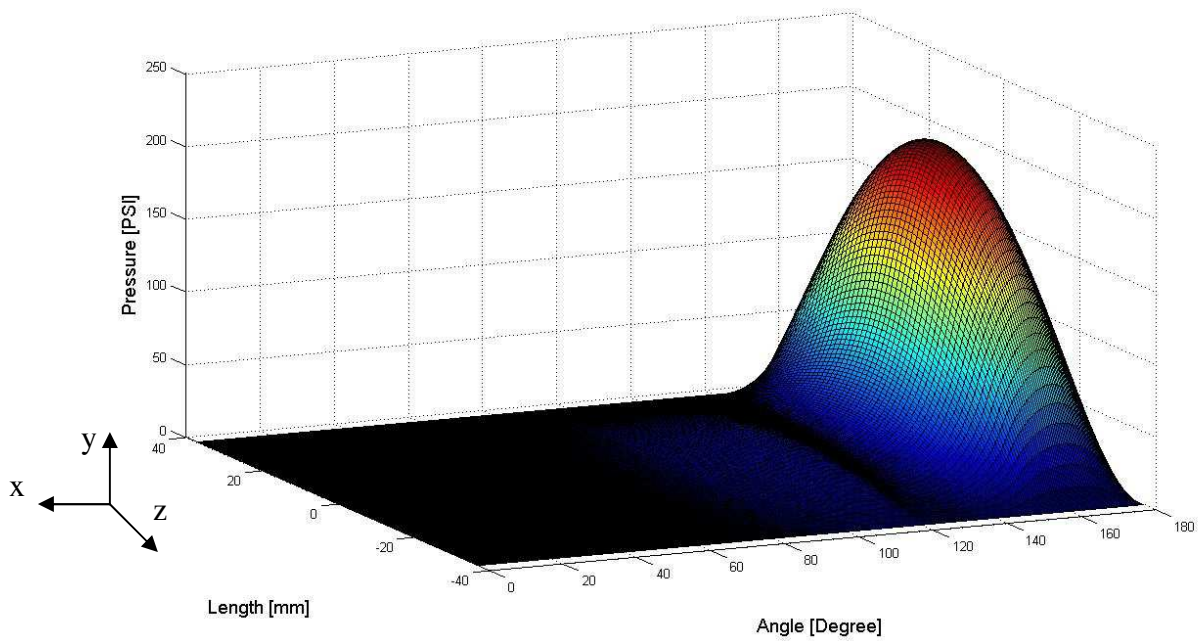


(B)

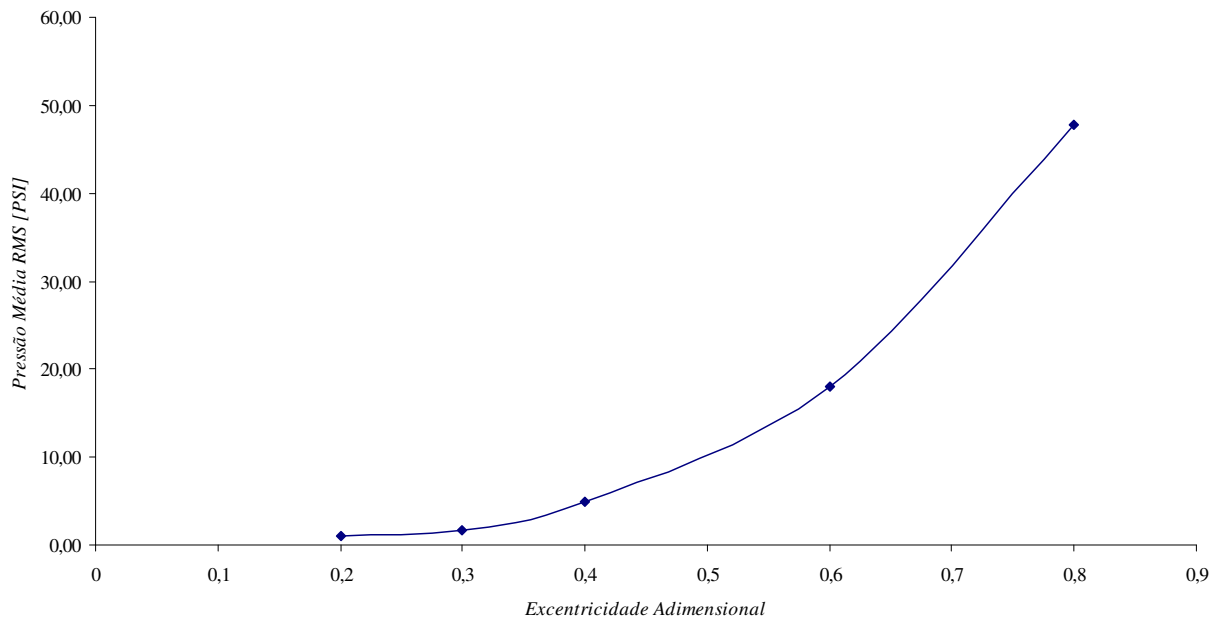
Figura 5-18 – (A) Ranhuras Axiais – (B) Excentricidade Adimensional  $E=0,4$  (25600 Volumes)



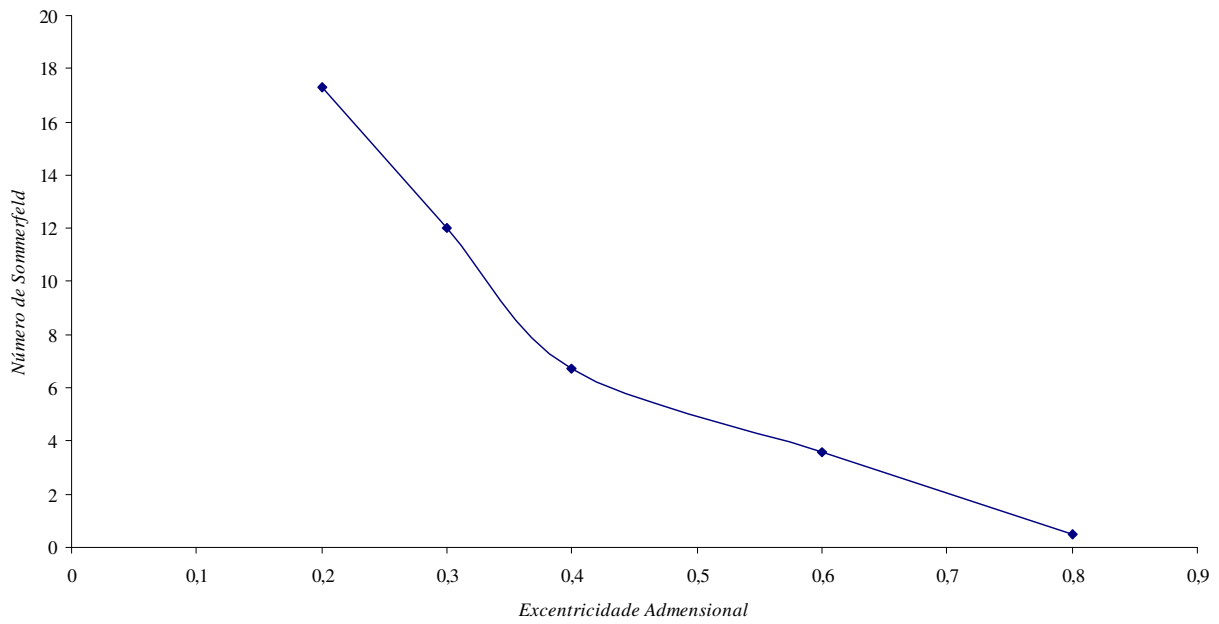
**Figura 5-19 – Ranhuras radiais – Excentricidade Adimensional  $E=0,6$  (25600 Volumes)**



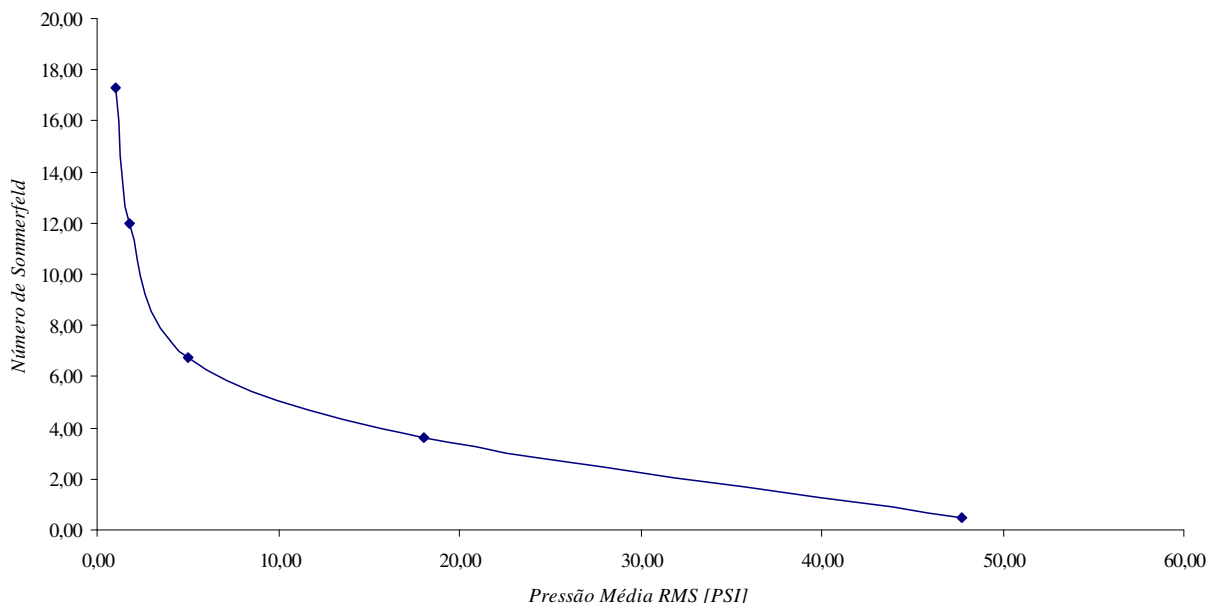
**Figura 5-20 – Ranhuras radiais – Excentricidade Adimensional  $E=0,8$  (25600 Volumes)**



**Figura 5-21 – Mancal Ranhurado Radial - Pressão média RMS variando com a Excentricidade Adimensional**



**Figura 5-22– Variação do número de Sommerfeld com a variação da excentricidade.**

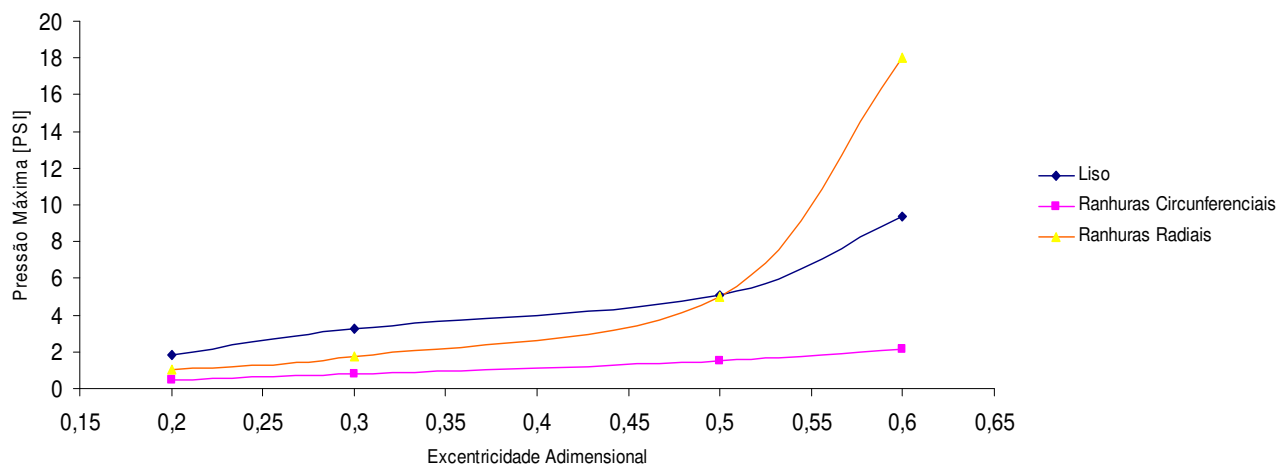


**Figura 5-23 – Variação do número de Sommerfeld com o aumento da pressão média.**

Conforme as Figuras 5-22 e 5-23, o número de Sommerfeld tende a cair tanto com o aumento da excentricidade adimensional quanto com a pressão média, sendo esta última muito influenciada pela própria variação da excentricidade, Figura 5-23, afinal é previsível o aumento da pressão com a diminuição da espessura de filme  $h$ , como mostra a própria equação de Reynolds.

Abaixo, na Figura 5-24, as variações no número de Sommerfeld são comparadas entre si para os três diferentes tipos de mancal estudado. Assim, as ranhuras circunferenciais tendem a ter maior influência sobre o mancal, em relação às radiais, elevando consideravelmente o valor do número de Sommerfeld, no entanto, a variação também é maior com o aumento da excentricidade, sendo o mancal liso menos propenso a ter variação do número de Sommerfeld para a configuração utilizada.





**Figura 5-24 –Comparação entre as pressões para os diferentes tipos de mancais.**

#### **5.4. Avaliação da rigidez nos mancais.**

A rigidez dos mancais com e sem ranhuras varia bastante, conforme mostrado abaixo, isso é devido à variação das curvas de pressão calculadas. Tanto os termos de rigidez direta e cruzada mudam sua tendência consideravelmente. Esses gráficos são mostrados nas Figuras 5-25, para o mancal liso, Figura 5-26, para o mancal com ranhuras circunferenciais e na Figura 5-27, temos os resultados para os mancais com ranhuras radiais. De forma geral, podemos dizer na comparação dos gráficos que as ranhuras aumentam a rigidez dos mancais, se apenas a introdução delas for feita.

No caso dos mancais lisos, Figura 5-27, a rigidez direta tende a se comportar de maneira constante com a variação da excentricidade adimensional e os cruzados variam bem menos, no caso da rigidez  $K_{xx}$  esta variação chega a ser praticamente nula, no entanto, a rigidez  $K_{yy}$  tem uma forte queda para valores de excentricidade inferiores a 0,3.

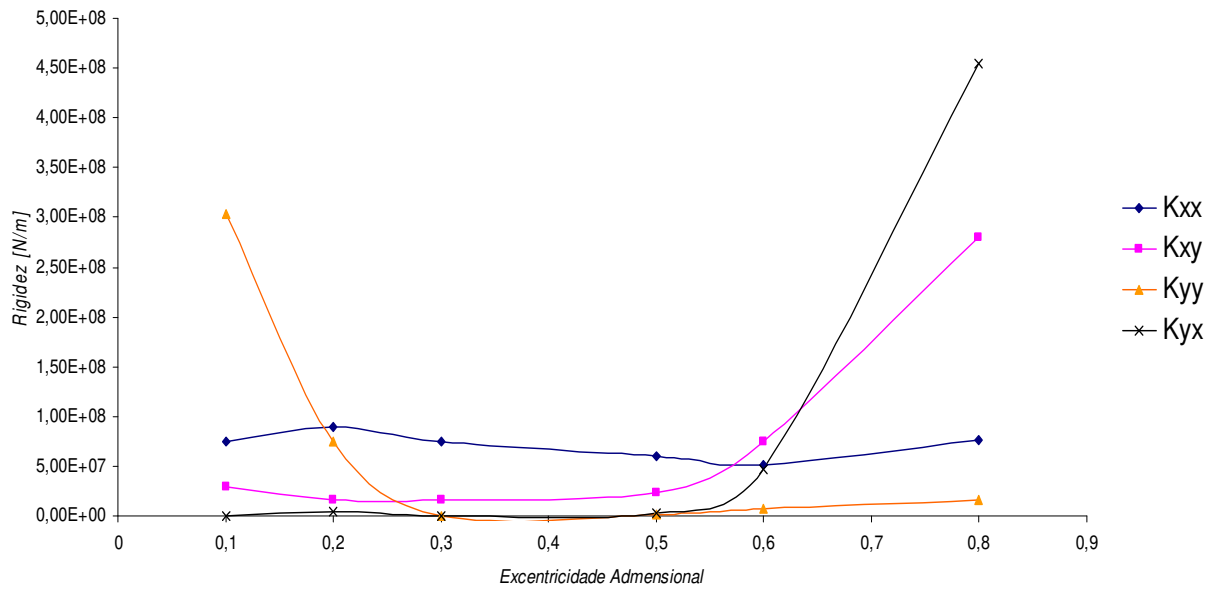


Figura 5-25 – Variação da rigidez para mancais lisos.

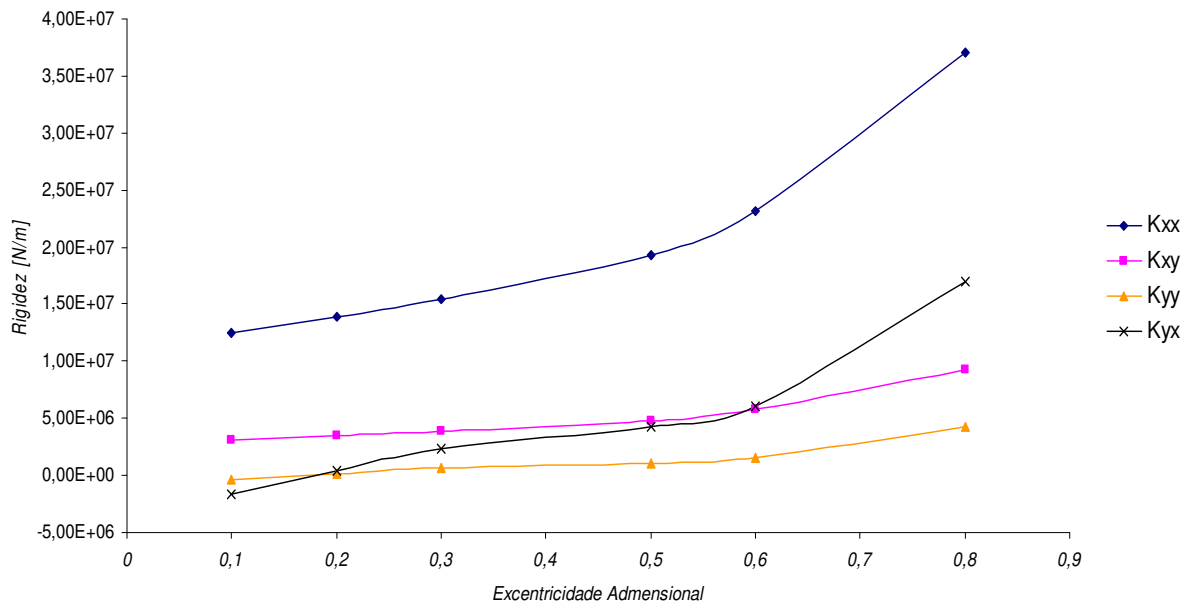
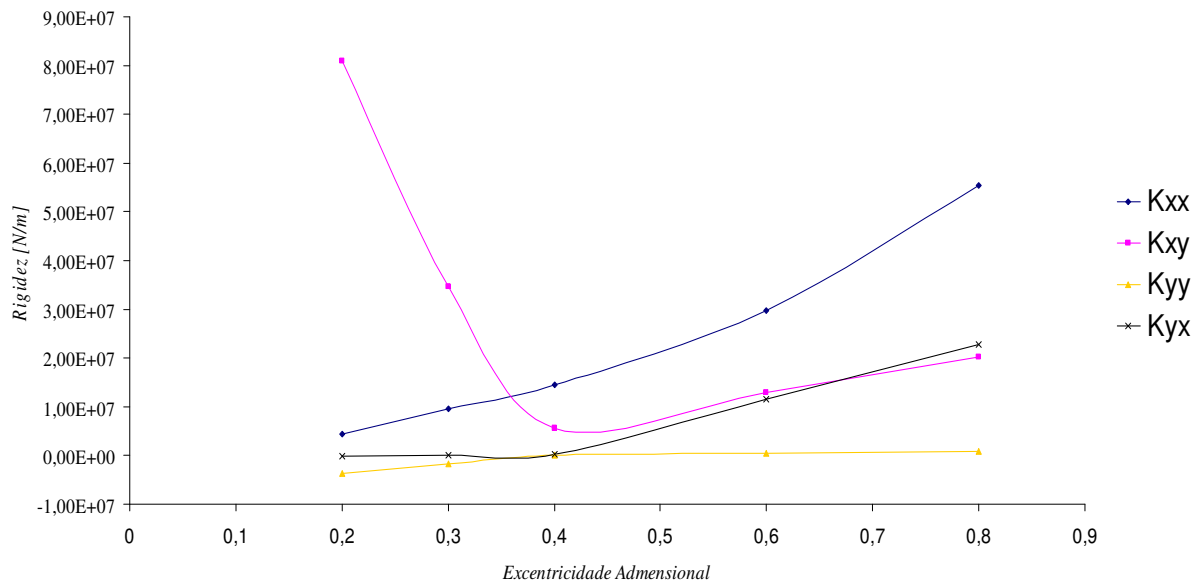


Figura 5-26 – Variação da rigidez para mancais com ranhuras circunferenciais.

Ao se introduzir as ranhuras, os valores de rigidez mudam quase que de forma constante ao aumentarmos os valores da excentricidade. Assim, é notório o aumento da rigidez com o acréscimo das ranhuras, e sua variação



**Figura 5-27 – Variação da rigidez para mancais com ranhuras radiais.**

Outro ponto interessante, avaliado para o caso dos mancais com ranhuras circunferenciais, é a variação da rigidez com a variação da profundidade da ranhura. Note na Figura-5-28, que partindo da profundidade nula, ou o mancal liso, a variação ocorre rapidamente e a partir de  $h_0=0,5$  não há mais mudanças na tendência da curva, sendo esta praticamente constante.

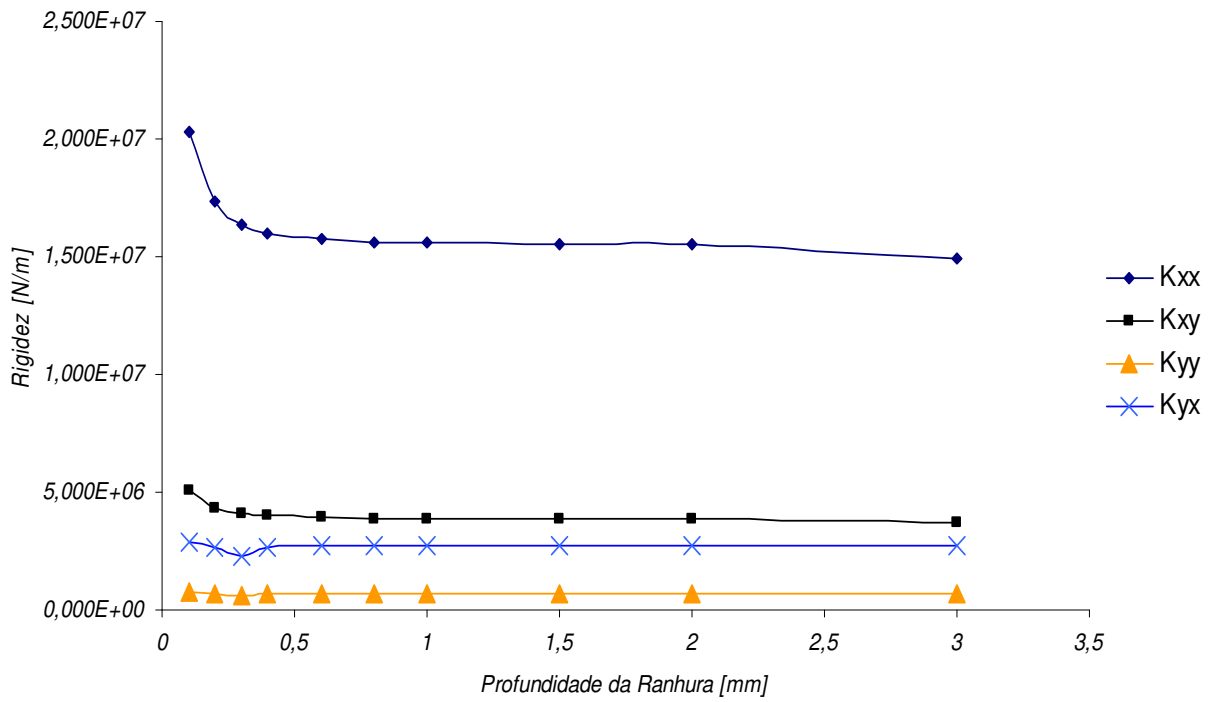


Figura 5-28 – Variação da rigidez com o aumento da profundidade de ranhura.

## Capítulo 6

### 6. Conclusões e Sugestões para Próximos Trabalhos

A proposta principal do trabalho foi mostrar a viabilidade e vantagem da utilização do método dos volumes finitos no estudo e projeto de mancais radiais lisos e ranhurados, sob a condição de lubrificação hidrodinâmica. Ao compararmos com a solução analítica de Ocvirk, vimos que os resultados foram muito satisfatórios. Sendo assim, os resultados encontrados mostram que é possível atingir respostas consistentes e com grande gama de informações.

A solução do sistema linear se mostrou bastante consistente para um número fixo de volumes, fato que sugere a utilização deste método para malhas ortogonais. A quantidade de interações já mostra grande eficiência para valores superiores a 200 repetições, e felizmente, estes valores não implicam em tempos computacionais proibitivos.

Assim, a influência da discretização da malha é considerável no método dos volumes finitos, sendo que para malhas bem discretizadas, a resposta apresenta-se estável e bem próxima ao resultado analítico, no entanto, a utilização de malhas com volumes muito grandes introduziu erros consideráveis na solução.

Outro ponto a destacar é a viabilidade da utilização do algoritmo de Thomas (TDMA) para a solução da equação discretizada de Reynolds. Este método de varredura de linhas e colunas é de aplicação fácil e intuitiva, sendo desta forma, adequada aos estudos com mancais hidrodinâmicos cilíndricos. Esse método apesar de conhecido, foi implementado a fim de garantir a adaptabilidade adequada ao algoritmo como um todo. Ainda sobre o programa, a utilização de vetores para armazenar informações tais como pressão, velocidade e posição, sem dúvida tornou-se bem mais complexa, assim, sugere-se a utilização de matrizes para programas futuros.

Sobre os elementos físicos presentes nos mancais, a formulação obtida para as ranhuras é bem interessante, no entanto, uma abordagem futura avaliando melhor a profundidade das ranhuras e criando novos volumes nesta direção seria muito útil para definirmos melhor a influência deste parâmetro na resposta do mancal, isso pode ser conseguido com a divisão da espessura de filme em volumes, transformando o problema bidimensional apresentado neste trabalho por um problema tridimensional. Após este estudo inicial sobre o parâmetro dinâmico da rigidez do mancal, o próprio desenvolvimento de estudos sobre o amortecimento causado pelo filme de óleo deve ser considerado futuramente.

A consideração da viscosidade constante foi muito importante neste estudo inicial, no entanto, sabemos da grande variação desta variável com a temperatura de trabalho do óleo, assim ao considerarmos situações transientes ou em que ocorram mudanças de temperatura, uma nova equação deverá ser considerada.

Finalmente, os conceitos envolvidos no estudo da discretização da equação de Reynolds mostram que a similaridade com os princípios básicos do estudo da mecânica dos fluidos diferencial traz uma grande facilidade de compreensão dos conceitos físicos, deixando as respostas com um maior volume de informação. Outro ponto é destacar a versatilidade de estudos possíveis com os métodos numéricos, trazendo um enriquecimento de informações considerável e muito importante.

## Referências Bibliográficas

Arghir, M., Alsayed, A. and Frêne, J., 2001, “A Triangle Based Finite Volume Method for the Integration of Lubrication’s Incompressible Bulk Flow Equations ”, Journal of Tribology, Vol. 123, pp 118-124.

Arghir, M., Alsayed, A. and Nicolas, D., 2002, “The finite volume solution of the Reynolds equation of lubrication with film discontinuities.”, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 44, pp 2119-2132.

Athavale, M. M. and Przekwas, A. J., 1992, “A finite volume numerical method to calculate fluid forces and Rotordynamic Coefficients in Seals”, American Institute of Aeronautics and Astronautics.

Augusto, E. M., 2002, “Análise computacional do comportamento dinâmico do fluido de um mancal hidrodinâmico pelo método dos elementos finitos”, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, S. José dos Campos, Brasil.

Cameron, A. and Wood, L., 1949, “The Full Journal Bearing”, Proc. Inst. Mech. Engs., Vol 161, p. 59.

Cappone, G., 1991, “Descrizione analitica del campo do forze fluidodinamico nei cuscinetti cilindrici lubrificati”, L’Energia Elettrica, Nr. 3.

- Cappone, G., 1986, “Moti Orbitali di un rotore rigido simmetrico su cuscinetti cilindrici lubrificati”, *Journal of Lubrication Technology*, Vol. 105, pp. 496-502.
- Cardullo, F. E., 1930, “Some Practical Deductions of the Theory of Lubrication of Cylindrical Bearings”, *Trans. ASME*, Vol 52, pp. 143-153.
- Castelli, V. and Pirvics, J., 1968, “Review of numerical methods in gas bearings film analysis”, *Journal of Lubrication Technology*, pp. 777-792
- Cavalca K. L., Cavalcante P.F., Interação rotor-estrutura de fundação através de mancais hidrodinâmicos, XIV COBEM CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, Bauru—Brazil, December-97, 1997.
- Cavalca K. L., Dedini F.G, “Experimental analysis of a tilting pad journal bearing influence in a vertical rotating system”, IFToMM 98, Darmstadt, Germany, 7- 10 September, 1998, pp. 571- 582.
- Cavalca, K. L., Uemura, R., and Dedini, F. G., 1996, “Mancais Hidrodinamicos: Modelamento e Representação como Elementos de Conexão em Sistemas Rotor-suporte-Fundação”-CEMNNE-96, Recife PE.
- Colin, W. C., 1971, “The method of Christopherson for Solving free Boundary Problems for Infinite Journal Bearings by Means of Finite Differences”, *Mathematics of Computation Corporation*, Vol. 25, N.115.
- Dedini F. G., Cavalca K. L., 1993, “Aplicação de métodos de identificação teórico experimentais na análise de um turbo-gerador com sete mancais”, XII COBEM CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA. Brasília - Brasil, Dezembro, p.1241-1244.



Dedini, F. G. ; Cavalca, K.L. ; Piccoli, H. C. ; Weber, H. I., “The relevance of the fluid dynamic force field influence on the behavior of a vertical rotor with a tilting-pad journal bearing.” In: III Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste, 1994, Belem. III Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste. Rio de Janeiro : ABCM, 1994. v. II. p. 375-379.

Ferreira, R. B.; Trindade, W. R., Cavalca, K. L, 2008, “Análise numérica da distribuição de pressão no filme de óleo utilizando o método dos volumes finitos”, V CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA, Salvador, V CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA. Rio de Janeiro, ABCM,. V. 1. p. 1-9.

Fuller, D. D., 1956, “Theory and practice of lubrication for engineers”, John Wiley & Sons, New York, USA.

Galvão, M. M., 2006, “Análise do comportamento operacional de mancais axiais hidrodinâmicos de sapatas setoriais pivotadas”, Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Itajubá, Brasil.

Kang, K., Rhim, Y. and Sung, K., 1996, “A study of the oil-lubricated Herringbone-Grooved journal bearing – Part 1: Numerical Analysis”, Journal of Tribology, Vol. 118, pp. 906-911.

Kingsburry, A., 1897, “Experiments with an Air Lubricated Bearing”, Journal of the American Society of Naval Engineers, Vol 9.

Kogure, K., Fukui, S., Mitsuya, Y. and Kaneko, R., 1983, “Design of Negative Pressure Slider for Magnetic Recording Disks”, La Meccanica Italiana, Nr. 199.

Lund, J. W., 1964, “Spring and Damper Coefficients for the Tilting Pad Journal Bearing,” ASLE Trans., 7, pp. 342–352.

Maliska, C. R., 2004, “Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional”, Editora LTC, 2º edição, Rio de Janeiro, Brasil.

Michell, A. G. M., 1905, “The lubrication of plane surfaces”, *Z. Math. U Physik*, Vol. 132, pp 123.

Norton, R. L., 2006, “Projeto de Máquinas – Uma Abordagem Integrada”, Bookman Companhia Editora, 2º edição, Porto Alegre, Brasil.

Ocvirk, F.W., 1952, “Short-Bearing Approximation for Full Journal Bearings”, National Advisory Committee for Aeronautics (NACA) TN 2808.

Okabe, E. P.; Cavalca, K. L., 2006, “Rotordynamic analysis of systems with a non-linear model of tilting pad bearings”. In: 7th IFToMM-Conference on Rotor Dynamics, 2006, Viena. Proceedings of the 7th IFToMM-Conference on Rotor Dynamics. p. 1-10.

Patankar, S. V., 1980, “Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”, Hemisphere Publishing Corporation, 1º edição.

Petroff, N. P., 1883, “Friction in Machines and the Effect of the Lubricant”, *Inzhenernii Zhurnal*. St. Petersburg, Vol. 3, pp.377-436.

Pinkus O, 1956, “Analysis of Elliptical Bearings”, *Transactions of ASME*, Vol.78, pp.965-973.

Pinkus O, 1957, “Analysis of Journal Bearings with Arbitrary Load Vector”, *Transactions of ASME*, Vol.79, August.

Pinkus O, 1987, “The Reynolds centennial: A brief history of the theory of hydrodynamic lubrication”, *Transactions of ASME*, vol.109, pp.2-20.

Reynolds, O., 1886, “On the Theory of Lubrication and Its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil”, *Philos. Trans. R. Soc. London, Series A*, Vol. 177, Part 1, pp.157-234.

Singhal, G.C., 1981, "Computation methods for hydrodynamic problems (Reynolds' equation).",  
Computer –aided design, Vol. 13, pp 151-154.

Stodola, A., 1897, "Kritische Wellenstoerung infolge der Nachgiebigkeit", Schweizerische  
Bauzeitung, Vol 85, pp. 265-266.

Tower, B., 1885, "First Report on Friction Experiments", Proc. Inst. Mech. Eng., pp.58-70.

Wilcock, D. F. and Booser, E. R., 1957, "Bearing Design and Application", McGraw-Hill Series  
in Mechanical Engineering, First Edition, New York, USA.

## Apêndice

Desenvolvimento da equação de Reynolds partindo das equações de Navier-Stokes.

Considerando um sistema de referência em que o eixo Z está na direção da espessura do filme de óleo, isto é, na direção radial do mancal. E sendo, conseqüentemente X a direção longitudinal e Y a direção transversal e estando, desta forma, representando a largura do mancal:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho X_a - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \xi_a) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \quad A1$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho Y_a - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \xi_a) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \quad A2$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho Z_a - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\mu \xi_a) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \quad A3$$

Considerando agora os seguintes grupos adimensionais que serão substituídos nas equações gerais de Navier Stokes acima.

$$X = x/l_o \quad T = t/t_o \quad \bar{w} = w/w_o \quad P = \frac{h_o^2 p}{\eta_o u_o l_o}$$

$$Y = y/b_o \quad \bar{u} = u/u_o \quad \bar{\rho} = \rho/\rho_o$$

$$Z = z/h_o \quad \bar{v} = v/v_o \quad \bar{\mu} = \mu/\mu_o$$

Deste ponto segue a real transformação das equações de Navier-Stokes na equação de Reynolds. Observe que aqui será considerada a pressão invariante no sentido Z, reduzindo o problema para o domínio de um plano.

$$\frac{\partial P}{\partial Z} = 0 \rightarrow P = f(X, Y, T) \quad A4$$

Então, após a eliminação dos termos de ordem superiores como  $(h_o/l_o)^2$  e  $(h_o/b_o)^2$  são desconsiderados e apenas os termos de ordem um permanecem. As equações são reduzidas conforme segue, pois será considerada a condição de regime permanente também.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad A5$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad A6$$

Assim, integrando diretamente as duas equações, os gradientes de velocidade podem ser representados por:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\tilde{A}}{\mu} \quad A7$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\tilde{C}}{\mu} \quad A8$$

Os elementos  $\tilde{A}$  e  $\tilde{C}$  são constantes de integração.

Um ponto importante é o fato de a viscosidade ser considerada constante através da espessura de filme de óleo. Fato que não se observa na realidade e uma modelagem com esse fator necessitaria de um desenvolvimento mais complexo. Uma abordagem que é satisfatória para este caso, é tratar a viscosidade como um valor médio  $\mu$ .

$$u = \frac{z^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \tilde{A} \frac{z}{\mu} + \tilde{B} \quad A9$$

$$v = \frac{z^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} + \tilde{C} \frac{z}{\mu} + \tilde{D} \quad \text{A10}$$

Se a condição de não deslizamento for utilizada, os valores para a fronteira serão:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad z = 0 \quad u = u_b \quad v = v_b \\ \text{b)} \quad z = h \quad u = u_a \quad v = v_a \end{aligned}$$

Os sub-escritos a e b se referem aos valores avaliados na fronteira superior (curvada), ou o próprio rotor e a fronteira inferior (plana), o próprio mancal estacionário, respectivamente. Isso resultará nas seguintes relações para as velocidades  $u$  e  $v$  e suas taxas de variação ao longo do eixo  $Z$ :

$$u = -z \left( \frac{h-z}{2\mu} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + u_b \frac{h-z}{h} + u_a \frac{z}{h} \quad \text{A11}$$

$$v = -z \left( \frac{h-z}{2\mu} \right) \frac{\partial p}{\partial y} + v_b \frac{h-z}{h} + v_a \frac{z}{h} \quad \text{A12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left( \frac{2z-h}{2\mu} \right) \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{u_b - u_a}{h} \quad \text{A13}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \left( \frac{2z-h}{2\mu} \right) \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{v_b - v_a}{h} \quad \text{A14}$$

A vazão por unidade de comprimento em X e Y pode é definida da seguinte maneira:

$$q'_x = \int_0^h u dz \quad \text{A15}$$

$$q'_y = \int_0^h v dz \quad \text{A16}$$

E substituindo a Equação A11 e A12 nas integrais, teremos:

$$q'_x = \frac{-h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{u_a - u_b}{2} h \quad \text{A17}$$

$$q'_y = \frac{-h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_a - v_b}{2} h \quad \text{A18}$$

A equação de Reynolds, a partir deste ponto, será obtida ao introduzirmos as relações de vazão na equação da continuidade. Assim, é conveniente expressar a equação da continuidade na forma integral, conforme já fizemos anteriormente.

$$\int_0^h \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right) dz = 0 \quad \text{A19}$$

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x} [f(x, y, z)] dz = -f(x, y, h) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^h f(x, y, z) dz \right)$$

Considerando também a densidade  $\rho$  como constante, conforme feita para a viscosidade anteriormente, o termo com a componente  $u$  poderá ser integrada resultando em:

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dz = -(\rho u)_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^h \rho u dz \right) = -\rho u_a \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \int_0^h u dz \right) \quad \text{A20}$$

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) dz = -\rho v_a \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \int_0^h v dz \right) \quad \text{A21}$$

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) dz = \rho(w_a - w_b) \quad \text{A22}$$

Desta forma a equação integrada da continuidade é expressa por:

$$h \frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho u_a \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \int_0^h u dz \right) - \rho v_a \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \int_0^h v dz \right) + \rho(w_a - w_b) = 0$$

As integrais obtidas na equação anterior são exatamente as vazões de lubrificante no volume de controle, assim, utilizando as equações A17 e A18, obtidas das relações de Navier-Stokes, nós teremos a Equação de Reynolds na forma que a conhecemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h (u_a + u_b)}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho h (v_a + v_b)}{2} \right) \\ & + \rho (w_a - w_b) - \rho u_a \frac{\partial h}{\partial x} - \rho v_a \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

A23