

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE SISTEMAS

UM ALGORITMO "BRANCH AND BOUND" PARA
UM MODELO DE OTIMIZAÇÃO DE UM
SISTEMA "KANBAN"

Lúcia Filomena de Almeida Guimarães

Prof. Dr. Vinícius Amaral Armentano
Orientador

Este exemplar corresponde à relação final da tese
defendida por LUCIA FILOMENA DE ALMEIDA
GUIMARÃES e aprovada pela Comissão
Julgadora em 25 / 03 / 91.

Vinícius A. Armentano
Orientador

BC/9105512J
Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade
Estadual de Campinas - UNICAMP como parte dos requisitos exigidos
para obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Março de 1991

PARA MINHA MÃE

Somos livres.

*Cada instante, escolhemos
pensamentos, decidimos caminhos,
revelando o volume das nossas
conquistas e necessidades.*

*Distraídos, alimentamos fantasias,
acariciamos ilusões, brigamos por
elas, acreditando que representem
nossa felicidade.*

*A visita da verdade, oportuna, nos
faz reciclar valores, modificar
idéias, aprender lições novas,
caminhar para frente,
desenvolvendo nosso mundo interior.*

Essas são as voltas que a vida dá.

AGRADECIMENTOS

- A Rita e ao Guilherme pela força e confiança;
- Ao Sérgio pelo apoio e carinho;
- A todos os meus amigos que direta e indiretamente me auxiliaram neste trabalho;
- Ao Paulo pelo incentivo inicial;
- Ao Prof. Dr. Vinícius Amaral Armentano pela orientação durante o desenvolvimento desta tese e estímulo à pesquisa;

RESUMO

O "Just in Time" é uma filosofia que visa um programa de produção consistente, estimulando a produtividade, eliminando estoques ociosos e melhorando a qualidade do produto. Um dos elementos desta filosofia é o sistema "Kanban" que é um sistema de informação que tem como objetivo programar a produção e controlar o estoque. O objetivo deste trabalho é estudar um modelo matemático de otimização para um sistema "Kanban" determinístico em um ambiente multi-estágio e o do algoritmo "Branch and Bound" para a sua resolução.

ÍNDICE

Capítulo 1 - Introdução.....	1
Capítulo 2 - A filosofia "Just in Time" e o sistema "Kanban"....	4
2.1 - "Just in Time" (JIT).....	4
2.1.1 - Objetivos da filosofia JIT.....	5
2.1.2 - Elementos do JIT.....	5
2.2 - O sistema "Kanban".....	7
2.2.1 - O uso do "kanban".....	9
2.2.2 - Os tipos de "kanban".....	11
2.2.3 - Regras do sistema "Kanban".....	13
2.3 - O uso da filosofia JIT em indústrias.....	15
2.4 - O MRP e o JIT.....	17
2.4.1 - O MRP e o MRPII.....	18
2.4.2 - MRPII x JIT.....	19
2.4.3 - MRPIII = JIT + MRPII.....	21
Capítulo 3 - A formulação do problema.....	22
3.1 - Descrição do modelo.....	24
3.2 - Transformação do modelo.....	33
3.3 - Teste de Factibilidade.....	35
3.4 - Adaptação do modelo.....	37
3.5 - Um modelo com tempo de produção não zero.....	39
Capítulo 4 - O uso de um algoritmo "Branch and Bound" para resolução do problema.....	41
4.1 - Introdução.....	41
4.1.1 - Elementos de um algoritmo "Branch and	

Bound".....	41
4.2 - Um algoritmo "Branch and Bound" para o modelo	
"Kanban".....	49
4.2.1 - Estratégia 1A, 1B, e 1C.....	50
4.2.2 - Estratégia 2A, 2B.....	50
4.2.3 - Estratégia 3.....	50
4.2.4 - Estratégia 4.....	51
Capítulo 5 - Apresentação dos resultados, análises.....	52
5.1 - Tabelas e resultados.....	54
5.2 - Análise.....	62
Capítulo 6 - Conclusão Final.....	65
APÊNDICE A - Demonstrações.....	67
APÊNDICE B - A programação inteira e o algoritmo "Branch and	
Bound".....	90
Bibliografia.....	98

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A filosofia "Just in Time" (JIT) iniciou-se no Japão após a Segunda Guerra Mundial. Neste período o Japão era um país que para se reerguer no âmbito mundial necessitava uma economia forte, que oferecesse produtos de alta qualidade e com preços iguais ou menores que o de seus concorrentes.

Foi nesse ambiente competitivo que a Toyota criou a filosofia JIT e junto com ela o sistema "Kanban" de produção.

Até 1976, no ocidente não se tinha conhecimento do emprego do JIT/"Kanban". Mas a partir de 1977, com o agravamento da crise do petróleo e o crescimento da indústria japonesa, iniciou-se o interesse e a aplicação desta filosofia e deste sistema.

O JIT é uma filosofia sem nenhuma técnica ou metodologia específica que visa um programa de produção consistente, eliminando o desperdício dentro de qualquer indústria e assegurando assim, a competitividade, pois o desperdício não acrescenta nenhum valor ao produto.

O desperdício existente não é identificado prontamente no balanço da empresa. Ele se manifesta em: estoque alto, qualidade baixa, tempo de fabricação de peças ("lead time") longo e movimentação de material frequente e em demasia.

A filosofia em si tem por objetivo usar os meios mais simples e baratos para planejar, programar e controlar o fluxo de material no processo de manufatura, para produzir no momento correto e com qualidade perfeita a quantidade requerida pelos consumidores. A filosofia envolve também eliminar desperdício de tempo, mão de obra, energia ou equipamento, evitando assim estoques ociosos

Dentro desta filosofia existe o sistema "Kanban", que visa agilizar a produção a fim de atingir os objetivos do JIT. Basicamente, é um sistema que procura determinar em cada estágio, quanto e quando produzir para que o componente/peça/material seja utilizado no próximo estágio, ou seja, produzir somente quando o estágio posterior "pedir", evitando assim a existência de estoques intermediários ociosos.

É muito grande o interesse mundial por essa nova visão de produção, incluindo o Brasil onde já existem empresas operando sob a filosofia JIT. O objetivo deste trabalho é estudar esta filosofia e principalmente o sistema "Kanban" para um ambiente de produção multi-estágios com estrutura de montagem e restrições de capacidade. Este sistema será modelado como um problema de programação inteira que será resolvido por técnicas de "Branch-and-Bound".

No capítulo 2, explica-se com maior clareza o que é a filosofia JIT, quais são seus objetivos e seus elementos. Define-se e esclarece-se também, o sistema "Kanban", mostrando como é seu funcionamento, quais os tipos de "kanbans" existentes, etc. Finalmente, após uma breve definição sobre MRP (planejamento das necessidades de materiais) e MRPII (planejamento de recursos de manufatura) faz-se uma comparação entre eles e o JIT.

No capítulo 3, há uma revisão bibliográfica sobre técnicas de análise/síntese do sistema "Kanban". Apresenta-se também um modelo matemático de otimização que será estudado neste trabalho bem como suas propriedades.

Já no capítulo 4, há uma introdução sobre as técnicas "Branch-and-Bound" para resolução de problemas de programação inteira e o uso das mesmas para a resolução do problema proposto.

O capítulo 5 é composto de tabelas com os resultados computacionais das estratégias adotadas e análise destas tabelas.

Finalmente o capítulo 6 é constituído pela conclusão obtida, como também propostas para trabalhos futuros.

Vale ainda ressaltar, que ao escrever este trabalho deparou-se com um problema: como este tema é muito recente, não existe ainda em nossa língua uma terminologia fixa, podendo-se encontrar em textos diferentes termos completamente diferentes e que se referem ao mesmo conceito. Para evitar o uso de termos inadequados ou até mesmo errôneos optou-se pelo uso das palavras como foram encontradas nos artigos, usando aspas para identificá-las.

CAPITULO 2

A FILOSOFIA "JUST-IN-TIME" E O SISTEMA "KANBAN"

2.1-) "Just-in-Time" (JIT)

A filosofia JIT surgiu no Japão após a segunda grande guerra.

A indústria criadora desta filosofia foi a Toyota, e segundo o criador do Sistema Toyota de Produção, Taiichi Ohno [19], a idéia é simples: "total eliminação de desperdício", onde entende-se como desperdício tudo aquilo que não acrescenta nenhum valor ao produto, como por exemplo: filas de materiais, pois ocupam espaço e aumentam o tempo de ciclo de manufatura, produzir além do programado, etc.

É uma filosofia que se destina a estimular a produtividade, eliminar estoques ociosos e melhorar a qualidade do produto. Sua idéia básica consiste na determinação dos momentos exatos de fabricação e entrega de produtos, montagem e submontagem e finalmente aquisição de materiais. Enfim é colocar todos os materiais em uso ativo, integrando o material em processamento e nunca deixando-o ocioso. Portanto tem-se como ideal, alcançar uma alta flexibilidade com condições de atender qualquer encomenda a qualquer momento em pequenos lotes.

Como se produz somente quando necessário, opera-se com

estoques de matéria-prima, material em processamento, produto acabado e não negociado bastante reduzidos, conseqüentemente diminuindo o custo associado com a estocagem. Este custo envolve desvalorização do capital, despesas com manutenção de almoxarifado, seguro, aluguel, depreciação do produto e outros.

2.1.1 -) OBJETIVOS DA FILOSOFIA JIT

O JIT, é uma filosofia que sugere que se produza apenas o que o mercado exige, tendo como principais objetivos:

- redução contínua dos níveis de estoque;
- redução ao mínimo dos tempos de ajuste e troca de ferramentas ("setup");
- redução do tamanho dos lotes de produção, que tem como vantagem a redução dos estoques intermediários e dos produtos finais, a diminuição dos custos caso ocorra algum problema de qualidade.
- processar o material através do sistema baseado nas necessidades reais, ao invés de empurrá-lo em antecipação a elas;
- flexibilidade de manufatura: com a redução do tamanho dos lotes de produção, do tempo de preparação das máquinas, pretende-se que a fábrica esteja apta a rápidas mudanças na produção;

2.1.2 -) ELEMENTOS DO JIT

Segundo Smith [32], os elementos desta filosofia são:

- Controle Total de Qualidade (C.T.Q.): com o JIT os

estoques são reduzidos a um mínimo, onde os problemas de qualidade não são mais encobertos e se não forem totalmente eliminados, podem resultar em parada na produção;

- Manufatura Celular: é um meio de organizar a produção baseado na subdivisão dos itens a serem produzidos em grupos/famílias com processos de fabricação similares;

- Envolvimento dos Empregados: estes são estimulados a participar dos problemas na produção e auxiliar em sua resolução. Além disso, são treinados para a operação de diferentes tipos de máquinas possibilitando sua utilização com maior eficiência, pois quando não necessários em suas próprias funções são designados para outras, não ficando assim ociosos;

- Manutenção Preventiva: o objetivo é evitar paradas desnecessárias na produção;

- Carregamento Uniforme: com o objetivo de manter um fluxo contínuo de produção, o plano de produção dos itens finais (plano mestre de produção) é fixado para produzir diariamente o mesmo número de itens, dentro de um período de tempo determinado, normalmente um mês, o que permite uma regularidade e estabilidade na capacidade do equipamento;

- Fluxo Balanceado de Trabalho: nas empresas que produzem produtos finais com diferentes modelos, é importante distribuir uniformemente a carga nos centros de trabalho para evitar sobrecarga em uns e ociosidade em outros. Por este motivo adota-se um programa misto de produção de modelos. Neste produz-se diariamente a mesma proporção de cada modelo durante o horizonte fixado pelo carregamento

uniforme. Além disso, a cada dia os modelos são produzidos na mesma sequência;

- JIT no fornecedor: é uma extensão dos conceitos de JIT na produção para "fora da fábrica", tendo como objetivo obter um frequente número de pequenas remessas de itens/matéria prima com alta qualidade, apenas quando a fábrica necessita;

-Sistema "Kanban"

Portanto, uma das marcas distintas desta filosofia é a simplicidade e a pouca necessidade de investimento de capital e recursos humanos. Ela encoraja a gerência a resolver os problemas, ao invés de encobri-los com excesso de estoques.

Vale também ressaltar que dentro da literatura, encontra-se a filosofia JIT com outros nomes, como por exemplo: Estoque Zero, C.F.M. ("Continuous Flow Manufacturing") que significa fluxo contínuo de produção e está implantado na IBM, fábrica de Sumaré, São Paulo.

2.2 -) O Sistema "Kanban"

Um dos elementos desta filosofia é o sistema "Kanban", que pode ser definido como um sistema de informação para programar e controlar harmoniosamente a quantidade de produção em todo processo [27].

É um sistema que tem três pré-requisitos básicos: simplificação das operações, produção estável e planejamento do processo de produção. Se estes requisitos não forem perfeitamente implantados será difícil a obtenção dos objetivos do JIT, ainda que o

sistema "Kanban" seja introduzido.

Literalmente traduzido "kanban" significa "anotação visível" e de modo mais geral "cartão" [20].

O uso de cartões na indústria de manufatura, não se iniciou com a idéia do sistema "Kanban". Eles têm sido usados de uma forma ou de outra, ligados ao trabalho em processamento (emissões de ordens de trabalho, folhas de anotação, etc). Os cartões tradicionais são usados em sistemas de "empurrar", onde um item é empurrado para a próxima estação de trabalho logo que a atual tenha finalizado as suas operações. Já o "kanban" é usado como um sistema de "puxar", no qual o item é mantido na atual estação de trabalho até que se torne necessário na próxima.

Um "kanban" leva consigo as seguintes informações:

- nome e número do item;
- quantidade de itens (geralmente igual a capacidade do "container");
- estágio anterior;
- estágio posterior;

Pode conter outras informações como o tipo de embalagem, número de "kanbans" idênticos emitidos, etc.

A próxima figura (2.1) mostra um formato típico de um "kanban".

LINHA DE	ESTÁGIO POSTERIOR: 4K
PRODUÇÃO: F	LOCAÇÃO: A-12
N DO KANBAN: 7/12	
N DO ÍTEM: 33331-35010	
NOME DO ÍTEM: ENGRENAGEM	
CONTAINER TIPO: 6	
CAPACIDADE DO CONTAINER: 50	LOCAÇÃO: C-8
	ESTÁGIO ANTERIOR: YA

FIGURA 2.1 - ESTRUTURA DE UM 'KANBAN'

2.2.1 -) O USO DO "KANBAN"

Segundo Nahamias^[33] o uso do sistema "Kanban" pode ser resumido através do esquema: os itens são produzidos no estágio anterior, armazenados imediatamente em um ponto de estoque e subsequentemente transportados para o estágio posterior. Estes itens são transportados em "containers" representados pelos losangos na figura (2.2). Os passos do processo são indicados nos locais apropriados na figura (2.2).

1 - Quando o número de "kanbans" de requisição alcança um nível pré-determinado no quadro de "kanban" de requisição, um trabalhador leva esses "kanbans" para o estoque.

2- O trabalhador, no ponto de estoque, compara o número do item do "kanban" de requisição com o de produção.

3- Se estes números são iguais, ele remove do "container" o "kanban" de produção, que é colocado no quadro de "kanban" de produção no estágio anterior e associa ao "container" o "kanban" de

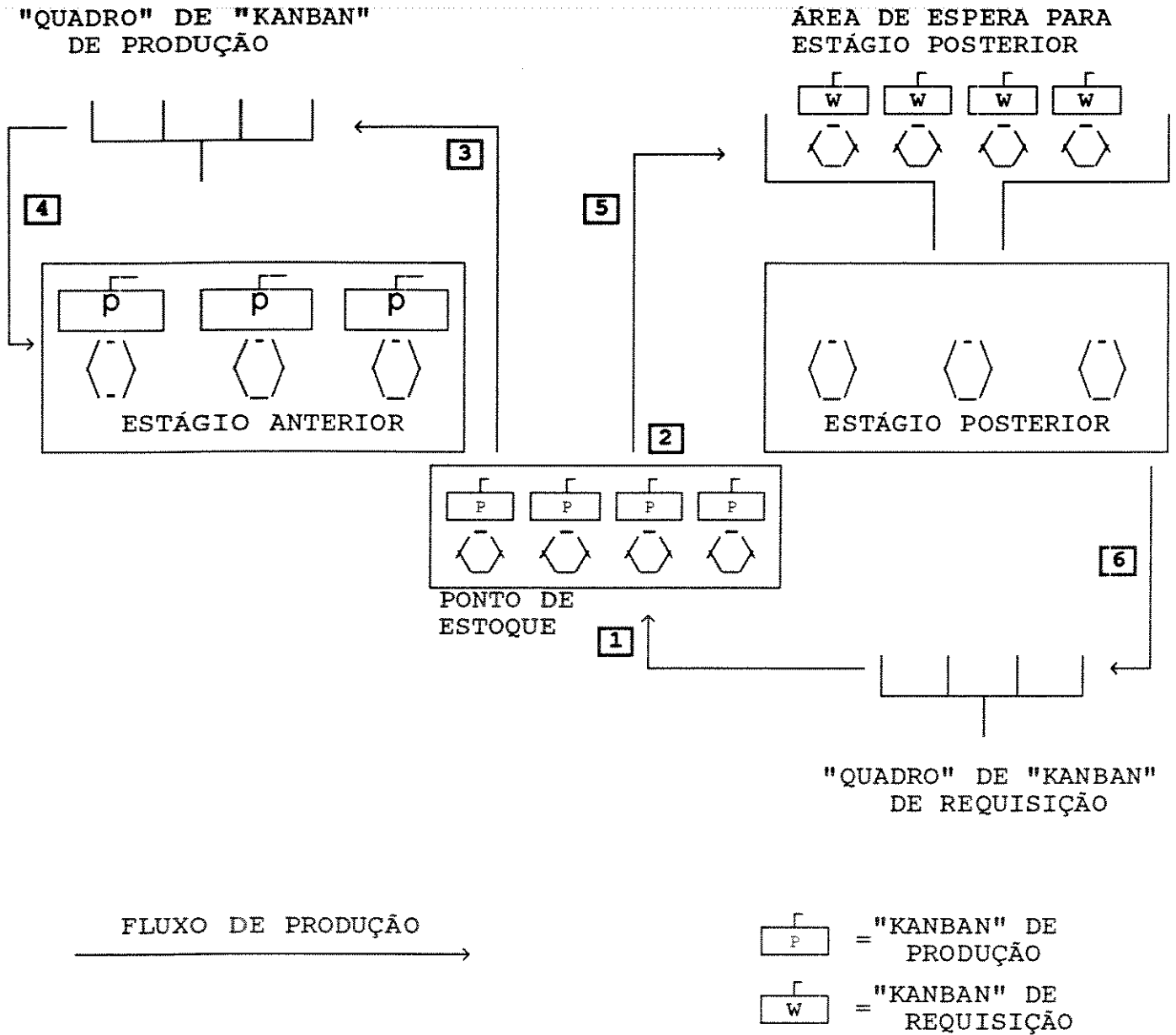


FIGURA 2.2 - ESQUEMA DO FUNCIONAMENTO DE UM SISTEMA "KANBAN" ENTRE DOIS CENTROS DE PRODUÇÃO

requisição, deixando-o no estoque.

4- A produção, no estágio anterior é executada segundo uma prioridade estabelecida no quadro de "kanban" de produção.

5- Um trabalhador transportará os "containers" do estoque para o estágio posterior, e os deixará na área de espera onde ficarão até que sejam requisitados.

6- Quando os itens começam a participar da produção no estágio posterior, o "kanban" de requisição é removido e colocado no quadro de "kanban" de requisição.

Assim no sistema "Kanban" o máximo de estoque entre dois estágios é determinado pelo número de "kanbans" requisição. Geralmente é um suprimento para algumas horas, mas as quantidades podem ser ajustadas conforme a necessidade, acrescentando ou retirando "kanbans".

O número de "kanbans" no sistema promove o controle do estoque intermediário através do "kanban" de requisição e a programação e controle da produção pelo "kanban" de produção.

2.2.2 -) OS TIPOS DE KANBAN

Existem dois principais tipos de "kanban": o de produção usado para reposição do estoque intermediário e o de requisição usado para retirada de itens do estoque a serem utilizados no próximo estágio.

Exemplos destes tipos de "kanban" são mostrados respectivamente nas figuras 2.3 e 2.4

N DA PRATELEIRA DE ESTOQUE		5E215	ABREVIACÃO DO ÍTEM	A2-15	PROCESSO PRECEDENTE
N DO ÍTEM		35670507			FORJARIA
NOME DO ÍTEM		PINHÃO DA DIREÇÃO			B-2
TIPO DE CARRO		SX50BC			PROCESSO SUBSEQUENTE
CAPACIDADE DA CAIXA	TIPO DE CAIXA	N DE EMISSÃO		USINAGEM	
20	B	4/8		M-6	

FIGURA 2.3 - "KANBAN" DE REQUISIÇÃO

N DA PRATELEIRA DE ESTOQUE		F216-18	ABREVIACÃO DO ÍTEM	A5-34	PROCESSO
N DO ÍTEM		56790-321			USINAGEM
NOME DO ÍTEM		VIRABREQUIM			SB-8
TIPO DE CARRO		SX50BC-150			

FIGURA 2.4 - "KANBAN" DE PRODUÇÃO

Há vários outros tipos de "kanban", que possuem outras características, como por exemplo:

- "Kanban" de Emergência: que é emitido temporariamente, quando o estoque requer a reposição de unidades defeituosas.

- "Kanban" Expresso, que é emitido quando existe falta de peça. Este tipo de "kanban" é emitido somente em situações extraordinárias e deve ser retirado após o seu uso.

2.2.3 -) REGRAS DO SISTEMA "KANBAN"

No sentido de atingir o "Just-in-Time" através do sistema "Kanban", as seguintes regras devem ser usadas [26]:

- regra_1: o estágio subsequente deve retirar o item necessário e na quantidade necessária do estágio precedente no momento exato;
- regra_2: o estágio precedente deve produzir seus itens nas quantidades requisitadas pelo subsequente;
- regra_3: itens com defeitos nunca devem ser enviados para o estágio subsequente;
- regra_4: o número de "kanbans" deve ser minimizado, pois exprime o estoque máximo de itens;
- regra_5: o sistema "Kanban" deve ser usado em ambientes de produção onde ocorrem pequenas flutuações na demanda, caso contrário não haverá um fluxo de material contínuo.

Finalizando, deve-se deixar bem claro que o sistema "Kanban" não deve ser confundido com a filosofia "Just-in-Time", pois esta é uma filosofia de produção que tem no sistema "Kanban" uma ferramenta

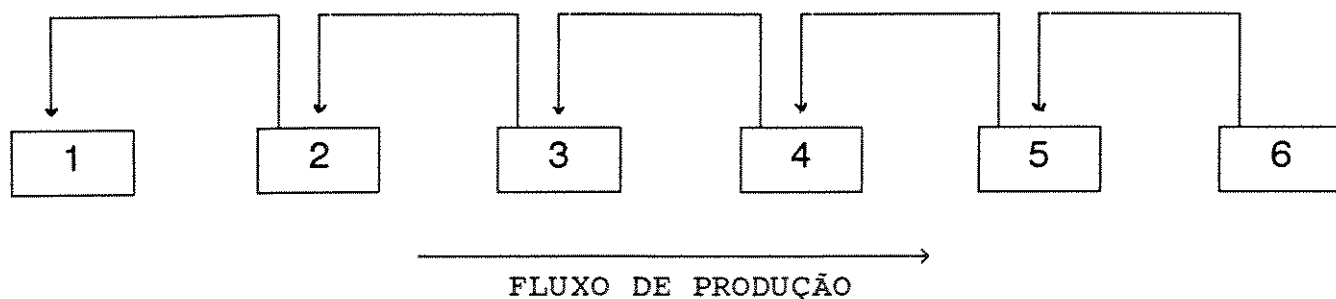
de auxílio para a sua execução. É um sistema usado para dar suporte em termos de controle de estoque e programação de produção ao JIT.

O JIT pode ou não conter o sistema "Kanban", mas este não pode existir sem uma estrutura JIT.

A maioria dos sistemas "kanban" em uso são sistemas de informação manual que apresentam como desvantagem o tempo necessário para transmitir a informação através do sistema. Considere, por exemplo, o sistema de produção em série com seus estágios, mostrados na figura 2.5.

- SISTEMA "KANBAN" -

FLUXO DE INFORMAÇÃO



- SISTEMA CENTRALIZADO -

**SISTEMA CENTRAL
DE INFORMAÇÃO**

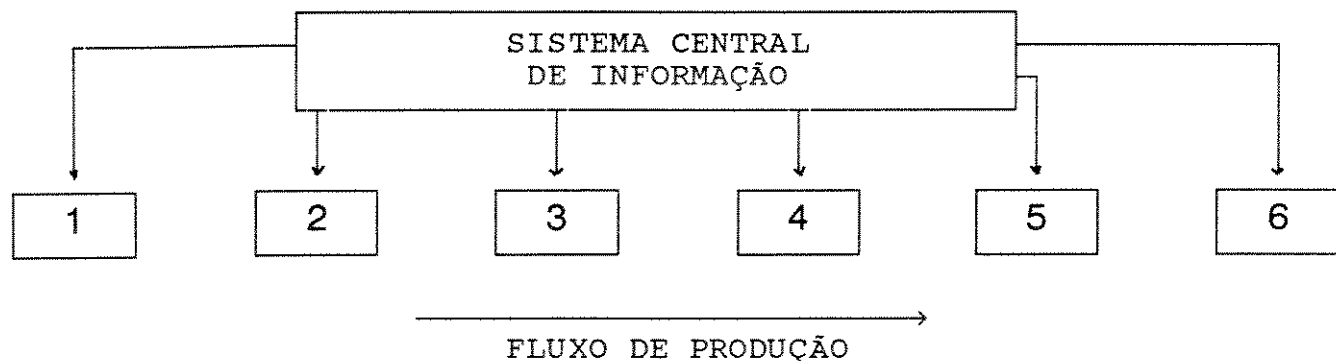


FIGURA 2.5 - SISTEMA "KANBAN" X SISTEMA CENTRALIZADO DE INFORMAÇÃO

No sistema "Kanban", a direção do fluxo de informação é contrária ao do fluxo de produção. Considerando, por exemplo, que uma rápida mudança de demanda ocorra no sexto estágio. Esta mudança é transmitida para o quinto estágio, depois para o quarto, etc. Pode ocorrer um considerável atraso desde o instante em que a mudança ocorreu até a informação chegar ao primeiro estágio.

Um sistema centralizado de informação ajudará a minimizar este problema, pois a informação chegará em todos os estágios simultaneamente.

Existe no entanto, "kanban" eletrônico principalmente entre a empresa e seu fornecedor. É um meio para que o "kanban" de requisição chegue mais rápido ao fornecedor. Ele minimizará os problemas de informação em relação ao "kanban" comum, mas não será melhor que o sistema centralizado de informação.

2.3 -) O uso da filosofia JIT em indústrias

Finch e Cox [23], mostram que o sucesso da filosofia JIT tem requisitos adicionais para uma carga de trabalho estável, que é frequentemente encontrada em um ambiente repetitivo de manufatura (um ambiente onde a produção é contínua, com nivelamento da carga de trabalho, fluxo repetitivo de material, demanda regular e sem grandes diversificações nos produtos finais).

São esses requisitos:

1- Análise da fábrica: este conceito visa que o sistema de produção seja especialmente planejado para um número limitado de

linhas de produto, eliminando portanto conflitos entre a necessidade de produção de diferentes produtos. Isto leva a uma eficiência na produção e a uma otimização dos objetivos da própria fábrica.

2- Redução do tempo de preparação das máquinas;

3- Manufatura Celular;

4- Manutenção Total Preventiva;

5- Treinamento de Empregados;

6- Carga de Trabalho Uniforme;

7- JIT no fornecedor;

8- "Kanban".

Muitos acreditam que, para se obter sucesso com a filosofia JIT é necessário implementá-la totalmente, e qualquer implementação parcial não terá efeito algum.

Fazendo um estudo detalhado destes requisitos citados, nota-se que estes podem ser divididos em dois grupos [23] :o primeiro é composto daqueles que são independentes do tamanho da indústria, os quais alguma pequena empresa pode até já ter implementado sem necessariamente ter conhecimento de JIT; o segundo são aqueles que estão relacionados com o tamanho da indústria.

Os cinco primeiros requisitos são considerados como do primeiro grupo. Estes estão relacionados com as mudanças básicas de uma empresa, podendo assim, serem utilizados pela maioria das indústrias, independente do tamanho. Os requisitos restantes (segundo grupo) apresentam maiores dificuldades para serem implementados em pequenas empresas.

Por exemplo, a implementação do JIT na entrega de

componentes e matéria-prima (item sete) em uma pequena empresa, pode ser extremamente difícil, pois o pequeno volume de seus pedidos pode não ser economicamente viável ao fornecedor.

Inmam e Mehra [24], usando estes conceitos, pesquisaram o uso do JIT em cento e quatorze empresas e destas cinquenta e duas foram classificadas como pequenas. Foram entregues a elas um questionário, onde perguntava-se sobre a aplicabilidade desses requisitos na fábrica e no fornecedor e os benefícios obtidos depois de sua implementação.

Os resultados desta pesquisa, mostram que todos esses requisitos são iguais tanto para pequena como para a grande empresa, com exceção do uso de consultores externos e a redução do tamanho dos lotes no fornecedor.

Os benefícios obtidos pelas pequenas empresas foram pelo menos tão bons quanto os das grandes. Portanto elas podem aplicar a filosofia JIT obtendo benefícios tanto operacionais como financeiros que em muitas vezes serão mais vantajosos do que se fossem implementados em uma grande empresa.

Percebe-se então, que a implementação individual de alguns desses requisitos traz muitos benefícios e que estes podem ser benéficos em qualquer ambiente de manufatura, não apenas em um repetitivo.

Um "tudo ou nada" não é o melhor plano de ataque para as pequenas empresas quanto ao JIT. Os componentes individuais trazem benefícios que não podem ser desprezados porque o total nem sempre é viável.

2.4 -) O MRP e o JIT

No ocidente, com o aparecimento da filosofia JIT, vinda do oriente, onde obteve um grande sucesso, surgiram dúvidas entre o seu uso e a relação dela com o sistema usado até o momento (MRP e MRPII). Seria JIT melhor ou pior que o MRP, ou ainda, poderia uma fábrica possuir esses dois sistemas e utilizá-los simultaneamente?

Esta seção visa esclarecer estas dúvidas.

2.4.1 -) MRP E MRPII

O M.R.P ("material requirements planning"), que significa planejamento das necessidades de materiais, é um sistema que tem como proposta básica determinar em cada período as necessidades em termos de componentes/matéria-prima a fim de que o sistema de produção principal possa cumprir seu programa sem atraso. É um sistema central para o planejamento e controle de materiais.

Pode ser considerado como um sistema de empurrar, pois a produção em cada estágio segue um planejamento pré-determinado.

Este sistema tem como principais objetivos:

- rotatividade do estoque, ou seja, baixo nível do estoque;
- atendimento a cliente, onde a maior preocupação é a capacidade de cumprir os prazos prometidos;
- produtividade, que pode ser afetada por adversidades como falta de materiais, tempo de preparação, quebra de máquina, hora extra

e variação na equipe de trabalho;

- planejamento de capacidade, que visa adequar os recursos à necessidade do processo de produção.

- custo de material, que é afetado por decisões tais como: quando comprar, quanto comprar, como comprar antes do aumento de preços, etc;

- custo de transporte: muitas vezes, uma forma de conseguir entregas no prazo com baixo nível de estoque é aumentar a frequência de entregas, o que acarreta um aumento no custo de transporte;

- custos indiretos.

A grande dificuldade deste sistema, era o seu isolamento, ou seja, a não integração entre os diversos departamentos da empresa, principalmente "marketing" e finanças.

Criou-se então o MRPII ("manufacturing resources planning") que é um sistema de planejamento de recursos de manufatura. Nele os sistemas operacionais e financeiro formam um único sistema, usando as mesmas transações e números. É ele o responsável por todas as fases da administração sendo o MRP o módulo do MRPII responsável pelo planejamento de necessidade de materiais.

2.4.2 -) MRPII X JIT

O MRPII é basicamente um sistema de planejamento (replanejamento) tendo pouca associação com execução de planos a nível de chão de fábrica. O sistema "Kanban", por outro lado, é exclusivamente um sistema de execução que não está relacionado com o

planejamento.

Portanto MRPII, "Kanban" e JIT, são bastante diferentes. O MRPII fornece informações aos gerentes sobre o planejamento da manufatura. O sistema "Kanban" é uma técnica de controle de estoque, produção e fluxo de material.

Segundo Fulmann et al^[29], o JIT se aplica com ou sem MRPII e o MRPII se aplica com ou sem JIT. A manufatura exige tanto o JIT como o MRPII.

Uma das deficiências do sistema MRPII é a falta de sensibilidade ao nível de chão de fábrica, processo de manufatura, qualidade e mão de obra. A teoria declara que é necessário desenvolver um grande sistema MRP para planejar a complexa desordem chamada fábrica. Mas, apenas impondo um sistema complexo de planejamento e controle de estoque sobre antigos processos de manufatura e técnicas de produção, nem sempre traz resultados.

JIT é muito mais que uma filosofia aperfeiçoada de controle. É um caminho melhor para executar a programação e o controle detalhado da produção.

O MRPII aceita os valores atuais dos parâmetros de planejamento tais como, tamanho de lote, tempo de preparação das máquinas, etc. Ele gera informações sobre prioridades e planejamento de capacidade, quaisquer que sejam os parâmetros de planejamento.

Já o JIT tem como interesse básico melhorar esses parâmetros de planejamento. Ele quer reduzir os tempos de preparação das máquinas, o tamanho de lote para simplificar a determinação de prioridades e o planejamento da capacidade.

O MRPII e o JIT enfocam de maneira diferente as fronteiras ou limites que separam os departamentos de uma empresa, os centros de trabalho em uma fábrica e até os níveis de material de um produto. O MRP (e MRPII) aceita a existência de uma fronteira, e insiste em controlá-la de maneira apropriada.

O JIT põe fim a todas as fronteiras. Ele quer eliminá-las completamente juntando os estágios de transformação do produto, desde a matéria prima, até o produto acabado, em um roteiro longo, contínuo e ininterrupto.

Portanto o MRP (e MRPII) são excelentes sistemas de planejamento, mas dão pouco apoio às operações, já o JIT é uma excelente filosofia de operação.

2.4.3 -) MRPIII = JIT + MRPII

No sentido de melhorar a produtividade e qualidade, as empresas estão seguindo um enfoque no sentido da integração do MRPII com o JIT, o MRPIII.

MRPIII, é baseado em uma diferente linha de raciocínio, tendo como objetivo principal apoiar as necessidades de alto giro do estoque e direcionar a produção ao consumo real.

Tem-se um sistema que pretende atender as necessidades reais do mercado e no momento certo. O planejamento é feito através do consumo anterior, possibilitando assim uma visão mais realista das necessidades do mercado.

CAPÍTULO 3

A FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O sistema "Kanban" surgiu no final da década de 70 e despertou a atenção do mundo inteiro. Muitos trabalhos em termos de comparação entre este sistema de produção e o sistema de produção ocidental foram publicados, como por exemplo o de Schoenberger^[20] que mostra que com nove lições sobre técnicas de manufatura japonesa as companhias ocidentais podem aprender a detectar e diminuir seus problemas de produção.

Rees et all^[52], analisam quanto eficientemente e economicamente pode-se adaptar um sistema "Kanban" para uma típica operação de produção americana, sem se empregar as características de "lay-out" de tecnologia de grupo e sem o uso de trabalhadores multidisciplinares, como no sistema japonês, e o compara com o sistema MRP. Esta análise comparativa é feita através de simulações usando um modelo de produção hipotético.

Sarker e Fitzsimmons ^[49] também comparam esses dois sistemas através de um modelo de simulação, porém considerando os efeitos da variação do processo (desempenho do operador, etc) e a inabilidade para se alocar igualmente tarefas nos diferentes estágios criando-se assim problemas de desbalanceamento na produção.

Dellersnyder et all ^[51] estudam o problema de controle

operacional quando se tenta implementar um sistema "Kanban" em um sistema de produção em série, o qual é modelado como um processo markoviano de tempo discreto e analisado através de simulações.

Porém muito pouca pesquisa foi feita no sentido de desenvolver modelos matemáticos para o sistema "Kanban". Kimura e Terada [33], foram os primeiros a formularem equações básicas para este sistema. Baseando-se em um ambiente multi-estágio em série, considerando o tempo de produção entre um processo e outro, "containers" pequenos e capacidade de produção limitada, formularam as equações e mostraram como a flutuação da demanda final influencia a produção e o volume de estoque nos estágios superiores.

Bitran e Chang [34], basearam-se no artigo de Kimura e Terada e desenvolveram um modelo matemático para um sistema "Kanban" determinístico em um ambiente multi-estágio com estrutura de montagem. Este modelo ajuda a gerência a determinar o número de "kanbans" em circulação e portanto o nível de estoque em cada estágio. São feitas considerações sobre o tamanho relativo dos "containers", assume-se que a capacidade de produção é limitada, podendo assim ser aplicado em situações mais gerais de manufatura.

O modelo não considera aleatoriedades tais como, incertezas na demanda e quebra de máquinas. Assim, o número de "kanbans" determinado por ele deve ser ajustado para considerar estas incertezas. Além disso o modelo deve ser resolvido periodicamente para incorporar novas previsões de demanda. Apesar de ser um modelo determinístico, considerou-se que o mesmo descreve com fidelidade a dinâmica imposta pelo sistema "Kanban" no ambiente de produção proposto.

Sendo um assunto recente, é rara a existência de trabalhos que se disponham à elaboração de algoritmos para a resolução do problema envolvido. A maioria dos trabalhos discutem o JIT e o sistema "Kanban" filosoficamente, ou seja, onde e como aplicá-los, ou utilizam simulações para compará-los com os sistemas já existentes. Assim optou-se pelo estudo da resolução de um modelo de otimização de um sistema "Kanban" determinístico usando técnicas de programação inteira.

3.1-) Descrição do Modelo

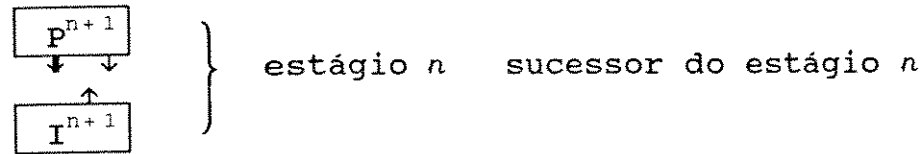
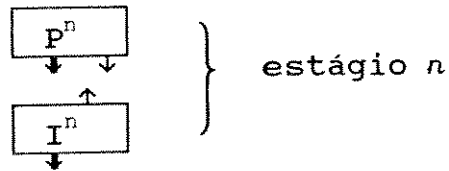
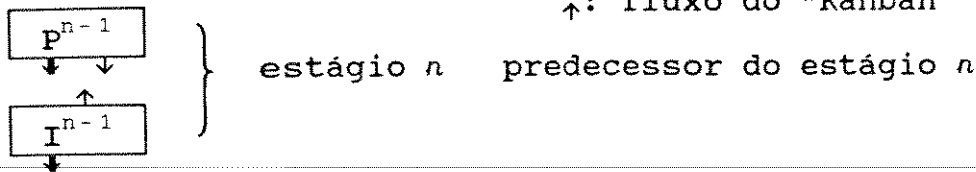
Antes de se iniciar a descrição do modelo propriamente dito, é necessário uma breve explicação sobre as operações de um sistema "Kanban".

Uma vez que um "container" é cheio um "kanban" é anexado a ele, levando todas as informações necessárias sobre o item n e o estágio n de produção.

A figura abaixo ilustra o funcionamento de um sistema "Kanban" único (o "kanban" de produção e o de requisição é o mesmo, ou seja, o "kanban" que requer do estoque mais "containers" para o estágio posterior é o mesmo que iniciará a produção no estágio anterior para reposição no estoque).

Este será o sistema considerado para a elaboração do modelo.

P : estágio de produção
 I : estoque
 \downarrow : fluxo do item
 \downarrow : fluxo do "Kanban"
 \uparrow : fluxo do "Kanban"



O estágio n representa um estágio intermediário na produção. Ele é composto por P^n (processo de produção) e um local de estoque subsequente I^n . O tipo do processo de produção pode ser fabricação, submontagem, entrega ou compra.

Usando os itens armazenados no estoque do estágio imediatamente predecessor, o estágio de produção P^n produzirá seus itens no sentido de reabastecer o estoque I^n através de "containers" cheios com "kanbans" anexados a eles. Quando a primeira peça/item do "container" cheio em I^n é usado no estágio imediatamente sucessor, o "kanban", originalmente anexado ao "container", é destacado e "posto de lado". No fim de cada período (por exemplo um turno) todos os "kanbans" destacados em I^n durante este período são coletados e enviados para P^n .

Geralmente P^n usa a regra "o primeiro que entra é o primeiro que sai", para processar as ordens de fabricação. Quando P^n produz um "container" cheio, o "kanban" associado com o pedido de

fabricação é anexado a este que então é enviado para I^n .

As principais características deste sistema "Kanban" são:

1- O número de "kanbans" circulando entre P^n e I^n é invariante no tempo;

2- O estoque máximo acumulado em I^n é limitado pelo número de "kanbans" circulando entre I^n e P^n ;

3- O movimento de "kanbans" entre I^n e P^n é disparado pela retirada de I^n pelo sucessor imediato. Em outras palavras, P^n produzirá para reabastecer o que foi retirado de I^n pelo sucessor imediato;

4- Através da circulação de "kanbans" em cada estágio, todos os estágios da produção são encadeados. Assim o programa de produção do estágio final é transmitido para todos os estágios predecessores.

As características apresentadas acima serão retratadas no modelo descrito a seguir.

O modelo apresentado por Bitran e Chang [34] trata de um sistema multi-estágio com estrutura de montagem e capacidade de produção finita. Cada estágio produz um tipo de item e o número total de estágios é $(N+1)$. Seja $n \in \{ 0,1,\dots,N \}$ o índice dos estágios e respectivos itens. O estágio final, estágio (0), inclui somente a operação de montagem final P^0 . Seja $t \in \{0,1,\dots,T \}$, o índice dos períodos de tempo, onde o horizonte de planejamento começa no início do período 1 e termina no fim do período T. A demanda do estágio final é determinada externamente e deve ser atendida. A quota de produção ou demanda ao longo do horizonte de planejamento de um estágio intermediário é determinada pela demanda do estágio sucessor. Uma vez que um estágio anterior P^n tenha atingido a sua quota de produção,

todos os "kanbans" destacados restantes em I^n e P^n são retirados do sistema pela gerência no fim de horizonte de planejamento.

A seguinte notação será usada:

$\lceil Z \rceil \hat{=} \text{menor inteiro que é maior ou igual a } Z;$

$\lfloor Z \rfloor \hat{=} \text{maior inteiro que é menor ou igual a } Z.$

Serão agora apresentados os parâmetros e as variáveis do modelo matemático:

Parâmetros

- α^n : número de unidades do item n em um "container" cheio, ou seja, é a capacidade do "container"; $\alpha^n \in \{1, 2, \dots\}$ ($n = 0, 1, \dots, N$);
- β_t^n : capacidade de produção em termos do número de "containers" cheios do item n em P^n no período t ; $\beta_t^n \in \{0, 1, \dots\}$ ($n = 1, \dots, N$; $t = 1, \dots, T$);
- $s(n)$: estágio sucessor imediato do estágio n ; ($n = 1, \dots, N$);
- V_0^n : número de "containers" cheios do item n em I^n no fim do período 0. Cada um destes "containers" cheios tem um "kanban" anexado a ele; $V_0^n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ($n = 1, \dots, N$);
- W_0^n : número de unidades do item n remanescentes em um "container" parcialmente cheio, cujo "kanban" foi destacado em I^n , no fim do período zero; $W_0^n \in \{0, 1, \dots, \alpha^n - 1\}$ ($n = 1, \dots, N$);
- $P(n)$: conjunto de estágios predecessores imediatos ao estágio n ; ($n = 1, \dots, N$);
- $e^{n, s(n)}$: número de unidades do item n necessárias para fazer uma unidade do item sucessor imediato $s(n)$; $e^{n, s(n)} \in \{1, 2, \dots\}$ ($n = 1, \dots, N$);
- X_t^0 é a produção requerida, em termos do número de "containers" cheios do item zero, isto é do produto final, no estágio

0 no período t ; $X_t^0 \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ($t = 1, \dots, T$);

- Q^n : quota de produção ou demanda efetiva, em termos do número de "containers" cheios do item n , imposta ao estágio n durante todo o horizonte de planejamento, $Q^n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ($n=1, \dots, N$);

$$\begin{cases} Q^0 = \sum_{t=1}^T X_t^0 \\ Q^n = \max \{ 0, \lceil (e^{n, s(n)} \alpha^{s(n)} / \alpha^n) Q^{s(n)} - V_0^n - (W_0^n / \alpha^n) \rceil \} \end{cases}$$

Assume-se também, que o tempo de produção ("lead time") é zero, e que os "kanbans" destacados em I^n no período t estão disponíveis para servir como pedido de produção em P^n no período $t+1$.

No início do horizonte de planejamento, o estoque inicial no estágio n é composto de:

$$\begin{cases} V_0^n - \text{"containers" cheios} \\ W_0^n - \text{unidades do item (n)} \end{cases}$$

X_t^n e β_t^n podem variar de período para período para permitir maior flexibilidade na programação da montagem final e no deslocamento de recursos.

Variáveis

- X_t^n número de "kanbans" destacados do item n , que disparam respectivamente a produção de um "container" cheio em P^n no período t ($n = 1, \dots, N$; $t = 1, \dots, T$);

- Y_t^n número de "kanbans" do item n que são destacados de

seus correspondentes "containers" em I^n no período t ($n = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T$);

- U_t^n número de "kanbans" destacados do item n que estão disponíveis em P^n no fim do período t e que ainda não dispararam qualquer produção ($n = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T$);

- V_t^n número de "containers" cheios do item n que estão disponíveis em I^n no fim do período t ($n = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T$);

- W_t^n número de unidades do item n remanescentes em um "container" parcialmente cheio, do qual o "kanban" foi destacado em I^n , no fim do período t ($n = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T$);

- U_0^n número de "kanbans" destacados do item n que são injetados em P^n pela gerência no início do horizonte de planejamento ($n=1, \dots, N$);

As seguintes abreviações serão utilizadas:

- $\langle U, V, X, W, Y \rangle$: representa todas as variáveis envolvidas, isto é $N(T+1)$ U-variáveis, NT V-variáveis, NT W-variáveis, NT X-variáveis e NT Y-variáveis;

- $\langle U_0, X \rangle$: representa N U-variáveis em $t=0$ e NT X-variáveis;

- $\langle U_0 \rangle$: representa $\langle U_0^1, U_0^2, \dots, U_0^n \rangle$;

- $\langle X^n \rangle$: representa $\langle X_1^n, X_2^n, \dots, X_T^n \rangle$;

Apresenta-se agora a descrição matemática do sistema

"Kanban":

(1) Conservação do Fluxo em P^n em termos de "kanban"

$$U_{t-1}^n + Y_{t-1}^n - X_t^n - U_t^n = 0$$
$$\left(U_t^n = U_{t-1}^n + Y_{t-1}^n - X_t^n \right)$$

(2) Conservação do Fluxo em I^n em termos de "kanban"

$$V_{t-1}^n + X_t^n - Y_t^n - V_t^n = 0$$

$$\left(V_t^n = V_{t-1}^n + X_t^n - Y_t^n \right)$$

(3) O número de "containers" cheios a serem produzidos em P^n no período t é limitado pelos seguintes fatores:

- a-) disponibilidade de "kanbans" destacados;
- b-) capacidade de produção;
- c-) estoques disponíveis nos estágios predecessores imediatos;
- d-) quota de produção remanescente, ou seja:

$$X_t^n = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } U_{t-1}^n + Y_{t-1}^n \\ \text{(b) } \beta_t^n \\ \text{(c) } \left[(\alpha^k V_{t-1}^k + W_{t-1}^k + \alpha^k X_t^k) / (e^{k,n} \alpha^n) \right] \text{ para} \\ \quad \text{todo } k \in P(n) \\ \text{(d) } Q^n - \sum_{r=1}^{t-1} X_r^n \end{array} \right.$$

(4) Deve-se assegurar que o programa de produção no estágio final possa ser executado;

$$\alpha^k V_{t-1}^k + W_{t-1}^k + \alpha^k X_t^k \geq e^{k,0} \alpha^0 X_t^0 \quad \forall k \in P(0)$$

(5) O número de "kanbans" que são destacados de seus respectivos "containers" em I^n no período t é dado por:

$$\begin{cases} Y_t^n = \lceil (e^{n,s(n)} \alpha^{s(n)} X_t^{s(n)} - W_{t-1}^n) / \alpha^n \rceil \\ Y_0^n = 0 \end{cases}$$

(6) A conservação do fluxo em I^n do número de unidades do item (n) remanescentes em um "container" parcialmente cheio é dada por:

$$W_{t-1}^n + \alpha^n Y_t^n - e^{n,s(n)} \alpha^{s(n)} X_t^{s(n)} - W_t^n = 0$$

(7) Integralidade e não negatividade;

U_0^n é não negativo e inteiro

A figura 3.1, ilustra um sistema de montagem que é representado por uma árvore.

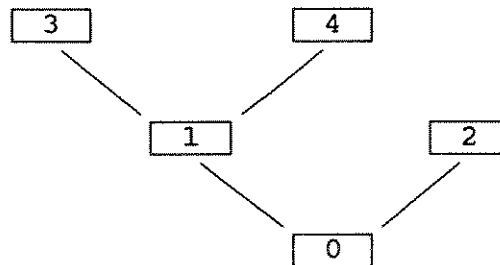


FIGURA 3.1 - SISTEMA DE MONTAGEM EM ÁRVORE, ONDE O ESTÁGIO FINAL DE PRODUÇÃO É O ESTÁGIO ZERO

O próximo teorema apresenta propriedades derivadas das restrições (1) a (7).

Teorema 1- Se $\langle U, V, W, X, Y \rangle$ satisfazem as restrições de

(1) à (7) então:

(a) $U_t^n, Y_t^n, V_t^n, X_t^n$ e W_t^n são não negativos e inteiros, $n= 1, \dots, N; t= 1, \dots, T$

(b) $Y_t^n \leq V_{t-1}^n + X_t^n, n= 1, \dots, N; t= 1, \dots, T$

(c) $W_t^n \leq \alpha^n - 1, n= 1, \dots, N; t= 1, \dots, T$

$$(d) U_0^n + V_0^n = U_t^n + V_t^n + Y_t^n, \quad n=1, \dots, N; \quad t=1, \dots, T$$

$$(e) \sum_{t=1}^T X_t^n = Q^n, \quad n=1, \dots, N$$

A demonstração deste teorema encontra-se no Apêndice A.

O Teorema 1 mostra que as restrições de (1) a (7), implicam na seguintes propriedades:

(a) Além de U_0^n , todas as variáveis envolvidas são não negativas e inteiras;

(b) O número de "kanbans" destacados dos "containers" em I^n no período t é menor ou igual ao número de "containers" cheios disponíveis no fim do período $(t-1)$ mais o número de containers cheios recebidos por I^n no período t ;

(c) O número de unidades do item (n) remanescentes em um "container" parcialmente cheio em I^n no fim do período t é menor que o tamanho do "container" α^n ;

(d) O número de "kanbans" circulando em cada estágio do fluxo é invariante e igual a $(U_0^n + V_0^n)$ durante o horizonte de planejamento;

(e) A demanda efetiva em cada estágio é igual a produção durante o horizonte de planejamento.

Apresenta-se a seguir um modelo de otimização para o sistema "Kanban", que será denotado por *modelo (1)*:

$$\text{modelo (1)} \begin{cases} \text{Min } \sum_{n=1}^N C^n \{ U_0^n + V_0^n + 1 - (1/\alpha^n) \} & (8) \\ \text{s.a. (1) - (7)} \end{cases}$$

C^n representa o valor acumulado de um "container" cheio, ou seja, representa a soma de material, trabalho e todos os outros custos

de produção que são considerados pelo sistema em termos de "containers" cheios.

A função objetivo (8) admite duas interpretações:

(1) Pode ser vista como um limite superior ligado ao valor do estoque no sistema em qualquer período, (pois o número total de "kanbans" circulando no processo e determinado por ela é imutável através do tempo);

(2) Pode ser interpretada como sendo uma minimização ponderada do número de "kanbans" em circulação. Um número menor de "kanbans" circulando em um estágio reflete uma maior eficiência da operação naquele estágio e portanto é uma meta desejável por trabalhadores e gerentes.

O termo $C^n(1-1/\alpha^n)$, que é igual a $C^n \left(\frac{\alpha^n - 1}{\alpha^n} \right)$ representa o valor de um "container" com α^n-1 itens.

O modelo (1) é um problema complexo de programação inteira, com restrições não-lineares (3) e restrições lineares.

Surge então a necessidade de transformá-lo em um problema mais simples e fácil de se resolver.

3.2) Transformação do modelo

O objetivo desta seção é transformar o modelo (1) em um outro modelo mais simples que terá o mesmo conjunto de soluções factíveis e ótimas em termos de $\langle U_0 \rangle$, e o mesmo valor ótimo

A transformação ocorre pela observação que se $\langle U, V, X, W, Y \rangle$ e $\langle \bar{U}, \bar{V}, \bar{X}, \bar{W}, \bar{Y} \rangle$ são duas soluções factíveis para (1) - (7) e $\langle U_0 \rangle = \langle \bar{U}_0 \rangle$ então $\langle U, V, X, W, Y \rangle = \langle \bar{U}, \bar{V}, \bar{X}, \bar{W}, \bar{Y} \rangle$, ou seja, uma vez que U_0^n assume valores

específicos todas as variáveis em (1) - (7) são unicamente determinadas. Esta observação é ilustrada no Apêndice A e corresponde à característica de que o sistema "Kanban" é auto-operado quando os "kanbans" são distribuídos entre os estágios. As variáveis chaves de decisão a serem controladas pela gerência são U_0^n ($n = 1, \dots, N$).

Seja $E^{n,s(n)} = e^{n,s(n)} \alpha^{s(n)} / \alpha^n$ para $n = 1, \dots, N$. Este parâmetro representa o número de "containers" cheios do item n necessários para produzir um "container" cheio do item $s(n)$. Dependendo dos valores de $e^{n,s(n)}$, $\alpha^{s(n)}$ e α^n , o valor de $E^{n,s(n)}$ pode ou não ser inteiro. Seja também $0 < \epsilon < \min \{ (1/\alpha^n) \leq 1 / n=1, \dots, N \}$.

Considere o seguinte modelo de otimização:

$$\begin{array}{l}
 \text{Min (8)} \\
 \text{s.a } (W_0^n / \alpha^n) + V_0^n + \sum_{r=1}^t X_r^n - E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^t X_r^{s(n)} \geq 0 \quad (9) \\
 \qquad \qquad \qquad n=1, \dots, N; \quad t=1, \dots, T \\
 \text{modelo} \\
 (2) \quad U_0^n - \sum_{r=1}^t X_r^n + E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^{t-1} X_r^{s(n)} - (W_0^n / \alpha^n) + (1-\epsilon) \geq 0 \quad (10) \\
 \qquad \qquad \qquad n=1, \dots, N; \quad t=1, \dots, T \\
 X_t^n \in \{ 0, 1, \dots, \beta_t^n \} \quad (11) \quad n=1, \dots, N; \quad t=1, \dots, T \\
 U_0^n \in \{ 0, 1, \dots \} \quad (12) \quad n=1, \dots, N
 \end{array}$$

Para a discussão do modelo apresentado a seguir é necessário a seguinte nomenclatura. Uma solução parcial é factível (ótima) num modelo se existe um complemento para a mesma tal que a solução total é factível (ótima) no modelo. Por exemplo, a solução parcial $\langle X, Y \rangle$ é factível (ótima) no modelo (1) se existe $\langle U, V, W \rangle$ tal que a solução total $\langle U, V, W, X, Y \rangle$ satisfaz (1) a (7) e (é ótima). Dois modelos de otimização tem a mesma solução parcial factível (ótima) se existem dois complementos, que podem ou não ser distintos, tal que as duas

soluções totais resultantes são factíveis (ótimas) nos dois modelos, respectivamente

A relação entre o modelo (1) e o modelo (2) é descrita no próximo teorema.

Teorema 2 - O modelo (1) é factível se e somente se o modelo (2) é factível. Os dois modelos tem o mesmo conjunto de soluções parciais factíveis $\langle U_0 \rangle$, o mesmo conjunto de soluções parciais ótimas $\langle U_0 \rangle$ e o mesmo valor ótimo.

A prova deste teorema encontra-se no Apêndice A.

É importante ressaltar que as restrições do modelo (2) não descrevem o procedimento de operação do sistema "Kanban", enquanto que o modelo (1) o faz. A ligação entre esses dois modelos é feita através de $\langle U_0 \rangle$ como mostra o teorema 2. Além disso, as restrições do modelo (2), (9) - (12), não envolvem especificamente a quota de produção Q^n . Será mostrado no Apêndice A que $\sum_{r=1}^t X_r^n \geq Q^n$ se $\langle X \rangle$ satisfaz (9) e (11). Para qualquer $\langle U_0, \bar{X} \rangle$ que satisfaça (9)-(12) a primeira parte da demonstração do teorema 2 leva à construção de $\langle X \rangle$ tal que $\sum_{r=1}^t X_r^n \leq Q^n$ e $\langle U_0, X \rangle$ satisfaz (9)-(12). Portanto o novo $\langle X \rangle$ satisfaz a restrição $\sum_{r=1}^t X_r^n = Q^n$ para qualquer n .

3.3) Teste de Factibilidade

Antes de resolver o modelo (2) é necessário determinar se ele é factível ou não.

Seja $\Omega = \{ \langle X \rangle / \langle X \rangle \text{ satisfaz (9) e (11)} \}$. Portanto $\Omega \neq \emptyset$ se e somente se o modelo (2) é factível. A seguir apresenta-se um

teste de factibilidade que tenta encontrar uma solução factível para Ω tal que cada estágio satisfaça a demanda efetiva de seu sucessor, produzindo o mais tarde possível.

O algoritmo de factibilidade é:

Passo 1: Para $t = 1, \dots, T$ faça:

$$\left\{ \bar{X}_t^0 \leftarrow X_t^0 \right.$$

$$n \leftarrow 1$$

Passo 2:

$$Q_1^n \leftarrow \max \left\{ 0, \left[E^{n,s(n)} \bar{X}_1^{s(n)} - V_0^n - (W_0^n / \alpha^n) \right] \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_t^n \leftarrow \max \left\{ 0, \left[E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^t \bar{X}_r^{s(n)} - V_0^n - (W_0^n / \alpha^n) \right] \right\} - \sum_{r=1}^{t-1} Q_r^n \\ \text{para } t = 2, \dots, T \end{array} \right.$$

$$t \leftarrow T$$

Passo 3: $\bar{X}_t^n \leftarrow \min \{ Q_t^n, \beta_t^n \}$;

se $t = 1$, então vá para o passo 4

$$\text{senão } \left\{ \begin{array}{l} Q_{t-1}^n \leftarrow Q_{t-1}^n + \max \{ 0, Q_t^n - \beta_t^n \} \\ t \leftarrow t-1; \end{array} \right.$$

volte para o início do passo 3

Passo 4: Se $\beta_1^n < Q_1^n$,

$$\left[\begin{array}{l} \text{então } \Omega = \emptyset \text{ e pare;} \\ \text{senão, se } n = N, \left\{ \begin{array}{l} \text{então } \Omega \neq \emptyset \text{ e pare;} \\ \text{senão } \left\{ \begin{array}{l} n \leftarrow n+1 \\ \text{volte para o } \underline{\text{passo 2}} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Se $\Omega \neq \emptyset$ o problema é factível

FIM

Através dos passos 2 e 3 o algoritmo calcula:

$$\langle \bar{X}^n \rangle \in \Omega(n; \bar{X}^{s(n)}) = \{ \langle X^n \rangle / (W_0^n / \alpha^n) + V_0^n + \sum_{r=1}^t X_r^n - \\ - E^{n, s(n)} \sum_{r=1}^t \bar{X}_r^{s(n)} \geq 0, X_t^n \in \{ 0, 1, \dots, \beta_t^n \} \text{ para}$$

$$t = 1, \dots, T \}, \text{ tal que } \sum_{r=1}^t \bar{X}_r^n \leq \sum_{r=1}^t X_r^n \text{ (} t=1, \dots, T \text{) para}$$

todo $\langle X^n \rangle \in \Omega(n; \bar{X}^{s(n)})$. Se $\beta_1^n < Q_1^n$ no passo 4

então tal $\langle \bar{X}^n \rangle$ não existe e portanto $\Omega(n; \bar{X}^{s(n)}) = \Omega = \emptyset$.

Este teste de factibilidade é necessário e suficiente no sentido que o vetor $\langle X \rangle$ é gerado se e somente se o modelo (2) é factível.

No passo 2, calcula-se a demanda do estágio em cada período.

No passo 3, $\bar{X}_t^n = \min \{ Q_t^n, \beta_t^n \}$. Caso a demanda Q_t^n seja maior que a capacidade β_t^n então o excesso $Q_t^n - \beta_t^n$ é adicionado à demanda do período $t-1$, isto é, adicionado à Q_{t-1}^n .

Se $\beta_1^n > Q_1^n$ então a produção \bar{X}_1^n atenderá todo o excesso de demanda que não foi possível ser atendido pelas produções $\bar{X}_2^n, \dots, \bar{X}_t^n$.

É fácil ver por este argumento que o algoritmo de factibilidade produz uma sequência $\{ \bar{X}_1^n, \bar{X}_2^n, \dots, \bar{X}_T^n \}$ tal que

$$\sum_{t=1}^T \bar{X}_t^n = \sum_{t=1}^T Q_t^n = Q^n$$

3.4) - Adaptação do Modelo

Estudou-se ainda a possibilidade de adaptação deste modelo, através da escolha do tamanho relativo dos "containers".

Será analisado o caso em que um número inteiro de

"containers" cheios do ítem n é necessário para produzir um "container" cheio do ítem sucessor para $s(n)$ para $n \in \{1, \dots, N\}$. Este caso está de acordo com a filosofia de produção JIT, pois tenta reduzir o tamanho dos "containers" e tende a evitar a criação de "containers" parcialmente cheios.

Seja $M^0=1$ e $M^n=E^{n,s(n)}M^{s(n)}$ para $n = \{1, \dots, N\}$. O parâmetro M^n representa o número de "containers" cheios do ítem n que são requeridos para fazer um "container" cheio do produto final, no estágio 0. Seja também $\lceil x \rceil_k$ o menor inteiro que é maior igual a x que é um múltiplo inteiro de k .

O próximo modelo assume as seguintes hipóteses:

- (1) $E^{n,s(n)}$ é não negativo e inteiro para $n \in \{1, \dots, N\}$;
- (2) V_0^n é inteiro e múltiplo de M^n para $n \in \{1, \dots, N\}$;
- (3) β_t^n é inteiro e múltiplo de M^n para todo $n \in \{1, \dots, N\}$ e $(t=1, \dots, T)$.

Seja o novo modelo:

modelo (3)

$$\left[\begin{array}{l} \text{Min (8)} \\ \text{s.a } V_0^n + \sum_{r=1}^t X_r^n - E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^t X_r^{s(n)} \geq 0 \quad (13) \\ n=1, \dots, N; t=1, \dots, T \\ U_0^n - \sum_{r=1}^t X_r^n + E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^{t-1} X_r^{s(n)} \geq 0 \quad (14) \\ n=1, \dots, N; t=1, \dots, T \\ 0 \leq X_t^n \leq \beta_t^n \quad (15) \quad n=1, \dots, N; t=1, \dots, T \\ U_0^n \geq 0 \quad (16) \quad n=1, \dots, N \end{array} \right.$$

A ligação do modelo (3), que é um modelo de programação linear, com o modelo (2) é feita pelo teorema 3:

Teorema 3 - Assuma as hipóteses (1), (2) e (3). O modelo (3) é factível se e somente se o modelo (2) é factível. Se $\langle U_0, X \rangle$ é

factível no modelo (2) então é também factível no modelo (3). Se $\langle U_0, X \rangle$ é factível no modelo (3) então $\langle [U_0^j]_M^0, \dots, [U_0^j]_M^n \rangle$ é uma solução parcial factível para o modelo (2).

A demonstração deste teorema encontra-se no Apêndice A.

Seja Z_3 a solução ótima obtida pelo modelo (3) e Z_2 a solução ótima obtida pelo modelo (2).

O teorema 4 tem a finalidade de demonstrar que o erro relativo, $(Z_3 - Z_2)/Z_2$ causado pela aproximação da programação linear é assintoticamente zero.

Teorema 4 - Assuma que as hipóteses (1), (2) e (3) Assuma também que o modelo (3) e o modelo (2) são factíveis. Então $(Z_3 - Z_2)/Z_2 \rightarrow 0$ quando $Q^0/T \rightarrow \infty$.

A demonstração deste teorema encontra-se no Apêndice A.

3.5) Um Modelo com tempo de Produção não zero

O modelo (2) foi escolhido para ser estudado na aplicação das técnicas de programação inteira por ser um problema de programação linear inteira.

O modelo (3), por já fornecer resultados inteiros, será usado para a comparação dos resultados obtidos do modelo (2).

Foi construído também, para estudos futuros, um modelo do sistema "Kanban" baseado no modelo (1), onde o tempo de produção a partir do momento que o "kanban" foi destacado é diferente de zero.

Seja $L(n)$ o tempo de produção do item n . Assim quando um "kanban" dispara a produção do item n no período t , este item terá seu processamento terminado em $t + L(n)$.

Assim, o modelo que incorpora $L(n)$ pode ser formulado da

seguinte maneira.

$$\text{Min } \sum_{n=1}^N C^n \{ U_0^n + V_0^n + 1 - (1/\alpha^n) \} \quad (8)$$

s.a

$$U_{t+L(n)}^n = U_{t+L(n)-1}^n + Y_{t+L(n)-1}^n - X_t^n \quad n=1, \dots, N; \quad t=1, \dots, T$$

$$V_{t+L(n)}^n = X_t^n - Y_{t+L(n)}^n + V_{t+L(n)-1}^n \quad n=1, \dots, N; \quad t=1, \dots, T$$

$$X_{t+L}^n = \min \begin{cases} \text{(a)} & U_{t-1+L(n)}^n + Y_{t-1+L(n)}^n \\ \text{(b)} & \sum_{r=t}^{t+L(n)} \beta_r^n \\ \text{(c)} & \lfloor (\alpha^k V_{t-1}^k + W_{t-1}^k + \alpha^k X_{t+L(k)}^k) / (e^{k,n} \alpha^n) \rfloor \quad \forall k \in P(n) \\ \text{(d)} & Q^n - \sum_{r=1}^{t-1} X_r^n \quad n=1, \dots, N; \quad t=1, \dots, T \end{cases}$$

$$\alpha^k V_{t-1}^k + W_{t-1}^k + \alpha^k X_{t+L(k)}^k \geq e^{k,0} \alpha^0 X_t^0 \quad n \forall k \in P(0) \quad t=1, \dots, T$$

$$\begin{cases} Y_t^n = \lfloor (e^{n,s(n)} \alpha^{s(n)} X_t^{s(n)} - W_{t-1}^n) / \alpha^n \rfloor & n=1, \dots, N; \\ & t=1, \dots, T \\ Y_0^n = 0 \end{cases}$$

$$W_{t-1}^n + \alpha^n Y_t^n - e^{n,s(n)} \alpha^{s(n)} X_t^{s(n)} - W_t^n = 0 \quad n=1, \dots, N; \quad t=1, \dots, T$$

$$U_0^n \text{ não negativo inteiro } n=1, \dots, N$$

CAPITULO 4

O USO DE UM ALGORITMO "BRANCH AND BOUND" PARA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

4.1-) INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se um algoritmo do tipo "Branch and Bound" para a resolução do modelo do sistema "kanban" (M2). São discutidas também várias estratégias de seleção de nós e das variáveis a serem ramificadas.

Maiores detalhes sobre o algoritmo "Branch and Bound" para a solução de problemas de programação linear inteira encontram-se no Apêndice B.

4.1.1-) ELEMENTOS DE UM ALGORITMO "BRANCH-AND-BOUND"

Na resolução do problema do sistema "Kanban", o tipo de relaxação usado foi o de ignorar a integralidade requerida pelas variáveis.

O algoritmo "Branch-and-Bound" é um algoritmo enumerativo, cuja estrutura de resolução é conhecida como estrutura de árvore, onde cada nó da árvore representa um problema candidato.

Como ressaltado no Apêndice B a eficiência de um algoritmo "Branch and Bound" depende fortemente de dois fatores:

- escolha do problema candidato (ou do nó ativo)
- decisão da variável inteira a ser dicotomizada: escolher uma variável dentre as várias variáveis inteiras que assumem valores fracionários na solução ótima do problema candidato relaxado, de modo a separar o problema candidato em dois outros problemas candidatos.

A seguir são descritos critérios para as decisões acima mencionadas.

- Escolha do nó: Dado uma lista de problemas candidatos (lista de nós ativos) existem duas opções básicas para a escolha: (1) regras à priori que determinam a ordem na qual a árvore será desenvolvida: (2) regras adaptativas, que escolhem um nó usando informações (limites, etc.) sobre os nós ativos.

A principal regra à priori usada é a busca em profundidade [45]. Esta regra determina que o problema candidato selecionado é sempre o último adicionado à lista de problemas candidatos, ou seja, se o nó atual não é sondado o próximo a ser considerado é um dos seus dois sucessores na árvore. Esta regra é também conhecida como "Last in, First out" (LIFO).

As principais vantagens da regra LIFO são:

1- A solução do último problema da lista por programação linear é muito simples: basta adicionar uma restrição de limite inferior ou superior à uma variável não inteira e reotimizar usando o dual simplex.

2- A experiência mostra que soluções factíveis são mais prováveis de serem encontradas em níveis mais profundos da árvore.

A principal desvantagem da regra LIFO é a sua rigidez para controlar o processo enumerativo: há ocasiões em que um problema mais

antigo na lista de candidatos é mais promissor.

Outra regra à priori é a busca em largura que consiste em considerar todos os nós de um mesmo nível, onde o nível de um nó é determinado pelo número de arcos no caminho único entre este nó e o nó raiz (problema original) [47].

Como regras adaptativas, Nenhauser e Wolsey [47] propõem:

a-) dentre os nós ativos escolher o de menor limitante inferior (o limitante inferior de um nó é o valor ótimo do problema relaxado);

b-) regra da rápida melhoria: o objetivo desta regra é encontrar rapidamente uma solução factível melhor que a solução incumbente (melhor que a solução factível atual).

Seja:

z^* - solução incumbente;

\underline{z}^k - limitante inferior no nó k;

\hat{z}^k - estimativa do valor da solução ótima no nó k, $\hat{z}^k \geq \underline{z}^k$

L - conjunto de nós ativos.

O critério $\text{Max}_{k \in L} \left\{ \frac{(z^* - \underline{z}^k)}{\hat{z}^k - \underline{z}^k} \right\}$ é uma tentativa de atingir

este objetivo.

Nota-se que o nó k com $\hat{z}^k < z^*$ é preferido ao nó j com $\hat{z}^j \geq z^*$.

Além disso a preferência será dada para os nós nos quais a diferença $\hat{z}^k - \underline{z}^k$ é pequena.

Existe ainda a regra pela escolha da melhor estimativa, ou seja, estima-se o valor da solução no nó através de uma determinada fórmula e escolhe-se aquele que tiver o melhor valor. Estas fórmulas serão apresentadas abaixo, na escolha da variável.

Nenhauser e Wolsey [47] propõem como estratégia para a escolha do nó a ser pesquisado o uso de várias regras ao mesmo tempo: se o nó que está sendo pesquisado não foi sondado, continua-se no mesmo ramo, caso contrário, verifica-se o irmão. Se este não foi sondado, então é o escolhido, caso contrário verifica-se se já existe uma solução inteira. Em caso afirmativo sim usa-se a regra da rápida melhoria, se não a regra da melhor estimativa

Neste problema parte-se de uma solução inicial inteira, então a escolha do nó segue as sugestões acima, só que ao invés de usar tanto a regra da rápida melhoria como a da melhor estimativa na mesma estratégia, elas serão usadas em diferentes estratégias.

Uma vez que um nó pesquisado tenha sido dividido em dois problemas candidatos existe ainda a questão da decisão de qual será o primeiro problema examinado. Isto será discutido posteriormente.

Escolha da variável: uma vez escolhido o problema candidato (nó) a ser pesquisado, relaxa-se a integralidade nas variáveis e resolve-se um problema de programação linear. Dentre as variáveis ótimas que assumem valores não inteiros é necessário escolher uma delas para ser dicotomizada. Esta escolha é muito importante para o tempo computacional de execução do algoritmo, pois geralmente há muitas variáveis que precisam ser fixadas em seus valores inteiros para que as outras tornem-se inteiras na resolução do problema de programação linear.

A regra mais comum para a escolha das variáveis é pelo uso das prioridades, isto é, um ordenamento das variáveis é especificado como parte da entrada de dados e elas são escolhidas segundo esta ordem.

Outras possibilidades envolvem: penalidades e pseudo-custos.

Penalidades: é uma estimativa do acréscimo no valor ótimo do problema relaxado ao se forçar uma das variáveis a assumir um valor inteiro particular [39].

Considere uma solução ótima de um problema de programação linear em um dado nó (k), e seja x_i uma variável básica ótima com o valor fracionário y_{i0} . Então temos:

$$x_i = y_{i0} - \sum_{j \in N} y_{ij} x_j$$

onde y_{ij} são os coeficientes das variáveis não básicas resultantes da solução do problema relaxado (PC_R) e N é o conjunto das variáveis não básicas.

Seja:

$$y_{i0} = [y_{i0}] + f_{i0}, \quad f_{i0} > 0$$

onde $[y_{i0}]$ é a parte inteira de y_{i0} e f_{i0} sua parte fracionária.

Para forçar a variável x_i a assumir um valor inteiro então impõe-se $x_i \leq [y_{i0}]$ ou $x_i \geq [y_{i0}] + 1$.

Seja D_i a penalidade para separar a variável x_i para baixo, isto é, impor $x_i = [y_{i0}]$. Então:

$$D_i = \min_{j \in N} \left\{ \frac{f_{i0} * y_{0j}}{y_{ij}}, \quad y_{ij} > 0 \right\}$$

D_i é apenas um limitante inferior para o acréscimo de z^k pois podem ser necessárias várias iterações de dual simplex para restaurar a factibilidade. É importante ressaltar que caso não exista $y_{ij} > 0$ então a variável x_i não pode assumir o valor $[y_{i0}]$ e o valor D_i é por definição infinito.

Seja U_i a penalidade para separar a variável para cima, isto

é, impor $x_i = [Y_{i0}] + 1$. Então:

$$U_i = \min_{j \in N} \left\{ \frac{(f_{i0} - 1) * Y_{0j}}{Y_{ij}}, Y_{ij} < 0 \right\}$$

A penalidade U_i tem o mesmo significado que D_i , e caso não exista $y_{ij} < 0$ o valor de U_i será infinito.

Portanto um limitante inferior para o acréscimo de \underline{z}^k ao se forçar a variável x_i a ser inteira é

$$P_i = \min(U_i, D_i)$$

Consequentemente um limitante inferior para o acréscimo de \underline{z}^k ao se forçar todas as variáveis fracionárias a serem inteiras é

$$PEN = \max_i P_i$$

Esta análise permite tornar mais forte o critério de sondagem (CS_2) de um dado nó (passo 7 do algoritmo de "Branch and Bound" no Apêndice B). Seja $v(PC^k)$ o valor ótimo do problema candidato (PC^k). Como

$$v(PC^k) \geq \underline{z}^k + PEN$$

então se

$$\underline{z}^k + PEN \geq z^*$$

conclui-se que

$$v(PC^k) \geq z^*$$

e o problema candidato (PC^k) está sondado.

Usando penalidade pode-se estimar \hat{z}^k [47] (melhor solução inteira) em um nó sucessor do nó k.

$$\hat{z}^k = \underline{z}^k + U_j^k + \sum_{i \in M / \{j\}} \min(U_i^k, D_i^k), \text{ se a variável escolhida}$$

está em seu limite superior.

$$\hat{z}^k = \underline{z}^k + D_j^k + \sum_{i \in M/(j)} \min(U_i^k, D_i^k), \text{ se a variável escolhida}$$

está em seu limite inferior.

(M) significa o conjunto de variáveis inteiras com valores fracionários.

O que varia de autor para autor em termos de penalidade é como usá-la, ou seja, Beale [43] por exemplo propõe que a escolha da variável via penalidade seja feita através da fórmula $\max(\min(U_i, D_i))$, já Geoffrion [45] defende a fórmula $\max(\max(U_i, D_i))$.

A escolha através da regra $\min(\min(U_i, D_i))$ não é aconselhável, pois o problema de degenerescência dual pode levar a escolha arbitrária dentre várias variáveis com custo relativo zero.

Analisa-se abaixo as características das fórmulas utilizadas neste trabalho.

- $\max(\min(U_i, D_i))$: esta regra evita o problema de degenerescência dual, determinando assim a variável a ser ramificada. O primeiro subproblema a ser examinado será aquele onde a variável possui a menor penalidade. Uma justificativa para esta escolha é que a lista conterá provavelmente, problemas com soluções inteiras pobres e que poderão ser sondados com maior rapidez.

- $\max(\max(U_i, D_i))$: esta regra procura determinar a variável que produz a maior degradação. Existem duas opções para a escolha do primeiro subproblema a ser examinado. A primeira consiste em tomar o subproblema com a maior penalidade deixando assim a lista com problemas menos pobres. o objetivo é tentar sondar rapidamente este subproblema. A outra alternativa consiste em escolher o subproblema com a menor penalidade deixando assim a lista com problemas mais pobres. O objetivo é semelhante ao explicado para a regra $\max(\min(U_i, D_i))$

Pseudo-Custo: Segundo Benichou [42], este pode ser interpretado como uma medida quantitativa da deterioração do valor funcional quando se força uma variável inteira com valor fracionário para seu valor inteiro.

Seja K o nó que está sendo pesquisado e seja x_i uma variável ótima não inteira (com valor y_{i0}) de (PC_R^k) a ser dicotomizada. O nó K gera dois problemas candidatos (N+1) e (N+2) com as restrições tradicionais sobre a variável x_i .

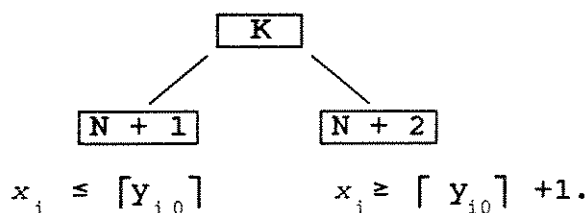


FIGURA 4.1- ESQUEMA DO PSEUDO-CUSTO

Os pseudo-custos de uma variável inteira x_i são definidos

como:

$$PCD_i = \left| \frac{\underline{z}^{(N+1)} - \underline{z}^k}{f_i^k} \right| \quad PCU_i = \left| \frac{\underline{z}^{(N+2)} - \underline{z}^k}{1 - f_i^k} \right|$$

Os pseudo-custos sugerem uma degradação do valor ótimo do problema relaxado no nó K por unidade de variação de x_i para baixo e para cima.

No início da resolução do problema geralmente os pseudo-custos não são conhecidos. Quando o problema inicial relaxado é executado (nó zero) obtém-se várias variáveis inteiras com valores fracionários. Com o intuito de calcular os pseudo-custos destas variáveis roda-se para cada uma destas variáveis dois subproblemas

de programação linear com o máximo de 10 iterações (vide figura 4.1). Assim pode-se determinar a primeira variável a ser ramificada. Os pseudo-custos destas variáveis são atualizados à medida que estas são novamente escolhidas como variáveis de ramificação durante o algoritmo. As variáveis que possuem valores inteiros na resolução do problema relaxado no nó 0 possuem pseudo-custos indeterminados.

Usando pseudo-custos pode-se estimar \hat{z}^k , (melhor solução inteira) em um nó sucessor do nó K:

$$\hat{z}^k = z^k + \sum_{j=1}^M \min(\text{PCD}_j f_j^k, \text{PCU}_j (1 - f_j^k))$$

onde M é o número de variáveis fracionárias.

Analogamente a penalidades são propostas duas maneiras de se calcular a variável a ser ramificada: $\text{Max}(\text{Min}(\text{PCD}_i f_i, \text{PCU}_i (1-f_i)))$ e $\text{Max}(\text{Max}(\text{PCU}_i, \text{PCL}_i))$

4.2-) Um algoritmo "Branch and Bound" para o modelo "kanban"

Dado o modelo (2) apresentado no capítulo anterior, resolveu-se aplicar tanto penalidade como pseudo-custo e analisar qual destes conceitos se aplica melhor dentro do modelo de otimização do sistema "Kanban" determinístico.

Foram construídos sete programas de programação inteira usando o algoritmo de "Branch-and-Bound", apresentado no Apêndice B. Basicamente o que muda em cada uma destas estratégias é o modo como se escolhe o nó a ser pesquisado, e a variável a ser dicotomizada.

4.2.1 -) ESTRATÉGIAS 1A, 1B E 1C

Em todas, a escolha da variável a ser dicotomizada é feita por penalidade e o que muda é a fórmula como esta variável é escolhida.

Na estratégia 1A a variável a ser ramificada será aquela que maximiza $\min(U_1, D_1)$ enquanto que nas estratégias 1B e 1C escolher-se-á aquela que maximiza $\max(U_1, D_1)$. A estratégia 1B escolhe como primeiro subproblema a ser pesquisado aquele com maior penalidade e a estratégia 1C escolhe aquela com menor penalidade.

A escolha do nó é feita usando a sugestão de Nenhauser e Wolsey [47], usando a regra da rápida melhoria

4.2.2 -) ESTRATÉGIAS 2A E 2B

Aqui a escolha da variável será por pseudo-custo. Na estratégia 2A a variável a ser ramificada será aquela que maximiza $\text{Max}(PCL_1, PCU_1)$ e o primeiro subproblema a ser pesquisado será aquele com maior degradação. Já estratégia na 2B, escolhe-se aquela variável que maximiza $\text{MIN}(PCL_1 f_1, PCU_1 (1-f_1))$. A escolha do nó é feita como nas estratégias anteriores.

4.2.3 -) ESTRATÉGIA 3

A estratégia 3 visa uma análise do valor da regra da rápida melhoria em termos da escolha do nó a ser pesquisado.

A variável a ser dicotomizada é escolhida como na estratégia

2B.

A escolha do nó é feita pela regra da melhor estimativa.

Assim os resultados obtidos poderão ser comparados com os da estratégia 2B, e as diferenças na escolha do nó analisadas.

Durante o estudo do sistema "Kanban" determinístico, observou-se certas características deste, e com elas construiu-se regras à priori que foram aplicadas na estratégia a seguir

4.2.4 -) ESTRATÉGIA 4

A escolha da variável a ser dicotomizada é realizada no conjunto das variáveis inteiras com valores fracionários usando a seguinte regra de prioridade. Seleciona-se as variáveis U_0^n do maior para o menor estágio. As variáveis X_t^n são ordenadas do menor para o maior estágio e em cada estágio do período 1 ao período T.

Da restrição (10) do modelo (2) nota-se que as variáveis \bar{U}_0^n dependem da produção do estágio sucessor. Portanto, optou-se por um ordenamento das variáveis U_0^n do estágio mais alto para o mais baixo e das variáveis X_t^n no sentido inverso.

Na tentativa de se obter soluções factíveis melhores adaptou-se o teste de factibilidade para ser usado em cada nó da árvore de "Branch and Bound".

A escolha do nó é como na estratégia 1A.

Os resultados obtidos através destas estratégias, bem como a análise dos mesmos encontra-se no próximo capítulo.

CAPÍTULO 5

APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS, ANÁLISES

5.1-) GERAÇÃO DOS TESTES COMPUTACIONAIS

Todos os programas utilizados neste trabalho foram criados em linguagem pascal e o equipamento utilizado foi o computador VAX.

Antes da aplicação do algoritmo "Branch and Bound", foi necessário criar um programa a fim de gerar o sistema de montagem de produção, onde os parâmetros são fornecidos via teclado ou gerados aleatoriamente.

É necessário esclarecer que este algoritmo utiliza um programa para resolução dos problemas de programação linear.

A criação de tal programa para sistemas de grande porte não era de nosso interesse. Pesquisou-se então quais os disponíveis, encontrou-se o N.A.G, o LINDO e o MINOS. Optou-se pelo MINOS pois, além de ser mais fácil de ser utilizado é o que melhor lida com problemas de instabilidade numérica, com matrizes esparsas

O MINOS é um sistema onde os dados e resultados são fornecidos via arquivo, não podendo ser adaptado ao programa como um procedimento. Estes arquivos de entrada, inicialmente serão os mesmos para todas as estratégias e criados pelo programa que gera o sistema de produção.

As árvores de produção utilizadas na geração dos testes

computacionais foram criadas a partir de árvores apresentadas por Afentakis^[50]. Já os parâmetros foram obtidos conforme descrito a seguir:

- Estágio/Período - valor fornecido via teclado

- Capacidade do "container" (α^n) - no início dos testes

este valor era fornecido via teclado, mas para facilitar estipulou-se que seu valor seria 100.

- Capacidade de produção (β_c^n) - calculada aleatoriamente através de um gerador randômico normal com média 650.

- Número de unidades do item n necessárias para fazer uma unidade do sucessor imediato ($e^{n, s(n)}$) - valor fornecido via teclado.

- Número de "containers" cheios do item n em I^n no fim do período 0 (V_0^n) - calculado aleatoriamente com média 25.

- Número de unidades do item n remanescentes em um "container" parcialmente cheio, no fim do período 0 (W_0^n) - calculado aleatoriamente com média $\alpha^n - 1$.

- ε - seu valor é introduzido via teclado e pode variar de 0 à $\min(1/\alpha^n)$.

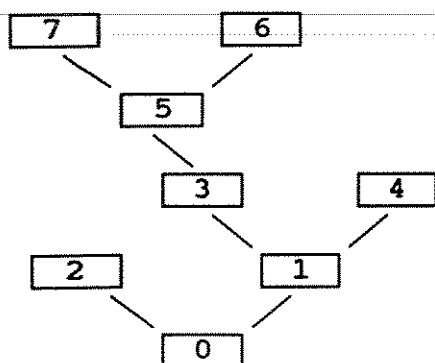
É necessário esclarecer que os parâmetros calculados aleatoriamente, tem a semente de geração obtida via teclado.

Os parâmetros necessários para obtenção do *modelo (3)* foram obtidos de maneira análoga ao *modelo (2)*, seguindo porém, as hipóteses relativas a este modelo.

Com estes valores é possível montar as restrições do modelo e através das estratégias propostas obter-se os resultados e as análises destes.

5.2-) TABELAS E RESULTADOS

Árvore de Produção 1:



Estágios (N): 7

Períodos (T): 5

Número de Variáveis: 42 (NT + N)

Número de Restrições: 70 (2NT)

ESTR	SOL. INI.	SOL. FIN.	TOT. DE ITER.	TOT. DE NÓS	NO ÓTIMO	TEMPO RODAGEM	NÓS NÃO SONDAD.
1A	196	193	1847	236	94	00:35:03.94	-
1B	196	193	4263	650	614	01:37:42.55	-
1C	196	193	1368	182	96	00:29:54.53	-
2A	196	193	2692	704	82	01:26:20.47	7
2B	196	196	5762	700	0	01:22:17.68	33
3	196	196	4918	704	0	01:24:50.49	28
4	196	194	2711	700	144	01:27:42.66	33

	SOLUÇÃO FINAL	TOT. DE ITER.	TEMPO RODAGEM
MODELO 3	196	18	00:00:10.63

Árvore de Produção 2:

O esquema é o mesmo da árvore de produção 1, o que mudou foi a semente de geração randômica do parâmetros.

Estágios (N): 7

Período (T): 5

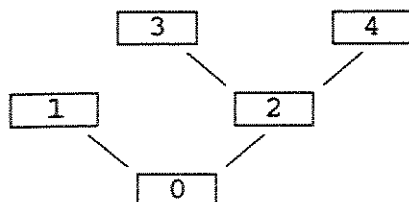
Número de Variáveis: 42 (NT + N)

Número de Restrições: 70 (2NT)

ESTR	SOL. INI.	SOL. FIN.	TOT. DE ITER.	TOT. DE NÓS	NO ÓTIMO	TEMPO RODAGEM	NÓS NÃO SONDA.
1A	212	209	1351	364	272	01:00:04.91	-
1B	212	209	1717	542	506	01:37:31.05	-
1C	212	209	1437	462	422	01:18:31.13	-
2A	212	212	2449	736	81	01:26:13.12	16
2B	212	212	2501	700	260	01:27:21.92	92
3	212	212	2501	700	186	01:18:02.96	92
4	212	209	1890	370	282	00:48:19.14	-

	SOLUÇÃO FINAL	TOT. DE ITER.	TEMPO RODAGEM
MODELO 3	244	5	00:00:10.43

Árvore de Produção 3:



Estágios (N): 4

Períodos (T): 9

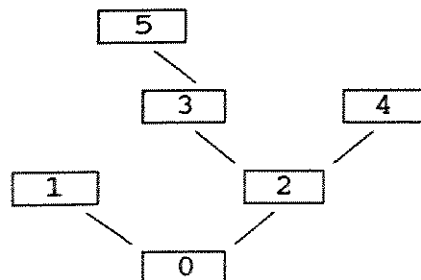
Número de Variáveis: 40 (NT + N)

Número de Restrições: 72 (2NT)

ESTR	SOL. INI.	SOL. FÍN.	TOT. DE ITER.	TOT. DE NÓ	NO ÓTIMO	TEMPO RODAGEM	NÓS NÃO SONDA.
1A	143	143	328	108	88	00:21:19.57	-
1B	143	143	390	120	100	00:26:23.30	-
1C	143	143	383	118	95	00:24:53.62	-
2A	143	143	424	184	115	00:31:08.98	-
2B	143	143	1144	740	78	01:32:20.06	52
3	143	143	1017	724	78	01:30:01.59	43
4	143	143	453	190	94	00:30:02.42	-

	SOLUÇÃO FINAL	TOT. DE ITER.	TEMPO RODAGEM
MODELO 3	148	3	00:00:10.53

Árvore de Produção 4:



Estágios (N): 5

Períodos (T): 9

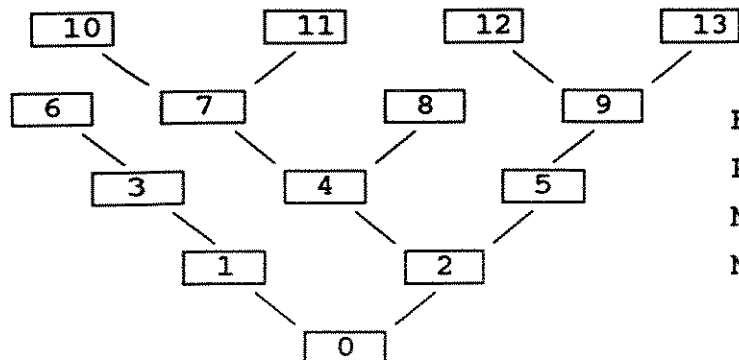
Número de Variáveis: 50 (NT + N)

Número de Restrições: 90 (2NT)

ESTR	SOL. INI.	SOL. FÍN.	TOT. DE ITER.	TOT. DE NÓS	NO ÓTIMO	TEMPO RODAGEM	NÓS NÃO SONDA.
1A	169	167	582	218	160	00:53:16.73	-
1B	169	167	754	322	98	01:11:45.52	-
<u>1C</u>	<u>169</u>	<u>167</u>	<u>689</u>	<u>236</u>	<u>90</u>	<u>01:03:03.61</u>	<u>-</u>
2A	169	167	886	598	181	01:34:53.76	-
2B	169	167	1519	714	98	01:45:18.21	58
3	169	167	1355	740	98	02:02:14.55	39
4	169	167	975	598	242	01:49:06.39	-

	SOLUÇÃO FINAL	TOT. DE ITER.	TEMPO RODAGEM
MODELO 3	169	3	00:00:11.88

Árvore de Produção 5:



Estágios (N): 13

Períodos (T): 12

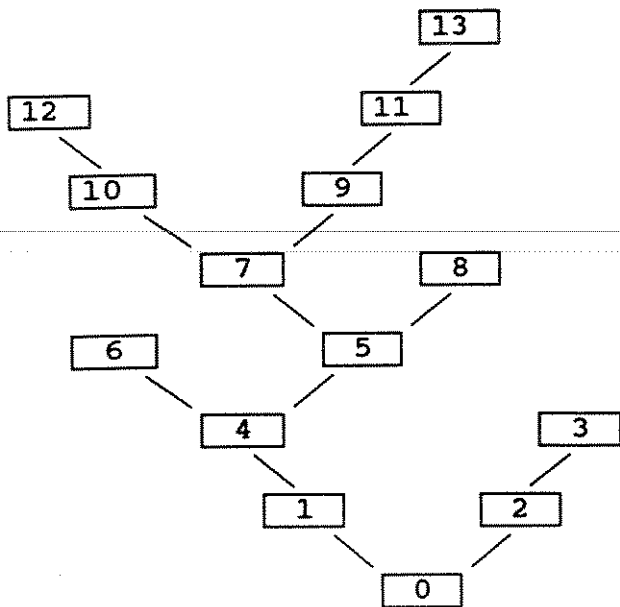
Número de Variáveis: 168 (NT + N)

Número de Restrições: 312 (2NT)

ESTR	SOL. INI.	SOL. FIN.	TOT. DE ITER.	TOT. DE NÓS	NO ÓTIMO	TEMPO RODAGEM	NÓS NÃO SONDAD.
1A	382	382	130	8	0	00:06:31.04	-
1B	382	382	379	24	0	00:29:24.31	-
1C	382	382	379	24	0	00:31:09.26	-
2A	382	382	4550	274	0	03:20:01.96	-
2B	382	382	7060	604	0	06:18:46.36	-
3	382	382	7077	606	0	06:29:44.36	-
4	382	382	364	22	0	00:13:25.72	-

	SOLUÇÃO FINAL	TOT. DE ITER.	TEMPO RODAGEM
MODELO 3	385	19	00:00:27.63

Árvore de Produção 6:



Estágios (N): 13

Períodos (T): 12

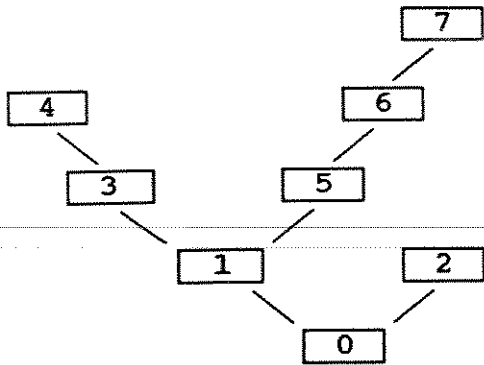
Número de Variáveis: 169 (NT + N)

Número de Restrições: 312 (2NT)

ESTR	SOL. INI.	SOL. FIN.	TOT. DE ITER.	TOT. DE NÓS	NO ÓTIMO	TEMPO RODAGEM	NÓS NÃO SONDA.
1A	428	428	157	8	0	00:11:35.98	-
1B	428	428	157	8	0	00:10:57.46	-
1C	428	428	289	12	0	00:21:40.81	-
2A	428	428	885	4	0	01:11:34.58	-
2B	428	428	885	4	0	01:04:10.01	-
3	428	428	885	4	0	00:50:01.19	-
4	428	428	429	24	0	00:32:15.24	-

	SOLUÇÃO FINAL	TOT. DE ITER.	TEMPO RODAGEM
MODELO 3	428	22	00:00:27.65

Árvore de Produção 7:



Estágios (N): 7

Períodos (T): 12

Número de Variáveis: 91 (NT + N)

Número de Restrições: 168 (2NT)

ESTR	SOL. INI.	SOL. FIN.	TOT. DE ITER.	TOT. DE NÓS	NO ÓTIMO	TEMPO RODAGEM	NÓS NÃO SONDA.
1A	241	237	2576	1060	510	02:30:16.21	-
1B	241	237	621	312	184	01:43:09.15	-
<u>1C</u>	<u>241</u>	<u>237</u>	<u>581</u>	<u>294</u>	<u>132</u>	<u>01:10:34.98</u>	<u>-</u>
2A	241	237	1260	820	545	05:16:38.88	-
2B	241	237	2436	2022	878	08:44:47.76	33
3	241	237	5716	5276	704	10:50:04.16	-
4	241	237	1184	510	194	01:34:47.70	-

	SOLUÇÃO FINAL	TOT. DE ITER.	TEMPO RODAGEM
MODELO 3	240	14	00:00:17.80

Árvore de Produção 8:

O esquema é o mesmo da árvore de produção 7, o que mudou foi a semente de geração randomica dos parâmetros.

Estágios (N): 7

Períodos (T): 12

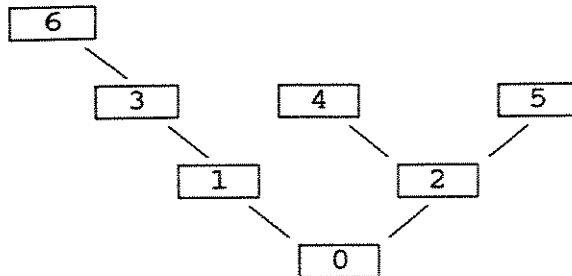
Número de Variáveis: 91 (NT + N)

Número de Restrições: 168 (2NT)

ESTR	SOL. INI.	SOL. FIN.	TOT. DE ITER.	TOT. DE NÓS	NO ÓTIMO	TEMPO RODAGEM	NÓS NÃO SONDAD.
1A	302	302	1593	400	0	03:32:27.35	22
1B	302	299	1371	400	356	03:09:18.61	26
<u>1C</u>	<u>302</u>	<u>298</u>	<u>1244</u>	<u>500</u>	<u>280</u>	<u>03:29:25.40</u>	<u>12</u>
2A	302	297	1144	484	341	02:28:14.10	17
2B	302	298	2543	406	380	02:20:47.72	87
3	302	298	2543	406	380	02:08:35.24	87
4	302	296	1198	400	280	02:42:22.91	18

	SOLUÇÃO FINAL	TOT. DE ITER.	TEMPO RODAGEM
MODELO 3	305	14	00:00:17.80

Árvore de Produção 9:



Estágios (N): 6

Períodos (T): 8

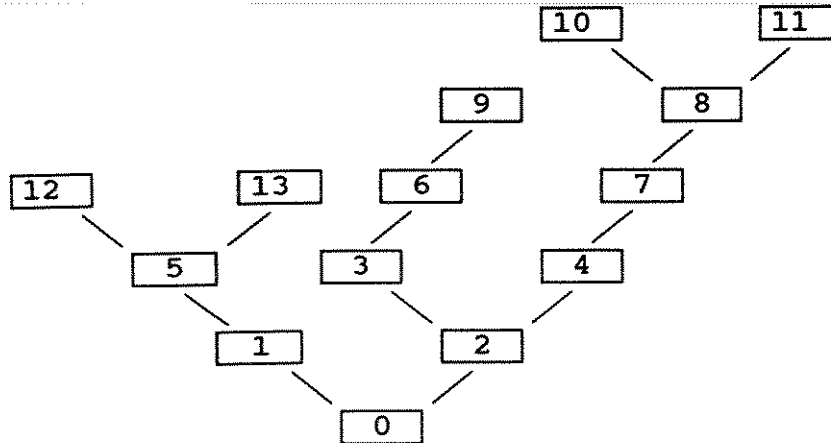
Número de Variáveis: 54 (NT + N)

Número de Restrições: 96 (2NT)

ESTR	SOL. INI.	SOL. FIN.	TOT. DE ITER.	TOT. DE NÓS	NO ÓTIMO	TEMPO RODAGEM	NÓS NÃO SONDAD.
1A	161	157	722	306	212	01:08:20.11	-
1B	161	157	1066	556	508	02:00:33.40	-
1C	161	157	651	294	206	01:05:52.22	-
2A	161	157	1427	704	403	01:56:29.76	71
2B	161	157	5076	730	494	01:50:29.33	258
3	161	157	4862	700	204	01:51:16.16	181
4	161	157	678	700	108	02:16:52.49	14

	SOLUÇÃO FINAL	TOT. DE ITER.	TEMPO RODAGEM
MODELO 3	<u>167</u>	<u>6</u>	<u>00:00:16.70</u>

Árvore de Produção 10:

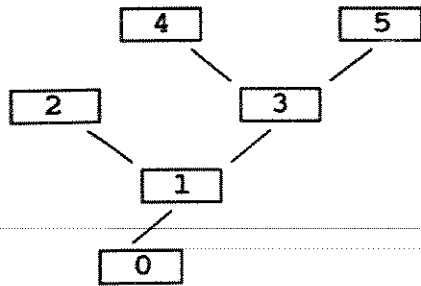


Estágios (N): 13
 Períodos (T): 12
 Número de Variáveis: 169 (NT +
 Número de Restrições: 312 (2NT)

ESTR	SOL. INI.	SOL. FIN.	TOT. DE ITER.	TOT. DE NÓS	NO ÓTIMO	TEMPO RODAGEM	NÓS NÃO SONDA.
1A	382	382	148	8	0	00:10:44.69	-
1B	382	382	413	24	0	00:34:28.36	-
1C	382	382	349	20	0	00:30:02.48	-
2A	382	382	845	4	0	00:46:42.48	-
2B	382	382	845	4	0	00:46:18.95	-
3	382	382	845	4	0	00:43:47.91	-
4	382	382	442	24	0	00:14:09.62	-

	SOLUÇÃO FINAL	TOT. DE ITER.	TEMPO RODAGEM
MODELO 3	<u>390</u>	<u>24</u>	<u>00:00:31.42</u>

Árvore de Produção 11:



Estágios (N): 5

Períodos (T): 9

Número de Variáveis: 50 (NT + N)

Número de Restrições: 90 (2NT)

ESTR	SOL. INI.	SOL. FIN.	TOT. DE ITER.	TOT. DE NÓS	NO ÓTIMO	TEMPO RODAGEM	NÓS NÃO SONDAD.
1A	168	163	554	380	312	01:41:21.46	-
1B	168	163	433	350	288	01:37:04.66	-
1C	168	163	431	262	191	01:16:03.72	-
2A	168	163	914	612	521	01:46:07.32	-
2B	168	163	753	552	552	01:38:54.91	-
3	168	163	753	552	432	01:31:18.33	-
4	168	163	616	380	380	01:17:32.23	-

	SOLUÇÃO FINAL	TOT. DE ITER.	TEMPO RODAGEM
MODELO 3	168	4	00:00:12.00

5.3-) ANÁLISE

Em termos de penalidade as três estratégias de escolha da variável: (1A) $\text{Max}(\text{Min}(U_i, D_i))$ e (1B) e 1(C) $\text{Max}(\text{Max}(U_i, D_i))$ obtiveram resultados interessantes:

- No número total de nós a estratégia 1A obteve resultados semelhantes ao da estratégia 1C. A que obteve os piores foi a 1B;

- Em relação a diferença entre o número de nós totais e o ótimo, a estratégia que apresentou os melhores resultados foi a 1B, mas a estratégia 1C obteve também resultados razoáveis. Os piores valores foram obtidos pela 1A;

- O tempo de rodagem é comparado aqui relativamente, devido ao fato do MINOS não utilizar reotimização. Os resultados aqui repetiram-se da mesma maneira como foram observados em relação ao número total de nós;

- Quanto a obtenção do nó ótimo, a melhor estratégia foi a 1C, mas a 1A também obteve bons valores.

Comparando estas estratégias em relação a penalidade, observa-se que as melhores foram a 1A e 1C, que tem em comum a decisão do nó a ser pesquisado primeiro, dado que a variável a ser ramificada foi determinada.

Com os pseudo-custos, observa-se que:

- A estratégia 2A $\text{Max}(\text{Max}(\text{PCL}_i, \text{PCU}_i))$ obteve melhores resultados em todos os itens comparados com a estratégia 2B $\text{Max}(\text{Min}(\text{PCL}_i f_i, \text{PCU}_i (1-f_i)))$;

- Estas estratégias de pseudo-custo são muito razoáveis em termos de obtenção do nó ótimo, porém são vagarosas para sondar o restante dos nós ativos.

Quanto a escolha da melhor regra para a escolha do nó, comparando as estratégias 2B (rápida melhoria) e 3 (melhor estimativa), observou-se:

- Nas árvores de produção 6, 8 e 10 as duas estratégias obtiveram os mesmos resultados, com exceção do tempo de rodagem onde, a estratégia 3 foi bem melhor;

- Na árvore de produção 11, ambas obtiveram o mesmo número total de nós e de iterações, porém a estratégia 3 obteve o nó ótimo mais rápido e com um tempo de rodagem menor;

- Nas outras árvores de produção os resultados entre as duas estratégias foram semelhantes ou a 3 foi melhor.

A estratégia 4 (escolha da variável por prioridades), apesar de não ter sido uma das melhores apresentou resultados bastante razoáveis. Sendo que na árvore de produção 8, foi ela que apresentou os melhores resultados.

O modelo relaxado 3 forneceu soluções boas. No entanto, somente na árvore de produção 7, o valor da solução é melhor que a obtida através do teste de factibilidade (solução inicial).

CAPÍTULO 6

CONCLUSÃO

Como na prática existe a necessidade de respostas rápidas para programar a produção, dado que as decisões são tomadas a cada turno, uma boa opção seria decidir entre os valores obtidos pelo modelo (3) e a solução inicial do modelo (2)

O objetivo deste trabalho foi aplicar e comparar diversas estratégias, bem como avaliar o grau de sub-otimalidade da solução fornecida pelo modelo (2).

Deve-se notar que a solução inicial é uma solução muito boa em relação a ótima. A razão disto é que o teste de factibilidade calcula $\sum_{r=1}^t \bar{X}_r^n \leq \sum_{r=1}^t X_r^n$ ($t=1, \dots, T$) (vide página 38), para qualquer $\langle X \rangle$ factível. Como o custo (C^n) foi considerado 1, a função objetivo ficou reduzida a $\min_{n=1}^N \sum U_0^n$. Assim com $\langle X \rangle$ obtido pelo teste de factibilidade e a restrição (10) do modelo (2) obtém-se o valor de \bar{U}_0 .

O uso de penalidades apresentou resultados bastante razoáveis. Embora a regra de $\text{Max}(\text{Max}(U_i, D_i))$, onde o nó a ser pesquisado primeiro será aquele com menor degradação (estratégia 1C), tenha se comportado um pouco melhor que a estratégia 1A, $\text{Max}(\text{Min}(U_i, D_i))$, esta também foi aceitável.

Percebeu-se que as regras de pseudo-custo possuem facilidades para chegar ao nó ótimo, porém possuem problemas no sentido de sondar os nós restantes do algoritmo.

Os tempos de rodagem podem ser considerados altos, mas isso foi devido ao MINOS. Apesar deste ser um programa muito bom para resolução de problemas de programação linear, é ruim para resolução de algoritmos de "Branch and Bound" por não executar reotimização. Assim a cada nó pesquisado um novo problema de programação linear tem que ser resolvido.

Trabalhos futuros seriam realizados no sentido de:

- utilizar uma nova regra para escolha do nó, a do menor limitante inferior, combinada com a melhor estratégia de escolha de variáveis em penalidades, em pseudo-custo e prioridades.

- desenvolver um modelo matemático para o sistema "Kanban" que inclua demanda externa para um item intermediário e tratamento de incertezas no modelo.

APÊNDICE A

- DEMONSTRAÇÕES -

Este Apêndice tem como objetivo apresentar a demonstração de todos os teoremas e afirmações citadas no capítulo 3. Deve-se ressaltar que o artigo de Bitran e Chang [34] contém somente a demonstração do teorema 2.

Descrição matemática do sistema "Kanban":

$$(1) \quad U_{t-1}^n + Y_{t-1}^n - X_t^n - U_t^n = 0$$

$$\left(U_t^n = U_{t-1}^n + Y_{t-1}^n - X_t^n \right)$$

$$(2) \quad V_{t-1}^n + X_t^n - Y_t^n - V_t^n = 0$$

$$\left(V_t^n = V_{t-1}^n + X_t^n - Y_t^n \right)$$

(3)

$$X_t^n = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } U_{t-1}^n + Y_{t-1}^n \\ \text{(b) } \beta_t^n \\ \text{(c) } \left[(\alpha^k V_{t-1}^k + W_{t-1}^k + \alpha^k X_t^k) / (e^{k,n} \alpha^n) \right] \text{ para} \\ \quad \text{todo } k \in P(n) \\ \text{(d) } Q^n - \sum_{r=1}^{t-1} X_r^n \end{array} \right.$$

$$(4) \alpha^k V_{t-1}^k + W_{t-1}^k + \alpha^k X_t^k \geq e^{k,0} \alpha^0 X_t^0 \quad \forall k \in P(0)$$

$$(5) \begin{cases} Y_t^n = \lceil (e^{n,s(n)} \alpha^{s(n)} X_t^{s(n)} - W_{t-1}^n) / \alpha^n \rceil \\ Y_0^n = 0 \end{cases}$$

$$(6) W_{t-1}^n + \alpha^n Y_t^n - e^{n,s(n)} \alpha^{s(n)} X_t^{s(n)} - W_t^n = 0$$

$$(7) U_0^n \text{ é não negativo e inteiro}$$

Modelo (1)

$$\text{modelo (1)} \begin{cases} \text{Min } \sum_{n=1}^N c^n (U_0^n + V_0^n + 1 - (1/\alpha^n)) & (8) \\ \text{s.a. (1) - (7)} \end{cases}$$

Teorema 1-Se $\langle U, V, W, X, Y \rangle$ satisfazem as restrições

de e (1) à (7) então:

(a) $U_t^n, Y_t^n, V_t^n, X_t^n$ e W_t^n são não negativos e inteiros;

PROVA:

Suponha que todas as variáveis foram determinadas até o período $t-1$ e que são inteiras e ≥ 0 .

$X_t^n \geq 0$ e inteiro (restrição 3)

U_t^n está determinado é inteiro e ≥ 0 e inteiro, pois

$$X_t^n \leq U_{t-1}^n + Y_{t-1}^n$$

Como $X_t^{s(n)} \geq 0$ e $0 \leq W_t^n \leq \alpha^n - 1$ (ver equação (c)) então $Y_t^n \geq 0$

e inteiro (restrição(5)). Da restrição (2) conclui-se que V_t^n é

inteiro. De (3) tem-se que:

$$X_t^{s(n)} e^{n,s(n)} \alpha^{s(n)} \leq \alpha^n V_{t-1}^n + W_{t-1}^n + \alpha^n X_t^n$$

$$(X_t^{s(n)} e^{n,s(n)} \alpha^{s(n)} - W_{t-1}^n) / \alpha^n \leq V_{t-1}^n + X_t^n$$

portanto

$$Y_t^n = \lceil (X_t^{s(n)} e^{n,s(n)} \alpha^{s(n)} - W_{t-1}^n) / \alpha^n \rceil \leq V_{t-1}^n + X_t^n$$

assim $V_t^n \geq 0$

Da restrição (5) $\alpha^n Y_t^n + W_{t-1}^n \geq e^{n,s(n)} \alpha^{s(n)}$. Portanto de

(7) W_t^n está determinado e é ≥ 0 . Será mostrado em (c) que W_t^n é inteiro e $0 \leq W_t^n \leq \alpha^n - 1$.

(b) $Y_t^n \leq V_{t-1}^n + X_t^n$

PROVA:

$$Y_t^n = V_{t-1}^n + X_t^n - V_t^n \leq V_{t-1}^n + X_t^n$$

(c) $W_t^n \leq \alpha^n - 1$

PROVA:

Da restrição (5) tem-se que:

$$Y_t^n = \lceil (e^{n,s(n)} \alpha^{s(n)} X_t^{s(n)} - W_{t-1}^n) / \alpha^n \rceil$$

suponha que

$$e^{n,s(n)} \alpha^{s(n)} X_t^{s(n)} - W_{t-1}^n / \alpha^n \text{ é inteiro}$$

então

$$\alpha^n Y_t^n = e^{n,s(n)} \alpha^{s(n)} X_t^{s(n)} - W_{t-1}^n$$

$$W_{t-1}^n + \alpha^n Y_t^n - e^{n, s(n)} \alpha^{s(n)} X_t^{s(n)} = 0$$

ou seja $W_t^n = 0$ (restrição 6)

Se $(e^{n, s(n)} \alpha^{s(n)} X_t^{s(n)} - W_{t-1}^n) / \alpha^n$, não é inteiro então

$$e^{n, s(n)} \alpha^{s(n)} X_t^{s(n)} - W_{t-1}^n = \alpha^n (Y_t^n - 1) + R$$

onde R é inteiro e $0 < R \leq \alpha^n - 1$.

Definindo $W_t^n \triangleq \alpha^n - R$, obtém-se

$$W_t^n = W_{t-1}^n + \alpha^n Y_t^n - e^{n, s(n)} X_t^{s(n)}, \quad 0 \leq W_t^n \leq \alpha^n - 1$$

$$(d) \quad U_0^n + V_0^n = U_t^n + V_t^n + Y_t^n$$

PROVA:

Somando as restrições (1) e (2) tem-se:

$$U_t^n + Y_t^n + V_t^n = U_{t-1}^n + Y_{t-1}^n + V_{t-1}^n$$

como $(Y_0^n = 0)$

$$U_1^n + Y_1^n + V_1^n = U_0^n + V_0^n$$

e portanto por indução

$$U_t^n + Y_t^n + V_t^n = U_0^n + V_0^n$$

$$(e) \quad \sum_{t=1}^T X_t^n = Q^n$$

PROVA: Primeira Parte: Provar que $\sum_{r=1}^t X_r^n \leq Q^n$

De (3) obtém-se que

$$X_t^n \leq Q^n - \sum_{r=1}^{t-1} X_r^n, \quad t = 1, \dots, T$$

portanto

$$\sum_{r=1}^T X_t^n \leq Q^n \quad (n = 1, \dots, N)$$

Segunda Parte: Provar que: $\sum_{r=1}^T X_t \geq Q^n$

Define-se $E^{n, s(n)} = (e^{n, s(n)} \alpha^{s(n)}) / \alpha^n$

É provado no Lema A.1 a seguir que as restrições (3c), (2) e

(6) implicam

$$\sum_{r=1}^T X_t^n \geq E^{n, s(n)} \sum_{r=1}^T X_t^{s(n)} - V_0^n - W_0^n / \alpha^n \quad (*)$$

Se $s(n) = 0$ então

$$\sum_{r=1}^T X_t^n \geq E^{n, 0} Q^0 - V_0^n - W_0^n / \alpha^n$$

Com X_t^n é inteiro não negativo tem-se que:

$$\sum_{r=1}^T X_t^n \geq Q^n$$

portanto $\sum_{r=1}^T X_t = Q^n$, $\forall n \in P(0)$

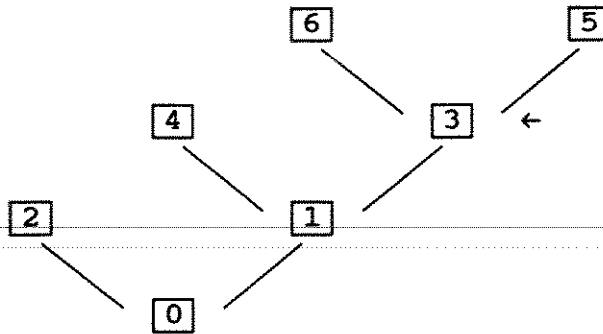
Usando indução na árvore que representa a estrutura de montagem, suponha que $\sum_{r=1}^T X_t^{s(n)} = Q^{s(n)}$, $\forall n \in P(0)$

Então de (*) $\sum_{r=1}^T X_t^n \geq E^{n, s(n)} Q^{s(n)} V_0^n - W_0^n / \alpha^n$ e

portanto $\sum_{r=1}^T X_t^n \geq Q^n$

As Variáveis de Decisão U_0^n : Será ilustrado através de um exemplo que uma vez que U_0^n assume valores específicos então todas as variáveis em (1)-(7) são unicamente determinadas.

Dada a árvore de produção:



O símbolo \lfloor significa que o valor da variável é conhecido.

$n=3, t=1$

$$1) \lfloor U_0^3 \rfloor + \lfloor Y_0^3 \rfloor - X_1^3 - U_1^3 = 0$$

$$2) \lfloor V_0^3 \rfloor + X_1^3 - \uparrow Y_1^3 - \uparrow V_1^3 = 0$$

$$3) X_1^3 = \min \left[\begin{array}{l} \uparrow \lfloor U_0^3 \rfloor + \lfloor Y_0^3 \rfloor \\ \uparrow \lfloor \beta_1^3 \rfloor \end{array} \right]$$

$$K = 6, 5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lfloor \alpha^6 V_0^6 \rfloor + \lfloor W_0^6 \rfloor + \alpha^6 \lfloor X_1^6 \rfloor \rfloor / \lfloor e^{6,3} \alpha^3 \rfloor \\ \uparrow \\ \lfloor \alpha^5 V_0^5 \rfloor + \lfloor W_0^5 \rfloor + \alpha^5 \lfloor X_1^5 \rfloor \rfloor / \lfloor e^{5,3} \alpha^3 \rfloor \\ \uparrow \\ \lfloor Q^3 \rfloor \end{array} \right]$$

$$5) Y_1^3 = \lceil \lfloor e^{3,1} \alpha^1 \rfloor \lfloor X_1^1 \rfloor - \lfloor W_0^3 \rfloor \rfloor / \lfloor \alpha^3 \rfloor$$

\uparrow

$$6) \lfloor W_0^3 \rfloor + \lfloor \alpha^3 Y_1^3 \rfloor - \lfloor e^{3,1} \alpha^1 X_1^1 \rfloor - \lfloor W_1^3 \rfloor = 0$$

Portanto para determinar as variáveis para $n=3$ e $t=1$

necessário determinar X_1^6, X_1^5 e X_1^1

$n=6, t=1$

$$1) \underbrace{U_0^6} + \underbrace{Y_0^6} - X_1^6 - U_1^6 = 0$$

$$2) \underbrace{V_0^6} + X_1^6 - \underbrace{Y_1^6} - V_1^6 = 0$$

$$3) X_1^6 = \min \left[\begin{array}{l} \underbrace{U_0^6} + \underbrace{Y_0^6} \\ \underbrace{\beta_1^6} \\ \text{e estados precedentes} \\ \underbrace{Q^6} \end{array} \right]$$

Assim obtém-se o valor de X_1^6 e de modo análogo X_1^5 . Com esses valores volta-se para $n=3$ e calcula-se o valor de X_1^3 não precisando necessariamente calcular as outras variáveis para $n=6$ e $n=5$. Mas como esses valores serão necessários para $t=2$ e $n=3$ eles serão calculados.

$$5) Y_1^6 = \left[\left(\underbrace{e^{6,3} \alpha^1}_{\uparrow L \text{ acabou de ser calculado}} : \underbrace{X_1^3} : - \underbrace{W_0^6} \right) / \underbrace{\alpha^6} \right]$$

$\uparrow L$ acabou de ser calculado

$$6) \underbrace{W_0^6} + \underbrace{\alpha^6 Y_1^6} - \underbrace{e^{6,3} \alpha^3 X_1^3} - W_1^6 = 0$$

\uparrow

Portanto para $t=1$ e $n=6$ obtém-se o valor de todas as variáveis e de modo idêntico para $t=1$ e $n=5$.

Porém, para se obter todos os valores das variáveis de $n=3$ é necessário, ainda, o valor de X_1^1 .

$n=1, t=1$

Aqui, como para $n=6$, poder-se-ia calcular só o valor de X_1^1 , mas como os outros valores serão necessários para o próximo período, eles serão calculados.

$$1) \underbrace{U_0^1} + \underbrace{Y_0^1} - X_1^1 - U_1^1 = 0$$

$\uparrow \quad \uparrow$

$$2) \underbrace{V_0^1} + \underbrace{X_1^1} - \underbrace{Y_1^1} - \underbrace{V_1^1} = 0$$

$$3) X_1^1 = \min \left[\begin{array}{l} \underbrace{U_0^1} + \underbrace{Y_0^1} \\ \underbrace{\beta_1^1} \\ K=3,4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\underbrace{\alpha^3 V_0^3} + \underbrace{W_0^3} + \underbrace{\alpha^3 X_1^3} \right) / \underbrace{e^{3,1} \alpha^3} \\ \left(\underbrace{\alpha^4 V_0^4} + \underbrace{W_0^4} + \underbrace{\alpha^4 X_1^4} \right) / \underbrace{e^{4,1} \alpha^4} \end{array} \right] \\ \underbrace{Q^1} \end{array} \right]$$

$$5) Y_1^1 = \left[\left(\underbrace{e^{1,0} \alpha^0 X_1^0} - \underbrace{W_0^1} \right) / \underbrace{\alpha^1} \right]$$

$$6) \underbrace{W_0^1} + \underbrace{\alpha^1 Y_1^1} - \underbrace{e^{1,0} \alpha^0 X_1^0} - \underbrace{W_1^1} = 0$$

Portanto para se obter o valor de X_1^1 é necessário o valor de

X_1^4 .

n=4, t=1

$$1) \underbrace{U_0^4} + \underbrace{Y_0^4} - \underbrace{X_1^4} - \underbrace{U_1^4} = 0$$

$$2) \underbrace{V_0^4} + \underbrace{X_1^4} - \underbrace{Y_1^4} - \underbrace{V_1^4} = 0$$

$$3) X_1^4 = \min \left[\begin{array}{l} \underbrace{U_0^4} + \underbrace{Y_0^4} \\ \underbrace{\beta_1^4} \\ \notin \text{ estados precedentes} \\ \underbrace{Q^4} \end{array} \right]$$

$$5) Y_1^4 = \left[\left(\underbrace{e^{4,1} \alpha^1} \cdot \underbrace{X_1^1} - \underbrace{W_0^4} \right) / \underbrace{\alpha^4} \right]$$

$$6) \underbrace{W_0^4} + \underbrace{\alpha^4 Y_1^4} - \underbrace{e^{4,1} \alpha^1 X_1^1} - W_1^4 = 0$$

↑

Portanto, agora com todos os valores de n=4, volta-se para n=1 e termina-se o calculo das variáveis neste estágio e finalmente voltando para n=3 calcula-se os valores restantes.

n=3, t=2

$$1) \underbrace{U_1^3} + \underbrace{Y_1^3} - X_2^3 - U_2^3 = 0$$

$$2) \underbrace{V_1^3} + X_2^3 - \underbrace{Y_2^3} - \underbrace{V_2^3} = 0$$

$$3) X_2^3 = \min \left[\begin{array}{l} \underbrace{U_1^3} + \underbrace{Y_1^3} \\ \underbrace{\beta_2^3} \\ K = 6,5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\underbrace{\alpha^6 V_1^6} + \underbrace{W_1^6} + \alpha^6 \underbrace{X_2^6} \right) / \underbrace{e^{6,3} \alpha^3} \\ \left(\underbrace{\alpha^5 V_1^5} + \underbrace{W_1^5} + \alpha^5 \underbrace{X_2^5} \right) / \underbrace{e^{5,3} \alpha^3} \end{array} \right] \\ \underbrace{Q^3} - \underbrace{X_1^3} \end{array} \right]$$

$$5) Y_2^3 = \left[\left(\underbrace{e^{3,1} \alpha^1} \underbrace{X_2^1} - \underbrace{W_1^3} \right) / \underbrace{\alpha^3} \right]$$

$$6) \underbrace{W_1^3} + \underbrace{\alpha^3 Y_2^3} - \underbrace{e^{3,1} \alpha^1 X_2^1} - W_2^3 = 0$$

n=6, t=2 (ídem para n=5, t=2)

$$1) \underbrace{U_1^6} + \underbrace{Y_1^6} - X_2^6 - U_2^6 = 0$$

$$2) \underbrace{V_1^6} + X_2^6 - \underbrace{Y_2^6} - \underbrace{V_2^6} = 0$$

$$3) X_2^6 = \min \begin{cases} \underline{U}_1^6 + \underline{Y}_1^6 \\ \underline{\beta}_2^6 \\ \leftarrow \text{estados precedentes} \\ \underline{Q}_1^6 - \underline{X}_1^6 \end{cases}$$

Com X_2^6 e X_2^5 volta-se para $n=3$ e calcula-se X_2^3 e volta-se

para $n=6$ e 5 para calcular os valores restantes destes estágios.

$$5) Y_2^6 = \lceil (\underline{e}^{6,3} \alpha^1 \overline{X}_2^3 - \underline{W}_1^6) / \underline{\alpha}^6 \rceil$$

↑ L acabou de ser calculado

$$6) \underline{W}_1^6 + \alpha^6 \underline{Y}_2^6 - \underline{e}^{6,3} \alpha^3 \underline{X}_2^3 - \underline{W}_2^6 = 0$$

↑

$n=1, t=2$

$$1) \underline{U}_1^1 + \underline{Y}_1^3 - \underline{X}_2^1 - \underline{U}_2^1 = 0$$

$$2) \underline{V}_1^1 + \underline{X}_2^1 - \underline{Y}_2^1 - \underline{V}_2^1 = 0$$

$$3) X_2^1 = \min \begin{cases} \underline{U}_2^1 + \underline{Y}_2^1 \\ \underline{\beta}_2^1 \\ K=3,4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \underline{L} (\underline{\alpha}^3 \underline{V}_1^3 + \underline{W}_1^3 + \underline{\alpha}^3 \underline{X}_2^3) / \underline{e}^{3,1} \underline{\alpha}^3 \\ \underline{L} (\underline{\alpha}^4 \underline{V}_1^4 + \underline{W}_1^4 + \underline{\alpha}^4 \underline{X}_2^4) / \underline{e}^{4,1} \underline{\alpha}^4 \end{array} \right] \\ \underline{Q}_1^1 - \underline{X}_1^1 \end{cases}$$

↑

$$5) Y_2^1 = \lceil (\underline{e}^{1,0} \alpha^0 \underline{X}_2^0 - \underline{W}_1^1) / \underline{\alpha}^1 \rceil$$

$$6) \underbrace{W_1^1} + \underbrace{\alpha^1 Y_2^1} - \underbrace{e^{1,0} \alpha^0 X_2^0} - W_2^1 = 0$$

↑

n=4, t=2

$$1) \underbrace{U_1^4} + \underbrace{Y_1^4} - X_2^4 - U_2^4 = 0$$

$$2) \underbrace{V_1^4} + X_2^4 - \underbrace{Y_2^4} - \underbrace{V_2^4} = 0$$

$$3) X_2^4 = \min \begin{cases} \underbrace{U_1^4} + \underbrace{Y_1^4} \\ \underbrace{\beta_2^4} \\ \leftarrow \text{estados precedentes} \\ \underbrace{Q_1^4} - \underbrace{X_1^4} \end{cases}$$

$$5) Y_2^4 = \lceil (\underbrace{e^{4,1} \alpha^1} : \underbrace{X_2^1} : - \underbrace{W_1^4}) / \underbrace{\alpha^4} \rceil$$

↑ L acabou de ser calculado

$$6) \underbrace{W_1^4} + \underbrace{\alpha^4 Y_2^4} - \underbrace{e^{4,1} \alpha^1 X_2^1} - W_2^4 = 0$$

↑

Com todas as variáveis de n=4 calculadas volta-se para n=1 e

depois para n=3.

n=3, t=3

$$1) \underbrace{U_2^3} + \underbrace{Y_2^3} - X_3^3 - U_3^3 = 0$$

$$2) \underbrace{V_2^3} + X_3^3 - \underbrace{Y_3^3} - \underbrace{V_3^3} = 0$$

↑ ↑ ↑

$$3) X_3^3 = \min \left[\begin{array}{l} \underline{U}_2^3 + \underline{Y}_2^3 \\ \underline{\beta}_3^3 \\ K=6,5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (\underline{\alpha}^6 \underline{V}_2^6 + \underline{W}_2^6 + \underline{\alpha}^6 \underline{X}_3^6) / \underline{e}^{6,3} \underline{\alpha}^3 \\ \uparrow \\ (\underline{\alpha}^5 \underline{V}_2^5 + \underline{W}_2^5 + \underline{\alpha}^5 \underline{X}_3^5) / \underline{e}^{5,3} \underline{\alpha}^3 \\ \uparrow \end{array} \right] \\ \underline{Q}^3 - (\underline{X}_1^3 + \underline{X}_2^3) \end{array} \right]$$

$$5) Y_3^3 = \left[(\underline{e}^{3,1} \underline{\alpha}^1 \underline{X}_3^1 - \underline{W}_2^3) / \underline{\alpha}^3 \right]$$

↑

$$6) \underline{W}_2^3 + \underline{\alpha}^3 \underline{Y}_3^3 - \underline{e}^{3,1} \underline{\alpha}^1 \underline{X}_3^1 - \underline{W}_3^3 = 0$$

↑ ↑ ↑

n=6, t=2 (idem para n=5, t=3)

$$1) \underline{U}_2^6 + \underline{Y}_2^6 - \underline{X}_3^6 - \underline{U}_3^6 = 0$$

↑ ↑

$$2) \underline{V}_2^6 + \underline{X}_3^6 - \underline{Y}_3^6 - \underline{V}_3^6 = 0$$

↑ ↑ ↑

$$3) X_3^6 = \min \left[\begin{array}{l} \underline{U}_2^6 + \underline{Y}_2^6 \\ \underline{\beta}_3^6 \\ \neq \text{ estados precedentes} \\ \underline{Q}^6 - (\underline{X}_1^6 + \underline{X}_2^6) \end{array} \right]$$

Com X_3^6 e X_3^5 volta-se para n=3 e calcula-se X_3^3 e volta-se

para n=6 e 5 para calcular os valores restantes destes estágios.

$$5) Y_3^6 = \left[(\underline{e}^{6,3} \underline{\alpha}^1 \overline{\underline{X}_3^3} - \underline{W}_2^6) / \underline{\alpha}^6 \right]$$

↑ L acabou de ser calculado

$$6) \underbrace{W_2^6} + \underbrace{\alpha^6 Y_3^6} - \underbrace{e^{6,3} \alpha^3 X_3^3} - W_3^6 = 0$$

↑

n=1, t=3

$$1) \underbrace{U_2^1} + \underbrace{Y_2^3} - X_3^1 - U_3^1 = 0$$

$$2) \underbrace{V_2^1} + \underbrace{X_3^1} - \underbrace{Y_3^1} - \underbrace{V_3^1} = 0$$

$$3) X_3^1 = \min \left[\begin{array}{l} \underbrace{U_3^1} + \underbrace{Y_3^1} \\ \underbrace{\beta_3^1} \\ K=3,4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\underbrace{(\alpha^3 V_2^3 + W_2^3 + \alpha^3 X_3^3)} / \underbrace{e^{3,1} \alpha^3} \right] \\ \left[\underbrace{(\alpha^4 V_2^4 + W_2^4 + \alpha^4 X_3^4)} / \underbrace{e^{4,1} \alpha^4} \right] \end{array} \right] \\ \underbrace{Q^1} - \underbrace{(X_1^1 + X_2^1)} \end{array} \right]$$

$$5) Y_2^1 = \left[\left(\underbrace{e^{1,0} \alpha^0 X_3^0} - \underbrace{W_2^1} \right) / \underbrace{\alpha^1} \right]$$

$$6) \underbrace{W_2^1} + \underbrace{\alpha^1 Y_3^1} - \underbrace{e^{1,0} \alpha^0 X_3^0} - W_3^1 = 0$$

↑

n=4, t=3

$$1) \underbrace{U_2^4} + \underbrace{Y_2^4} - X_3^4 - U_3^4 = 0$$

$$2) \underbrace{V_2^4} + \underbrace{X_3^4} - \underbrace{Y_3^4} - \underbrace{V_3^4} = 0$$

$$3) X_3^4 = \min \left[\begin{array}{l} \underbrace{U_2^4} + \underbrace{Y_2^4} \\ \underbrace{\beta_3^4} \\ \notin \text{ estados precedentes} \\ \underbrace{Q^4} - \underbrace{(X_1^4 + X_2^4)} \end{array} \right]$$

$$5) Y_3^4 = \left[\left(\underbrace{e^{4,1}\alpha^1}_{\text{L}} : \overline{X_3^1} - \underbrace{W_2^4} \right) / \underbrace{\alpha^4} \right]$$

↑ L acabou de ser calculado

$$6) \underbrace{W_2^4} + \underbrace{\alpha^4 Y_3^4} - \underbrace{e^{4,1}\alpha^1 X_3^1} - \underbrace{W_3^4} = 0$$

↑

Com todas as variáveis de n=4 calculadas volta-se para n=1 e depois para n=3.

Para os outros estágios, aqui não mencionados o cálculo é análogo

Modelo (2)

$$\begin{array}{l} \text{Min (8)} \\ \text{s.a } (W_0^n/\alpha^n) + V_0^n + \sum_{r=1}^t X_r^n - E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^t X_r^{s(n)} \geq 0 \quad (9) \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad n=1,\dots,N; t=1,\dots,T \\ \text{modelo } \left[\begin{array}{l} U_0^n - \sum_{r=1}^t X_r^n + E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^{t-1} X_r^{s(n)} - (W_0^n/\alpha^n) + (1-\epsilon) \geq 0 \quad (10) \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad n=1,\dots,N; t=1,\dots,T \\ X_t^n \in \{ 0,1,\dots,\beta_t^n \} \quad (11) \quad n=1,\dots,N; t=1,\dots,T \\ U_0^n \in \{ 0,1,\dots \} \quad (12) \quad n=1,\dots,N \end{array} \right. \end{array}$$

Teorema 2- O modelo (1) é factível se e somente se o modelo (2) é factível. Os dois modelos tem o mesmo conjunto de soluções parciais factíveis $\langle U_0 \rangle$, o mesmo conjunto de soluções parciais ótimas $\langle U_0 \rangle$ e o mesmo valor ótimo.

PROVA: Segue diretamente do Lema A.1 e A.2

Seja 3' e 7' respectivamente para n=1,...,N e t=1,...,T o conjunto de expressões derivadas da restrição (3) com inequação e pela extensão da condição de integralidade para X_t^n

Lema A.1 - Se $\langle U, V, X, W, Y \rangle$ satisfaz (1), (2), (3'),

(4), (5), (6), (7'), então $\langle U_0, X \rangle$ satisfaz (9)-(12). Se $\langle U_0, X \rangle$ satisfaz de (9)-(12), então $\langle U_0 \rangle$ é uma solução parcial factível para (1), (2), (3'), (4), (5), (6), (7').

PROVA:

Seja $\langle U, V, X, W, Y \rangle$ satisfaz (1), (2), (3'), (4), (5), (6), (7'). De (2), (3') e (6) obtém-se:

$$\begin{aligned} W_{t-1}^n + \alpha^n Y_t^n - e^{n,s(n)} \alpha^{s(n)} X_t^{s(n)} - W_t^n &= 0 \\ e^{n,s(n)} \alpha^{s(n)} X_t^{s(n)} &= W_{t-1}^n - W_t^n + \alpha^n Y_t^n \\ &= W_{t-1}^n - W_t^n + \alpha^n (V_{t-1}^n + X_t^n - V_t^n) \\ &\leq W_{t-1}^n + \alpha^n V_{t-1}^n + \alpha^n X_t^n \end{aligned}$$

Pela recursividade da restrição (2) e (3), obtém-se que:

$$\begin{aligned} V_t^n &= V_0^n + \sum_{r=1}^t X_r^n - \sum_{r=1}^t Y_r^n \\ W_t^n &= W_0^n + \alpha^n \sum_{r=1}^t Y_r^n - e^{n,s(n)} \alpha^{s(n)} \sum_{r=1}^t X_r^{s(n)} \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} e^{n,s(n)} \alpha^{s(n)} X_t^{s(n)} &\leq W_0^n + \alpha^n \sum_{r=1}^{t-1} Y_r^n - e^{n,s(n)} \alpha^{s(n)} \sum_{r=1}^{t-1} X_r^{s(n)} + \alpha^n (V_0^n \\ &\quad + \sum_{r=1}^{t-1} X_r^n - \sum_{r=1}^{t-1} Y_r^n) + \alpha^n X_t^n \\ &\leq W_0^n - e^{n,s(n)} \alpha^{s(n)} \sum_{r=1}^{t-1} X_r^{s(n)} + \alpha^n V_0^n + \alpha^n \sum_{r=1}^t X_r^n \\ &\quad + \alpha^n \sum_{r=1}^t X_r^n + W_0^n - e^{n,s(n)} \alpha^{s(n)} \sum_{r=1}^{t-1} X_r^{s(n)} \geq 0 \end{aligned}$$

$$V_0^n + \sum_{r=1}^t X_r^n + (W_0^n/\alpha^n) - (e^{n,s(n)} \alpha^{s(n)}/\alpha^n) \sum_{r=1}^{t-1} X_r^{s(n)} \geq 0$$

$$(W_0^n/\alpha^n) + V_0^n + \sum_{r=1}^t X_r^n - E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^{t-1} X_r^{s(n)} \geq 0$$

portanto $\langle U_0, X \rangle$ satisfaz (9).

De (5) e (6) obtém-se que:

$$\begin{aligned} Y_t^n &= \left[(e^{n,s(n)} \alpha^{s(n)}/\alpha^n) X_r^{s(n)} - W_{t-1}^n/\alpha^n \right] \\ &= \left[E^{n,s(n)} X_r^{s(n)} - W_0^n/\alpha^n + E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^{t-1} X_r^{s(n)} - \sum_{r=1}^{t-1} Y_r^n \right] \\ &= \left[E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^t X_r^{s(n)} - W_0^n/\alpha^n \right] - \sum_{r=1}^{t-1} Y_r^n \end{aligned}$$

assim

$$\sum_{r=1}^t Y_r^n = \left[E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^t X_r^{s(n)} - W_0^n/\alpha^n \right]$$

De (1) por recursividade e (3') obtém-se que:

$$U_t^n = U_0^n - \sum_{r=1}^t X_r^n + \sum_{r=1}^{t-1} Y_r^n \geq 0$$

então

$$\begin{aligned} U_0^n - \sum_{r=1}^t X_r^n + E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^{t-1} X_r^{s(n)} - W_0^n/\alpha^n + 1 - \varepsilon \\ \geq U_0^n - \sum_{r=1}^t X_r^n + \left[E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^{t-1} X_r^{s(n)} - W_0^n/\alpha^n \right] \end{aligned}$$

$$= U_0^n - \sum_{r=1}^t X_r^n + \sum_{r=1}^t Y_r^n \geq 0$$

Portanto $\langle U_0, X \rangle$ satisfaz (9). A primeira metade do Lema A1 está provada.

Seja $\langle U_0, X \rangle$ tal que satisfaz (9)-(12). Define-se $\langle X \rangle$

como:

$$X_1^n = \min \{ \bar{X}_1^n, Q^n \} \text{ e } X_t^n = \min \left\{ \sum_{r=1}^t \bar{X}_r^n, Q^n \right\} - \min \left\{ \sum_{r=1}^{t-1} \bar{X}_r^n, Q^n \right\}$$

Da definição de $\langle X \rangle$ segue que:

$$\sum_{r=1}^t X_r^n = \min \left\{ \sum_{r=1}^t \bar{X}_r^n, Q^n \right\}, \text{ para } t=1, \dots, T$$

e em particular $\sum_{r=1}^t X_r^n \leq Q^n$.

Mostra-se agora que $\langle U_0, X \rangle$ também satisfaz (9)-(12).

Da definição de Q^n obtém-se que:

$$Q^n = \max \left\{ 0, \left[E^{n,s(n)} Q^{s(n)} - V_0^n - (W_0^n/\alpha^n) \right] \right\} \geq 0$$

$$\left[E^{n,s(n)} Q^{s(n)} - V_0^n - (W_0^n/\alpha^n) \right] \geq E^{n,s(n)} Q^{s(n)} - V_0^n - (W_0^n/\alpha^n) \geq 0$$

Desde que $\langle U_0, \bar{X} \rangle$ satisfaça (9)

$$(W_0^n/\alpha^n) + V_0^n + \sum_{r=1}^t X_r^n - E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^t X_r^{s(n)} \geq 0$$

$$(W_0^n/\alpha^n) + V_0^n + \min \left\{ \sum_{r=1}^t \bar{X}_r^n, Q^n \right\} - E^{n,s(n)} \min \left\{ \sum_{r=1}^t \bar{X}_r^{s(n)}, Q^{s(n)} \right\} \geq 0$$

portanto, $\langle U_0, X \rangle$ satisfaz (9)

Segue também da definição de Q^n e ε que:

$$0 < \varepsilon < \min \{ 1/\alpha^n \} \leq 1 \text{ para } n=1, \dots, N$$

$$Q^n \geq [E^{n,s(n)} Q^{s(n)} - V_0^n - (W_0^n/\alpha^n)] \geq E^{n,s(n)} Q^{s(n)} - V_0^n - (W_0^n/\alpha^n)$$

$$Q^n - 1 + \varepsilon < E^{n,s(n)} Q^{s(n)} - V_0^n - (W_0^n/\alpha^n)$$

$$- Q^n + E^{n,s(n)} Q^{s(n)} - V_0^n - (W_0^n/\alpha^n) + 1 - \varepsilon > 0$$

$$- Q^n + E^{n,s(n)} Q^{s(n)} - (W_0^n/\alpha^n) + 1 - \varepsilon > 0$$

Desde que $\langle U_0, X \rangle$ satisfaça (9) (12)

$$U_0^n - \sum_{r=1}^t X_t^n + E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^{t-1} X_r^{s(n)} - W_0^n/\alpha^n + 1 - \varepsilon$$

$$U_0^n - \min\left\{ \sum_{r=1}^t X_t^n, Q^n \right\} + E^{n,s(n)} \min\left\{ \sum_{r=1}^{t-1} X_r^{s(n)}, Q^{s(n)} \right\} - W_0^n/\alpha^n + 1 - \varepsilon \geq 0$$

portanto $\langle U_0, X \rangle$ satisfaz (10). Pela própria construção de $\langle X \rangle$, satisfaz (9)-(12). Falta demonstrar que $\langle U_0, X \rangle$ é uma solução parcialmente factível para (1)-(2), (3'), (4)-(6), (7'). para construir um complemento para $\langle U_0, X \rangle$, seja U_t^n, V_t^n, Y_t^n para $n=1, \dots, N$ e $t=1, \dots, T$ definidos de acordo com (1)-(5) e (5)-(6).

Se

$$U_{t-1}^n + Y_{t-1}^n < X_t^n$$

então

$$U_{t-1}^n + Y_{t-1}^n - X_t^n \leq -1$$

desde que todas as variáveis envolvidas sejam inteiras.

Como resultado, obtém-se que:

$$U_t^n = U_{t-1}^n + Y_{t-1}^n - X_t^n$$

e pela recursividade,

$$U_t^n = U_0^n + \sum_{r=1}^{t-1} Y_r^n - \sum_{r=1}^t X_r^n$$

como

$$\sum_{r=1}^{t-1} Y_r^n = \lceil E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^{t-1} X_r^{s(n)} - W_0^n / \alpha^n \rceil$$

então

$$U_t^n = U_0^n + \lceil E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^{t-1} X_r^{s(n)} - W_0^n / \alpha^n \rceil - \sum_{r=1}^t X_r^n < -1$$

como

$$\lceil E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^{t-1} X_r^{s(n)} - W_0^n / \alpha^n \rceil \geq E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^{t-1} X_r^{s(n)} - W_0^n / \alpha^n$$

então

$$U_0^n + E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^{t-1} X_r^{s(n)} - W_0^n / \alpha^n - \sum_{r=1}^t X_r^n \leq U_0^n + \lceil E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^{t-1} X_r^{s(n)} - W_0^n / \alpha^n \rceil - \sum_{r=1}^t X_r^n$$

$$U_0^n + E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^{t-1} X_r^{s(n)} - W_0^n / \alpha^n - \sum_{r=1}^t X_r^n + 1 - \varepsilon$$

$$\leq U_0^n + \lceil E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^{t-1} X_r^{s(n)} - W_0^n / \alpha^n \rceil - \sum_{r=1}^t X_r^n + 1 - \varepsilon$$

$$= U_0^n + \sum_{r=1}^{t-1} Y_r^n - \sum_{r=1}^t X_r^n + 1 - \varepsilon = U_t^n + 1 - \varepsilon$$

$$= U_{t-1}^n + Y_{t-1}^n - X_t^n + 1 - \varepsilon \leq -1 + 1 - \varepsilon = -\varepsilon < 0$$

A contradição leva que $U_{t-1}^n + Y_{t-1}^n \geq X_t^n$

Nota-se que $\langle X \rangle$ construído satisfaz as restrições (3.b) e (3.d). As restrições (3.c) e (4) são implicadas por (9) (ver primeira parte da prova), assim $\langle U, V, X, W, Y \rangle$ satisfaz (3') e (4).

Portanto, a segunda parte do Lema está provada

Lema A.2: Se $\langle U, V, X, W, Y \rangle$ satisfaz (1), (2), (3'), (4), (5), (6), (7'), então $\langle U_0^n \rangle$ é uma solução parcial factível para (1)-(7).

PROVA: A prova deste lema é imediata e decorre do fato que

U_0^n determina todas as variáveis.

Modelo 3

modelo (3)

$$\left[\begin{array}{l} \text{Min (8)} \\ \text{s.a } V_0^n + \sum_{r=1}^t X_r^n - E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^t X_r^{s(n)} \geq 0 \quad (13) \\ \hspace{15em} n=1,\dots,N; t=1,\dots,T \\ U_0^n - \sum_{r=1}^t X_r^n + E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^{t-1} X_r^{s(n)} \geq 0 \quad (14) \\ \hspace{15em} n=1,\dots,N; t=1,\dots,T \\ 0 \leq X_t^n \leq \beta_t^n \quad (15) \quad n=1,\dots,N; t=1,\dots,T \\ U_0^n \geq 0 \quad (16) \quad n=1,\dots,N \end{array} \right.$$

Teorema 3: Assuma que as restrições:

- (1) $E^{n,s(n)}$ é inteiro ≥ 0 , para $n=1,\dots,N$
- (2) V_0^n é um inteiro múltiplo de M^n , para $n=1,\dots,N$
- (3) β_t^n ($t=1,\dots,T$) são inteiros múltiplos de M^n , para

$n=1,\dots,N$

são asseguradas. O modelo (3) é factível se e somente se o modelo (2) é factível. Se $\langle U_0, X \rangle$ é factível no modelo (2) então é também factível no modelo (3). Se $\langle U_0, X \rangle$ é factível no modelo (3) então $\langle [U_0^1]_{M^0}, \dots, [U_0^n]_{M^n} \rangle$ é uma solução factível para o modelo (2).

PROVA: Suponha que $\langle U_0, X \rangle$ satisfaz (9)-(12). Como as variáveis envolvidas são inteiras, $E^{n,s(n)}$ é inteiro $0 \leq W_0^n / \alpha^n < 1, 0 \leq -W_0^n / \alpha^{n+1} - \epsilon < 1$, conclue-se que $\langle U_0, X \rangle$ satisfaz (13)-(16).

Suponha agora que $\langle \bar{U}_0, \bar{X} \rangle$ satisfaz (13)-(16). Defina:

$$U_0^n = [\bar{U}_0^n]_{M^n}, \quad X_1^n = [\bar{X}_1^n]_{M^n}$$

$$X_t^n = [\sum_{r=1}^t \bar{X}_r^n]_{M^n} - [\sum_{r=1}^{t-1} \bar{X}_r^n]_{M^n}$$

Note que

$$\sum_{r=1}^t X_r^n = \left[\sum_{r=1}^t \bar{X}_r^n \right]_{M^n}$$

e X_t^n é inteiro e não negativo

Suponha que

$$V_0^n + \sum_{r=1}^t X_r^n - E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^t X_r^{s(n)} < 0,$$

isto é,

$$V_0^n + \left[\sum_{r=1}^t \bar{X}_r^n \right]_{M^n} - E^{n,s(n)} \left[\sum_{r=1}^t \bar{X}_r^{s(n)} \right]_{M^n}.$$

Como $V_0^n = AM^n = AE^{n,s(n)}M^{s(n)} + BM^n - E^{n,s(n)}CM^{s(n)} < 0$,

onde A, B e C são inteiros e não negativos. Assim $E^{n,s(n)}(A + B - C)M^{s(n)} < 0$ o que implica

$$V_0^n + \sum_{r=1}^t X_r^n - E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^t X_r^{s(n)} \leq E^{n,s(n)}$$

assim,

$$V_0^n + \sum_{r=1}^t \bar{X}_r^n - E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^t \bar{X}_r^{s(n)}$$

$$\begin{aligned} &\leq V_0^n + \left[\sum_{r=1}^t \bar{X}_r^n \right]_{M^n} - E^{n,s(n)} \left[\sum_{r=1}^t \bar{X}_r^{s(n)} \right]_{M^n} + E^{n,s(n)} \left(\left[\sum_{r=1}^t \bar{X}_r^{s(n)} \right]_{M^n} - \sum_{r=1}^t \bar{X}_r^{s(n)} \right) \\ &\leq -E^{n,s(n)} + E^{n,s(n)} \left(\left[\sum_{r=1}^t \bar{X}_r^{s(n)} \right]_{M^n} - \sum_{r=1}^t \bar{X}_r^{s(n)} \right) < 0 \end{aligned}$$

o que contradiz (13).

Portanto

$$V_0^n + \sum_{r=1}^t X_r^n - E^{n,s(n)} \sum_{r=1}^t X_r^{s(n)} \geq 0$$

e $\langle U_0, X \rangle$ satisfaz (13).

Agora, mostra-se que $\langle U_0, X \rangle$ satisfaz (14). Suponha que

$$U_0^n - \sum_{r=1}^t X_r^n + E^{n, s(n)} \sum_{r=1}^{t-1} X_r^{s(n)} < 0$$

isto é,

$$U_0^n - \left[\sum_{r=1}^t \bar{X}_r^n \right]_{M^n} + E^{n, s(n)} \left[\sum_{r=1}^{t-1} \bar{X}_r^{s(n)} \right]_{M^{s(n)}} < 0.$$

Como $U_0^n = DM^n$, tem-se que: $DM^n - BM^n + E^{n, s(n)} FM^{s(n)} < 0$, onde D,

B, F são inteiros não negativos, assim, $(D - B + F)M^n < 0$, o que implica:

$$U_0^n - \sum_{r=1}^t X_r^n + E^{n, s(n)} \sum_{r=1}^{t-1} X_r^{s(n)} \leq -M^n$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \bar{U}_0^n - \sum_{r=1}^t \bar{X}_r^n + E^{n, s(n)} \sum_{r=1}^{t-1} \bar{X}_r^{s(n)} \\ \leq \left[\bar{U}_0^n \right]_{M^n} - \left[\sum_{r=1}^t \bar{X}_r^n \right]_{M^n} + E^{n, s(n)} \left[\sum_{r=1}^{t-1} \bar{X}_r^{s(n)} \right]_{M^{s(n)}} + \left[\sum_{r=1}^t \bar{X}_r^n \right]_{M^n} - \sum_{r=1}^t \bar{X}_r^n \leq -M^n \end{aligned}$$

< 0, o que contradiz (14). Portanto $\langle U_0, X \rangle$ satisfaz (14)

Da construção de $\langle X \rangle$ tem-se que:

$$\begin{aligned} X_t^n &= \left[\sum_{r=1}^t \bar{X}_r^n - \left[\sum_{r=1}^{t-1} \bar{X}_r^n \right]_{M^n} \right]_{M^n} = \left[\bar{X}_t^n - \left(\left[\sum_{r=1}^t \bar{X}_r^n \right]_{M^n} - \sum_{r=1}^{t-1} \bar{X}_r^n \right) \right]_{M^n} \\ &\leq \left[\bar{X}_t^n \right]_{M^n} \leq \beta_t^n \end{aligned}$$

pois β_t^n é múltiplo inteiro de M^n .

Como as variáveis em $\langle U_0, X \rangle$ são inteiras, $0 \leq W_0^n / \alpha^n < 1$ e $0 < -W_0^n / \alpha^n + 1 - \varepsilon < 1$, conclue-se que $\langle U_0, X \rangle$ também satisfaz (9)-(12)

Teorema 4: Assuma que as hipóteses (1), (2) e (3). Assuma também que o modelo (3) e o modelo (2) são factíveis. Então $(Z_3 - Z_2) / Z_2 \rightarrow 0$ quando $Q^0 / T \rightarrow \infty$.

PROVA: Sejam $\langle U_0, X \rangle$ e $\langle \bar{U}_0, \bar{X} \rangle$ soluções ótimas para os modelos (2) e (3), respectivamente. Desde que

$$\sum_{n=1}^N c^n \bar{U}_0^n \leq \sum_{n=1}^N c^n U_0^n$$

$$\leq \sum_{n=1}^N c^n (\lceil \bar{U}_0^n \rceil_{M^n}) < \sum_{n=1}^N c^n (\bar{U}_0^n + M^n)$$

obtemos

$$(Z_3 - Z_2) < \sum_{n=1}^N M^n c^n$$

Como $\langle U_0, X \rangle$ satisfaz (9) e (10), obtém-se ao somar as duas desigualdades

$$V_0^n + U_0^n - X_t^n + 1 - \varepsilon \geq 0$$

Como V_0^n, U_0^n, X_t^n são todos inteiros e $0 < 1 - \varepsilon < 1$, então

$$V_0^n + U_0^n \geq X_t^n \text{ para todo } t = 1, \dots, T$$

consequentemente

$$V_0^n + U_0^n \geq \sum_{r=1}^T X_r^n / T \geq Q_T^n$$

Então $Z_2 \geq \sum_{n=1}^N c^n Q^n / T$ e $(Z_3 - Z_2) / Z_2 < \sum_{n=1}^N c^n M^n / (\sum_{n=1}^N c^n Q^n / T)$ pela

definição de $Q^n, Q^n / T \rightarrow \infty$ quando $Q^0 / T \rightarrow \infty$

Portanto $(Z_3 - Z_2) / Z_2 \rightarrow 0$ quando $Q^0 / T \rightarrow \infty$

APÊNDICE B

A PROGRAMAÇÃO INTEIRA E O ALGORITMO "BRANCH-AND-BOUND"

Em princípio, programação linear inteira significa a formulação e solução de problemas que podem ser representados como problemas de programação linear em que algumas ou todas as variáveis necessitam ser inteiras.

Apresenta-se a seguir uma estrutura algorítmica geral no qual se enquadram algoritmos de vários tipos: "Branch and Bound", planos de corte, relaxação Lagrangeana e decomposição de Benders.

A estrutura geral contém três elementos fundamentais: separação, relaxação e sondagem. Cada um destes elementos é discutido a seguir e uma particularização é feita para algoritmos do tipo "Branch and Bound".

Seja o problema de programação linear inteira mista:

$$(P) \begin{cases} \text{Min } cx + dy \\ \text{s.a } Cx + Dy \leq b \\ x, y \text{ inteiros} \end{cases}$$

Onde C e D são matrizes e c , d e b são vetores com as apropriadas dimensões.

1) Separção: para qualquer problema de otimização (P) , seja $F(P)$ o conjunto de soluções factíveis. O problema (P) é separado em problemas $(P_1), (P_2), \dots, (P_q)$ quando as seguintes condições são asseguradas:

(S1) - Toda solução factível de (P) é uma solução de

somente um dos subproblemas $(P_1), (P_2), \dots, (P_q)$;

(S2) - Uma solução factível de qualquer um dos subproblemas $(P_1), (P_2), \dots, (P_q)$ é uma solução factível de (P) ;

Essas condições asseguram que $F(P_1), F(P_2), \dots, F(P_q)$ é

uma partição de $F(P)$. Os subproblemas $(P_1), (P_2), \dots, (P_q)$ são chamados de descendentes de (P) .

O interesse na separação, é usar a estratégia de dividir para conquistar para resolver o problema (P) .

Um esquema rudimentar para a resolução de (P) baseado em separação pode ser descrito da seguinte maneira: tenta-se resolver (P) ; se isto não é possível, separa-se (P) em dois ou mais subproblemas iniciando assim uma lista de problemas candidatos. Extrai-se um subproblema (PC) desta lista e tenta-se resolvê-lo. Se houver sucesso na resolução retorna-se à lista e extrai-se um novo problema candidato a ser resolvido; caso contrário separa-se (PC) e adiciona-se seus descendentes à lista. Prossegue-se desta maneira até que a lista esteja vazia. A melhor solução encontrada em qualquer problema candidato será chamada de solução incumbente.

A maneira popular de se separar um problema de programação inteira é através de restrições contraditórias numa única variável inteira (variável de separação ou ramificação).

Por exemplo, se a variável x_5 é inteira e $0 \leq x_5 \leq 4$ uma possível separação consiste em se fazer $0 \leq x_5 \leq 3$ e $3 \leq x_5 \leq 4$.

2-) Relaxação: qualquer problema de otimização (P) pode ser relaxado ao se torná-lo menos restrito e portanto de mais fácil solução. Este problema relaxado é denotado (P_R) . A relaxação mais popular consiste em eliminar as restrições de integralidade nas

variáveis. Outra relaxação comum consiste em dualizar algumas restrições "complicantes" e utilizar a técnica de relaxação Lagrangeana. Para uma relaxação ser válida é necessário que $F(P) \subset F(P_R)$. Esta propriedade implica nas seguintes relações em (P) e (P_R) .

(R1) - Se (P_R) não tem solução factível, então o mesmo é verdadeiro para (P) ;

(R2) - O valor mínimo de (P) não é menor que o valor mínimo de (P_R) ;

(R3) - Se uma solução ótima de (P_R) é factível em (P) , então ela é uma solução ótima de (P) ;

3-) Critério de Sondagem: uma sequência de problemas candidatos precisa ser examinada, e quando um deles não pode ser resolvido sem uma grande quantidade de esforço, então precisa ser separado e seus descendentes examinados. O sucesso da estratégia depende de uma escolha criteriosa sobre como e quão difícil é resolver cada problema candidato. Nesse sentido o conceito de relaxação desempenha um papel importante: ao invés de tentar lidar com o problema candidato trabalha-se com uma relaxação do mesmo. O critério de sondagem apresentado a seguir formaliza o papel do problema relaxado.

Existem três tipos gerais de sondagem, todos baseados em relaxação. Para apresentá-lo é necessário introduzir a seguinte notação: se $(-)$ é um problema de minimização, $v(-)$ é o valor ótimo de $(-)$ e z^* é o valor da solução incumbente (inicialmente $z^* = \infty$ se nenhuma solução factível de (P) foi encontrada).

Os três critérios de sondagem podem ser definidos como:

(1) - Se (P_C) não tem solução factível, então por (R1) o

mesmo é verdadeiro para (PC). Então $F(PC)$ é vazia não podendo pois conter uma solução ótima para (P). Portanto (PC) (e seus descendentes) é sondado.

$$(2) - V(PC) \geq Z^*$$

Como

$$V(PC) \geq V(PC_R)$$

então (2) implica que $F(PC)$ não contém uma solução factível melhor que a solução incumbente e (PC) é sondado

(3) - Suponha que uma solução ótima de (PC_R) é factível em (PC), então por (R3) ela é ótima em (PC) e este está sondado. Por (S2) ela também é factível em (P) e torna-se o novo valor da incumbente se o seu valor for menor que Z^* .

A seleção do subproblema será discutida quando for abordado o assunto da escolha do nó da árvore enumerativa a ser pesquisado.

1 -) PROCEDIMENTO GERAL PARA A SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO INTEIRA

- Passo 1** - Inicializar a lista de candidatos (L) com o problema original (P) e seja (Z^*) um número arbitrariamente grande;
- Passo 2** - Se a lista de candidatos está vazia então vá para o passo 13;
- Passo 3** - Selecionar um dos problemas da lista de candidatos para se tornar o problema candidato atual (PC);
- Passo 4** - Escolha uma relaxação (PC_R) de (PC);
- Passo 5** - Resolva (PC_R) por um algoritmo apropriado;
- Passo 6** - Critério de Sondagem 1 (CS1) - Se o (PC_R) infactível

vá para o passo 2;

Passo 7 - Critério de Sondagem 2 (CS2) - Se o valor da solução de (PC_R) é maior ou igual ao da incumbente então vá para o passo 2;

Passo 8 - Critério de Sondagem 3 (CS3) - Se uma solução ótima de (PC_R) é factível em (PC) vá para o passo 12;

Passo 9 - Decide-se se vai persistir na tentativa de sondar (PC). Em caso afirmativo, ir para o passo 10, se não ir para o passo 11

Passo 10 - Modificar a relaxação e ir para o passo 5;

Passo 11 - Separar (PC) e adicionar seus descendentes na lista de candidatos. Voltar para o passo 2;

Passo 12 - SE $V(PC_R) \leq Z^*$ então atualize a solução incumbente. Volte para o passo 2;

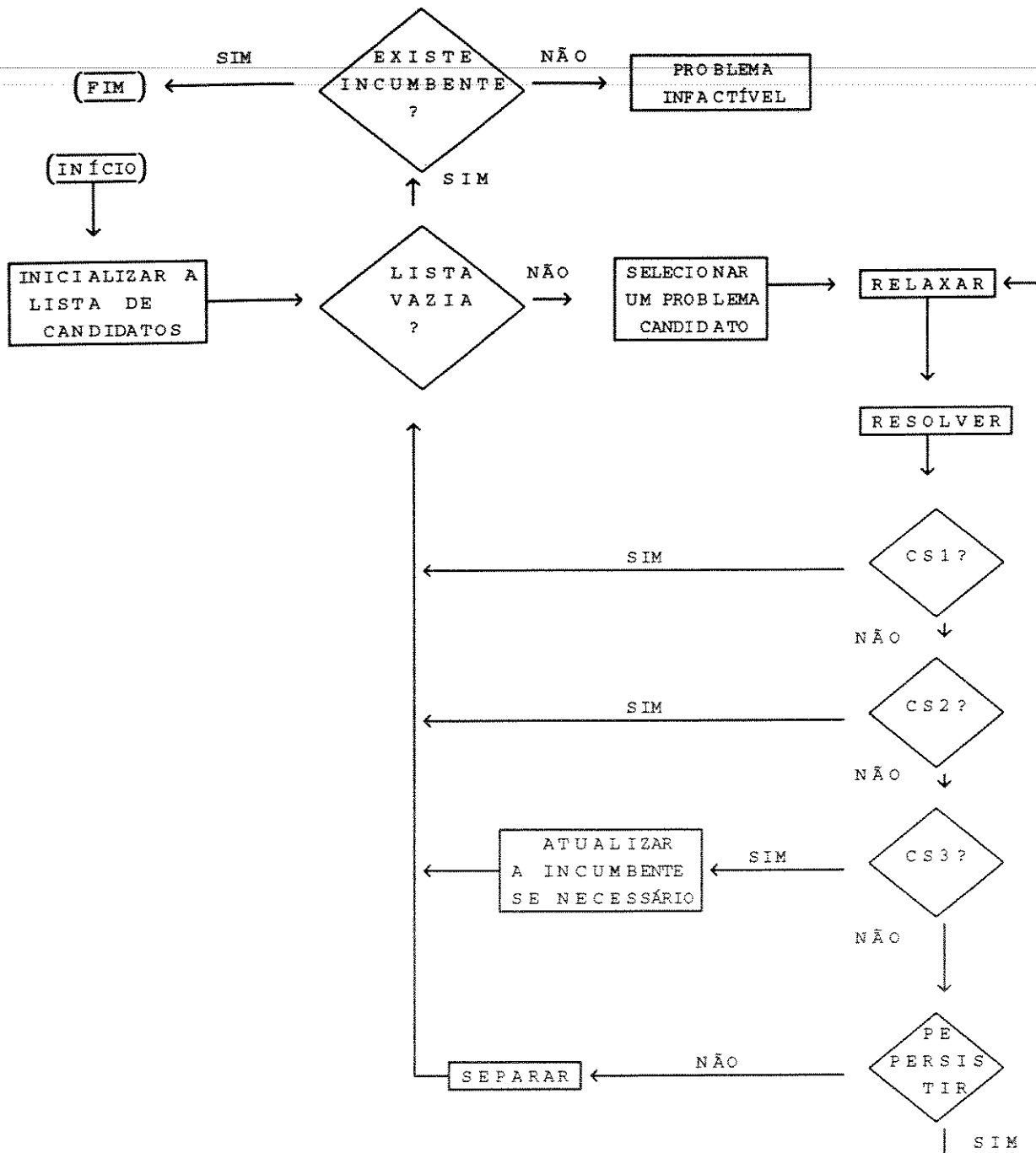
Passo 13 - Se existe solução incumbente, então esta é a solução ótima, caso contrário o problema é infactível, FIM.

Um fluxograma deste procedimento é apresentado na próxima página

2 -) ALGORÍTMOS ENUMERATIVOS

Algoritmos enumerativos compreendem algoritmos do tipo enumeração implícita ou "Branch and Bound". Estes algoritmos buscam de forma metódica o conjunto de possíveis soluções inteiras de modo a não considerar cada solução inteira individual. Por exemplo se um problema candidato é sondado pela condição (2), então todas as suas soluções inteiras são implicitamente consideradas e descartadas.

Fluxograma do Algoritmo Geral de Programação Inteira



Algoritmos enumerativos podem ser classificados em duas categorias: aqueles que baseiam seus testes de sondagem em implicações lógicas das restrições do problema Balas^[54] e aqueles cujos testes de sondagem são baseados em relaxação Lagrangeana Geoffrion^[53] ou relaxação das restrições de integralidade nas variáveis Lang e Doig^[55] e Dakin^[56]

Apresenta-se a seguir o algoritmo de "Branch and Bound" desenvolvido neste trabalho, seguindo a estrutura algorítmica apresentada anteriormente.

- ALGORITMO "BRANCH AND BOUND" -

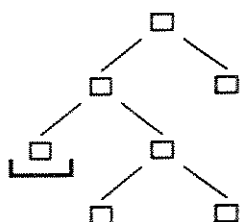
- Passo 1 - Idêntico
- Passo 2 - Idêntico
- Passo 3 - Escolha do problema candidato
- Passo 4 - Relaxe as condições de integralidade
- Passo 5 - Resolva por um algoritmo de programação linear
- Passo 6 - Idêntico
- Passo 7 - Idêntico com a inclusão de penalidade ou pseudo custo.
- Passo 8 - Idêntico
- Passo 9 - Ir sempre para o passo 11
- Passo 10 - Omitir
- Passo 11 - Dicotomize o problema candidato atual (isto é, gere dois subproblemas descendentes) através das restrições alternativas $x_j \leq [\bar{x}_j]$ e $x_j \geq [\bar{x}_j] + 1$, onde \bar{x}_j é uma solução não inteira encontrada no passo 5. A escolha da variável é

feita por penalidade ou pseudo-custo. A separação, passo 11 do fluxograma, é feita através da dicotomização de uma variável, ou seja, dada uma variável inteira x_j cujo o valor real é y então em um problema candidato adiciona-se a restrição $x_j \leq [y]$ e no outro $x_j \geq [y] + 1$. Um destes candidatos será pesquisado e o outro irá para a lista.

Passo 12 - Idêntico

Passo 13 - Idêntico

É comum representar o esquema de separação em subproblemas através de uma árvore e associar cada subproblema a um nó da árvore. Diz-se que um nó é ativo se o subproblema associado ainda não foi sondado.



Ao lado encontra-se um esquema de uma estrutura de árvore de um algoritmo "Branch and Bound"

= Sondado

A eficiência do algoritmo "Branch and Bound" depende fortemente das escolhas feitas nos passos 3 e 11, isto é, da escolha do nó ativo e da variável de ramificação. No capítulo 4 é mostrado como usar penalidades e pseudo-custos para auxiliar nestas decisões e para fornecer um teste mais forte de sondagem no passo 7.

- BIBLIOGRAFIA -

- [1] - Porteus, Evan L., "INVESTING IN REDUCED SETUPS IN THE EOQ MODEL ", Management Science, Vol 31, n 8, pp 998-1010, (August, 1985)
- [2] - Mitenburg, John, "A THEORETICAL BASIS FOR SCHEDULING MIXED-MODEL ASSEMBLY LINES FOR JIT PRODUCTION SYSTEMS ", Research and Working Paper Series, McMaster University, Working Paper 255 (July, 1986)
- [3] - Mitenburg, John, " SCHEDULING MIXED-MODEL MULTI-LEVEL FOR JIT PRODUCTION SYSTEMS ", Research and Working Paper Series, McMaster University, Working Paper 256 (August, 1986)
- [4] - Monden, Yasuhiro, "SMOOTHED PRODUCTION LETS TOYOTA ADAPT TO DEMAND CHANGES AND REDUCE INVENTORY ", Industrial Engineering, pp 42-51 (August, 1981)
- [5] - Tatikonda, Mohan V., "JIT AND MODERN MANUFACTURING ENVIROMENTS IMPLICATIONS FOR COST ACCOUTING ", Production and Inventory Management Journal, First Quartes (1988)
- [6] - Crawford, Karlene M., John H. Blackstone and James F. Cox, " A STUDY OF JUST-IN-TIME IMPLEMENTATION AND OPERATING PROBLEMS " , International Journal Production of Research, Vol 26, n 9, pp 1561-1568 (1988)
- [7] - Zangwill, Willard I., " FORM EOQ TOWARDS ZI ", Management Science, Vol 33, n 10 (October, 1987)
- [8] - Monden, Yasuhiro, "HOW TOYOTA SHORTENED SUPPLY LOT PRODUCTION TIME, WAITING TIME AND CONVEYANCE TIME ", Industrial Engineering,

pp 22-30 (September, 1981)

- [9] - Gravell, Marc, Wilson L. Prices, " USING THE KANBAN IN A JOB SHOP ENVIROMENT ", International Journal Production of Research, Vol 26, n 6, pp 1105-1118
- [10] - Nisanci, Ibrahim and Andrew B. Nicoli, " PROJECT PLANNING NETWORK IS INTEGRATED PLAN FOR IMPLEMENTATING JIT ", Industrial Engineering, pp 50-87 (October, 1987)
- [11] - Seidmann, Abraham, " REGENERATIVE PULL (KANBAN) PRODUCTION CONTROL POLICIES ", European Journal of Operational Research, Vol 35, pp 401-413, (1988)
- [12] - Rao, Ashok and David Scheraga, " MOVING FROM MANUFACTURING RESOURCE PLANNING TO JUST-IN-TIME MANUFACTURING ", Production and Inventory Management Journal, First Quarter (1988)
- [13] - Miyazaki, S., H. Ohta and N. Nishiyama, " THE OPTIMAL OPERATION PLANNING OF KANBAN TO MINIMIZE THE TOTAL OPERATION COST ", International Production of Research, Vol 26
- [14] - Susan L. McGrarry, " JIT AND COMPUTER INTEGRATED MANUFACTURING FRIENDS OR FROES? ", Autofact, pp 13.1-13.9 (1986)
- [15] - Schoer, Bernard J., J. T. Black and Shoou Xiang Zang, " MICROCOMPUTER ANALYSES 2-CARD KANBAN SYSTEM FOR JIT SMALL BATCH PRODUCTION ", Industrial Engineering, pp 54-65 (June, 1984)
- [16] - Krajewski, Lee J., Barry E. King, Larry P. Ritzman and Danny S. Wong, " KANBAN, MRP AND SHAPING THE MANUFACTURING ENVIROMENT ", Management Science, Vol 33, n 33, pp 39-57 (1987)
- [17] - Branam, James W., " JUST-IN-TIME VS FMS - WHICH WILL TOP MANAGMENT BUY? ", Autofact, pp 4.23-4.30 (1986)

- [18] - Hartley, John, " FIGHTING THE RECESSION IN MANUFACTURE ", IFS (Publications) Ltd, U.K., Spring Verlag, New York (1986)
- [19] - Yasuhiro, Monden, " APPLYING JUST-IN-TIME THE AMERICAN AND JAPANESE EXPERIENCE ", Industrial and Management Press (1986)
- [20] - Schonberger, Richard J., " TÉCNICAS INDUSTRIAIS JAPONESAS - NOVE LIÇÕES OCULTAS SOBRE A SIMPLICIDADE ", Editora Pioneira, São Paulo (1984)
- [21] - Vollmann, Thomas E., William Lee Berry and D. Clay Whybark, " MANUFACTURING PLANNING AND CONTROL SYSTEMS ", Second Edition, Dow Jones-Irwin (1988)
- [22] - Rice, James W and Takeo Yoshikawa, " A COMPARISON OF KANBAN AND MRP CONCEPTS FOR THE CONTROL OF REPETITIVE MANUFACTURING SYSTEMS ", Production and Inventory and Management, First Quarter (1982)
- [23] - Finch, Byron J. and James F. Cox, " AN EXAMINATION OF JUST-IN-TIME MANAGEMENT FOR THE SMALL MANUFACTURER: WITH AN ILLUSTRATION ", Introduction Journal of Research, Vol24, n 2, pp 329-342 (1986)
- [24] - Inman, R. Anthony and Satish Mehra, " THE TRANSFERABILITY OF JUST-IN-TIME CONCEPTS TO AMERICAN SMALL BUSINESSES ", Interfaces, Vol 20, n 2, pp 30-37 (March-April, 1990)
- [25] - Schonberger, Richard J., " JUST-IN-TIME PRODUCTION SYSTEMS: REPLACING COMPLEXITY WITH SIMPLICITY IN MANUFACTURING MANAGEMENT ", Industrial Engineering, pp 52-63 (1984)
- [26] - Monden, Yasuhiro, "ADAPTABLE KANBAN SYSTEM HELP TOYOTA MAINTAINCE JUST-IN-TIME PRODUCTION ", Industrial Engineering, pp 29-46 (May, 1981)

- [27] - Monden, Yasuhiro, " WHAT MAKES THE TOYOTA PRODUCTION SYSTEM REALLY TICK? ", Industrial Engineering, pp 36-46 (January, 1981)
- [28] - Esparrago, Romeo A. Jr, " KANBAN ", Production and Inventory Management Journal, First Quarter, pp 6-10 (1988)
- [29] - Fulmann, Claudiney, Larry P Ritzmann and Lee J. Krajewski, " MRP, MRP II, MRP III (MRP + JIT / KANBAN), OPT, GDR ", IMAM, São Paulo (1989)
- [30] - Monden, Yasuhiro, " SISTEMAS DE PRODUÇÃO TOYOTA ", IMAM, São Paulo (1984)
- [31] - Moura, Reinaldo A., " A EVOLUÇÃO DO JUST-IN TIME NO BRASIL ", IMAM, São Paulo (1989)
- [32] - Smith, Spencer A., " COMPUTER-BASED PRODUCTION AND INVENTORY CONTROL ", Printice-Hall, New Jersey (1989)
- [33] - Nahmias, Steven, " PRODUCTION AND OPERANTION ANALYSIS ", IRWIN, Boston (1989)
- [34] - Hall, Robert W., " EXCELÊNCIA NA MANUFATURA ", IMAM, São Paulo (1988)
- [35] - Kimura, Osamu and Hirosuke Terada, " DESIGN AND ANALYSIS OF PULL SYSTEM A METHOD OF A MULTI-STAGE PRODUCTION CONTROL ", Interantional Journal Production Research, Vol 19, n 3, pp 241-253 (1981)
- [36] - Bitran, Gabriel R. an d Li Chang, " A MATHEMATICAL PROGRAMMING APROACH TO A DETERMINISTIC KANBAN SYSTEM ", Management Science, Vol 33, n 4, pp 427-442 (1987)
- [37] - Yanney, Jon D. and Way Kuo, " A PRACTICAL APPROACH TO SCHEDULING A MULTISTAGE, MULTIPROCESSOR FLOW-SHOP PROBLEM ", Interantional Journal Production Research, Vol 27, n 10, pp

1733-1742 (1989)

- [38] - Takeda, Kenji, " ANALYSIS OF JUST-IN-TIME PRODUCTION MANAGEMENT SYSTEMS ", Computer Applications in Production and Engineering - CAPES'86, Edited by K.B0, L. Estensen, P. Falster, Copenhagen, Denmark (1986)
- [39] - Tomlim, J. A., " AN IMPROVED BRANCH-AND-BOUND METHOD FOR INTEGER PROGRAMMING ", Scientific Control Systems Ltd, London, England (May, 8, 1969)
- [40] - Ball, Michael, " THE DESIGN AND ANALYSIS OF HEURISTICS ", Magazine Networks, Vol 11, pp 215-219 (1981)
- [41] - Kan, Rinnooy, " AN INTRODUCTION TO THE ANALYSIS OF APPROXIMATION ALGORITHMS ", Discrete Applied Mathematics, Vol 14, pp 171-185 (1986)
- [42] - Benichou, M, J. M. Gauthier, P. Girodet, G. Hentges, G. Ribière and O. Vincent, " EXPERIMENTS IN MIXED-INTEGER LINEAR PROGRAMMING ", Mathematical Programming 1, pp 76-94 (1971)
- [43] - Beale, E. M. L., " BRANCH AND BOUND METHODS FOR MATHEMATICAL PROGRAMMING SYSTEMS ", Annals of Discrete Mathematics 5, pp 201-219 (1979)
- [44] - Garfinkel, Robert S., " BRANCH AND BOUND METHODS FOR INTEGER PROGRAMMING ", Management Science Program, Cap. I, (June, 1978)
- [45] - Geoffrion, A. M. and R. E. Mastern, " INTERGER PROGRAMMING ALGORITHMS: A FRAMEWORK AND STATE OF THE ART SURVEY ", Management Science, Vol 18, n 9 (May, 1972)
- [46] - Gauthier, M and G. Ribière, " EXPERIMENTS IN MIXED-INTEGER LINEAR PROGRAMMING USING PSEUDO-COSTS ", Mathematical Programming, Vol 12, pp 26-47 (1977)

- [47] - Nenhauser, George L. and Laurence A. Wosley, " INTEGER AND COMBINATORIAL OPTIMIZATION ", Jonh Wiley & Sons., Inc. United States of America (1988)
- [48] - Brearley, A. L., G, Mitra, H. P. Williams, " ANALYSIS OF MATHEMATICAL PROGRAMMING PROBLEMS PRIOR TO APPLYING THE SIMPLEX ALGOTITHM ", Mathematical Programming 8, pp 54-83 (1975)
- [49] - Sarker, Bahba R. and James A. Fitzsimmons, " THE PERFORMANCE OF PUSH AND PULL SYSTEMS A SIMULATION AN COMPARATIVE STUDY ", International Journal Production of Research, Vol 27, n 10, pp 1715-1731 (1989)
- [50] - Afentakis, Panayotis, Bezalel Gavish and Nolay Karmakar, " COMPUTATIONALLY EFFICIENT OPTIMAL SOLUTION TO THE LOT SIZING PROBLEM IN MULTISTAGE ASSEMBLY SYSTEMS ", Management Science, Vol 30, n 2 (February, 1984)
- [51] - Dellersnyder, Jean-Luc, Thom J Hodgson, Henry Muller (-Malek) and Peter J. O'Grady, " KANBAN CONTROLLED PULL SYSTEMS AN ANALYTIC APPROACH ", Management Science, Vol 35, n 9 (September, 1989)
- [52] - Rees, Loren P., Philip Y. Huang and Bernard W. Taylor, " A COMPARATIVE ANALYSIS OF AN MRP LOT-FOR LOT SYSTEM AND A KANBAN SYSTEM FOR A MULTISTAGE PRODUCTION OPERATION", International Journal Production of Research, Vol 27, n 8, pp 1427-1543 (1989)
- [53] - Geoffrion, A. M., "LAGRANGEAN RELAXATION FOR INTEGER PROGRAMMING", Study 2, pp 82-114 (1974)
- [54] - Balas, E., "AN ADDITIVE FOR SOLVIN LINEAR PROGRAMS WITH ZERO-ONE VARIABLES", Operations Research, Vol 13, n 4, pp

517-546 (July-August 1965)

[55] - Land, A. H. and Doig, A.G., "AN AUTOMATIC METHOD OF SOLVING DISCRET PROGRAMMING PROBLEMS", *Econometrica*, Vol 28, pp 497-520 (1960)

[56] - Dakin, R.J., " A TREE SEARCH ALGORITHM FOR MIXED INTEGER PROGRAMMING PROBLEMS", *Computer Journal*, Vol 8, n 3, pp 250-255 (1965)