FONTES NÃO RADIANTES E SUA APLICAÇÃO AO PROBLEMA DA FONTE INVERSO

Parecer:
Este exemplar corresponde à
redação final da Tese defendida
pelo aluno Werner Martins Vieira
e aprovada pela comissão julgadora.
29/6/88
Alfredo M. Gomes de Almeida
p/ Antonio Rubens Brito de Castro.

Werner Martins Vieira

Orientador: Antonio Rubens Brito de Castro

Dissertação apresentada ao Instituto de Física Gleb Wathagin da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos à obtenção do título de Mestre em Ciências.

Junho de 1988.

Aos meus pais João e Milce

e à minha esposa Eliane

Minha gratidão ao professor Antonio Rubens pela evolução pessoal e profissional que nossa relação me proporcionou.

Agradeço aos meus irmãos Wesley, Wagner e João pelo apoio que sempre me deram, ao André Koch, ao Ruy Hanazaki e ao Augusto Silva por serem meus AMIGOS, e ao Enoque Vieira por compartilhar comigo o desejo de estudar.

Agradeço ao CNPq e à CAPES pelo suporte financeiro deste trabalho.

RESUMO

Desenvolvemos propriedades e caracterizações equivalentes de fontes não-radiantes.

Construímos exemplos de fontes não-radiantes fisicamente razoáveis.

Tratamos do problema da fonte inverso e mostramos que sua solução possui em geral uma componente não-radiante. Tal solução não é única e isso se deve a que os dados disponíveis neste tipo de problema não dão acesso a essa componente. Mostramos que informações adicionais "a priori" acerca da fonte podem dar unicidade à solução, i. e., podem determinar sua componente não-radiante.

Finalmente, tratamos do problema da fonte inverso estatístico e chegamos a conclusões análogas às obtidas para o caso determinístico.

INDICE

FONTES NAO RADIANTES E SUA APLICACAO AO PROBLEMA DA FONTE INVERSO

1-INTRODUCAO:

Fonte não-radiante é uma fonte oscilante espacialmente localizada cujos campos não estáticos se anulam identicamente fora de alguma esfera que a contenha. Isto significa que seus campos radiantes estão confinados ao interior da esfera , i. e., à própria região da fonte , inexistindo fora daí. Este comportamento não usual dos campos gerados levanta a questão da plausibilidade física de tais fontes , bem como da relevância do seu estudo.

Neste trabalho , apresentaremos primeiro algumas propriedades e caracterizações equivalentes de fontes não-radiantes. Depois , daremos três exemplos fisicamente razoáveis de fontes não-radiantes , calculando a expressão exata para os campos dos primeiro e segundo exemplos. A seguir, será abordada a implicação que tem a existência de tais fontes para os problemas de fonte ditos inversos.

Finalmente, trataremos de fontes não-radiantes estatísticas.

Antes , porém , deve ser mencionado que o interesse pelo assunto não é recente. Bohm & Weinstein (ref.(1)) propuseram em 1948 (ver referências da ref.(1) a contribuições anteriores a 1948) a possibilidade de modelos de partículas elementares extensas , motivados pela descoberta de que certas distribuições rígidas localizadas de carga,executando certos tipos de movimentos acelerados,não irradiam. Goedeck (ref.(2)) fez em 1964 alguns estudos das condições para que isso ocorra e levantou possíveis implicações quânticas de tais modelos de partículas. Arnett & Goedeck (ref.(3)) encontraram em 1968 que os campos radiantes produzidos por estas distribuições eram identicamente nulos fora do volume por elas ocupado. Desde então , a literatura a respeito de fontes não-radiantes tem-se voltado para a conexão destas com os problemas de fonte inversos.

Problemas deste tipo ocorrem, por exemplo, em prospecção geológica e submarina, sismologia, meteorologia, radioastronomia e em outras áreas onde técnicas de análise de "ecos" têm lugar.

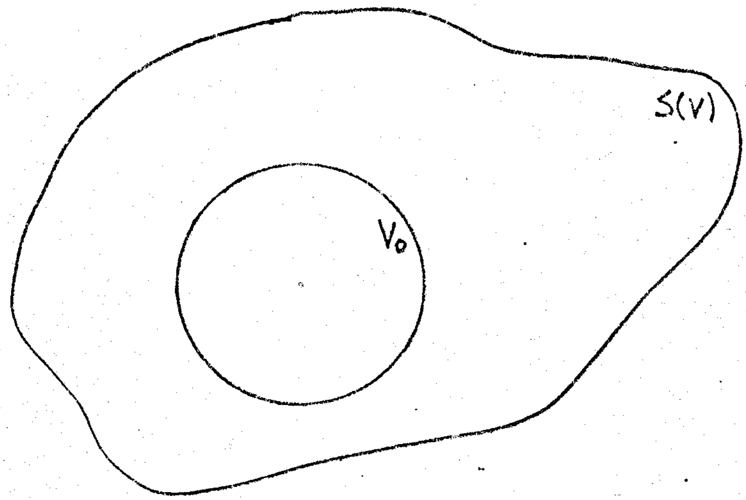
2-PROPRIEDADES DE FONTES NAO RADIANTES:

Seja o seguinte problema de fonte direto: dada uma fonte $F(\vec{r},t)$ confinada ao volume esférico V_0, sendo contido num volume muito maior V, de fronteira $S(V)$ (Fig.1), procura-se o campo escalar $U(\vec{r},t)$ tal que:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) U(\vec{r},t) = -F(\vec{r},t) , \qquad (1)$$

$$U(\vec{r},t) = F(\vec{r},t) \equiv 0 , \quad \forall\, t < t_0 . \qquad (1')$$

Fig. 1



Aplicando a transformação temporal de Fourier à eq. (1), obtemos

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) u(\vec{r},\omega) = -f(\vec{r},\omega) , \qquad (2)$$

onde usamos (e usaremos) as seguintes convenções de letras maiúsculas e minúsculas:

$$a(\vec{r},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\vec{r},t)\, e^{i\omega t}\, dt , \qquad (3)$$

$$\tilde{a}(\vec{k},\omega) = \int_{\substack{esp.\\todo}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\vec{r},t)\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\, dt\, d^3r$$

$$= \int_{\substack{esp.\\todo}} a(\vec{r},\omega)\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, d^3r \,. \qquad (4)$$

Com a condição sobre $\mu(\vec{r},\omega)$ no infinito:

$$\mu(\vec{r},\omega) \sim \mu_0(\hat{r},\omega)\, \frac{e^{i\frac{\omega}{c}r}}{4\pi r} \,, \quad r \to \infty \,, \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \,, \qquad (5)$$

onde $\mu_0(\vec{r},\omega)$ é a configuração angular de radiação na zona distante, mais a condição eq. (1') , a eq. (2) tem por solução (ref. (4), sec. 6.6)

$$\mu(\vec{r},\omega) = \int_{V_0} f(\vec{r}',\omega)\, g(R,\omega)\, d^3r' \,, \qquad (6)$$

sendo $g(R,\omega)$ a função de Green retardada

$$g(R,\omega) = \frac{e^{i\frac{\omega}{c}R}}{4\pi R} \,, \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'| \,. \qquad (7)$$

Seja a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 1:uma função fonte $f(\vec{r},\omega)$,não identicamente nula apenas numa esfera V_0 (esfera suporte de $f(\vec{r},\omega)$),é dita ser não-radiante se a solução eq. (6) é identicamente nula fora dessa esfera.

A solução eq. (6) pode ser expandida em harmônicos esféricos. A representação desse tipo para $g(R,\omega)$ é (ref. (4), eq. (16.22))

$$g(R,\omega) = \frac{i\omega}{c}\sum_{l,m} j_l\left(\frac{\omega}{c}r_<\right) h_l^{(1)}\left(\frac{\omega}{c}r_>\right) Y^*_{lm}(\theta',\varphi')\, Y_{lm}(\theta,\varphi), \tag{8}$$

$$l = 0,1,2,\ldots, \quad |m| \leq l,$$

onde $r_>$ e $r_<$ são, respectivamente, o maior e o menor dentre r e r', $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ é a harmônica esférica de grau l e ordem m, $j_l(x)$ é a função de Bessel esférica de ordem l e $h_l^{(1)}(x)$ é a função de Haenkel do 1º tipo e ordem l. Fazendo $r>a$ e $r'<a$, sendo a o raio da esfera V_0, e usando a eq. (8) na eq. (6), chega-se a

$$\mu(\vec{r},\omega) = i\frac{\omega}{c}\sum_{l,m} c_{lm}\left(\frac{\omega}{c},\omega\right) h_l^{(1)}\left(\frac{\omega}{c}r\right) Y_{lm}(\theta,\varphi), \quad r>a, \tag{9}$$

$$c_{lm}\left(\frac{\omega}{c},\omega\right) = \int_0^a \int_{\Omega'} f(\vec{r}\,',\omega)\, Y^*_{lm}(\theta',\varphi')\, j_l\left(\frac{\omega}{c}r'\right) r'^2\, dr'\, d\Omega', \tag{10}$$

onde $d\Omega'$ é o elemento de ângulo sólido.

Pela definição 1 e da unicidade da representação eq. (9) para $r>a$, decorre imediatamente o seguinte:

TEOREMA 1: uma fonte $f(\vec{r},\omega)$, com suporte na esfera V_0, é não-radiante se e só se os coeficientes $c_{\ell m}$, dados pela eq. (10), são todos identicamente nulos.

Uma outra caracterização para fontes não-radiantes se refere à transformada espaço-temporal de Fourier de $F(\vec{r},t)$ (ref. (5)). Por definição:

$$\tilde{f}(\vec{k},\omega) = \int_{V_0} f(\vec{r},\omega)\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, d^3r \; ; \qquad (11)$$

A exponencial possui a seguinte representação em harmônicos esféricos (ref. (4), eq. (16.127)):

$$e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 4\pi \sum_{\ell,m} (-i)^{\ell} j_{\ell}(kr)\, Y_{\ell m}(\alpha,\beta)\, Y^{*}_{\ell m}(\theta,\varphi) \; , \qquad (12)$$

onde (r,θ,φ) e (k,α,β) são as coordenadas esféricas de $\vec{r}$ e $\vec{k}$, respectivamente. Combinando as eqs. (11) e (12) chega-se a

$$\tilde{f}(\vec{k},\omega) = 4\pi \sum_{\ell,m} (-i)^{\ell} d_{\ell m}(k,\omega)\, Y_{\ell m}(\alpha,\beta) \; , \qquad (13)$$

$$d_{\ell m}(k,\omega) = \int_0^a \int_{\Omega'} f(\vec{r}\,',\omega)\, Y^{*}_{\ell m}(\theta',\varphi')\, j_{\ell}(kr')\, r'^2\, dr'\, d\Omega' \, . \qquad (14)$$

A representação eq. (13) é única. Se $k=\frac{\omega}{c}$, então $d_{\ell m} \equiv c_{\ell m}$ e $\tilde{f}(\vec{k},\omega) = \tilde{f}(\vec{k},ck)$, de forma que é imediato o seguinte:

TEOREMA 2: uma fonte $f(\vec{r},\omega)$ com suporte na esfera V_0 é não-radiante se e só se

$$\tilde{f}(\vec{k},\omega)\Big|_{\omega=ck} = 0 \,.$$

Uma caracterização adicional para fontes não-radiantes pode ser associada à configuração angular de radiação $\mu_0(\hat{r},\omega)$ - vide eq. (5) - do campo observado em pontos distantes da região da fonte (refs. (5), (8)). Nesta situação, i.e., $r \gg r'$, $r \in S(V)$ e $r' \in V_0$,

$$R = |\vec{r}-\vec{r}'| \sim r - \hat{r}\cdot\vec{r}' \,,$$

a eq. (6) pode ser escrita como

$$\mu(\vec{r},\omega) \sim \frac{e^{i\frac{\omega}{c}r}}{4\pi r}\int_{V_0} f(\vec{r}',\omega)\, e^{-i\frac{\omega}{c}\hat{r}\cdot\vec{r}'}\, d^3r' \,,$$

sendo $\hat{r}=\vec{r}/r$. Comparando as eqs. (17) e (5) vemos que

$$\int_{V_0} f(\vec{r}',\omega)\, e^{-i\frac{\omega}{c}\hat{r}\cdot\vec{r}'}\, d^3r' = \mu_0(\hat{r},\omega) \,,$$

e portanto

$$\tilde{f}\left(\frac{\omega}{c}\hat{r},\omega\right) = \mu_0(\hat{r},\omega) \quad ,\forall\omega,\forall\hat{r},$$

uma vez que $f(\vec{r},\omega)$ tem suporte em V_0.

Se a fonte $f(\vec{r},\omega)$ é não-radiante, $\mu(\vec{r},\omega)\equiv 0$ fora de V_0, o que implica $\mu_0(\hat{r},\omega)\equiv 0$. Inversamente, seja $\mu_0(\hat{r},\omega)\equiv 0$. Isso na eq. (19) implica que $\tilde{f}(\frac{\omega}{c}\hat{r},\omega)\equiv 0$, $\forall\omega$, $\forall\hat{r}$; em particular, para $\hat{r}\equiv\hat{k} = \vec{k}/k$ e $\omega = ck$, $\tilde{f}(\vec{k},ck)\equiv 0$, o que, pelo teorema 2, implica em $f(\vec{r},\omega)$ ser não-radiante. Portanto, está demonstrado o seguinte:

TEOREMA 3: uma fonte $f(\vec{r},\omega)$ com suporte na esfera V_0 é não-radiante se e só se

$$\mu_0(\hat{r},\omega) = 0.$$

Este resultado "forte", bem como as eqs. (18) e (19), serão comentados na seção 4. Deve ser antecipadamente salientado, entretanto, que a eq. (19) não fornece $\tilde{f}(\vec{k},\omega)$, $\forall\vec{k}$, $\forall\omega$, o que permitiria a imediata obtenção de $F(\vec{r},t)$ pela sua inversão:

$$F(\vec{r},t) = \int_{\substack{\text{todo}\\ \text{esp.}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\vec{k},\omega)\, e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\, d^3k\, d\omega .$$

Segue agora a apresentação de uma formulação simples e interessante (ref.(5)) que permite condicionar informações sobre uma fonte $f(\vec{r},\omega)$ confinada a V_0 - mas de outro modo arbitrária - a informações obtidas sobre seus campos externos não necessariamente no infinito (como o foi no caso da eq. (18)). Neste sentido, o que se vai obter é uma generalização daquela relação.

Seja V um volume de superfície $S(V)$ contendo V_0. Se, no teorema de Green

$$\int_V (\phi \nabla'^2 \psi - \psi \nabla'^2 \phi)\, d^3r' = \int_{S(V)} (\phi \vec{\nabla}' \psi - \psi \vec{\nabla}' \phi) \cdot \hat{n}' ds' ,$$

fizermos $\phi = \mu(\vec{r}',\omega)$ e $\psi = g(|\vec{r}'-\vec{r}|,\omega) = g(R',\omega)$, e levarmos em conta a eq. (2) e o fato de que

$$\left(\nabla'^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) g(R',\omega) = -\delta(\vec{r}'-\vec{r}) ,$$

facilmente chegamos a

$$-\mu(\vec{r},\omega)\, \gamma(V;\vec{r}) + \int_V g(R',\omega) f(\vec{r}',\omega)\, d^3r' =$$

$$= \int_{S(V)} [\mu(\vec{r}',\omega) \vec{\nabla}' g(R',\omega) - g(R',\omega) \vec{\nabla}' \mu(\vec{r}',\omega)] \cdot \hat{n}' ds' ,$$

onde

$$\Theta(\vec{r},\omega) = \int_{S(V)} \left[\mu(\vec{r}',\omega)\vec{\nabla}' j_0(\tfrac{\omega}{c}R') - j_0(\tfrac{\omega}{c}R')\vec{\nabla}'\mu(\vec{r}',\omega)\right]\cdot \hat{n}'\, ds' ,$$

$$R' = |\vec{r}' - \vec{r}| .$$

A eq. (27), chamada "Inverse Source Integral Equation (I-SIE)", relaciona a fonte com as observações dos campos μ e $\frac{\partial\mu}{\partial n}$ sobre qualquer superfície fechada $S(V)$ que contenha V_0. Note-se que quando $S(V)$ está no infinito, a eq. (27) se reduz à eq. (18), que depende apenas de observações da configuração angular do campo distante $\mu_0(\hat{r},\omega)$. A eq. (27), embora válida para observações em qualquer superfície externa $S(V)$, depende também de informações sobre $\frac{\partial\mu}{\partial n}$ e por isso mesmo é mais complexa. Voltaremos às eqs. (27) e (28) na seção 4.

Vemos na eq. (27) que se $f(\vec{r},\omega)$ é não-radiante, então ($R' \equiv |\vec{r}' - \vec{r}| = |\vec{r} - \vec{r}'| \equiv R$),

$$\int_{V_0} f(\vec{r}',\omega)\, j_0(\tfrac{\omega}{c}R)\, d^3r' = 0 .$$

Inversamente, suponhamos que a eq. (29) é satisfeita. Então, das eqs. (27) e (28),

$$\Theta(\vec{r},\omega) = \int_{S(V)} \left[\mu(\vec{r}',\omega)\vec{\nabla}' j_0(\tfrac{\omega}{c}R') - j_0(\tfrac{\omega}{c}R')\vec{\nabla}'\mu(\vec{r}',\omega)\right]\cdot \hat{n}'\, ds' = 0 .$$

Desde que $S(V)$ é arbitrária, isto significa que o integrando deve ser identicamente nulo:

$$\mu(\vec{r}',\omega)\vec{\nabla}' j_0(\tfrac{\omega}{c}R') - j_0(\tfrac{\omega}{c}R')\vec{\nabla}'\mu(\vec{r}',\omega) = 0 \ , \ \vec{r}' \in S(V) .$$

reescrevamos a função $j_0(\frac{\omega}{c}R')$ como uma função $h(\vec{r}')$:

$$h(\vec{r}') = j_0(\tfrac{\omega}{c}R') .$$

Portanto, devemos ter

$$\mu(\vec{r}',\omega)\vec{\nabla}' h(\vec{r}') - h(\vec{r}')\vec{\nabla}'\mu(\vec{r}',\omega) = 0 .$$

Se $h(\vec{r}') \neq 0$, vale a relação

$$\mu(\vec{r}',\omega)\vec{\nabla}' h(\vec{r}') - h(\vec{r}')\vec{\nabla}'\mu(\vec{r}',\omega) = -\left[h(\vec{r}')\right]^2 \vec{\nabla}'\left[\mu(\vec{r}')/h(\vec{r}')\right] .$$

A eq. (30') implica então que

$$\vec{\nabla}'\left[\mu(\vec{r}')/h(\vec{r}')\right] = 0 \ ;$$

o que resulta em .

$$\mathcal{U}(\vec{r}',\omega) = 0 \quad , \quad \vec{r}' \in S(V).$$

Desde que $S(V)$ é exterior a V_0 e arbitrária, decorre que

$$\mathcal{U}(\vec{r}',\omega) = 0 \quad , \quad \vec{r}' \notin V_0 \quad , \quad \frac{\omega}{c} R' \neq \alpha_{om} \quad , \quad m = 1,2,3,\cdots ,$$

onde α_{om} é alguma dentre as raízes de j_0. Se $\frac{\omega}{c} R' \to \alpha_{om}$, a eq. (30) se transforma em (supondo que $\vec{\nabla}'\mathcal{U}$ seja finita nesse limite)

$$\lim_{\frac{\omega}{c}R' \to \alpha_{om}} \mathcal{U}(\vec{r}',\omega) \cdot \lim_{\frac{\omega}{c}R' \to \alpha_{om}} \vec{\nabla}' j_0\left(\frac{\omega}{c} R'\right) = 0 \ .$$

Queremos avaliar o segundo limite da expressão acima:

$$\lim_{\frac{\omega}{c}R' \to \alpha_{om}} \vec{\nabla}' j_0\left(\frac{\omega}{c} R'\right) = \frac{\omega}{c} \, j_0'(x)\Big|_{x=\alpha_{om}} \cdot \vec{\nabla}'[R']\Big|_{\frac{\omega}{c}R' = \alpha_{om}} .$$

Desde que $j_0'(x) = -j_1(x)$ e $\vec{\nabla}'[R'] \neq 0$ em geral, o limite acima é não nulo em geral. Portanto:

$$\mu(\vec{r}',\omega) = 0 \quad , \vec{r}' \notin V_0 \; , \frac{\omega}{c} R' = \alpha_{om} \, .$$

Isto é, $\mu(\vec{r}';\omega)$ é também nula nos únicos pontos em que a dedução de (30") não se aplicava. Provamos então uma caracterização na forma integral de uma fonte não-radiante:

TEOREMA 4: uma fonte $f(\vec{r},\omega)$ com suporte na esfera V_0, é não-radiante se e só se

$$\int_{V_0} f(\vec{r}',\omega)\, j_0\left(\frac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|\right) d^3r' = 0 \quad .$$

O próximo teorema evidencia que o conjunto das fontes não-radiantes com suporte em V_0 é um conjunto não vazio (refs.(6) e (8)).

Sejam duas funções $f(\vec{r},\omega)$ e $\vartheta(\vec{r},\omega)$ relacionadas pela equação:

$$f(\vec{r},\omega) = -\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \vartheta(\vec{r},\omega) \quad .$$

Se a função (campo) $\vartheta(\vec{r},\omega)$ possue derivadas parciais segundas contínuas no espaço todo, a relação estabelecida pela eq. (32) a faz corresponder a uma e apenas uma função (fonte) $f(\vec{r},\omega)$ contínua no espaço todo. Isto expressa a unicidade da solução da eq. (32) para fontes contínuas aí.

Se ainda mais $v(\vec{r},\omega)$ possuir suporte na esfera V_0 ,sua fonte correspondente será uma fonte não-radiante com suporte em V_0 por construção. Fica estabelecido então o seguinte teorema:

TEOREMA 5:uma fonte $f(\vec{r},\omega)$ contínua no espaço todo é não-radiante com suporte em V_0 se e só se for da forma

$$f(\vec{r},\omega) = -\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) v(\vec{r},\omega) \quad ,$$

com $v(\vec{r},\omega)$ com suporte em V_0 e derivadas parciais segundas contínuas no espaço todo.

Finalmente, demonstraremos um último teorema de equivalência acerca de fontes não-radiantes (refs.(5) e (6)):

TEOREMA 6:uma fonte $f(\vec{r},\omega)$ com suporte em V_0 é não-radiante se e só se for ortogonal a toda solução $v(\vec{r},\omega)$ de $(\nabla^2+\omega^2/c^2)\,v(\vec{r},\omega)=0$ no espaço todo,no sentido de que

$$\left(f(\vec{r},\omega),\, v(\vec{r},\omega)\right) = \int_{V_0} f(\vec{r}',\omega)\, v^*(\vec{r}',\omega)\, d^3r' = 0 \quad .$$

O asterisco indica a conjugação complexa.

Preliminarmente, se $v(\vec{r},\omega)$ é solução da equação

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) v(\vec{r},\omega) = 0 \tag{34}$$

no espaço todo, sua forma mais geral é dada por (ref.(4), seç.16.1)

$$v(\vec{r},\omega) = \sum_{\ell,m} d_{\ell m} \psi_{\ell m}(\vec{r},\omega) \quad , \tag{35}$$

$$\psi_{\ell m}(\vec{r},\omega) = \frac{1}{N_\ell} j_\ell\left(\frac{\omega}{c}r\right) Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \quad , \tag{36}$$

$$N_\ell^2 = \int_0^a \left[j_\ell\left(\frac{\omega}{c}r\right)\right]^2 r^2 \, dr \quad ,$$

$$\ell = 0, 1, 2, \ldots, \; |m| \leq \ell \quad ,$$

onde as $\psi_{\ell m}(\vec{r},\omega)$ formam uma base ortonormal para o espaço das soluções da eq.(34), no sentido do produto definido por:

$$\left(\psi_{\ell m}, \psi_{\ell' m'}\right) = \int_{V_0} \psi_{\ell m}(\vec{r},\omega) \, \psi^*_{\ell' m'}(\vec{r},\omega) \, d^3 r' = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \; . \tag{37}$$

Agora, se $f(\vec{r},\omega)$ é uma fonte não-radiante com suporte em V_0, temos pelo teorema 4 que

$$\int_{V_0} f(\vec{r}',\omega)\, j_0(\tfrac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|)\, d^3r' = 0 \quad . \tag{38}$$

A função $j_0(\frac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|)$ admite a seguinte representação (ref.(6)):

$$j_0(\tfrac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|) = 4\pi \sum_{l,m} j_l(\tfrac{\omega}{c}r)\, j_l(\tfrac{\omega}{c}r')\, Y_{lm}(\theta,\varphi)\, Y^*_{lm}(\theta',\varphi') \quad . \tag{39}$$

Levando as eqs. (36) e (39) na eq. (38) e considerando que as séries aqui envolvidas convergem uniformemente no espaço todo, obtemos

$$\sum_{l,m} \left[\int_{V_0} f(\vec{r}',\omega)\, \psi^*_{lm}(\theta',\varphi')\, d^3r' \right] N_l^2\, \psi_{lm}(\vec{r},\omega) = 0 \quad ,$$

o que implica imediatamente em

$$\left(f(\vec{r},\omega),\, \psi^*_{lm}(\vec{r},\omega) \right) = \int_{V_0} f(\vec{r}',\omega)\, \psi^*_{lm}(\vec{r}',\omega)\, d^3r' = 0 \quad ,$$

que por sua vez , levando em conta a eq. (35) , implica na eq. (33) .

Inversamente, seja qualquer $\vartheta(\vec{r},\omega)$ dada pela eq. (35) e $f(\vec{r},\omega)$ com suporte em V_0 , tal que se verifica

$$\int_{V_0} f(\vec{r}';\omega)\, v^*(\vec{r}';\omega)\, d^3r' = 0 \quad ,$$

isto é,

$$\sum_{l,m} \alpha_{lm}\, d^*_{lm} = 0 \quad ,$$

$$\alpha_{lm} = \int_{V_0} f(\vec{r}';\omega)\, \psi^*_{lm}(\vec{r}';\omega)\, d^3r' \, .$$

Os números d^*_{lm} , $l=0,1,2,\ldots$, $|m| \leq l$, são inteiramente arbitrários. Já os α_{lm} são bem determinados, formando um conjunto característico da função $f(\vec{r};\omega)$ dada. Decorre disso que a igualdade acima só se verifica se

$$\alpha_{lm} = \int_{V_0} f(\vec{r}';\omega)\, \psi^*_{lm}(\vec{r}';\omega)\, d^3r' \equiv 0 \quad ,$$

isto é,

$$\int_{V_0} f(\vec{r}';\omega)\, j_l\!\left(\tfrac{\omega}{c} r'\right) Y^*_{lm}(\theta',\varphi')\, d^3r' = 0 \quad .$$

Multiplicando esta última igualdade por $4\pi\, j_l\!\left(\tfrac{\omega}{c} r\right) Y_{lm}(\theta,\varphi)$ e somando sobre todos os índices obtemos

$$\int_{V_0} f(\vec{r}',\omega) \sum_{lm} 4\pi\, j_l\!\left(\tfrac{\omega}{c} r\right) j_l\!\left(\tfrac{\omega}{c} r'\right) Y_{lm}(\theta,\varphi)\, Y^{*}_{lm}(\theta',\varphi')\, d^3r' = 0 \,,$$

$$\int_{V_0} f(\vec{r}',\omega)\, j_0\!\left(\tfrac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|\right) d^3r' = 0 \,,$$

donde se conclui que $f(\vec{r},\omega)$ é não-radiante com suporte em V_0.

Aqui se tratou de campos e fontes escalares. Quando eles são de natureza vetorial, como no caso das equações de Maxwell, é claro que os resultados aqui obtidos valem para cada componente de tais fontes e respectivos campos. Veremos a aplicação desses resultados a fontes e campos vetoriais no terceiro exemplo de fontes não-radiantes da seção seguinte. Visando isso, cabe definir, embora trivialmente, um campo não-radiante vetorial

DEFINIÇAO 2: uma função fonte vetorial $\vec{f}(\vec{r},\omega)$, não identicamente nula apenas na esfera suporte V_0, é não-radiante se cada componente cartesiana de $\vec{f}(\vec{r},\omega)$ for não-radiante no sentido da definição 1.

3-EXEMPLOS DE FONTES NÃO RADIANTES:

O objetivo dessa seção é dar exemplos da plausibilidade física e mesmo da existência corriqueira de tais fontes.

Como primeiro exemplo, vamos construir uma fonte não-radiante que seja harmônica no tempo,(*) esfericamente simétrica e confinada a um volume esférico V_0 de raio a (ref.(6)). Isto é,

$$F(\vec{r},t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} F_0(\vec{r})\, e^{-i\omega_0 t} & , r \leq a \\ 0 & , r > a \end{cases} \tag{40}$$

Desde que essa fonte não é contínua em $r=a$, não se espera que o campo procurado tenha derivadas parciais segundas contínuas aí (vide teorema 5, seção 2). Espera-se, contudo, que o campo e suas derivadas parciais primeiras sejam contínuas em $r=a$.

A transformada temporal de Fourier dessa fonte é dada por:

$$f(\vec{r},\omega) = F_0(\vec{r})\, \delta(\omega-\omega_0) . \tag{41}$$

Podemos usar o teorema 4 da seção precedente para impor a condição de não-radiação a essa fonte:

(*) Esta condição viola a causalidade física imposta pela eq. (1'). Deve-se considerá-la uma dependência idealizada; didática apenas. A sua transformada temporal de Fourier é no sentido de distribuições.

$$\delta(\omega-\omega_0)\int_{r'<a} F_0(r')\, j_0\left(\frac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|\right) d^3r' = 0 \quad , \forall\, \omega. \tag{42}$$

Levando a eq. (39) na eq. (42) e usando a propriedade de ortogonalidade dos harmônicos esféricos, chega-se a

$$\delta(\omega-\omega_0)\int_0^a F_0(r')\, j_0\left(\frac{\omega}{c}r'\right) r'^2\, dr' = 0 \ . \tag{43}$$

A eq. (43) é então a condição para a fonte proposta ser não-radiante.

Quanto ao campo gerado por uma fonte harmônica no tempo, esfericamente simétrica e confinada a uma esfera de raio $\underline{a}$, ele pode ser calculado a partir da eq. (6) com a ajuda da função de Green dada pela eq. (8) e da eq. (41) :

$$\mu(\vec{r},\omega) = \frac{i\omega}{c}\,\delta(\omega-\omega_0)\sum_{l,m} Y_{lm}(\theta,\varphi)\ \cdot$$

$$\cdot\int_0^a F_0(r')\, j_l\left(\frac{\omega}{c}r_<\right) h_l^{(1)}\left(\frac{\omega}{c}r_>\right) r'^2\, dr' \int_{\Omega'} Y^*_{lm}(\theta',\varphi')\, d\Omega' \ .$$

Usando novamente a ortogonalidade dos harmônicos esféricos, chegamos, para $\forall\, r$, a

$$\mu(\vec{r},\omega) = \frac{i\omega}{c}\,\delta(\omega-\omega_0)\int_0^a F_0(r')\, j_0\left(\frac{\omega}{c}r_<\right) h_0^{(1)}\left(\frac{\omega}{c}r_>\right) r'^2\, dr' \quad , \tag{44}$$

onde $r_>$ e $r_<$ são, respectivamente, o maior e o menor dentre r e r'. Dividindo o intervalo de integração $[0,a]$ em $[0,r]$ e $[r,a]$, e usando a convenção para $r_<$ e $r_>$, a eq. (44) pode ser escrita para $r<a$ como

$$\mathcal{M}(\vec{r},\omega) = i\frac{\omega}{c}\,\delta(\omega-\omega_0)\Big[h_0^{(1)}(\tfrac{\omega}{c}r)\int_0^r F_0(r')\,j_0(\tfrac{\omega}{c}r')\,r'^2 dr' + \\ + j_0(\tfrac{\omega}{c}r)\int_r^a F_0(r')\,h_0^{(1)}(\tfrac{\omega}{c}r')\,r'^2 dr'\Big]. \qquad (45)$$

Note-se que a condição de não-radiância, eq. (43), ainda não foi aqui usada, portanto a eq. (45) vale para qualquer fonte harmônica, esfericamente simétrica e confinada a uma região esférica de raio $\underline{a}$.

Vamos impor a condição de não-radiação eq. (43), que pode ser reescrita como

$$\delta(\omega-\omega_0)\int_0^r F_0(r')\,j_0(\tfrac{\omega}{c}r')\,r'^2 dr' = -\delta(\omega-\omega_0)\int_r^a F_0(r')\,j_0(\tfrac{\omega}{c}r')\,r'^2 dr' .$$

Ela permite escrever a eq. (45) como

$$\mathcal{M}(\vec{r},\omega) = i\frac{\omega}{c}\,\delta(\omega-\omega_0)\Big[j_0(\tfrac{\omega}{c}r)\int_r^a F_0(r')\,h_0^{(1)}(\tfrac{\omega}{c}r')\,r'^2 dr' - \\ - h_0^{(1)}(\tfrac{\omega}{c}r)\int_r^a F_0(r')\,j_0(\tfrac{\omega}{c}r')\,r'^2 dr'\Big].$$

Usando as relações

$$j_0(\tfrac{\omega}{c}r) = \tfrac{1}{2}\left[h_0^{(1)}(\tfrac{\omega}{c}r) + h_0^{(2)}(\tfrac{\omega}{c}r)\right] ,$$

$$h_0^{(1)}(\tfrac{\omega}{c}r) = \left[h_0^{(2)}(\tfrac{\omega}{c}r)\right]^* = -i \exp(i\tfrac{\omega}{c}r)/\tfrac{\omega}{c}r ,$$

a expressão para $\mu(\vec{r},\omega)$ se torna

$$\mu(\vec{r},\omega) = \delta(\omega-\omega_0)\,\frac{1}{r}\,\mathrm{Re}\left[A(r)\, e^{-i\frac{\omega}{c}r}\right] \quad , r<a , \tag{46}$$

onde $A(r)$ é dado por

$$A(r) = i\frac{c}{\omega}\int_r^a F_0(r')\, e^{i\frac{\omega}{c}r'}\, r'\,dr' \quad . \tag{47}$$

Pode-se ver que $\mu(\vec{r},\omega)$ se anula fora da esfera escrevendo a eq. (44) para $r>a$:

$$\mu(\vec{r},\omega) = i\frac{\omega}{c}\,\delta(\omega-\omega_0)\, h_0^{(1)}(\tfrac{\omega}{c}r)\int_0^a F_0(r')\, j_0(\tfrac{\omega}{c}r')\, r'^2 dr' \quad , r>a , \tag{48}$$

a qual é identicamente nula em virtude da condição eq. (43).

As eqs. (46) e (48) permitem a obtenção do campo para uma fonte harmônica, simetricamente esférica, confinada a uma esfera V_0 de raio <u>a</u> e não-radiante. Para isso, basta que as invertamos:

$$U(\vec{r},t) = \begin{cases} e^{-i\omega_0 t}\,\frac{1}{r}\,\mathrm{Re}\left[A(r)\, e^{-i\frac{\omega_0}{c}r}\right] & , r<a \\ 0 & , r>a , \end{cases} \tag{49}$$

onde $A(r)$ é dado por (47) com $\omega = \omega_0$.

A expressão eq. (49) evidencia que o campo $U(\vec{r},t)$ da fonte proposta possui: i) continuidade em $r=a$; ii) $\frac{\partial U}{\partial r}$ contínua aí; iii) $\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}$ descontínua aí.

Para especificar ainda mais o exemplo, suponhamos que a fonte, eq. (40), seja homogênea:

$$F_0(r) = cte = F_0 \quad . \tag{50}$$

A condição de não-radiação eq. (43) então se torna

$$\delta(\omega - \omega_0) \int_0^a j_0\left(\frac{\omega}{c} r\right) r^2 \, dr = 0 \quad .$$

sua inversão leva a

$$\int_0^a j_0\left(\frac{\omega_0}{c} r\right) r^2 \, dr = 0 \; ,$$

que, integrada, dá

$$j_1\left(\frac{\omega_0}{c} a\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{c} a\right) \Big/ \left(\frac{\omega_0}{c} a\right)^2 - \cos\left(\frac{\omega_0}{c} a\right) \Big/ \frac{\omega_0}{c} a = 0 \; . \tag{51}$$

Isto significa que a condição de não-radiação para uma particular frequência ω_0 impõe uma forte restrição aos raios possíveis para a esfera homogênea, qual seja, a de que

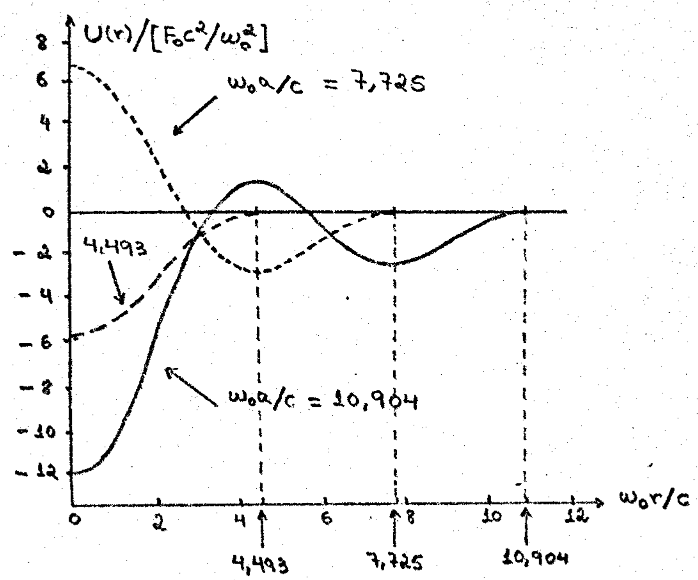
$$\frac{\omega_0}{c} a = \alpha_{1m} \quad , m = 1, 2, 3, \ldots, \tag{52}$$

onde α_{1m} é a m-ésima raiz de $j_1(x)$.
Usando a eq. (50) no cálculo de $A(r)$ dado pela eq. (47); levando $A(r)$ calculado na eq. (49); usando a eq. (51) para simplificações, chega-se finalmente a

$$U(\vec{r},t) = \frac{F_0 c^2}{\omega_0^2} \left[j_0\left(\frac{\omega_0}{c} r\right) / \cos\left(\frac{\omega_0}{c} a\right) - 1 \right] e^{-i\omega_0 t} \quad , r < a. \tag{53}$$

Os gráficos da parte espacial da eq. (53) para os três primeiros raios permitidos pela eq. (52), correspondentes às três primeiras raízes de j_1 ($\alpha_{11} = 4{,}493$, $\alpha_{12} = 7{,}725$, $\alpha_{13} = 10{,}904$), são dados na Fig. 2 abaixo:

Fig. 2



Apenas a título de exemplificação do uso do teorema 5 da seção 2 para a construção de fontes não-radiantes, seja a seguinte função campo com suporte na esfera $r<a$:

$$\mu(\vec{r},\omega) = \begin{cases} cte\ \delta(\omega-\omega_0)\, r^2 (r-a)^3 , & r<a \\ 0 & , r>a \end{cases} , \qquad (54)$$

cujas derivadas parciais segundas são contínuas no espaço todo. Pelo teorema 5 , a função fonte $f(\vec{r},\omega)$ dada por

$$f(\vec{r},\omega) = -\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\mu(\vec{r},\omega) ,$$

é uma fonte não-radiante contínua com suporte na esfera $r<a$ .Calculando e invertendo, encontramos para $F(\vec{r},t)$

$$F(\vec{r},t) = -\frac{cte}{2\pi}(r-a)\left[\left(\frac{\omega_0^2}{c^2}r^2+6\right)(r-a)^2 + 18\,r(r-a) + 6r^2\right]e^{-i\omega_0 t} , \quad r<a . \qquad (55)$$

O próximo e último exemplo de fontes não-radiantes provém do eletromagnetismo e irá evidenciar que ,em geral,toda fonte dada por uma densidade de corrente $\vec{J}(\vec{r},t)$ confinada a um volume V_0 ,possui uma componente não-radiante (refs.(5),(7)).

Seja uma distribuição de densidades de carga $\rho(\vec{r},t)$ e de corrente $\vec{J}(\vec{r},t)$, no vácuo, não nulas somente no volume V_0. As equações de Maxwell para essa situação são (unids. CGS):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r},t) = 0 \,, \tag{56}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t) = 4\pi\rho(\vec{r},t) \,, \tag{57}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{4\pi}{c}\vec{J}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} \,, \tag{58}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} \,. \tag{59}$$

Combinando as equações acima, obtemos para as componentes cartesianas de $\vec{E}(\vec{r},t)$ e $\vec{B}(\vec{r},t)$:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E}(\vec{r},t) = 4\pi\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{J}(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\rho(\vec{r},t)\right] \,, \tag{60}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{B}(\vec{r},t) = -\frac{4\pi}{c}\vec{\nabla}\times\vec{J}(\vec{r},t) \,. \tag{61}$$

Transformando as eqs. (60) e (61), obtemos:

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{e}(\vec{r},\omega) = 4\pi\left[-\frac{i\omega}{c^2}\vec{j}(\vec{r},\omega) + \vec{\nabla}\rho(\vec{r},\omega)\right] \,, \tag{62}$$

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{b}(\vec{r},\omega) = -\frac{4\pi}{c}\vec{\nabla}\times\vec{j}(\vec{r},\omega) \,, \tag{63}$$

onde $\vec{e}, \vec{b}$ e $\vec{j}, \rho$ são as transformadas de Fourier de $\vec{E}, \vec{B}$ e $\vec{J}, P$,respectivamente.

Por outro lado,dada a equação de continuidade:

$$\vec{\nabla}\cdot \vec{J}(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial t} P(\vec{r},t) = 0 ,$$

sua transformada de Fourier fornece

$$\vec{\nabla}\cdot \vec{j}(\vec{r},\omega) - i\omega\, \rho(\vec{r},\omega) = 0 , \tag{64}$$

o que permite reescrever a eq. (62) como

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \vec{e}(\vec{r},\omega) = -4\pi i \frac{\omega}{c^2}\left[\vec{j}(\vec{r},\omega) + \frac{c^2}{\omega^2}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},\omega)\right)\right] . \tag{65}$$

Impondo a restrição de que os campos e fontes são nulos para $t<t_0$ (eq.(1')); notando que as eqs. (60) e (61) estão na forma da eq. (1) ; que $P(\vec{r},t)$ e $\vec{J}(\vec{r},t)$ estão confinadas ao volume V_0 ,segue que toda a teoria desenvolvida na seção 2 vale aqui para cada componente cartesiana das fontes e campos, sendo as fontes dadas por

$$\vec{f}_E(\vec{r},\omega) = 4\pi i \frac{\omega}{c^2}\left[\vec{j}(\vec{r},\omega) + \frac{c^2}{\omega^2}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},\omega)\right)\right] , \tag{66}$$

$$\vec{f}_B(\vec{r},\omega) = \frac{4\pi}{c}\vec{\nabla}\times\vec{j}(\vec{r},\omega) . \tag{67}$$

Desejamos aplicar o teorema 2 da seção 2 às componentes das eqs. (66) e (67) . Desde que as eqs. (58) e (59) acoplam os campos $\vec{E}(\vec{r},t)$ e $\vec{B}(\vec{r},t)$,de modo que $\vec{E}(\vec{r},t)$ nulo fora de V_0 implica em $\vec{B}(\vec{r},t)$ nulo aí, e vice e versa, a exigência de não-radiância aplicada à eq. (66) deve ser equivalente à aplicação dessa condição à eq. (67) .

Aplicando o teorema 2 à eq. (66) , $\vec{f}_E(\vec{r},\omega)$ é não-radiante se e só se

$$\tilde{\vec{f}}_E(\vec{k},\omega)\Big|_{\omega=ck} = 0 \ . \tag{68}$$

A transformação espacial de Fourier transforma o operador $\vec{\nabla}$ em $i\vec{k}$,de modo que

$$\tilde{\vec{f}}_E(\vec{k},\omega) = 4\pi\frac{i\omega}{c^2}\left[\tilde{\vec{j}}(\vec{k},\omega) - \frac{c^2}{\omega^2}\vec{k}\left(\vec{k}\cdot\tilde{\vec{j}}(\vec{k},\omega)\right)\right] \ . \tag{69}$$

Para $\omega=ck$,a eq. (68) equivale a

$$\tilde{\vec{j}}(\vec{k},ck) = \hat{k}\left[\hat{k}\cdot\tilde{\vec{j}}(\vec{k},ck)\right] \ , \ \hat{k} = \vec{k}/k \ , \tag{70}$$

isto é, $\tilde{\vec{f}}_E(\vec{r},\omega)$ é não-radiante se e só se a eq. (70) se verifica (se $\tilde{\vec{j}}(\vec{k},ck)$ está totalmente na direção $\hat{k}$).

Aplicando agora o teorema 2 à eq. (67), $\vec{f}_B(\vec{r},\omega)$ é não-radiante se e só se

$$\tilde{\vec{f}}_B(\vec{k},\omega)\Big|_{\omega=ck} = 0 \quad . \tag{71}$$

Desde que

$$\tilde{\vec{f}}_B(\vec{k},\omega) = \frac{4\pi}{c}\, i\, \vec{k}\times\tilde{\vec{j}}(\vec{k},\omega) \quad , \tag{72}$$

para $\omega=ck$, a eq. (71) equivale a

$$\hat{k}\times\tilde{\vec{j}}(\vec{k},ck) = 0 \quad ,$$

$$\hat{k}\times\left[\hat{k}\times\tilde{\vec{j}}(\vec{k},ck)\right] = 0 \quad , \tag{73}$$

isto é, $\vec{f}_B(\vec{r},\omega)$ é não-radiante se e só se a eq. (73) se verifica (se $\tilde{\vec{j}}(\vec{k},ck)$ não possue componente transversal a $\hat{k}$).

Como $\tilde{\vec{j}}(\vec{k},ck)$ se decompõe univocamente na forma

$$\tilde{\vec{j}}(\vec{k},ck) = \hat{k}\left[\hat{k}\cdot\tilde{\vec{j}}(\vec{k},ck)\right] - \hat{k}\times\left[\hat{k}\times\tilde{\vec{j}}(\vec{k},ck)\right] \quad , \tag{74}$$

as eqs. (70) e (73) se equivalem, como esperávamos.

Vamos agora mostrar que toda densidade $\vec{J}(\vec{r},t)$ tem, em geral, uma componente não-radiante. Desde que a decomposição eq. (74) é única e válida para qualquer frequência ω, dada $\tilde{\vec{j}}(\vec{k},\omega)$ ela pode ser decomposta na forma:

$$\tilde{\vec{j}}(\vec{k},\omega) = \tilde{\vec{j}}_\ell(\vec{k},\omega) + \tilde{\vec{j}}_t(\vec{k},\omega) \quad , \tag{75}$$

$$\vec{\tilde{\jmath}}_{\ell}(\vec{k},\omega) = \hat{k}\left[\hat{k}\cdot\vec{\tilde{\jmath}}(\vec{k},\omega)\right] , \tag{76}$$

$$\vec{\tilde{\jmath}}_{t}(\vec{k},\omega) = -\hat{k}\times\left[\hat{k}\times\vec{\tilde{\jmath}}(\vec{k},\omega)\right] , \tag{77}$$

onde os índices ℓ e t indicam as componentes longitudinal e transversal a $\hat{k}$ de $\vec{\tilde{\jmath}}(\vec{k},\omega)$,respectivamente.Invertendo as eqs. (75) , (76) e (77) ,obtemos:

$$\vec{\jmath}(\vec{r},\omega) = \vec{\jmath}_{\ell}(\vec{r},\omega) + \vec{\jmath}_{t}(\vec{r},\omega) , \tag{78}$$

$$\vec{\jmath}_{\ell}(\vec{r},\omega) = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int_{V_0}\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{\jmath}(\vec{r}',\omega)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,d^3r' , \tag{79}$$

$$\vec{\jmath}_{t}(\vec{r},\omega) = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\int_{V_0}\frac{\vec{\jmath}(\vec{r}',\omega)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,d^3r' . \tag{80}$$

As eqs. (75) , (76) e (77) são,respectivamente,equivalentes às eqs. (78) , (79) e (80) ,em virtude da unicidade das transformações de Fourier.Portanto,desde que a eq. (76) vale para qualquer ω ,vale em particular para $\omega=ck$:

$$\vec{\tilde{\jmath}}_{\ell}(\vec{k},ck) = \hat{k}\left[\hat{k}\cdot\vec{\tilde{\jmath}}(\vec{k},ck)\right] . \tag{81}$$

A eq. (81) está na forma da eq. (70), o que significa que $\vec{f}_{E_\ell}(\vec{r},\omega)$ e $\vec{f}_{B_\ell}(\vec{r},\omega)$, obtidas a partir das eqs. (66) e (67) :

$$\vec{f}_{E_\ell}(\vec{r},\omega) = 4\pi \frac{i\omega}{c^2}\left[\vec{j}_\ell(\vec{r},\omega) + \frac{c^2}{\omega^2}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_\ell(\vec{r},\omega)\right)\right], \tag{82}$$

$$\vec{f}_{B_\ell}(\vec{r},\omega) = \frac{4\pi}{c}\vec{\nabla}\times\vec{j}_\ell(\vec{r},\omega), \tag{83}$$

são não-radiantes. Devido à linearidade das operações sobre $\vec{j} = \vec{j}_\ell + \vec{j}_t$ nas eqs. (66) e (67), as fontes $\vec{f}_E(\vec{r},\omega)$ e $\vec{f}_B(\vec{r},\omega)$ se decompõem em

$$\vec{f}_E(\vec{r},\omega) = \vec{f}_{E_\ell}(\vec{r},\omega) + \vec{f}_{E_t}(\vec{r},\omega),$$

$$\vec{f}_B(\vec{r},\omega) = \vec{f}_{B_\ell}(\vec{r},\omega) + \vec{f}_{B_t}(\vec{r},\omega),$$

onde as componentes $\vec{f}_{E_\ell}$ e $\vec{f}_{B_\ell}$ não irradiam.

Vimos que a componente $\vec{f}_{E_\ell}$ certamente não irradia. Mas toda a "porção" não-radiante de $\vec{f}_E$ é dada por $\vec{f}_{E_\ell}$? Isto é, $\vec{f}_E$ é não-radiante se e só se $\vec{f}_E = \vec{f}_{E_\ell}$? Esta igualdade é suficiente, conforme se viu àcima. No entanto, ela não é necessária pois isso acarretaria no teorema 2 que a condição necessária e suficiente para a não-radiância seria

$$\tilde{\tilde{f}}(\vec{k},\omega) = 0, \ \forall\vec{k}, \forall\omega.$$

Ora, isto implicaria na fonte não-radiante trivial,

$$\vec{J}(\vec{r},\omega) \equiv 0 \quad ,$$

que não nos interessa.

Uma segunda observação: os campos podem ser dados pelos potenciais $\phi(\vec{r},t)$ e $\vec{A}(\vec{r},t)$, que no padrão de Lorentz satisfazem:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r},t) \quad , \tag{84}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r},t) \quad ; \tag{85}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(\vec{r},t) = -4\pi\rho(\vec{r},t) \, , \tag{86}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{4\pi}{c}\vec{J}(\vec{r},t) \, , \tag{87}$$

$$\phi = \vec{A} = \rho = \vec{J} \equiv 0 \quad \text{se} \quad t < t_0 \, .$$

Se aplicarmos a teoria da seção 2, mais a definição 2, aos potenciais ϕ e $\vec{A}$, ao invés de aos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, chegamos a duas conclusões inteiramente consistentes: por um lado, se ϕ e $\vec{A}$ são identicamente nulos fora de alguma esfera contendo V_0 ,as eqs. (86) e (87) garantem que $\vec{E}$ e $\vec{B}$ também o serão aí. Por outro lado, aplicando a referida teoria às fontes das eqs. (84) e (85) ,encontramos as condições de não-radiação: i) para ϕ , $\tilde{\gamma}_\ell(\vec{K},cK) = 0$; ii) para $\vec{A}$, $\tilde{\vec{\gamma}}(\vec{K},cK)=0$,donde se conclui que as eqs. (70) e (73) se verificam e portanto $\vec{\mathcal{J}}_E$ e $\vec{\mathcal{J}}_B$ são não-radiantes.

4-O PROBLEMA DA FONTE INVERSO:

As seções precedentes trataram do problema da fonte direto: dada a configuração de fontes confinada a uma região V_0 finita, obtém-se os campos gerados pelas mesmas fora de V_0 . Outro problema direto seria: dados os campos na região não distante fora de V_0 ,obtém-se a forma dos campos no limite $r \to \infty$. Os problemas inversos correspondentes são: obter a configuração de fontes na região V_0 a partir dos campos gerados fora de V_0 (este é o problema inverso a ser tratado aqui); obter os campos em toda parte fora de V_0 a partir dos campos na região longínqua.

Os problemas inversos são de grande relevância experimental. Frequentemente se busca obter informaçãoes sobre a configuração de fontes e/ou campos numa dada região finita, à qual os instrumentos de medida não podem ou não devem ter acesso, a partir de medidas dos campos na região exterior, à qual se tem acesso experimental. É também frequente que tais instrumentos façam medidas na região distante. A investigação de uma certa região de interesse a partir de experimentos de espalhamento é um problema inverso desse último tipo (ref.(9)).

Pode ser mostrado (ref.(8)) que se for conhecida a configuração de radiação $\mu_0(\hat{r},\omega)$ de um certo campo - ver eq. (5) - o campo $\mu(\vec{r},\omega)$ fica unicamente determinado em toda parte (exterior a V_0) em função de $\mu_0(\hat{r},\omega)$. Isto é, esse problema inverso admite solução única. O teorema 3 da seção 2 é um corolário dessa unicidade e da óbvia unicidade do correspondente problema direto.

Quanto ao problema da fonte inverso, sua solução existe mas não possui unicidade. Isto é, o conhecimento apenas do campo $\mu(\vec{r},\omega)$ exterior a V_0 - ou, equivalentemente, apenas da configuração de radiação $\mu_0(\hat{r},\omega)$ - não provê informação suficiente para a determinação única da sua fonte $f(\vec{r},\omega)$ confinada a V_0, conforme mostraremos a seguir. Veremos também que esta não unicidade se deve à existência de fontes não-radiantes com suporte em V_0.

A abordagem dessa questão será feita de dois modos: no espaço $(\vec{r},t)$ real, estudando a equação integral

(27) (de que a eq. (18) é o caso particular quando $S(V)$ está no infinito). Esta análise busca a função fonte $f(\vec{r},\omega)$ em V_0 como sua solução (refs. (5) e (10)).

O segundo tratamento é feito no espaço $(\vec{K},\omega)$, a partir da transformada de Fourier da formulação acima (refs. (5), (7) e (11)).

Vejamos a primeira abordagem proposta.

A respeito do que se possa conhecer acêrca da fonte $f(\vec{r},\omega)$ com suporte em V_0 a partir do seu campo medido fora de V_0, vimos que o conhecimento do campo fora daí equivale ao seu conhecimento e de sua derivada normal apenas sobre uma superfície $S(V)$ fechada que contenha V_0. É exatamente isso que é expresso pela ISIE, eqs. (27) e (28) :

$$\int_{V_0} f(\vec{r}',\omega)\, j_0\!\left(\tfrac{\omega}{c}R\right) d^3r' = \textcircled{H}(\vec{r},\omega) \,, \tag{27}$$

$$\textcircled{H}(\vec{r},\omega) = \int_{S(V)} \left[\mu(\vec{r}',\omega)\, \vec{\nabla}' j_0\!\left(\tfrac{\omega}{c}R\right) - j_0\!\left(\tfrac{\omega}{c}R\right) \vec{\nabla}' \mu(\vec{r}',\omega) \right] \cdot \hat{n}'\, ds' \,. \tag{28}$$

Ela é uma equação integral não homogênea em que, para um segundo membro dado $\textcircled{H}(\vec{r},\omega)$, busca-se a função $f(\vec{r},\omega)$ que a satisfaça, isto é, que seja a sua solução.

Seja $\mathbb{E}$ o espaço das soluções da ISIE com suporte na esfera V_0, associadas a uma dada $\textcircled{H}(\vec{r},\omega)$.

Seja agora a equação de autovalores associada à ISIE:

$$\int_{V_0} \psi(\vec{r}\,',\omega)\, j_0\!\left(\tfrac{\omega}{c}R\right) d^3r' = \lambda\, \psi(\vec{r},\omega) \qquad (88)$$

Para autovalores λ não nulos, multipliquemos ambos os lados da eq. (88) pelo operador $(\nabla^2 + \omega^2/c^2)$:

$$\int_{V_0} \psi(\vec{r}\,',\omega)\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) j_0\!\left(\tfrac{\omega}{c}R\right) d^3r' = \lambda\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\psi(\vec{r},\omega) .$$

Desde que $\lambda \neq 0$ e $j_0(\frac{\omega}{c}R)$ é solução da equação de Helmholtz homogênea, vem que as autofunções procuradas são as que satisfazem

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\psi(\vec{r},\omega) = 0 .$$

Elas já nos são familiares quando da demonstração do teorema 6 da seção 2 , eqs. (34) a (36) .Como aqui são desejadas autofunções com suporte na esfera V_0 , as redefinimos como identicamente nulas fora de V_0 .Estas novas funções $\psi^a_{\ell m}(\vec{r},\omega)$ formam um conjunto ortonormal no sentido da eq. (37) .

Os autovalores $\lambda_{\ell m}$ associados às $\psi^a_{\ell m}(\vec{r},\omega)$ se calculam facilmente, de modo que temos:

$$\psi^{a}_{\ell m}(\vec{r},\omega) = \frac{1}{N_\ell}\, j_\ell(\tfrac{\omega}{c}r)\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi)\, H(r-a) \quad ,$$

$$\lambda_{\ell m} = 4\pi N_\ell^2 \quad ,$$

$$N_\ell^2 = \int_0^a \left[j_\ell(\tfrac{\omega}{c}r)\right]^2 r^2\, dr \quad ,$$

$$H(r-a) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad r \leq a \\ 0 & \text{se} \quad r > a \quad . \end{cases}$$

Para $\lambda = 0$, do teorema 4 da seção 2 se vê que o espaço das fontes não-radiantes com suporte em V_0 , referido aqui como $\mathbb{E}_{NR}$,é exatamente o espaço das soluções não triviais nesse suporte, da equação homogênea associada à ISIE. Que $\mathbb{E}_{NR}$ é não vazio segue do teorema 5. Portanto, as fontes $f(\vec{r},\omega)$ de $\mathbb{E}$ se decompõem em

$$f(\vec{r},\omega) = f_{NR}(\vec{r},\omega) + \hat{f}(\vec{r},\omega) \quad ,$$

sendo $f_{NR}(\vec{r},\omega)$ qualquer função de $\mathbb{E}_{NR}$ e sendo $\hat{f}(\vec{r},\omega)$ uma solução da ISIE sem componente em $\mathbb{E}_{NR}$.

A questão que se coloca é a seguinte: o conjunto ortonormal $\{\psi^a_{\ell m}\}$ é completo em relação a $\mathbb{E}$, i. e. , forma uma base para $\mathbb{E}$?

O teorema 6 mostra que o espaço $\mathbb{E}_{NR}$ é exatamente o complemento ortogonal do espaço gerado pelo conjunto $\{\psi^a_{\ell m}\}$, o qual chamaremos de $\mathbb{E}_{\ell m}$. Disso resulta que $\mathbb{E}$ não pode ser gerado por este conjunto devido justamente à presença de $f_{NR}(\vec{r},\omega)$ na eq. (92) . Suponhamos que $\hat{f}(\vec{r},\omega)$ pertence a $\mathbb{E}_{\ell m}$, i. e., pode ser unicamente representada na base $\{\psi^a_{\ell m}\}$ pela série

$$\hat{f}(\vec{r},\omega) = \sum_{\ell,m} d_{\ell m} \psi^a_{\ell m}(\vec{r},\omega) .$$

Levando as eqs. (39) e (93) na ISIE, eq. (27) , e fazendo uso das relações eqs. (37) ,chega-se a

$$d_{\ell m} = \frac{1}{4\pi N_\ell^2} \int_{V_0} \Theta(\vec{r}',\omega) \psi^{a*}_{\ell m}(\vec{r}',\omega) \, d^3r' ,$$

o que significa que os coeficientes $d_{\ell m}$ ficam unicamente determinados em função de $\Theta(\vec{r},\omega)$ experimentalmente conhecida. Dado que séries do tipo da eq. (93) convergem uniformemente em V_0 , $\hat{f}(\vec{r},\omega)$ efetivamente pertence a $\mathbb{E}_{\ell m}$.

A eq. (92) expressa a não unicidade do problema da fonte inverso a partir unicamente de informações sobre o seu campo externo. É claro que informações adicionais que determinem a componente $f_{NR}(\vec{r},\omega)$, a princípio arbitrária, tornam a solução única. Em particular, a solução única apresentada por Porter & Devaney na ref.(10), chamada por eles de solução de "energia " mínima , é meramente a solução eq. (92) condicionada à minimização da sua norma

$$\| f(\vec{r},\omega) \| = (f,f)^{1/2}$$

$$= \int_{V_0} f(\vec{r},\omega)\, f^*(\vec{r},\omega)\, d^3r \quad ,$$

o que evidentemente implica na exclusão em $f(\vec{r},\omega)$ de qualquer componente não-radiante arbitrária, e portanto na solução única eq. (93).

Vejamos agora o segundo tratamento. A eq. (18) fornece toda a informação que se pode pretender obter a respeito da configuração da fonte a partir de medidas do seu campo distante. Se fizermos na sua transformada eq. (19) , $\hat{r} \equiv \hat{k}$ e $\omega = ck$,obtemos:

$$\left[\tilde{f}(\vec{k},\omega) = \mu_0(\hat{k},\omega) \right]_{\omega = ck} . \tag{95}$$

Não é possível, portanto, obtermos $\tilde{f}(\vec{K},\omega)$, $\forall \vec{K}$, $\forall \omega$, (a partir da qual se obteria por inversão $F(\vec{r},t)$), senão apenas para a particular relação $\omega = cK$.

Quanto à eq. (27) (generalização da eq. (18)), se aplicarmos a ela a transformação de Fourier, juntamente com as propriedades de transformação já usadas, chegamos a

$$\widetilde{j_0(\tfrac{\omega}{c}r)}\,\tilde{f}(\vec{K},\omega) = -\,\widetilde{j_0(\tfrac{\omega}{c}r)} \int_{S(V)} \exp(-i\vec{K}\cdot\vec{r})\left[i\vec{K}\,\mu(\vec{r},\omega) + \vec{\nabla}\mu(\vec{r},\omega)\right]\cdot\hat{n}\,dS \;.,\qquad (96)$$

onde

$$\widetilde{j_0(\tfrac{\omega}{c}r)} = \int_{\substack{\text{esp.}\\ \text{todo}}} j_0(\tfrac{\omega}{c}r)\, e^{-i\vec{K}\cdot\vec{r}}\, d^3r \quad .$$

Desde que

$$\widetilde{j_0(\tfrac{\omega}{c}r)} = \frac{2\pi^2 c^2}{\omega^2}\,\delta(K-\tfrac{\omega}{c}) \quad , \qquad (96')$$

o cancelamento na eq. (96) de $\widetilde{j_0(\tfrac{\omega}{c}r)}$ só é possível se $\omega = cK$; então, só o que podemos obter é

$$\left[\tilde{f}(\vec{k},\omega) = -\int_{S(V)} \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{r})\left[i\vec{k}\,\mu(\vec{r},\omega) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \vec{\nabla}\mu(\vec{r},\omega)\right]\cdot\hat{n}\,ds\right]_{\omega=ck} .$$

De novo, não é possível se obter $\tilde{f}(\vec{k},\omega)$, $\forall\vec{k}$, $\forall\omega$, senão apenas para a particular relação $\omega=ck$. A eq. (97) expressa toda a informação que podemos obter acerca da transformada da fonte a partir de medidas dos campos μ e $\frac{\partial\mu}{\partial n}$ feitas sobre uma superfície arbitrária $S(V)$ que envolva V_0.

Além disso, pelo teorema 2 da seção 2 vemos que as eqs. (95) e (97) continuam satisfeitas se acrescentarmos arbitrariamente a $f(\vec{r},\omega)$ procurada quaisquer fontes não-radiantes. Ou seja, elas não fornecem qualquer informação sobre as possíveis componentes não-radiantes de $\tilde{f}(\vec{k},\omega)$ em $\omega=ck$.

Cabe aqui então a questão da equivalência das abordagens nos espaços real e das transformadas, uma vez que no primeiro as eqs. (92), (93) e (94) exibem uma solução completa, embora não única em virtude da existência de fontes não-radiantes. Sua componente puramente radiante $\hat{f}(\vec{r},\omega)$ fica unicamente determinada em função de $\Phi(\vec{r},\omega)$ conhecida.

Já no caso do tratamento no espaço das transformadas, as soluções apresentadas eqs. (15), (95) e (97) são incompletas, uma vez que não exibem uma transformada-solução para a fonte $\tilde{f}(\vec{k},\omega)$, $\forall\vec{k}$, $\forall\omega$, ainda que se soubesse "a priori" não possuir a fonte qualquer componente não-radiante. Veremos a seguir que também aqui a solução do problema se completa e que, como sugere a eq. (92), não é verdade que a solução só é única quando a componente não-radiante da fonte se anula identicamente (confira exemplo da pág. 40). Isto é, uma fonte possui em geral uma componente não-radiante à qual o problema inverso não tem acesso por insuficiência de informações.

Da eq. (92) obtemos:

$$\tilde{f}(\vec{k},\omega) = \tilde{f}_{NR}(\vec{k},\omega) + \tilde{\hat{f}}(\vec{k},\omega) .$$

Podemos calcular $\tilde{\hat{f}}(\vec{k},\omega)$. Substituindo as eqs. (94) e (28) na eq. (93) obtemos para $\hat{f}(\vec{r},\omega)$:

$$\hat{f}(\vec{r}'',\omega) = \sum_{l,m} \frac{1}{4\pi N_l^2} \psi_{lm}^{a}(\vec{r}'',\omega) \int_{S(V)} \Big\{ \mu(\vec{r}',\omega) \vec{\nabla}' \Big[\int_{V_0} j_0 \big(\tfrac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|\big) \cdot$$

$$\cdot \psi_{lm}^{*}(\vec{r},\omega)\, d^3r \Big] - \vec{\nabla}' \mu(\vec{r}',\omega) \Big[\int_{V_0} j_0\big(\tfrac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|\big) \psi_{lm}^{*}(\vec{r},\omega)\, d^3r \Big] \Big\} \cdot \hat{n}' ds' . \tag{99}$$

Podemos reescrever a eq. (39) para expressar $j_0(\frac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|)$ em termos das $\{\psi_{lm}\}$ no espaço todo:

$$j_0\big(\tfrac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|\big) = \sum_{l,m} 4\pi N_l^2 \, \psi_{lm}(\vec{r},\omega)\, \psi_{lm}^{*}(\vec{r}',\omega) . \tag{100}$$

Levando as eqs. (37) e (100) nas integrais da eq. (99) e rearranjando os termos remanescentes, obtemos:

$$\hat{f}(\vec{r}'',\omega) = \int_{S(V)} \Big\{ \mu(\vec{r}',\omega) \vec{\nabla}' \Big[\sum_{l,m} \psi_{lm}^{a}(\vec{r}'',\omega)\, \psi_{lm}^{*}(\vec{r}',\omega) \Big] -$$

$$- \vec{\nabla}' \mu(\vec{r}',\omega) \Big[\sum_{l,m} \psi_{lm}^{a}(\vec{r}'',\omega)\, \psi_{lm}^{*}(\vec{r}',\omega) \Big] \Big\} \cdot \hat{n}' ds' . \tag{101}$$

Agora notamos que vale a seguinte representação:

$$j_0\big(\tfrac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|\big)\, \delta(\vec{r}-\vec{r}')\, H(r-a) = \sum_{l,m} \psi_{lm}^{a}(\vec{r},\omega)\, \psi_{lm}^{*}(\vec{r}',\omega) . \tag{102}$$

Levando a eq. (102) na eq. (101):

$$\hat{f}(\vec{r}'',\omega) = \int_{S(V)} \Big[\mu(\vec{r}',\omega) \vec{\nabla}' j_0\big(\tfrac{\omega}{c}|\vec{r}''-\vec{r}'|\big)\, \delta(\vec{r}''-\vec{r}')\, H(r''-a) -$$

$$- j_0\big(\tfrac{\omega}{c}|\vec{r}''-\vec{r}'|\big)\, \delta(\vec{r}''-\vec{r}')\, H(r''-a)\, \vec{\nabla}' \mu(\vec{r}',\omega) \Big] \cdot \hat{n}' ds' . \tag{103}$$

Aplicando a transformação espacial de Fourier à eq. (103) ,chegamos finalmente a:

$$\tilde{\hat{f}}(\vec{k},\omega) = -\int_{S(V)} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'}\left[i\vec{k}\mu(\vec{r}',\omega) + \vec{\nabla}'\mu(\vec{r}',\omega)\right]\cdot\hat{n}'\,ds', \ \forall\vec{k},\forall\omega .$$

Substituindo este resultado na eq. (98), obtemos para a transformada total da fonte:

$$\tilde{f}(\vec{k},\omega) = \tilde{f}_{NR}(\vec{k},\omega) - \int_{S(V)} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'}\left[i\vec{k}\mu(\vec{r}',\omega) + \vec{\nabla}'\mu(\vec{r}',\omega)\right]\cdot\hat{n}'\,ds' ,$$

Estes resultados mostram que a transformada da componente puramente radiante $\tilde{\hat{f}}(\vec{k},\omega)$ é unicamente determinada em função do campo medido na superfície $S(V)$ arbitrária. Desde que $\hat{f}(\vec{r},\omega)$ dada pela eq. (93) é quadrado integrável, os dois tratamentos considerados se equivalem. Além disso, o teorema 2 da seção 2 e a eq. (105) mostram porque só se tem acesso a $\tilde{f}(\vec{k},\omega)$ total para $\omega = ck$, conforme estabelece a eq. (97).

Se a superfície $S(V)$ estiver no infinito, a eq. (95) deve ser recuperada a partir do teorema 2 e da eq. (105) na aproximação para a zona distante. Se $S_o(V)$ for uma superfície esférica de raio r_o , com r_o finito porém grande o suficiente para que a aproximação eq. (5) possa ser usada, a eq. (104) fornece:

$$\tilde{\hat{f}}(\vec{k},\omega) \cong -\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega} e^{-ir_0(\vec{k}\cdot\hat{r}-\frac{\omega}{c})} \mu_0(\hat{r},\omega)\left[ir_0\vec{k}\cdot\hat{r}+\left(i\frac{\omega}{c}r_0-1\right)\right] d\Omega ,$$

onde $d\Omega$ é o elemento de ângulo sólido. Fazendo a identificação $\vec{k}\equiv k\hat{z}$, usando coordenadas esféricas para $\hat{r}$ e integrando por partes, chegamos a

$$\tilde{\hat{f}}(\vec{k},\omega) \cong \frac{1}{2}e^{i\frac{\omega}{c}r_0}\left\{ \mu_0(\hat{k},\omega)\left[\frac{\omega}{ck}+1\right]e^{-ikr_0} - \right.$$

$$- \mu_0(-\hat{k},\omega)\left[\frac{\omega}{ck}-1\right]e^{ikr_0} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-ikr_0\cos\theta}\cos\theta\frac{\partial\mu_0}{\partial\theta}\,d\theta\, d\varphi +$$

$$\left. + \frac{\omega}{2\pi ck}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-ikr_0\cos\theta}\frac{\partial\mu_0}{\partial\theta}\,d\theta\, d\varphi \right\}. \qquad (106)$$

Vemos então que para $\omega\neq ck$, $\tilde{\hat{f}}(\vec{k},\omega)$, dada aproximadamente pela eq. (106), depende de forma complexa do fator geométrico r_0 e da configuração angular da radiação na zona distante $\mu_0(\hat{r},\omega)$. Apenas para $\omega = ck$ podemos fazer $r_0\to\infty$ e obter exatamente:

$$\tilde{\hat{f}}(\vec{k},ck) = \mu_0(\hat{k},ck). \qquad (107)$$

As eqs. (92) e (107) mais o teorema 2 levam à eq. (95), como se desejava mostrar.

A seguir, apresentamos uma condição adicional que impõe unicidade à solução eqs. (92) ou (105).

Se soubermos "a priori" ser a fonte da forma

$$F(\vec{r},t) = F_0(\vec{r})\,\Phi(t), \tag{108}$$

com $\Phi(t)$ dada e $F_0(\vec{r})$ desconhecida, sua transformada será dada por

$$\begin{aligned} f(\vec{r},\omega) &= F_0(\vec{r})\,\varphi(\omega), \\ \tilde{f}(\vec{K},\omega) &= \tilde{F}_0(\vec{K})\,\varphi(\omega), \end{aligned} \tag{109}$$

onde $\tilde{F}_0(\vec{K})$ resta ser identificada e $\varphi(\omega)$ é a distribuição espectral da fonte. Isso implica que os campos gerados $\mu(\vec{r},\omega)$ e $\mu_0(\hat{r},\omega)$ fatorizam nas formas - vide eqs. (6) e (19):

$$\mu(\vec{r},\omega) = \check{\mu}(\vec{r},\omega)\,\varphi(\omega), \tag{110}$$

$$\mu_0(\hat{r},\omega) = \check{\mu}_0(\vec{r},\omega)\,\varphi(\omega). \tag{111}$$

Levando as eqs. (109), (110) e (111) nas eqs. (95) e (97), obtemos respectivamente:

$$\left[\tilde{F}_o(\vec{K})\, \varphi(\omega) = \check{\mu}_o(\hat{K},\omega)\, \varphi(\omega) \right]_{\omega = cK} , \qquad (112)$$

$$\left[\tilde{F}_o(\vec{K})\, \varphi(\omega) = -\varphi(\omega) \int_{S(V)} e^{-i\vec{K}\cdot\vec{r}'} \left[i\vec{K}\, \check{\mu}(\vec{r}',\omega) + \vec{\nabla}'\check{\mu}(\vec{r}',\omega) \right] \cdot \hat{n}'\, ds' \right]_{\omega = cK} . \qquad (113)$$

O cancelamento de $\varphi(\omega)$ nas eqs. (112) ou (113) não é tão imediato quanto parece: isso só é possível para os valores de ω tais que a distribuição espectral $\varphi(\omega)$ é não nula -esse conjunto de ω's é o espectro da fonte. Se o espectro for um intervalo contínuo $[\omega_o, \omega_o + \Delta\omega]$ de largura $\Delta\omega$ finita, as eqs. (112) e (113) fornecem para $\omega_o \leq \omega = cK \leq \omega_o + \Delta\omega$:

$$\tilde{F}_o(\vec{K}) = \check{\mu}_o(\hat{K}, cK) , \qquad (114)$$

$$\tilde{F}_o(\vec{K}) = -\int_{S(V)} e^{-i\vec{K}\cdot\vec{r}'} \left[i\vec{K}\mu(\vec{r}', cK) + \vec{\nabla}'\mu(\vec{r}', cK) \right] \cdot \hat{n}'\, ds' , \qquad (115)$$

isto é, elas especificam $\tilde{F}_o(\vec{K})$ para o volume de uma casca esférica finita no espaço $\mathbb{R}^3(\vec{K})$.

Uma vez que $F_o(\vec{r})$ possui suporte V_o finito em $\mathbb{R}^3(\vec{r})$, sua transformada $\tilde{F}_o(\vec{K})$ é analítica em todo o espaço $\mathbb{R}^3(\vec{K})$. Como as eqs. (114) e (115) fornecem a transformada num volume finito desse domínio, por extensão analítica elas valem para qualquer $\vec{K}$ e o problema tem a solução única apresentada por estas equações, as quais são equivalentes conforme já foi visto.

Levando a eq. (115) na eq. (109), obtemos a soluç
ão completa $\tilde{f}(\vec{k},\omega)$. Levando finalmente esta solução e a eq. (110) na eq. (105), resulta que a transformada da componente não-radiante dessa fonte é dada por

$$\tilde{f}_{NR}(\vec{k},\omega) = \varphi(\omega) \int_{S(V)} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} \left\{ i\vec{k}\left[\check{\mu}(\vec{r}',\omega) - \check{\mu}(\vec{r}',ck)\right] + \vec{\nabla}'\left[\check{\mu}(\vec{r}',\omega) - \check{\mu}(\vec{r}',ck)\right]\right\}\cdot\hat{n}'\,ds', \quad (1$$

que, por inversão, fornece $F_{NR}(\vec{r},t)$. Isso exemplifica que a solução única dada pelas eqs. (109) e (115) (ou (114)) possui componente não-radiante não nula dada pela eq. (116).

Por outro lado, se o espectro for discreto a situação é diferente. Por exemplo, se a dependência temporal de $F(\vec{r},t)$ for harmônica,

$$F(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi} F_0(\vec{r})\, e^{-i\omega_0 t}, \quad (117)$$

$\varphi(\omega)$ será dada por

$$\varphi(\omega) = \delta(\omega-\omega_0). \quad (118)$$

Levando a eq. (118) nas eqs. (112) e (113), só se obtém a transformada $\tilde{F}_0(\vec{k})$ na superfície esférica $\omega_0 = ck$ do espaço $\mathbb{R}^3(\vec{k})$:

$$\left[\tilde{F}_0(\vec{k}) = -\int_{S(V)} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'}\left[i\vec{k}\,\check{\mu}(\vec{r}',\omega_0) + \vec{\nabla}'\check{\mu}(\vec{r}',\omega_0)\right]\cdot\hat{n}'\,ds'\right]_{\omega_0=ck}. \quad (119)$$

Isto não é suficiente para a extensão analítica da expressão dada pela eq. (119), uma vez que ela exige que se conheça $\vec{F}_0(\vec{R})$ em algum volume do espaço $\mathbb{R}^3(\vec{R})$. Aqui então o problema continua não único, ou seja, ainda que a eq. (117) seja da forma da eq. (108), seu espectro monocromático não fornece informação suficiente para a determinação única de $\vec{F}_0(\vec{R})$.

Para finalizar esta seção, mencionamos que Stone (ref.(12)) em 1980 e Bojarski (ref.(13)) em 1981 pretenderam mostrar que os problemas da fonte inverso e de espalhamento inverso possuem soluções únicas. A polêmica por eles levantada está descrita numa série de comentários sucessivos (refs. (14) a (18)) entre aqueles autores e Devaney & Sherman. Nesse debate, fisica e matematicamente muito instrutivo, a natureza exata de tais problemas é recuperada e a não unicidade das suas soluções transparece, em acordo com o que aqui se apresenta.

5-FONTES NAO RADIANTES ESTATISTICAS:

Foi mostrado recentemente (refs. (25) e (26)) que correlações na flutuação da fonte podem produzir "red" ou "blue shifts" do espectro emitido. Visando tal estudo, a presente seção foi elaborada, embora sua aplicação ao mesmo permanece em aberto.

Nesta seção trataremos do problema da fonte inverso para fontes estatísticas. Ainda que num contexto próprio, sua formulação segue diretamente daquela apresentada nas seções anteriores para o caso determinístico. Preliminarmente, consideremos o contexto estatístico a ser utilizado (refs. (19), (20) e (21)).

Sabemos que os campos e fontes que ocorrem na natureza não possuem dependência espaço-temporal perfeitamente conhecida, i. e., não são determinísticos. Mesmo os campos e fontes experimentalmente produzidos sofrem flutuações que, por não poderem ser conhecidas "a priori" (ainda que possam ser mais ou menos bem controladas) só podem ser tratadas como desvios aleatórios ou estatísticos.

Além das flutuações a que os campos e fontes estão sujeitos, uma consideração de outra ordem pode tornar necessário o tratamento estatístico dos mesmos: embora a teoria de campos clássica considera tais entidades como pontual e instantaneamente mensuráveis, as medidas são quase sempre feitas em regiões macroscópicas e durante intervalos de tempo longos comparados com a escala de variação espaço-temporal das grandezas envolvidas. O que se detecta então são valores médios e a teoria deve trabalhar com médias convenientemente definidas das mesmas.

Aqui, somente as flutuações espaço-temporais, independentemente dos processos de medida, justificarão o tratamento estatístico.

Designemos por $\{A(\vec{r},t)\}$ um ensemble de grandezas $A(\vec{r},t)$ com certas propriedades comuns. Seja $B(A(\vec{r},t))$ qualquer grandeza de interesse definida em função da grandeza $A(\vec{r},t)$ do referido ensemble. Se quisermos medir $B(A(\vec{r},t))$, o caráter estatístico do problema impõe que o que se deve considerar é a média $B_A(\vec{r},t)$ de $B(A(\vec{r},t))$, tomada sobre o ensemble:

$$B_A(\vec{r},t) = \langle B(A(\vec{r},t)) \rangle \quad , \tag{120}$$

onde $\langle \quad \rangle$ simboliza tal média, que é definida por

$$\langle B(A(\vec{r},t)) \rangle = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \, B(A_i(\vec{r},t)) \quad , \tag{121}$$

sendo $A_i(\vec{r},t)$ cada elemento do ensemble e ρ_i sua correspondente densidade de probabilidade. Se $N \to \infty$, pressupõe-se que este limite exista na expressão acima.

Se o ensemble é estacionário, por definição a média $B_A(\vec{r},t)$ de qualquer $B(A(\vec{r},t))$ não depende do tempo, i. e., $B_A(\vec{r},t) = B_A(\vec{r})$, ainda que os elementos $A(\vec{r},t)$ dependam. Nesse caso, geralmente assume-se, sempre que for conveniente, uma hipótese do tipo ergódica, segundo a qual a seguinte média temporal $\overline{B}(\vec{r})$ tomada sobre qualquer elemento $A_i(\vec{r},t)$ do ensemble,

$$\overline{B}(\vec{r}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} B(A_i(\vec{r},t))\, dt \quad , \tag{122}$$

se iguala à média sobre o ensemble:

$$B_A(\vec{r}) = \overline{B}(\vec{r}) \ . \tag{123}$$

Ainda mais, o caráter estacionário do ensemble exige que as $A(\vec{r},t)$ mantenham seu comportamento estatístico sob qualquer translação temporal e portanto não podem tender a zero quando $t\to\pm\infty$. Portanto, elas não possuem em geral transformadas temporais de Fourier no sentido convencional (ainda que casos particulares de funções quadrado integráveis que não tendem a zero para $t\to\pm\infty$ existam; confira-se a ref.(24), sec. 5.6). Aqui, tais transformadas devem ser entendidas no sentido de distribuições (ref. (24), cap.4), o que foi implicitamente aceito já nos primeiro e segundo exemplos de fontes não-radiantes determinísticas da seção 3 deste estudo.

Seja então um ensemble $\{F(\vec{r},t)\}$ de fontes $F(\vec{r},t)$ flutuantes no tempo e no espaço com suporte finito na esfera V_0 e $\{U(\vec{r},t)\}$ o ensemble de campos $U(\vec{r},t)$ relacionados às $F(\vec{r},t)$ respectivas pela equação de onda eq. (1) :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) U(\vec{r},t) = -F(\vec{r},t) \ . \qquad (1)$$

Tais ensembles serão considerados estacionários.

Definem-se então as "funções de coerência mútua" $\Gamma_F(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\tau)$ e $\Gamma_U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\tau)$,

$$\Gamma_F(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\tau) = \langle F(\vec{r}_1,t+\tau)\, F^*(\vec{r}_2,t) \rangle \ , \qquad (124)$$

$$\Gamma_U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\tau) = \langle U(\vec{r}_1,t+\tau)\, U^*(\vec{r}_2,t) \rangle \ , \qquad (125)$$

associadas a cada ensemble, onde τ é um parâmetro arbitrário de translação temporal e $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ são dois pontos quaisquer do espaço. O fato de que $\Gamma_{F,U}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\tau)$ não dependem de t decorre do caráter estacionário do ensemble.

O significado físico da escolha das grandezas dadas pelas eqs. (124) e (125) para o estudo estatístico de campos e fontes que satisfazem a equação de onda está amplamente discutida na literatura (veja-se por exmplo as refs. (19), (20) e (21)). Sucintamente, tais grandezas aparecem naturalmente na descrição estatística de propriedades que dependem em segunda ordem de tais campos e fontes e em termos que tipicamente refletem fenômenos cooperativos aos quais associamos os conceitos de coerência, incoerência e coerência parcial. Por exemplo, se definirmos o "grau de coerência mútua " $g(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\tau)$ como a função de coerência mútua $\Gamma(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\tau)$ normalizada pelas intensidades $\Gamma(\vec{r}_i,\vec{r}_i,0)$ em $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$,

$$g(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\tau) = \frac{\Gamma(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\tau)}{\left[\Gamma(\vec{r}_1,\vec{r}_1,0)\,\Gamma(\vec{r}_2,\vec{r}_2,0)\right]^{1/2}} \qquad (126)$$

pode ser facilmente mostrado que

$$0 \leqslant |g(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\tau)| \leq 1 , \qquad (127)$$

e que vale o seguinte para campos óticos (ref.(19), sec. 4.2) : i) $|g(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\tau)|=1$, $\forall\vec{r}_1$, $\forall\vec{r}_2$ do espaço todo, $\forall\tau$, se e só se cada campo do ensemble possuir dependência temporal harmônica de mesma frequência; ii) não pode existir um ensemble de campos não nulos no espaço livre tal que $|g(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\tau)|=0$, $\forall\vec{r}_1$, $\forall\vec{r}_2$ do espaço todo , $\forall\tau$, (em particular, se $|g(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\tau)|=0$ para todos os pares de pontos de uma superfície contínua fechada , $\forall\tau$, então a superfície não irradia). Os casos extremos i) e ii) idealizam os conceitos de coerência e incoerência totais do campo, situações que não ocorrem na realidade, como é óbvio.

Além disso, na experiência da dupla fenda de Young (e em outras montagens em que o fenômeno de interferência tem lugar) o termo de interferência na intensidade das franjas é função de uma grandeza do tipo dado pela eq. (125)

Voltemos à formulação do nosso problema. As transformadas temporais de Fourier de $F(\vec{r},t)$ e $U(\vec{r},t)$ são dadas por:

$$f(\vec{r},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\vec{r},t)\, e^{i\omega t}\, dt \,, \tag{128}$$

$$\mu(\vec{r},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(\vec{r},t)\, e^{i\omega t}\, dt \,. \tag{129}$$

Calculando as grandezas $\langle f(\vec{r}_1,\omega) f^*(\vec{r}_2,\omega')\rangle$ e $\langle \mu(\vec{r}_1,\omega)\mu^*(\vec{r}_2,\omega')\rangle$, fazendo a substituição de variáveis $t = t' + \tau$, e lembrando que os ensembles são estacionários e portanto as médias dadas pelas eqs. (124) e (125) não dependem do tempo t, chegamos a

$$\langle f(\vec{r}_1,\omega) f^*(\vec{r}_2,\omega')\rangle = \gamma_F(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)\, \delta(\omega-\omega') \,, \tag{130}$$

$$\langle \mu(\vec{r}_1,\omega)\mu^*(\vec{r}_2,\omega')\rangle = \gamma_U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)\, \delta(\omega-\omega') \,, \tag{131}$$

onde se definem as "densidades espectrais" $\gamma_{F,U}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\tau)$ da fonte e do campo, respectivamente, por

$$\gamma_{F,U}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{F,U}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\tau)\, e^{i\omega\tau}\, d\tau \,, \tag{132}$$

i. e., como as transformadas das respectivas funções de coerência mútua. As eqs. (130) e (131) implicam que as diferentes componentes de Fourier dos campos e fontes não se correlacionam espacialmente, enquanto que as intensidades da correlação para $\omega=\omega'$ são dadas pelas densidades espectrais $\gamma_{F,U}$.

Se avançarmos ainda mais e calcularmos $\langle \tilde{f}(\vec{K}_1,\omega)\tilde{f}^*(\vec{K}_2,\omega')\rangle$ e $\langle \tilde{\mu}(\vec{K}_1,\omega)\tilde{\mu}^*(\vec{K}_2,\omega')\rangle$ a partir das transformações espaciais de Fourier das eqs. (128) e 129 , obtemos

$$\langle \tilde{f}(\vec{K}_1,\omega)\tilde{f}^*(\vec{K}_2,\omega')\rangle = \tilde{\gamma}_F(\vec{K}_1,-\vec{K}_2,\omega)\,\delta(\omega-\omega'), \tag{133}$$

$$\langle \tilde{\mu}(\vec{K}_1,\omega)\tilde{\mu}^*(\vec{K}_2,\omega')\rangle = \tilde{\gamma}_U(\vec{K}_1,-\vec{K}_2,\omega)\,\delta(\omega-\omega'), \tag{134}$$

onde

$$\gamma_{F,U}(\vec{K}_1,\vec{K}_2,\omega) = \int_{\substack{\text{Esp.}\\ \text{todo}}}\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{F,U}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\tau)\, e^{i(\omega\tau-\vec{K}_1\cdot\vec{r}_1-\vec{K}_2\cdot\vec{r}_2)}\, d\tau\, d^3r_1\, d^3r_2 \tag{135}$$

é a transformada total de Fourier de $\Gamma_{F,U}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\tau)$ em sete dimensões.

Além disso, a partir das eqs. (2) , (5) , (6) e (7) :

$$\left(\nabla^2+\frac{\omega^2}{c^2}\right)\mu(\vec{r},\omega) = -f(\vec{r},\omega), \tag{2}$$

$$\mu(\vec{r},\omega) \sim \mu_0(\hat{r},\omega)\,\frac{e^{i\frac{\omega}{c}r}}{4\pi r},\quad r\to\infty,\quad \hat{r}=\frac{\vec{r}}{r}, \tag{5}$$

$$\mu(\vec{r},\omega) = \int_{V_0} f(\vec{r}\,',\omega)\,g(R,\omega)\,d^3r', \tag{6}$$

$$g(R,\omega) = \frac{e^{i\frac{\omega}{c}R}}{4\pi R},\quad R=|\vec{r}-\vec{r}\,'|, \tag{7}$$

que formulam e resolvem o problema direto determinístico, chegamos facilmente ao mesmo para o problema direto estatístico correspondente:

$$\left(\nabla_1^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\left(\nabla_2^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \gamma_U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \omega) = \gamma_F(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \omega) \quad , \tag{136}$$

$$\gamma_U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \omega) \sim \gamma_U^0(\hat{r}_1, \hat{r}_2, \omega) \; \frac{e^{i\frac{\omega}{c}(r_1 - r_2)}}{(4\pi)^2 \, r_1 r_2} \; , \; r_i \to \infty, \; \hat{r}_i = \frac{\vec{r}_i}{r_i} \; , \; i = 1,2,$$

$$\gamma_U^0 (\hat{r}_1, \hat{r}_2, \omega) = \langle \mu_0(\hat{r}_1, \omega) \, \mu_0^*(\hat{r}_2, \omega) \rangle \quad , \tag{137}$$

$$\gamma_U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \omega) = \int_{V_0}\int_{V_0} \gamma_F(\vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}', \omega) \, g(R_1, \omega) \, g(R_2, \omega) \; d^3 r_1' \, d^3 r_2' \quad , \tag{138}$$

$$g(R_i \; , \omega) = \frac{e^{i\frac{\omega}{c}R_i}}{4\pi \, R_i} \; , \; R_i = |\, \vec{r}_i - \vec{r}_i{}' \,| \; , \; i = 1,2 .$$

No problema da fonte inverso estatístico (refs. (22) e (23)) busca-se obter a densidade espectral $\gamma_F(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \omega)$ do ensemble $\{F(\vec{r}, t)\}$ das fontes com suporte na esfera V_0 a partir apenas do conhecimento da densidade espectral $\gamma_U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \omega)$ do ensemble $\{U(\vec{r}, t)\}$ dos campos na região exterior a V_0. Veremos que a sua solução é também não única e que isso decorre de modo imediato da não unicidade do correspondente problema determinístico. Definimos agora, de um modo natural, o que seja um ensemble não-radiante de fontes:

DEFINIÇÃO 3: dados um ensemble de fontes $\{F(\vec{r},t)\}$ com suporte na esfera V_o, e o ensemble de campos $\{U(\vec{r},t)\}$ gerado por ele segundo a eq. (1), o ensemble de fontes é dito não-radiante se a densidade espectral $\gamma_U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\tau)$ do seu correspondente ensemble de campos for identicamente nula para todos os pares de pontos exteriores a V_o.

De posse desta definição, toda a formulação do problema inverso segue do, e paralelamente ao, desenvolvimento feito nas seções precedentes.

Por exemplo, das eqs. (9) e (10) da seção 2 e das eqs. (130) e (131), chegamos para $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$:

$$\gamma_U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\substack{l,m \\ l',m'}} C_{ll'mm'}\left(\frac{\omega}{c}r_1, \frac{\omega}{c}r_2, \omega\right) h_l^{(1)}\left(\frac{\omega}{c}r_1\right) h_{l'}^{(1)*}\left(\frac{\omega}{c}r_2\right) \cdot \tag{139}$$

$$\cdot\, Y_{lm}(\theta_1,\varphi_1)\, Y^*_{l'm'}(\theta_2,\varphi_2)\,,$$

$$C_{ll'mm'}\left(\frac{\omega}{c}r_1, \frac{\omega}{c}r_2, \omega\right) = \int_{V_o}\int_{V_o} \gamma_F(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\tau)\, j_l\left(\frac{\omega}{c}r_1\right) j_{l'}\left(\frac{\omega}{c}r_2\right) Y_{lm}(\theta_1,\varphi_1)\, Y^*_{l'm'}(\theta_2,\varphi_2)\, d^3r_1\, d^3r_2\,. \tag{140}$$

Da unicidade da representação eq. (139) para $\gamma_U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)$ para todos os pares de pontos exteriores a V_o, e da definição 3, chega-se ao teorema seguinte:

TEOREMA 7: $\{F(\vec{r},t)\}$ com suporte na esfera V_0 é não-radiante se e só se os coeficientes $C_{\ell\ell' m m'}$ dados pela eq. (140) forem identicamente nulos.

Continuando, da representação única eqs.(13) e (14) para $\tilde{f}(\vec{k},\omega)$, e das eqs. (130) e (133), obtemos a seguinte representação única para $\tilde{\gamma}_F(\vec{k}_1,-\vec{k}_2,\omega)$:

$$\tilde{\gamma}_F(\vec{k}_1,-\vec{k}_2,\omega) = (4\pi)^2 \sum_{\substack{\ell,m\\ \ell',m'}} (-i)^{\ell}(i)^{\ell'} d_{\ell\ell' m m'}(k_1,k_2,\omega)\, Y_{\ell m}(\alpha_1,\beta_1)\, Y^*_{\ell' m'}(\alpha_2,\beta_2), \tag{141}$$

$$d_{\ell\ell' m m'}(k_1,k_2,\omega) = \int_{V_0}\int_{V_0} \gamma_F(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)\, j_{\ell}(k_1 r_1)\, j_{\ell'}(k_2 r_2)\, Y^*_{\ell m}(\theta_1,\varphi_1)\, Y_{\ell' m'}(\theta_2,\varphi_2)\, d^3r_1 d^3r_2 . \tag{142}$$

onde $(k_{1,2},\alpha_{1,2},\beta_{1,2})$ são as coordenadas esféricas de $\vec{k}_{1,2}$.

Comparando os coeficientes dados pelas eqs. (140) e (142) e levando em conta o teorema 7 , conclui-se imediatamente o seguinte teorema:

TEOREMA 8: $\{F(\vec{r},t)\}$ com suporte na esfera V_0 é não-radiante se e só se

$$\tilde{\gamma}_F(\vec{k}_1,-\vec{k}_2,\omega)\Big|_{\omega=ck_1=ck_2} = 0 . \tag{143}$$

Por uma transposição mecânica do tipo acima feito, chega-se às seguintes expressões de interesse:

Da eq. (19):

$$\tilde{\gamma}_F\left(\frac{\omega}{c}\hat{r}_1, -\frac{\omega}{c}\hat{r}_2, \omega\right) = \gamma_U^0(\hat{r}_1, \hat{r}_2, \omega) . \tag{144}$$

Da definição 3, do teorema 8 e da eq. (144):

TEOREMA 9: $\{F(\vec{r},t)\}$ com suporte na esfera V_0 é não-radiante se e só se

$$\gamma_U^0(\hat{r}_1, \hat{r}_2, \omega) = 0 . \tag{145}$$

Aqui, como no caso determinístico, este teorema expressa a equivalência entre o conhecimento de $\gamma_U^0(\hat{r}_1,\hat{r}_2,\omega)$ na zona distante e de $\gamma_U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)$ em toda parte fora de V_0 . Isto pode ser facilmente visto (ref. 23) expandindo assintoticamente ambos os membros da eq. (139) para $r_1 \to \infty$ e $r_2 \to \infty$. Daí, é imediato que os coeficientes da expansão considerada são unicamente determinados por $\gamma_U^0(\hat{r}_1,\hat{r}_2,\omega)$.

Para obtermos uma representação integral para o presente problema análoga à eq. (27) – a ISIE – para o caso determinístico, partimos das eqs. (27) e (28) e chegamos a

$$\int_{V_0}\int_{V_0} \gamma_F(\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}',\omega)\, j_0\left(\tfrac{\omega}{c}R_1\right) j_0\left(\tfrac{\omega}{c}R_2\right) d^3r_1' \, d^3r_2' = \Omega(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega), \tag{146}$$

$$\Omega(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega) = \int_{S(V)}\int_{S(V)} \Big\{ \frac{\partial j_0(\frac{\omega}{c}R_1)}{\partial n_1'} \frac{\partial j_0(\frac{\omega}{c}R_2)}{\partial n_2'} \gamma_U(\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}',\omega) +$$
$$+ j_0\left(\tfrac{\omega}{c}R_1\right) j_0\left(\tfrac{\omega}{c}R_2\right) \frac{\partial^2}{\partial n_1' \partial n_2'} \gamma_U(\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}',\omega) -$$
$$- j_0\left(\tfrac{\omega}{c}R_1\right) \frac{\partial j_0(\frac{\omega}{c}R_2)}{\partial n_2'} \frac{\partial}{\partial n_1'} \gamma_U(\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}',\omega) -$$
$$- \frac{\partial j_0(\frac{\omega}{c}R_1)}{\partial n_1'} j_0\left(\tfrac{\omega}{c}R_2\right) \frac{\partial}{\partial n_2'} \gamma_U(\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}',\omega) \Big\} dS_1' \, dS_2',$$

$$R_{1,2} = |\vec{r}_{1,2} - \vec{r}_{1,2}{}'| , \quad \frac{\partial}{\partial n_{1,2}'} \equiv \hat{n}_{1,2}' \cdot \vec{\nabla}_{1,2}' . \tag{147}$$

O termo $\Omega(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)$ é suposto conhecido a partir das medidas da densidade espectral $\gamma_U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)$ de $\{U(\vec{r},t)\}$ sobre a superfície $S(V)$ envolvendo V_0 .

Seguindo a prova dos teoremas 4, 5 e 6 podemos provar os seguintes teoremas correspondentes para o caso estatístico:

TEOREMA 10: $\{F(\vec{r},t)\}$ com suporte na esfera V_0 é não-radiante se e só se sua densidade espectral satisfaz

$$\int_{V_0}\int_{V_0} \gamma_F(\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}',\omega)\, j_0\left(\tfrac{\omega}{c}R_1\right) j_0\left(\tfrac{\omega}{c}R_2\right) d^3r_1' \, d^3r_2' = 0 . \tag{148}$$

Isto é, os ensembles não-radiantes são as soluções da equação integral homogênea associada à ISIE estatística eq. (146).

TEOREMA 11: $\{F(\vec{r},t)\}$ com suporte na esfera V_0 e com densidade espectral $\gamma_F(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)$ duplamente contínua em $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ no espaço todo é não-radiante se e só se $\gamma_F(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)$ for da forma

$$\gamma_F(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega) = \left(\nabla_1^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\left(\nabla_2^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \gamma_{\mathcal{N}}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega) \,, \qquad (149)$$

onde $\gamma_{\mathcal{N}}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)$ é identicamente nula para todos os pares de pontos exteriores a V_0 e com derivadas parciais segundas contínuas em $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ no espaço todo.

Este teorema evidencia que sempre existem ensembles não-radiantes com suporte em V_0, uma vez que se pode em princípio sempre exibir uma $\gamma_{\mathcal{N}}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)$ satisfazendo os requisitos acima.

TEOREMA 12: $\{F(\vec{r},t)\}$ com suporte na esfera V_0 é não-radiante se e só se sua densidade espectral $\gamma_F(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)$ for ortogonal a toda solução $\gamma_{\mathcal{N}}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)$ de $\left(\nabla_1^2+\frac{\omega^2}{c^2}\right)\left(\nabla_2^2+\frac{\omega^2}{c^2}\right)\gamma_{\mathcal{N}}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega) = 0$ no espaço todo, no sentido de que

$$\left(\gamma_F(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)\,,\,\gamma_N(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)\right) = \int_{V_0}\int_{V_0} \gamma_F(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)\,\gamma_N^*(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)\; d^3r_1\, d^3r_2 = 0\,. \qquad (150)$$

A demonstração do teorema 12 segue da demonstração do teorema 6 e do fato de que a forma mais geral para a solução $\gamma_N(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)$ de

$$\left(\nabla_1^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\left(\nabla_2^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\gamma_N(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega) = 0 \qquad (151)$$

no espaço todo é dada por

$$\gamma_N(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega) = \sum_{\substack{\ell m\\ r,s}} d_{\ell m r s}\, \psi_{\ell m r s}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)\,, \qquad (152)$$

$$\psi_{\ell m r s}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega) = \frac{1}{N_\ell N_r}\, j_\ell\!\left(\frac{\omega}{c} r_1\right) j_r\!\left(\frac{\omega}{c} r_2\right) \cdot$$

$$\cdot\, Y_{\ell m}(\theta_1,\varphi_1)\, Y_{rs}(\theta_2,\varphi_2)\,, \qquad (153)$$

$$N_{\ell,r}^2 = \int_0^a \left[j_{\ell,r}\!\left(\frac{\omega}{c} r_{1,2}\right)\right]^2 r_{1,2}^2\, dr_{1,2}\,,$$

$$\ell, r = 0,1,2,\ldots\,,\quad |m| \le \ell\,,\quad |s| \le r\,,$$

$$\left(\psi_{\ell m r s}\,,\,\psi_{\ell' m' r' s'}\right) = \int_{V_0}\int_{V_0} \psi_{\ell m r s}\,\psi^*_{\ell' m' r' s'}\; d^3r_1\, d^3r_2 = \delta_{\ell\ell'}\,\delta_{mm'}\,\cdot$$

$$\cdot\,\delta_{rr'}\,\delta_{ss'}\,. \qquad (154)$$

Chega-se então à conclusão de que a densidade espectral $\gamma_F(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)$ de $\{F(\vec{r},t)\}$ com suporte na esfera V_0 se decompõe em (confira eq. (92))

$$\gamma_F(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega) = \gamma_F^{NR}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega) + \hat{\gamma}_F(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega), \qquad (155)$$

com $\hat{\gamma}_F(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)$ dada de modo único por (vide eqs. (89) e (93))

$$\hat{\gamma}_F(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega) = \sum_{\substack{l,m\\ r,s}} d_{lmrs}\, \psi_{lmrs}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)\, H(r_1-a)\, H(r_2-a), \qquad (156)$$

$$H(r_{1,2}-a) = \begin{cases} 0 & \text{se } r_{1,2} \notin V_0 \\ 1 & \text{se } r_{1,2} \in V_0, \end{cases}$$

e $\gamma_F^{NR}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)$ sendo a densidade espectral de um ensemble não-radiante com suporte em V_0.

Os coeficientes d_{lmrs} da eq. (156) são obtidos a partir de $\Omega(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)$ experimentalmente conhecida. Se levarmos as eqs. (39) e (156) na ISIE estatística eq. (146), resulta (vide eq. (94))

$$d_{lmrs} = \frac{1}{(4\pi N_l N_r)^2} \int_{V_0}\int_{V_0} \Omega(\vec{r}_1',\vec{r}_2',\omega)\, \psi^*_{lmrs}(\vec{r}_1',\vec{r}_2',\omega)\, d^3r_1'\, d^3r_2' . \qquad (157)$$

Para completarmos a análise, vemos que a eq. (144) pode ser escrita como

$$\left[\tilde{\gamma}_F(\vec{K}_1,-\vec{K}_2,\omega) = \gamma_U^0(\hat{K}_1,\hat{K}_2,\omega) \right]_{\omega=cK_1=cK_2} , \tag{158}$$

enquanto a transformação espacial de Fourier da eq. (146), obtida a partir das eqs. (96) e (96'), fornece

$$\Big\{ \tilde{\gamma}_F(\vec{K}_1,-\vec{K}_2,\omega) = \int_{S(V)}\int_{S(V)} e^{-i\vec{K}_1\cdot\vec{r}_1 + i\vec{K}_2\cdot\vec{r}_2} \Big[(\hat{n}_1\cdot\vec{K}_1)(\hat{n}_2\cdot\vec{K}_2)\,\gamma_U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega) +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial n_1 \partial n_2}\gamma_U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega) + i(\hat{n}_1\cdot\vec{K}_1)\frac{\partial}{\partial n_2}\gamma_U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega) -$$

$$- i(\hat{n}_2\cdot\vec{K}_2)\frac{\partial}{\partial n_1}\gamma_U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)\Big]\, ds_1\, ds_2 \Big\}_{\omega=cK_1=cK_2} . \tag{159}$$

Aqui, a mesma questão dimensional já discutida no caso determinístico tem lugar. A solução dada pelas eqs. (155) e (156) está no espaço real $\mathbb{R}^6(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$, ω sendo parâmetro, enquanto que $\tilde{\gamma}_F(\vec{K}_1,\vec{K}_2,\omega)$ está em $\mathbb{R}^7(\vec{K}_1,\vec{K}_2,\omega)$. Só que aqui a questão da solubilidade do problema no espaço das transformadas a partir das eqs. (158) e (159), e de informações adicionais, é mais grave. Suponhamos, em analogia com a informação adicional dada pelas eqs. (108), (109) e (110) para o caso determinístico, que se saiba "a priori" ser a densidade espectral $\gamma_F(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)$ da forma

$$\gamma_F(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega) = \gamma_F^0(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\,\varphi(\omega) \,. \tag{160}$$

Isso nas eqs. (138) e (144) implicam em $\gamma_U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)$ e $\gamma_U^0(\hat{r}_1,\hat{r}_2,\omega)$ serem também da forma

$$\gamma_U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega) = \check{\gamma}_U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)\,\varphi(\omega) \,, \tag{161}$$

$$\gamma_U^0(\hat{r}_1,\hat{r}_2,\omega) = \check{\gamma}_U^0\left(\tfrac{\omega}{c}\hat{r}_1,-\tfrac{\omega}{c}\hat{r}_2,\omega\right)\varphi(\omega) \,. \tag{162}$$

Levando a transformada da eq. (160) e as eqs. (161) e (162) nas eqs. (158) e (159), e considerando que $\varphi(\omega)$ seja não nula no intervalo espectral contínuo $[\omega_0,\omega_0+\Delta\omega]$ de largura $\Delta\omega$ finita, obtém-se $\tilde{\gamma}_F^0(\vec{k}_1,-\vec{k}_2)$ na região $\omega_0 \leq \omega = ck_1 = ck_2 \leq \omega_0+\Delta\omega$ de $\mathbb{R}^6(\vec{k}_1,\vec{k}_2)$. Entretanto, esta região não é um volume em $\mathbb{R}^6(\vec{k}_1,\vec{k}_2)$ e sim em $\mathbb{R}^5(\vec{k}_1,\vec{k}_2)$. Então, apesar de $\tilde{\gamma}_F^0(\vec{k}_1,-\vec{k}_2)$ ser analítica em $\mathbb{R}^6(\vec{k}_1,\vec{k}_2)$ todo, a informação eq. (160) não é suficiente para a sua extensão analítica, ao contrário do que foi obtido no caso determinístico (confira discussão na pg. 48).

A questão toda reside no fato de que , ao se considerar os ensembles aqui tratados como estacionários, a dependência temporal bidimensional das grandezas com t_1 e t_2 arbitrários degenerou na única dependência em $\tau = t_2 - t_1$. Disso decorreu que as condições $\omega_1 = ck_1$ e $\omega_2 = ck_2$, sob as quais as transformadas seriam dadas, também degeneraram na condição $\omega = ck_1 = ck_2$. Se levantarmos a hipótese do caráter estacionário dos ensembles e acrescentarmos condições adicionais de separabilidade em ω_1 e ω_2 independentemente, é de se esperar que se possa obter a solução (única) no espaço das transformadas.

Por outro lado, se soubermos "a priori" ter o ensemble de fontes uma densidade espectral $\gamma_F(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega)$ da forma

$$\gamma_F(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega) = \lambda(\vec{r}_1,\omega)\,\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2) \;, \tag{163}$$

$$\lambda(\vec{r},\omega) = 0 \quad \text{se} \quad \vec{r} \notin V_0 \;,$$

i. e., ser um ensemble de fontes espacialmente totalmente incoerentes, obtemos para sua transformada

$$\tilde{\gamma}_F(\vec{K}_1,-\vec{K}_2,\omega) = \tilde{\lambda}(\vec{K}_1-\vec{K}_2,\omega) \;. \tag{164}$$

Levando a eq.(164) na eq.(158), por exemplo, obtemos

$$\left[\tilde{\lambda}(\vec{K}_1-\vec{K}_2,\omega) = \gamma_U^{\circ}(\hat{K}_1,\hat{K}_2,\omega)\right]_{\omega = cK_1 = cK_2} \;. \tag{165}$$

Como $\lambda(\vec{r},\omega)$ tem suporte V_0 finito em $\mathbb{R}^3(\vec{r})$, sua transformada é analítica em todo o espaço $\mathbb{R}^3(\vec{K})$. Uma vez que a eq. (165) define $\tilde{\lambda}(\vec{K},\omega)$ neste espaço no volume esférico centrado na origem e de raio $K = 2\omega/c$, há uma extensão analítica única para $\tilde{\lambda}(\vec{K},\omega)$ a partir da eq. (165) e o problema tem solução única. Construir tal extensão é um problema não trivial que foge do escopo deste estudo.

ANEXO

O PROBLEMA DA FONTE INVERSO UNIDIMENSIONAL:

Aqui se trata de resolver a equação de Helmholtz unidimensional:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) u(x,\omega) = - f(x,\omega) \quad , \qquad (1)$$

sendo $f(x,\omega)$ com suporte no intervalo fechado $[-a,a]$ e $f(x,t)$, a sua transformada temporal inversa, identicamente nula para $t<t_0$.

Vamos resolvê-la pelo método da função de Green. Como o problema é na reta ilimitada, a função de Green que resolve

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) g(x,x',\omega) = - \delta(x-x') \quad , \qquad (2)$$

deve depender apenas de $R = |x-x'|$, e é dada em geral por

$$g(R,\omega) = A e^{i\frac{\omega}{c}R} + B e^{-i\frac{\omega}{c}R} \quad ,$$

com A e B satisfazendo

$$A - B = \frac{ic}{2\omega} .$$

Para que $g(R,\omega)$ apresente o comportamento causal esperado, devemos fazer $B = 0$, o que significa que

$$g(R,\omega) = \frac{ic}{2\omega} e^{i\frac{\omega}{c}R} . \tag{3}$$

A solução da eq. (1) é então dada por

$$u(x,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x',\omega)\, g(R,\omega)\, dx' . \tag{4}$$

Desde que a fonte está confinada em $[-a,a]$, x' na eq. (4) também pertence a este intervalo. Calculando $u(x,\omega)$ para $|x|>a$, as eqs. (3) e (4) fornecem

$$u(x,\omega) = \begin{cases} \dfrac{ic}{2\omega} e^{i\frac{\omega}{c}x} \tilde{f}(k,ck) & \text{se } x>a \\ \dfrac{ic}{2\omega} e^{-i\frac{\omega}{c}x} \tilde{f}(k,-ck) & \text{se } x<-a . \end{cases} \tag{5}$$

Fazendo uma extensão óbvia da definição de fontes não-radiantes a uma dimensão, vemos que $f(x,\omega)$ é não-radiante com suporte em $|x| \leqslant a$ se e só se

$$\tilde{f}(k,\omega)\Big|_{\omega = c|k|} = 0 \quad . \tag{6}$$

Vemos que há a possibilidade de que $f(x,\omega)$ seja não-radiante apenas "à direita" ou apenas "à esquerda" se $\tilde{f}(k,\omega)$ tiver uma única raiz em $\omega = ck$ ou $\omega = -ck$.

Exemplo de fonte não-radiante unidimensional:

Seja a fonte dada por

$$F(x,t) = F_0(x)\, e^{-i\omega_0 t} \quad , \tag{7}$$

com

$$F_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > a \\ F_0 & \text{se } |x| \leqslant a \quad , \quad F_0 = \text{cte} \ . \end{cases} \tag{8}$$

Sua transformada esspaço-temporal é dada por

$$\tilde{f}(k,\omega) = 4\pi F_0\, a\, j_0(ka)\, \delta(\omega - \omega_0) \, . \tag{9}$$

que calculada em $\omega = c|K|$ dá

$$\tilde{f}(K,\omega)\Big|_{\omega=c|K|} = 4\pi F_0 a\, j_0\left(\pm \frac{\omega a}{c}\right) \delta(\omega-\omega_0) .$$

A eq. (10) se anula identicamente se $\frac{\omega_0 a}{c} = \alpha_{om}$; onde α_{om} é a m-ésima raiz de $j_0(x)$. Nesse caso então, tal fonte é não-radiante. Aqui também a condição de não-radiância impõe uma restrição análoga ao caso tridimensional para as dimensões da fonte.

O cálculo do campo na região da fonte fornece:

$$U(x,t) = \frac{\pi c^2}{\omega_0^2} F_0 \left[e^{\frac{i\omega_0}{c}(x+a)} + e^{-\frac{i\omega_0}{c}(x-a)} - 2 \right] e^{-i\omega_0 t} , \quad |x| \leq a ,$$

o qual é contínuo e possui $\frac{\partial U}{\partial x}$ contínua em $|x| = a$ e $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ descontínua aí, como já se esperava para uma fonte descontínua.

BIBLIOGRAFIA:

(1) D. Bohm & M. Weinstein, Phys. Rev. **74**, 1789 (1948)

(2) G. H. Goedeck, Phys. Rev. **135**, B281 (1964)

(3) J. B. Arnett & G. H. Goedeck, Phys. Rev. **168**, 1424 (1968)

(4) J. D. Jackson, "Classical Eletrodynamics", Wiley, New York, 1962

(5) N. Bleistein & J. K. Cohen, J. of Math. Phys. **18**, 194 (1977)

(6) K. Kim & E. Wolf, Opt. Comm. **52**, 1 (1986)

(7) A. J. Devaney & E. Wolf, Phys. Rev. D **8**, 1044 (1973)

(8) F. G. Friedlander, Proc. London Math. Soc. **(3)27**, 551 (1973)

(9) A. J. Devaney, J. Math. Phys. **19**, 1526 (1978)

(10) R. P. Porter & A. J. Devaney, J. Opt. Soc. Am. **72**, 327 (1982)

(11) H. P. Baltes et all., "Inverse Source Problems in Optics", Springer - Verlag, Berlin, 1978, pgs. 58-68

(12) W. R. Stone, J. Opt. Soc. Am. **70A**, 1606 (1980)

(13) N. N. Bojarski J. Math. Phys. **22**, 1647 (1981)

(14) A. J. Devaney & G. C. Sherman, IEEE Trans. Ant. Prop. **AP-30**, 1034 (1982)

(15) N. N. Bojarski, idem **AP-30**, 1037 (1982)

(16) A. J. Devaney & G. C. Sherman, idem **AP-30**, 1038 (1982)

(17) W. R. Stone, idem **AP-30**, 1039 (1982)

(18) A. J. Devaney & G. C. Sherman, idem AP-30, 1041 (1982)

(19) M. J. Beran & G. B. Parrent, Jr., "Theory of Partial Coherence", The Soc. of Photo-Optical Instr. Eng.,------,1974

(20) W. H. Carter & E. Wolf, Optica Acta 28, 227 (1981)

(21) L. Mandel & E. Wolf, J. Opt. Soc. Am. 66, 529 (1979)

(22) I. J. LaHaie, J. Opt. Soc. Am. 2-A, 35 (1985)

(23) A. J. Devaney, J. Math. Phys. 20, 1687 (1979)

(24) R. D. Richtmyer, "Principles of Advanced Math. Phys.", Vol. I; Springer-Verlag, New York, 1978

(25) E. Wolf, Phys. Rev. Letters 58, 2646 (1987)

(26) M. F. Bocko , D. H. Douglas & R. S. Knox, Phys. Rev. Letters 58, 2649 (1987)