

Este exemplar corresponde a redação final
da tese defendida por Genildo Luiz
Borba e aprovada
pela comissão julgadora em 27.11.1992

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

Euclides de Mesquita Neto
ORIENTADOR

Dissertação Apresentada à
Faculdade de Engenharia Mecânica
como Requisito Parcial à Obtenção do
Título de Mestre em Engenharia de Petróleo

**FORMULAÇÃO DIRETA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS
DE CONTORNO PARA TRATAMENTO DO ESTADO
PLANO DA POROELASTICIDADE
ACOPLADA**

Autor: Genildo Luiz Borba

45/92

Orientador: Euclides de Mesquita Neto *OK*

Novembro, 1992

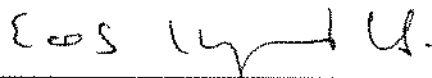


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

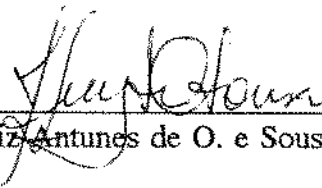
A dissertação "Formulação Direta do Método dos Elementos de Contorno Para Tratamento do Estado Plano da Poroelasticidade Acoplada", elaborada por Genildo Luiz Borba e aprovada por todos os membros da Banca Examinadora foi aceita pela Sub-Comissão de Pós-Graduação em Engenharia de Petróleo como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Petróleo.

Campinas, 27 de novembro de 1992

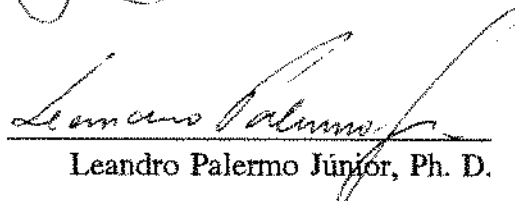
Banca Examinadora



Euclides de Mesquita Neto, Ph. D.



José Luiz Antunes de O. e Sousa, Ph. D.



Leandro Palermo Júnior, Ph. D.

Para: meus pais, Luiz Gonzaga e Gilvanize,

minha esposa Liane,

meu filho Anderson Henrique,

meus irmãos Gilvan, Luiz Gonzaga, Gilvanise, Giovanni e Gisele.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Dr. Euclides de Mesquita Neto pela sugestão do tema , pelo estímulo e pela liberdade que me foram concedidos em todo o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao Prof. João Cândido Baptista de Campos pelo trabalho de co-orientação informal desta tese. Suas sugestões e material bibliográfico permitiram que ultrapassássemos diversas dificuldades encontradas no decorrer do desenvolvimento deste trabalho, permitindo que chegássemos a seu término dentro do prazo e cumprindo todas as metas programadas.

Agradeço à Petrobrás pela oportunidade que me foi dada de realizar este trabalho. O investimento no desenvolvimento técnico de seus empregados demonstra claramente que a Petrobrás aposta em seus recursos humanos para enfrentar os desafios do desenvolvimento de tecnologias de ponta.

SUMÁRIO

O fraturamento hidráulico de formações portadoras de hidrocarbonetos é uma técnica de aumento de produtividade e fator de recuperação cada vez mais utilizada em todo o mundo. Dependendo das características dos poços, o seu custo pode atingir valores significativos, o que obriga um bom dimensionamento das operações.

O dimensionamento do fraturamento hidráulico de meios porosos requer a determinação simultânea de tensões, deslocamentos, pressões de poros e fluxos na região considerada.

Neste trabalho é lançada a base de elaboração de um simulador de fraturamento hidráulico. Não se avança na determinação das grandezas necessárias à simulação do fraturamento hidráulico propriamente dito, mas apenas na resolução do problema elástico acoplado com a difusão de fluidos no meio poroso.

É feito uma revisão na dedução do sistema de equações diferenciais que rege o comportamento do contínuo poroelástico segundo Cheng e Detournay (ref. 01), partindo das equações da elasticidade, introduzindo as constantes poroelásticas de Biot (ref. 02) e substituindo estas pelas constantes propostas por Rice e Cleary (ref. 03). As equações diferenciais da poroelasticidade acoplada são transformadas em equações integrais através de uma extensão do teorema da reciprocidade dinâmica, no domínio de Laplace. As equações integrais são resolvidas através do método dos elementos de contorno utilizando-se elementos constantes para interpolar as variáveis no contorno. O procedimento e o algoritmo implementado são validados no domínio da variável de Laplace através de problema em poço com soluções analíticas conhecidas. As soluções no tempo são obtidas por inversão numérica. Diversas considerações quanto à densidade da discretização são feitas

nesse trabalho. Também discute-se algumas limitações do método dos elementos de contorno com elementos constantes no tratamento das equações da poroelasticidade acoplada.

ABSTRACT

In the present work the initial step for the development of an hydraulic fracturing simulator for the poroelastic continuum is established. In the fully coupled continuum the elastic deformation process is connected with the fluid diffusion through the porous medium.

Biot's theory of a poroelastic continuum is recasted according to the equations and parameters proposed by Rice and Cleary. The differential equations governing the poroelastic medium are transformed into integral equations by means of an extension of Betti's dynamic reciprocity theorem in Laplace variable domain.

The solutions of the integral equations in the Laplace variable domain are approximated by the use of the Boundary Element Method (BEM). Spatial discretization of the field variables is accomplished assuming constant elements at the boundaries of the problem under consideration.

Time domain solutions are obtained by numerical inversion of the Laplace domain solutions. The theoretical procedures and implementations are validated by comparisons with a borehole problem which have analytical and numerical solutions in the existing literature.

Issues like boundary discretization effort and numerical accuracy are also addressed.

ÍNDICE

LISTA DE ANEXOS	x
LISTA DE FIGURAS	xi
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 2 - DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES QUE REGEM O COMPORTAMENTO DO CONTÍNUO POROELÁSTICO	
2.1 - Hipóteses	4
2.2 - Equações da elasticidade	4
2.3 - Introdução dos termos poroelásticos	6
2.4 - Substituição das constantes introduzidas por Biot pelas constantes definidas por Rice e Cleary	8
2.5 - Desenvolvimento do sistema de equações diferenciais, segundo Cheng & Detournay	10
CAPÍTULO 3 - PRINCIPAIS CONSTANTES QUE CARACTERIZAM O COMPORTAMENTO DO CONTÍNUO POROELÁSTICO, SUAS INTERPRETAÇÕES E UNIDADES	
3.1 - Módulo de elasticidade linear (E)	12
3.2 - Módulo de cisalhamento (G)	13
3.3 - Módulo de Poisson drenado (ν)	13
3.4 - Módulo de Poisson não drenado (ν_u)	14
3.5 - Coeficiente de pressão de poro (B)	14
3.6 - Coeficiente de tensão efetiva de Biot (α)	15
3.7 - Módulo volumétrico drenado (K)	16
3.8 - Módulo volumétrico não drenado (K_u)	17
3.9 - Módulo volumétrico do fluido (K_f)	17
3.10- Permeabilidade (k)	17
3.11- Unidades de medida das variáveis poroelásticas	18
CAPÍTULO 4 - APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CON- TORNHO PARA SOLUCIONAR O SISTEMA DE EQUA- ÇÕES DIFERENCIAIS DA POROELASTICIDADE	
4.1 - Introdução ao método dos elementos de contorno	19

4.2 - Utilização do método dos elementos de contorno para solucionar a equação de Laplace	20
4.3 - Transformação das equações diferenciais da poroelasticidade em equações integrais	26
4.4 - Discretização da equações integrais	37
4.5 - Análise de singularidade das soluções fundamentais	49
4.6 - Resumo da análise de singularidade das soluções fundamentais	62
4.7 - Método de cálculo das integrais das soluções fundamentais	63
CAPÍTULO 5 - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	65
CAPÍTULO 6 - RESULTADOS E VALIDAÇÃO DO PROGRAMA	
6.1 - Considerações iniciais	68
6.2 - Descrição do problema	70
6.3 - Soluções no campo de Laplace	72
6.4 - Soluções no domínio do tempo	101
CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	119
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	124
NOMENCLATURA	126

LISTA DE ANEXOS

ANEXO A - DEDUÇÃO DA FÓRMULA (4.3.11)	129
ANEXO B - TABELAS	133

LISTA DE FIGURAS

4.2.01 - Seqüência de numeração anti-horária - domínio interior	26
4.2.02 - Seqüência de numeração horária - domínio exterior	26
4.4.01 - Discretização do contorno em três elementos, exemplificando colocação do ponto de aplicação no elemento dois e integrando ao longo do elemento três	44
4.5.01 - Análise de singularidade das funções modificadas de Bessel de primeira espécie, de ordens 0 e 1, em $x = 0$	51
4.5.02 - Análise de singularidade das funções modificadas de Bessel de segunda espécie, de ordens 0, 1, 2 e 3, em $x = 0$	51
6.1.01 - Inversão numérica da solução analítica do problema descrito no item 6.2, para a pressão de poros normalizada ao longo do eixo x , em $t^* = 1.0e-4$ (tempo normalizado)	69
6.1.02 - Inversão numérica da solução analítica do problema descrito no item 6.2, para a tensão circunferencial normalizada ao longo do eixo x , em $t^* = 1.0e-4$ (tempo normalizado)	69
6.1.03 - Inversão numérica da solução analítica do problema descrito no item 6.2, para o deslocamento na fronteira ($r=a$)	70
6.1.04 - Poço perfurado em um meio poroelástico sujeito a um campo de tensão desviatória	71
6.3.01 - Variação da pressão de poros ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 16 elementos na discretização do contorno	75
6.3.02 - Variação da pressão de poros ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 32 elementos na discretização do contorno	76

6.3.03 - Variação da pressão de poros ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 64 elementos na discretização do contorno	77
6.3.04 - Variação da pressão de poros ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 128 elementos na discretização do contorno	78
6.3.05 - Variação do deslocamento radial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 16 elementos na discretização do contorno	80
6.3.06 - Variação do deslocamento radial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 32 elementos na discretização do contorno	81
6.3.07 - Variação do deslocamento radial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 64 elementos na discretização do contorno	82
6.3.08 - Variação do deslocamento radial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 128 elementos na discretização do contorno	83
6.3.09 - Variação da tensão radial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 16 elementos na discretização do contorno	85
6.3.10 - Variação da tensão radial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 32 elementos na discretização do contorno	86
6.3.11 - Variação da tensão radial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 64 elementos na discretização do contorno	87
6.3.12 - Variação da tensão radial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 128 elementos na discretização do contorno	88
6.3.13 - Variação da tensão circunferencial longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 16 elementos na discretização do contorno	90

6.3.14 - Variação da tensão circunferencial longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 32 elementos na discretização do contorno	91
6.3.15 - Variação da tensão circunferencial longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 64 elementos na discretização do contorno	92
6.3.16 - Variação da tensão circunferencial longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 128 elementos na discretização do contorno	93
6.3.17 - Variação do deslocamento radial no contorno ($r = a$, $\theta = 0^\circ$) com o parâmetro de Laplace	95
6.3.18 - Variação da pressão de poro no primeiro quadrante, em $r/a = 1.15$, utilizando 16 elementos na discretização do contorno	97
6.3.19 - Variação da pressão de poro no primeiro quadrante, em $r/a = 1.15$, utilizando 32 elementos na discretização do contorno	98
6.3.20 - Variação da pressão de poro no primeiro quadrante, em $r/a = 1.15$, utilizando 64 elementos na discretização do contorno	99
6.3.21 - Variação da pressão de poro no primeiro quadrante, em $r/a = 1.15$, utilizando 128 elementos na discretização do contorno	100
6.4.01 - Variação da pressão de poro ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 16 elementos na discretização do contorno	102
6.4.02 - Variação da pressão de poro ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 32 elementos na discretização do contorno	103
6.4.03 - Variação da pressão de poro ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 64 elementos na discretização do contorno	104
6.4.04 - Variação da pressão de poro ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 128 elementos na discretização do contorno	105

6.4.05 - Variação do deslocamento radial no contorno ($\theta = 0^\circ$) em função do tempo, com diversas discretizações do contorno	107
6.4.06 - Variação da tensão circunferencial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 16 elementos na discretização do contorno	109
6.4.07 - Variação da tensão circunferencial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 32 elementos na discretização do contorno	110
6.4.08 - Variação da tensão circunferencial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 64 elementos na discretização do contorno	111
6.4.09 - Variação da tensão circunferencial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 128 elementos na discretização do contorno	112
6.4.10 - Erro no cálculo numérico da tensão circunferencial ao longo do eixo x, no tempo normalizado $T^* = 10^{-4}$	114
6.4.11 - Erro no cálculo numérico da tensão circunferencial ao longo do eixo x, no tempo normalizado $T^* = 10^{-3}$	115
6.4.12 - Erro no cálculo numérico da tensão circunferencial ao longo do eixo x, no tempo normalizado $T^* = 10^{-2}$	116
6.4.13 - Erro no cálculo numérico da tensão circunferencial ao longo do eixo x, no tempo normalizado $T^* = 10^{-1}$	117
6.4.14 - Erro no cálculo numérico da tensão circunferencial ao longo do eixo x, no tempo normalizado $T^* = 10^0$	118

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A matriz energética mundial está baseada, fundamentalmente, no petróleo. Além disso, uma vastíssima variedade de produtos industriais o utiliza como matéria prima. Pode-se encontrar a presença do petróleo em quase tudo o que é produzido pela sociedade nos dias atuais.

Devido ao fato de ser uma fonte não renovável de energia e à imensa velocidade com que é consumido, a quantidade de petróleo disponível em nosso planeta diminui rapidamente. O esgotamento das reservas de relativamente fácil acesso lança um desafio à humanidade, e em particular aos técnicos dessa área, no sentido de ultrapassar os limites atualmente impostos pela tecnologia, aumentando a oferta desse valioso produto a custos economicamente viáveis.

O Brasil, através da Petrobrás, vem respondendo de maneira extremamente positiva a esse desafio. Ao constatar que dentro dos limites geográficos convencionais não havia como satisfazer as necessidades de consumo da Nação brasileira, a Petrobrás lançou-se rumo ao mar aberto, descobrindo reservas e abrindo expectativas de produção de petróleo em profundidades nunca antes imaginadas possíveis em todo o mundo.

Este avanço contra os limites da tecnologia conhecida força o desenvolvimento de novas e sofisticadas técnicas, que consigam resolver as dificuldades que são encontradas a cada novo passo dado.

O fraturamento hidráulico de reservatórios insere-se neste contexto por sua importância no desenvolvimento econômico dos campos produtores. Devido sua capacidade potencial de aumentar a produtividade dos poços (antecipando receitas) e até mesmo de aumentar o fator de recuperação

das reservas (aumentando quantidade de petróleo retirada de uma formação durante sua vida útil), o fraturamento hidráulico tornou-se uma operação quase que padrão na completação de poços em todo o mundo. Sua complexidade e alto custo, no entanto, exigem todo o cuidado no que se refere ao seu dimensionamento e execução. Para enfrentar essa complexidade, foram desenvolvidos alguns modelos, atualmente em uso, nos quais se parte da premissa de que a fratura criada terá uma das formas geométricas clássicas, na qual se conhece o comportamento da pressão (ref. 17). Enquanto se opera em poços terrestres, verticais e de profundidades relativamente pequenas, onde os custos são razoavelmente baixos, esses modelos atendem às necessidades, uma vez que a experiência acumulada ao longo de algumas operações realizadas em um mesmo campo vão ajudando a aperfeiçoar os modelos utilizados, até se atingir um padrão aceitável. No entanto, à medida em que os poços vão ficando mais complexos (mais profundos, inclinados e até mesmo horizontais, sob lâminas de água cada vez maiores), fica evidente que esses modelos se tornam inviáveis, pois são introduzidas novas variáveis que não estão previstas nos modelos atuais. O altíssimo custo dessas novas operações inviabilizam o processo de tentativa e erro até que se chegue a um modelo adequadamente corrigido.

Neste trabalho são lançadas as bases do desenvolvimento de um simulador numérico de fraturamento hidráulico de reservatórios de petróleo.

A simulação do fraturamento hidráulico em meios porosos requer a determinação de tensões, deslocamentos, pressões de poros e fluxos na região considerada. A determinação dessas grandezas acopladas é um problema extremamente complexo, e os simuladores convencionais atualmente utilizados não atendem esse requisito.

Neste trabalho é deduzido o sistema de equações diferenciais que rege o comportamento do contínuo poroelástico, conforme sugerido por Cheng e Detournay (ref. 01), a partir das equações da elasticidade, das constantes poroelásticas introduzidas por Biot (ref. 02), e das constantes

poroelásticas propostas por Rice & Cleary (ref. 03). Em seguida as equações diferenciais da poroelasticidade são transformadas em equações integrais, através de uma extensão do teorema da reciprocidade. É utilizado o Método dos Elementos de Contorno (MEC), com elementos constantes, para solucionar as equações integrais da poroelasticidade acoplada, tanto em meios limitados (interiores) como em meios ilimitados (exteriores), considerando o estado plano de deformações.

O método dos elementos de contorno é utilizado devido à sua vantagem intrínseca de somente requerer a discretização do contorno da região de interesse. Isso diminui de um grau a dimensão do problema a ser tratado, com conseqüente vantagem na redução do esforço computacional (pois não é necessário resolver o problema em uma malha abrangendo todo o domínio - apenas se resolve uma malha no contorno e nos pontos do domínio onde se tem interesse) e simplificação da etapa de entrada de dados. Além disso, temos ainda a vantagem de ser possível o tratamento de domínios ilimitados, o que exige complexos artifícios para ser tratado com o método dos elementos finitos, por exemplo.

Não foram determinadas as grandezas necessárias à simulação do fraturamento hidráulico propriamente dito, mas apenas as grandezas associadas aos problemas da elasticidade (tensões e deformações do meio poroso) acopladas com a difusão do fluido no meio poroelástico. Estas são as bases lançadas ao desenvolvimento de um simulador que, pelos resultados já alcançados, demonstrar imensa potencialidade para atender à complexidade das operações a serem realizadas nos poços de petróleo do presente e do futuro.

Apesar de ser apenas o embrião de um complexo simulador de fraturamento hidráulico, o trabalho aqui desenvolvido encontra aplicação imediata em qualquer problema que envolva a solução acoplada ou desacoplada das equações da poroelasticidade (como, por exemplo, problemas de consolidação, estabilidade de poços, etc).

CAPÍTULO 2

DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES QUE REGEM O COMPORTAMENTO POROELÁSTICO DAS ROCHAS

2.1 - Hipóteses

- a) Os corpos são considerados homogêneos.
- b) Os corpos são considerados isotrópicos.
- c) As deformações e os deslocamentos são pequenos, de tal modo que podem ser linearizados.
- d) O reservatório é considerado suficientemente longo na direção vertical, de forma que se possa assumir um estado plano de deformações.
- e) Todos os poros estão interconectados, de modo a permitir o fluxo de fluidos através deles.
- f) O meio poroso é suposto completamente saturado de fluidos (saturação = 100%).

2.2 - Equações da elasticidade

Serão utilizados alguns conceitos básicos da teoria da elasticidade, os quais serão rapidamente revistos neste item. Será utilizada a notação indicial, devido sua capacidade de simplificar de maneira significativa as fórmulas. Maiores detalhes a respeito da teoria básica da elasticidade, bem como a respeito da notação indicial utilizada, poderão ser encontrados na ref. 18.

Em relação a um dado sistema de coordenadas, o estado de tensão em um ponto no corpo é completamente definido pelo tensor tensão σ_{ij} :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \dots \dots \dots (2.2.01)$$

sendo σ_{ij} um tensor simétrico ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$).

O estado de deformação neste mesmo ponto é definido por:

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}, \dots \dots \dots (2.2.02)$$

sendo ϵ_{ij} também simétrico ($\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$).

Para o estado plano de deformações, $\epsilon_{3j} = \epsilon_{j3} = 0$. Esta condição obriga ainda que se tenha $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0$ (ver equação 2.2.06).

Este estado de tensão deve satisfazer a equação de equilíbrio de forças, que tem a seguinte forma:

$$\sigma_{ij,j} = -F_i, \dots \dots \dots (2.2.03)$$

sendo F_i = força de corpo por unidade de volume de material.

Considerando a hipótese de pequenos deslocamentos, são válidas as seguintes relações entre deformações e deslocamentos (tensor de deformações de Cauchy):

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \dots \dots \dots (2.2.04)$$

Ainda considerando pequenos deslocamentos, a lei de Hooke oferece as equações constitutivas para um meio elástico, linear, homogêneo e isotrópico:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \dots \dots \dots (2.2.05)$$

ou

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}, \dots \dots \dots (2.2.06)$$

onde δ_{ij} = delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

2.3 - Introdução dos termos poroelásticos

Biot (ref. 02) introduziu nas equações da elasticidade os termos que visam considerar os efeitos da porosidade dos corpos. Partindo da hipótese da isotropia, que implica no fato de que uma pressão aplicada nos poros do corpo não produz tensões de cisalhamento, e que as deformações resultantes são iguais em todas as direções, Biot propôs a seguinte relação linear entre tensões e deformações, que pode ser considerada uma extensão da lei de Hooke (equação 2.2.05) para poroelasticidade:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1}{3H} p \delta_{ij}, \dots \dots \dots (2.3.01)$$

Para avaliar as relações existentes entre a variação do conteúdo de fluido nos poros por unidade de volume do corpo (θ) e as tensões decorrentes, Biot propôs a seguinte equação que, da maneira mais abrangente possível, supõe haver uma relação linear entre θ e cada uma das componentes da tensão atuante no corpo:

$$\theta = a_1 \sigma_{11} + a_2 \sigma_{22} + a_3 \sigma_{33} + a_4 \sigma_{12} + a_5 \sigma_{13} + a_6 \sigma_{23} + a_7 p.$$

Devido a isotropia do material, a variação do conteúdo de fluido dos poros não causará tensões cisalhantes, logo $a_4 = a_5 = a_6 = 0$. Além disso, como a pressão de poro atua igualmente em todas as direções, as deformações deverão ser isotrópicas. Logo, $a_1 = a_2 = a_3$. Assim, definindo $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3H_1$, e $a_7 = 1/R$, pode-se reescrever esta equação da seguinte forma:

$$\theta = \frac{1}{3H_1} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) + \frac{P}{R}.$$

Pode ser provado (ref. 02) que o coeficiente H_1 dessa equação é igual ao coeficiente H da equação (2.3.01). Assim chega-se ao seguinte resultado:

$$\theta = \frac{1}{3H} \sigma_{kk} + \frac{P}{R}. \quad \dots \dots \dots (2.3.02)$$

Para facilitar o seu uso, a equação (2.3.01) é retrabalhada, isolando-se a tensão:

$$\sigma_{ij} = 2G \left(\epsilon_{ij} + \delta_{ij} \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} \right) - \delta_{ij} \alpha P. \quad \dots \dots \dots (2.3.03)$$

sendo α o coeficiente de tensão efetiva de Biot (ver capítulo 3):

$$\alpha = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \frac{G}{H} = \frac{E}{3(1-2\nu)H}. \quad \dots \dots \dots (2.3.04)$$

Pode-se, também, reescrever a equação (2.3.02):

$$\theta = \alpha \epsilon_{kk} + \frac{P}{Q}, \quad \dots \dots \dots (2.3.05)$$

onde:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{R} - \frac{\alpha}{H}. \quad \dots \dots \dots (2.3.06)$$

As equações acima descrevem as propriedades físicas do meio poroelástico homogêneo e isotrópico em função de quatro constantes distintas: G , ν , H e R .

G = módulo de cisalhamento.

ν = módulo de Poisson drenado.

$1/H$ = compressibilidade do meio poroelástico em relação a uma mudança na pressão de poro ($1/H = \epsilon_{kk}/p$, com $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$).

$1/R$ = relação entre mudança no conteúdo de fluido e variação de pressão de poro ($1/R = \theta/p$, com $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$).

2.4 - Substituição das constantes introduzidas por Biot pelas constantes definidas por Rice e Cleary

Rice e Cleary introduziram novas constantes nas equações da poroelasticidade com objetivo de facilitar a interpretação física dos fenômenos por elas representados. Utilizando estas constantes, as equações (2.3.03) e (2.3.05) de Biot assumirão as seguintes formas (ref. 03):

$$2G\epsilon_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1+\nu)(1+\nu_u)} p \delta_{ij}, \quad \dots \dots \dots (2.4.01)$$

$$m - m_0 = \frac{3\rho_0(\nu_u - \nu)}{2GB(1+\nu)(1+\nu_u)} \left(\sigma_{kk} + \frac{3}{B} p \right). \quad \dots \dots \dots (2.4.02)$$

As grandezas das equações (2.4.01) e (2.4.02) são definidas como (ver capítulo 3):

B = Relação entre variação de pressão de poro e variação de tensão hidrostática, com $\Delta m = 0$

(teste não drenado)

$$B = - \frac{3\Delta p}{\Delta \sigma_{kk}} = \frac{1/K - 1/K_s}{v_0/K_f + 1/K - 1/K_s - v_0/K_s}, \quad \dots \dots \dots (2.4.03)$$

v_0 = porosidade do material,

v_u = módulo de Poisson não drenado

$$v_u = \frac{3v + B(1-2v)(1-K/K_s)}{3 - B(1-2v)(1-K/K_s)} \quad \dots \dots \dots (2.4.04)$$

K = módulo volumétrico drenado

$$K = \frac{2G(1+v)}{3(1-2v)} \quad \dots \dots \dots (2.4.05)$$

K_s = módulo volumétrico não drenado

$$\frac{1}{K_s} = \frac{1}{K} - \frac{1}{H} \quad \text{ou} \quad \frac{V_0}{K_s} = \frac{1}{H} - \frac{1}{R} \quad \dots \dots \dots (2.4.06)$$

K_f = módulo volumétrico do fluido

$$K_f = \frac{\rho_0 D}{(\rho - \rho_0)} \quad \dots \dots \dots (2.4.07)$$

ρ = massa específica do fluido,

m = massa de fluido por unidade de volume do material,

v = volume de fluido por unidade de volume de material,

O meio poroelástico homogêneo e isotrópico fica completamente caracterizado através das quatro seguintes constantes do material: G , B , v , e v_0 .

2.5 - Desenvolvimento do sistema de equações diferenciais, segundo Cheng e Detournay

Utilizando as constantes do material definidas por Rice e Cleary, conforme foi detalhado no item anterior, Cheng e Detournay chegaram as seguintes equações constitutivas (ref. 01):

$$\sigma_{ij} = 2G\epsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \epsilon_{kk} - \alpha \delta_{ij} P, \quad \dots \dots \dots (2.5.01)$$

$$P = -\frac{2GB(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)} \epsilon_{kk} + \frac{2GB^2(1-2\nu)(1+\nu_u)^2}{9(\nu_u-\nu)(1-2\nu_u)} \zeta. \quad \dots \dots \dots (2.5.02)$$

Sendo que o coeficiente de tensão efetiva de Biot (ver equação 2.3.04), em função das novas variáveis, pode ser escrito como:

$$\alpha = \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+\nu_u)}. \quad \dots \dots \dots (2.5.03)$$

Na equação (2.5.02) ζ representa a variação no conteúdo de fluido dos poros por unidade de volume de referência:

$$\zeta = \frac{(m - m_0)}{\rho_0}. \quad \dots \dots \dots (2.5.04)$$

A lei de Darcy pode ser expressa da seguinte forma:

$$q_i = -k(p_{,i} - f_i), \quad \dots \dots \dots (2.5.05)$$

sendo: k = permeabilidade do material,

q_i = vazão de fluido por unidade de área,

f_i = força de corpo por unidade de volume do fluido.

A equação da continuidade diz que:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + q_{i,i} = \gamma, \quad \dots \dots \dots (2.5.06)$$

sendo γ = vazão de fluido produzido/absorvido por fontes, por unidade de volume do material.

Este conjunto de equações, devidamente combinado, levará ao sistema de equações que se estava procurando (ref. 01):

$$G \nabla^2 u_i + \frac{G}{1-2\nu} \varepsilon_{kk,i} - \alpha p_{,i} = -F_i, \quad \dots \dots \dots (2.05.07)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{2kGB^2(1-2\nu)(1+\nu_u)^2}{9(\nu_u-\nu)(1-2\nu_u)} \nabla^2 p = & -\frac{2GB(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)} \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} + \\ & + \frac{2GB^2(1-2\nu)(1+\nu_u)^2}{9(\nu_u-\nu)(1-2\nu_u)} (\gamma - kf_{i,i}), \quad \dots \dots \dots (2.5.08) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - c \nabla^2 \zeta = \frac{kB(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} F_{i,i} + \gamma - kf_{i,i}, \quad \dots \dots \dots (2.5.09)$$

O coeficiente generalizado de consolidação ou coeficiente de difusão, c , é definido como:

$$c = \frac{2kGB^2(1-\nu)(1+\nu_u)^2}{9(1-\nu_u)(\nu_u-\nu)}, \quad \dots \dots \dots (2.5.10)$$

A equação (2.5.07) é uma equação da elasticidade (Navier) com um termo de fluido acoplado. A equação (2.5.08) é uma equação de difusão de fluido, com um termo de deformação do meio poroelástico acoplado. A equação (2.5.09) é uma equação de difusão de massa desacoplada.

CAPÍTULO 3

PRINCIPAIS CONSTANTES QUE CARACTERIZAM O COMPORTAMENTO DO CONTÍNUO POROELÁSTICO, SUAS INTERPRETAÇÕES E UNIDADES

3.1 - Módulo de elasticidade linear (E)

O módulo de elasticidade linear, ou módulo de Young, mede a relação tensão/deformação obtida em um teste de tração ou compressão uniaxial. Para pequenos valores de tensão e deformação, esta relação pode ser considerada constante (materiais homogêneos e isotrópicos):

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\epsilon_{11}} = \frac{\sigma_{22}}{\epsilon_{22}} = \frac{\sigma_{33}}{\epsilon_{33}} \quad \dots \dots \dots (3.1.01)$$

O módulo de elasticidade linear das rochas pode ser obtido em laboratório através de um teste de compressão uniaxial: aplica-se uma compressão sobre a amostra sob condições drenadas (permite-se a livre entrada e/ou saída de fluido da amostra - não há variação na pressão de poro) e mede-se a deformação por ela produzida (na direção de aplicação da carga).

O módulo de Young possui dimensão de tensão. Assim, no Sistema Internacional, sua unidade de medida será o Pascal (Pa). Valores típicos de módulos de Young de rochas estão na faixa de 2×10^{10} a 4×10^{10} Pa (3×10^6 a 6×10^6 psi).

3.2 - Módulo de cisalhamento (G)

O módulo de cisalhamento, módulo de elasticidade angular, ou módulo de rigidez, mede a relação entre uma tensão de cisalhamento e a deformação angular por ela produzida. Ou seja, para o estado plano de deformação:

$$G = \frac{\sigma_{12}}{2\varepsilon_{12}} = \frac{\sigma_{21}}{2\varepsilon_{21}} \quad \dots \dots \dots (3.2.01)$$

O módulo de cisalhamento relaciona-se, ainda, com os módulos de elasticidade linear e de Poisson drenado da seguinte forma:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \dots \dots \dots (3.2.02)$$

Para obter o valor do módulo de cisalhamento, basta que se aplique uma tensão de cisalhamento a um corpo de prova sob condições drenadas, e se meça a deformação angular decorrente. É mais fácil, no entanto, se obter os módulos de elasticidade linear e de Poisson drenado (que será analisado em seguida) e, utilizando a fórmula (3.2.02), calcular o módulo de cisalhamento. O módulo de rigidez possui a mesma dimensão do módulo de elasticidade. Assim, no Sistema Internacional, terá como unidade o Pascal (Pa). Valores do módulo de cisalhamento de rochas situam-se na faixa entre 7×10^9 a $1,7 \times 10^{10}$ Pa (1×10^6 a $2,5 \times 10^6$ psi).

3.3 - Módulo de Poisson drenado (ν)

O módulo de Poisson mede a relação entre as deformações transversal e longitudinal (em relação a direção do carregamento) em um teste de tração uniaxial. Ou seja, aplicando-se uma tração na direção 1:

$$\nu = -\frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}} \quad \dots \dots \dots (3.3.01)$$

Para se obter o valor do módulo de Poisson em laboratório, aplica-se uma compressão uniaxial na amostra sob condições drenadas e mede-se as deformações na direção do carregamento e na direção perpendicular ao mesmo.

O módulo de Poisson é uma grandeza adimensional, e seu valor está entre 0 e 0,5. O limite superior é atingido por materiais incompressíveis. Valores típicos do módulo de Poisson de rochas encontram-se na faixa de 0,15 a 0,45.

3.4 - Módulo de Poisson não drenado (ν_u)

Assim como o módulo de Poisson drenado, o módulo de Poisson não drenado também mede a relação entre uma deformação transversal e uma deformação longitudinal em um teste de tração uniaxial. A diferença é que, neste caso, não se permite o fluxo de fluido para dentro ou para fora da amostra (teste não drenado).

O valor do módulo de Poisson não drenado está entre o valor do módulo de Poisson drenado e 0,5. O limite superior (0,5) é atingido quando ambos os constituintes da amostra (sólido e líquido) são incompressíveis. O limite inferior (ν) é atingido quando o fluido dos poros é altamente compressível.

3.5 - Coeficiente de pressão de poro (B)

O coeficiente de pressão de poro, ou coeficiente de Skempton (ref. 03), mede a relação entre uma variação de pressão de poro e a variação de tensão hidrostática total na amostra, sob condições não drenadas, ou seja:

$$B = - \frac{\Delta p}{\Delta \sigma_{kk}}, \quad \text{com } \Delta m = 0, \quad \dots \dots \dots (3.5.01)$$

valendo a regra da notação indicial, segundo a qual índices repetidos significam um somatório.

Para se obter o valor do coeficiente de poro em laboratório, deve-se aplicar uma tensão hidrostática a uma amostra e, sob condições não drenadas, medir a variação de pressão de poro correspondente.

O coeficiente de pressão de poro é uma grandeza adimensional, e seu valor está entre 0 e 1. O limite superior é atingido por materiais cujos constituintes sejam incompressíveis. O limite inferior é atingido quando o fluido dos poros é altamente compressível.

3.6 - Coeficiente de tensão efetiva de Biot (α)

O coeficiente de tensão efetiva mede a relação entre a variação no volume ocupado pelos poros por unidade de volume do material, e a deformação total do material, em um teste drenado. Ou seja:

$$\alpha = \frac{\theta}{\epsilon_{kk}}, \quad \text{com } \Delta p = 0. \quad \dots \dots \dots (3.6.01)$$

Para se obter o valor do coeficiente de tensão efetiva em laboratório, faz-se o chamado "teste da esponja": utilizando um fluido incompressível, aplica-se uma deformação ao material e mede-se a quantidade de fluido expulso do mesmo (é um teste sob condições drenadas, logo a pressão de poro não irá variar).

O coeficiente de tensão efetiva é uma grandeza adimensional, e seu valor está entre 0 e 1. O limite inferior é atingido quando os constituintes sólidos do material são altamente compressíveis, e o superior quando os mesmos são incompressíveis.

3.7 - Módulo volumétrico drenado (K)

O módulo volumétrico drenado mede a relação entre uma tensão hidrostática aplicada e a variação volumétrica dela decorrente por unidade de volume do material, sob condições drenadas.

Ou seja:

$$K = - \frac{\sigma_{kk}}{3 \epsilon_{kk}} \quad \dots \dots \dots (3.7.01)$$

O módulo volumétrico relaciona-se, ainda, com os módulos de cisalhamento e de Poisson drenados através de (ref. 03):

$$K = \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \quad \dots \dots \dots (3.7.02)$$

Pode-se medir o módulo volumétrico de uma amostra de material em laboratório através do seguinte teste: envolve-se o material em uma camisa impermeável, tendo-se o cuidado de se introduzir um tubo conectando os poros com o ambiente externo (teste drenado - a pressão de poro não deve variar). Aplica-se uma pressão externa sobre as paredes revestidas da amostra e mede-se a variação de volume da mesma ($\Delta V \approx \epsilon_{kk}$). Note-se que a pressão atuará apenas sobre a parte sólida da amostra. O módulo volumétrico possui a mesma dimensão do módulo de cisalhamento, logo será medido em Pascal (Pa). Valores típicos para rochas estão entre G e 10 G (1 a 10 vezes o módulo de cisalhamento).

3.8 - Módulo volumétrico não drenado (K_u)

Assim como o módulo volumétrico drenado, o módulo volumétrico não drenado mede a relação entre a tensão hidrostática aplicada a um material poroso e a variação volumétrica por unidade de volume do mesmo. A diferença é que, neste caso, impõem-se condições não drenadas (no teste de laboratório indicado no item anterior, retira-se o tubo conectando os poros da rocha com o meio ambiente). Note-se que, aqui, a tensão atuará tanto na parte fluida como na parte sólida da amostra, e a pressão de poro não ficará constante (pelo menos, não obrigatoriamente).

3.9 - Módulo volumétrico do fluido (K_f)

Mede a relação entre uma tensão aplicada a uma massa de fluido e a variação de volume decorrente por unidade de volume do material. Ou seja, aplicando-se uma pressão p sobre uma massa de fluido e medindo-se a variação de massa específica do mesmo:

$$K_f = - \frac{\sigma_{kk}}{3 \epsilon_{kk}} = \frac{p p_0}{\rho - \rho_0} \quad \dots \dots \dots (3.9.01)$$

sendo ρ a massa específica do fluido.

O módulo volumétrico do fluido tem dimensão de tensão, logo será medido em Pascal (Pa). Seu valor varia de 0 a ∞ . O limite inferior é característico de fluidos altamente compressíveis e o limite superior é característico de fluido incompressíveis.

3.10 - Permeabilidade (k)

Mede o grau de resistência oferecido por um material poroso à passagem de um determinado fluido através dele. Pode ser entendido como sendo a relação entre o diferencial de pressão aplicado

a uma amostra de rocha e a vazão de fluido correspondente. A lei de Darcy (desprezando as forças de corpo) estabelece que:

$$q_i = -k p_{,i} \quad (3.10.01)$$

sendo q_i o vetor descarga específica de fluido (vazão de fluido por unidade de área).

Do modo como está definido aqui, a permeabilidade depende das características da rocha (principalmente da porosidade e dos canais que unem os poros) e da viscosidade do fluido.

Para se medir a permeabilidade de uma rocha a um determinado fluido, satura-se esta rocha com esse fluido, aplica-se um diferencial de pressão sobre a amostra, e mede-se a vazão de fluido decorrente. Utilizando o Sistema Internacional, a permeabilidade será medida em metro²/Pascal/segundo - (m²/Pa/s), correspondente às unidades de campo darcy/centipoise (darcy/cp). A permeabilidade é uma característica que irá variar muito, dependendo das rochas e dos fluidos nelas contidos.

3.11 - Unidades de medida das variáveis poroelásticas

Utilizando o Sistema Internacional, as variáveis poroelásticas tratadas neste trabalho terão as seguintes unidades:

σ_{ij} - tensor tensão (Pascal),

t_i - vetor tensão (Pascal),

p - pressão de poros (Pascal),

u_i - vetor deslocamento do sólido (metro),

q_i - vetor descarga específica de fluido (m³/m²/s).

CAPÍTULO 4

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA SOLUCIONAR O SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DA POROELASTICIDADE

4.1 - Introdução ao método dos elementos de contorno

O método dos elementos de contorno (MEC) surgiu como uma poderosa alternativa ao método dos elementos finitos, particularmente nos casos em que se exigia uma melhor precisão devido a problemas como concentrações de tensões ou quando o domínio a ser tratado estendia-se até o infinito. A mais importante vantagem do MEC, no entanto, é que ele requer apenas a discretização do contorno do domínio. Isto reduz em um grau a dimensão do problema a ser tratado (utilizam-se os pontos extremos em domínios unidimensionais, discretizam-se linhas em domínios bidimensionais ou superfícies em domínios tridimensionais).

O princípio de funcionamento do MEC pode, utilizando uma linha de raciocínio bem simplificada, ser colocado do seguinte modo: transforma-se a equação diferencial em uma equação integral através do método dos resíduos ponderados. Faz-se com que a função ponderadora seja solução da equação diferencial tendo um delta de Dirac como termo não homogêneo e assumindo com condição de contorno que as variáveis e suas derivadas tendem a zero no infinito - essa função ponderadora passará a se chamar de solução fundamental. Aplica-se duas vezes o processo de integração por partes, transformando a equação integral sobre o domínio em equações integrais sobre o contorno. Para se encontrar a solução do problema em um determinado ponto (de colocação) basta que se solucione as integrais sobre o contorno.

A seguir será utilizado o método dos elementos de contorno para solucionar a equação de Laplace. A seqüência do processo utilizado servirá de referência no desenvolvimento do processo de solução do sistema de equações diferenciais da poroelasticidade.

4.2 - Utilização do método dos elementos de contorno para solucionar a equação de Laplace

Equação de Laplace:

$$\nabla^2 U = 0 \text{ em } \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2. \dots\dots\dots (4.2.01)$$

Condições de contorno: $U = U$ em Γ_1 e $\frac{\partial U}{\partial n} = q$ em Γ_2

Transformação da equação diferencial em equação integral através do método dos resíduos ponderados:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 U) U^* d\Omega = 0. \dots\dots\dots (4.2.02)$$

Integrando a equação (4.2.02) por partes (1ª identidade de Green):

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 U) U^* d\Omega = \int_{\Gamma} U^* \frac{\partial U}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla U \nabla U^* d\Omega = 0. \dots\dots\dots (4.2.03)$$

Integrando o último termo da equação (4.2.03) por partes:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 U) U^* d\Omega = \int_{\Gamma} U^* \frac{\partial U}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} U \frac{\partial U^*}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega} U (\nabla^2 U^*) d\Omega = 0. \dots\dots\dots (4.2.04)$$

Da equação (4.2.04) pode-se concluir que:

$$\int_{\Omega} U (\nabla^2 U^*) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(U \frac{\partial U^*}{\partial n} - U^* \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\Gamma. \quad \dots \dots \dots (4.2.05)$$

Pode-se reorganizar essa equação da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} U (\nabla^2 U^*) d\Omega = \int_{\Gamma} U q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} U^* q d\Gamma. \quad \dots \dots \dots (4.2.06)$$

O lado direito da equação (4.2.06) acima envolve apenas integrais de funções ao longo do contorno. Para solucionar a essa equação, no entanto, é necessário definir melhor a função ponderadora U^* . Ela é a solução do operador de Laplace (equação 4.1.01) tendo um delta de Dirac como termo não homogêneo e sem qualquer condição de contorno, e, com essa propriedade, será chamada de solução fundamental:

$$\nabla^2 U^* + \delta(x-x_c) = 0, \quad \dots \dots \dots (4.2.07)$$

sendo \underline{x}_c o ponto de colocação ou aplicação, e $\delta(\underline{x}-\underline{x}_c)$ o delta de Dirac, definido como:

$$\delta(x-x_c) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq x_c \\ \infty & \text{se } x = x_c \\ +\infty \\ -\infty \end{cases} \quad \dots \dots \dots$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \delta(x-x_c) dx = F(x_c)$$

A solução da equação (4.2.07) é conhecida (ref. 21):

$$U^*(x-x_c) = \frac{1}{2\pi} \text{Ln}\left(\frac{1}{r}\right), \text{ para domínios bidimensionais,}$$

e

$$U^*(x-x_c) = \frac{1}{4\pi r}, \text{ para domínios tridimensionais,}$$

sendo r a distância entre o ponto de aplicação \underline{x}_c e um ponto \underline{x} no contorno ($r = |\underline{x} - \underline{x}_c|$).

Utilizando a equação (4.2.07) pode-se afirmar que:

$$\int_{\Omega} U (\nabla^2 U^*) d\Omega = - \int_{\Omega} U \delta (x-x_c) d\Omega = -U(x_c). \dots\dots\dots (4.2.08)$$

Substituindo o resultado obtido na equação (4.2.08) na equação (4.2.06), obtém-se:

$$U(x_c) = \int_{\Gamma} U^* q d\Gamma - \int_{\Gamma} q^* U d\Gamma. \dots\dots\dots (4.2.09)$$

A equação (4.2.09) acima mostra que é possível solucionar a equação diferencial (4.2.01) em qualquer ponto \underline{x}_c interior ao domínio, utilizando apenas integrais ao longo do contorno. Para isso é necessário tão somente que se conheçam as funções U e q em todo o contorno (Γ), pois já foi visto que as funções U^* e $q^* = (\partial U^* / \partial n)$ são conhecidas. De um modo geral, no entanto, U é conhecido apenas em uma parte do contorno (Γ_1) e q é conhecido na outra parte do contorno (Γ_2). Dessa forma, não é possível solucionar a equação (4.2.09) da forma como ela está. Para resolver esse impasse, utiliza-se a discretização do contorno (divisão do contorno em elementos). Basicamente, utiliza-se um dos seguintes métodos de discretização:

a) elementos constantes: as funções são supostas constantes ao longo de cada um dos elementos (retas ou planos), e o ponto central do elemento é tomado com representante de todo o elemento

(esse ponto tomado é chamado de nó). É o método mais simples de discretização, e, por esse motivo, é o método adotado neste trabalho.

b) elementos lineares: supõe-se que as funções variam linearmente ao longo de cada elemento (retas ou planos), e utilizam-se os pontos extremos dos elementos para representá-los (existem algumas variações nas quais não se utilizam os pontos extremos dos elementos com nós, mas pontos próximos aos extremos; esses detalhes, no entanto, não serão considerados aqui). É um método mais preciso que o método de elementos constantes (ou analisando de outra forma, pode-se obter a mesma precisão do método dos elementos constantes com uma discretização mais grosseira). Não há, porém, melhora no tocante à aproximação geométrica entre o contorno real do problema e o contorno discretizado. São introduzidos alguns complicadores no processo: o próprio fato das funções não serem constantes ao longo dos elementos, mais de um nó em cada elemento, o fato dos nós pertencerem simultaneamente a mais de um elemento, etc.

c) elementos quadráticos: é suposta uma variação quadrática das funções ao longo dos elementos, e são tomados 3 pontos (nós) ao longo de cada elemento para representá-los. É o mais complexo dos três métodos de discretização citados, porém é o mais preciso: além da flexibilidade de considerar uma variação quadrática das funções (que tem melhor capacidade de se aproximar da realidade, mesmo utilizando-se uma discretização razoavelmente grosseira), é o método que consegue a melhor aproximação do formato geométrico do contorno (permite que se discretize o contorno em elementos curvos, e não em elementos retos ou planos como nos métodos anteriores).

Dividindo o contorno em n elementos, a equação (4.2.09) assumirá a seguinte forma:

$$U(x_c) = \sum_{e=1}^n \left[\int_{\Gamma^e} U^* q d\Gamma - \int_{\Gamma^e} q^* U d\Gamma \right]. \dots\dots\dots (4.2.10)$$

Considerando que as funções são constantes em cada elemento, pode-se aproximar a equação (4.2.10) por:

$$U(x_c) = \sum_{e=1}^n \left[q^e \int_{\Gamma^e} U^* d\Gamma - U^e \int_{\Gamma^e} q^* U d\Gamma \right], \dots \dots \dots (4.2.11)$$

onde o expoente "e" indica o elemento.

A solução da equação (4.2.11) acima ainda depende do conhecimento das funções q e U em todos os elementos (em todo o contorno). Para contornar esse problema, coloca-se o ponto de aplicação em cada um dos nós dos elementos (nos pontos centrais, no caso de elementos constantes). Cada vez que se coloca o ponto de aplicação em um dos elementos, obtém-se uma equação - logo, serão obtidas n equações. Como existem n incógnitas (U em uma parte dos n elementos e q no restante), pode-se desenvolver o seguinte sistema de n equações com n incógnitas que permite solucionar o problema na fronteira:

$$\frac{1}{2} U(x_c^k) = \sum_{e=1}^n \left[q^e \int_{\Gamma^e} U^* d\Gamma - U^e \int_{\Gamma^e} q^* d\Gamma \right]. \dots \dots \dots (4.2.12)$$

O coeficiente 1/2 que apareceu nesta equação pode ser interpretado da seguinte forma: O ponto de aplicação está sendo colocado nos nós dos elementos. No caso de elementos constantes, estes nós situam-se no centro dos elementos (que são retas). De maneira simplista, pode-se dizer que a metade de cada um desses pontos pertence ao domínio, enquanto a outra metade não pertence. Este coeficiente pode ser visto como um percentual do quanto o ponto pertence ao domínio. Conseqüentemente, pontos no interior do domínio terão coeficiente 1, pontos na fronteira terão coeficiente 1/2 e pontos fora do domínio terão coeficiente 0. Maiores detalhes a esse respeito, inclusive um detalhamento matemático formal, pode ser encontrado na ref. 21.

A equação (4.2.12) permite que se monte o sistema que, quando resolvido, fornecerá os valores das funções na fronteira. De posse desses valores, pode-se utilizar a equação (4.2.11) para calcular o potencial (U) em qualquer ponto \underline{x} do domínio.

Existe, ainda, um último item que precisa ser analisado antes de se considerar o problema resolvido: a singularidade das soluções fundamentais. Para armar o sistema a partir da equação (4.2.12), coloca-se o ponto de aplicação em cada um dos elementos e calculam-se as integrais das soluções fundamentais ao longo de todos os elementos, inclusive o próprio elemento onde está o ponto de aplicação. Nesse caso, quando \underline{x} coincide com \underline{x}_e , implicará em $r = 0$. Para as soluções fundamentais da equação de Laplace, no entanto, esse obstáculo não representa um problema mais sério, pois U^* apresenta uma singularidade fraca (logarítmica) em $r = 0$, e pode ser numericamente integrado. Já a solução fundamental q^* é igual a 0 (zero) quando se está integrando ao longo do elemento onde está o ponto de colocação (quando se utilizam elementos constantes), pois o gradiente de r torna-se perpendicular à normal ao elemento, e o produto interno entre eles é 0 (zero). No desenvolvimento das soluções das equações da poroelasticidade, o problema da singularidade das soluções fundamentais será bem detalhado, pois esse é um dos itens mais importantes quando se está aplicando o método dos elementos de contorno. Uma análise mal feita das singularidades das soluções fundamentais em um problema, fatalmente comprometerá a acuracidade da sua solução.

A posição do domínio a ser tratado (interior ou exterior) em relação ao contorno é determinada pelo sentido dos vetores normais aos elementos: as normais são exteriores ao domínio. O vetor normal a um dado elemento, cujas extremidades são dadas pelos pontos \underline{x}_{n+1} e \underline{x}_n , é obtida (para o caso de domínios bidimensionais) através do produto externo entre um vetor unitário orientado na direção $\underline{x}_n \rightarrow \underline{x}_{n+1}$ e um vetor unitário perpendicular ao plano do domínio (considerando o plano deste papel como o plano do domínio, esse vetor estaria apontando no sentido do leitor). Assim sendo, o

sentido de rotação adotado na seqüência de numeração dos elementos irá determinar se o domínio será interno ou externo: sentido horário implica em domínio externo e sentido anti-horário em domínio interno. As figuras 4.2.01 e 4.2.02, abaixo, ilustram esse processo.

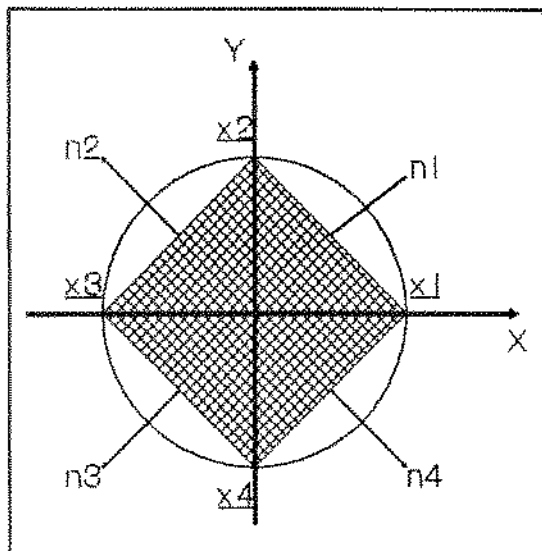


Figura 4.2.01 - Seqüência de numeração anti-horária - domínio interior.

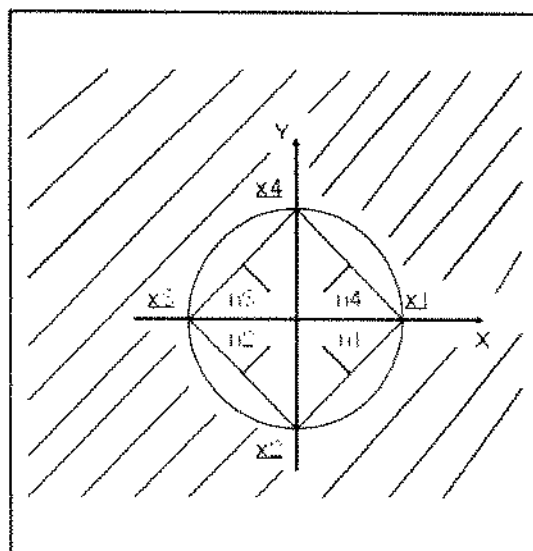


Figura 4.2.02 - Seqüência de numeração horária - domínio exterior.

4.3 - Transformação das equações diferenciais da poroelasticidade em equações integrais

Um estado de tensão (σ_{ij}) em um ponto relaciona-se com o estado de deformação (ϵ_{ij}) dela decorrente através das seguintes equações constitutivas da elasticidade linear para materiais homogêneos e isotrópicos (ref. 18):

$$\sigma_{ij}(x, t) = 2\mu\epsilon_{ij}(x, t) + \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk}(x, t), \dots\dots\dots (4.3.01)$$

sendo μ e λ as constantes de Lamé.

Um outro estado de tensão-deformação (estado primo, por conveniência defasado no tempo em relação ao estado anterior) neste corpo, obedecerá às mesmas equações constitutivas:

$$\sigma'_{ij}(x, t-\tau) = 2\mu \varepsilon'_{ij}(x, t-\tau) + \lambda \delta_{ij} \varepsilon'_{kk}(x, t-\tau) . \quad (4.3.02)$$

Multiplicando a equação (4.3.01) por ε'_{ij} e a equação (4.3.02) por ε_{ij} , obtem-se:

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(x, t) \varepsilon'_{ij}(x, t-\tau) = 2\mu \varepsilon_{ij}(x, t) \varepsilon'_{ij}(x, t-\tau) + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(x, t) \varepsilon'_{ij}(x, t-\tau) \\ \sigma'_{ij}(x, t-\tau) \varepsilon_{ij}(x, t) = 2\mu \varepsilon'_{ij}(x, t-\tau) \varepsilon_{ij}(x, t) + \lambda \delta_{ij} \varepsilon'_{kk}(x, t-\tau) \varepsilon_{ij}(x, t) \end{cases} \quad (4.3.03)$$

Considerando que:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} \varepsilon_{ij}(x, t) &= \varepsilon_{ii}(x, t) = \varepsilon_{jj}(x, t) = \varepsilon_{kk}(x, t) \quad e \\ \delta_{ij} \varepsilon'_{ij}(x, t-\tau) &= \varepsilon'_{ii}(x, t-\tau) = \varepsilon'_{jj}(x, t-\tau) = \varepsilon'_{kk}(x, t-\tau) , \end{aligned}$$

obtem-se ao subtrair as equações do sistema (4.3.03):

$$\sigma_{ij}(x, t) \varepsilon'_{ij}(x, t-\tau) = \sigma'_{ij}(x, t-\tau) \varepsilon_{ij}(x, t) , \quad (4.3.04)$$

que é uma versão do teorema da reciprocidade de Betti-Rayleigh (ref. 18).

Introduzindo o termo que visa considerar o efeito da poroelasticidade nas equações (4.3.01) e (4.3.02), conforme sugerido por Biot (ref. 02):

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(x, t) = 2\mu \varepsilon_{ij}(x, t) + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(x, t) - \alpha \delta_{ij} p(x, t) \\ \sigma'_{ij}(x, t-\tau) = 2\mu \varepsilon'_{ij}(x, t-\tau) + \lambda \delta_{ij} \varepsilon'_{kk}(x, t-\tau) - \alpha \delta_{ij} p'(x, t-\tau) \end{cases}$$

ou,

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(x, t) + \alpha \delta_{ij} p(x, t) = 2\mu \varepsilon_{ij}(x, t) + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(x, t) \\ \sigma'_{ij}(x, t-\tau) + \alpha \delta_{ij} p'(x, t-\tau) = 2\mu \varepsilon'_{ij}(x, t-\tau) + \lambda \delta_{ij} \varepsilon'_{kk}(x, t-\tau) \end{cases}$$

Multiplicando a primeira e a segunda equações desse sistema por ε'_{ij} e ε_{ij} , respectivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\sigma_{ij}(x, t) + \alpha \delta_{ij} p(x, t)] \varepsilon'_{ij}(x, t - \tau) = 2\mu \varepsilon_{ij}(x, t) \varepsilon'_{ij}(x, t - \tau) + \\ \quad + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(x, t) \varepsilon'_{ij}(x, t - \tau) \\ [\sigma'_{ij}(x, t - \tau) + \alpha \delta_{ij} p'(x, t - \tau)] \varepsilon_{ij}(x, t) = 2\mu \varepsilon'_{ij}(x, t - \tau) \varepsilon_{ij}(x, t) + \\ \quad + \lambda \delta_{ij} \varepsilon'_{kk}(x, t - \tau) \varepsilon_{ij}(x, t) \end{array} \right.$$

Subtraindo as equações desse sistema, e considerando a equação (4.3.04), chega-se a:

$$\varepsilon'_{kk}(x, t - \tau) p(x, t) = \varepsilon_{kk}(x, t) p'(x, t - \tau). \quad \dots \dots \dots (4.3.05)$$

Substituindo o valor da pressão de poro (p) da equação (2.5.02) na equação (2.5.01), e agrupando as constantes, chega-se a:

$$\sigma_{ij}(x, t) = C_1 \varepsilon_{ij}(x, t) + C_2 \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(x, t) - C_3 \delta_{ij} \zeta(x, t). \quad \dots \dots \dots (4.3.06)$$

Para o estado de tensão-deformação primo ('):

$$\sigma'_{ij}(x, t - \tau) = C_1 \varepsilon'_{ij}(x, t - \tau) + C_2 \delta_{ij} \varepsilon'_{kk}(x, t - \tau) - C_3 \delta_{ij} \zeta'(x, t - \tau). \quad \dots \dots \dots (4.3.07)$$

Multiplicando a equação (4.3.06) por ε'_{ij} e a equação (4.3.07) por ε_{ij} , obtem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\sigma_{ij}(x, t) + C_3 \delta_{ij} \zeta(x, t)] \varepsilon'_{ij}(x, t - \tau) = C_1 \varepsilon_{ij}(x, t) \varepsilon'_{ij}(x, t - \tau) + \\ \quad + C_2 \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(x, t) \varepsilon'_{ij}(x, t - \tau) \\ [\sigma'_{ij}(x, t - \tau) + C_3 \delta_{ij} \zeta'(x, t - \tau)] \varepsilon_{ij}(x, t) = C_1 \varepsilon'_{ij}(x, t - \tau) \varepsilon_{ij}(x, t) + \\ \quad + C_2 \delta_{ij} \varepsilon'_{kk}(x, t - \tau) \varepsilon_{ij}(x, t) \end{array} \right.$$

Subtraindo as equações desse sistema, e utilizando a equação (4.3.04), chega-se a:

$$\zeta(x, t) \varepsilon'_{kk}(x, t-\tau) = \zeta'(x, t-\tau) \varepsilon_{kk}(x, t) . \dots\dots\dots (4.3.08)$$

Multiplicando a equação (4.3.05) por $\zeta(x,t)$, chega-se a:

$$\zeta(x, t) \varepsilon'_{kk}(x, t-\tau) p(x, t) = \zeta(x, t) \varepsilon_{kk}(x, t) p'(x, t-\tau) .$$

Utilizando a equação (4.3.08):

$$\begin{aligned} \zeta'(x, t-\tau) \varepsilon_{kk}(x, t) p(x, t) &= \zeta(x, t) \varepsilon_{kk}(x, t) p'(x, t-\tau) \Rightarrow \\ \zeta'(x, t-\tau) p(x, t) &= \zeta(x, t) p'(x, t-\tau) . \end{aligned}$$

Agrupando esse resultado com a equação (4.3.04), finalmente chega-se a:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x, t) \varepsilon'_{ij}(x, t-\tau) + p(x, t) \zeta'(x, t-\tau) &= \sigma'_{ij}(x, t-\tau) \varepsilon_{ij}(x, t) + \\ &+ p'(x, t-\tau) \zeta(x, t) , \dots\dots\dots (4.3.09) \end{aligned}$$

que é uma extensão para a poroelasticidade do teorema da reciprocidade.

Integrando ambos os lados da equação (4.3.09) em relação ao tempo e aplicando o teorema da convolução da transformada de Laplace:

$$\tilde{\sigma}_{ij}(x, s) \tilde{\varepsilon}'_{ij}(x, s) + \tilde{p}(x, s) \tilde{\zeta}'(x, s) = \tilde{\sigma}'_{ij}(x, s) \tilde{\varepsilon}_{ij}(x, s) + \tilde{p}'(x, s) \tilde{\zeta}(x, s) , \quad (4.3.10)$$

onde o til denota a transformada de Laplace, e s é o parâmetro de transformação.

Considere-se um domínio poroelástico "V" circundado por um contorno "S", submetido a duas histórias de carregamentos independentes, defasados no tempo. A resposta ao primeiro carregamento é caracterizada pelo deslocamento do sólido u_i , a pressão de poro p, o vetor tensão na fronteira $t_i = \sigma_{ij}n_j$ (sendo n_j um vetor unitário normal ao contorno), o fluxo normal ao contorno $q = q_j n_j$, as forças

de corpo F_i (que inclui sólido e líquido) e f_i (devido apenas ao líquido), e a fonte γ distribuída ao longo de todo o domínio. A segunda história de carregamento é caracterizada pelas grandezas u_i^* , t_i^* , q^* , F_i^* , f_i^* e γ^* . A relação entre estas duas histórias de carregamentos é obtida a partir do teorema da reciprocidade (equação 4.3.10), utilizando as equações de equilíbrio (2.2.03), da continuidade (2.5.06) e de Darcy (2.5.05), e aplicando o teorema de Green e a transformada de Laplace (ver dedução no anexo A):

$$\begin{aligned} & \int_S [\tilde{E}_i(x, s) \tilde{u}_i'(x, s) - \tilde{e}_i'(x, s) \tilde{u}_i(x, s)] dS(x) - \int_S \frac{1}{s} [\tilde{p}(x, s) \tilde{q}'(x, s) + \\ & - \tilde{p}'(x, s) \tilde{q}(x, s)] dS(x) + \int_V [\tilde{F}_i(x, s) \tilde{u}_i'(x, s) - \tilde{f}_i'(x, s) \tilde{u}_i(x, s)] dV(x) + \\ & + \int_V \frac{1}{s} [\tilde{F}_i(x, s) \tilde{q}_i'(x, s) - \tilde{f}_i'(x, s) \tilde{q}_i(x, s)] dV(x) + \int_V \frac{1}{s} [\tilde{p}(x, s) \tilde{\gamma}'(x, s) - \\ & \tilde{p}'(x, s) \tilde{\gamma}(x, s)] dV(x) + \int_V \frac{1}{s} [\tilde{p}(x, s) \zeta'(x, 0) - \tilde{p}'(x, s) \zeta(x, 0)] dV(x) = 0 \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

A equação integral para o deslocamento é obtida, a partir da equação (4.3.11), analisando-se os efeitos da aplicação de uma carga concentrada (um delta de Dirac) em um ponto \underline{x}_c , numa determinada direção j . Quando se aplica a força de corpo \tilde{F}_{ij}^* como uma carga concentrada definida por $\tilde{F}_{ij}^* = 2\pi\delta_{ij}\delta(x-x_c)$, e impõe-se como condição de contorno que as variáveis e suas derivadas tendem a zero no infinito, obtém-se a tensão \tilde{t}_{ij}^* , o deslocamento \tilde{u}_{ij}^* , a pressão de poros \tilde{p}_j^* e o fluxo \tilde{q}_j^* como elementos da chamada solução fundamental. Supondo que anteriormente ao carregamento o corpo estava em equilíbrio, que não há fontes, desprezando as forças de corpo, e substituindo as variáveis do estado primo (') pelas variáveis definidas acima, pode-se obter:

$$\begin{aligned} & \int_S [\tilde{E}_i(x, s) \tilde{u}_{ij}^*(x-x_c, s) - \tilde{e}_{ij}^*(x-x_c, s) \tilde{u}_i(x, s)] ds - \int_S \tilde{F}_{ij}^* \tilde{u}_i(x, s) dv + \\ & - \int_S \frac{1}{s} [\tilde{p}(x, s) \tilde{q}_j(x-x_c, s) - \tilde{p}_j^*(x-x_c, s) \tilde{q}(x, s)] ds = 0, \end{aligned}$$

sendo,

$$\int_V \bar{F}'_{ij} \bar{u}_i(x, s) dv = \int_V 2\pi \delta_{ij} \delta(x-x_c) \bar{u}_i(x, s) dV = 2\pi \int_V \bar{u}_j(x, s) \delta(x-x_c) dv = 2\pi \bar{u}_j(x_c, s),$$

logo:

$$2\pi \bar{u}_j(x_c, s) = \int_S [\bar{u}^*_{ij}(x-x_c, s) \bar{t}_i(x, s) - \bar{t}^*_{ij}(x-x_c, s) \bar{u}_i(x, s)] dS(x) + \dots (4.3.12) - \int_S \frac{1}{S} [\bar{q}^*_j(x-x_c, s) \bar{p}(x, s) - \bar{p}^*_j(x-x_c, s) \bar{q}(x, s)] dS(x).$$

As forças de corpo a serem consideradas seriam apenas aquelas ocasionadas pelo peso próprio da massa de fluido injetada ou produzida. Nesse trabalho essas forças foram consideradas desprezíveis em face das demais forças em questão. Para considerar as forças de corpo, ter-se-ia que introduzir integrais de volume nas equações, o que seria um complicador num processo em que, através do MEC, faz-se com que as integrais sejam todas ao longo do contorno (superfícies no caso tridimensional, e linhas no caso bidimensional).

Como pode ser notado, as variáveis do estado primo (') na equação (4.3.11) estavam funcionando como funções ponderadoras. Através do raciocínio utilizado acima, elas foram transformadas em soluções fundamentais do sistema de equações (o mesmo procedimento utilizado na dedução da equação 4.2.09).

Essas soluções fundamentais (\bar{t}^*_{ij} , \bar{u}^*_{ij} , \bar{p}^*_j e \bar{q}^*_j) foram deduzidas por Cheng e Liggett (ref. 04):

$$\bar{u}^*_{ij} = -\frac{3-4\nu_u}{4G(1-\nu_u)} \delta_{ij} \ln r + \frac{\nu_u-\nu}{2G(1-\nu)(1-\nu_u)} \{ \delta_{ij} [\xi^{-2} - \xi^{-1} K_1(\xi)] + r_{,i} r_{,j} [K_2(\xi) - 2\xi^{-2}] \} + \frac{1}{4G(1-\nu_u)} r_{,i} r_{,j} \dots (4.3.13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{ij}^* &= \frac{1-2\nu_u}{2(1-\nu_u)} (n_i r_{,j} - n_j r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k} n_k) \frac{1}{r} - \frac{1}{1-\nu_u} r_{,i} r_{,j} r_{,k} n_k \frac{1}{r} + \\ &+ \frac{\nu_u - \nu}{(1-\nu)(1-\nu_u)} \sqrt{\frac{s}{c}} \{ \delta_{ij} r_{,k} n_k [\xi^{-1} K_2(\xi) - 2\xi^{-3}] + r_{,i} r_{,j} r_{,k} n_k [8\xi^{-3} + \dots \dots \dots (4.3.14) \\ &- K_3(\xi)] + n_i r_{,j} [K_3(\xi) - 3\xi^{-1} K_2(\xi) - 2\xi^{-3}] + n_j r_{,i} [\xi^{-1} K_2(\xi) - 2\xi^{-3}] \}. \end{aligned}$$

$$\tilde{q}_j^* = \frac{3(\nu_u - \nu)}{2BG(1-\nu)(1+\nu_u)} \{ n_j [\xi^{-1} K_1(\xi) - \xi^{-2}] + r_{,j} r_{,k} n_k [2\xi^{-2} - K_2(\xi)] \}. \dots \dots \dots (4.3.15)$$

$$\tilde{p}_j^* = \frac{B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} \sqrt{\frac{s}{c}} r_{,j} [\xi^{-1} - K_1(\xi)]. \dots \dots \dots (4.3.16)$$

Seguindo o mesmo raciocínio utilizado para obter a equação integral do deslocamento, obtem-se a equação integral para a pressão de poros: substituindo, na equação (4.3.11) as variáveis do estado primo (') pelas obtida como resultado de um pulso caracterizado por uma fonte concentrado em um ponto \underline{x}_c , $\tilde{\gamma}' = 2\pi\delta(x-x_c)$:

$$\begin{aligned} &\int_s [\tilde{e}_i(x, s) \tilde{u}_i^*(x-x_c, s) - \tilde{e}_i^*(x-x_c, s) \tilde{u}_i(x, s)] ds + \int_v \frac{1}{s} \tilde{p}(x, s) \tilde{\gamma}' dv + \\ &- \int_s \frac{1}{s} [\tilde{p}(x, s) \tilde{q}(x-x_c, s) - \tilde{p}^*(x-x_c, s) \tilde{q}(x, s)] ds = 0, \end{aligned}$$

sendo,

$$\int_v \frac{1}{s} \tilde{p}(x, s) \tilde{\gamma}' dv = \frac{1}{s} \int_v \tilde{p}(x, s) 2\pi\delta(x-x_c) dv = \frac{1}{s} 2\pi\tilde{p}(x_c, s),$$

logo:

$$\begin{aligned}
 -2\pi\tilde{p}(x_c, s) = & \int_S [\tilde{u}_i^*(x-x_c, s) \tilde{t}_i(x, s) - \tilde{t}_i^*(x-x_c, s) \tilde{u}_i(x, s)] dS(x) + \\
 & - \int_S [\tilde{q}^*(x-x_c, s) \tilde{p}(x, s) - \tilde{p}^*(x-x_c, s) \tilde{q}(x, s)] dS(x) . \quad \dots (4.3.17)
 \end{aligned}$$

As soluções fundamentais \tilde{u}_i^* , \tilde{t}_i^* , \tilde{q}^* e \tilde{p}^* também foram deduzidas por Cheng e Liggett (ref. 04):

$$\tilde{u}_i^* = \frac{B(1+\nu_u)}{3S(1-\nu_u)} \sqrt{\frac{S}{c}} r_{,i} [\xi^{-1} - K_1(\xi)] . \quad \dots (4.3.18)$$

$$\tilde{t}_i^* = \frac{BG(1+\nu_u)}{3c(1-\nu_u)} \{ n_i [2\xi^{-2} - K_0(\xi) - K_2(\xi)] - r_{,i} r_{,k} n_k [4\xi^{-2} - 2K_2(\xi)] \} . \quad \dots (4.3.19)$$

$$\tilde{q}^* = \sqrt{\frac{S}{c}} r_{,k} n_k K_1(\xi) . \quad \dots (4.3.20)$$

$$\tilde{p}^* = \frac{1}{k} K_0(\xi) . \quad \dots (4.3.21)$$

Sendo, em todas as soluções fundamentais acima: r a distância entre o ponto de aplicação (\underline{x}) e um ponto no contorno (\underline{x}): $r = |\underline{x} - \underline{x}_c|$, e suas derivadas $r_{,i} = (x_i - x_{c,i})/r$, e $K_n(\xi)$ a função modificada de Bessel de segunda espécie, de ordem n no ponto $\xi = \sqrt{s}/\sqrt{c}$.

A equação integral para a tensão é obtida derivando-se as equações (4.3.12) e (4.3.17) em relação a \underline{x}_i e utilizando a equação (2.5.01) (ref. 01):

$$\begin{aligned}
 2\pi\tilde{\sigma}_{kj}(x_c, s) = & \int_S [\tilde{d}_{ikj}^*(x-x_c, s) \tilde{t}_i(x, s) - \tilde{s}_{ikj}^*(x-x_c, s) \tilde{u}_i(x, s)] dS(x) + \\
 & - \int_S [\tilde{d}_{3kj}^*(x-x_c, s) \tilde{p}(x, s) - \tilde{s}_{3kj}^*(x-x_c, s) \tilde{q}(x, s)] dS(x) . \quad \dots (4.3.22)
 \end{aligned}$$

A equação integral para o fluxo pode ser obtida derivando-se a equação (4.3.17) em relação a \underline{x}_i e utilizando a equação (2.5.05) (ref.01):

$$2\pi\tilde{q}_j(x_c, s) = \int_s [\tilde{d}_{ij}^*(x-x_c, s) \tilde{t}_i(x, s) - \tilde{s}_{ij}^*(x-x_c, s) \tilde{u}_i(x, s)] dS(x) + \dots (4.3.23)$$

$$- \int_s [\tilde{d}_{3j}^*(x-x_c, s) \tilde{p}(x, s) - \tilde{s}_{3j}^*(x-x_c, s) \tilde{q}(x, s)] dS(x) .$$

Os núcleos \tilde{d}_{ikj}^* , \tilde{d}_{3kj}^* , \tilde{s}_{ikj}^* , \tilde{s}_{3kj}^* , \tilde{d}_{ij}^* , \tilde{d}_{3j}^* , \tilde{s}_{ij}^* e \tilde{s}_{3j}^* são obtidos durante a dedução das equações (4.3.22) e (4.3.23):

$$\tilde{d}_{ikj}^* = a_1 \xi^{-1} + a_2 K_1(\xi) + a_3 [\xi^{-1} K_2(\xi) - 2\xi^{-3}] + s\alpha \delta_{jk} \tilde{u}_i^* . \dots (4.3.24)$$

$$\tilde{d}_{3kj}^* = a_4 K_1(\xi) + a_5 [\xi^{-1} K_2(\xi) - 2\xi^{-3}] + \alpha \delta_{jk} \tilde{q}^* . \dots (4.3.25)$$

$$\tilde{s}_{ikj}^* = a_6 \xi^{-2} + a_7 K_0(\xi) + a_8 \xi^{-1} K_1(\xi) + a_9 [\xi^{-2} K_2(\xi) - 2\xi^{-4}] + s\alpha \delta_{jk} \tilde{t}_i^* . \dots (4.3.26)$$

$$\tilde{s}_{3kj}^* = a_{10} K_0(\xi) + a_{11} [\xi^{-1} K_1(\xi) - \xi^{-2}] + \alpha \delta_{jk} \tilde{p}^* . \dots (4.3.27)$$

$$\tilde{d}_{ij}^* = a_{12} K_0(\xi) + a_{13} [\xi^{-1} K_1(\xi) - \xi^{-2}] . \dots (4.3.28)$$

$$\tilde{d}_{3j}^* = a_{14} K_0(\xi) + a_{15} \xi^{-1} K_1(\xi) . \dots (4.3.29)$$

$$\tilde{s}_{ij}^* = a_{16} K_1(\xi) + a_{17} [\xi^{-1} K_2(\xi) - 2\xi^{-3}] . \dots (4.3.30)$$

$$\tilde{s}_{3j}^* = a_{18} K_1(\xi) \dots \dots \dots (4.3.31)$$

sendo $i, k, j = 1, 2$ e:

$$a_1 = \sqrt{\frac{S}{C}} \left[\frac{(1-2v_u)}{2(1-v_u)} (\delta_{ij^R, k} + \delta_{ik^R, j}) - \frac{1-4v+4vv_u}{2(1-2v)(1-v_u)} \delta_{jk^R, i} + \frac{1}{1-v_u} r_{,i}^R, j^R, k \right] \dots \dots \dots (4.3.32)$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{S}{C}} \left[\frac{v_u - v}{(1-v)(1-v_u)} r_{,i}^R, j^R, k + \frac{v(v_u - v)}{(1-v)(1-2v)(1-v_u)} \delta_{jk^R, i} \right] \dots \dots \dots (4.3.33)$$

$$a_3 = \frac{v_u - v}{(1-v)(1-v_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} (4r_{,i}^R, j^R, k - \delta_{ij^R, k} - \delta_{ik^R, j} - \delta_{jk^R, i}) \dots \dots \dots (4.3.34)$$

$$a_4 = -\sqrt{\frac{S}{C}} \frac{3(v_u - v)}{SB(1-v)(1+v_u)} \left[r_{,j}^R, k^R, l^R, l + \frac{v}{(1-2v)} \delta_{jk^R, l^R, l} \right] \dots \dots \dots (4.3.35)$$

$$a_5 = \frac{3(v_u - v)}{SB(1-v)(1+v_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} [r_{,j}^R, n_k + r_{,k}^R, n_j + r_{,l}^R, n_l (\delta_{jk} - 4r_{,j}^R, k)] \dots \dots \dots (4.3.36)$$

$$a_6 = -\frac{SG(1-2v_u)}{C(1-v_u)} [r_{,l}^R, n_l (\delta_{ij^R, k} + \delta_{ik^R, j}) - \delta_{ij^R, k} - \delta_{ik^R, j} + \delta_{jk^R, i} + r_{,i}^R, j^R, n_k + r_{,i}^R, k^R, n_j - 2r_{,j}^R, k^R, n_i] + \frac{SG}{C(1-v_u)} [r_{,l}^R, n_l (\delta_{ij^R, k} + \delta_{ik^R, j} + 2\delta_{jk^R, i} + \dots \dots (4.3.37)$$

$$- 8r_{,i}^R, j^R, k) + r_{,i}^R, j^R, n_k + r_{,i}^R, k^R, n_j] - \frac{2SGv(1-2v_u)}{C(1-2v)(1-v_u)} (2\delta_{jk^R, i} r_{,l}^R, l^R, n_l + \dots$$

$$- \delta_{jk^R, n_l}) \dots$$

$$a_7 = -\frac{2SG(v_u - v)}{C(1-v)(1-v_u)} \left[r_{,i}^R, j^R, k^R, l^R, n_l - r_{,j}^R, k^R, n_l + \frac{v}{1-2v} (\delta_{jk^R, i} r_{,l}^R, l^R, n_l - \delta_{jk^R, n_l}) \right] \dots \dots \dots (4.3.38)$$

$$\begin{aligned}
 a_8 = & -\frac{2SG(v_u-v)}{C(1-v)(1-v_u)} [\delta_{jk}n_i - r_{,i}r_{,j}n_k - r_{,i}r_{,k}n_j - 3r_{,j}r_{,k}n_i + \\
 & + r_{,i}n_l (8r_{,i}r_{,j}r_{,k} - \delta_{ij}r_{,k} - \delta_{ik}r_{,j} - \delta_{jk}r_{,i})] + \dots \dots \dots (4.3.39) \\
 & -\frac{2SGv(v_u-v)}{C(1-v)(1-2v)(1-v_u)} (2\delta_{jk}r_{,i}r_{,l}n_l - \delta_{jk}n_l) .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_9 = & -\frac{2SG(v_u-v)}{C(1-v)(1-v_u)} [-4(r_{,i}r_{,j}n_k + r_{,i}r_{,k}n_j + r_{,j}r_{,k}n_i) + \dots \dots \dots (4.3.40) \\
 & + 4r_{,l}n_l (6r_{,i}r_{,j}r_{,k} - \delta_{ij}r_{,k} - \delta_{ik}r_{,j} - \delta_{jk}r_{,i}) + \delta_{ij}n_k + \delta_{ik}n_j + \delta_{jk}n_l] .
 \end{aligned}$$

$$a_{10} = -\frac{2GB(1+v_u)}{3C(1-v_u)} r_{,j}r_{,k} - \frac{2GBv(1+v_u)}{3C(1-2v)(1-v_u)} \delta_{jk} . \dots \dots \dots (4.3.41)$$

$$a_{11} = \frac{2GB(1+v_u)}{3C(1-v_u)} (\delta_{jk} - 2r_{,j}r_{,k}) . \dots \dots \dots (4.3.42)$$

$$a_{12} = -\frac{skB(1+v_u)}{3C(1-v_u)} r_{,i}r_{,j} . \dots \dots \dots (4.3.43)$$

$$a_{13} = \frac{skB(1+v_u)}{3C(1-v_u)} (\delta_{ij} - 2r_{,i}r_{,j}) . \dots \dots \dots (4.3.44)$$

$$a_{14} = \frac{sk}{C} r_{,j}r_{,k}n_l . \dots \dots \dots (4.3.45)$$

$$a_{15} = -\frac{sk}{C} (n_j - 2r_{,j}r_{,k}n_k) . \dots \dots \dots (4.3.46)$$

$$a_{16} = -\frac{2skBG(1+v_u)}{3C(1-v_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} (r_{,j}n_l - r_{,i}r_{,j}r_{,k}n_k) . \dots \dots \dots (4.3.47)$$

$$a_{17} = -\frac{2skBG(1+\nu_u)}{3C(1-\nu_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} (\delta_{ij} r_{,k} n_k + r_{,i} n_j + r_{,j} n_i - 4r_{,i} r_{,j} r_{,k} n_k) \dots \dots \dots (4.3.48)$$

$$a_{18} = \sqrt{\frac{S}{C}} r_{,j} \dots \dots \dots (4.3.49)$$

As equações (4.3.12), (4.3.17), (4.3.23) e (4.3.26) permitem o cálculo dos deslocamentos, pressões de poros, vazões e tensões em qualquer ponto \underline{x}_c interno ao domínio, desde se conheçam as funções $\tilde{u}_i(\underline{x},s)$, $\tilde{t}_i(\underline{x},s)$, $\tilde{q}(\underline{x},s)$ e $\tilde{p}(\underline{x},s)$ em todo o contorno.

4.4 - Discretização das equações integrais

Seguindo o mesmo raciocínio utilizado na solução da equação de Laplace, a solução direta das equações (4.3.12), (4.3.17), (4.3.22) e (4.3.23) não é possível, porque as condições de contorno $\tilde{u}_i(\underline{x},s)$, $\tilde{t}_i(\underline{x},s)$, $\tilde{q}(\underline{x},s)$ e $\tilde{p}(\underline{x},s)$ não são conhecidas em todo o contorno - em problemas matematicamente bem colocados, as funções conjugadas $\tilde{t}_i(\underline{x},s)$ e $\tilde{p}(\underline{x},s)$ são conhecidas em uma parte do contorno e as funções $\tilde{u}_i(\underline{x},s)$ e $\tilde{q}(\underline{x},s)$ são conhecidas no restante do mesmo. Para contornar esse problema, divide-se o contorno/fronreira do problema em n elementos. Considerando que as variáveis do problema são constantes em cada elemento, pode-se aproximar as equações (4.3.12) e (4.3.17) por:

$$2\pi \tilde{u}_j(x_c, s) = \sum_{e=1}^n \left\{ \tilde{t}_i^e(s) \int_{s^*} \tilde{u}_{ij}^*(x-x_c, s) dS(x) - \tilde{u}_i^e(s) \int_{s^*} \tilde{t}_{ij}^*(x-x_c, s) dS(x) + \right. \\ \left. -\tilde{p}^e(s) \int_{s^*} \frac{1}{S} \tilde{q}_j^*(x-x_c, s) dS(x) + \tilde{q}^e(s) \int_{s^*} \frac{1}{S} \tilde{p}_j^*(x-x_c, s) dS(x) \right\}, \dots \dots \dots (4.4.01)$$

$$\begin{aligned}
-2\pi\tilde{p}(x_c, s) = \sum_{\epsilon=1}^n \left\{ \tilde{t}_i^\epsilon(s) \int_{s^*} s\tilde{u}_i^*(x-x_c, s) dS(x) - \tilde{u}_i^\epsilon(s) \int_{s^*} s\tilde{t}_i^*(x-x_c, s) dS(x) + \right. \\
\left. -\tilde{p}^\epsilon(s) \int_{s^*} \tilde{q}^*(x-x_c, s) dS(x) + \tilde{q}^\epsilon(s) \int_{s^*} \tilde{p}^*(x-x_c, s) dS(x) \right\}.
\end{aligned}
\tag{4.4.02}$$

O índice i nas equações acima é um índice repetido, ou índice mudo. Segundo as normas da notação indicial, isto significa um somatório. Fazendo $i=1,2$ obtem-se:

$$\begin{aligned}
2\pi\tilde{u}_j(x_c, s) = \sum_{\epsilon=1}^n \left\{ \tilde{t}_1^\epsilon(s) \int_{s^*} \tilde{u}_{1j}^*(x-x_c, s) dS(x) + \tilde{t}_2^\epsilon(s) \int_{s^*} \tilde{u}_{2j}^*(x-x_c, s) dS(x) + \right. \\
-\tilde{u}_1^\epsilon(s) \int_{s^*} \tilde{t}_{1j}^*(x-x_c, s) dS(x) - \tilde{u}_2^\epsilon(s) \int_{s^*} \tilde{t}_{2j}^*(x-x_c, s) dS(x) + \\
\left. -\tilde{p}^\epsilon(s) \int_{s^*} \frac{1}{s} \tilde{q}_j^*(x-x_c, s) dS(x) + \tilde{q}^\epsilon(s) \int_{s^*} \frac{1}{s} \tilde{p}_j^*(x-x_c, s) dS(x) \right\}.
\end{aligned}
\tag{4.4.03}$$

$$\begin{aligned}
-2\pi\tilde{p}(x_c, s) = \sum_{\epsilon=1}^n \left\{ \tilde{t}_1^\epsilon(s) \int_{s^*} s\tilde{u}_1^*(x-x_c, s) dS(x) + \tilde{t}_2^\epsilon(s) \int_{s^*} s\tilde{u}_2^*(x-x_c, s) dS(x) + \right. \\
-\tilde{u}_1^\epsilon(s) \int_{s^*} s\tilde{t}_1^*(x-x_c, s) dS(x) - \tilde{u}_2^\epsilon(s) \int_{s^*} s\tilde{t}_2^*(x-x_c, s) dS(x) + \\
\left. -\tilde{p}^\epsilon(s) \int_{s^*} \tilde{q}^*(x-x_c, s) dS(x) + \tilde{q}^\epsilon(s) \int_{s^*} \tilde{p}^*(x-x_c, s) dS(x) \right\}.
\end{aligned}
\tag{4.4.04}$$

Organizando essas equações sob a forma de matrizes:

$$2\pi\tilde{u}_j(x_c, s) = \sum_{e=1}^n \left\{ \left[\int_{s^*} \tilde{u}_{1j}^*(x-x_c, s) dS(x) \quad \int_{s^*} \tilde{u}_{2j}^*(x-x_c, s) dS(x) \quad - \int_{s^*} \frac{1}{s} \tilde{q}_j^*(x-x_c, s) dS(x) \right] \begin{bmatrix} \tilde{t}_1^*(s) \\ \tilde{t}_2^*(s) \\ \tilde{p}^*(s) \end{bmatrix} + \right. \\ \left. - \left[\int_{s^*} \tilde{t}_{1j}^*(x-x_c, s) dS(x) \quad \int_{s^*} \tilde{t}_{2j}^*(x-x_c, s) dS(x) \quad - \int_{s^*} \frac{1}{s} \tilde{p}_j^*(x-x_c, s) dS(x) \right] \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^*(s) \\ \tilde{u}_2^*(s) \\ \tilde{q}^*(s) \end{bmatrix} \right\}. \quad (4.4.05)$$

$$-2\pi\tilde{p}(x_c, s) = \sum_{e=1}^n \left\{ \left[\int_{s^*} s\tilde{u}_1^*(x-x_c, s) dS(x) \quad \int_{s^*} s\tilde{u}_2^*(x-x_c, s) dS(x) \quad - \int_{s^*} \tilde{q}^*(x-x_c, s) dS(x) \right] \begin{bmatrix} \tilde{t}_1^*(s) \\ \tilde{t}_2^*(s) \\ \tilde{p}^*(s) \end{bmatrix} + \right. \\ \left. - \left[\int_{s^*} s\tilde{t}_1^*(x-x_c, s) dS(x) \quad \int_{s^*} s\tilde{t}_2^*(x-x_c, s) dS(x) \quad - \int_{s^*} \tilde{p}^*(x-x_c, s) dS(x) \right] \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^*(s) \\ \tilde{u}_2^*(s) \\ \tilde{q}^*(s) \end{bmatrix} \right\}. \quad (4.4.06)$$

O índice j refere-se às componentes do vetor deslocamento. Como este trabalho trata do estado plano de deformação, $j=1,2$ nas equações acima:

$$2\pi\tilde{u}_1(x_c, s) = \sum_{e=1}^n \left\{ \left[\int_{s^*} \tilde{u}_{11}^*(x-x_c, s) dS(x) \quad \int_{s^*} \tilde{u}_{21}^*(x-x_c, s) dS(x) \quad - \int_{s^*} \frac{1}{s} \tilde{q}_1^*(x-x_c, s) dS(x) \right] \begin{bmatrix} \tilde{t}_1^*(s) \\ \tilde{t}_2^*(s) \\ \tilde{p}^*(s) \end{bmatrix} + \right. \\ \left. - \left[\int_{s^*} \tilde{t}_{11}^*(x-x_c, s) dS(x) \quad \int_{s^*} \tilde{t}_{21}^*(x-x_c, s) dS(x) \quad - \int_{s^*} \frac{1}{s} \tilde{p}_1^*(x-x_c, s) dS(x) \right] \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^*(s) \\ \tilde{u}_2^*(s) \\ \tilde{q}^*(s) \end{bmatrix} \right\}. \quad (4.4.07)$$

$$2\pi\tilde{u}_2(x_c, s) = \sum_{e=1}^n \left\{ \left[\int_{s^*} \tilde{u}_{12}^*(x-x_c, s) dS(x) \quad \int_{s^*} \tilde{u}_{22}^*(x-x_c, s) dS(x) \quad - \int_{s^*} \frac{1}{s} \tilde{q}_2^*(x-x_c, s) dS(x) \right] \begin{bmatrix} \tilde{t}_1^*(s) \\ \tilde{t}_2^*(s) \\ \tilde{p}^*(s) \end{bmatrix} + \right. \\ \left. - \left[\int_{s^*} \tilde{t}_{12}^*(x-x_c, s) dS(x) \quad \int_{s^*} \tilde{t}_{22}^*(x-x_c, s) dS(x) \quad - \int_{s^*} \frac{1}{s} \tilde{p}_2^*(x-x_c, s) dS(x) \right] \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^*(s) \\ \tilde{u}_2^*(s) \\ \tilde{q}^*(s) \end{bmatrix} \right\}. \quad (4.4.08)$$

$$\begin{aligned}
 -2\pi\beta(x_c, s) = \sum_{e=1}^{nel} \left\{ \left[\int_{s^*} s\tilde{u}_1^*(x-x_c, s) dS(x) \quad \int_{s^*} s\tilde{u}_2^*(x-x_c, s) dS(x) \quad - \int_{s^*} \tilde{q}^*(x-x_c, s) dS(x) \right] \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^*(s) \\ \tilde{e}_2^*(s) \\ \tilde{\beta}^*(s) \end{bmatrix} + \right. \\
 \left. - \left[\int_{s^*} s\tilde{t}_1^*(x-x_c, s) dS(x) \quad \int_{s^*} s\tilde{t}_2^*(x-x_c, s) dS(x) \quad - \int_{s^*} \tilde{\beta}^*(x-x_c, s) dS(x) \right] \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^*(s) \\ \tilde{u}_2^*(s) \\ \tilde{q}^*(s) \end{bmatrix} \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{4.4.09}$$

Seguindo o mesmo processo adotado para solucionar a equação de Laplace, coloca-se o ponto de aplicação, \underline{x}_c , em cada um dos elementos nos quais o contorno foi dividido. Assim será possível armar um sistema com 3 n equações e igual número de incógnitas.

Colocando \underline{x}_c em cada um dos elementos da fronteira ($\underline{x}_c = \underline{x}^k$), e lembrando que, conforme análise feita na dedução do processo de solução da equação de Laplace, mais precisamente na equação (4.2.12), para pontos na fronteira deve-se multiplicar as equações por um fator igual a 1/2, as equações (4.4.07), (4.4.08), e (4.4.09) fornecerão:

$$\begin{aligned}
 \sum_{e=1}^n \left\{ \left[\int_{s^*} \tilde{u}_{11}^*(x-x_c^k, s) dS(x) \quad \int_{s^*} \tilde{u}_{21}^*(x-x_c^k, s) dS(x) \quad - \int_{s^*} \frac{1}{s} \tilde{q}_1^*(x-x_c^k, s) dS(x) \right] \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^*(s) \\ \tilde{e}_2^*(s) \\ \tilde{\beta}^*(s) \end{bmatrix} + \right. \\
 \left. - \left[\int_{s^*} \tilde{t}_{11}^*(x-x_c^k, s) dS(x) + I \times \pi \int_{s^*} \tilde{t}_{21}^*(x-x_c^k, s) dS(x) \quad - \int_{s^*} \frac{1}{s} \tilde{\beta}_1^*(x-x_c^k, s) dS(x) \right] \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^*(s) \\ \tilde{u}_2^*(s) \\ \tilde{q}^*(s) \end{bmatrix} \right\} = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.4.10}$$

$$\sum_{e=1}^n \left\{ \begin{aligned} & \left[\int_{s^*} \tilde{u}_{12}^*(x-x_c^k, s) dS(x) \quad \int_{s^*} \tilde{u}_{22}^*(x-x_c^k, s) dS(x) \quad - \int_{s^*} \frac{1}{s} \tilde{q}_2^*(x-x_c^k, s) dS(x) \right] \begin{bmatrix} \tilde{E}_1^*(s) \\ \tilde{E}_2^*(s) \\ \tilde{p}^*(s) \end{bmatrix} + \\ & - \left[\int_{s^*} \tilde{E}_{12}^*(x-x_c^k, s) dS(x) \quad \int_{s^*} \tilde{E}_{22}^*(x-x_c^k, s) dS(x) + I \times \pi \quad - \int_{s^*} \frac{1}{s} \tilde{p}_2^*(x-x_c^k, s) dS(x) \right] \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^*(s) \\ \tilde{u}_2^*(s) \\ \tilde{q}^*(s) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} = 0. \tag{4.4.11}$$

$$\sum_{e=1}^n \left\{ \begin{aligned} & \left[\int_{s^*} s \tilde{u}_1^*(x-x_c^k, s) dS(x) \quad \int_{s^*} s \tilde{u}_2^*(x-x_c^k, s) dS(x) \quad - \int_{s^*} \tilde{q}^*(x-x_c^k, s) dS(x) + I \times \pi \right] \begin{bmatrix} \tilde{E}_1^*(s) \\ \tilde{E}_2^*(s) \\ \tilde{p}^*(s) \end{bmatrix} + \\ & - \left[\int_{s^*} s \tilde{E}_1^*(x-x_c^k, s) dS(x) \quad \int_{s^*} s \tilde{E}_2^*(x-x_c^k, s) dS(x) \quad - \int_{s^*} \tilde{p}^*(x-x_c^k, s) dS(x) \right] \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^*(s) \\ \tilde{u}_2^*(s) \\ \tilde{q}^*(s) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} = 0. \tag{4.4.12}$$

sendo: $I = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq e \\ 1 & \text{se } k = e \end{cases}$

Somando estas equações, chega-se a:

$$\sum_{e=1}^n \left\{ \begin{aligned} & \left[\int_{s^*} \tilde{u}_{11}^*(x-x_c^k, s) dS(x) \quad \int_{s^*} \tilde{u}_{21}^*(x-x_c^k, s) dS(x) \quad - \int_{s^*} \frac{1}{s} \tilde{q}_1^*(x-x_c^k, s) dS(x) \right] \begin{bmatrix} \tilde{E}_1^*(s) \\ \tilde{E}_2^*(s) \\ \tilde{p}^*(s) \end{bmatrix} + \\ & \left[\int_{s^*} \tilde{u}_{12}^*(x-x_c^k, s) dS(x) \quad \int_{s^*} \tilde{u}_{22}^*(x-x_c^k, s) dS(x) \quad - \int_{s^*} \frac{1}{s} \tilde{q}_2^*(x-x_c^k, s) dS(x) \right] \begin{bmatrix} \tilde{E}_1^*(s) \\ \tilde{E}_2^*(s) \\ \tilde{p}^*(s) \end{bmatrix} + \\ & \left[\int_{s^*} s \tilde{u}_1^*(x-x_c^k, s) dS(x) \quad \int_{s^*} s \tilde{u}_2^*(x-x_c^k, s) dS(x) \quad - \int_{s^*} \tilde{q}^*(x-x_c^k, s) dS(x) + I \times \pi \right] \begin{bmatrix} \tilde{E}_1^*(s) \\ \tilde{E}_2^*(s) \\ \tilde{p}^*(s) \end{bmatrix} + \\ & - \left[\int_{s^*} \tilde{E}_{11}^*(x-x_c^k, s) dS(x) + I \times \pi \quad \int_{s^*} \tilde{E}_{21}^*(x-x_c^k, s) dS(x) \quad - \int_{s^*} \frac{1}{s} \tilde{p}_1^*(x-x_c^k, s) dS(x) \right] \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^*(s) \\ \tilde{u}_2^*(s) \\ \tilde{q}^*(s) \end{bmatrix} + \\ & - \left[\int_{s^*} \tilde{E}_{12}^*(x-x_c^k, s) dS(x) \quad \int_{s^*} \tilde{E}_{22}^*(x-x_c^k, s) dS(x) + I \times \pi \quad - \int_{s^*} \frac{1}{s} \tilde{p}_2^*(x-x_c^k, s) dS(x) \right] \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^*(s) \\ \tilde{u}_2^*(s) \\ \tilde{q}^*(s) \end{bmatrix} + \\ & - \left[\int_{s^*} s \tilde{E}_1^*(x-x_c^k, s) dS(x) \quad \int_{s^*} s \tilde{E}_2^*(x-x_c^k, s) dS(x) \quad - \int_{s^*} \tilde{p}^*(x-x_c^k, s) dS(x) \right] \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^*(s) \\ \tilde{u}_2^*(s) \\ \tilde{q}^*(s) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} = 0. \tag{4.4.13}$$

Pode-se, ainda, organizar este sistema de equações da seguinte forma:

$$G_{kc} \cdot TP_c - H_{kc} \cdot UQ_c = 0, \dots \tag{4.4.14}$$

sendo o índice "k" referente ao elemento onde está o ponto de colocação, e "e" referente ao elemento ao longo do qual se está efetuando as integrais das soluções fundamentais. Cada elemento "ke" da matriz \underline{G} , assim como cada elemento da matriz \underline{H} , é composto por uma sub-matriz. Definindo g_{ij} a sub-matriz correspondente ao elemento "ke" da matriz \underline{G} , obtem-se:

$$g_{ij}^{ke} = \int_{s^*} \tilde{U}_{ji}^*(x-x_c^k, s) dS(x), \quad i, j=1, 2. \quad (4.4.15)$$

$$g_{i3}^{ke} = - \int_{s^*} \frac{1}{S} \tilde{Q}_i^*(x-x_c^k, s) dS(x), \quad i=1, 2. \quad (4.4.16)$$

$$g_{3j}^{ke} = \int_{s^*} s \tilde{U}_j^*(x-x_c^k, s) dS(x), \quad j=1, 2. \quad (4.4.17)$$

$$g_{33}^{ke} = - \int_{s^*} \tilde{Q}^*(x-x_c^k, s) dS(x) + I \times \pi. \quad (4.4.18)$$

Analogamente, as sub-matrizes h_{ij} da matriz \underline{H}_{ke} são definidas como:

$$h_{ij}^{ke} = \int_{s^*} \tilde{t}_{ji}(x-x_c^k, s) dS(x) + \delta_{ij} I \times \pi, \quad i, j=1, 2. \quad (4.4.19)$$

$$h_{i3}^{ke} = - \int_{s^*} \frac{1}{S} \tilde{P}_i^*(x-x_c^k, s) dS(x), \quad i=1, 2. \quad (4.4.20)$$

$$h_{3j}^{ke} = \int_{s^*} s \tilde{t}_j^*(x-x_c^k, s) dS(x), \quad j=1, 2. \quad \dots \dots \dots (4.4.21)$$

$$h_{33}^{ke} = - \int_{s^*} \tilde{p}^*(x-x_c^k, s) dS(x). \quad \dots \dots \dots (4.4.22)$$

Lembrando que $e=k$ significa que se está integrando as soluções fundamentais ao longo do elemento onde está o ponto de aplicação:

$$I = \begin{cases} 0 & \text{se } e \neq k \\ 1 & \text{se } e = k \end{cases}$$

Colocando todos os elementos das matrizes \underline{G} e \underline{H} correspondentes às condições de contorno desconhecidas do lado esquerdo, e aqueles correspondentes às condições de contorno conhecidas do lado direito, e multiplicando as matrizes do lado direito, arma-se o seguinte sistema de equações $3n \times 3n$:

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}. \quad \dots \dots \dots (4.4.23)$$

Desta forma está definido o sistema de equações que deverá ser resolvido para se calcular as incógnitas na fronteira. Feito isso, pode-se voltar às equações (4.4.07), (4.4.08) e (4.4.09) para calcular o valor do deslocamento $[\tilde{u}_i(s)]$ e da pressão de poro $[\tilde{p}(s)]$ em qualquer ponto no interior do domínio.

Para exemplificar o processo, esta equação será utilizada para simular um caso no qual o contorno do problema foi dividido em 3 elementos. O ponto de aplicação será colocado em cada um dos 3 elementos, e será armado o sistema de equações a ser resolvido para se obter a solução

do problema na fronteira. A figura 4.4.01 abaixo mostra o processo de discretização do contorno em 3 elementos:

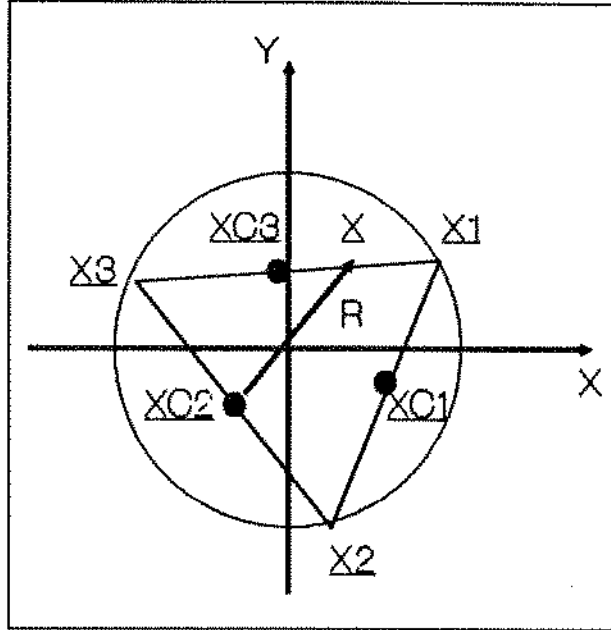


Figura 4.4.01 - Discretização do contorno em 3 elementos - exemplificando colocação do ponto de aplicação no elemento 2 e integração ao longo do elemento 3.

a) pondo o ponto de aplicação (x_c) no elemento 1 ($k=1$):

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc} \int_{s^1} \bar{u}_{11}^*(x-x_c^1, s) dS(x) & \int_{s^1} \bar{u}_{21}^*(x-x_c^1, s) dS(x) & -\int_{s^1} \frac{1}{s} \bar{q}_1^*(x-x_c^1, s) dS(x) \\ \int_{s^1} \bar{u}_{12}^*(x-x_c^1, s) dS(x) & \int_{s^1} \bar{u}_{22}^*(x-x_c^1, s) dS(x) & -\int_{s^1} \frac{1}{s} \bar{q}_2^*(x-x_c^1, s) dS(x) \\ \int_{s^1} s \bar{u}_1^*(x-x_c^1, s) dS(x) & \int_{s^1} s \bar{u}_2^*(x-x_c^1, s) dS(x) & -\int_{s^1} \bar{q}^*(x-x_c^1, s) dS(x) + \pi \end{array} \right] \begin{bmatrix} \bar{e}_1^1(s) \\ \bar{e}_2^1(s) \\ \bar{p}^1(s) \end{bmatrix} + \\
 & \left[\begin{array}{ccc} \int_{s^2} \bar{u}_{11}^*(x-x_c^1, s) dS(x) & \int_{s^2} \bar{u}_{21}^*(x-x_c^1, s) dS(x) & -\int_{s^2} \frac{1}{s} \bar{q}_1^*(x-x_c^1, s) dS(x) \\ \int_{s^2} \bar{u}_{12}^*(x-x_c^1, s) dS(x) & \int_{s^2} \bar{u}_{22}^*(x-x_c^1, s) dS(x) & -\int_{s^2} \frac{1}{s} \bar{q}_2^*(x-x_c^1, s) dS(x) \\ \int_{s^2} s \bar{u}_1^*(x-x_c^1, s) dS(x) & \int_{s^2} s \bar{u}_2^*(x-x_c^1, s) dS(x) & -\int_{s^2} \bar{q}^*(x-x_c^1, s) dS(x) \end{array} \right] \begin{bmatrix} \bar{e}_1^2(s) \\ \bar{e}_2^2(s) \\ \bar{p}^2(s) \end{bmatrix} + \\
 & \left[\begin{array}{ccc} \int_{s^3} \bar{u}_{11}^*(x-x_c^1, s) dS(x) & \int_{s^3} \bar{u}_{21}^*(x-x_c^1, s) dS(x) & -\int_{s^3} \frac{1}{s} \bar{q}_1^*(x-x_c^1, s) dS(x) \\ \int_{s^3} \bar{u}_{12}^*(x-x_c^1, s) dS(x) & \int_{s^3} \bar{u}_{22}^*(x-x_c^1, s) dS(x) & -\int_{s^3} \frac{1}{s} \bar{q}_2^*(x-x_c^1, s) dS(x) \\ \int_{s^3} s \bar{u}_1^*(x-x_c^1, s) dS(x) & \int_{s^3} s \bar{u}_2^*(x-x_c^1, s) dS(x) & -\int_{s^3} \bar{q}^*(x-x_c^1, s) dS(x) \end{array} \right] \begin{bmatrix} \bar{e}_1^3(s) \\ \bar{e}_2^3(s) \\ \bar{p}^3(s) \end{bmatrix} + \\
 & - \left[\begin{array}{ccc} \int_{s^1} \bar{e}_{11}^*(x-x_c^1, s) dS(x) + \pi & \int_{s^1} \bar{e}_{21}^*(x-x_c^1, s) dS(x) & -\int_{s^1} \frac{1}{s} \bar{p}_1^*(x-x_c^1, s) dS(x) \\ \int_{s^1} \bar{e}_{12}^*(x-x_c^1, s) dS(x) & \int_{s^1} \bar{e}_{22}^*(x-x_c^1, s) dS(x) + \pi & -\int_{s^1} \frac{1}{s} \bar{p}_2^*(x-x_c^1, s) dS(x) \\ \int_{s^1} s \bar{e}_1^*(x-x_c^1, s) dS(x) & \int_{s^1} s \bar{e}_2^*(x-x_c^1, s) dS(x) & -\int_{s^1} \bar{p}^*(x-x_c^1, s) dS(x) \end{array} \right] \begin{bmatrix} \bar{u}_1^1(s) \\ \bar{u}_2^1(s) \\ \bar{q}^1(s) \end{bmatrix} + \\
 & - \left[\begin{array}{ccc} \int_{s^2} \bar{e}_{11}^*(x-x_c^1, s) dS(x) & \int_{s^2} \bar{e}_{21}^*(x-x_c^1, s) dS(x) & -\int_{s^2} \frac{1}{s} \bar{p}_1^*(x-x_c^1, s) dS(x) \\ \int_{s^2} \bar{e}_{12}^*(x-x_c^1, s) dS(x) & \int_{s^2} \bar{e}_{22}^*(x-x_c^1, s) dS(x) & -\int_{s^2} \frac{1}{s} \bar{p}_2^*(x-x_c^1, s) dS(x) \\ \int_{s^2} s \bar{e}_1^*(x-x_c^1, s) dS(x) & \int_{s^2} s \bar{e}_2^*(x-x_c^1, s) dS(x) & -\int_{s^2} \bar{p}^*(x-x_c^1, s) dS(x) \end{array} \right] \begin{bmatrix} \bar{u}_1^2(s) \\ \bar{u}_2^2(s) \\ \bar{q}^2(s) \end{bmatrix} + \\
 & - \left[\begin{array}{ccc} \int_{s^3} \bar{e}_{11}^*(x-x_c^1, s) dS(x) & \int_{s^3} \bar{e}_{21}^*(x-x_c^1, s) dS(x) & -\int_{s^3} \frac{1}{s} \bar{p}_1^*(x-x_c^1, s) dS(x) \\ \int_{s^3} \bar{e}_{12}^*(x-x_c^1, s) dS(x) & \int_{s^3} \bar{e}_{22}^*(x-x_c^1, s) dS(x) & -\int_{s^3} \frac{1}{s} \bar{p}_2^*(x-x_c^1, s) dS(x) \\ \int_{s^3} s \bar{e}_1^*(x-x_c^1, s) dS(x) & \int_{s^3} s \bar{e}_2^*(x-x_c^1, s) dS(x) & -\int_{s^3} \bar{p}^*(x-x_c^1, s) dS(x) \end{array} \right] \begin{bmatrix} \bar{u}_1^3(s) \\ \bar{u}_2^3(s) \\ \bar{q}^3(s) \end{bmatrix} = 0.
 \end{aligned}$$

b) pondo o ponto de aplicação (\underline{x}_c) no elemento 2 ($k=2$):

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc} \int_{s^1} \bar{u}_{11}^*(x-x_c^2, s) dS(x) & \int_{s^1} \bar{u}_{21}^*(x-x_c^2, s) dS(x) & -\int_{s^1} \frac{1}{S} \bar{q}_1^*(x-x_c^2, s) dS(x) \\ \int_{s^1} \bar{u}_{12}^*(x-x_c^2, s) dS(x) & \int_{s^1} \bar{u}_{22}^*(x-x_c^2, s) dS(x) & -\int_{s^1} \frac{1}{S} \bar{q}_2^*(x-x_c^2, s) dS(x) \\ \int_{s^1} s \bar{u}_1^*(x-x_c^2, s) dS(x) & \int_{s^1} s \bar{u}_2^*(x-x_c^2, s) dS(x) & -\int_{s^1} \bar{q}^*(x-x_c^2, s) dS(x) \end{array} \right] \begin{bmatrix} \bar{E}_1^1(s) \\ \bar{E}_2^1(s) \\ \bar{P}^1(s) \end{bmatrix} + \\
 & \left[\begin{array}{ccc} \int_{s^2} \bar{u}_{11}^*(x-x_c^2, s) dS(x) & \int_{s^2} \bar{u}_{21}^*(x-x_c^2, s) dS(x) & -\int_{s^2} \frac{1}{S} \bar{q}_1^*(x-x_c^2, s) dS(x) \\ \int_{s^2} \bar{u}_{12}^*(x-x_c^2, s) dS(x) & \int_{s^2} \bar{u}_{22}^*(x-x_c^2, s) dS(x) & -\int_{s^2} \frac{1}{S} \bar{q}_2^*(x-x_c^2, s) dS(x) \\ \int_{s^2} s \bar{u}_1^*(x-x_c^2, s) dS(x) & \int_{s^2} s \bar{u}_2^*(x-x_c^2, s) dS(x) & -\int_{s^2} \bar{q}^*(x-x_c^2, s) dS(x) + \pi \end{array} \right] \begin{bmatrix} \bar{E}_1^2(s) \\ \bar{E}_2^2(s) \\ \bar{P}^2(s) \end{bmatrix} + \\
 & \left[\begin{array}{ccc} \int_{s^3} \bar{u}_{11}^*(x-x_c^2, s) dS(x) & \int_{s^3} \bar{u}_{21}^*(x-x_c^2, s) dS(x) & -\int_{s^3} \frac{1}{S} \bar{q}_1^*(x-x_c^2, s) dS(x) \\ \int_{s^3} \bar{u}_{12}^*(x-x_c^2, s) dS(x) & \int_{s^3} \bar{u}_{22}^*(x-x_c^2, s) dS(x) & -\int_{s^3} \frac{1}{S} \bar{q}_2^*(x-x_c^2, s) dS(x) \\ \int_{s^3} s \bar{u}_1^*(x-x_c^2, s) dS(x) & \int_{s^3} s \bar{u}_2^*(x-x_c^2, s) dS(x) & -\int_{s^3} \bar{q}^*(x-x_c^2, s) dS(x) \end{array} \right] \begin{bmatrix} \bar{E}_1^3(s) \\ \bar{E}_2^3(s) \\ \bar{P}^3(s) \end{bmatrix} + \\
 & - \left[\begin{array}{ccc} \int_{s^1} \bar{E}_{11}^*(x-x_c^2, s) dS(x) & \int_{s^1} \bar{E}_{21}^*(x-x_c^2, s) dS(x) & -\int_{s^1} \frac{1}{S} \bar{P}_1^*(x-x_c^2, s) dS(x) \\ \int_{s^1} \bar{E}_{12}^*(x-x_c^2, s) dS(x) & \int_{s^1} \bar{E}_{22}^*(x-x_c^2, s) dS(x) & -\int_{s^1} \frac{1}{S} \bar{P}_2^*(x-x_c^2, s) dS(x) \\ \int_{s^1} s \bar{E}_1^*(x-x_c^2, s) dS(x) & \int_{s^1} s \bar{E}_2^*(x-x_c^2, s) dS(x) & -\int_{s^1} \bar{P}^*(x-x_c^2, s) dS(x) \end{array} \right] \begin{bmatrix} \bar{u}_1^1(s) \\ \bar{u}_2^1(s) \\ \bar{Q}^1(s) \end{bmatrix} + \\
 & - \left[\begin{array}{ccc} \int_{s^2} \bar{E}_{11}^*(x-x_c^2, s) dS(x) + \pi & \int_{s^2} \bar{E}_{21}^*(x-x_c^2, s) dS(x) & -\int_{s^2} \frac{1}{S} \bar{P}_1^*(x-x_c^2, s) dS(x) \\ \int_{s^2} \bar{E}_{12}^*(x-x_c^2, s) dS(x) & \int_{s^2} \bar{E}_{22}^*(x-x_c^2, s) dS(x) + \pi & -\int_{s^2} \frac{1}{S} \bar{P}_2^*(x-x_c^2, s) dS(x) \\ \int_{s^2} s \bar{E}_1^*(x-x_c^2, s) dS(x) & \int_{s^2} s \bar{E}_2^*(x-x_c^2, s) dS(x) & -\int_{s^2} \bar{P}^*(x-x_c^2, s) dS(x) \end{array} \right] \begin{bmatrix} \bar{u}_1^2(s) \\ \bar{u}_2^2(s) \\ \bar{Q}^2(s) \end{bmatrix} + \\
 & - \left[\begin{array}{ccc} \int_{s^3} \bar{E}_{11}^*(x-x_c^2, s) dS(x) & \int_{s^3} \bar{E}_{21}^*(x-x_c^2, s) dS(x) & -\int_{s^3} \frac{1}{S} \bar{P}_1^*(x-x_c^2, s) dS(x) \\ \int_{s^3} \bar{E}_{12}^*(x-x_c^2, s) dS(x) & \int_{s^3} \bar{E}_{22}^*(x-x_c^2, s) dS(x) & -\int_{s^3} \frac{1}{S} \bar{P}_2^*(x-x_c^2, s) dS(x) \\ \int_{s^3} s \bar{E}_1^*(x-x_c^2, s) dS(x) & \int_{s^3} s \bar{E}_2^*(x-x_c^2, s) dS(x) & -\int_{s^3} \bar{P}^*(x-x_c^2, s) dS(x) \end{array} \right] \begin{bmatrix} \bar{u}_1^3(s) \\ \bar{u}_2^3(s) \\ \bar{Q}^3(s) \end{bmatrix} = 0.
 \end{aligned}$$

c) pondo o pondo de aplicação (\underline{x}_c) no elemento 3 ($k=3$):

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc} \int_{s^1} \hat{u}_{11}^*(x-x_c^3, s) dS(x) & \int_{s^1} \hat{u}_{21}^*(x-x_c^3, s) dS(x) & -\int_{s^1} \frac{1}{s} \hat{q}_1^*(x-x_c^3, s) dS(x) \\ \int_{s^1} \hat{u}_{12}^*(x-x_c^3, s) dS(x) & \int_{s^1} \hat{u}_{22}^*(x-x_c^3, s) dS(x) & -\int_{s^1} \frac{1}{s} \hat{q}_2^*(x-x_c^3, s) dS(x) \\ \int_{s^1} s \hat{u}_1^*(x-x_c^3, s) dS(x) & \int_{s^1} s \hat{u}_2^*(x-x_c^3, s) dS(x) & -\int_{s^1} \hat{q}^*(x-x_c^3, s) dS(x) \end{array} \right] \begin{bmatrix} \tilde{E}_1^1(s) \\ \tilde{E}_2^1(s) \\ \tilde{p}^1(s) \end{bmatrix} + \\
 & \left[\begin{array}{ccc} \int_{s^2} \hat{u}_{11}^*(x-x_c^3, s) dS(x) & \int_{s^2} \hat{u}_{21}^*(x-x_c^3, s) dS(x) & -\int_{s^2} \frac{1}{s} \hat{q}_1^*(x-x_c^3, s) dS(x) \\ \int_{s^2} \hat{u}_{12}^*(x-x_c^3, s) dS(x) & \int_{s^2} \hat{u}_{22}^*(x-x_c^3, s) dS(x) & -\int_{s^2} \frac{1}{s} \hat{q}_2^*(x-x_c^3, s) dS(x) \\ \int_{s^2} s \hat{u}_1^*(x-x_c^3, s) dS(x) & \int_{s^2} s \hat{u}_2^*(x-x_c^3, s) dS(x) & -\int_{s^2} \hat{q}^*(x-x_c^3, s) dS(x) \end{array} \right] \begin{bmatrix} \tilde{E}_1^2(s) \\ \tilde{E}_2^2(s) \\ \tilde{p}^2(s) \end{bmatrix} + \\
 & \left[\begin{array}{ccc} \int_{s^3} \hat{u}_{11}^*(x-x_c^3, s) dS(x) & \int_{s^3} \hat{u}_{21}^*(x-x_c^3, s) dS(x) & -\int_{s^3} \frac{1}{s} \hat{q}_1^*(x-x_c^3, s) dS(x) \\ \int_{s^3} \hat{u}_{12}^*(x-x_c^3, s) dS(x) & \int_{s^3} \hat{u}_{22}^*(x-x_c^3, s) dS(x) & -\int_{s^3} \frac{1}{s} \hat{q}_2^*(x-x_c^3, s) dS(x) \\ \int_{s^3} s \hat{u}_1^*(x-x_c^3, s) dS(x) & \int_{s^3} s \hat{u}_2^*(x-x_c^3, s) dS(x) & -\int_{s^3} \hat{q}^*(x-x_c^3, s) dS(x) + \pi \end{array} \right] \begin{bmatrix} \tilde{E}_1^3(s) \\ \tilde{E}_2^3(s) \\ \tilde{p}^3(s) \end{bmatrix} + \\
 & - \left[\begin{array}{ccc} \int_{s^1} \tilde{E}_{11}^*(x-x_c^3, s) dS(x) & \int_{s^1} \tilde{E}_{21}^*(x-x_c^3, s) dS(x) & -\int_{s^1} \frac{1}{s} \tilde{p}_1^*(x-x_c^3, s) dS(x) \\ \int_{s^1} \tilde{E}_{12}^*(x-x_c^3, s) dS(x) & \int_{s^1} \tilde{E}_{22}^*(x-x_c^3, s) dS(x) & -\int_{s^1} \frac{1}{s} \tilde{p}_2^*(x-x_c^3, s) dS(x) \\ \int_{s^1} s \tilde{E}_1^*(x-x_c^3, s) dS(x) & \int_{s^1} s \tilde{E}_2^*(x-x_c^3, s) dS(x) & -\int_{s^1} \tilde{p}^*(x-x_c^3, s) dS(x) \end{array} \right] \begin{bmatrix} \hat{u}_1^1(s) \\ \hat{u}_2^1(s) \\ \hat{q}^1(s) \end{bmatrix} + \\
 & - \left[\begin{array}{ccc} \int_{s^2} \tilde{E}_{11}^*(x-x_c^3, s) dS(x) & \int_{s^2} \tilde{E}_{21}^*(x-x_c^3, s) dS(x) & -\int_{s^2} \frac{1}{s} \tilde{p}_1^*(x-x_c^3, s) dS(x) \\ \int_{s^2} \tilde{E}_{12}^*(x-x_c^3, s) dS(x) & \int_{s^2} \tilde{E}_{22}^*(x-x_c^3, s) dS(x) & -\int_{s^2} \frac{1}{s} \tilde{p}_2^*(x-x_c^3, s) dS(x) \\ \int_{s^2} s \tilde{E}_1^*(x-x_c^3, s) dS(x) & \int_{s^2} s \tilde{E}_2^*(x-x_c^3, s) dS(x) & -\int_{s^2} \tilde{p}^*(x-x_c^3, s) dS(x) \end{array} \right] \begin{bmatrix} \hat{u}_1^2(s) \\ \hat{u}_2^2(s) \\ \hat{q}^2(s) \end{bmatrix} + \\
 & - \left[\begin{array}{ccc} \int_{s^3} \tilde{E}_{11}^*(x-x_c^3, s) dS(x) + \pi & \int_{s^3} \tilde{E}_{21}^*(x-x_c^3, s) dS(x) & -\int_{s^3} \frac{1}{s} \tilde{p}_1^*(x-x_c^3, s) dS(x) \\ \int_{s^3} \tilde{E}_{12}^*(x-x_c^3, s) dS(x) & \int_{s^3} \tilde{E}_{22}^*(x-x_c^3, s) dS(x) + \pi & -\int_{s^3} \frac{1}{s} \tilde{p}_2^*(x-x_c^3, s) dS(x) \\ \int_{s^3} s \tilde{E}_1^*(x-x_c^3, s) dS(x) & \int_{s^3} s \tilde{E}_2^*(x-x_c^3, s) dS(x) & -\int_{s^3} \tilde{p}^*(x-x_c^3, s) dS(x) \end{array} \right] \begin{bmatrix} \hat{u}_1^3(s) \\ \hat{u}_2^3(s) \\ \hat{q}^3(s) \end{bmatrix} = 0.
 \end{aligned}$$

O cálculo do tensor tensão e da vazão em qualquer ponto \underline{x}_c no interior do domínio poderá ser feito a partir da discretização das equações (4.3.22) e (4.3.23), utilizando elementos constantes:

$$2\pi \bar{\sigma}_{kj}(x_c, s) = \sum_{e=1}^n \left\{ \bar{u}_i^e(s) \int_{s^e} \bar{d}_{ijk}^*(x-x_c, s) dS(x) - \bar{u}_i^e(s) \int_{s^e} \bar{s}_{ijk}^*(x-x_c, s) dS(x) + \right. \\ \left. - \bar{p}^e(s) \int_{s^e} \bar{d}_{3kj}^*(x-x_c, s) dS(x) + \bar{q}^e(s) \int_{s^e} \bar{s}_{3kj}^*(x-x_c, s) dS(x) \right\},$$

$$2\pi \bar{q}_j(x_c, s) = \sum_{e=1}^n \left\{ \bar{u}_i^e(s) \int_{s^e} \bar{d}_{ij}^*(x-x_c, s) dS(x) - \bar{u}_i^e(s) \int_{s^e} \bar{s}_{ij}^*(x-x_c, s) dS(x) + \right. \\ \left. - \bar{p}^e(s) \int_{s^e} \bar{d}_{3j}^*(x-x_c, s) dS(x) + \bar{q}^e(s) \int_{s^e} \bar{s}_{3j}^*(x-x_c, s) dS(x) \right\},$$

Juntando estas equações sob a forma de matrizes, e lembrando que o índice "i" é um índice repetido (que indica um somatório), obtém-se:

$$2\pi \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{kj}(x_c, s) \\ \bar{q}_j(x_c, s) \end{bmatrix} = \sum_{e=1}^n \left\{ \begin{bmatrix} \int_{s^e} \bar{d}_{ijk}^*(x-x_c, s) dS(x) & \int_{s^e} \bar{d}_{2kj}^*(x-x_c, s) dS(x) & - \int_{s^e} \bar{d}_{3kj}^*(x-x_c, s) dS(x) \\ \int_{s^e} \bar{d}_{1j}^*(x-x_c, s) dS(x) & \int_{s^e} \bar{d}_{2j}^*(x-x_c, s) dS(x) & - \int_{s^e} \bar{d}_{3j}^*(x-x_c, s) dS(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i^e(s) \\ \bar{u}_2^e(s) \\ \bar{p}^e(s) \end{bmatrix} + \right. \\ \left. - \begin{bmatrix} \int_{s^e} \bar{s}_{ijk}^*(x-x_c, s) dS(x) & \int_{s^e} \bar{s}_{2kj}^*(x-x_c, s) dS(x) & - \int_{s^e} \bar{s}_{3kj}^*(x-x_c, s) dS(x) \\ \int_{s^e} \bar{s}_{1j}^*(x-x_c, s) dS(x) & \int_{s^e} \bar{s}_{2j}^*(x-x_c, s) dS(x) & - \int_{s^e} \bar{s}_{3j}^*(x-x_c, s) dS(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i^e(s) \\ \bar{u}_2^e(s) \\ \bar{q}^e(s) \end{bmatrix} \right\}. \quad (4.4.24)$$

4.5 - Análise das singularidades das soluções fundamentais

Como mencionado anteriormente, para solucionar o problema na fronteira, é necessário colocar o ponto de aplicação \underline{x}_c em cada um dos elementos e calcular as integrais das soluções fundamentais ao longo de todos os elementos (inclusive ao longo do elemento onde está o ponto de colocação).

Quando se está integrando ao longo do elemento onde está o ponto de colocação, o raio (definido como $r = |x - x_c|$) irá a zero, no momento em que $\underline{x} = \underline{x}_c$. Deve-se analisar, então, o que acontece com as soluções fundamentais quando $r \rightarrow 0$, e classificá-las segundo seu comportamento: não singulares, com singularidade fraca ou logarítmica (integráveis) ou com singularidade forte (não integráveis).

As soluções fundamentais apresentadas nas equações (4.3.18) a (4.3.21) e (4.3.24) a (4.3.49) dependem, dentre outras coisas, das funções modificadas de Bessel de segunda espécie, e estas, por sua vez, dependem das funções modificadas de Bessel de primeira espécie. Logo, deve-se analisar o comportamento destas funções para valores do argumento próximos de zero. O gráfico da figura 4.5.01 mostra as funções modificadas de Bessel de primeira espécie de ordens 0 e 1, e o gráfico da figura 4.5.02 mostra as funções modificadas de Bessel de segunda espécie de ordens 0, 1, 2 e 3 (plotados com pontos gerados a partir de funções aproximadoras - ref. 23). Estas são as funções utilizadas pelas soluções fundamentais. Nesses gráficos pode-se constatar que as funções modificadas de Bessel de primeira espécie não possuem singularidade na origem. As funções de Bessel modificadas de segunda espécie possuem singularidade na origem sendo que, conforme será visto a seguir, a função de ordem 0 possui singularidade fraca e as demais possuem singularidade forte.

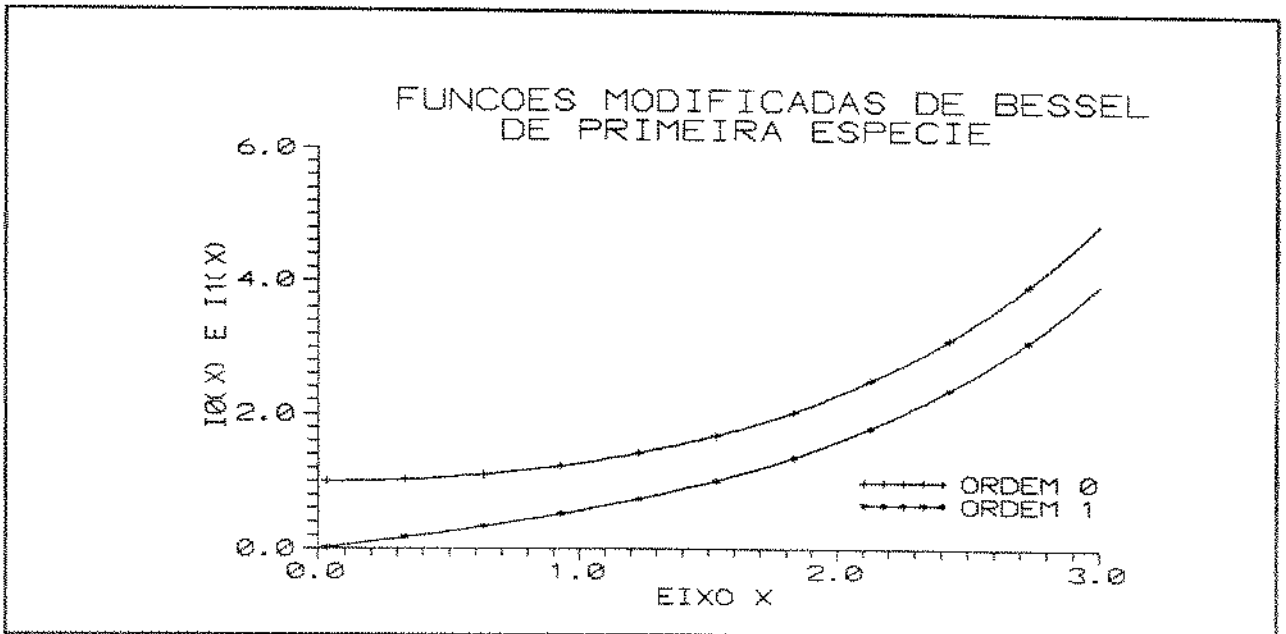


Figura 4.5.01 - Análise de singularidade das funções modificadas de Bessel de primeira espécie, de ordens 0 e 1, em $x = 0$.

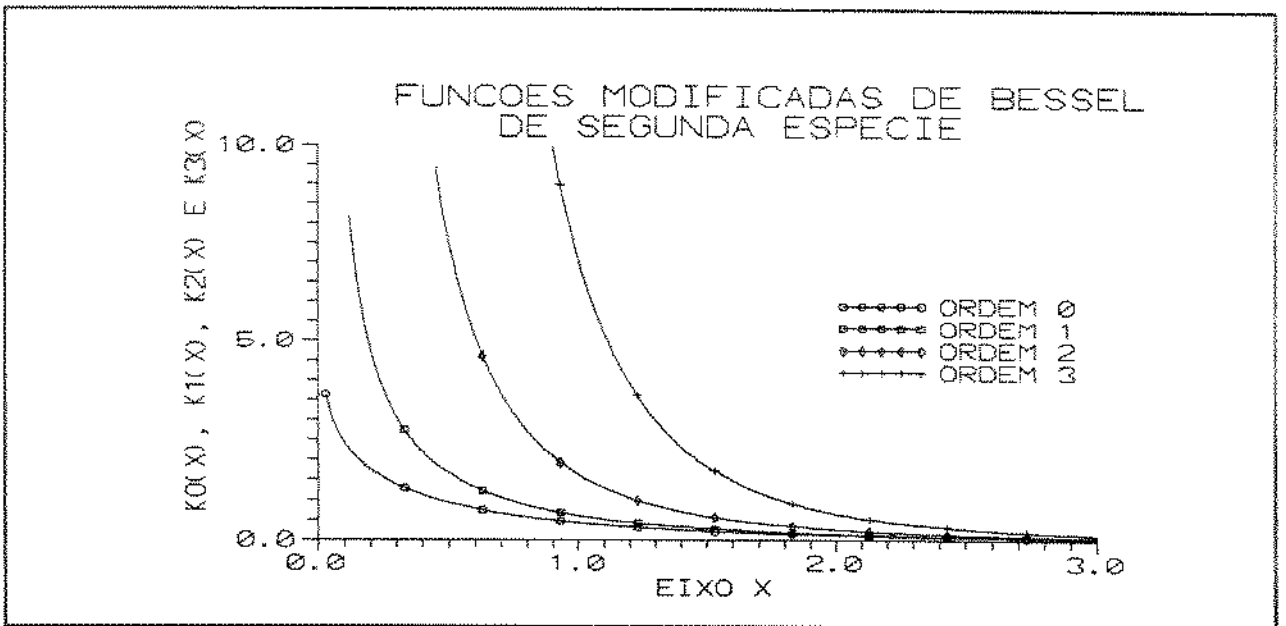


Figura 4.5.02 - Análise de singularidade das funções modificadas de Bessel de segunda espécie, de ordens 0, 1, 2 e 3, em $x = 0$.

É necessário, agora, estabelecer algumas equações que serão utilizadas nas análises das singularidades das soluções fundamentais:

- . Quando $r \rightarrow 0$, $r_i \rightarrow 1$ e $n_{k,r,k} \rightarrow 0$. Isto ocorre porque estão sendo utilizado elementos constantes para aproximar o contorno do problema.
- . Fórmula de recorrência das funções modificadas de Bessel de segunda espécie (ref. 19 e 24):

$$K_{n-1}(x) - K_{n+1}(x) = -\frac{2n}{x} K_n(x) \dots \dots \dots (4.5.01)$$

- . As funções modificadas de Bessel de segunda espécie podem ser aproximadas através das seguintes equações, para pequenos valores de x (ref.23):

$$K_0(x) = -\ln(x/2) I_0(x) + (-0.577 + \frac{x^2}{4} (0.423 + \frac{x^2}{4} (0.231 + \frac{x^2}{4} (\dots)))) \dots (4.5.02)$$

$$K_1(x) = \ln(x/2) I_1(x) + \frac{1}{x} (1 + \frac{x^2}{4} (0.154 + \frac{x^2}{4} (-0.673 + \frac{x^2}{4} (\dots)))) \dots (4.5.03)$$

- . As funções modificadas de Bessel de primeira ordem podem ser aproximadas através das seguintes equações, para pequenos valores de x (ref. 23):

$$I_0(x) = 1 + y^2 (3.516 + y^2 (3.090 + y^2 (1.207 + y^2 (\dots)))) \dots \dots \dots (4.5.04)$$

$$I_1(x) = x(0.5 + y(0.879 + y(0.515 + y(0.151 + y(\dots)))) \dots \dots \dots (4.5.05)$$

sendo $y = \left(\frac{x}{3,75}\right)$.

Pode-se agora analisar o comportamento de cada uma das soluções fundamentais que participam da solução do problema na fronteira:

a) Funções \tilde{u}_{ij}^*

$$\tilde{u}_{ij}^* = -\frac{3-4\nu_u}{4G(1-\nu_u)} \delta_{ij} \ln r + \frac{1}{4G(1-\nu_u)} r_{,i} r_{,j} + \frac{\nu_u - \nu}{2G(1-\nu)(1-\nu_u)} \{ \delta_{ij} [\xi^{-2} - \xi^{-1} K_1(\xi)] + r_{,i} r_{,j} [K_2(\xi) - 2\xi^{-2}] \}$$

Fazendo $i,j=1,2$ nessa equação:

$$\tilde{u}_{11}^* = -\frac{3-4\nu_u}{4G(1-\nu_u)} \ln r + \frac{1}{4G(1-\nu_u)} r_{,1} r_{,1} + \frac{\nu_u - \nu}{2G(1-\nu)(1-\nu_u)} \{ [\xi^{-2} - \xi^{-1} K_1(\xi)] + r_{,1} r_{,1} [K_2(\xi) - 2\xi^{-2}] \}.$$

$$\tilde{u}_{12}^* = \frac{1}{4G(1-\nu_u)} r_{,1} r_{,2} + \frac{\nu_u - \nu}{2G(1-\nu)(1-\nu_u)} \{ r_{,1} r_{,2} [K_2(\xi) - 2\xi^{-2}] \}.$$

$$\tilde{u}_{21}^* = \frac{1}{4G(1-\nu_u)} r_{,2} r_{,1} + \frac{\nu_u - \nu}{2G(1-\nu)(1-\nu_u)} \{ r_{,2} r_{,1} [K_2(\xi) - 2\xi^{-2}] \} = \tilde{u}_{12}^*.$$

$$\tilde{u}_{22}^* = -\frac{3-4\nu_u}{4G(1-\nu_u)} \ln r + \frac{1}{4G(1-\nu_u)} r_{,2} r_{,2} + \frac{\nu_u - \nu}{2G(1-\nu)(1-\nu_u)} \{ [\xi^{-2} - \xi^{-1} K_1(\xi)] + r_{,2} r_{,2} [K_2(\xi) - 2\xi^{-2}] \}$$

Quando $r \rightarrow 0$:

$$\tilde{u}_{11}^*, \tilde{u}_{22}^* \rightarrow -\frac{3-4\nu_u}{4G(1-\nu_u)} \ln r + \frac{1}{4G(1-\nu_u)} + \frac{\nu_u - \nu}{2G(1-\nu)(1-\nu_u)} [K_2(\xi) - \xi^{-2} - \xi^{-1} K_1(\xi)],$$

$$\tilde{u}_{12}^*, \tilde{u}_{21}^* \rightarrow \pm \frac{1}{4G(1-\nu_u)} \pm \frac{\nu_u - \nu}{2G(1-\nu)(1-\nu_u)} [K_2(\xi) - 2\xi^{-2}].$$

Analisando os termos dependentes das funções modificadas de Bessel:

a.1 - Função $f=[K_2(x)-x^{-2}-x^{-1}K_1(x)]$

Segundo a fórmula de recorrência (4.5.01), obtém-se:

$$f = \frac{2}{x} K_1(x) + K_0(x) - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} K_1(x),$$

$$f = \frac{1}{x} K_1(x) + K_0(x) - \frac{1}{x^2}.$$

Logo, usando as equações (4.5.02) e (4.5.03):

$$f = \frac{1}{x} [\ln(x/2) I_1(x)] + \frac{1}{x^2} [1 + \frac{x^2}{4} (0.154 + \frac{x^2}{4} (\dots))] - \ln(x/2) I_0(x) +$$

$$-0.577 + \frac{x^2}{4} (\dots) - \frac{1}{x^2}.$$

Tomando do limite quando $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \ln(x/2) + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4} 0.154 - \ln(x/2) - 0.577 - \frac{1}{x^2} \right\}.$$

Que, finalmente, leva a:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f = -\frac{1}{2} \ln(x/2) - 0.539.$$

De onde pode-se concluir que as funções \tilde{u}_{11}^* e \tilde{u}_{22}^* possuem singularidade fraca ou logaritmica em $r = 0$.

a.2 - Função $f=[K_2(x)-2x^{-2}]$

Segundo a fórmula de recorrência (4.5.01):

$$f = \frac{2}{x} K_1 + K_0 - \frac{2}{x^2}.$$

Segundo as equações aproximadoras (4.5.02) e (4.5.03):

$$f = \frac{2}{x} [\ln(x/2) I_1(x)] + \frac{2}{x^2} \left[1 + \frac{x^2}{4} (0.154 + \frac{x^2}{4} (\dots)) \right] - \ln(x/2) * I_0(x) +$$

$$-0.577 + \frac{x^2}{4} (\dots) - \frac{2}{x^2}$$

Tomando o limite quando $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \ln(x/2) + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{4} 0.154 - \ln(x/2) - 0.577 - \frac{2}{x^2} \right\} = -0.49999.$$

Conclui-se, então, que as funções \tilde{u}_{12}^* e \tilde{u}_{21}^* não possuem singularidade em $r = 0$.

b) Funções \tilde{t}_{ij}^*

$$\tilde{t}_{ij}^* = \frac{1-2v_u}{2(1-v_u)} (n_i r_{,j} - n_j r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k} n_k) \frac{1}{r} - \frac{1}{1-v_u} r_{,i} r_{,j} r_{,k} n_k \frac{1}{r} +$$

$$+ \frac{v_u - v}{(1-v)(1-v_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} \{ \delta_{ij} r_{,k} n_k [\xi^{-1} K_2(\xi) - 2\xi^{-3}] + r_{,i} r_{,j} r_{,k} n_k [8\xi^{-3} - K_3(\xi)] +$$

$$+ n_i r_{,j} [K_3(\xi) - 3\xi^{-1} K_2(\xi) - 2\xi^{-3}] + n_j r_{,i} [\xi^{-1} K_2(\xi) - 2\xi^{-3}] \}$$

Fazendo $i, j = 1, 2$:

$$\tilde{t}_{11}^* = \frac{1-2v_u}{2(1-v_u)} (-r_{,k} n_k) \frac{1}{r} - \frac{1}{1-v_u} r_{,1} r_{,1} r_{,k} n_k \frac{1}{r} + \frac{v_u - v}{(1-v)(1-v_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} \{ r_{,k} n_k [\xi^{-1} K_2(\xi)$$

$$- 2\xi^{-3}] + r_{,1} r_{,1} r_{,k} n_k [8\xi^{-3} - K_3(\xi)] + n_{1,1} [K_3(\xi) - 2\xi^{-1} K_2(\xi) - 4\xi^{-3}] \}.$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{12}^* &= \frac{1-2v_u}{2(1-v_u)} (n_1 r_{,2} - n_2 r_{,1}) \frac{1}{r} - \frac{1}{1-v_u} r_{,1} r_{,2} r_{,k} n_k \frac{1}{r} + \\ &+ \frac{v_u - v}{(1-v)(1-v_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} \{ r_{,1} r_{,2} r_{,k} n_k [8\xi^{-3} - K_3(\xi)] + n_1 r_{,2} [K_3(\xi) - 3\xi^{-1} K_2(\xi) - 2\xi^{-3}] + \\ &+ n_2 r_{,1} [\xi^{-1} K_2(\xi) - 2\xi^{-3}] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{21}^* &= \frac{1-2v_u}{2(1-v_u)} (n_2 r_{,1} - n_1 r_{,2}) \frac{1}{r} - \frac{1}{1-v_u} r_{,2} r_{,1} r_{,k} n_k \frac{1}{r} + \\ &+ \frac{v_u - v}{(1-v)(1-v_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} \{ r_{,2} r_{,1} r_{,k} n_k [8\xi^{-3} - K_3(\xi)] + n_2 r_{,1} [K_3(\xi) - 3\xi^{-1} K_2(\xi) - 2\xi^{-3}] + \\ &+ n_1 r_{,2} [\xi^{-1} K_2(\xi) - 2\xi^{-3}] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{22}^* &= \frac{1-2v_u}{2(1-v_u)} (-r_{,k} n_k) \frac{1}{r} - \frac{1}{1-v_u} r_{,2} r_{,2} r_{,k} n_k \frac{1}{r} + \frac{v_u - v}{(1-v)(1-v_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} \{ r_{,k} n_k [\xi^{-1} K_2(\xi) + \\ &- 2\xi^{-3}] + r_{,2} r_{,2} r_{,k} n_k [8\xi^{-3} - K_3(\xi)] + n_2 r_{,2} [K_3(\xi) - 2\xi^{-1} K_2(\xi) - 4\xi^{-3}] \} \end{aligned}$$

Quando $r \rightarrow 0$:

$$\tilde{E}_{11}^* \rightarrow \pm \frac{v_u - v}{(1-v)(1-v_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} n_1 [K_3(\xi) - 2\xi^{-1} K_2(\xi) - 4\xi^{-3}].$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{12}^* \rightarrow \pm \frac{1-2v_u}{2(1-v_u)} (n_1 \pm n_2) \frac{1}{r} \pm \frac{v_u - v}{(1-v)(1-v_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} \{ n_1 [K_3(\xi) - 3\xi^{-1} K_2(\xi) - 2\xi^{-3}] + \\ \pm n_2 [\xi^{-1} K_2(\xi) - 2\xi^{-3}] \}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{21}^* \rightarrow \pm \frac{1-2v_u}{2(1-v_u)} (n_2 \pm n_1) \frac{1}{r} \pm \frac{v_u - v}{(1-v)(1-v_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} \{ n_2 [K_3(\xi) - 3\xi^{-1} K_2(\xi) - 2\xi^{-3}] + \\ \pm n_1 [\xi^{-1} K_2(\xi) - 2\xi^{-3}] \}. \end{aligned}$$

$$\tilde{t}_{22}^* \rightarrow \pm \frac{v_u - v}{(1-v)(1-v_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} n_2 [K_3(\xi) - 2\xi^{-1}K_2(\xi) - 4\xi^{-3}] .$$

Analisando os termos dependentes das funções modificadas de Bessel:

b.1 - Função $f = [K_3(x) - 2x^{-1}K_2(x) - 4x^{-3}]$

Segundo a fórmula de recorrência (4.5.01):

$$f = \frac{4}{x} K_2(x) + K_1(x) - \frac{2}{x} K_2(x) - \frac{4}{x^3} \therefore$$

$$f = \frac{2}{x} K_2(x) + K_1(x) - \frac{4}{x^3} \therefore$$

$$f = \frac{2}{x} \left[\frac{2}{x} K_1(x) + K_0(x) \right] + K_1(x) - \frac{4}{x^3} \therefore$$

$$f = \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x} K_0(x) + K_1(x) - \frac{4}{x^3} .$$

Segundo as funções aproximadoras (4.5.02) e (4.5.03):

$$f = \frac{4}{x^2} [\ln(x/2) I_1(x)] + \frac{4}{x^3} \left[1 + \frac{x^2}{4} (0.154 + \frac{x^2}{4} (\dots)) \right] + \frac{2}{x} [-\ln(x/2) I_0(x)] + \frac{2}{x} [0.577 + \frac{x^2}{4} (\dots)] + \ln(x/2) I_1(x) + \frac{1}{x} \left[1 + \frac{x^2}{4} (\dots) \right] - \frac{4}{x^3} .$$

Tomando o limite quando $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{2}{x} \ln(x/2) + \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x} 0.154 - \frac{2}{x} \ln(x/2) - \frac{2}{x} 0.577 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3} \right\} = 0 .$$

De onde pode-se concluir que as funções \tilde{t}_{11}^* e \tilde{t}_{22}^* não possuem singularidade em $r = 0$.

b.2 - As funções \tilde{t}_{12}^* e \tilde{t}_{21}^* possuem singularidade forte evidente ($1/r$), independentemente da análise dos termos dependentes das funções modificadas de Bessel de segunda espécie.

c) Funções \tilde{q}_j^*

$$\tilde{q}_j^* = \frac{3(v_u - v)}{2BG(1-v)(1+v_u)} \{n_j [\xi^{-1}K_1(\xi) - \xi^{-2}] + r_{,j} r_{,k} n_k [2\xi^{-2} - K_2(\xi)]\}.$$

Fazendo $j=1,2$:

$$\tilde{q}_1^* = \frac{3(v_u - v)}{2BG(1-v)(1+v_u)} \{n_1 [\xi^{-1}K_1(\xi) - \xi^{-2}] + r_{,1} r_{,k} n_k [2\xi^{-2} - K_2(\xi)]\}.$$

$$\tilde{q}_2^* = \frac{3(v_u - v)}{2BG(1-v)(1+v_u)} \{n_2 [\xi^{-1}K_1(\xi) - \xi^{-2}] + r_{,2} r_{,k} n_k [2\xi^{-2} - K_2(\xi)]\}.$$

Quando $r \rightarrow 0$:

$$\tilde{q}_1^* \rightarrow \frac{3(v_u - v)}{2BG(1-v)(1+v_u)} n_1 [\xi^{-1}K_1(\xi) - \xi^{-2}].$$

$$\tilde{q}_2^* \rightarrow \frac{3(v_u - v)}{2BG(1-v)(1+v_u)} n_2 [\xi^{-1}K_1(\xi) - \xi^{-2}].$$

Análise da função $f = [x^{-1}K_1(x) - x^{-2}]$:

Segundo as equações aproximadoras (4.5.02) e (4.5.03):

$$f = \frac{1}{x} [\ln(x/2) I_1(x)] + \frac{1}{x^2} [1 + \frac{x^2}{4} (0.154 + \frac{x^2}{4} (\dots))] - \frac{1}{x^2}.$$

Tomando o limite quando $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \ln(x/2) + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4} 0.154 - \frac{1}{x^2} \right\},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f = \frac{1}{2} \ln(x/2) + 0.039.$$

De onde pode-se concluir que as funções \tilde{q}_1^* e \tilde{q}_2^* possuem singularidade fraca ou logarítmica em $r = 0$.

d) Funções \tilde{p}_j^*

$$\tilde{p}_j^* = \frac{B(1+v_u)}{3(1-v_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} r_{,j} [\xi^{-1} - K_1(\xi)].$$

Fazendo $j = 1, 2$:

$$\tilde{p}_1^* = \frac{B(1+v_u)}{3(1-v_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} r_{,1} [\xi^{-1} - K_1(\xi)].$$

$$\tilde{p}_2^* = \frac{B(1+v_u)}{3(1-v_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} r_{,2} [\xi^{-1} - K_1(\xi)].$$

Quando $r \rightarrow 0$:

$$\tilde{p}_1^*, \tilde{p}_2^* \rightarrow \pm \frac{B(1+v_u)}{3(1-v_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} [\xi^{-1} - K_1(\xi)].$$

Análise da função $f = [x^{-1} - K_1]$

Segundo as equações aproximadoras (4.5.02) e (4.5.03):

$$f = \frac{1}{x} - \ln(x/2) I_1(x) - \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x^2}{4} (0.154 + \frac{x^2}{4} (\dots)) \right).$$

Tomando o limite quando $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x} - \frac{x}{4} (0.154 + \frac{x}{4} (\dots)) \right\} = 0.$$

De onde se conclui que as funções \tilde{p}_1^* e \tilde{p}_2^* não possuem singularidade em $r = 0$.

e) Funções \tilde{u}_i^*

$$\tilde{u}_i^* = \frac{B(1+v_u)}{3S(1-v_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} r_{,i} [\xi^{-1} - K_1(\xi)].$$

Fazendo $i = 1, 2$:

$$\tilde{u}_1^* = \frac{B(1+v_u)}{3S(1-v_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} r_{,1} [\xi^{-1} - K_1(\xi)].$$

$$\tilde{u}_2^* = \frac{B(1+v_u)}{3S(1-v_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} r_{,2} [\xi^{-1} - K_1(\xi)].$$

Quando $r \rightarrow 0$:

$$\tilde{u}_1^*, \tilde{u}_2^* \rightarrow \pm \frac{B(1+v_u)}{3S(1-v_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} [\xi^{-1} - K_1(\xi)].$$

Como foi visto no item anterior, durante a análise das funções \tilde{p}_j^* :

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x^{-1} - K_1(x)] = 0.$$

Logo, as funções \tilde{u}_1^* e \tilde{u}_2^* não possuem singularidade em $r = 0$.

f) Funções \tilde{t}_i^*

$$\tilde{t}_i^* = \frac{BG(1+v_u)}{3C(1-v_u)} \{n_i [2\xi^{-2} - K_0(\xi) - K_2(\xi)] - r_{,i} r_{,k} n_k [4\xi^{-2} - 2K_2(\xi)]\}.$$

Fazendo $i = 1, 2$:

$$\tilde{t}_1^* = \frac{BG(1+v_u)}{3C(1-v_u)} \{n_1 [2\xi^{-2} - K_0(\xi) - K_2(\xi)] - r_{,1} r_{,k} n_k [4\xi^{-2} - 2K_2(\xi)]\},$$

$$\tilde{\epsilon}_2^* = \frac{BG(1+v_u)}{3C(1-v_u)} \{n_2 [2\xi^{-2} - K_0(\xi) - K_2(\xi)] - r_{,2} r_{,k} n_k [4\xi^{-2} - 2K_2(\xi)]\}.$$

Quando $r \rightarrow 0$:

$$\tilde{\epsilon}_1^* \rightarrow \frac{BG(1+v_u)}{3C(1-v_u)} n_1 [2\xi^{-2} - K_0(\xi) - K_2(\xi)],$$

$$\tilde{\epsilon}_2^* = \frac{BG(1+v_u)}{3C(1-v_u)} n_2 [2\xi^{-2} - K_0(\xi) - K_2(\xi)].$$

Análise da função $f = [2x^{-2} - K_0(x) - K_2(x)]$:

Segundo a fórmula de recorrência (4.5.01):

$$f = \frac{2}{x^2} - K_0(x) - \frac{2}{x} K_1(x) - K_0(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x} K_1(x) - 2K_0(x).$$

Segundo as equações aproximadoras (4.5.02) e (4.5.03):

$$f = \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x} [\ln(x/2) I_1(x)] - \frac{2}{x^2} \left(1 + \frac{x^2}{4} (0.154 + \frac{x^2}{4} (\dots))\right) + 2 [\ln(x/2) I_0(x) + 0.577 + \frac{x^2}{4} (\dots)].$$

Tomando o limite quando $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{2}{x^2} - \ln(x/2) - \frac{2}{x^2} - \frac{2}{4} 0.154 + 2 \ln(x/2) + 2 \times 0.577 \right\},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f = \ln(x/2) + 1.077.$$

De onde se conclui que as funções $\tilde{\epsilon}_1^*$ e $\tilde{\epsilon}_2^*$ possuem singularidade fraca em $r = 0$.

g) Função \tilde{q}^*

$$\tilde{q}^* = \sqrt{\frac{S}{C}} r_{,k} \pi_k K_1(\xi) .$$

Quando $r \rightarrow 0$:

$$\tilde{q}^* \rightarrow 0 .$$

Logo, a função \tilde{q}^* não possui singularidade em $r = 0$.

h) Função \tilde{p}^*

$$\tilde{p}^* = \frac{1}{k} K_0(\xi) .$$

Análise da função $f = K_0(x)$

Segundo as equações aproximadoras (4.5.02) e (4.5.03):

$$f = -\ln(x/2) I_0(x) + (-0.577 + \frac{x^2}{4} (\dots)) .$$

Tomando o limite quando $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f = -\ln(x/2) - 0.577 .$$

De onde conclui-se que a função \tilde{p}^* possui singularidade fraca em $r = 0$.

4.6 - Resumo da análise de singularidade das soluções fundamentais

Utilizando-se elementos constantes na discretização do contorno, as análises feitas no item anterior indicaram que:

- Possuem singularidade forte: \tilde{t}_{12}^* e \tilde{t}_{21}^* .
- Possuem singularidade fraca: \tilde{u}_{11}^* , \tilde{u}_{22}^* , \tilde{q}_1^* , \tilde{q}_2^* , \tilde{t}_1^* , \tilde{t}_2^* e \tilde{p}^* .
- Não possuem singularidade: \tilde{u}_{12}^* , \tilde{u}_{21}^* , \tilde{t}_{11}^* , \tilde{t}_{22}^* , \tilde{u}_1^* , \tilde{u}_2^* , \tilde{p}_1^* , \tilde{p}_2^* e \tilde{q}^* .

4.7 - Método de cálculo das integrais das soluções fundamentais

Para cálculo numérico das integrais das soluções fundamentais, foi utilizado o método da quadratura de Gauss (ref. 22). Segundo este método é possível fazer a seguinte aproximação:

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = \int_{-1}^1 F(\varphi) \left[\frac{x_2 - x_1}{2} \right] d\varphi \approx \sum_{i=1}^N A_i F(\varphi_i) . \quad \dots \dots \dots (4.7.01)$$

Onde os valores de A_i e φ_i são tabelados (ref. 22) em função do número de termos do somatório (N) utilizados.

Para o cálculo das integrais de funções com singularidade fraca, ao longo do elemento onde a singularidade está presente, utilizou-se o seguinte procedimento: a) dividiu-se o elemento em quatro partes, sendo que os elementos centrais (onde fica o ponto singular) têm comprimentos bem menores que os elementos das extremidades (objetivando detalhar bastante o trecho onde a função cresce muito). Além disso, o número de termos do somatório da fórmula de Gauss utilizado no processo de integração ao longo de cada um desses quatro sub-elementos foi maior (o dobro) do que o utilizado no processo de integração das funções não singulares.

No caso das funções com singularidade forte, o processo de integração só é possível no sentido do Valor Principal de Cauchy (VPC), o que é conceitualmente mais complicado. Segundo a notação usada nas equações (4.4.14) a (4.4.20), essas funções (\tilde{t}_{12}^* e \tilde{t}_{21}^*) estão nas submatrizes h_{ij}^{ke} (equação

4.4.19) da matriz $H_{\mathbf{k}_e}$ quando $e = k$. Para estes casos, utilizam-se considerações de corpo rígido (ref.

21) segundo às quais são válidas as seguintes regras:

a) domínio interior

$$g_{ij}^{e=k} = - \sum_{m=1}^n g_{ij}^{e+k}, \quad i, j=1, 2. \quad \dots \dots \dots (4.7.02)$$

sendo n o número de elementos.

b) domínio exterior

$$g_{ij}^{e=k} = 2\pi \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \sum_{m=1}^n g_{ij}^{e+k}, \quad i, j=1, 2. \quad \dots \dots \dots (4.7.03)$$

CAPÍTULO 5

PROCEDIMENTO NUMÉRICO

Será apresentada, de maneira esquemática, a estrutura do programa elaborado para solucionar o sistema de equações da poroelasticidade acoplada no campo de Laplace, considerando o estado plano de deformações, utilizando o método dos elementos de contorno com elementos constantes.

1 - Entrada de dados (sub-rotina dados)

- Leitura das constantes do material:

- . módulo de cisalhamento (G).
- . coeficiente de pressão de poro (B).
- . módulo de Poisson drenado (ν).
- . módulo de Poisson não drenado (ν_u).
- . permeabilidade (k).

- Cálculo de outras constantes do material em função das constantes lidas:

- . coeficiente geral de consolidação (c).
- . coeficiente de tensão efetiva (α).

- Leitura do parâmetro de Laplace.

- Leitura das coordenadas das extremidades dos elementos.

- Leitura das condições de contorno:

- . vetor tensão (t_x e t_y) e pressão em todos os elementos, armazenando-os na matriz TP (ver equação 4.4.14).

- Leitura dos números de termos a serem utilizados na integração numérica pelo método de Gauss, para os elementos não singulares e para os elementos singulares, bem como o fator para divisão dos elementos singulares.

- 2 - Leitura dos pontos e pesos usados na fórmula de Gauss no processo de integração numérica. Esses dados estão armazenados em um arquivo, em função do número de pontos a serem utilizados.
- 3 - Cálculo das matrizes \underline{G} e \underline{H} , segundo equações (4.4.14) a (4.4.22)
 - Coloca o ponto de aplicação em cada elemento.
 - Chama a sub-rotina que calcula as integrais das soluções fundamentais ao longo de todos os elementos.
 - . chama uma sub-rotina que calcula o comprimento do elemento e seu vetor normal.
 - . calcula o ponto médio do elemento.
 - . calcula os pontos de Gauss ao longo do elemento.
 - . chama uma sub-rotina que calcula o raio (distância entre o ponto de aplicação e cada um dos pontos de Gauss sobre o elemento), e o vetor gradiente do raio.
 - . chama uma sub-rotina que calcula todas as soluções fundamentais.
 - . soma os valores obtidos das soluções fundamentais em cada ponto de Gauss, obtendo as integrais das soluções fundamentais ao longo do elemento.
 - Armazena as integrais das soluções fundamentais nas matrizes \underline{G} e \underline{H} , segundo equação (4.4.14).
 - Soma as integrais das funções com singularidade forte (\bar{t}_{12}^* e \bar{t}_{21}^*), nas integrações ao longo dos elementos não singulares. As integrais dessas funções ao longo dos elementos singulares será igual a matriz identidade menos esse somatório (ver equação 4.7.03).
- 4 - Calcula o produto da matriz \underline{G} pela matriz dos com os valores da tensão e pressão no contorno ($\underline{B} = \underline{G} * \underline{TP}$).

- 5 - Através do processo de decomposição LU, resolve o sistema $\underline{H} * \underline{UQ} = \underline{B}$ (equação 4.4.23), calculando os deslocamentos e as vazões na fronteira, armazenando-os na matriz \underline{UQ} .
- 6 - Calcula os deslocamentos, pressões de poros, vazões, e tensões nos pontos internos, segundo equações (4.4.07), (4.4.08), (4.4.09) e (4.4.24)
- Coloca o ponto de aplicação em cada ponto interno.
 - Calcula as integrais das soluções fundamentais e dos núcleos ao longo de todos os elementos através do método de Gauss.
 - Armazena essas integrais nas matrizes \underline{G} e \underline{H} .
 - Resolve os pontos internos multiplicando essas matrizes \underline{G} e \underline{H} pelas matrizes com os valores calculados/dados no contorno, matrizes \underline{TP} e \underline{UQ} ($sol = [\underline{G} * \underline{TP} - \underline{H} * \underline{UQ}]/2\pi$).
- 7 - Lista os resultados em arquivos de saída.

Para calcular as variáveis em dados instantes de tempo, utilizou-se o programa de inversão numérica pelo método de STEHFEST (ref. 16), utilizando 10 pontos "s" (parâmetro de Laplace) para cada instante de tempo. Neste caso, o programa que estava sendo utilizado para cálculos em dados valores de s, transforma-se em uma sub-rotina do programa STEHFEST.

CAPÍTULO 6

RESULTADOS E VALIDAÇÃO DO PROGRAMA

6.1 - Considerações iniciais

a) as integrações numéricas das funções são feitas através do método da quadratura de Gauss (ref. 22), adotando-se o seguinte: para integrais ao longo de elementos não singulares, foram utilizados 16 pontos de Gauss. Para as integrais ao longo dos elementos singulares, dividiu-se o elemento em 4 partes, sendo que cada uma das duas partes centrais tiveram um comprimento de 1% do comprimento do elemento, e foram utilizados 32 pontos de Gauss em cada um desses quatro sub-elementos. Tomando como parâmetro de comparação a utilização de 50 pontos de Gauss para integrações ao longo de elementos não singulares e de 50 pontos ao longo de cada um dos quatro sub-elementos nas integrações ao longo de elementos singulares, o processo utilizando 16 e 32 pontos de Gauss apresenta um precisão de 14 casas decimais nos resultados das integrais das soluções fundamentais ao longo de elementos não singulares, e de 05 casas decimais ao longo de elementos singulares (utilizando uma discretização de 06 elementos em uma circunferência de raio 1).

b) no processo de inversão numérica das variáveis do campo de Laplace para o domínio do tempo, foi utilizado o método de Stehfest, com 10 termos no somatório. As figuras 6.1.01, 6.1.02 e 6.1.03 abaixo, mostram a influência do número de termos no processo de inversão numérica de algumas funções que são soluções analíticas, no campo de Laplace, do problema que será tratado a seguir.

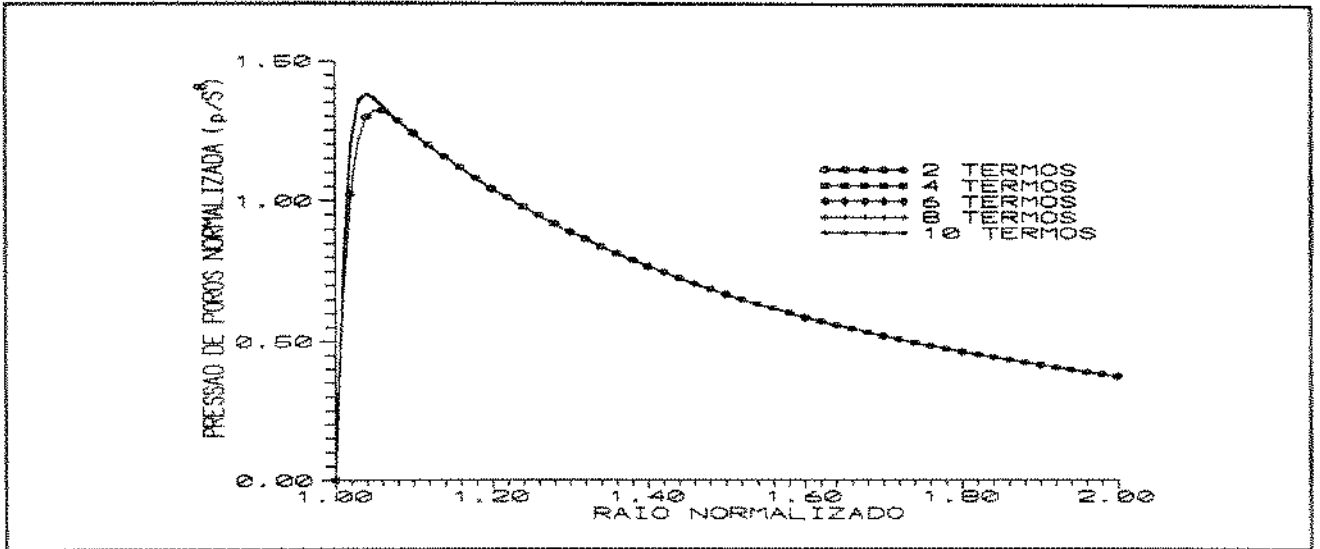


Figura 6.1.01 - Inversão numérica da solução analítica do problema descrito no item 6.2, para a pressão de poros normalizada ao longo do eixo x , em $t^* = 1.0 \times 10^{-4}$ (tempo normalizado).

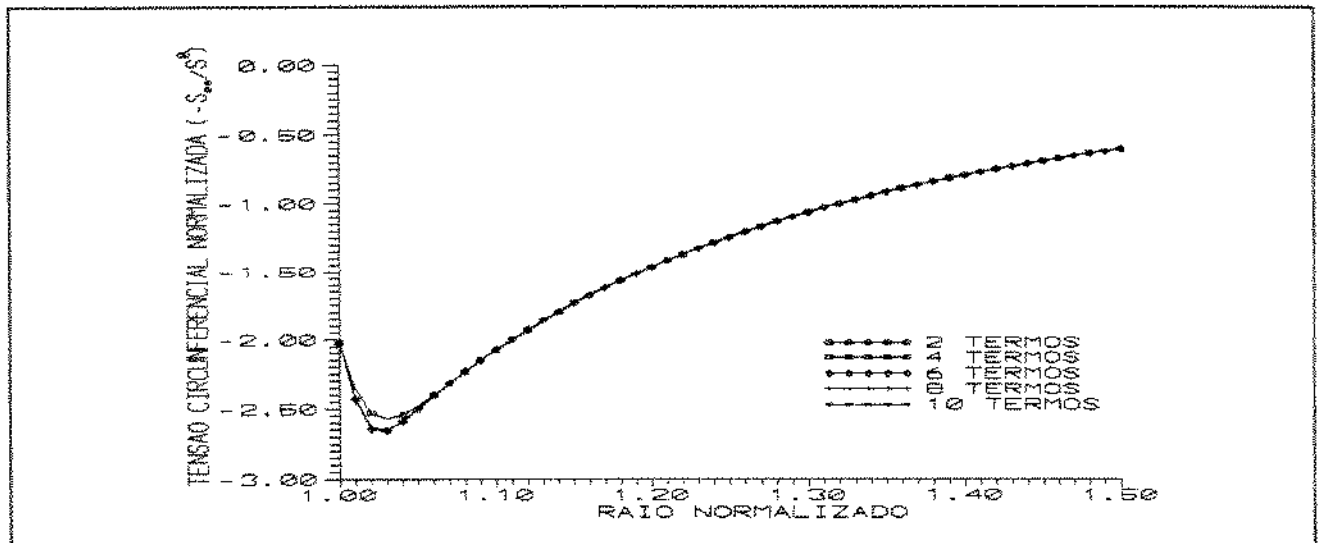


Figura 6.1.02 - Inversão numérica da solução analítica do problema descrito no item 6.2, para a tensão circunferencial normalizada ao longo do eixo x , em $t^* = 1.0 \times 10^{-4}$ (tempo normalizado).

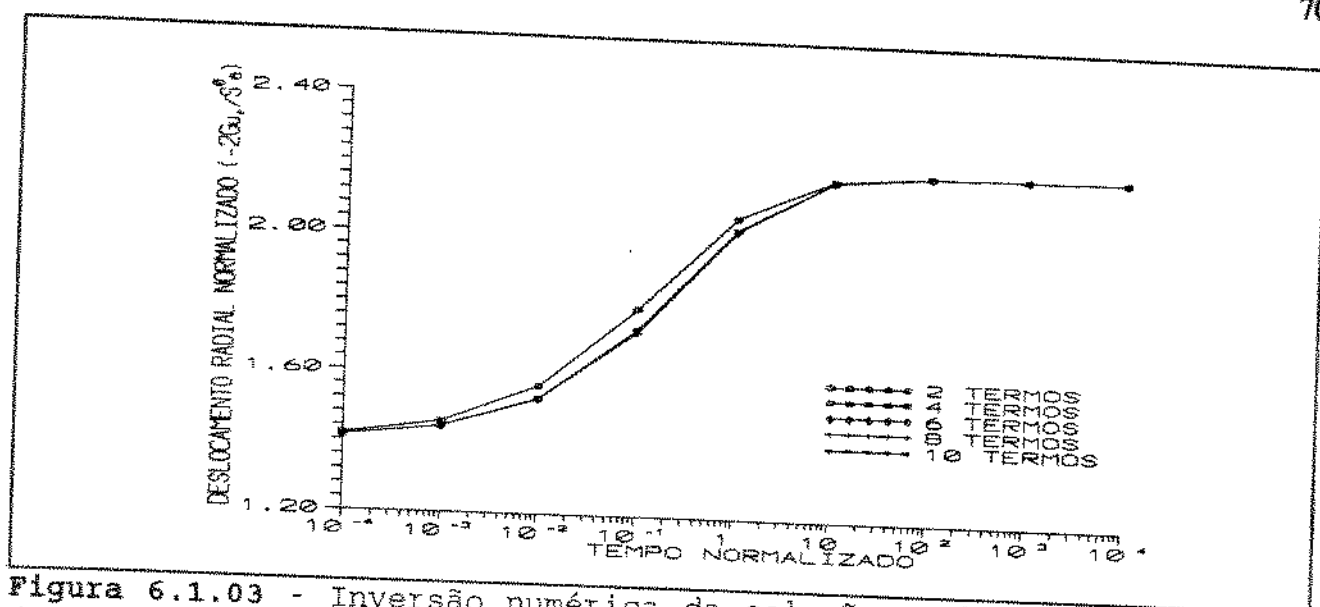


Figura 6.1.03 - Inversão numérica da solução analítica do problema descrito no item 6.2, para o deslocamento na fronteira ($r=a$).

Como pode ser visto, a convergência do processo de inversão numérica dessas funções é obtido a partir de 4 termos. No processo de inversão numérica dos dados discretos obtidos através do MEC, foram utilizados 10 termos, que é o valor mínimo recomendado pela literatura.

c) A variável CE indica comprimento normalizado dos elementos, ou seja, é a relação entre o comprimento dos elementos e o raio do poço.

d) No anexo B estão listadas as tabelas com todos os dados que geraram os gráficos listados neste capítulo.

6.2 - Descrição do problema

Um poço vertical é perfurado em uma formação porosa submetida a uma tensão *in situ* uniforme e anisotrópica, com uma pressão de poros virgem. Este problema pode ser analisado assumindo o estado plano de deformações. Pode-se, ainda, fazer coincidir o sistema de eixos ortogonais com as direções das tensões principais, sendo que um dessas direções coincide com o eixo do poço.

Para facilitar a solução do problema, o carregamento no poço é decomposto em três modos de carregamentos fundamentais (ref. 01 e 07): um campo de tensão hidrostática distante, uma pressão de poros virgem e um campo de tensão desviatória distante. Pode ser provado (ref. 07) que o campo de tensão hidrostática é governado por uma resposta elástica sem geração de pressão de poros. A pressão de poros é controlada por um processo de fluxo radial desacoplado. O campo de tensão desviatória é o único a provocar efeitos poroelásticos acoplados, sendo, portanto, o problema a ser tratado aqui pelo método dos elementos de contorno.

É assumido que o poço é perfurado instantaneamente no instante $t=0$, e que as tensões normais e de cisalhamento na parede do poço são nulas (zero) para $t > 0$. As condições de contorno (induzidas pelo campo de tensão desviatória distante) na parede poço ($r=a$) são:

$$\Delta\sigma_{rr} = S^0 \cos(2\theta), \quad \Delta\sigma_{r\theta} = S^0 \sin(2\theta), \quad \Delta p = 0.$$

sendo r e θ coordenadas polares, e Δ um indicativo de componentes induzidas. S^0 é a magnitude do campo de tensão desviatória. A figura 6.1.04 ilustra esse carregamento.

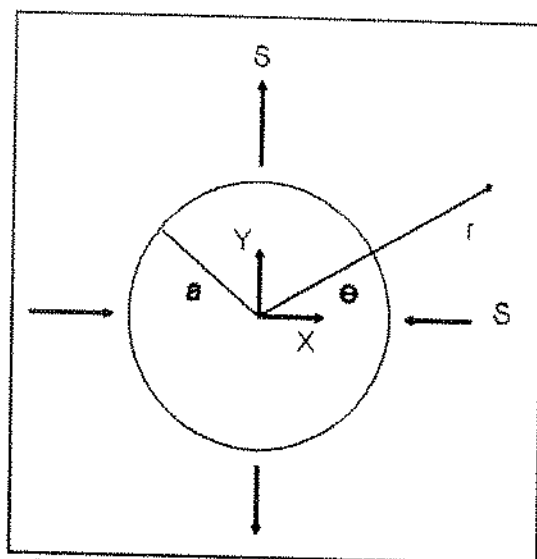


Figura 6.2.01 - Poço perfurado em um meio poroelástico sujeito a um campo de tensão desviatória.

As condições de contorno que entrarão como dados no programa serão os vetores tensões e as pressões de poro ao longo dos elementos que servirão de discretização da parede do poço. O vetor tensão em cada elemento é dado por $t_i = \sigma_{ij}n_j$ (sendo n_j o vetor normal ao elemento) e $p = 0$. Lembrando que estes dados deverão entrar no programa no campo de Laplace; logo, eles serão divididos por s (parâmetro de transformação de Laplace) por serem dados constantes no tempo.

As constantes do material utilizadas são:

$B = 0.8$, $\nu = 0.2$, $\nu_u = 0.4$, $G = 1$, $k = 1$. Como as saídas serão todas adimensionalizadas, não serão dependentes das unidades.

O raio do poço (a) será igual a 1, e S^0 também será tomado como igual a 1.

Os resultados serão adimensionalizados para possibilitar uma generalização em termos de unidades, e para facilitar a comparação com os resultados obtidos na literatura (ref. 01 e 07). A normalização do parâmetro de Laplace será feita por $s^* = sa^2/c$, e o tempo por $t^* = ct/a^2$.

Em todos os gráficos onde a variável for medida ao longo do domínio, será plotada uma reta marcando uma distância do contorno equivalente ao comprimento de um elemento. Isso possibilitará que se compare a precisão dos resultados obtidos próximo ao contorno com aqueles obtidos mais longe, pois é sabido que um dos problemas intrínsecos ao MEC é sua falta de confiabilidade nos resultados apresentados em pontos a distâncias do contorno menores que a equivalente ao comprimento de um elemento.

6.3 - Soluções no campo de Laplace

A solução analítica deste problema, no campo de Laplace, pode ser encontrada na ref. 07:

$$\frac{2Gs\bar{U}_r}{S^0a} = -\frac{B(1+\nu_u)}{2\beta(1-\nu_u)} C_1 \left[K_1(\xi) + \frac{2}{\xi} K_2(\xi) \right] + C_2 \frac{a}{r} + C_3 \frac{a^3}{r^3}, \dots \dots \dots (6.3.01)$$

$$\frac{2Gs\tilde{U}_0}{S^0 a} = -\frac{2B(1+v_u)}{3\beta^2(1-v_u)} C_1 \frac{a}{r} K_2(\xi) - \frac{1-2v_u}{2(1-v_u)} C_2 \frac{a}{r} + C_3 \frac{a^3}{r^3}, \quad \dots \quad (6.3.02)$$

$$\frac{s\tilde{P}}{S^0} = \frac{B^2(1-v)(1+v_u)^2}{9(1-v_u)(v_u-v)} C_1 K_2(\xi) + \frac{B(1+v_u)}{3(1-v_u)} C_2 \frac{a^2}{r^2}, \quad \dots \quad (6.3.03)$$

$$\frac{s\tilde{S}_{rr}}{S^0} = \frac{B(1+v_u)}{3(1-v_u)} C_1 \left[\frac{1}{\xi} K_1(\xi) + \frac{6}{\xi^2} K_2(\xi) \right] - \frac{1}{1-v_u} C_2 \frac{a^2}{r^2} - 3C_3 \frac{a^4}{r^4}, \quad \dots \quad (6.3.04)$$

$$\frac{s\tilde{S}_{\theta\theta}}{S^0} = -\frac{B(1+v_u)}{3(1-v_u)} C_1 \left[\frac{1}{\xi} K_1(\xi) + \left(1 + \frac{6}{\xi^2}\right) K_2(\xi) \right] + 3C_3 \frac{a^4}{r^4}, \quad \dots \quad (6.3.05)$$

$$\frac{s\tilde{S}_{r\theta}}{S^0} = \frac{2B(1+v_u)}{3(1-v_u)} C_1 \left[\frac{1}{\xi} K_1(\xi) + \frac{3}{\xi^2} K_2(\xi) \right] - \frac{1}{2(1-v_u)} C_2 \frac{a^2}{r^2} - 3C_3 \frac{a^4}{r^4}, \quad \dots \quad (6.3.06)$$

sendo:

$$C_1 = -\frac{12\beta(1-v_u)(v_u-v)}{B(1+v_u)(D_2-D_1)},$$

$$C_2 = \frac{4(1-v_u)D_2}{D_2-D_1},$$

$$C_3 = -\frac{\beta(D_2-D_1) + 8(v_u-v)K_2(\beta)}{\beta(D_2-D_1)},$$

$$D_1 = 2(v_u-v)K_1(\beta),$$

$$D_2 = \beta(1-v)K_2(\beta).$$

$$\xi = r\sqrt{\frac{s}{c}}, \quad e \quad \beta = a\sqrt{\frac{s}{c}},$$

$$(\tilde{U}_r, \tilde{\sigma}_{rr}, \tilde{\sigma}_{\theta\theta}, \tilde{P}) = (\tilde{U}_r, \tilde{S}_{rr}, \tilde{S}_{\theta\theta}, \tilde{P}) \cos(2\theta),$$

$$(\tilde{U}_\theta, \tilde{\sigma}_{r\theta}) = (\tilde{U}_\theta, \tilde{S}_{r\theta}) \sin(2\theta),$$

e $K_n(x)$ a função modificada de Bessel de segunda espécie, de ordem n , aplicada no ponto x .

a) Variação da pressão de poros ao longo do eixo x

As figuras 6.3.01 a 6.3.04, mostram a variação da pressão de poros induzida ao longo do eixo x , para valores do parâmetro de Laplace normalizado ($s^* = s.a^2/c$) de 10, 100 e 1000. Os dados discretos representam os valores obtidos pelo programa utilizando o MEC, utilizando 16, 32, 64 e 128 elementos na discretização do contorno. As linhas contínuas representam as soluções analíticas. O valor plotado em $r/a = 1$ corresponde ao valor dado nas condições de contorno, e não ao valor obtido pelo programa.

Pode-se observar a contínua melhora na aderência dos resultados numéricos em relação aos resultados analíticos, quando se vai aumentando a discretização do contorno (diminuindo o comprimento dos elementos). Pode-se, também, observar que foram obtidos bons resultados à distâncias do contorno menores que a equivalente ao comprimento de um elemento, principalmente para pequenos valores de s .

Figura 6.3.01 - Variação da pressão de poros ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 16 elementos na discretização do contorno.

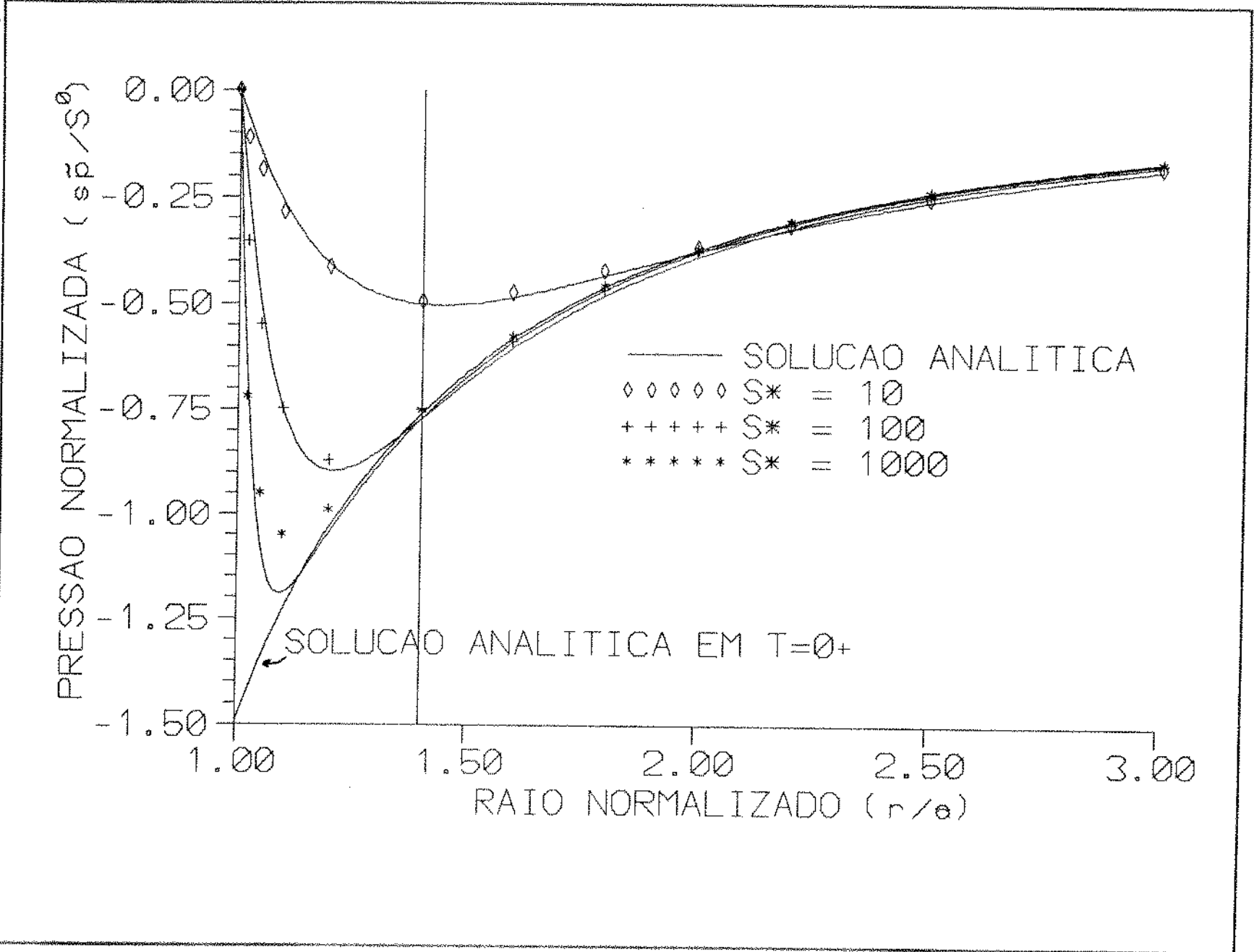


Figura 6.3.02 - Variação da pressão de poros ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 32 elementos na discretização do contorno.

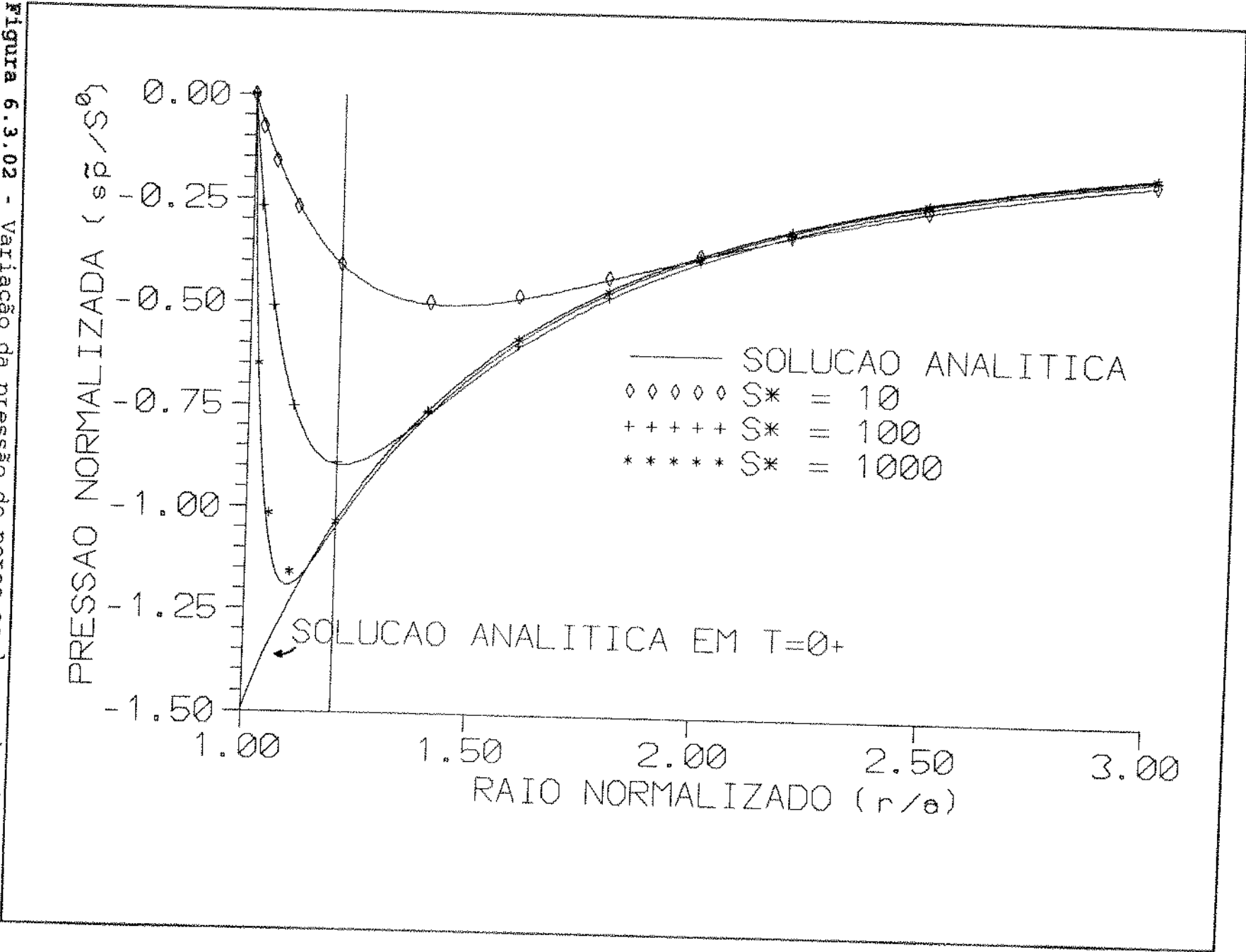


Figura 6.3.03 - Variação da pressão de poros ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 64 elementos na discretização do contorno.

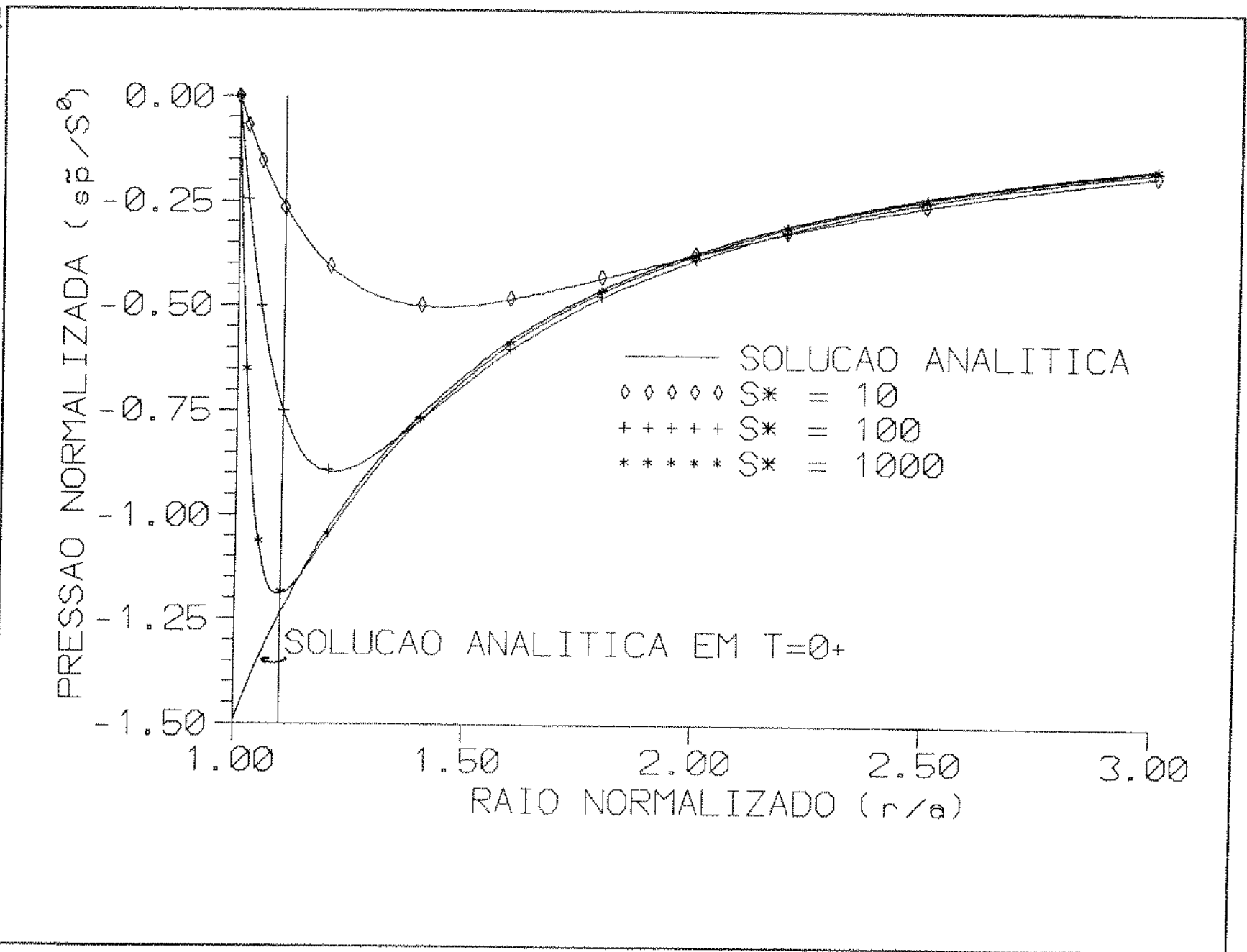
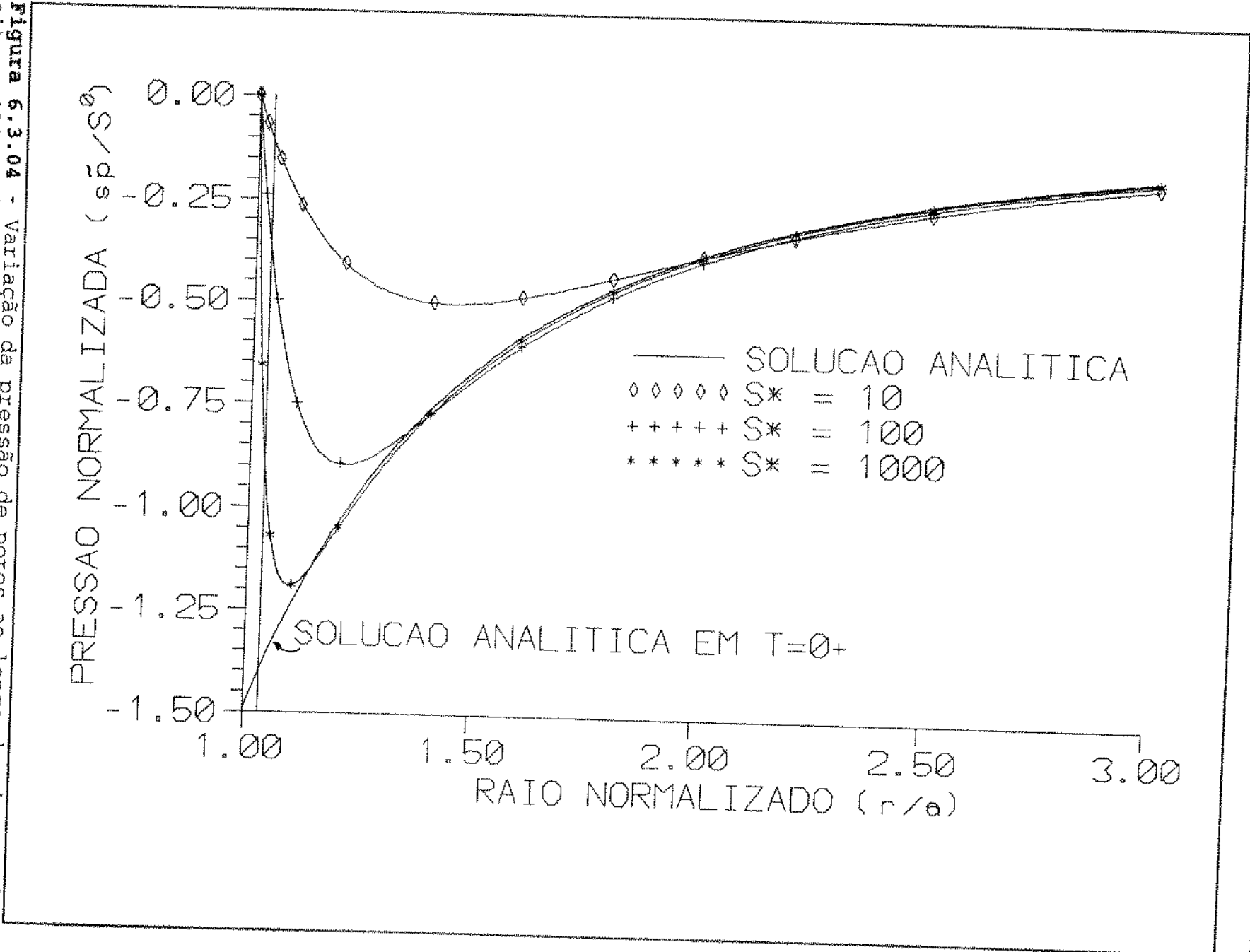


Figura 6.3.04 - Variação da pressão de poros ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 128 elementos na discretização do contorno.



b) Variação do deslocamento radial ao longo do eixo x

As figuras 6.3.05 a 6.3.08, mostram a variação do deslocamento radial induzido ao longo do eixo x em função do parâmetro de Laplace normalizado. Os dados discretos representam os valores obtidos pelo programa utilizando o MEC , utilizando 16, 32 ,64 e 128 elementos na discretização do contorno. As linhas contínuas representam as soluções analíticas. Os valores no contorno ($r/a=1$) foram obtidos quando o problema foi solucionado na fronteira (quando se soluciona a equação 4.4.23), e não trazendo, à posteriori, o ponto de aplicação do domínio para a fronteira. Mais uma vez, pode-se observar a contínua melhora da precisão dos resultados obtidos pelo MEC quando se aumenta a discretização do contorno.

Figura 6.3.05 - Variação do deslocamento radial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 16 elementos na discretização do contorno.

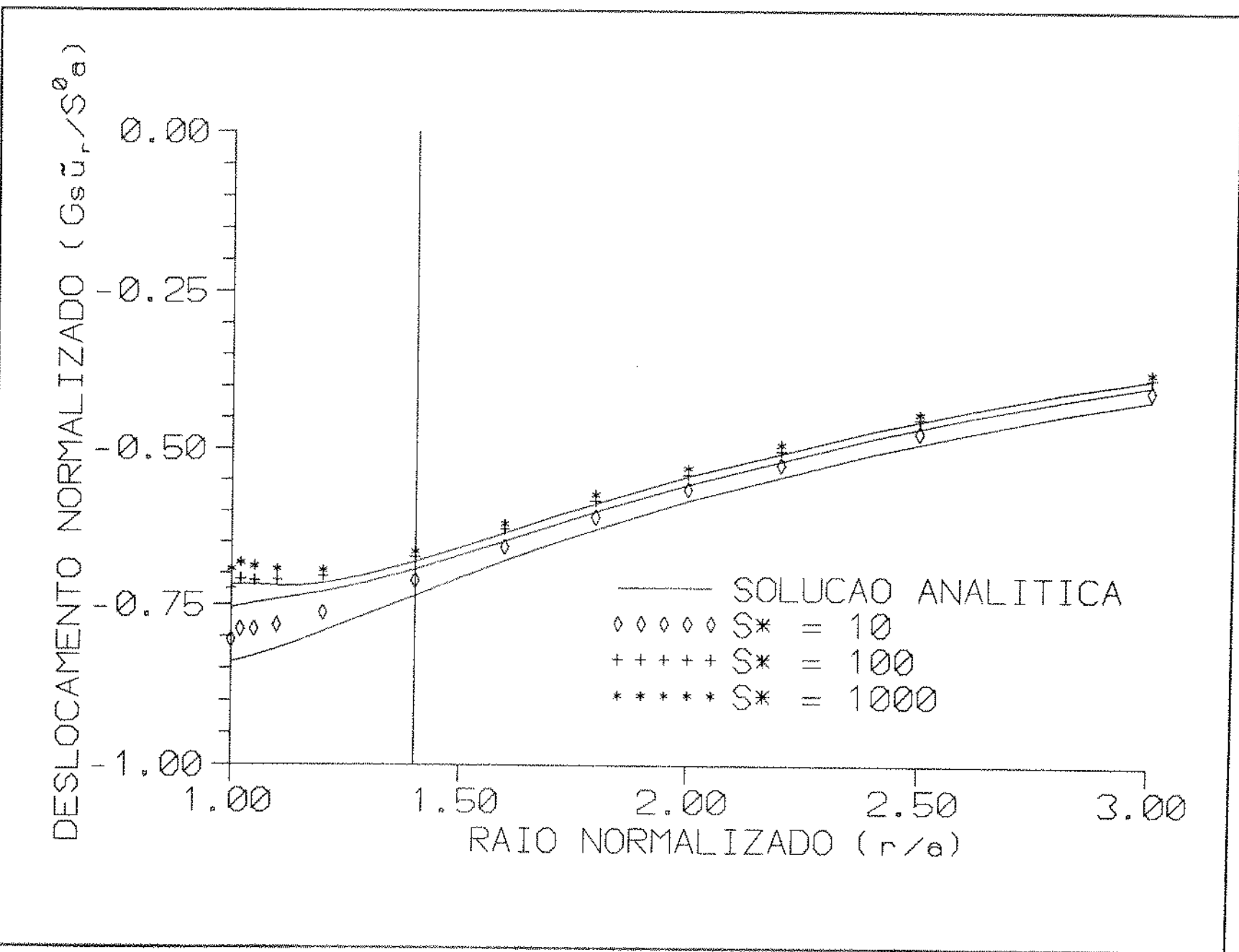


Figura 6.3.06 - Variação do deslocamento radial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 32 elementos na discretização do contorno.

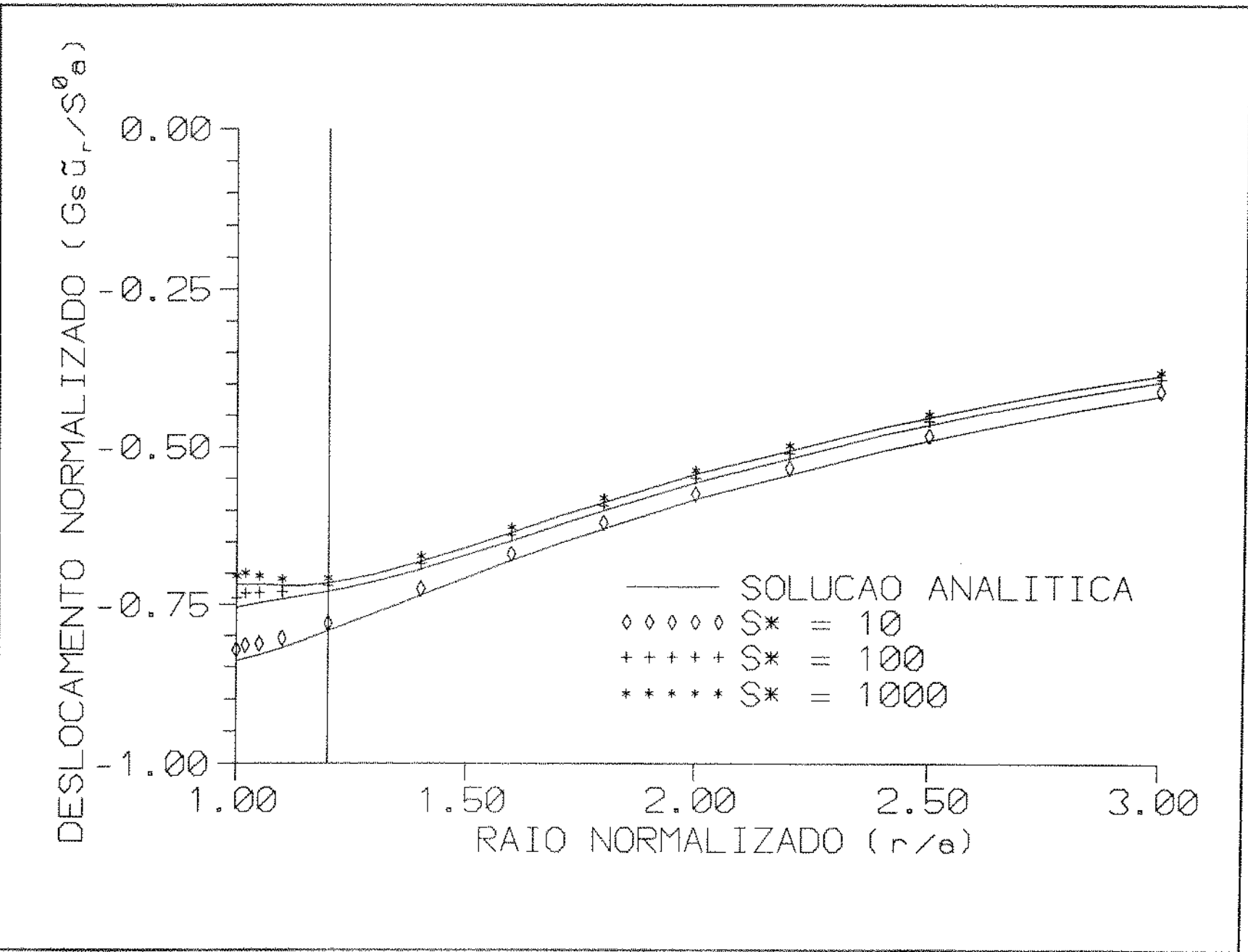


Figura 6.3.07 - Variação do deslocamento radial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 64 elementos na discretização do contorno.

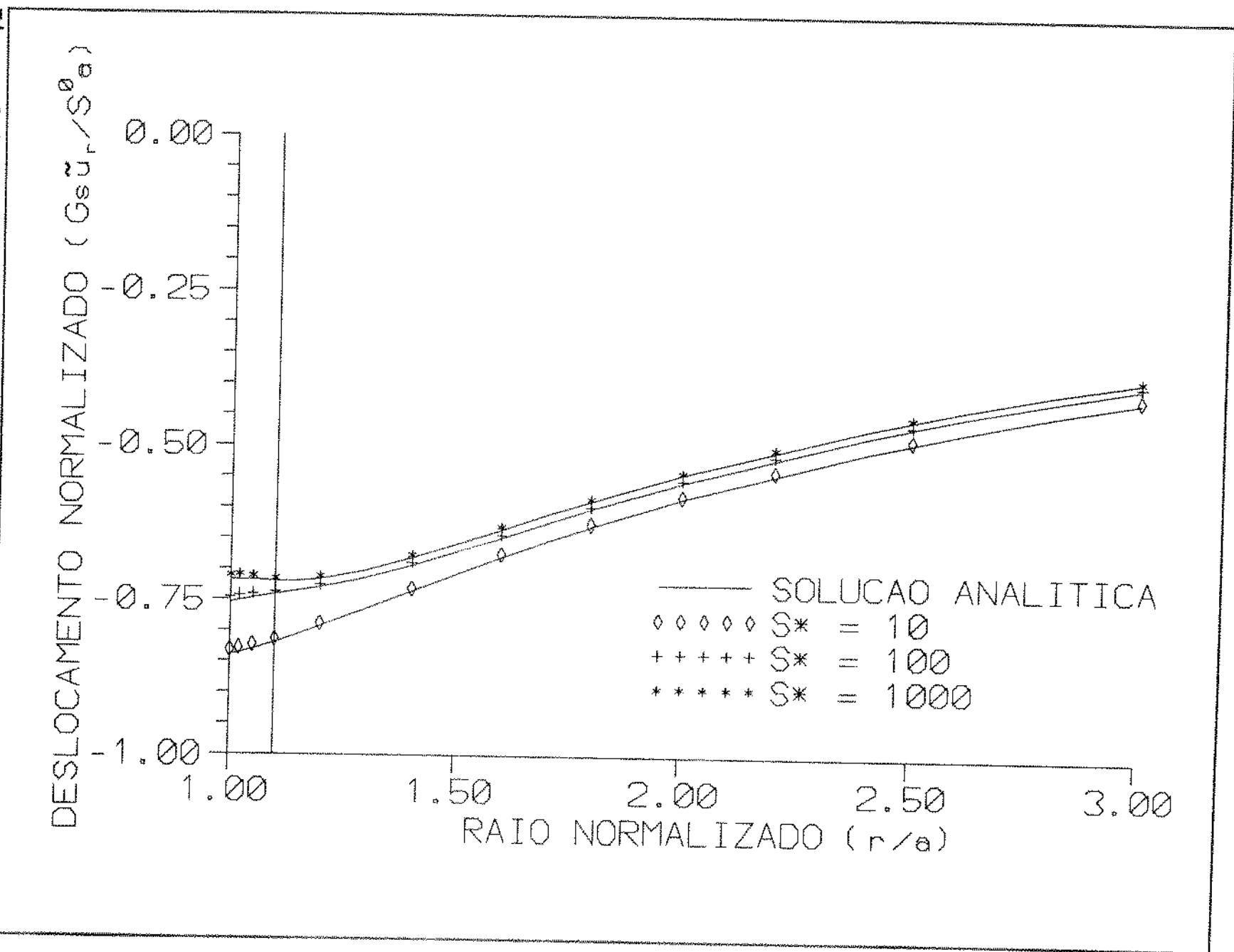
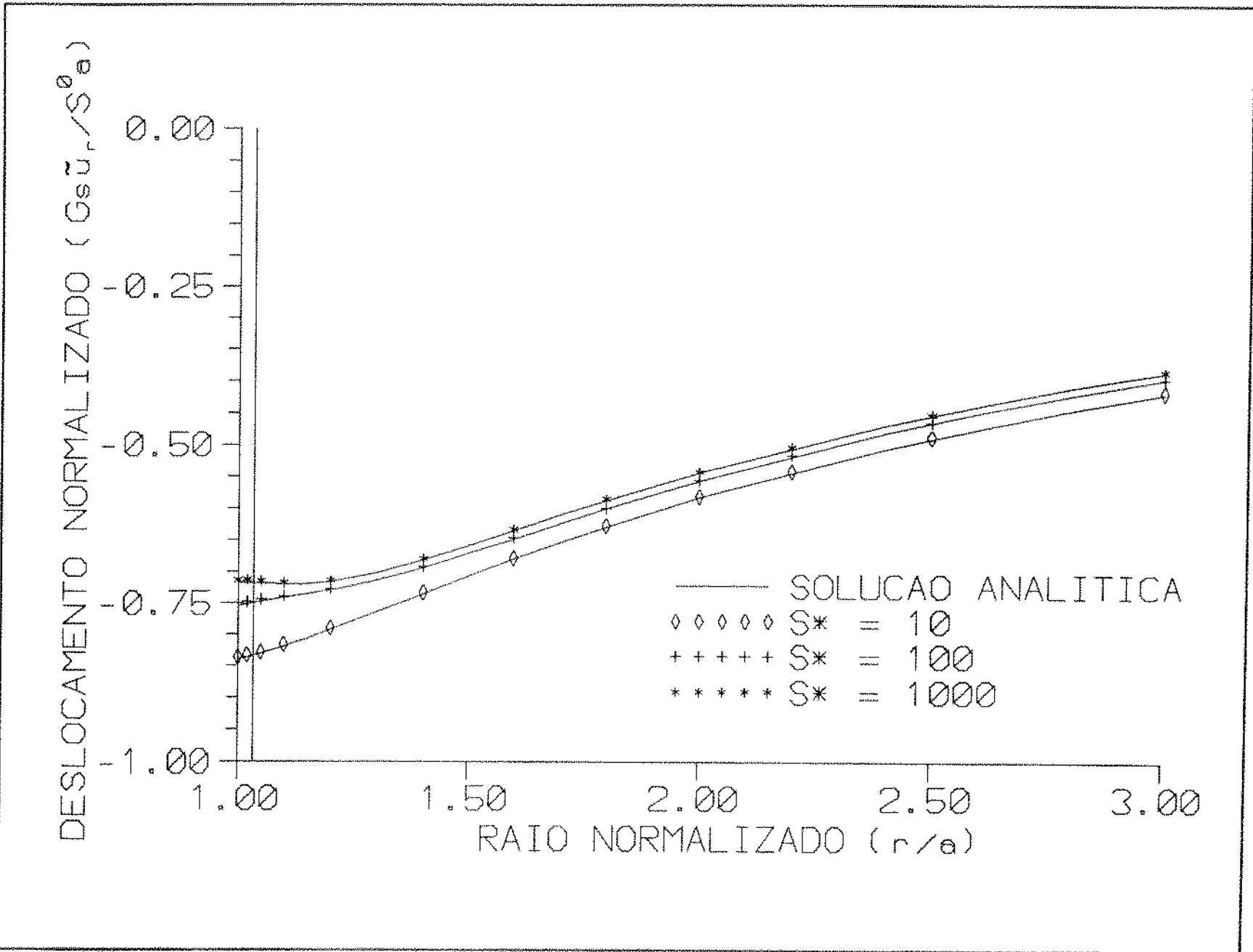


Figura 6.3.08 - Variação do deslocamento radial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 128 elementos na discretização do contorno.



c) Variação da tensão radial ao longo do eixo x

As figuras 6.3.09 a 6.3.12, mostram a variação da tensão radial induzida ao longo do eixo x, para valores do parâmetro de Laplace normalizado de 10, 100 e 1000. Os dados discretos representam os valores obtidos pelo programa utilizando o MEC, utilizando 16, 32, 64 e 128 elementos na discretização do contorno. As linhas contínuas representam as soluções analíticas. A tensão radial ao longo do eixo x é igual ao σ_{11} , que é a variável calculada no programa. Observe-se que na fronteira $\sigma_{11} = t_1$ que, nesse caso, foi um dado de entrada do problema. Esse dado foi utilizado nos gráficos. O MEC não consegue bons resultados quando se coloca um ponto interno muito próximo da fronteira. O máximo que se pode fazer é aumentar a discretização (diminuindo o comprimento dos elementos) para chegar mais perto da fronteira. Mais uma vez, é notável o aumento da precisão dos resultados obtidos pelo MEC à medida em que se aumenta a discretização do contorno, principalmente próximo à fronteira.

Figura 6.3.09 - Variação da tensão radial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 16 elementos na discretização do contorno.

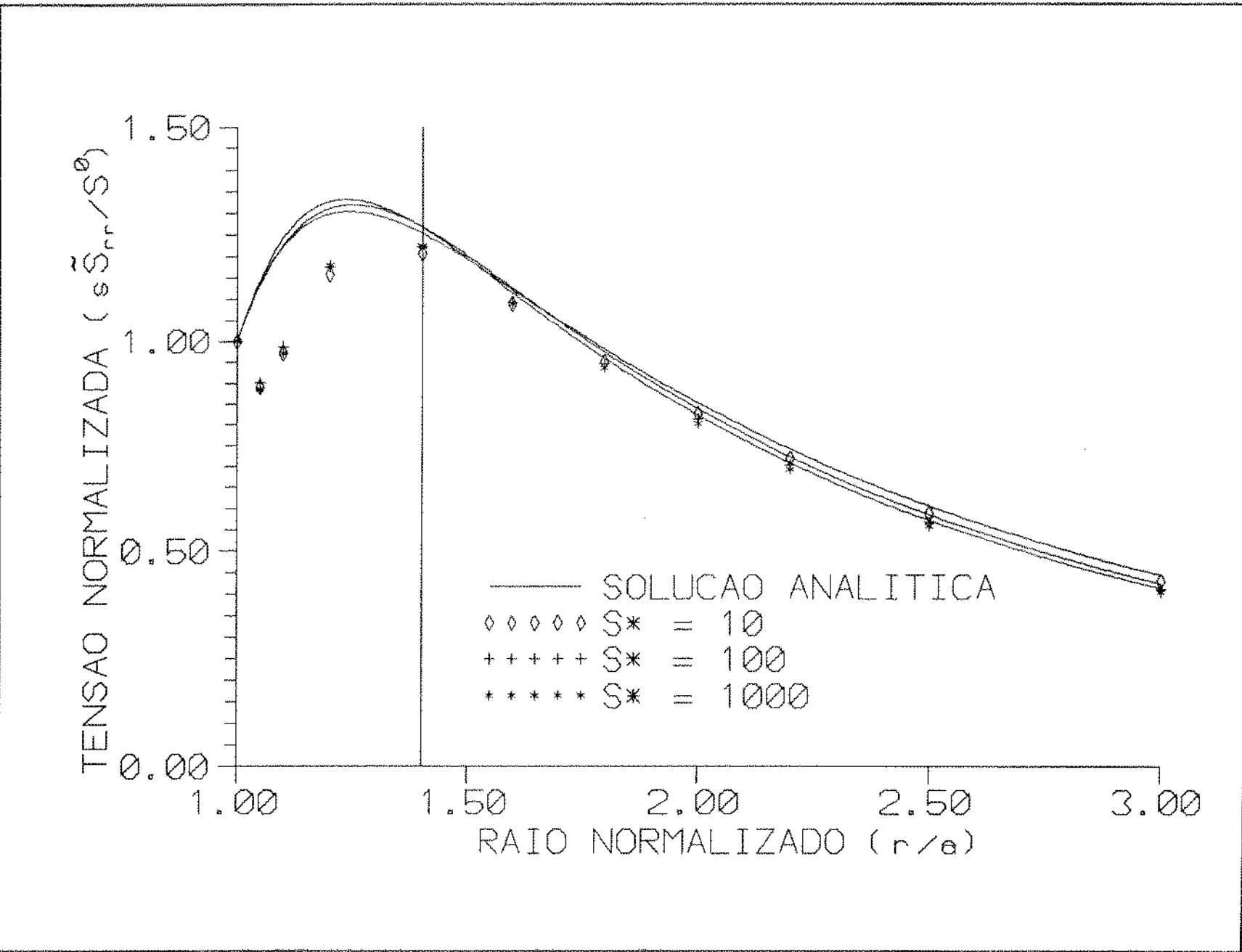


Figura 6.3.10 - Variação da tensão radial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 32 elementos na discretização do contorno.

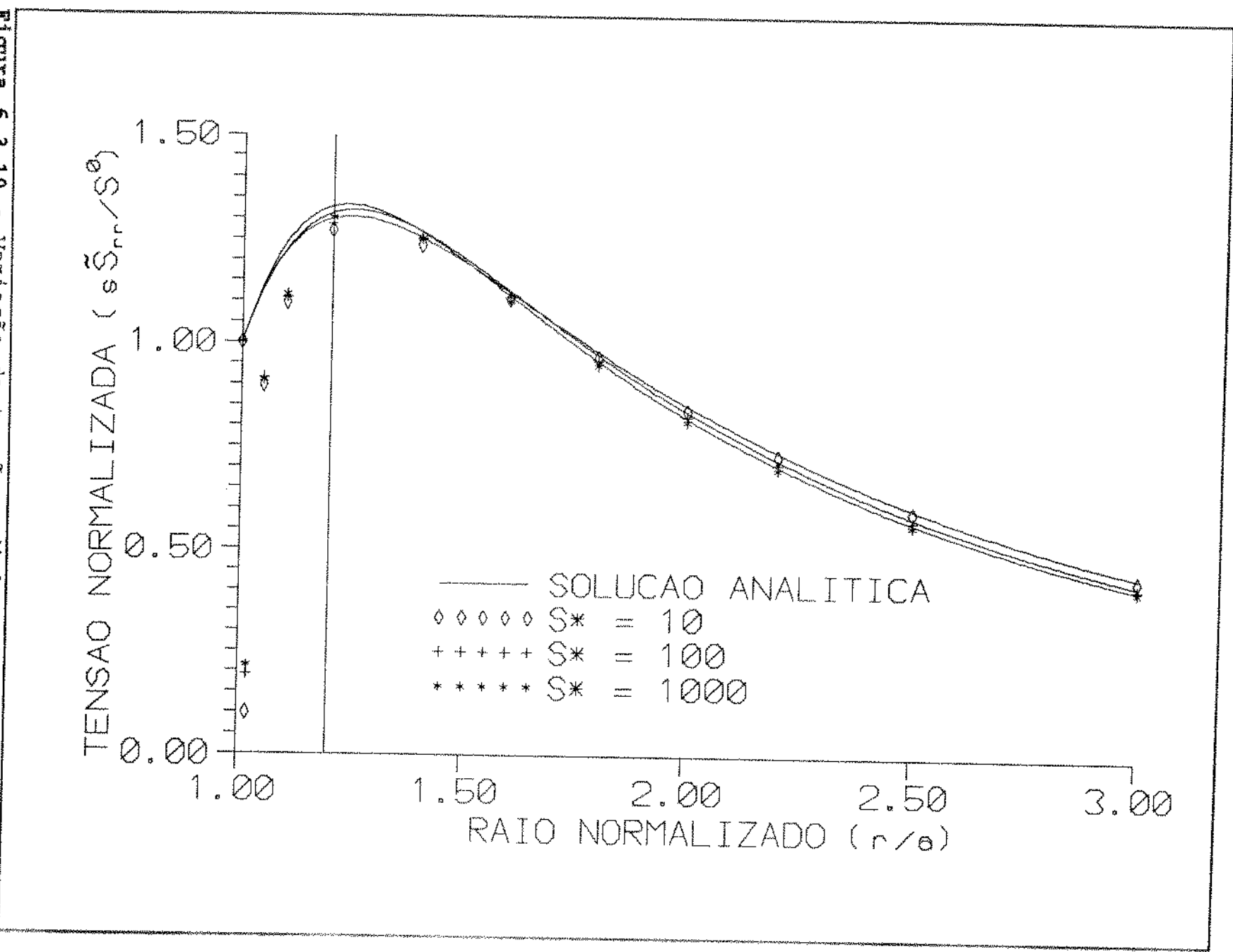


Figura 6.3.11 - Variação da tensão radial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 64 elementos na discretização do contorno.

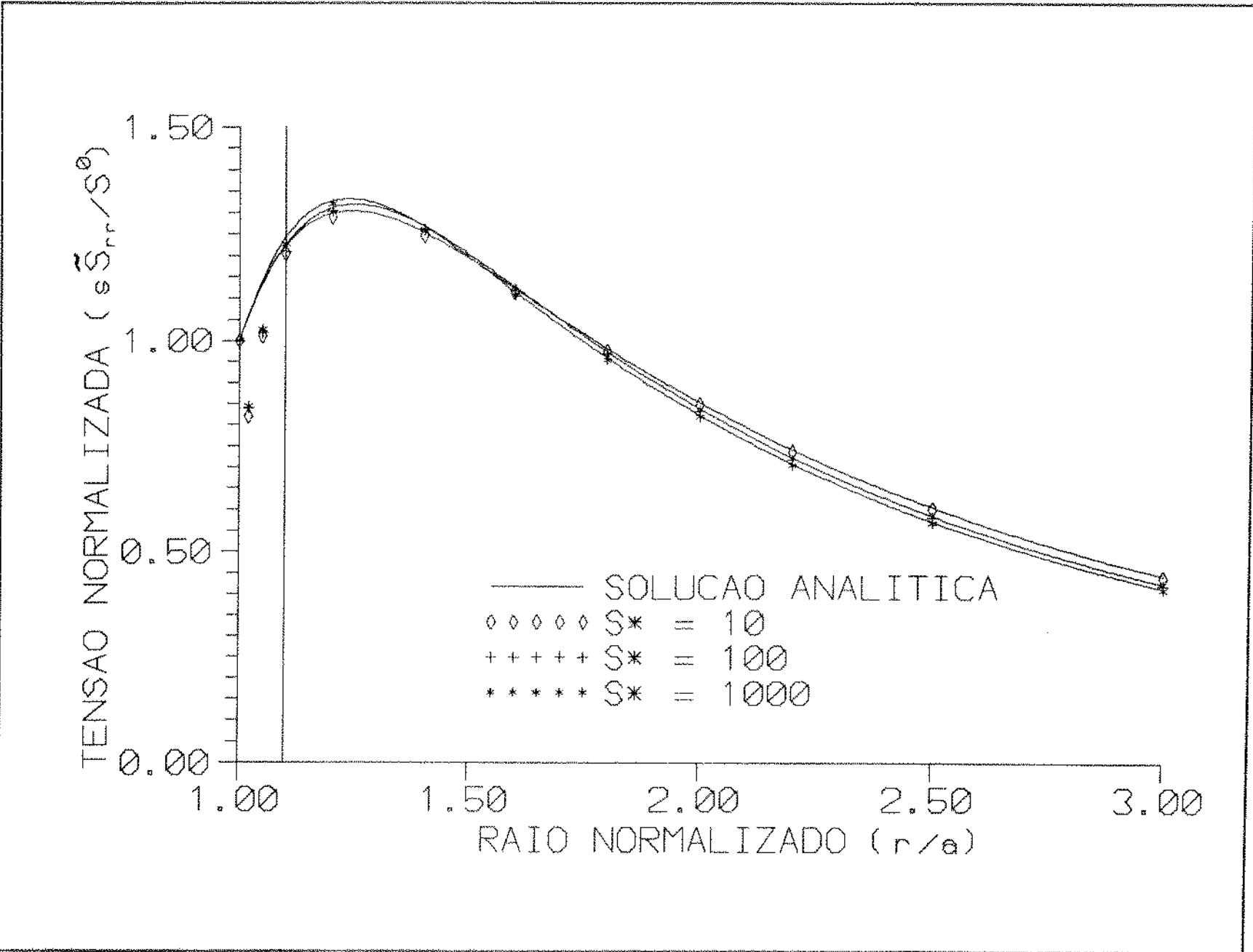
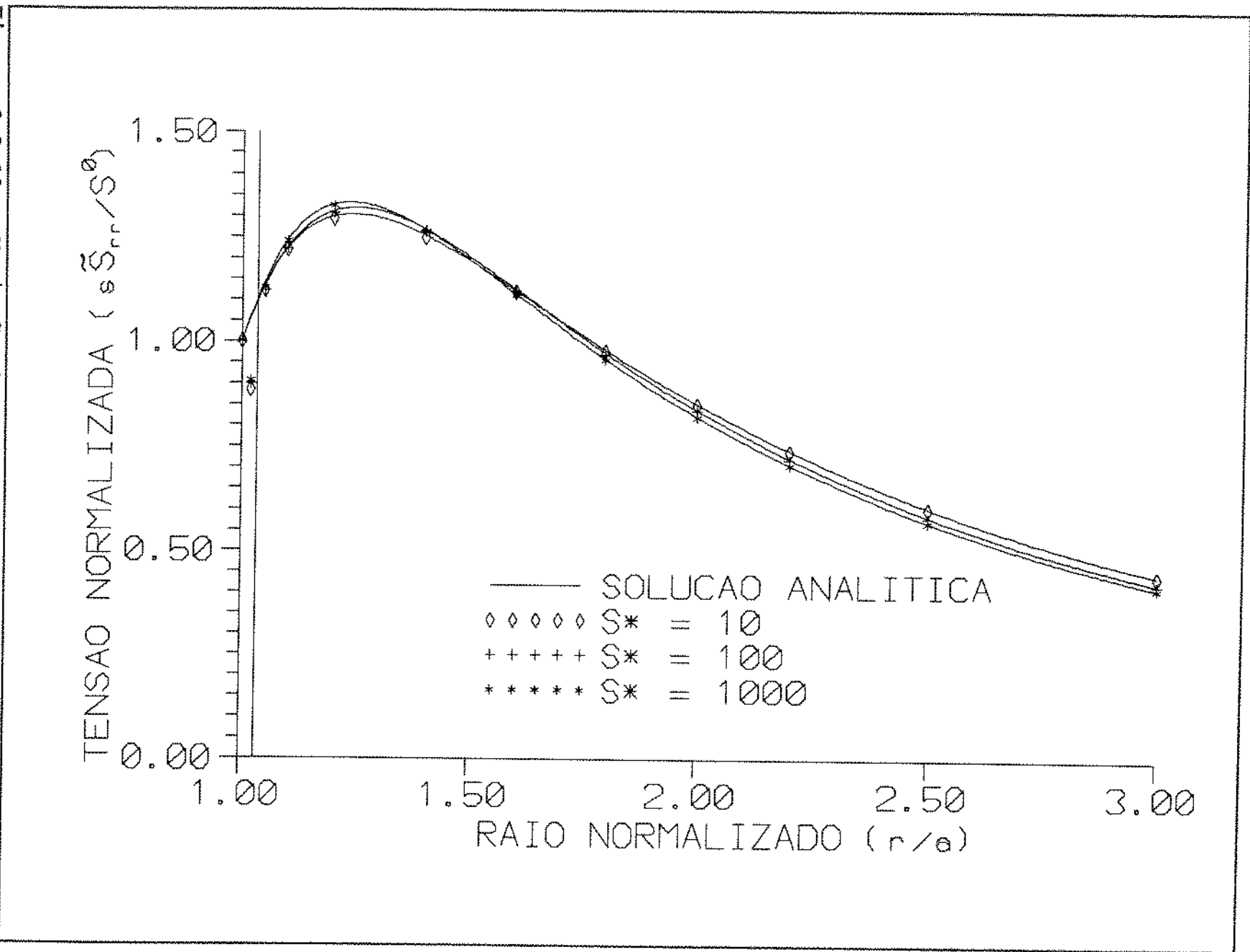


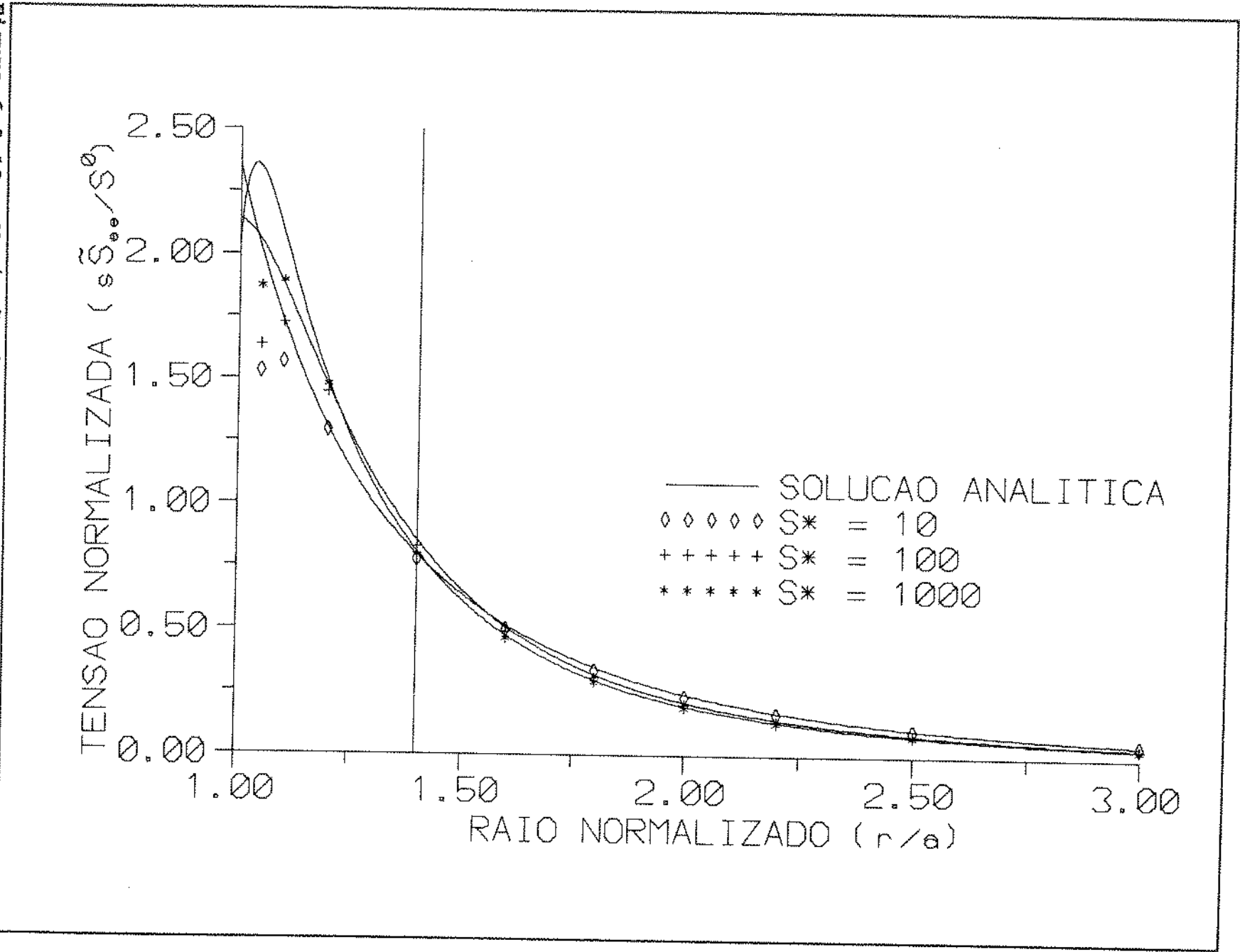
Figura 6.3.12 - Variação da tensão radial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 128 elementos na discretização do contorno.



d) Variação da tensão circunferencial ao longo do eixo x

As figuras 6.3.13 a 6.3.16, mostram os valores obtidos para a tensão circunferencial induzida ao longo do eixo x , para valores do parâmetro de Laplace normalizado de 10, 100 e 1000. Os dados discretos representam os valores obtidos pelo programa utilizando o MEC, utilizando 16, 32, 64 e 128 elementos na discretização do contorno. As linhas contínuas representam as soluções analíticas. A tensão circunferencial ao longo do eixo x é igual ao σ_{22} , que é a variável calculada no programa. Observe-se que não se consegue calcular essa variável na fronteira, porque ela não faz parte do sistema de equações que é solucionado no contorno. O máximo que se pode fazer é aumentar a discretização (diminuindo o comprimento dos elementos) para chegar bem perto da fronteira. Aqui também é notável o aumento da precisão dos resultados obtidos pelo MEC à medida em que se aumenta a discretização do contorno, principalmente próximo à fronteira.

Figura 6.3.13 - Variação da tensão circunferencial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 16 elementos na discretização do contorno.



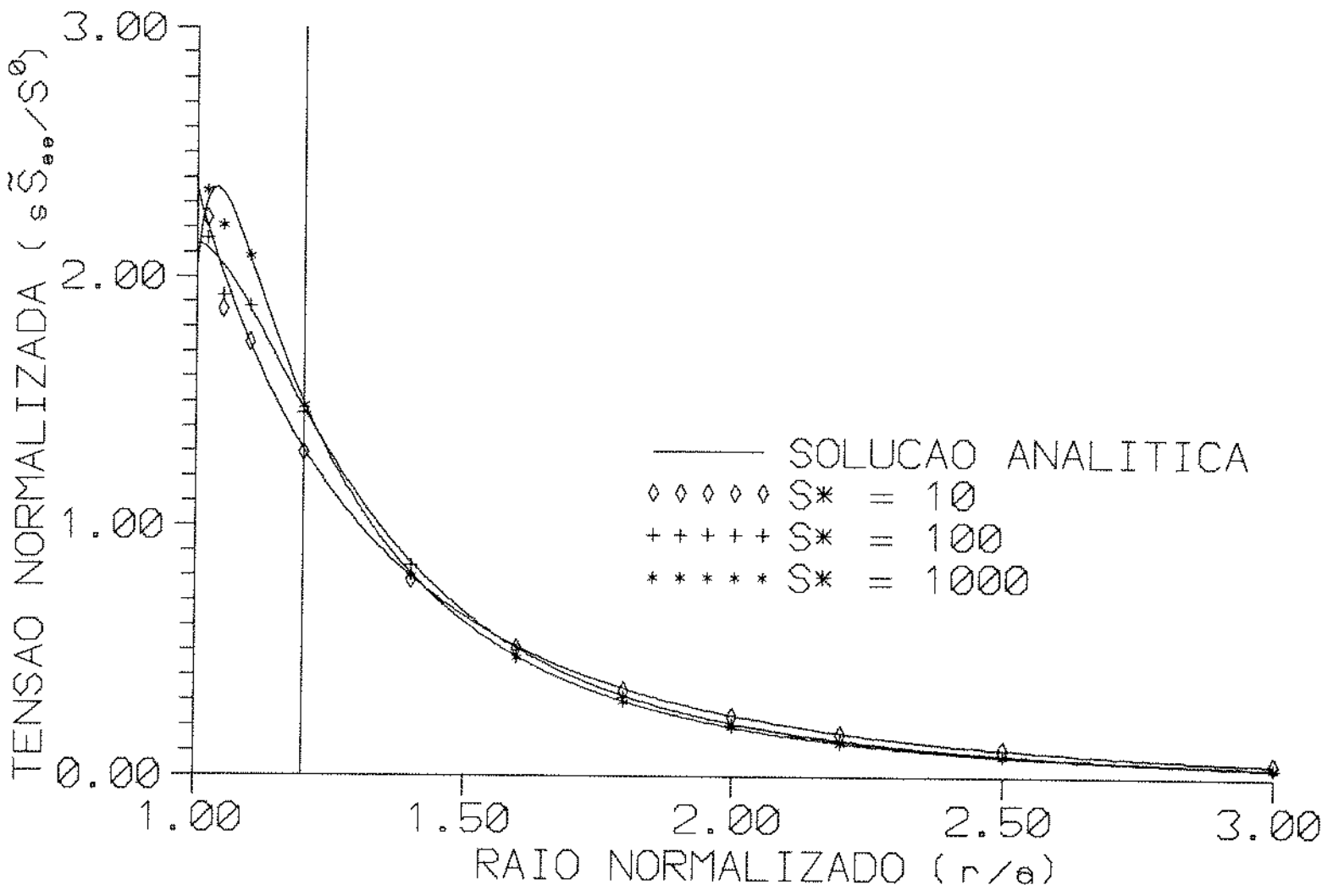
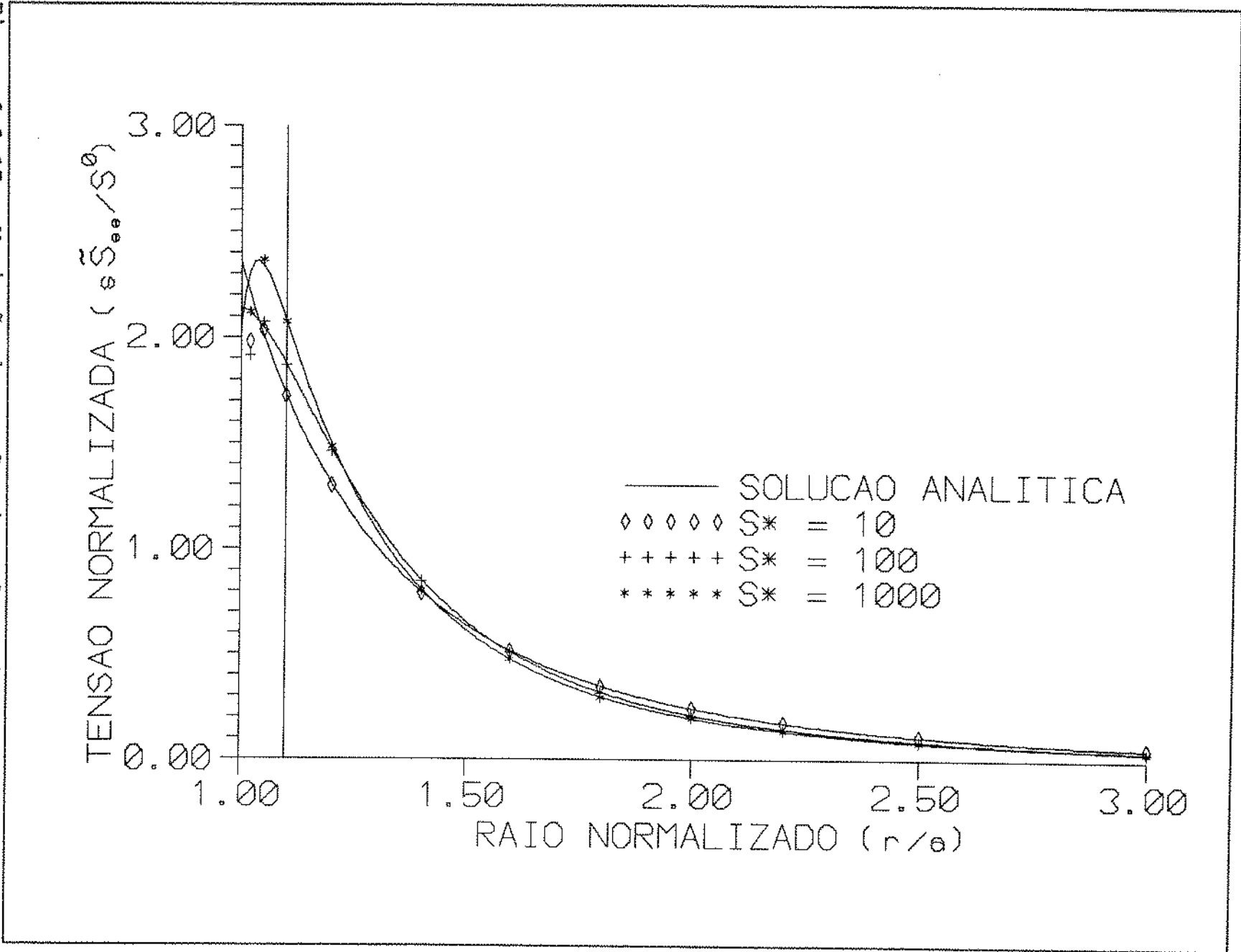


Figura 6.3.14 - Variação da tensão circunferencial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 32 elementos na discretização do contorno.

Figura 6.3.15 - Variação da tensão circunferencial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 64 elementos na discretização do contorno.



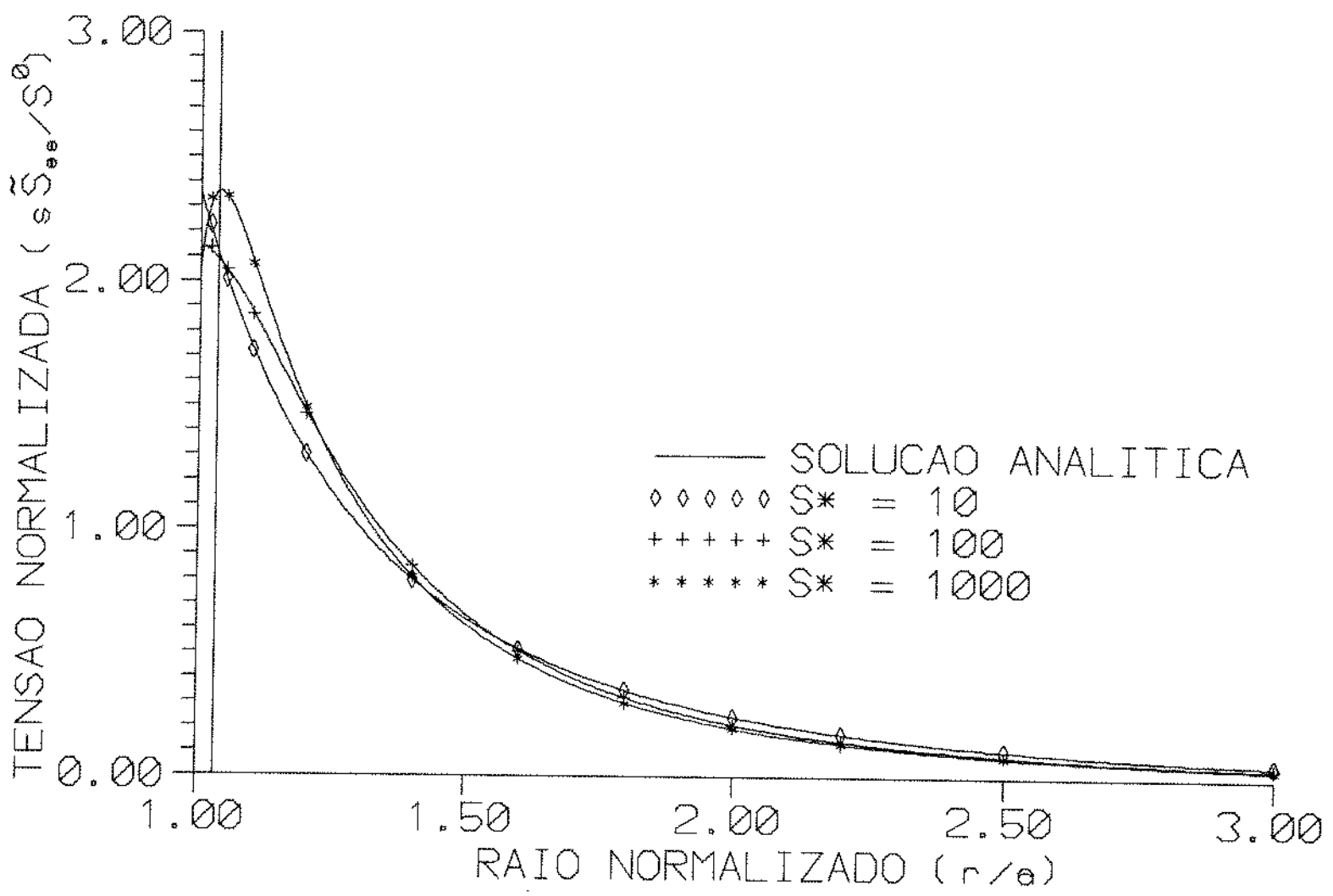
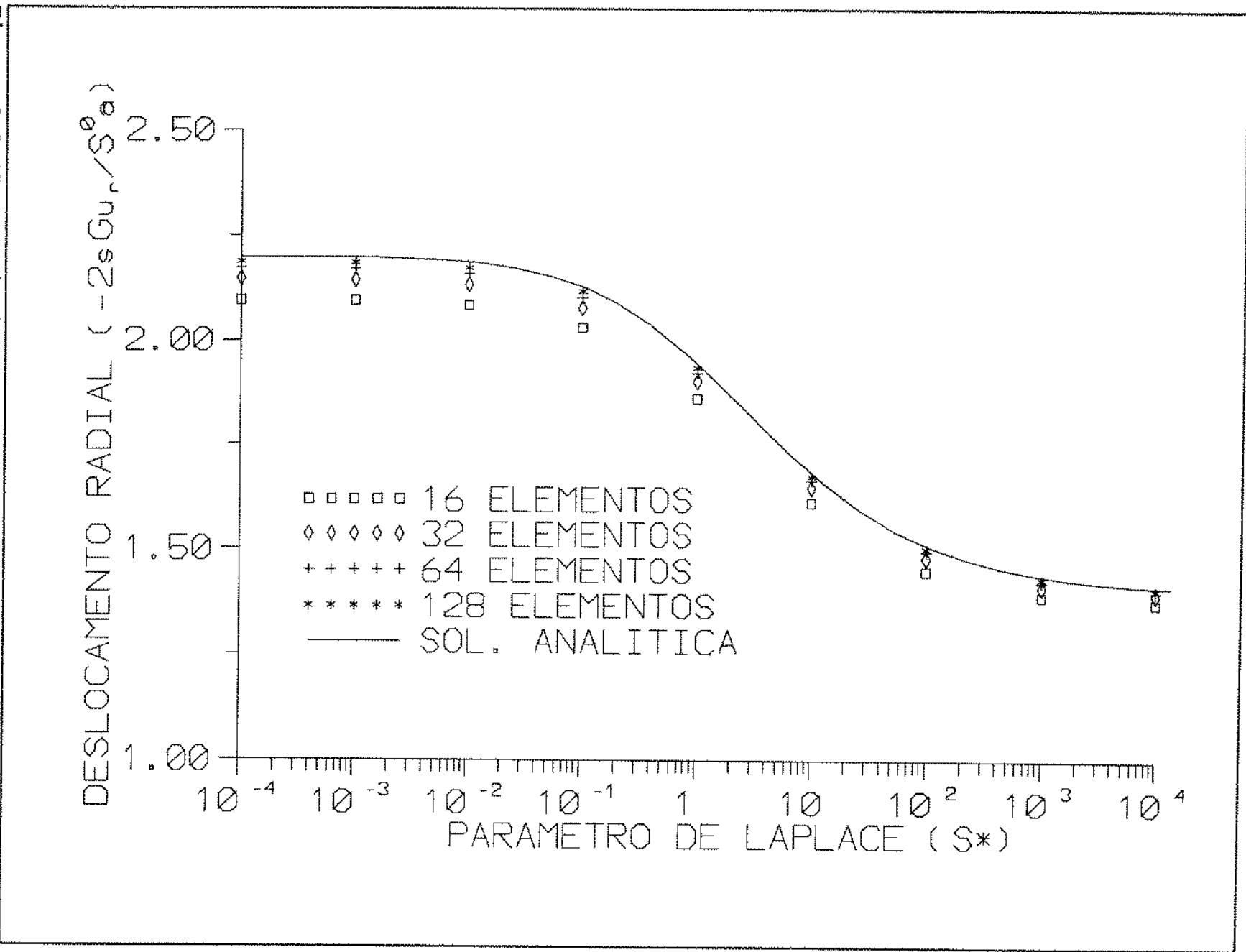


Figura 6.3.16 - Variação da tensão circunferencial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 128 elementos na discretização do contorno.

e) Variação do deslocamento radial no contorno ($r/a=1$, $\theta = 0^\circ$) com o parâmetro de Laplace

A figura 6.3.17 mostra a variação do deslocamento radial no contorno em função do parâmetro de Laplace, calculados pelo programa utilizando o MEC (dados discretos), utilizando 16, 32, 64 e 128 elementos para discretizar o contorno, em comparação com os resultados analíticos (linha contínua). O deslocamento no contorno é obtido quando se soluciona o problema na fronteira (quando se resolve o sistema de equações 4.4.23). Neste gráfico também é possível observar o aumento da precisão dos resultados numéricos, em relação aos analíticos, quando se aumenta a discretização do contorno, principalmente para pequenos valores do parâmetro de Laplace. Observe-se, também, a enorme faixa de valores do parâmetro de Laplace normalizado (de 10^{-4} a 10^{+4}) para os quais foram obtidos bons resultados.

Figura 6.3.17 - Variação do deslocamento radial no contorno ($r = a$, $\theta = 0^\circ$) com o parâmetro de Laplace.



f) Variação da pressão de poro ao longo do 1º quadrante, em $r/a = 1.15$, com o parâmetro de Laplace

As figuras 6.3.18 a 6.3.21 mostram a variação da pressão de poros ao longo do primeiro quadrante ($\theta = 0^\circ, 22.5^\circ, 45^\circ, 67.5^\circ$ e 90°) em função do parâmetro de Laplace, em $r/a = 1.15$. Os dados discretos representam os valores obtidos pelo programa utilizando o MEC, utilizando 16, 32, 64 e 128 elementos na discretização do contorno. As linhas contínuas representam as soluções analíticas. A distância foi escolhida em $r/a = 1.15$ porque, segundo os gráficos das figuras 6.3.01 a 6.3.04, é nesta faixa onde estão as maiores variações da pressão de poros com o parâmetro de Laplace. Neste gráfico também é possível observar o aumento da precisão dos resultados numéricos, em relação aos analíticos, quando se aumenta a discretização do contorno, principalmente para grandes valores do parâmetro de Laplace. Observe-se, também, a enorme faixa de valores do parâmetro de Laplace normalizado (de 10^{-4} a 10^{+4}) para os quais foram obtidos bons resultados. Note-se a simetria dos resultados em relação a bissetriz do primeiro quadrante (45°). Este é um resultado esperado, uma vez que o carregamento é simétrico (com sinais invertidos) em relação a esse eixo. Na própria bissetriz, esse carregamento não produz qualquer efeito, o que pode ser notado no gráfico.

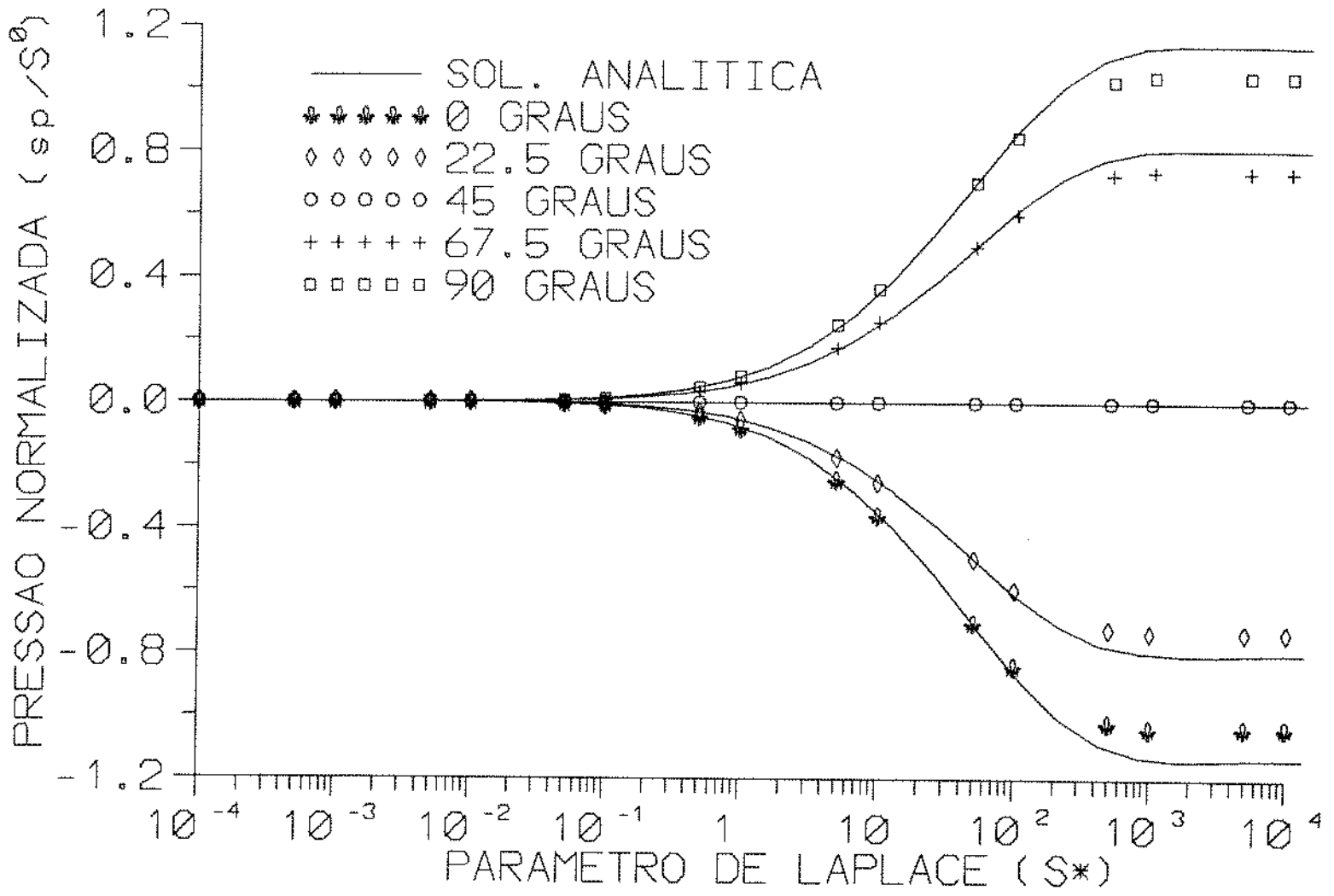


Figura 6.3.18 - Variação da pressão de poro no primeiro quadrante, em $r/a = 1.15$, utilizando 16 elementos na discretização do contorno.

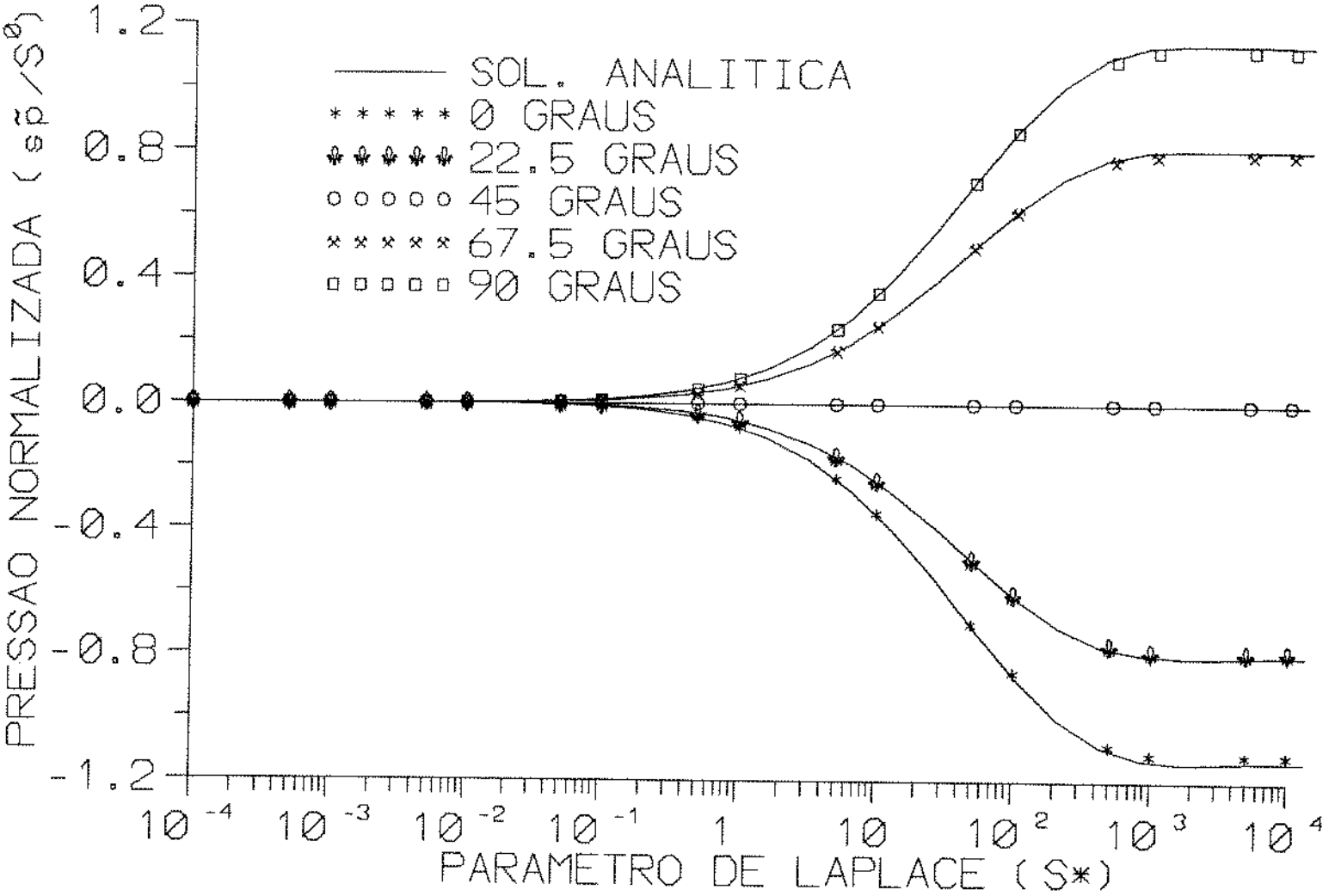


Figura 6.3.19 - Variação da pressão de poro no primeiro quadrante, em $r/a = 1.15$, utilizando 32 elementos na discretização do contorno.

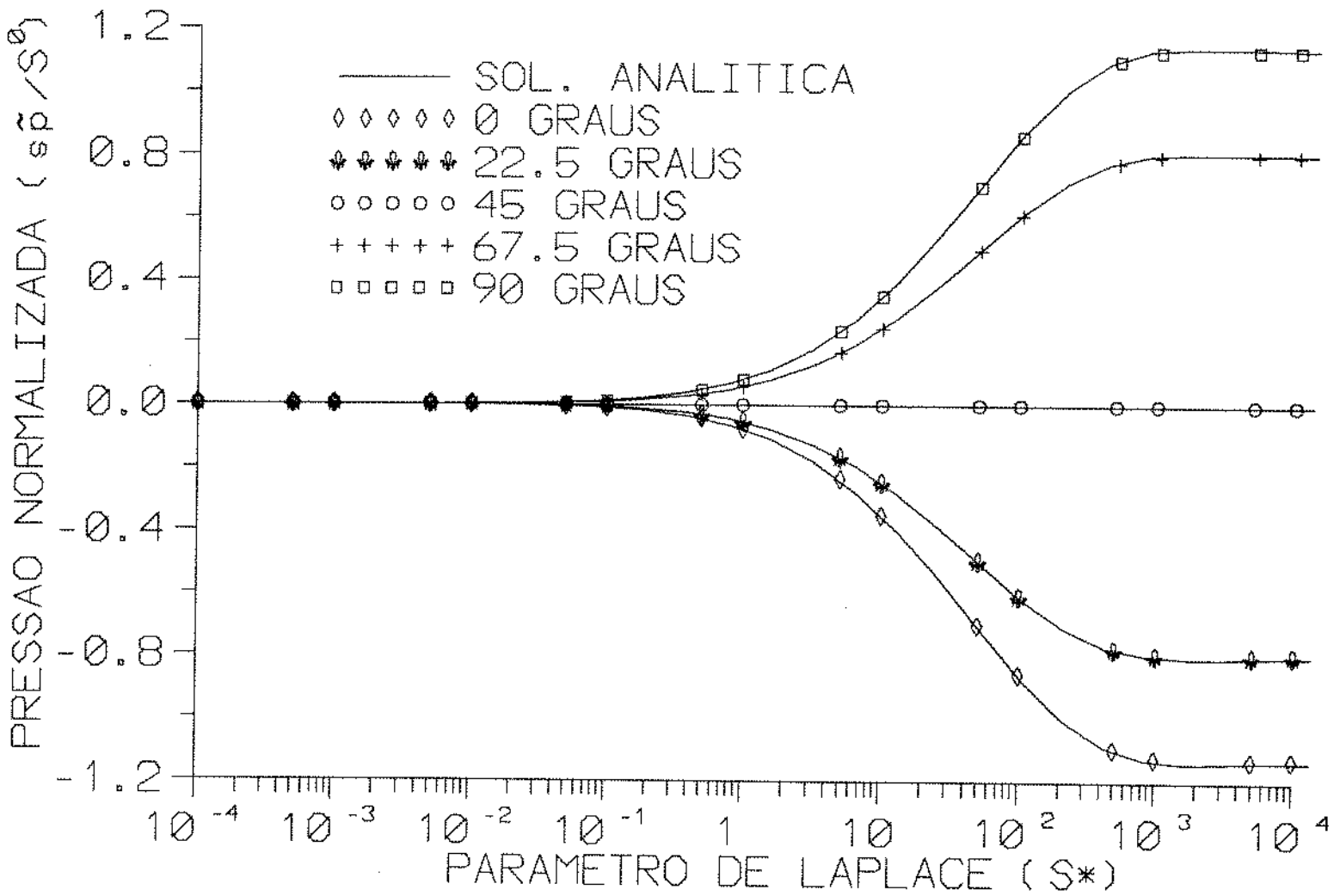


Figura 6.3.20 - Variação da pressão de poro no primeiro quadrante, em $r/a = 1.15$, utilizando 64 elementos na discretização do contorno.

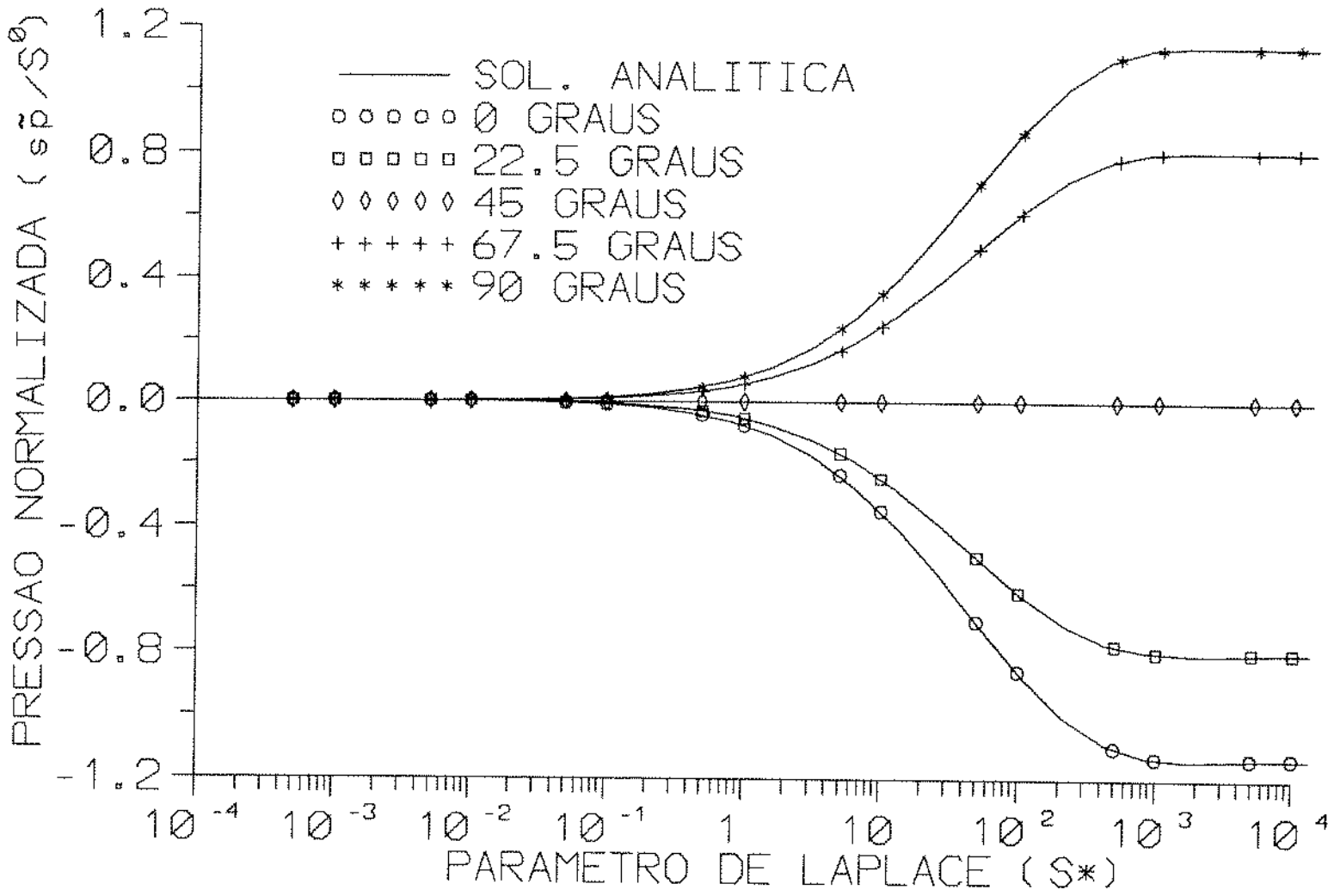


Figura 6.3.21 - Variação da pressão de poro no primeiro quadrante, em $r/a = 1.15$, utilizando 128 elementos na discretização do contorno.

6.4 - Soluções no domínio do tempo

As soluções "analíticas" desse problema, no campo do tempo, são obtidas por inversão numérica das soluções analíticas no campo de Laplace (equações 6.3.01 a 6.3.06), utilizando o método Stehfest com 10 termos. Nos gráficos, essas soluções são plotadas em linhas contínuas e legendadas como soluções analíticas.

Mais uma vez as variáveis foram adimensionalizadas, para efeito de generalização de unidades. A normalização do tempo é feita por $T^* = c.t/a^2$.

Na ref. 07 poderão ser encontrados os gráficos com as inversões numéricas das soluções analíticas das funções que serão plotadas a seguir.

a) Variação da pressão de poros ao longo do eixo x

As figuras 6.4.01 a 6.4.04 mostram o comportamento da pressão de poros ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), com o passar do tempo (tempo normalizado variando de 10^{-4} a 10^0). Para tempos normalizados superiores a 1, praticamente não haverá variação da pressão de poros ao longo do eixo x, e o gráfico tenderia a zero. Com relação a precisão dos resultados, pode-se observar o mesmo comportamento que foi obtido no campo de Laplace: o aumento da precisão com o aumento da discretização, principalmente para pequenos valores do tempo (que corresponde a altos valores do parâmetro de Laplace). A inversão numérica do campo de Laplace para o domínio do tempo não parece ter introduzido erros significativos.

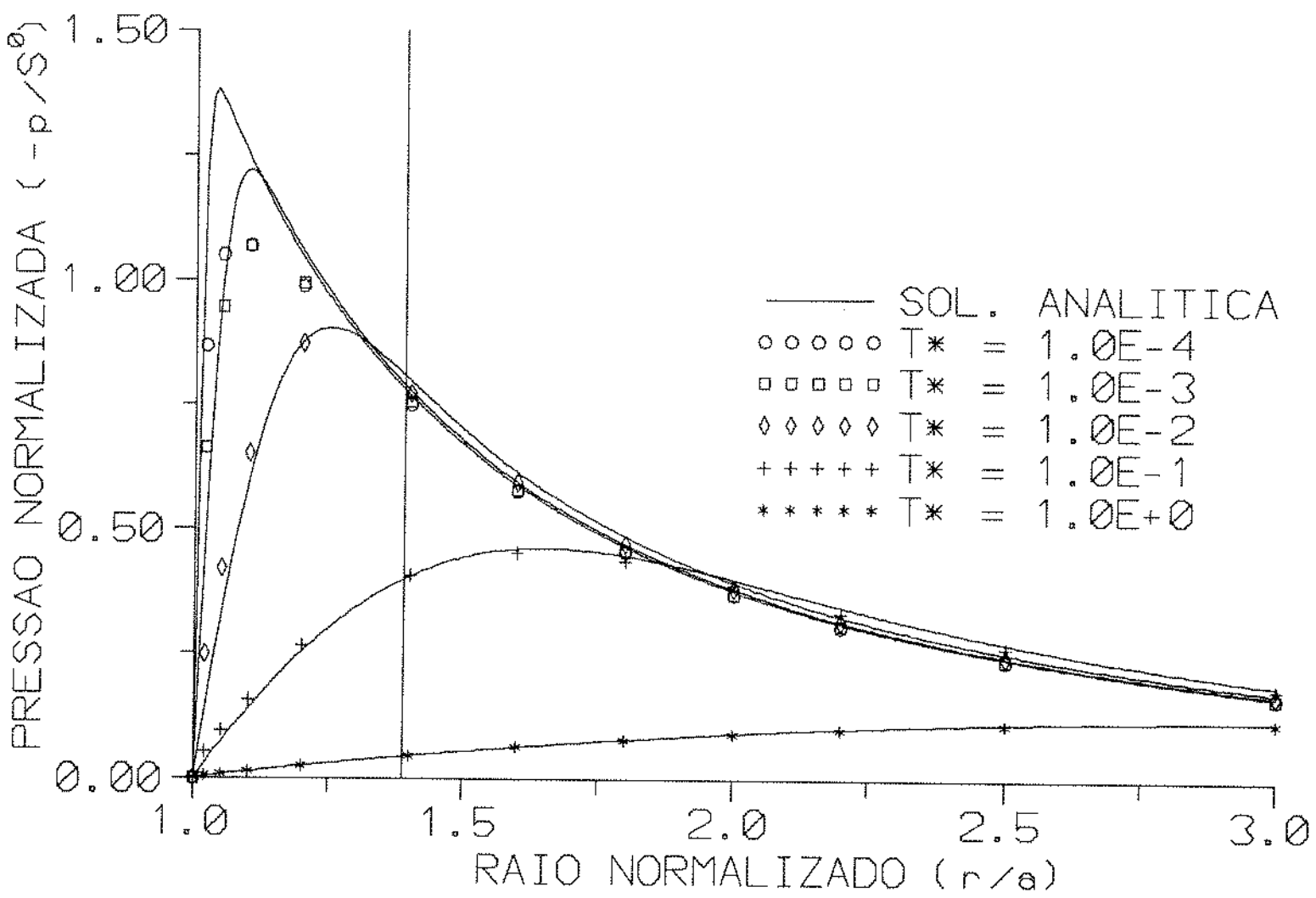


Figura 6.4.01 - Variação da pressão de poros ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 16 elementos na discretização do contorno.

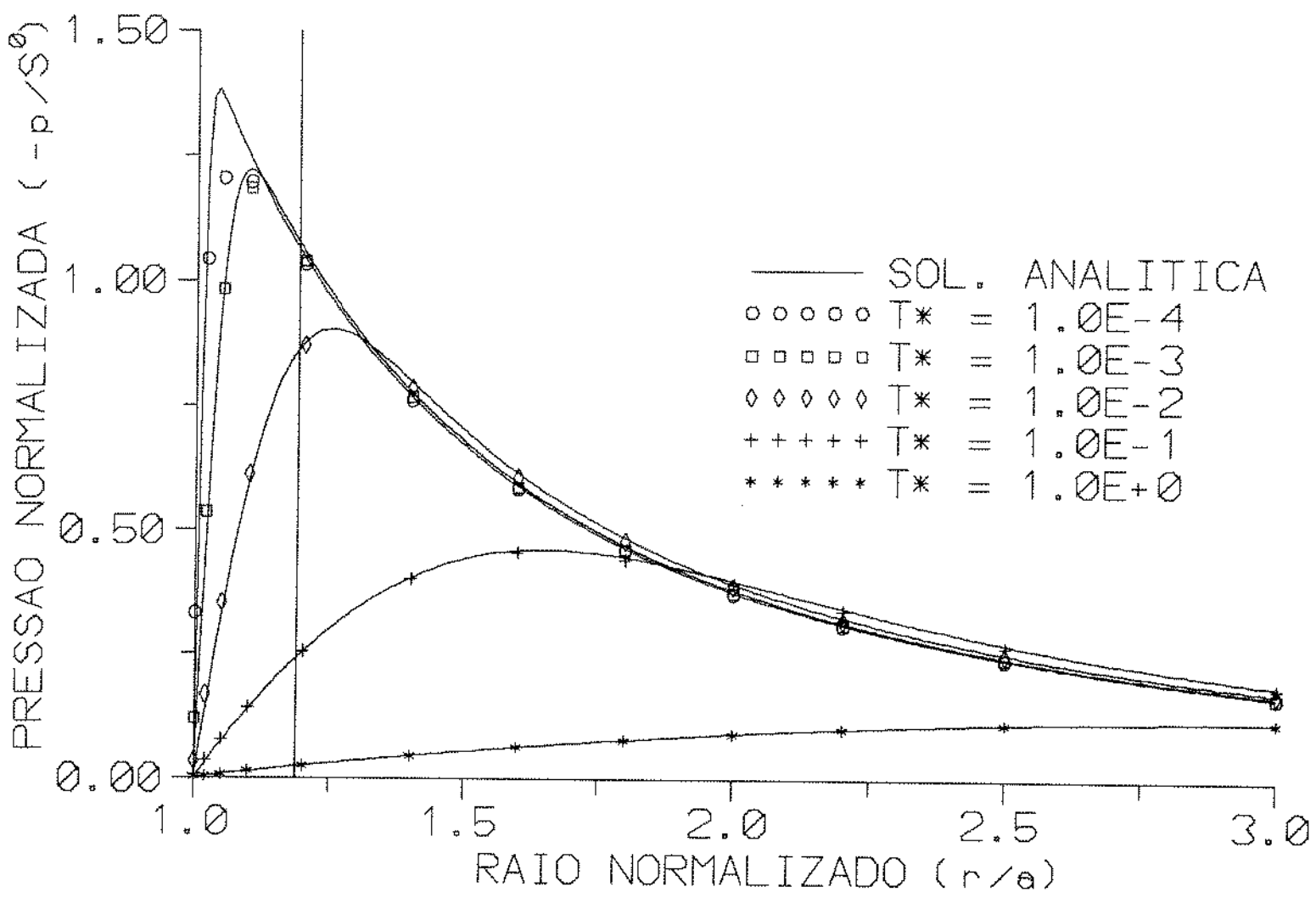


Figura 6.4.02 - Variação da pressão de poros ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 32 elementos na discretização do contorno.

Figura 6.4.03 - Variação da pressão de poros ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 64 elementos na discretização do contorno.

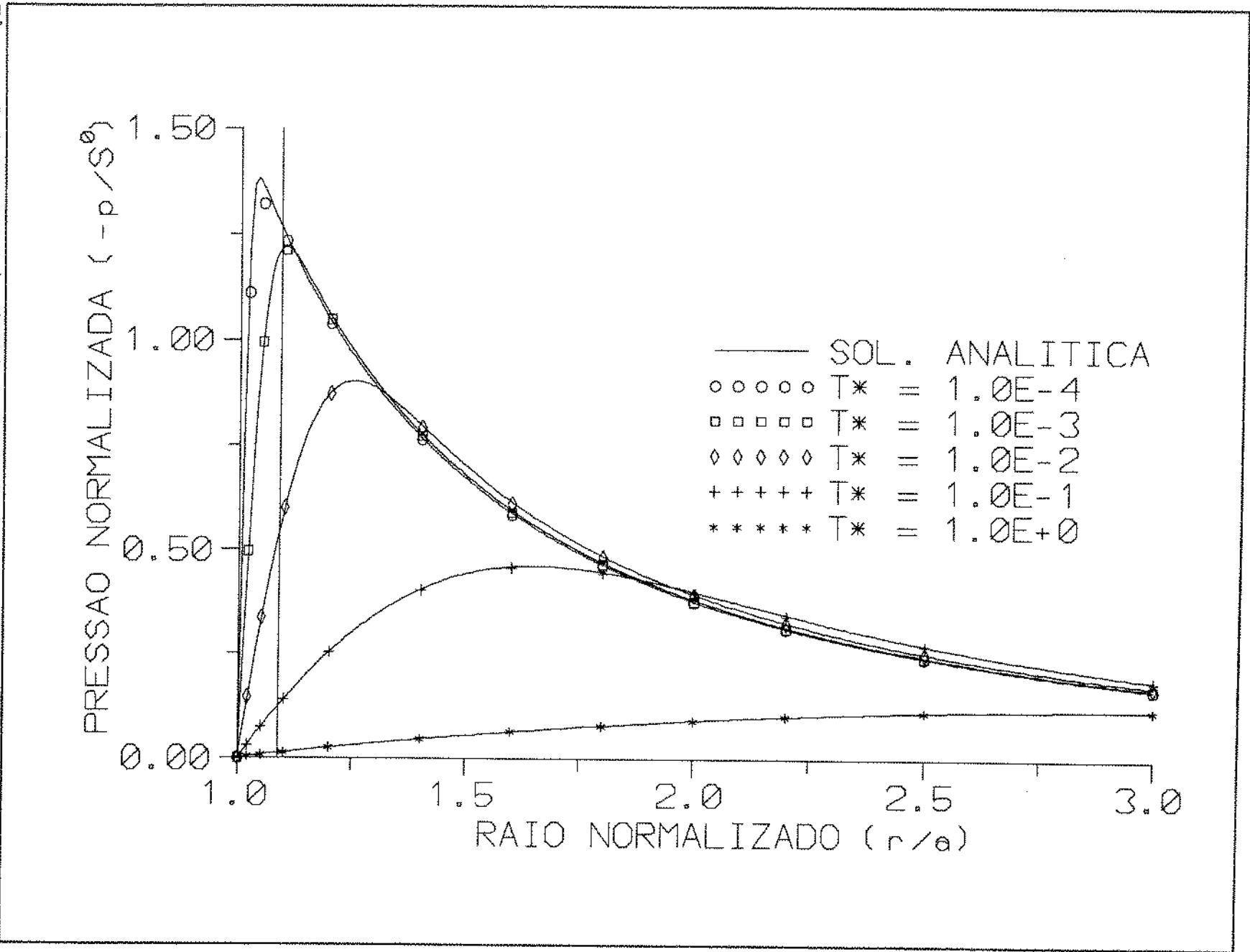
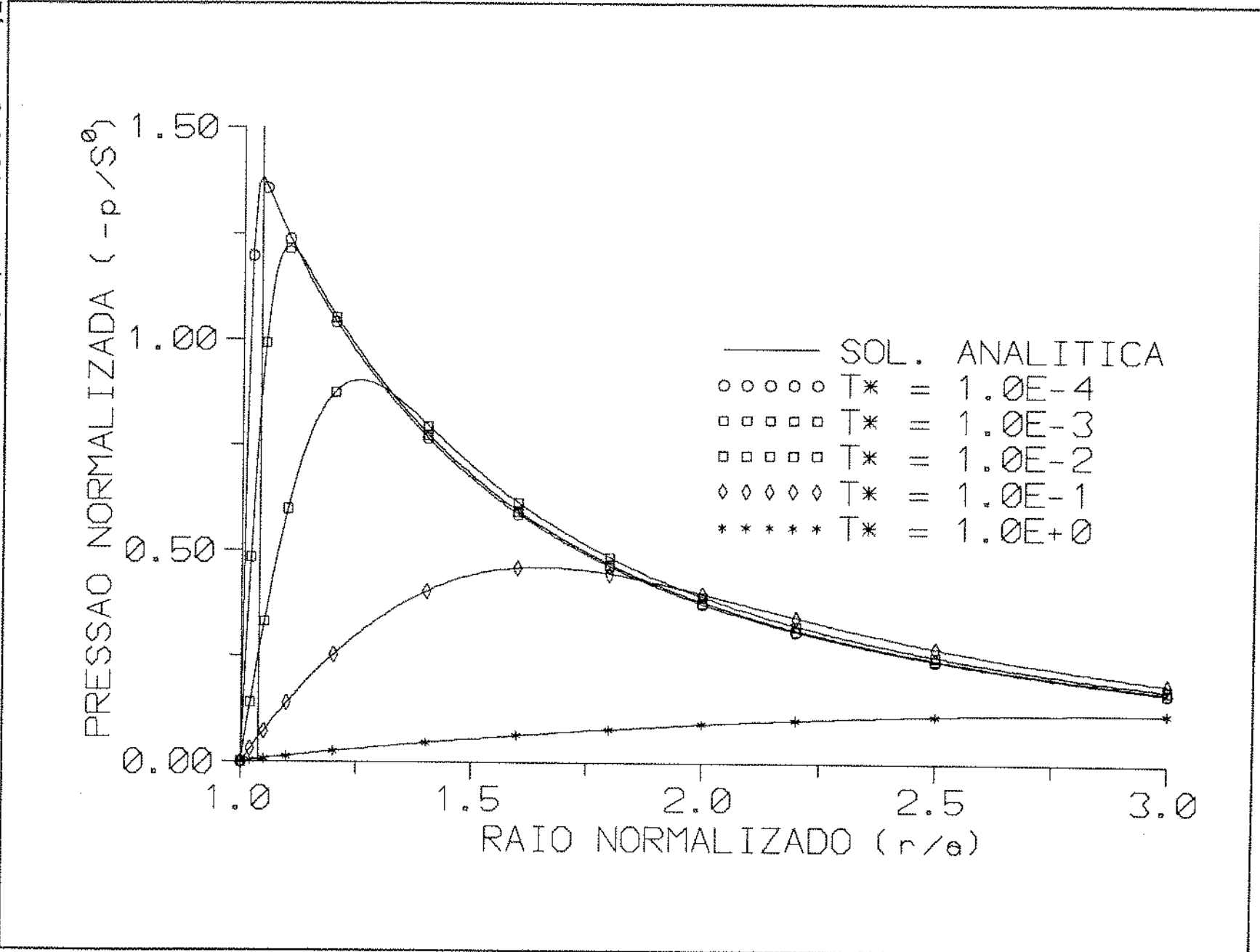


Figura 6.4.04 - Variação da pressão de poros ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 128 elementos na discretização do contorno.

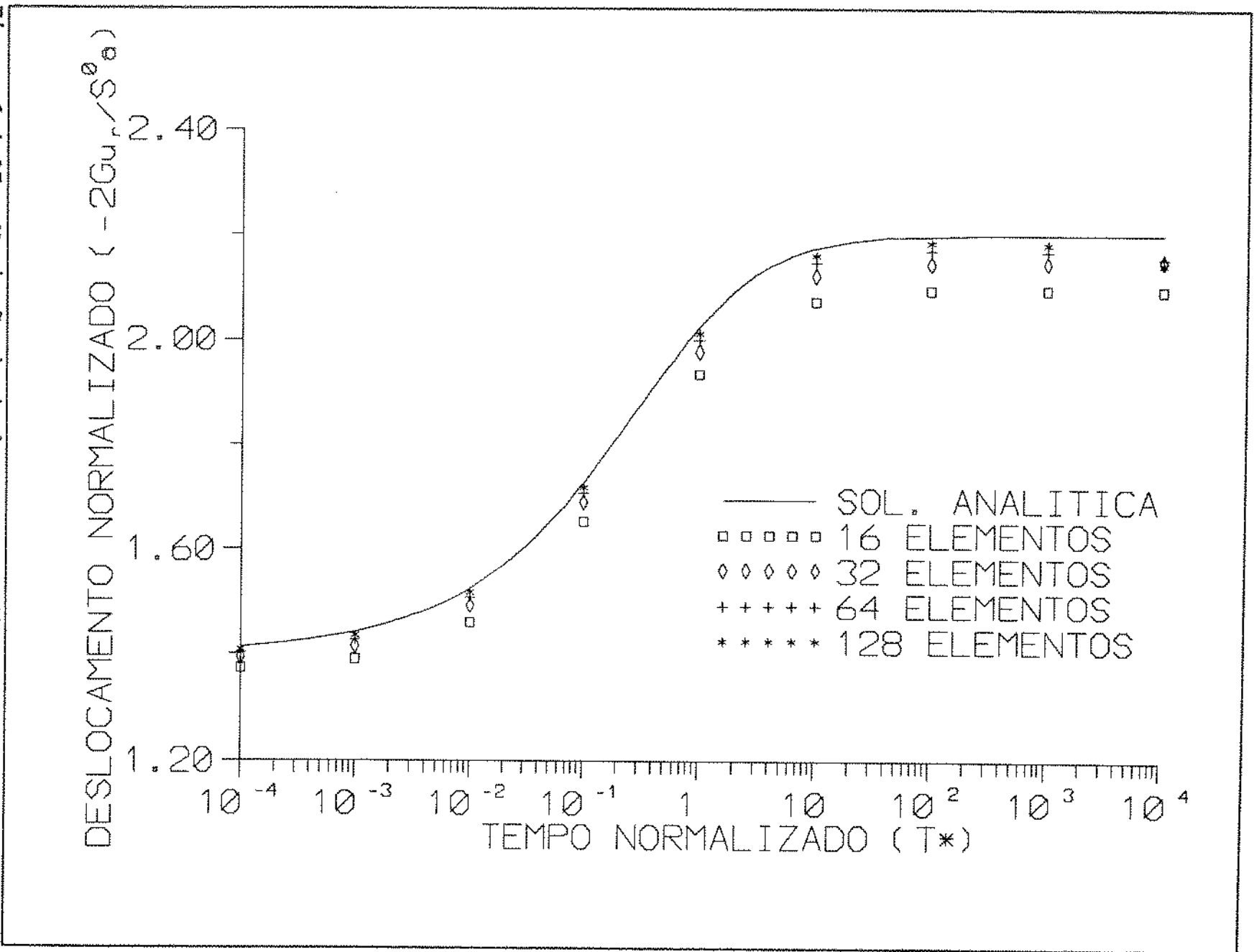


b) Deslocamento radial no contorno

A figura 6.4.05 mostra o comportamento do deslocamento radial no contorno ($r/a = 1$, $\theta = 0'$) com o passar do tempo, utilizando 16, 32, 64 e 128 elementos para discretizar o contorno.

Pode-se notar que a precisão dos resultados obtidos, em comparação com a inversão numérica da solução analítica, melhorou com o aumento da discretização. No entanto, para altos valores do tempo (tempo normalizado acima de 10^3), quando já se havia obtido uma estabilização dessa variável, começa a haver uma perda dessa melhora na precisão. Como esse comportamento não foi observado no campo de Laplace (vide figura 6.3.22), há uma possibilidade dessa anomalia ter sido introduzida pelo processo de inversão numérica. Pode-se utilizar um maior número de termos (acima dos 10 aqui utilizados) para fazer essa inversão pelo método Stehfest, e analisar se há melhora de resultados. Esse estudo, no entanto, não será feito neste trabalho.

Figura 6.4.05 - Variação do deslocamento radial no contorno ($\theta = 0^\circ$) em função do tempo, com diversas discretizações do contorno.



c) Variação da tensão circunferencial ao longo do eixo x

As figuras 6.4.06 a 6.4.09 mostram o comportamento da tensão circunferencial ao longo do eixo x , com o passar do tempo.

Essa é uma das mais importantes variáveis a serem consideradas na simulação do fraturamento hidráulico. Em outros tipos de problemas (estabilidade de poços, por exemplo) também é importante que se obtenha o valor da tensão circunferencial no contorno. Como já foi dito anteriormente, na análise dessa variável no campo de Laplace, não há como obter bons resultados da tensão circunferencial na fronteira, apenas pode-se obter bons valores próximo ao contorno à medida em que se aumenta a discretização. Existem, no entanto, métodos alternativos que, utilizando variáveis que podem ser obtidas com boa precisão no contorno, levam aos valores da tensão nesses pontos (ref. 01). Esse processo, no entanto, não foi utilizado no presente trabalho.

Note-se os bons resultados obtidos para distâncias em relação ao contorno superiores ao comprimento de um elemento; poder-se-ia dizer mais: a distâncias superiores à metade do comprimento de um elemento.

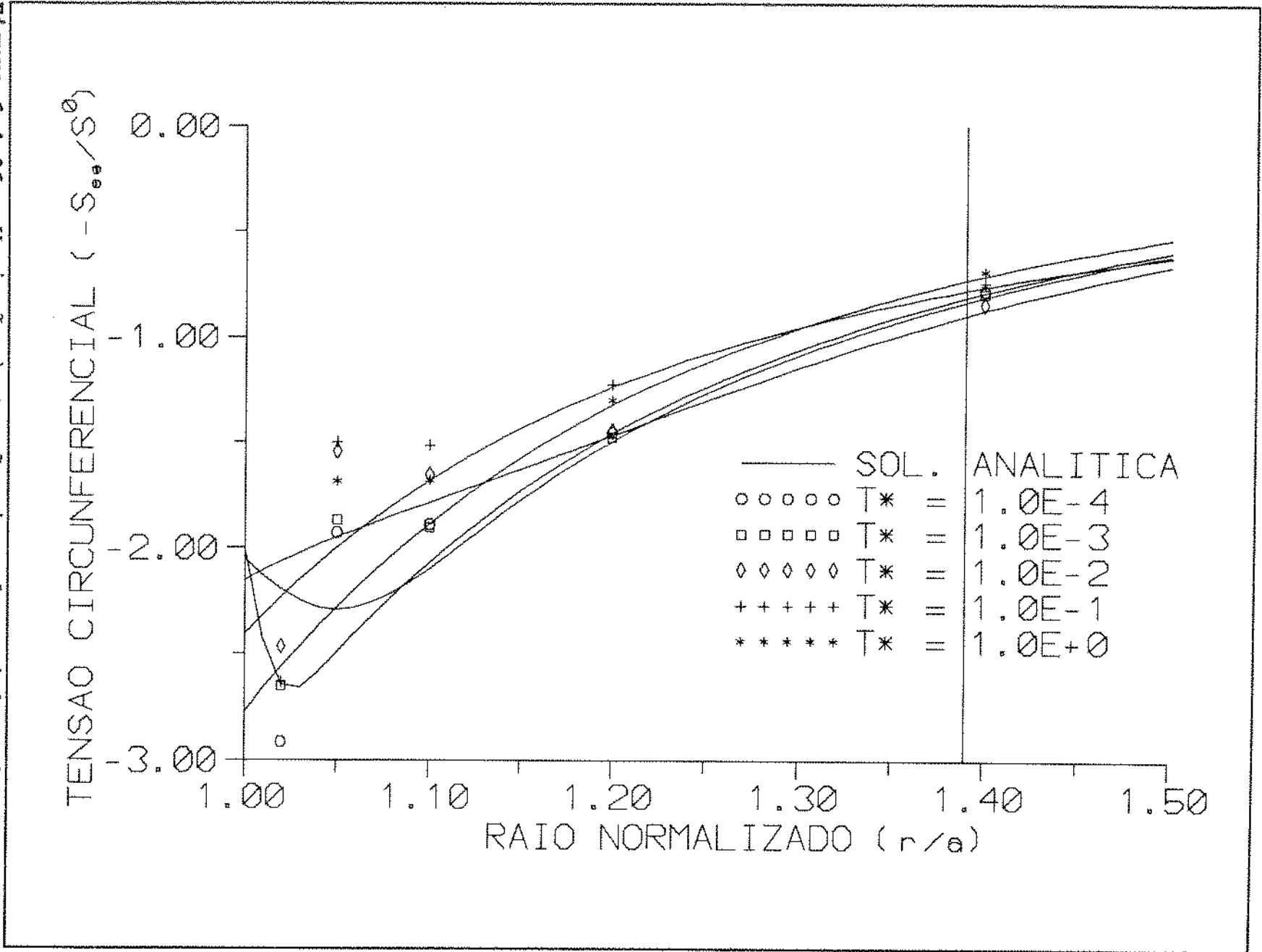


Figura 6.4.06 - Variação da tensão circunferencial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 16 elementos na discretização do contorno.

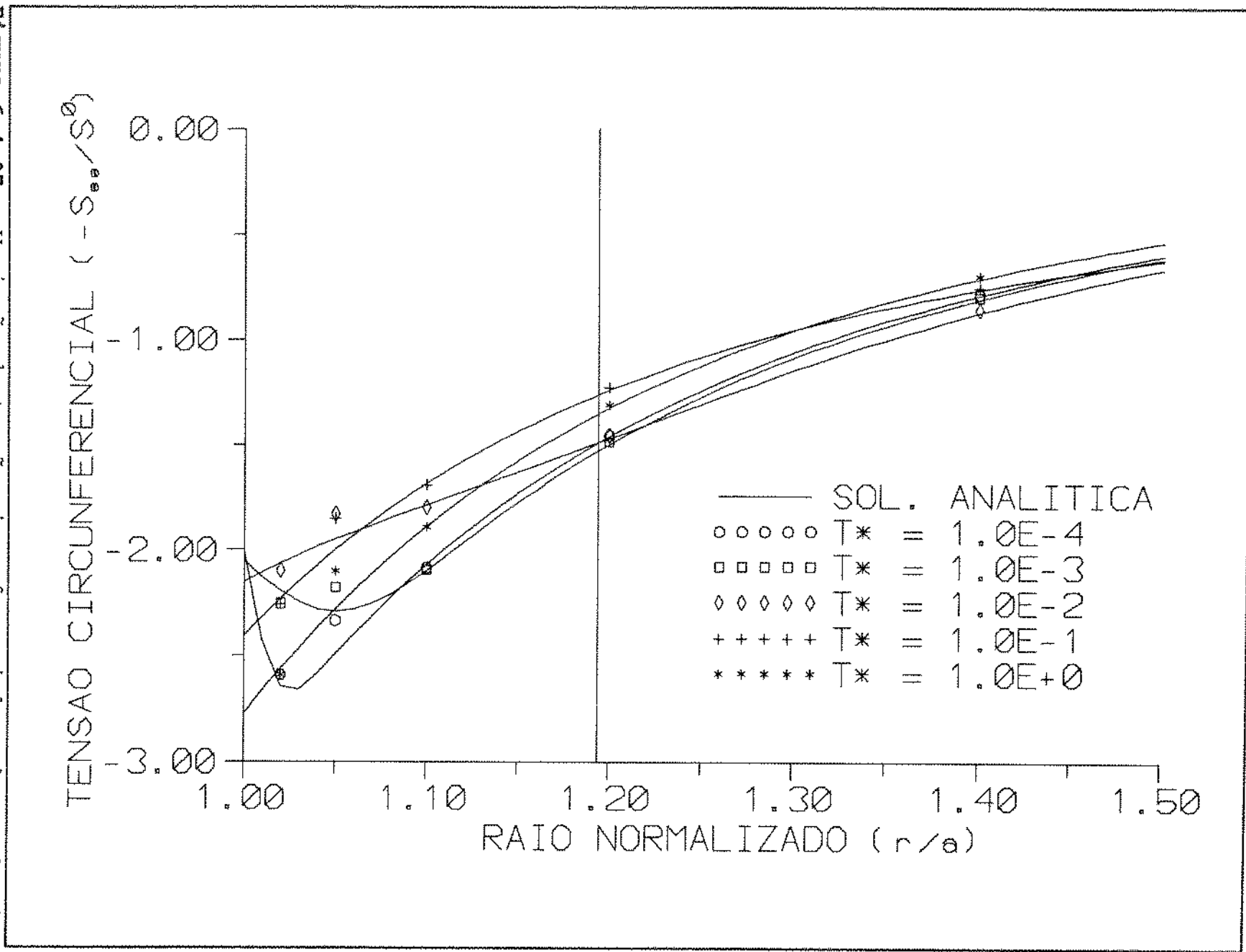


Figura 6.4.07 - Variação da tensão circunferencial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 32 elementos na discretização do contorno.

Figura 6.4.08 - Variação da tensão circunferencial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 64 elementos na discretização do contorno.

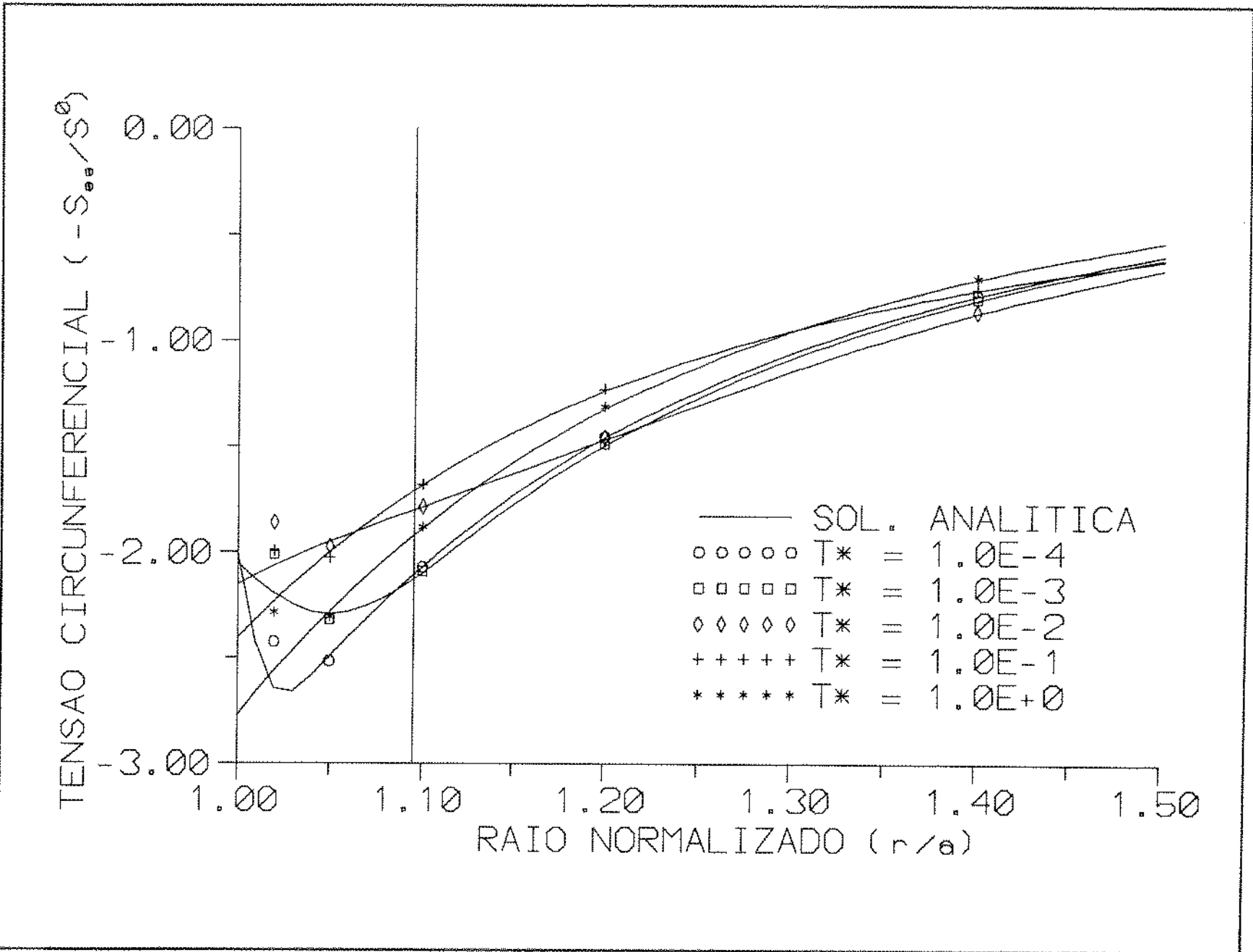
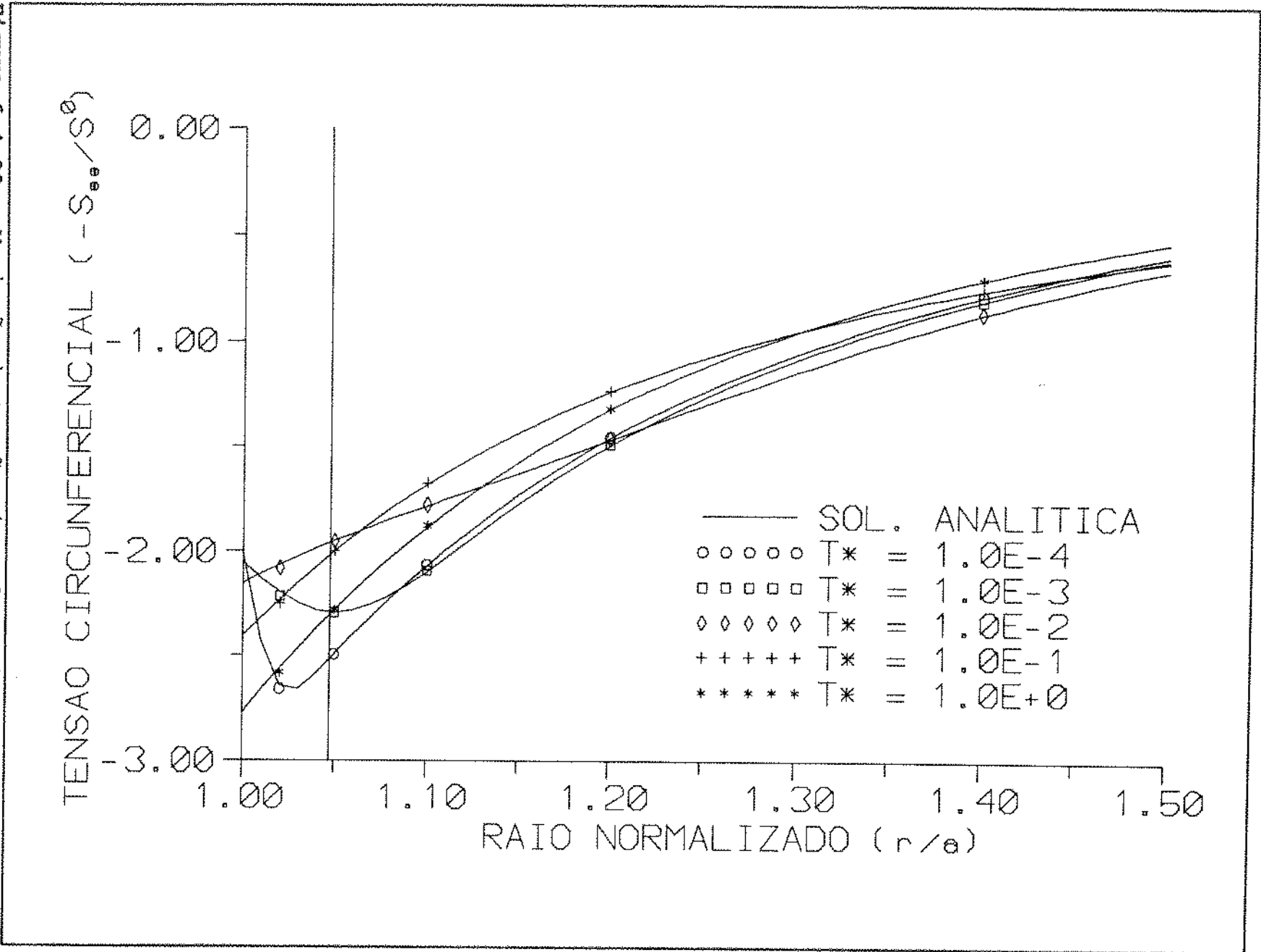


Figura 6.4.09 - Variação da tensão circunferencial ao longo do eixo x ($\theta = 0^\circ$), utilizando 128 elementos na discretização do contorno.



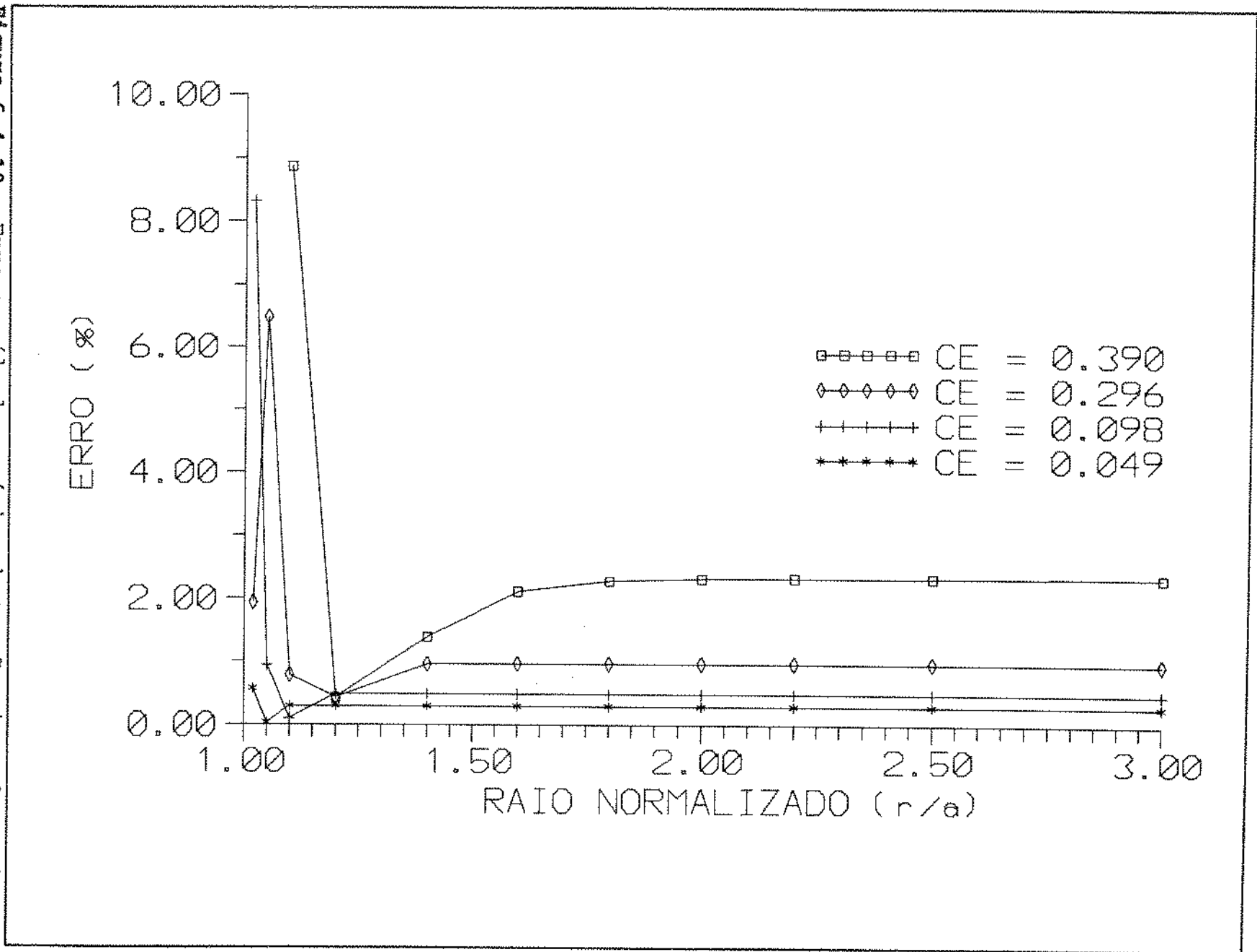
d) Erro de cálculo da tensão circunferencial ao longo do eixo x, para as diversas discretizações

As figuras 6.4.10 a 6.10.14 apresentam os gráficos com os erros obtidos pelo MEC no cálculo da variação da tensão circunferencial ao longo do eixo x (figuras 6.4.06 a 6.4.09), em relação às soluções analíticas, para as discretizações do contorno de 16, 32, 64 e 128 elementos (correspondentes a comprimentos de elementos normalizados, $CE = \text{comprimento do elemento/raio do poço}$ de 0.390, 0.296, 0.098 e 0.049 respectivamente). Esses gráfico permitem que, partido de um erro admissível, se estipule que discretização deve ser adotada.

A análise desses gráficos permite algumas conclusões:

- 1 - Exceto para pequenas distâncias do contorno, não há variação significativa do erro ao longo do eixo x.
- 2 - Para as discretizações mais grosseiras (maiores comprimentos dos elementos) o erro cresce com o aumento do tempo até, a partir de um determinado valor de tempo, se estabilize.
- 3 - Para as discretizações mais finas, o erro tende a ser constante com o tempo.
- 4 - Os resultados obtidos mostraram-se excelentes: mesmo utilizando uma discretização grosseira (16 elementos, correspondente a um comprimento de elementos normalizado de 0,39) os erros máximos não chegam a 5%, exceto para pontos próximos ao contorno. Utilizando uma discretização mais fina (128 elementos, correspondente a um comprimento de elemento normalizado de 0,049), o erro máximo gira em torno de 0,5%.
- 5 - Esses gráficos ressaltam o fato, já citado anteriormente, de que não é possível obter valores de tensão na fronteira utilizando o MEC.

Figura 6.4.10 - Erro no cálculo numérico da tensão circunferencial ao longo do eixo x, no tempo normalizado $T^* = 10^{-4}$.



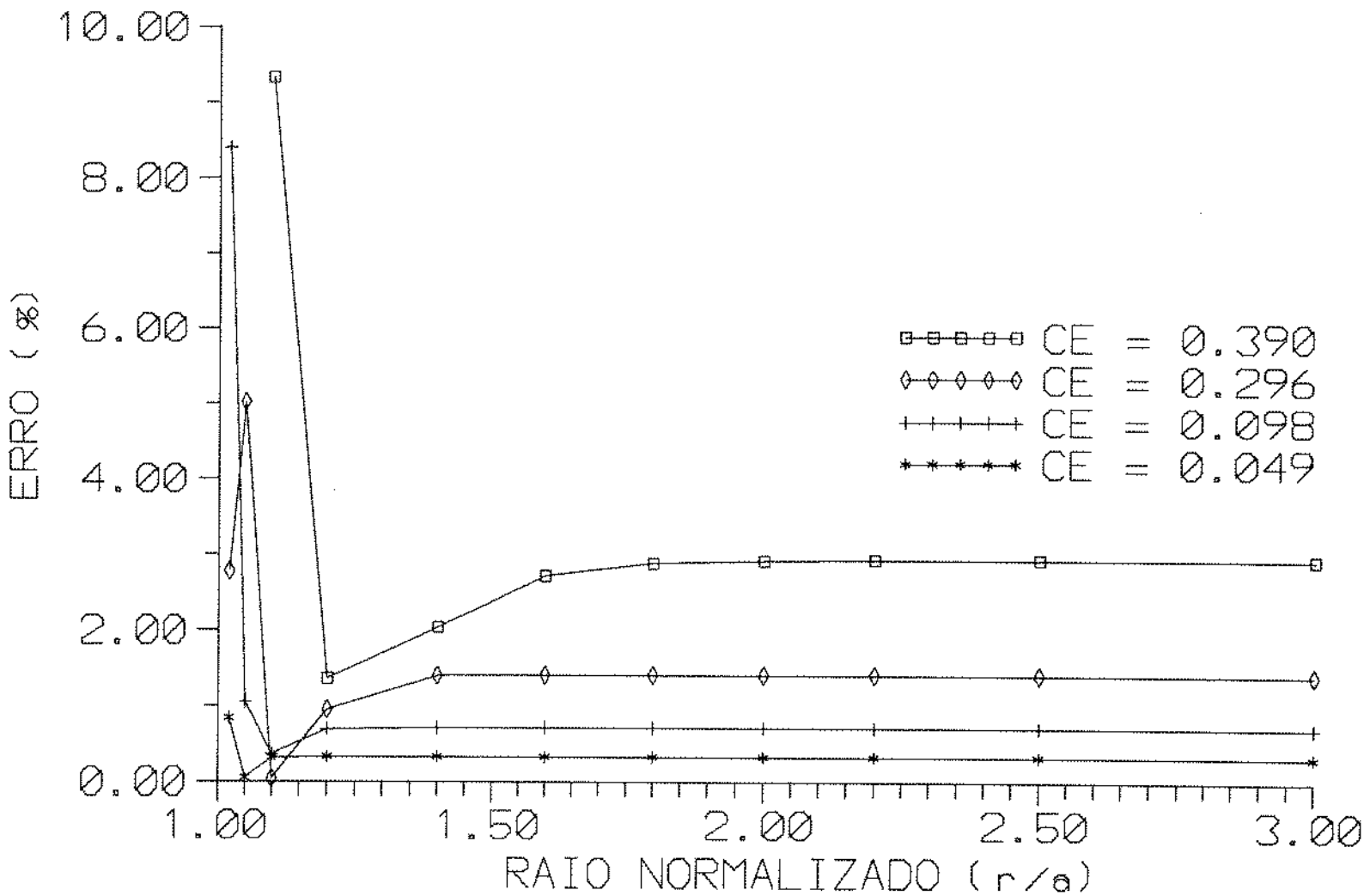


Figura 6.4.11 - Erro no cálculo numérico da tensão circunferencial ao longo do eixo x, no tempo normalizado $T^* = 10^{-3}$.

Figura 6.4.12 - Erro no cálculo numérico da tensão circunferencial ao longo do eixo x, no tempo normalizado $T^* = 10^{-2}$.

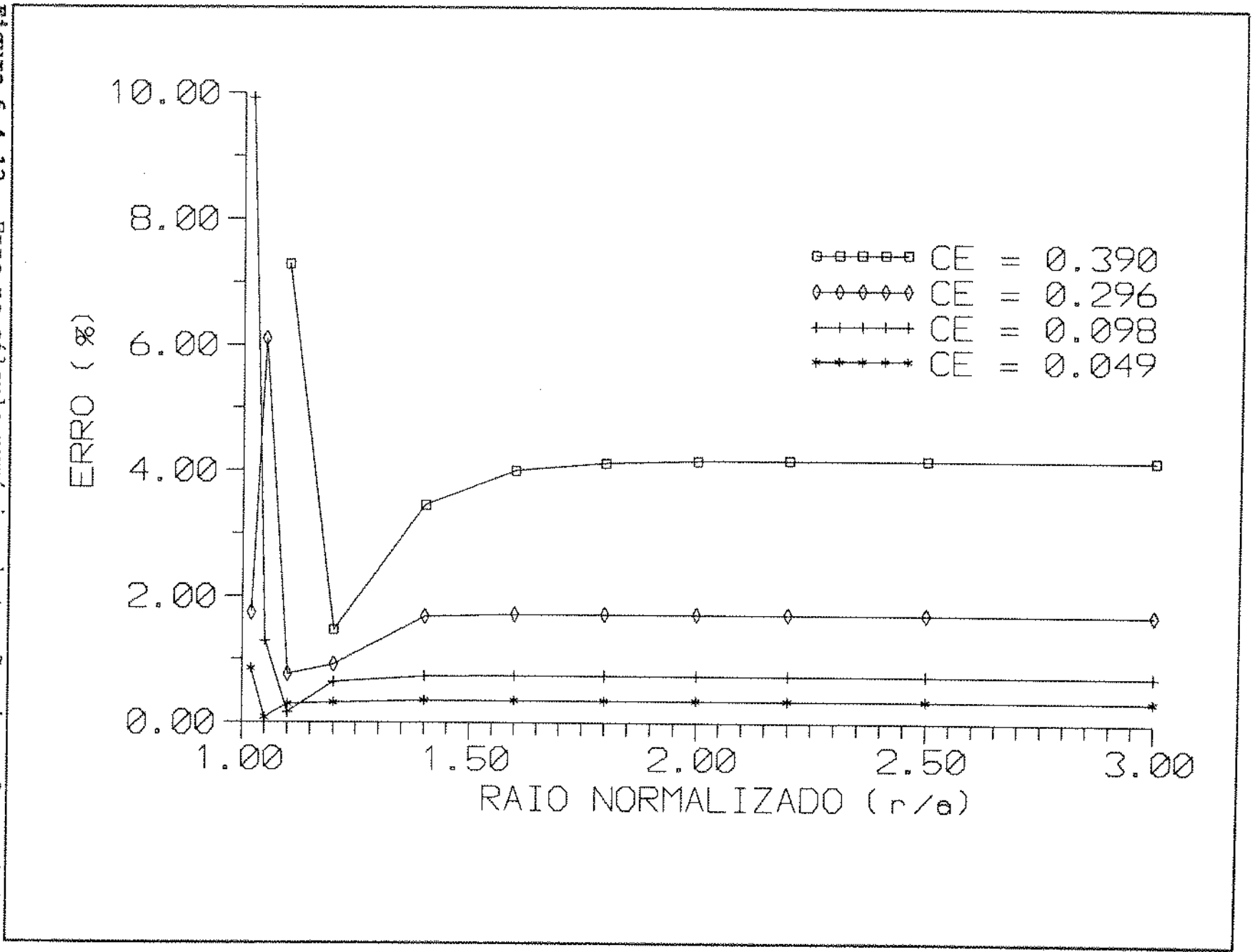


Figura 6.4.13 - Erro no cálculo numérico da tensão circunferencial ao longo do eixo x, no tempo normalizado $T^* = 10^{-1}$.

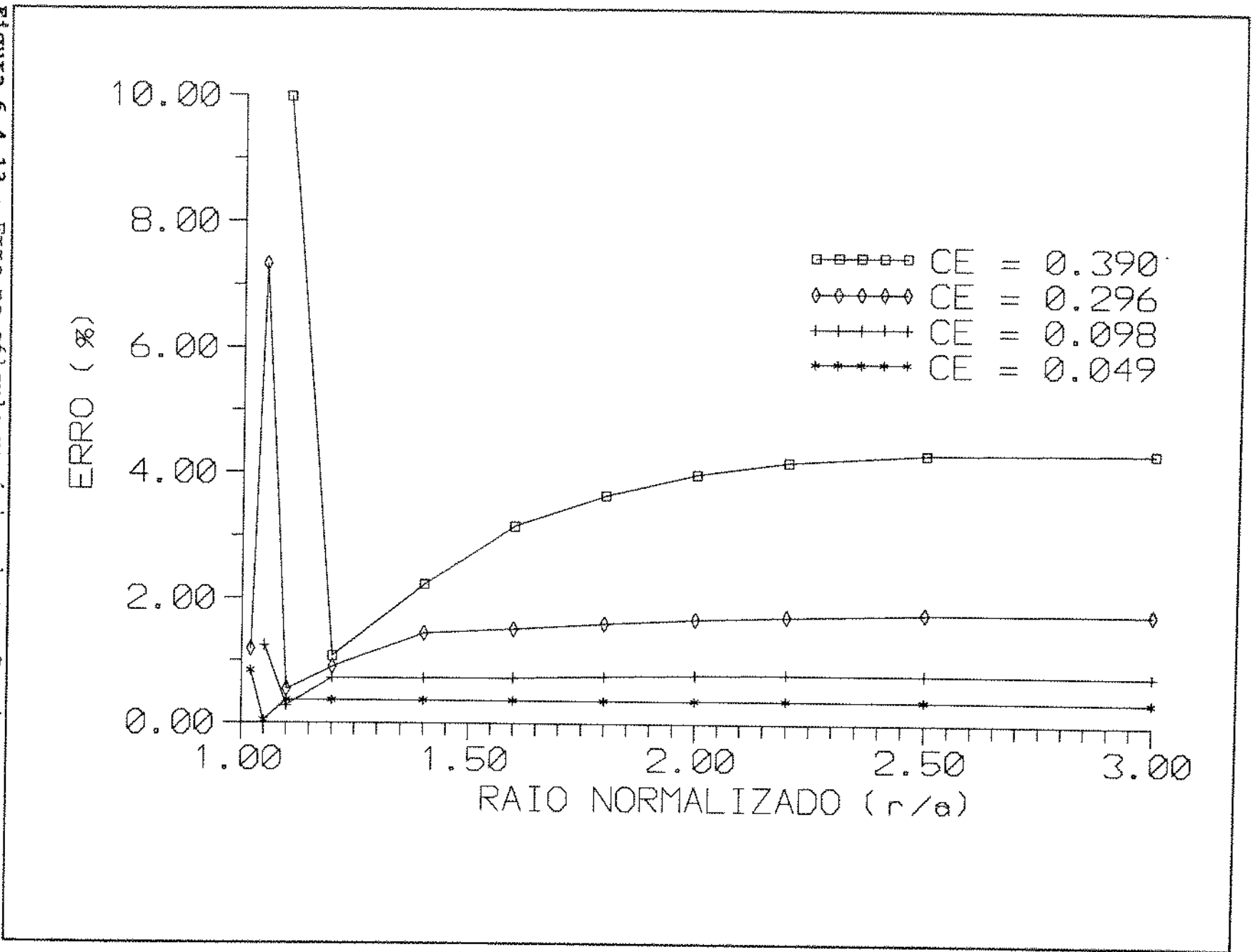
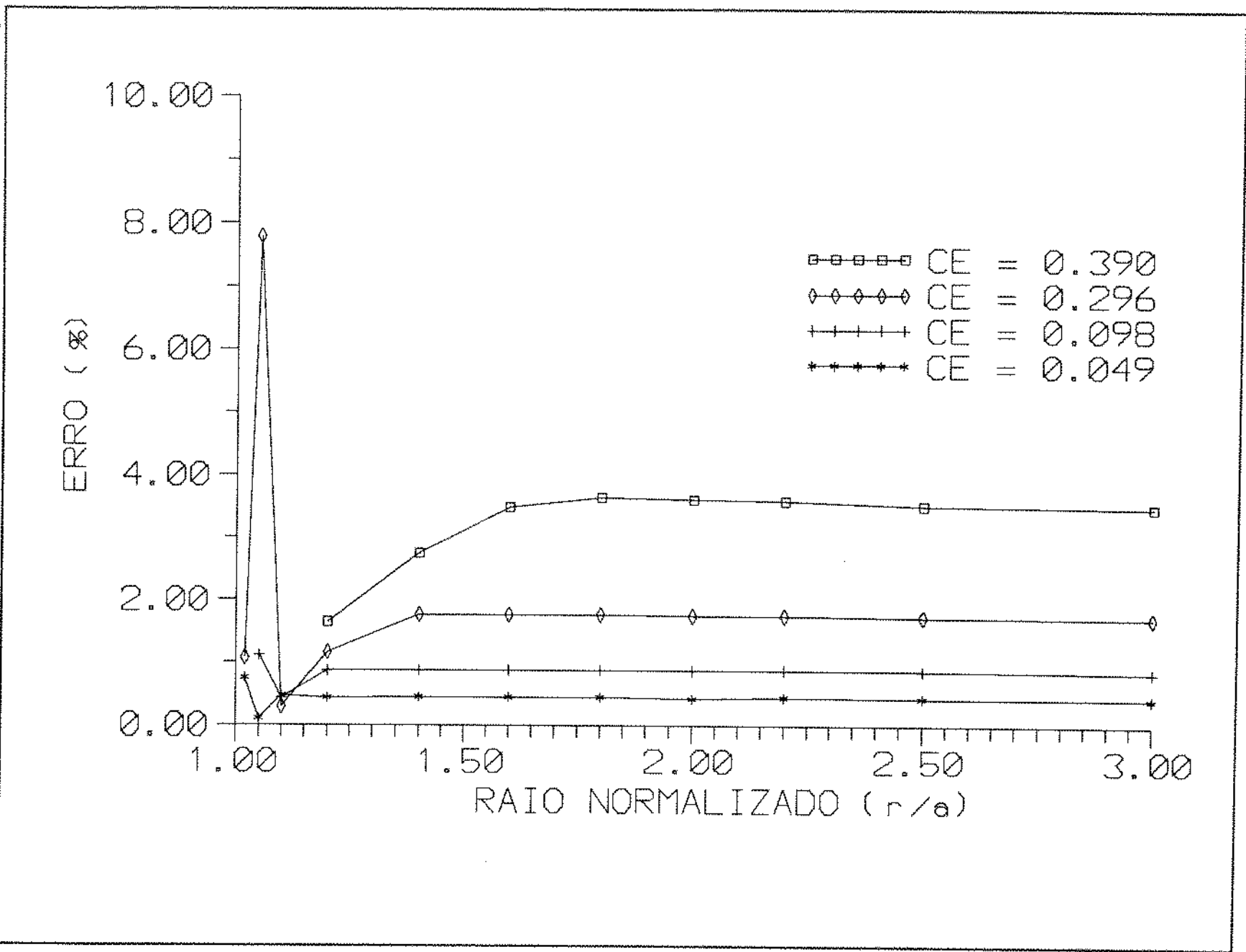


Figura 6.4.14 - Erro no cálculo numérico da tensão circunferencial ao longo do eixo x, no tempo normalizado $T^* = 10^{-6}$.



CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Foi revisada a seqüência de passos utilizada para deduzir o sistema de equações diferenciais que rege o comportamento do contínuo poroelástico linear, para corpos homogêneos e isotrópicos. Partindo das equações básicas da elasticidade, foram introduzidos os termos visando considerar os efeitos poroelásticos conforme sugerido por Biot. Com o objetivo de conferir um maior significado físico às equações, as constantes poroelásticas de Biot foram substituídas pelas de Rice e Cleary. Utilizando-se essas constantes poroelásticas, chegou-se ao sistema de equações diferenciais se estava procurando, adotando o procedimento sugerido por Cheng e Detournay.

Foi elaborado um estudo a respeito das principais constantes poroelásticas utilizadas nas equações: seus significados físicos, suas unidades de medida, o processo de obtenção destas constantes em laboratório, e faixas de valores usuais destas constantes quando se trata de rochas reservatórios de petróleo.

Foi aplicado o métodos dos elementos de contorno para solucionar a equação de Laplace, obtendo-se uma seqüência de procedimento que foi adotada na solução do sistema de equações diferenciais da poroelasticidade. Nesta ocasião, foram discutidos alguns problemas básicos do métodos dos elementos de contorno, como: caracterização das soluções fundamentais, obtenção das equações integrais, o motivo e o processo de discretização do contorno, a colocação dos pontos de aplicação no contorno e a solução do problema na fronteira, a singularidade das soluções fundamentais, e a solução do problema nos pontos internos ao domínio. Foi ainda discutido o

processo de determinação dos domínios (interiores ou exteriores), baseado no sentido de rotação da seqüência de numeração dos elementos.

Partindo de uma versão de um teorema da elasticidade linear, homogênea e isotrópica - o teorema da reciprocidade de Betti-Rayleigh, transportado para o campo de Laplace através do teorema da convolução, o sistema de equações diferenciais do contínuo poroelástico foi transformado em um conjunto de equações integrais. Fazendo um paralelo com o procedimento adotado na solução da equação de Laplace, foi utilizado o método dos elementos de contorno, com elementos constantes, para solucionar as equações integrais do contínuo poroelástico no campo de Laplace, utilizando as soluções fundamentais obtidas por Cheng e Detournay.

Foi feito um estudo detalhado para analisar a singularidade de todas as soluções fundamentais. Este estudo permitiu a determinação das funções que não possuíam singularidade, as que possuíam singularidade fraca (e poderiam ser numericamente integradas) e as que possuíam singularidade forte (e não poderiam ser integradas). Foram utilizadas considerações de "corpo rígido" para substituir o processo de integração, no caso das funções com singularidade forte.

Foi elaborado um programa para solucionar problemas da poroelasticidade acoplada no campo de Laplace, utilizando o método dos elementos de contorno com elementos constantes.

Foi utilizado o método de Stehfest, com 10 termos, para fazer a inversão numérica, e obter resultados no domínio do tempo.

Foi utilizado um problema com solução analítica conhecida no campo de Laplace - a perfuração de um poço em uma formação submetida a tensões *in situ* não isotrópicas - para avaliar o programa no campo de Laplace, utilizando quatro diferentes discretizações do contorno: 16, 32, 64 e 128 elementos. As soluções analíticas conhecidas desse problema foram invertidas numericamente (método de Stehfest com 10 termos) para avaliar os resultados obtidos pela inversão numérica

dos dados obtidos pelo programa no campo de Laplace, também utilizando o método de Stehfest com 10 termos.

Os resultados obtidos foram todos apresentados sob a forma de gráficos e tabelas, onde a precisão pode ser avaliada em função da discretização adotada.

Pode-se concluir que os resultados obtidos para a pressão de poros e o deslocamento são plenamente satisfatórios para pontos em todo o domínio (incluindo o contorno). Já o tensor tensão não pode ser obtido no contorno. O máximo que se pode fazer é utilizar uma discretização fina para chegar o mais próximo possível do contorno, e fazer uma extrapolação. Mas esse processo está sujeito a erros, que podem ser significativos. É recomendável que se utilize o processo indicado na ref. 01, segundo o qual é possível calcular as tensões circunferenciais ao longo do contorno utilizando outras variáveis (deslocamento e pressão de poro) que são calculadas no contorno.

No desenvolvimento do programa, dentro da limitação de tempo existente, a preocupação central era a verificação da validação do método e a precisão dos resultados. Não houve uma preocupação maior com a eficiência do programa em si, ou seja, em torná-lo mais rápido. Assim, foram utilizados, por exemplo, 16 pontos de Gauss na integração das funções ao longo dos elementos não singulares, e 32 pontos ao longo de cada um dos quatro sub-elementos nos quais foram divididos os elementos singulares. Esses números foram estipulados com base em sua influência nas integrais das soluções fundamentais, e não nos resultados finais emitidos pelo programa. Considerando o fato de que a precisão obtida no método de integração numérica das soluções fundamentais e dos núcleos diminui com a redução da distância entre o ponto de aplicação e o elemento ao longo do qual se está integrando e com o aumento do comprimento desse elemento, pode ser vantajoso que se trabalhe com um número variável de pontos de Gauss: quanto maior o comprimento do elemento ao longo do qual se está integrando e menor a sua distância ao ponto de aplicação, maior o número de pontos

de Gauss. O fator de divisão dos elementos singulares, apesar de não ter maior peso diretamente no tempo de processamento do programa, irá interferir na precisão dos resultados. Baseado no mesmo estudo feito para escolha do número de pontos de Gauss (precisão das integrais das soluções fundamentais), tal fator foi estipulado em 1% (cada um dos dois sub-elementos centrais, dos quatro nos quais o elemento singular foi dividido, terá um comprimento equivalente a 1% do comprimento total do elemento). Faz-se necessário um estudo para determinar a influência desse fator nos resultados finais do programa.

Um outro procedimento que pode ser adotado, agora a nível de usuário, visando agilizar a obtenção de resultados sem perder a precisão, é adotar uma discretização do contorno com elementos de comprimentos diferentes: adota-se uma malha mais fechada nas partes do contorno mais próximas dos locais onde o domínio será investigado. Isso irá reduzir o número de elementos, e os elementos maiores ficarão em locais onde não irão prejudicar os resultados.

O processo de inversão numérica do campo de Laplace para o domínio do tempo foi feito utilizando o método de Stehfest com 10 termos. Tal escolha baseou-se na ref. 16 e em uma publicação interna elaborada pelo prof. João C. B. de Campos, intitulada "Inversão Numérica de Transformadas de Laplace", segundo a qual este método apresenta excelente precisão na inversão de funções não periódicas de um modo geral. Outros métodos, como por exemplo o método de Miller e Guy ou o método de A. Papoulis, não apresentaram a mesma precisão e, além disso, requeriam a determinação de coeficientes baseados em experiências anteriores. O método Stehfest foi ainda utilizado para inversão numérica das soluções conhecidas no campo de Laplace do problema aqui utilizado para validação do programa, com excelentes resultados (ver figuras 6.1.01, 6.1.02 e 6.1.03). O único problema desse método é que, para cada ponto no eixo do tempo onde se deseja obter a solução do problema, são utilizados 10 pontos (utilizando 10 termos, que é o mínimo

recomendado na literatura) no domínio de Laplace, ou seja, o tempo de processamento será multiplicado por 10. É recomendável, portanto, que sejam simulados outros casos com solução analítica conhecida, variando esse número de termos do método de Stehfest para analisar melhor a sua influência nos resultados finais, e tentar agilizar o programa reduzindo esse número.

Outra maneira de se agilizar o processo de cálculo, seria mudando o método de discretização utilizado: passar de elementos constantes para elementos lineares ou quadráticos. Estes métodos possibilitam que se obtenha uma precisão do mesmo nível da obtida com o método dos elementos constantes com uma discretização mais grosseira. E o grau de discretização do contorno é uma dos fatores preponderantes (juntamente com o número de pontos de Gauss usados nos processos de integração numérica, e o número de termos usados no processo de inversão numérica pelo método Stehfest) no tempo de processamento do programa.

Uma proposta de avanço mais significativo seria incluir no processo de cálculo as heterogeneidades do meio poroelástico. Esse item, juntamente com a consideração de domínios tridimensionais, abririam as portas do desenvolvimento de um poderoso simulador de fraturamento hidráulico.

Concluindo, pode-se afirmar que estão lançadas as bases de um simulador de fraturamento hidráulico. Os resultados aqui alcançados estimulam o prosseguimento do projeto. Há ainda um longo percurso pela frente, mas o primeiro passo foi dado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 01 - CHENG, A.H.-D.; DETOURNAY, E. A direct boundary element method for plane strain poroelasticity. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v.12, p.551-72, 1988.
- 02 - BIOT, M.A. General theory of three-dimensional consolidation. **Journal of Applied Physics**, v.12, p.155-64, 1941.
- 03 - RICE, J.R.; CLEARY, M.P. Some basic stress diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents. **Reviews of Geophysics and Space Physics**, v.14, n.2, p.227-41, 1976.
- 04 - CHENG, H.-D.; LIGGETT, J.A. Boundary integral equation method for linear poroelasticity with applications to soil consolidation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.20, p.255-78, 1984.
- 05 - BIOT, M.A. General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material. **Journal of Applied Mechanics**, v.78, p.91-6, 1956.
- 06 - BIOT, M.A.; WILLIS, D.G. The elastic coefficients of the theory of consolidation. **Journal of Applied Mechanics**, p.594-601, 1957.
- 07 - DETOURNAY, E.; CHENG, A.H.-D. Poroelastic response of a borehole in a non-hydrostatic stress field. **International Journal of Rock Mechanics Mining Sci & Geomech. Abstr.**, v.25, n.3, p.171-82, 1988.
- 08 - CHENG, A.H.-D.; PREDELEANU, M. Transient boundary element formulation for linear poroelasticity. **Applied Mathematical Modelling**, v.11, p.285-90, 1987.
- 09 - CLEARY, M.P. Fundamental solutions for a fluid-saturated porous solid. **International Journal of Solids structures**, v.13, n.9, p.785-806, 1977.
- 10 - BIOT, M.A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. **Journal of applied physics**, v.26, n.2, p.182-5, 1955.
- 11 - CHENG, A.H.-D.; LIGGETT, J.A. Boundary integral equation method for linear poroelasticity with applications to fracture propagation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.20, p.279-96, 1984.
- 12 - CHENG, A.H.-D.; DETOURNAY, E. Plane strain analysis of a stationary hydraulic fracture in a poroelastic medium. **Int. J. Solids Structures**, v.27, n.13, p.1642-62, 1991.
- 13 - BIOT, M.A. Consolidation settlement under a rectangular load distribution. **Journal of Applied Physics**, v.12, p.426-30, 1941.

- 14 - NUR, A.; BYERLEE, J.D. An exact effective stress law for elastic deformation of rock with fluids. **Journal of Geophysical Research**, v.76, n.26, p.6414-9, 1971.
- 15 - VABLE, M. Importance and use of rigid body mode in boundary element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.29, p.453-72, 1990.
- 16 - DAVIES, B.; MARTIN, B. Numerical inversion of the Laplace Transform: a survey and comparison of Methods. **Journal of Computational Physics**, v.33, p.1-32, 1979.
- 17 - FERNANDES, P.D. Análise das operações de fraturamento hidráulico através do comportamento da pressão durante o bombeio. Campinas/SP, 1991, 108p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.
- 18 - CHEN, W.F.; SALEEB, A.F. Constitutive equations for engineering materials, v.1, New York, John Wiley & Sons, 1982.
- 19 - Butkov. Física matemática. Rio de Janeiro - RJ, Guanabara Dois, 1978.
- 20 - BANERJEE, P.K.; WILSON, R.B. Industrial applications of boundary element methods. In: DARGUSH, G.F; BANERJEE, P.K. **Boundary element methods for poroelastic and thermoelastic analyses**. Elsevier Applied Science, 1989.
- 21 - BREBBIA, C.A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary elements. An introductory course**. Great Britain, Computational Mechanics Publications, 1989.
- 22 - STROUD, A.N.; SECREST, D. **Gaussian quadrature formulas**. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, inc.
- 23 - PRESS, W.H. et al. **Numerical recipes in C**. New York, Cambridge University Press, 1991.
- 24 - SPIEGEL, M.R. **Manual de fórmulas e tabelas matemáticas**. São Paulo, McGraw-Hill.
- 25 - STEHFEST, H. Numerical inversion of Laplace transforms. **Communications of the ACM**, v.13, p.47-8, 1970.
- 26 - CAMPOS, J.C.B. Inversão numérica de transformadas de Laplace. Publicação interna.

NOMENCLATURA

- a - Raio do poço.
- B - Coeficiente de pressão de poro ou coeficiente de Skempton.
- c - Coeficiente generalizado de consolidação.
- E - Módulo de elasticidade linear.
- f_i - Força de corpo por unidade de volume do fluido.
- F_i - Força de corpo por unidade de volume do material.
- \underline{g} - Sub-matriz 3 x 3, correspondente a cada termo da matriz G.
- G - Módulo de cisalhamento ou de rigidez.
- G - Matriz que armazena as integrais das soluções fundamentais.
- \underline{h} - Sub-matriz 3 x 3, correspondente a cada termo da matriz H.
- H - Inverso da compressibilidade do meio poroelástico em relação à pressão de poros.
- H - Matriz que armazena as integrais dos núcleos.
- $I_n(\xi)$ - Função modificada de Bessel de primeira espécie, de ordem n, aplicada no ponto ξ .
- k - Permeabilidade do meio poroso a um determinado fluido.
- K - Módulo volumétrico drenado.
- K_f - Módulo volumétrico do fluido.
- K_s - Módulo volumétrico não drenado.
- $K_n(\xi)$ - Função modificada de Bessel de segunda espécie, de ordem n, aplicada no ponto ξ .
- m - Massa de fluido por unidade de volume do material.
- n - Número de elementos usados na discretização do domínio.
- n_i - Vetor unitário normal ao contorno.

- p - Pressão de poro.
- q - Vazão específica (vazão por unidade de área) no contorno, na direção da normal ao mesmo.
- q_i - Vetor vazão específica ou descarga específica.
- Q - Constante poroelástica de Biot.
- r - Distância entre o ponto de aplicação e um ponto no contorno. No capítulo 6, serve como base do sistema de coordenadas polares.
- R - Relação entre variações de conteúdo de fluido e pressão de poro.
- s - Parâmetro de Laplace.
- S - Contorno do domínio.
- t_i - Vetor tensão.
- TP - Matriz (vetor) que armazena os valores das trações (forças de superfície) e pressões no contorno (nos elementos).
- u_j - Vetor deslocamento do sólido.
- UQ - Matriz (vetor) que armazena os valores dos deslocamentos e das vazões específicas no contorno (nos elementos).
- v - Volume do espaço poroso por unidade de volume do material (porosidade).
- V - Domínio.
- \underline{x} - Ponto no espaço. No caso de domínio bidimensionais de que trata este trabalho, ponto no plano.
- \underline{x}_c - Ponto de colocação ou aplicação.
- α - Coeficiente de tensão efetiva de Biot.
- Γ - Contorno.

- γ - Vazão de fluido devido fontes por unidade de volume do corpo.
- δ_{ij} - Delta de Kronecker.
- $\delta(\underline{x}-\underline{x}_c)$ - Delta de Dirac aplicado no ponto \underline{x}_c .
- ζ - Variação no conteúdo de fluido dos poros por unidade de volume de referência (base massa).
- θ - Variação do volume ocupado pelos poros por unidade de volume do material (variação de porosidade). No capítulo 6, serve como base do sistema de coordenadas polares.
- Constante de Lamé.
- ν - Módulo de Poisson drenado.
- ν_u - Módulo de Poisson não drenado.
- π - Razão entre o comprimento de uma circunferência e seu raio (3,1415...).
- ρ - Massa específica do fluido dos poros.
- σ_{ij} - Tensor tensão.
- Ω - Domínio.
- ε_{ij} - Tensor deformação.

Observações:

- 1 - O índice 0 (zero) nas variáveis indica que as mesmas referem-se a um estado de referência, exceto nas funções modificadas de Bessel.
- 2 - O til (-) sobre as variáveis indica que as mesmas estão no campo de Laplace.
- 3 - O expoente asterisco (*) nas variáveis indica que as mesmas são soluções fundamentais ou núcleos, ou representam uma variável adimensionalizada.
- 4 - O Δ antes de uma variável indica uma variação na mesma.

ANEXO A

DEDUÇÃO DA FÓRMULA (4.3.11)

A equação (4.3.10), que é uma extensão, para a poroelasticidade, da lei da reciprocidade elástica linear no campo de Laplace, diz que:

$$\bar{\sigma}_{ij}(x, s) \bar{\epsilon}'_{ij}(x, s) + \bar{p}(x, s) \bar{\zeta}'(x, s) = \bar{\sigma}'_{ij}(x, s) \bar{\epsilon}_{ij}(x, s) + \bar{p}'(x, s) \bar{\zeta}(x, s) \quad \dots (B.01)$$

Utilizando uma notação mais simplificada, pode-se desenvolver cada um dos termos desta equação:

a) termo $\bar{\sigma}_{ij} \bar{\epsilon}_{ij}$:

Utilizando a equação (2.2.04), pode-se dizer que:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} u_{i,j} &= \frac{1}{2} (\sigma_{ij} u_{i,j} + \sigma_{ji} u_{j,i}) \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_{ij} u_{i,j} + \sigma_{ij} u_{j,i}) \\ &= \frac{1}{2} [\sigma_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i})] \\ &= \sigma_{ij} \left[\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] \\ &= \sigma_{ij} \epsilon_{ij}. \end{aligned}$$

Logo:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{j,i} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega$$

Aplicando o teorema de Gauss:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \tilde{\epsilon}_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tilde{u}_{i,j} d\Omega = \int_S \sigma_{ij} \tilde{u}_i n_j dS - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} \tilde{u}_i d\Omega.$$

Sabe-se que:

$$\sigma_{ij,j} = -F_i \text{ (eq. equilíbrio) e } t_i = \sigma_{ij} n_j.$$

Assim, chega-se a:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \tilde{\epsilon}_{ij} d\Omega = \int_S \tilde{E}_i \tilde{u}_i dS + \int_{\Omega} \tilde{F}_i \tilde{u}_i d\Omega. \quad \dots \dots \dots (B.02)$$

b) termo $\tilde{p}\zeta$:

A equação da continuidade (2.5.06) diz que:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + q_{i,i} = \gamma.$$

Aplicando a transformada de Laplace nesta equação:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right) + \mathcal{L}(q_{i,i}) = \mathcal{L}(\gamma) \therefore$$

$$s\zeta - \zeta(0) + \tilde{q}_{i,i} = \tilde{\gamma} \Rightarrow \zeta = \frac{1}{s}(\tilde{\gamma} - \tilde{q}_{i,i} + \zeta(0)).$$

Logo:

$$\int_{\Omega} \tilde{p}\zeta d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{s} \tilde{p}[\tilde{\gamma} - \tilde{q}_{i,i} + \zeta(0)] d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{s} \tilde{p}\tilde{\gamma} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{s} \tilde{p}\zeta(0) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{s} \tilde{p}\tilde{q}_{i,i} d\Omega. \quad \dots \dots (B.03)$$

Aplicando o teorema de Gauss no último termo dessa equação:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{S} \bar{p} \tilde{q}_{i,i} d\Omega = \int_S \frac{1}{S} \bar{p} \tilde{q}_i n_i dS - \int_{\Omega} \frac{1}{S} \bar{p}_{,i} \tilde{q}_i d\Omega.$$

Da lei de Darcy (equação 2.5.05) pode-se obter:

$$q_i = -k(p_{,i} - f_i) \Rightarrow q_i = -k p_{,i} + k f_i \Rightarrow p_{,i} = f_i - \frac{q_i}{k}.$$

Considerando, ainda, que $\bar{q} = \bar{q}_i n_i$:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{S} \bar{p} \tilde{q}_{i,i} d\Omega = \int_S \frac{1}{S} \bar{p} \tilde{q} dS + \int_{\Omega} \frac{1}{S} \frac{\tilde{q}_i}{k} \tilde{q}_i d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{S} \tilde{f}_i \tilde{q}_i d\Omega.$$

Substituindo esse resultado na equação (B.03):

$$\int_{\Omega} \bar{p} \zeta d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{S} \bar{p} \tilde{\gamma} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{S} \bar{p} \zeta(0) d\Omega - \int_S \frac{1}{S} \bar{p} \tilde{q} dS - \int_{\Omega} \frac{1}{S} \frac{\tilde{q}_i}{k} \tilde{q}_i d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{S} \tilde{f}_i \tilde{q}_i d\Omega. \dots\dots\dots (B.04)$$

Integrando ambos os lados da equação (B.01), e aplicando as equações (B.02) e (B.04) aos dois estados de tensão-deformação, obtém-se:

$$\int_S \tilde{\epsilon}_i \tilde{u}'_i dS + \int_{\Omega} \tilde{F}_i \tilde{u}'_i d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{p} \tilde{\gamma}' d\Omega + \int_S \frac{1}{S} \tilde{p} \zeta'(0) d\Omega - \int_S \tilde{p} \tilde{q}' dS - \int_{\Omega} \frac{1}{S} \frac{\tilde{q}'_i}{k} \tilde{q}'_i d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{S} \tilde{f}'_i \tilde{q}'_i d\Omega =$$

$$\int_S \tilde{\epsilon}'_i \tilde{u}_{i ds} + \int_{\Omega} \tilde{F}'_i \tilde{u}_i d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{p}' \tilde{\gamma} d\Omega + \int_S \frac{1}{S} \tilde{p}' \zeta(0) d\Omega - \int_S \tilde{p}' \tilde{q} dS - \int_{\Omega} \frac{1}{S} \frac{\tilde{q}'_i}{k} \tilde{q}_i d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{S} \tilde{f}'_i \tilde{q}_i d\Omega$$

De onde pode-se concluir que:

$$\int_s (\tilde{E}_1 \tilde{u}'_1 - \tilde{E}'_1 \tilde{u}_1) ds + \int_{\Omega} (\tilde{F}_1 \tilde{u}'_1 - \tilde{F}'_1 \tilde{u}_1) d\Omega + \int_s \frac{1}{S} (\tilde{p}' \zeta'(0) - \tilde{p} \zeta(0)) d\Omega +$$

$$- \int_s \frac{1}{S} (\tilde{p} \tilde{q}' - \tilde{p}' \tilde{q}) ds + \int_{\Omega} \frac{1}{S} (\tilde{F}_1 \tilde{q}'_1 - \tilde{F}'_1 \tilde{q}_1) d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{1}{S} (\tilde{p} \tilde{\gamma}' - \tilde{p}' \tilde{\gamma}) d\Omega = 0$$

Que é, em uma notação simplificada, a equação (4.3.11) que se queria demonstrar.

ANEXO B

TABELAS

01 - TABELA DE VARIAÇÃO DA PRESSÃO DE PORO ADIMENSIONALIZADA ($s\bar{p}/S^0$) AO LONGO DO EIXO X - CAMPO DE LAPLACE

SOLUÇÃO ANALÍTICA - FIGURAS 6.3.01 a 6.3.04

r/a	$S^*=10$	$S^*=100$	$S^*=1000$
0.100E+01	.0000000000	.0000000000	.0000000000
0.102E+01	-.0663102511	-.2391502551	-.6606293658
0.105E+01	-.1523496400	-.4993588321	-1.0716535619
0.110E+01	-.2655758130	-.7509765047	-1.1921946121
0.120E+01	-.4082092453	-.8966043462	-1.0504695147
0.140E+01	-.5022789739	-.7734264888	-.7735741045
0.160E+01	-.4857021428	-.6068995783	-.5922707676
0.180E+01	-.4346458900	-.4814293948	-.4679670330
0.200E+01	-.3777944696	-.3902045505	-.3790532977
0.220E+01	-.3252963733	-.3225151834	-.3132671888
0.250E+01	-.2601287095	-.2497600397	-.2425941116
0.300E+01	-.1841802351	-.1734446597	-.1684681336

16 ELEMENTOS - FIGURA 6.3.01

r/a	$S^*=10$	$S^*=100$	$S^*=1000$
0.100E+01	.000000E+00	.000000E+00	.000000E-00
0.102E+01	-.111746E+00	-.353807E+00	-.719720E+00
0.105E+01	-.185755E+00	-.548276E+00	-.949738E+00
0.110E+01	-.286088E+00	-.749070E+00	-.105122E+01
0.120E+01	-.414695E+00	-.872500E+00	-.989324E+00
0.140E+01	-.495466E+00	-.750128E+00	-.751912E+00
0.160E+01	-.474273E+00	-.588269E+00	-.577388E+00
0.180E+01	-.422420E+00	-.466598E+00	-.456375E+00
0.200E+01	-.366265E+00	-.378179E+00	-.369686E+00
0.220E+01	-.314940E+00	-.312576E+00	-.305529E+00
0.250E+01	-.251588E+00	-.242063E+00	-.236603E+00
0.300E+01	-.178025E+00	-.168100E+00	-.164307E+00

32 ELEMENTOS - FIGURA 6.3.02

r/a	$S^*=10$	$S^*=100$	$S^*=1000$
0.100E+01	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00
0.102E+01	-.775565E-01	-.267627E+00	-.652816E+00
0.105E+01	-.160042E+00	-.510145E+00	-.101600E+01

0.110E+01	-.269924E+00	-.751794E+00	-.115824E+01
0.120E+01	-.407944E+00	-.889075E+00	-.103650E+01
0.140E+01	-.497435E+00	-.763238E+00	-.764426E+00
0.160E+01	-.479647E+00	-.598457E+00	-.585274E+00
0.180E+01	-.428681E+00	-.474676E+00	-.462439E+00
0.200E+01	-.372366E+00	-.384723E+00	-.374575E+00
0.220E+01	-.320507E+00	-.317984E+00	-.309567E+00
0.250E+01	-.256229E+00	-.246251E+00	-.239728E+00
0.300E+01	-.181390E+00	-.171008E+00	-.166478E+00

64 ELEMENTOS - FIGURA 6.3.03

r/a	$S^*=10$	$S^*=100$	$S^*=1000$
0.100E+01	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00
0.102E+01	-.688113E-01	-.245198E+00	-.650401E+00
0.105E+01	-.153925E+00	-.502193E+00	-.106221E+01
0.110E+01	-.265941E+00	-.750240E+00	-.118565E+01
0.120E+01	-.406814E+00	-.892190E+00	-.104421E+01
0.140E+01	-.499379E+00	-.768499E+00	-.768925E+00
0.160E+01	-.482545E+00	-.602910E+00	-.588711E+00
0.180E+01	-.431680E+00	-.478250E+00	-.465154E+00
0.200E+01	-.375153E+00	-.387625E+00	-.376775E+00
0.220E+01	-.322993E+00	-.320383E+00	-.311384E+00
0.250E+01	-.258269E+00	-.248109E+00	-.241136E+00
0.300E+01	-.182856E+00	-.172298E+00	-.167456E+00

128 ELEMENTOS - FIGURA 6.3.04

r/a	$S^*=10$	$S^*=100$	$S^*=1000$
0.100E+01	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00
0.102E+01	-.668351E-01	-.240565E+00	-.659440E+00
0.105E+01	-.152522E+00	-.499660E+00	-.107022E+01
0.110E+01	-.265225E+00	-.749713E+00	-.118902E+01
0.120E+01	-.407169E+00	-.894138E+00	-.104733E+01
0.140E+01	-.500699E+00	-.771008E+00	-.771249E+00
0.160E+01	-.484085E+00	-.604970E+00	-.590490E+00
0.180E+01	-.433163E+00	-.479895E+00	-.466560E+00
0.200E+01	-.376490E+00	-.388960E+00	-.377914E+00
0.220E+01	-.324166E+00	-.321487E+00	-.312325E+00
0.250E+01	-.259220E+00	-.248963E+00	-.241865E+00
0.300E+01	-.183535E+00	-.172891E+00	-.167962E+00

02 - TABELA DE VARIAÇÃO DO DESLOCAMENTO RADIAL ADIMENSIONALIZADO
($G\ddot{u}_r/S^0$) AO LONGO DO EIXO X - CAMPO DE LAPLACE

SOLUÇÃO ANALÍTICA - FIGURAS 6.3.05 a 6.3.08

r/a	$S^*=10$	$S^*=100$	$S^*=1000$
0.100E+01	-.8410515198	-.7543765311	-.7183855725
0.102E+01	-.8375342759	-.7510591423	-.7165211429
0.105E+01	-.8315250826	-.7471752126	-.7176043993
0.110E+01	-.8200069809	-.7419130308	-.7203466630
0.120E+01	-.7935181075	-.7303015058	-.7165417726
0.140E+01	-.7361108714	-.6942488385	-.6821061278
0.160E+01	-.6805072306	-.6483997004	-.6354322381
0.180E+01	-.6296579153	-.6015922450	-.5883457899
0.200E+01	-.5840352690	-.5577189893	-.5446507119
0.220E+01	-.5433611509	-.5179768691	-.5053202096
0.250E+01	-.4905405215	-.4661815446	-.4543086898
0.300E+01	-.4201478806	-.3975415560	-.3870049504

16 ELEMENTOS - FIGURA 6.3.05

r/a	$S^*=10$	$S^*=100$	$S^*=1000$
0.100E+01	-.806306E+00	-.723975E+00	-.694057E+00
0.102E+01	-.789734E+00	-.710027E+00	-.683487E+00
0.105E+01	-.789809E+00	-.712147E+00	-.689617E+00
0.110E+01	-.782205E+00	-.710603E+00	-.694192E+00
0.120E+01	-.763412E+00	-.705555E+00	-.695590E+00
0.140E+01	-.711933E+00	-.673812E+00	-.665380E+00
0.160E+01	-.658551E+00	-.629368E+00	-.620113E+00
0.180E+01	-.609311E+00	-.583763E+00	-.574119E+00
0.200E+01	-.565076E+00	-.541056E+00	-.531428E+00
0.220E+01	-.525639E+00	-.502410E+00	-.493013E+00
0.250E+01	-.474443E+00	-.452085E+00	-.443207E+00
0.300E+01	-.406260E+00	-.385447E+00	-.377516E+00

32 ELEMENTOS - FIGURA 6.3.06

r/a	$S^*=10$	$S^*=100$	$S^*=1000$
0.100E+01	-.823242E+00	-.739143E+00	-.705479E+00
0.102E+01	-.816165E+00	-.732675E+00	-.700850E+00
0.105E+01	-.813221E+00	-.731691E+00	-.704438E+00
0.110E+01	-.805406E+00	-.729838E+00	-.710117E+00
0.120E+01	-.781459E+00	-.720385E+00	-.708175E+00
0.140E+01	-.725199E+00	-.684935E+00	-.674245E+00
0.160E+01	-.670422E+00	-.639599E+00	-.628059E+00
0.180E+01	-.620305E+00	-.593359E+00	-.581489E+00
0.200E+01	-.575336E+00	-.550043E+00	-.538285E+00
0.220E+01	-.535245E+00	-.510819E+00	-.499402E+00
0.250E+01	-.483187E+00	-.459713E+00	-.448977E+00

0.300E+01 -413823E+00 -392003E+00 -382453E+00

64 ELEMENTOS - FIGURA 6.3.07

r/a	$S^*=10$	$S^*=100$	$S^*=1000$
0.100E+01	-.832146E+00	-.746809E+00	-.711594E+00
0.102E+01	-.828133E+00	-.743053E+00	-.709343E+00
0.105E+01	-.824366E+00	-.741223E+00	-.712355E+00
0.110E+01	-.814023E+00	-.737028E+00	-.716058E+00
0.120E+01	-.787855E+00	-.725625E+00	-.712349E+00
0.140E+01	-.730878E+00	-.689782E+00	-.678079E+00
0.160E+01	-.675670E+00	-.644199E+00	-.631662E+00
0.180E+01	-.625177E+00	-.597676E+00	-.584844E+00
0.200E+01	-.579873E+00	-.554076E+00	-.541402E+00
0.220E+01	-.539483E+00	-.514586E+00	-.502302E+00
0.250E+01	-.487033E+00	-.463122E+00	-.451591E+00
0.300E+01	-.417137E+00	-.394927E+00	-.384686E+00

128 ELEMENTOS - FIGURA 6.3.08

r/a	$S^*=10$	$S^*=100$	$S^*=1000$
0.100E+01	-.836649E+00	-.750662E+00	-.714975E+00
0.102E+01	-.833679E+00	-.747837E+00	-.713588E+00
0.105E+01	-.828560E+00	-.744760E+00	-.715441E+00
0.110E+01	-.817137E+00	-.739577E+00	-.718228E+00
0.120E+01	-.790748E+00	-.728013E+00	-.714427E+00
0.140E+01	-.733547E+00	-.692067E+00	-.680080E+00
0.160E+01	-.678137E+00	-.646354E+00	-.633539E+00
0.180E+01	-.627464E+00	-.599690E+00	-.586589E+00
0.200E+01	-.581998E+00	-.555952E+00	-.543022E+00
0.220E+01	-.541465E+00	-.516334E+00	-.503808E+00
0.250E+01	-.488827E+00	-.464701E+00	-.452947E+00
0.300E+01	-.418678E+00	-.396277E+00	-.385844E+00

03 - TABELA DE VARIAÇÃO DA TENSÃO RADIAL ADIMENSIONALIZADA ($s\bar{\sigma}_r/S^0$) AO LONGO DO EIXO X - CAMPO DE LAPLACE

SOLUÇÃO ANALÍTICA - FIGURAS 6.3.09 a 6.3.12

r/a	$S^*=10$	$S^*=100$	$S^*=1000$
0.100E+01	1.00000	1.00000	1.00000
0.102E+01	1.06173	1.05892	1.06037
0.105E+01	1.13646	1.13354	1.14192
0.110E+01	1.22271	1.22471	1.24177
0.120E+01	1.29706	1.31003	1.32636
0.140E+01	1.25222	1.26673	1.26564
0.160E+01	1.12136	1.12464	1.11372
0.180E+01	.98025	.97287	.95837

0.200E+01	.85137	.83690	.82170
0.220E+01	.73995	.72155	.70686
0.250E+01	.60414	.58364	.57050
0.300E+01	.44280	.42342	.41301

16 ELEMENTOS - FIGURA 6.3.09

r/a	S [*] =10	S [*] =100	S [*] =1000
0.100E+01	.100000E+01	.100000E+01	.100000E+01
0.102E+01	-.796880E+00	-.619594E+00	-.599596E+00
0.105E+01	0.888799E+00	0.901610E+00	0.884998E+00
0.110E+01	0.970702E+00	0.984980E+00	0.971760E+00
0.120E+01	0.115671E+01	0.117456E+01	0.117722E+01
0.140E+01	0.120507E+01	0.122164E+01	0.122316E+01
0.160E+01	0.108695E+01	0.109228E+01	0.108618E+01
0.180E+01	0.950310E+00	0.945069E+00	0.935495E+00
0.200E+01	0.824944E+00	0.812651E+00	0.802047E+00
0.220E+01	0.716647E+00	0.700382E+00	0.689865E+00
0.250E+01	0.584803E+00	0.566296E+00	0.556689E+00
0.300E+01	0.428389E+00	0.410680E+00	0.402944E+00

32 ELEMENTOS - FIGURA 6.3.10

r/a	S [*] =10	S [*] =100	S [*] =1000
0.100E+01	.100000E+01	.100000E+01	.100000E+01
0.102E+01	0.975120E-01	0.190301E+00	0.212196E+00
0.105E+01	0.896315E+00	0.913933E+00	0.908231E+00
0.110E+01	0.109324E+01	0.110591E+01	0.111330E+01
0.120E+01	0.126864E+01	0.128423E+01	0.130018E+01
0.140E+01	0.123491E+01	0.125080E+01	0.125144E+01
0.160E+01	0.110556E+01	0.111000E+01	0.110106E+01
0.180E+01	0.966202E+00	0.959937E+00	0.947357E+00
0.200E+01	0.839017E+00	0.825625E+00	0.812193E+00
0.220E+01	0.729120E+00	0.711737E+00	0.698649E+00
0.250E+01	0.595213E+00	0.575631E+00	0.563841E+00
0.300E+01	0.436191E+00	0.417562E+00	0.408168E+00

64 ELEMENTOS - FIGURA 6.3.11

r/a	S [*] =10	S [*] =100	S [*] =1000
0.100E+01	.100000E+01	.100000E+01	.100000E+01
0.102E+01	0.818768E+00	0.839615E+00	0.843025E+00
0.105E+01	0.100946E+01	0.101880E+01	0.102622E+01
0.110E+01	0.120344E+01	0.120748E+01	0.122442E+01
0.120E+01	0.128831E+01	0.130223E+01	0.131890E+01
0.140E+01	0.124366E+01	0.125890E+01	0.125835E+01
0.160E+01	0.111360E+01	0.111753E+01	0.110721E+01
0.180E+01	0.973406E+00	0.966645E+00	0.952720E+00
0.200E+01	0.845385E+00	0.831503E+00	0.816831E+00

0.220E+01	0.734725E+00	0.716868E+00	0.702662E+00
0.250E+01	0.599852E+00	0.579831E+00	0.567098E+00
0.300E+01	0.439637E+00	0.420643E+00	0.410539E+00

128 ELEMENTOS - FIGURA 6.3.12

r/a	S [*] =10	S [*] =100	S [*] =1000
0.100E+01	.100000E+01	.100000E+01	.100000E+01
0.102E+01	0.883525E+00	0.898663E+00	0.905299E+00
0.105E+01	0.112149E+01	0.112014E+01	0.112888E+01
0.110E+01	0.121856E+01	0.122105E+01	0.123826E+01
0.120E+01	0.129268E+01	0.130610E+01	0.132256E+01
0.140E+01	0.124794E+01	0.126284E+01	0.126195E+01
0.160E+01	0.111751E+01	0.112114E+01	0.111043E+01
0.180E+01	0.976868E+00	0.969825E+00	0.955524E+00
0.200E+01	0.848420E+00	0.834269E+00	0.819250E+00
0.220E+01	0.737382E+00	0.719270E+00	0.704752E+00
0.250E+01	0.602036E+00	0.581788E+00	0.568792E+00
0.300E+01	0.441250E+00	0.422072E+00	0.411770E+00

04 - TABELA DE VARIAÇÃO DA TENSÃO CIRCUNFERENCIAL ADIMENSIONALIZADA ($s_{\theta\theta}^0/S^0$) AO LONGO DO EIXO X - CAMPO DE LAPLACE

SOLUÇÃO ANALÍTICA - FIGURAS 6.3.13 a 6.3.16

r/a	S [*] =10	S [*] =100	S [*] =1000
0.100E+01	2.35263	2.13594	2.04596
0.102E+01	2.20512	2.11539	2.30971
0.105E+01	2.00650	2.04524	2.33848
0.110E+01	1.72589	1.86986	2.07390
0.120E+01	1.30450	1.46811	1.49234
0.140E+01	0.79465	0.85116	0.80644
0.160E+01	0.51351	0.50675	0.47272
0.180E+01	0.34557	0.31739	0.29512
0.200E+01	0.23978	0.20838	0.19363
0.220E+01	0.17057	0.14234	0.13225
0.250E+01	0.10648	0.08537	0.07931
0.300E+01	0.05305	0.04117	0.03825

16 ELEMENTOS - FIGURA 6.3.13

r/a	S [*] =10	S [*] =100	S [*] =1000
0.100E+01	0.134835E+02	0.122350E+02	0.120058E+02
0.102E+01	0.261193E+01	0.252901E+01	0.272572E+01
0.105E+01	0.152807E+01	0.163167E+01	0.186893E+01
0.110E+01	0.156486E+01	0.172327E+01	0.188875E+01
0.120E+01	0.128946E+01	0.144562E+01	0.147481E+01
0.140E+01	0.774157E+00	0.826189E+00	0.790895E+00

0.160E+01	0.495690E+00	0.488371E+00	0.460389E+00
0.180E+01	0.332460E+00	0.305374E+00	0.286937E+00
0.200E+01	0.230287E+00	0.200407E+00	0.188182E+00
0.220E+01	0.163650E+00	0.136884E+00	0.128517E+00
0.250E+01	0.102055E+00	0.820879E-01	0.770675E-01
0.300E+01	0.508137E-01	0.395869E-01	0.371656E-01

32 ELEMENTOS - FIGURA 6.3.14

r/a	S [*] =10	S [*] =100	S [*] =1000
0.100E+01	0.551913E+01	0.501017E+01	0.484736E+01
0.102E+01	0.223426E+01	0.215446E+01	0.234384E+01
0.105E+01	0.186593E+01	0.192543E+01	0.220728E+01
0.110E+01	0.173553E+01	0.188000E+01	0.207982E+01
0.120E+01	0.129296E+01	0.145431E+01	0.148035E+01
0.140E+01	0.782685E+00	0.837767E+00	0.796137E+00
0.160E+01	0.505343E+00	0.498515E+00	0.466637E+00
0.180E+01	0.339890E+00	0.312210E+00	0.291318E+00
0.200E+01	0.235749E+00	0.204972E+00	0.191134E+00
0.220E+01	0.167665E+00	0.140016E+00	0.130547E+00
0.250E+01	0.104634E+00	0.839693E-01	0.782884E-01
0.300E+01	0.521263E-01	0.404945E-01	0.377548E-01

64 ELEMENTOS - FIGURA 6.3.15

r/a	S [*] =10	S [*] =100	S [*] =1000
0.100E+01	-.101237E+03	-.908260E+02	-.865553E+02
0.102E+01	0.197605E+01	0.191353E+01	0.211555E+01
0.105E+01	0.203136E+01	0.206997E+01	0.236144E+01
0.110E+01	0.172152E+01	0.186593E+01	0.206836E+01
0.120E+01	0.129553E+01	0.145855E+01	0.148288E+01
0.140E+01	0.788944E+00	0.845111E+00	0.801279E+00
0.160E+01	0.509719E+00	0.503087E+00	0.469697E+00
0.180E+01	0.342971E+00	0.315096E+00	0.293229E+00
0.200E+01	0.237952E+00	0.206869E+00	0.192388E+00
0.220E+01	0.169265E+00	0.141312E+00	0.131403E+00
0.250E+01	0.105651E+00	0.847467E-01	0.788020E-01
0.300E+01	0.526408E-01	0.408694E-01	0.380025E-01

128 ELEMENTOS - FIGURA 6.3.16

r/a	S [*] =10	S [*] =100	S [*] =1000
0.100E+01	-.308963E+03	-.277189E+03	-.264024E+03
0.102E+01	0.222322E+01	0.213302E+01	0.232748E+01
0.105E+01	0.200721E+01	0.204644E+01	0.233908E+01
0.110E+01	0.172008E+01	0.186440E+01	0.206771E+01
0.120E+01	0.130003E+01	0.146345E+01	0.148767E+01
0.140E+01	0.791872E+00	0.848331E+00	0.803907E+00
0.160E+01	0.511684E+00	0.505048E+00	0.471237E+00

0.180E+01 0.344329E+00 0.316330E+00 0.294191E+00
 0.200E+01 0.238911E+00 0.207680E+00 0.193019E+00
 0.220E+01 0.169956E+00 0.141867E+00 0.131834E+00
 0.250E+01 0.106088E+00 0.850790E-01 0.790605E-01
 0.300E+01 0.528600E-01 0.410297E-01 0.381272E-01

05 - TABELA DE VARIAÇÃO DO DESLOCAMENTO RADIAL NORMALIZADO ($-2sG\bar{u}_r/S^0a$)
 NO CONTORNO ($r/a=1$) - CAMPO DE LAPLACE

FIGURA 6.3.22

S^*	16 ELEM.	32 ELEM.	64 ELEM.	128 ELEM.	SOL. ANAL.
1E-04	2.096469	2.146123	2.172401	2.186078	2.199748
1E-03	2.094953	2.144539	2.170729	2.184434	2.198096
1E-02	2.084827	2.133928	2.160015	2.173531	2.187076
1E-01	2.031419	2.078481	2.103376	2.116309	2.129252
1E+00	1.860001	1.901569	1.923253	1.934450	1.945583
1E+01	1.611050	1.646485	1.664291	1.673298	1.682103
1E+02	1.447949	1.478287	1.493617	1.501324	1.508753
1E+03	1.388114	1.410957	1.423187	1.429949	1.436771
1E+04	1.372545	1.392251	1.400998	1.405820	1.411881

06 - TABELA DE VARIAÇÃO DA PRESSÃO DE PORO NORMALIZADA ($s\bar{p}/S^0$) AO LONGO
 DO PRIMEIRO QUADRANTE, EM $r/a = 1.15$

SOL. ANALÍTICA - FIGURAS 6.3.23 a 6.3.26

S^*	0°	22.5°	45°	67.5°	90°
1E-04	-.000012	-.000009	.000000	.000009	.000012
5E-04	-.000060	-.000044	.000000	.000043	.000061
1E-03	-.000121	-.000086	.000000	.000086	.000121
5E-03	-.000601	-.000425	.000000	.000425	.000601
1E-02	-.001192	-.000843	.000000	.000843	.001192
5E-02	-.005698	-.004029	.000000	.004029	.005698
1E-01	-.010940	-.007736	.000000	.007736	.010940
5E-01	-.045189	-.031953	.000000	.031953	.045189
1E+00	-.078439	-.055464	.000000	.055464	.078439
5E+00	-.235883	-.166795	.000000	.166795	.235883
1E+01	-.348584	-.246486	.000000	.246486	.348584
5E+01	-.702211	-.496538	.000000	.496538	.702211
1E+02	-.862707	-.610026	.000000	.610026	.862707
5E+02	-1.104148	-.780750	.000000	.780750	1.104148
1E+03	-1.134254	-.802039	.000000	.802039	1.134254
5E+03	-1.137013	-.803989	.000000	.803989	1.137013
1E+04	-1.134764	-.802399	.000000	.802399	1.134764

16 ELEMENTOS - FIGURA 6.3.23

S°	0°	22.5°	45°	67.5°	90°
1E-4	-.127955E-4	-.904776E-5	-.369839E-11	.904775E-5	.127955E-4
5E-4	-.639072E-4	-.451892E-4	.219708E-11	.451892E-4	.639072E-4
1E-3	-.127662E-3	-.902709E-4	.228879E-11	.902709E-4	.127662E-3
5E-3	-.633463E-3	-.447926E-3	.416111E-13	.447926E-3	.633463E-3
1E-2	-.125710E-2	-.888901E-3	.274254E-11	.888901E-3	.125710E-2
5E-2	-.601100E-2	-.425042E-2	.144904E-12	.425042E-2	.601100E-2
1E-1	-.115432E-1	-.816230E-2	-.151368E-12	.816230E-2	.115432E-1
5E-1	-.476668E-1	-.337055E-1	.203573E-12	.337055E-1	.476668E-1
1E+0	-.826462E-1	-.584397E-1	.345976E-11	.584397E-1	.826462E-1
5E+0	-.246312E+0	-.174169E+0	.130917E-11	.174169E+0	.246312E+0
1E+1	-.360957E+0	-.255235E+0	-.527956E-14	.255235E+0	.360957E+0
5E+1	-.702213E+0	-.496539E+0	.425562E-12	.496539E+0	.702213E+0
1E+2	-.843878E+0	-.596712E+0	-.362850E-13	.596712E+0	.843878E+0
5E+2	-.102405E+1	-.724116E+0	-.912218E-14	.724116E+0	.102405E+1
1E+3	-.103932E+1	-.734913E+0	.436249E-14	.734913E+0	.103932E+1
5E+4	-.103875E+1	-.734509E+0	.884966E-14	.734509E+0	.103875E+1
1E+4	-.103756E+1	-.733667E+0	.397724E-14	.733667E+0	.103756E+1

32 ELEMENTOS - FIGURA 6.3.24

S°	0°	22.5°	45°	67.5°	90°
1E-4	-.122071E-4	-.863170E-5	-.250585E-11	.863169E-5	.122071E-4
5E-4	-.609685E-4	-.431113E-4	.190420E-11	.431113E-4	.609685E-4
1E-3	-.121791E-3	-.861195E-4	.264358E-11	.861195E-4	.121791E-3
5E-3	-.604311E-3	-.427313E-3	.432521E-11	.427313E-3	.604311E-3
1E-2	-.119921E-2	-.847972E-3	.453706E-11	.847972E-3	.119921E-2
5E-2	-.573384E-2	-.405444E-2	-.278014E-11	.405444E-2	.573384E-2
1E-1	-.110113E-1	-.778613E-2	-.121594E-11	.778613E-2	.110113E-1
5E-1	-.455097E-1	-.321802E-1	-.277330E-11	.321802E-1	.455097E-1
1E+0	-.790082E-1	-.558672E-1	-.118680E-11	.558672E-1	.790082E-1
5E+0	-.237410E+0	-.167874E+0	.502282E-12	.167874E+0	.237410E+0
1E+1	-.350397E+0	-.247768E+0	-.102004E-11	.247768E+0	.350397E+0
5E+1	-.701544E+0	-.496067E+0	.305416E-12	.496067E+0	.701544E+0
1E+2	-.858428E+0	-.607001E+0	.313287E-12	.607001E+0	.858428E+0
5E+2	-.108803E+1	-.769357E+0	-.414013E-12	.769357E+0	.108803E+1
1E+3	-.111507E+1	-.788471E+0	.259630E-12	.788471E+0	.111507E+1
5E+3	-.111807E+1	-.790596E+0	.266274E-13	.790596E+0	.111807E+1
1E+4	-.111659E+1	-.789552E+0	-.262633E-13	.789552E+0	.111659E+1

64 ELEMENTOS - FIGURA 6.3.25

S°	0°	22.5°	45°	67.5°	90°
1E-4	-.121001E-4	-.855599E-5	.946185E-11	.855599E-5	.121001E-4
5E-4	-.604326E-4	-.427322E-4	-.236539E-12	.427322E-4	.604326E-4
1E-3	-.120720E-3	-.853617E-4	.116049E-10	.853617E-4	.120720E-3
5E-3	-.598981E-3	-.423544E-3	-.820710E-11	.423544E-3	.598981E-3

1E-2	-.118861E-2	-.840473E-3	.365086E-11	.840473E-3	.118861E-2
5E-2	-.568249E-2	-.401813E-2	.301741E-11	.401813E-2	.568249E-2
1E-1	-.109118E-1	-.771580E-2	-.354439E-11	.771580E-2	.109118E-1
5E-1	-.450908E-1	-.318840E-1	-.122691E-10	.318840E-1	.450908E-1
1E+0	-.782842E-1	-.553553E-1	-.430735E-11	.553553E-1	.782842E-1
5E+0	-.235480E+0	-.166510E+0	.219121E-11	.166510E+0	.235480E+0
1E+1	-.347952E+0	-.246039E+0	.277360E-11	.246039E+0	.347952E+0
5E+1	-.700202E+0	-.495118E+0	.225774E-12	.495118E+0	.700202E+0
1E+2	-.859559E+0	-.607800E+0	.253430E-12	.607800E+0	.859559E+0
5E+2	-.109809E+1	-.776467E+0	.983292E-13	.776467E+0	.109809E+1
1E+3	-.112767E+1	-.797387E+0	.276133E-13	.797387E+0	.112767E+1
5E+3	-.113114E+1	-.799838E+0	.343239E-13	.799838E+0	.113114E+1
1E+4	-.112944E+1	-.798633E+0	.180028E-13	.798633E+0	.112944E+1

128 ELEMENTOS - FIGURA 6.3.26

S°	0°	22.5°	45°	67.5°	90°
1E-4	-.120986E-4	-.855493E-5	-.155111E-10	.855495E-5	.120985E-4
5E-4	-.604266E-4	-.427281E-4	.726669E-11	.427281E-4	.604266E-4
1E-3	-.120708E-3	-.853537E-4	-.747194E-11	.853537E-4	.120708E-3
5E-3	-.598916E-3	-.423497E-3	.245592E-11	.423497E-3	.598916E-3
1E-2	-.118846E-2	-.840371E-3	-.129006E-10	.840371E-3	.118846E-2
5E-2	-.568144E-2	-.401739E-2	-.807681E-11	.401739E-2	.568144E-2
1E-1	-.109092E-1	-.771398E-2	-.174931E-10	.771398E-2	.109092E-1
5E-1	-.450723E-1	-.318709E-1	.132261E-10	.318709E-1	.450723E-1
1E+0	-.782460E-1	-.553283E-1	.187846E-10	.553283E-1	.782460E-1
5E+0	-.235366E+0	-.166429E+0	.129929E-10	.166429E+0	.235366E+0
1E+1	-.347838E+0	-.245958E+0	.218155E-11	.245958E+0	.347838E+0
5E+1	-.700625E+0	-.495417E+0	.707247E-11	.495417E+0	.700625E+0
1E+2	-.860623E+0	-.608552E+0	.144262E-11	.608552E+0	.860623E+0
5E+2	-.110101E+1	-.778529E+0	.697628E-12	.778529E+0	.110101E+1
1E+3	-.113093E+1	-.799686E+0	-.562881E-13	.799686E+0	.113093E+1
5E+3	-.113386E+1	-.801757E+0	.721845E-13	.801757E+0	.113386E+1
1E+4	-.113182E+1	-.800314E+0	.178050E-12	.800314E+0	.113182E+1

07 - TABELA DE VARIAÇÃO DA PRESSÃO DE PORO ADIMENSIONALIZADA ($-p/S^*$) AO LONGO DO EIXO X - DOMÍNIO DO TEMPO

SOL. ANALÍTICA - FIGURAS 6.4.01 a 6.4.04

r/a	T [*] =1.0E-4	T [*] =1.0E-3	T [*] =1.0E-2	T [*] =1.0E-1	T [*] =1.0E+0
1.00	.000000E+0	.000000E+0	.000000E+0	.000000E+0	.000000E+0
1.02	.121019E+1	.479322E+0	.138169E+0	.294332E-1	.319563E-2
1.05	.136158E+1	.990613E+0	.331468E+0	.718856E-1	.736018E-2
1.10	.124107E+1	.121910E+1	.597990E+0	.138015E+0	.136220E-1
1.40	.766165E+0	.775123E+0	.795456E+0	.403761E+0	.453068E-1
1.60	.586595E+0	.593453E+0	.613412E+0	.459319E+0	.627354E-1

1.80	.463483E+0	.468901E+0	.484707E+0	.445989E+0	.777868E-1
2.00	.375421E+0	.379810E+0	.392622E+0	.398798E+0	.905008E-1
2.20	.310265E+0	.313893E+0	.324478E+0	.343590E+0	.100803E+0
2.50	.240269E+0	.243079E+0	.251275E+0	.270754E+0	.111607E+0
3.00	.166854E+0	.168805E+0	.174497E+0	.188421E+0	.117788E+0

16 ELEMENTOS - FIGURA 6.4.01

r/a	$T^*=1.0E-4$	$T^*=1.0E-3$	$T^*=1.0E-2$	$T^*=1.0E-1$	$T^*=1.0E+0$
1.00	.000000E+0	.000000E+0	.000000E+0	.000000E+0	.000000E+0
1.02	.866394E+0	.661582E+0	.245991E+0	.539475E-1	.498711E-2
1.05	.104845E+1	.943399E+0	.418915E+0	.936988E-1	.868840E-2
1.10	.106730E+1	.106738E+1	.649015E+0	.156062E+0	.146271E-1
1.20	.984427E+0	.991403E+0	.870139E+0	.263813E+0	.256564E-1
1.40	.747386E+0	.752778E+0	.768790E+0	.404212E+0	.450378E-1
1.60	.573911E+0	.578055E+0	.593046E+0	.451797E+0	.617405E-1
1.80	.453627E+0	.456903E+0	.468777E+0	.434616E+0	.761478E-1
2.00	.367460E+0	.370113E+0	.379737E+0	.386707E+0	.883629E-1
2.20	.303690E+0	.305883E+0	.313833E+0	.332374E+0	.981789E-1
2.50	.235178E+0	.236876E+0	.243033E+0	.261597E+0	.108454E+0
3.00	.163318E+0	.164498E+0	.168773E+0	.182011E+0	.114154E+0
5.00	.587946E-1	.592191E-1	.607582E-1	.655342E-1	.705144E-1

32 ELEMENTOS - FIGURA 6.4.02

r/a	$T^*=1.0E-4$	$T^*=1.0E-3$	$T^*=1.0E-2$	$T^*=1.0E-1$	$T^*=1.0E+0$
1.00	.000000E+0	.000000E+0	.000000E+0	.000000E+0	.000000E+0
1.02	.104212E+1	.535045E+0	.165775E+0	.353396E-1	.330727E-2
1.05	.120384E+1	.982210E+0	.352320E+0	.767012E-1	.718776E-2
1.10	.119498E+1	.118395E+1	.609589E+0	.141494E+0	.133722E-1
1.20	.103129E+1	.103964E+1	.869743E+0	.253264E+0	.247593E-1
1.40	.759059E+0	.765247E+0	.784288E+0	.401118E+0	.446778E-1
1.60	.581162E+0	.585900E+0	.604524E+0	.454331E+0	.618168E-1
1.80	.459190E+0	.462933E+0	.477685E+0	.440120E+0	.766022E-1
2.00	.371944E+0	.374976E+0	.386933E+0	.393052E+0	.891246E-1
2.20	.307392E+0	.309897E+0	.319777E+0	.338427E+0	.992215E-1
2.50	.238044E+0	.239985E+0	.247635E+0	.266598E+0	.109833E+0
3.00	.165308E+0	.166656E+0	.171968E+0	.185518E+0	.115877E+0
5.00	.595110E-1	.599961E-1	.619086E-1	.667970E-1	.718552E-1

64 ELEMENTOS - FIGURA 6.4.03

r/a	$T^*=1.0E-4$	$T^*=1.0E-3$	$T^*=1.0E-2$	$T^*=1.0E-1$	$T^*=1.0E+0$
1.00	.000000E+0	.000000E+0	.000000E+0	.000000E+0	.000000E+0
1.02	.110913E+1	.495888E+0	.144712E+0	.307361E-1	.290044E-2
1.05	.132084E+1	.994639E+0	.335841E+0	.727594E-1	.685237E-2
1.10	.123339E+1	.121238E+1	.599616E+0	.138353E+0	.131220E-1
1.20	.103778E+1	.104820E+1	.870391E+0	.251452E+0	.246545E-1
1.40	.762451E+0	.770148E+0	.790224E+0	.401641E+0	.448101E-1

1.60	.583752E+0	.589645E+0	.609297E+0	.456446E+0	.621371E-1
1.80	.461236E+0	.465892E+0	.481456E+0	.442961E+0	.770785E-1
2.00	.373601E+0	.377373E+0	.389988E+0	.395973E+0	.897264E-1
2.20	.308761E+0	.311878E+0	.322302E+0	.341105E+0	.999310E-1
2.50	.239105E+0	.241518E+0	.249590E+0	.268774E+0	.110662E+0
3.00	.166045E+0	.167721E+0	.173326E+0	.187041E+0	.116803E+0
5.00	.597762E-1	.603796E-1	.623975E-1	.673452E-1	.724847E-1

128 ELEMENTOS - FIGURA 6.4.04

r/a	T [*] =1.0E-4	T [*] =1.0E-3	T [*] =1.0E-2	T [*] =1.0E-1	T [*] =1.0E+0
1.00	.000000E+0	.000000E+0	.000000E+0	.000000E+0	.000000E-0
1.02	.119693E+1	.483270E+0	.139582E+0	.296804E-1	.276314E-2
1.05	.135623E+1	.990607E+0	.332126E+0	.719584E-1	.674385E-2
1.10	.123751E+1	.121578E+1	.597667E+0	.137833E+0	.130580E-1
1.20	.103985E+1	.105173E+1	.871701E+0	.251462E+0	.246702E-1
1.40	.763971E+0	.772740E+0	.792922E+0	.402493E+0	.449446E-1
1.60	.584916E+0	.591629E+0	.611436E+0	.457779E+0	.623633E-1
1.80	.462156E+0	.467460E+0	.483146E+0	.444445E+0	.773764E-1
2.00	.374346E+0	.378643E+0	.391357E+0	.397394E+0	.900846E-1
2.50	.239581E+0	.242331E+0	.250466E+0	.269787E+0	.111115E+0
3.00	.166376E+0	.168286E+0	.173935E+0	.187748E+0	.117286E+0
5.00	.598954E-1	.605828E-1	.626165E-1	.675997E-1	.727911E-1

08 - TABELA DE VARIAÇÃO DO DESLOCAMENTO RADIAL NORMALIZADO ($-2G_{up}/S^0a$) NO CONTORNO (r/a=1) - DOMÍNIO DO TEMPO

FIGURA 6.4.05

T [*]	16 ELEM.	32 ELEM.	64 ELEM.	128 ELEM.	SOL. ANAL.
1.0E-04	1.373062	1.392768	1.401528	1.406598	1.413421
1.0E-03	1.390290	1.413556	1.427122	1.434432	1.441637
1.0E-02	1.459610	1.492376	1.508288	1.516152	1.523973
1.0E-01	1.652314	1.688704	1.707044	1.716354	1.725797
1.0E+00	1.933188	1.976474	1.999292	2.011140	2.023303
1.0E+01	2.072480	2.121000	2.146680	2.160120	2.173890
1.0E+02	2.093920	2.143680	2.169360	2.183060	2.197327
1.0E+03	2.095640	2.144760	2.168680	2.181180	2.199733
1.0E+04	2.093580	2.149980	2.155260	2.144400	2.199973

09 - TABELA DE VARIAÇÃO DA TENSÃO CIRCUNFERENCIAL ADIMENSIONALIZADA ($-\sigma_{\theta\theta}/S^0$) AO LONGO DO EIXO X - DOMÍNIO DO TEMPO

SOL. ANALÍTICA - FIGURAS 6.4.06 a 6.4.09

r/a	T [*] =1.0E-4	T [*] =1.0E-3	T [*] =1.0E-2	T [*] =1.0E-1	T [*] =1.0E+0
1.00	-.201678E+1	-.205205E+1	-.215497E+1	-.240725E+1	-.277913E+1
1.02	-.264594E+1	-.219559E+1	-.206641E+1	-.223216E+1	-.256623E+1

1.05	-2.49587E+1	-.229332E+1	-.195242E+1	-.200124E+1	-.228254E+1
1.10	-.207237E+1	-.209950E+1	-.178877E+1	-.168595E+1	-.189000E+1
1.20	-.146323E+1	-.149985E+1	-.147169E+1	-.124205E+1	-.132744E+1
1.40	-.789815E+0	-.809601E+0	-.873755E+0	-.762840E+0	-.710442E+0
1.60	-.462975E+0	-.474573E+0	-.514495E+0	-.519174E+0	-.415595E+0
1.80	-.289033E+0	-.296274E+0	-.321217E+0	-.366864E+0	-.262526E+0
2.00	-.189635E+0	-.194385E+0	-.210756E+0	-.260917E+0	-.178006E+0
2.20	-.129523E+0	-.132768E+0	-.143947E+0	-.185997E+0	-.128992E+0
2.50	-.776744E-1	-.796202E-1	-.863243E-1	-.114061E+0	-.888274E-1
3.00	-.374587E-1	-.383971E-1	-.416302E-1	-.551966E-1	-.585462E-1

16 ELEMENTOS - FIGURA 6.4.06

r/a	$T^*=1.0E-4$	$T^*=1.0E-3$	$T^*=1.0E-2$	$T^*=1.0E-1$	$T^*=1.0E+0$
1.00	-.120325E+2	-.118594E+2	-.122799E+2	-.138050E+2	-.161028E+2
1.02	-.291331E+1	-.265590E+1	-.246822E+1	-.263637E+1	-.303275E+1
1.05	-.192972E+1	-.186757E+1	-.154681E+1	-.150277E+1	-.169040E+1
1.10	-.188885E+1	-.190365E+1	-.165849E+1	-.151791E+1	-.168388E+1
1.20	-.145730E+1	-.147964E+1	-.145026E+1	-.122875E+1	-.130570E+1
1.40	-.778909E+0	-.793161E+0	-.843636E+0	-.745831E+0	-.690993E+0
1.60	-.453258E+0	-.461705E+0	-.493927E+0	-.502796E+0	-.401076E+0
1.80	-.282479E+0	-.287756E+0	-.307997E+0	-.353500E+0	-.252975E+0
2.00	-.185256E+0	-.188719E+0	-.202016E+0	-.250552E+0	-.171585E+0
2.20	-.126518E+0	-.128883E+0	-.137966E+0	-.178230E+0	-.124373E+0
2.50	-.758690E-1	-.772874E-1	-.827348E-1	-.109147E+0	-.857104E-1
3.00	-.365876E-1	-.372716E-1	-.398988E-1	-.528020E-1	-.565054E-1

32 ELEMENTOS - FIGURA 6.4.07

r/a	$T^*=1.0E-4$	$T^*=1.0E-3$	$T^*=1.0E-2$	$T^*=1.0E-1$	$T^*=1.0E+0$
1.00	-.489092E+1	-.484134E+1	-.504254E+1	-.564855E+1	-.655751E+1
1.02	-.259483E+1	-.225632E+1	-.210229E+1	-.225860E+1	-.259336E+1
1.05	-.233446E+1	-.217843E+1	-.183355E+1	-.185470E+1	-.210499E+1
1.10	-.208834E+1	-.209869E+1	-.180223E+1	-.169484E+1	-.189542E+1
1.20	-.145711E+1	-.148581E+1	-.145849E+1	-.123103E+1	-.131223E+1
1.40	-.782382E+0	-.798369E+0	-.859117E+0	-.751860E+0	-.697948E+0
1.60	-.458570E+0	-.467943E+0	-.505698E+0	-.511328E+0	-.408263E+0
1.80	-.286282E+0	-.292134E+0	-.315724E+0	-.360990E+0	-.257901E+0
2.00	-.187830E+0	-.191669E+0	-.207152E+0	-.256534E+0	-.174915E+0
2.20	-.128290E+0	-.130912E+0	-.141486E+0	-.182774E+0	-.126747E+0
2.50	-.769351E-1	-.785076E-1	-.848481E-1	-.112043E+0	-.873021E-1
3.00	-.371022E-1	-.378605E-1	-.409183E-1	-.542154E-1	-.575509E-1

64 ELEMENTOS - FIGURA 6.4.08

r/a	$T^*=1.0E-4$	$T^*=1.0E-3$	$T^*=1.0E-2$	$T^*=1.0E-1$	$T^*=1.0E+0$
1.00	.851740E+2	.867734E+2	.917368E+2	.103864E+3	.121690E+3
1.02	-.242590E+1	-.201115E+1	-.186166E+1	-.199620E+1	-.228663E+1
1.05	-.251916E+1	-.231731E+1	-.197736E+1	-.202606E+1	-.230764E+1

1.10	-.207045E+1	-.209206E+1	-.178603E+1	-.168133E+1	-.188193E+1
1.20	-.145641E+1	-.148943E+1	-.146243E+1	-.123326E+1	-.131608E+1
1.40	-.786102E+0	-.803951E+0	-.867361E+0	-.757410E+0	-.704261E+0
1.60	-.460799E+0	-.471261E+0	-.510689E+0	-.515405E+0	-.411994E+0
1.80	-.287674E+0	-.294206E+0	-.318841E+0	-.364125E+0	-.260247E+0
2.00	-.188743E+0	-.193029E+0	-.209197E+0	-.258920E+0	-.176486E+0
2.20	-.128914E+0	-.131841E+0	-.142883E+0	-.184550E+0	-.127875E+0
2.50	-.773092E-1	-.790645E-1	-.856858E-1	-.113163E+0	-.880683E-1
3.00	-.372826E-1	-.381291E-1	-.413223E-1	-.547611E-1	-.580524E-1

128 ELEMENTOS - FIGURA 6.4.09

r/a	$T^*=1.0E-4$	$T^*=1.0E-3$	$T^*=1.0E-2$	$T^*=1.0E-1$	$T^*=1.0E+0$
1.00	.259712E+3	.264871E+3	.279977E+3	.316975E+3	.371451E+3
1.02	-.266068E+1	-.221385E+1	-.208380E+1	-.225041E+1	-.258512E+1
1.05	-.249548E+1	-.229436E+1	-.195378E+1	-.200181E+1	-.228057E+1
1.10	-.206639E+1	-.209302E+1	-.178381E+1	-.168003E+1	-.188135E+1
1.20	-.145897E+1	-.149499E+1	-.146710E+1	-.123765E+1	-.132171E+1
1.40	-.787518E+0	-.806981E+0	-.870809E+0	-.760141E+0	-.707304E+0
1.60	-.461629E+0	-.473037E+0	-.512750E+0	-.517322E+0	-.413777E+0
1.80	-.288193E+0	-.295315E+0	-.320127E+0	-.365540E+0	-.261370E+0
2.00	-.189083E+0	-.193756E+0	-.210041E+0	-.259966E+0	-.177250E+0
2.20	-.129146E+0	-.132338E+0	-.143459E+0	-.185313E+0	-.128428E+0
2.50	-.774484E-1	-.793625E-1	-.860315E-1	-.113640E+0	-.884468E-1
3.00	-.373498E-1	-.382728E-1	-.414890E-1	-.549925E-1	-.583001E-1