MEDIDAS FUZZY

JOÃO ROBERTO GERÔNIMO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPINAS - SÃO PAULO

BRASIL

Á Maria, minha mãe

Iara, minha esposa

Aos amigos Claudecir Perinette Gonçalves,

Jamil Ferreira e

Pedro Ortaneda

Aos professores Francisco Blasi

Richard Pfister

No que trato

No que digo

Esta a palavra

Ela

Que maltrata,

Que brinca,

Que elogia

E se desfaz nos cantos

Por ela venho a ti

Mostrar meus encantos

Que ao todo

Me compoe a vida

A vida dos meus sonhos

Nao tenho paz,

Nao tenho vida,

Tenho a palavra

A mesma que me ergue,

Me derruba.,..

(Joao R. Geronimo)

No meio do caminho

Tinha uma pedra

Tinha uma pedra

No meio do caminho

Tinha uma pedra

No meio do caminho

Tinha uma pedra

Nunca me esquecerei

Deste acontecimento

Na vida de minhas retinas

Tao fatigadas

Nunca me esquecerei

Que no meio do caminho

Tinha uma pedra

Tinha uma pedra

No meio do caminho

No meio do caminho

Tinha uma pedra

(Carlos Drummond de Andrade)

"Tudo que existe no universo é fruto do acaso e da necessidade"

(Demócrito)

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Rodney, pela orientação e compreensão dos problemas ocorridos nestes meses de trabalho.

À todas as pessoas que, de alguma maneira, colaboraram para a realização deste trabalho, com destaque:

A sub-cpg de Matemática da UNICAMP,

A secretaria de Pós-Graduação do IMECC - UNICAMP,

O Departamento de Matemática da PUC-Campinas,

O Departamento de Matemática da UNESP-Bauru,

A Profa. Sueli I. R. Costa,

O Prof. Jairo de Araújo Lopes,

Yara Rehder, pela sua ajuda na datilografia deste trabalho,

E os amigos Jorge Costa Duarte Filho, Roberto, Luis Humberto G. Felipe, Silvia Helena Aguiar, José Carlos Cifuentes e Hércules de Araújo Feitosa.

ÍNDICE

CAPÍTULO 0
PRELIMINARES

1. INTRODUÇÃO

Não se pode dizer exatamente quais as origens da teoria de medidas mas sabe-se que algumas civilizações antigas já tinham a idéia básica de medir embutida em seus pensamentos, não como uma teoria matemática bem desenvolvida como está atualmente, onde o princípio que a rege pode ser traduzido da seguinte forma:

"*A teoria de medida matemática é um ramo da matemática moderna que lida com técnicas sistemáticas para medir objetos complicados ou irregulares quando as medidas de objetos simples são conhecidas*"[16].

A partir desta idéia certamente toda a teoria se desenvolveu, mas quais foram estas civilizações antigas e de que forma colaboraram para o desenvolvimento da teoria?

Naturalmente, não se podem obter informações completas a respeito das civilizações que, efetivamente, lidaram com medida, mas sabe-se que civilizações como os babilônios e os egípcios já se preocupavam com o cálculo de áreas através da medição de terrenos. De fato, no caso dos babilônios, segundo escavações feitas por arqueólogos nas colinas da Mesopotâmia (no fim do século XIX), haviam milhares de tabletes de argila contendo inscrições que se referem a matemática, dentre elas se notam várias fórmulas corretas para as áreas de triângulos e trapézios, aproximações grosseiras da área e perímetro do círculo, fórmulas (algumas corretas e outras não) para volumes de vários sólidos. A matemática dos babilônios se limitava apenas ao uso prático das fórmulas conhecidas bem antes do século VIII a.C. Tal uso era cultivado sobretudo pelos escribas, responsáveis pela guarda dos tesouros reais.

O próprio conceito de unidade já tinha sido desenvolvido por ambas as civilizações (egípcios e babilônios). Os egípcios, por exemplo, usavam como unidade de medida o *cúbito*, definida originalmente (2000 a.C.) como a distância do cotovelo até a ponta do dedo médio do Faraó (meio metro, aproximadamente). Na Mesopotâmia, o *cúbito* era bem menor, equivalente a cerca de 0,43 m (talvez porque seu rei fosse mais baixo).

O historiador Heródoto (considerado o *pai da História*) relata uma situação que mostra bem o fato de que medir é um ato bastante antigo:

"O Rei Sesóstris repartiu o Egito, cerca de 4000 anos atrás em porções retangulares de terra, entre a população egípcia. Cada indivíduo tinha como obrigação pagar um certo tributo por ano. Se algum terreno fosse diminuído pelas águas do Nilo e o dono reclamasse ao Rei, este mandaria medidores ao local para saber em quanto tinha diminuído. Consequentemente, o tributo seria diminuído.

Vemos desta forma que, através das civilizaões, a teoria de medidas não tinha ainda alcançado uma postura de desenvolvimento baseado no princípio atual. Isto só foi ocorrer a partir dos séculos VI e V a.C., na Grécia, através dos matemáticos Tales de Mileto (640-562 a.C.) e Pitágoras de Samos (592-500 a.C.).

Sabe-se que medida era um dos assuntos mais trabalhados na matemática grega, não no sentido moderno de associar um número a um objeto (conjunto), mas de estabelecer uma relação entre comprimentos, áreas e volumes.

Um exemplo disto é o famoso teorema atribuído à Pitágoras, que relaciona os lados de um triângulo retângulo de forma perfeita. A relação é dada por

$$a^2 + b^2 = c^2$$

onde <u>c</u> é a hipotenusa, <u>a</u> e <u>b</u> são os catetos do triângulo retângulo (ver figura 1). Os gregos consideravam esta relação como uma igualdade entre duas áreas (ver figura 2).

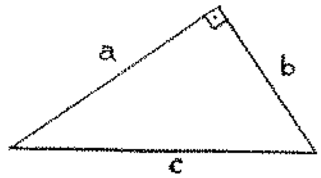


figura 1

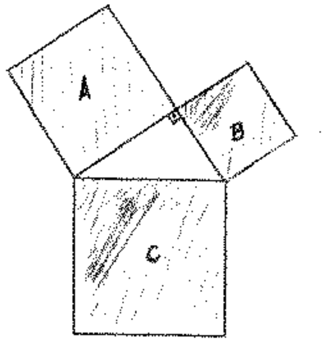


figura 2: A + B = C

2. O MÉTODO DA EXAUSTÃO

Um tratamento rigoroso sobre o conceito de área foi dado pelo matemático grego Euclides (330-260 a.C.) num tratado de geometria, modestamente denominado *Os Elementos de Geometria* (escrito por volta de 300 a.C.).

Este primeiro grande tratado matemático - conjunto de 13 livros dedicados ao fundamento e desenvolvimento lógico da Geometria - pôde organizar os resultados obtidos por alguns matemáticos que o antecederam (Tales, Pitágoras, Eudoxo e outros) e contém muitos resultados sobre áreas de retângulos, triângulos ou regiões formadas por estas figuras. Mas o objetivo principal era determinar a área de qualquer região plana.

Como fizeram para determiná-la?

A princípio, cobriam a região com retângulos e obtiam a área aproximada através da soma das áreas destes retângulos que o cobriam (ver figura 3). Porém, a sofisticação matemática dos gregos não admitia aproximações grosseiras - o que ocorria até então, pois consideravam um número finito de retângulos cobrindo a região - queriam obter a área exata desta região.

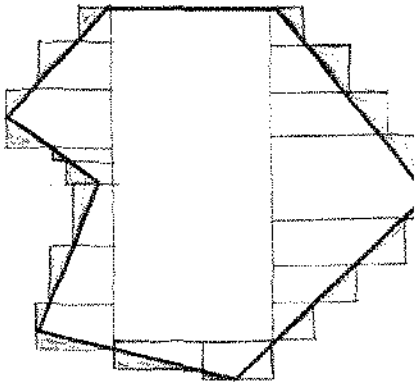


figura 3

Nesta direção, trocaram os retângulos pelos triângulos para fazer a cobertura da região (triangulação). Notemos que, com esta troca, de qualquer região plana limitada por linhas poligonais poderia ser obtida sua área de forma exata (ver figura 4).

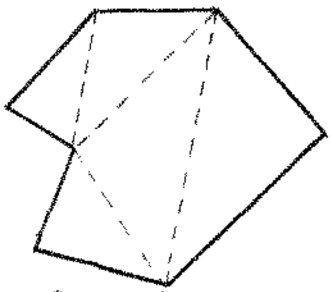


figura 4

Mas quando a região fosse limitada por linhas curvas tais regiões não poderiam ser cobertas por um número finito de triângulos para obter uma área exata (ver figura 5). Neste caso, utilizaram o *método da exaustão* descoberto por Eudoxo (408-355 a.C.).

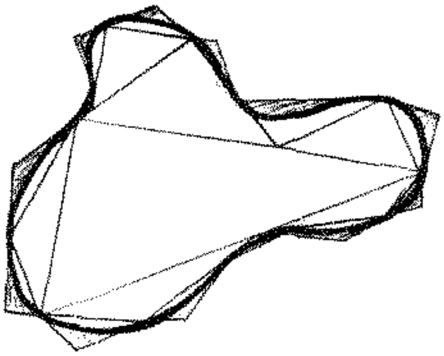


figura 5

Este método tinha como base a seguinte propriedade:

"Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que a sua metade e do resto novamente subtrair-se não menos que a metade e se esse processo de subtração é continuado, finalmente, restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie".

Equivalentemente, a propriedade diz que $\lim\limits_{n\to\infty} [M.(1-r)^n] = 0$, onde $0{,}5 < r < 1$ e M é uma grandeza dada.

Com isto, o próprio Eudoxo deu uma prova satisfatória (diz-se ser a primeira) de que o volume do cone é um terço do volume do cilindro de mesma base e mesma altura. Este método foi também usado no livro XII de *Os Elementos de Geometria* para demonstração de seus teoremas, dentre os quais, a prova de que a razão entre a área e o raio de um círculo é igual a uma constante (π) - que foi também encontrada por Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) em seu tratado de nome *A medida de um Círculo*.

Para ilustrarmos o método da exaustão veremos adiante o cálculo da área $\underline{A}$ de um círculo de raio $\underline{r}$ que será precisamente o que Euclides fez em seu livro, com mudanças apenas na notação e no argumento do limite:

Consideremos um círculo de raio $\underline{r}$ e os triângulos inscritos e circunscritos (conforme figura 6) com ângulo central igual a $2\pi/n$ onde $\underline{n}$ é um número natural maior do que 2. O triângulo inscrito tem base $2.r.\text{sen}(\pi/n)$, altura igual a $r.\cos(\pi/n)$ e, portanto, área igual a $r^2.\text{sen}(\pi/n).\cos(\pi/n)$.

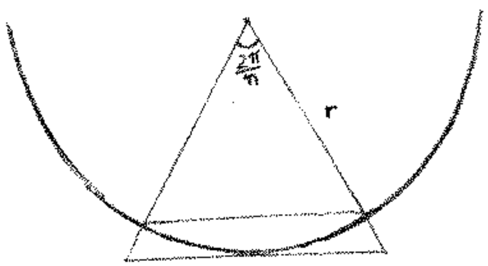


figura 6

Considere os $\underline{n}$ triângulos inscritos contidos no círculo, a área total é $A_n = n.\ r^2.\ \text{sen}(\pi/n).\cos(\pi/n)$. Como a região dada pelos triângulos inscritos está totalmente contida no círculo temos $A \geq A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e daí $A \geq \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} n.r^2.\text{sen}(\pi/n).\cos(\pi/n) = \pi.r^2.\lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen}(\pi/n)}{\pi/n}.\cos(\pi/n) = \pi.r^2$, onde A é a área do círculo.

De forma análoga, para os triângulos circunscritos temos a área total destes igual a $A_n = n.r^2.tg(\pi/n)$ e $A \leq A_n$, logo $A \leq \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} n.r^2.tg(\pi/n) = \pi.r^2.\lim_{n\to\infty} \frac{tg(\pi/n)}{\pi/n} = \pi.r^2$. Portanto, $A = \pi.r^2$.

Da mesma forma, com a utilização do método da exaustão, Arquimedes demonstra em outro tratado denominado *A Quadratura da Parábola* que a área $\underline{B}$ de um segmento de uma parábola (ver figura 7) é quatro terços da área de seu triângulo inscrito de maior área.

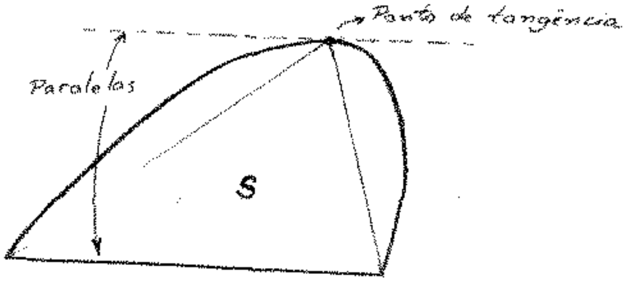


Figura 7

Observemos que a Teoria de Medidas atual está baseada no método da exaustão mas teve seu desenvolvimento estabelecido dois milênios depois que Eudoxo o propôs. Um dos motivos a que se atribui tal acontecimento é o fato de terem se limitado a trabalhar apenas com triangulações e isto dificultava muito os cálculos pois cada caso exigia um tratamento diferente. Outro motivo que se pode observar é que os gregos não possuíam o conceito de número real desenvolvido.

3. NEWTON, CAUCHY E RIEMANN

Foi através do abandono dos triângulos (a tradição grega) como elemento principal para se cobrir determinada região e obter a área, que a teoria de medidas obteve seu desenvolvimento.

Observa-se, por exemplo, no tratado *Philosophie Naturalis Principia Mathematica* (Os princípios matemáticos da filosofia natural) de Isaac Newton (1642-1727) em 1687 figuras que denotam tal abandono (ver figura 8)

O tratamento dado por Newton, em termos de medida de área, era mais cuidadoso e feito mediante a descrição da curva através do que chamamos hoje de

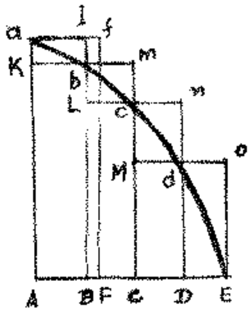


Figura 8

função. A área era vista como um limite das somas das áreas retangulares (a integral definida). E tal área poderia ser calculada através do uso do famoso Teorema Fundamental do Cálculo (que relaciona o cálculo das tangentes com o cálculo de áreas). No trabalho de Newton já constava a relação entre a derivada e a integral definida, apesar de não expressá-las com a devida precisão.

Num trecho de *Tratado da Quadratura das Curvas* (1704) de Newton vemos que a idéia precisa de limite e função ainda não estavam bem estabelecidos por ele:

Considero aqui as quantidades matemáticas, não formadas pela adjunção de partes mínimas, mas descritas por um movimento contínuo.

As linhas descritas, e portanto geradas, não por aposição de partes, mas pelo movimento contínuo de pontos; as superfícies pelo movimento de linhas; os sólidos pelo movimento de superfícies; os ângulos pela rotação de lados; o tempo por um fluxo contínuo, e assim para as outras. Estas gerações têm verdadeiramente lugar na natureza das coisas e revelam-se todos os dias no movimento dos corpos".

Antes de Newton, dois matemáticos James Gregory (1638-1675) e Isaac Barrow (1630-1677) já trabalhavam esta idéia também de forma imprecisa. Tais conceitos só foram dados com maior precisão por Augustin Louis Cauchy (1789-1857) em 1820, através das noções formais de função, limite e integral. Com a definição da integral de Cauchy o número de funções que poderiam ser integráveis iam além das funções contínuas.

O trabalho de Cauchy foi generalizado por Bernard Riemann (1826-1866) através da definição de integral que conhecemos pelo seu nome. Através desta definição Riemann obtém uma condição necessária e suficiente para as funções integráveis.

Mas, apesar do princípio básico moderno que envolve a teoriade medidas já estarem bem estabelecidos nas definições de Cauchy e Riemann seus objetivos estavam bem longe de serem o de estudar medidas propriamente ditas. A preocupação de Cauchy era o estudo das propriedades das funções contínuas e Riemann se preocupava em estudar a totalidade de funções que possuiam a propriedade de ser integráveis.

4. O NASCIMENTO DA TEORIA

Apesar de todos os esforços dos gregos e dos trabalhos de Newton, Cauchy e Riemann a Teoria de Medidas somente tomou corpo a partir das noções de conjunto mensurável dadas por Peano (1859-1932) e generalizadas por Jordan.

Tais noções respondem de certa forma às questões que envolviam o problema de se determinar a área de uma região plana qualquer, pois apesar de tudo que se tinha feito neste sentido muitas dúvidas ainda existiam como, por exemplo, se todo subconjunto do plano tinha, de fato, uma área.

Foi através do estudo dos objetos que possuem esta propriedade interessante que levou Peano a considerar algo distinto da integral. Apesar de Peano tê-lo feito baseado nas idéias de Newton e Riemann sua definição de área certamente seria o que os gregos teriam escolhido. Sua definição foi dada da seguinte forma:

"Considere R um subconjunto do plano e divida a região numa *quantidade finita* de retângulos contidos inteiramente em R, então a área total de todos estes retângulos é menor ou igual a área A de R (ver figura 9). Daí, segue que o máximo (ou supremo) destas divisões constitui uma subestimação de A. Tal valor foi denominado *conteúdo interno* denotado por $c_i(R)$".

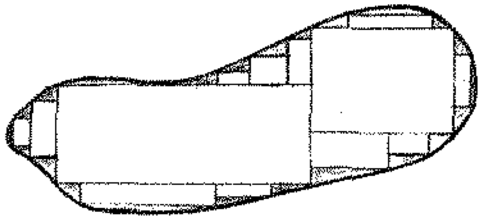


Figura 9

Analogamente, Peano definiu *conteúdo externo* de R, denotado por $c_e(R)$, considerando a área total dos retângulos que cobrem completamente R. (ver figura 10)

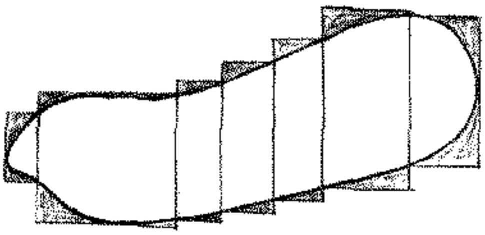


Figura 10

Desta forma, temos

$$c_i(R) \leq A \leq c_e(R)$$

Quando se tem $c_i(R) = c_e(R)$, Peano define a área de R como sendo este valor. E quando $c_i(R) < c_e(R)$, Peano considera que R não tem área.

Se todo subconjunto do plano, tivesse conteúdo no sentido de Peano e Jordan, o problema estava resolvido. Mas pode-se obter um conjunto $\mathbb{A}$ tal que $c_i(\mathbb{A}) < c_e(\mathbb{A})$.

Consideremos, por exemplo, o quadrado $\mathbb{A}$ de área 1, retiremos o conjunto dos pares ordenados racionais contidos neste quadrado e chamamos de $\mathbb{E}$ o conjunto destes pontos retirados.

Vemos que $\mathbb{A}\setminus\mathbb{E}$ possui conteúdo externo igual a zero e conteúdo interno igual a 1. O mesmo ocorre com o conjunto $\mathbb{E}$, pela definição de Peano e Jordan. Mas é intuitivo pensar que um conjunto enumerável teria área e esta seria 0.

Além disso, mostra-se que se dividirmos um retângulo numa quantidade enumerável (mesmo infinita) de retângulos menores então sua área é sempre a soma das áreas dos retângulos menores. Assim, $\mathbb{E}$ poderia ser dividido numa quantidade enumerável de pontos, como um ponto deveria ter área zero, $\mathbb{E}$ teria área 0 e $\mathbb{A}\setminus\mathbb{E}$ deveria ter área 1.

Este fato mostra uma falha na noção de área de Peano e Jordan e leva à uma necessidade de estender tal definição e isto foi iniciado por Emile Borel, constituindo atualmente uma definição bastante geral de medida e mais natural para se medir áreas.

Tal extensão usou uma idéia importante que era de considerar infinitas, porém enumeráveis,divisões da região ao invés de finitas como faziam Peano e Jordan. A idéia foi desenvolvida dentro de uma teoria matemática própria por Henri Lebesgue.

Lebesgue definiu uma medida exterior m_e análoga ao conteúdo externo só que considerando infinitas divisões da região. Esta medida externa de Lebesgue constituia a noção intuitiva de área. Por exemplo, os conjuntos $\mathbb{A}\setminus\mathbb{E}$ e $\mathbb{E}$ considerados anteriormente possuiam medida externa 1 e 0, respectivamente.

Mas a noção de medida externa de Lebesgue não possibilitava estabelecer a propriedade de que o todo é igual a soma das partes (a propriedade de ser enumerávelmente aditiva, como veremos no capítulo 1). Para isto, considerou uma noção de medida interna m_i que não é análoga a noção de conteúdo interno de Peano e Jordan. Daí, definiu os conjuntos Lebesgue-mensuráves que são os conjuntos $\mathbb{M}$ tais que $m_e(\mathbb{M}) = m_i(\mathbb{M})$. Desta forma, o todo era igual a soma das partes para os conjuntos Lebesgue-mensuráveis.

A noção de medida de Lebesgue foi reformulada mais tarde por Caratheodóry dando a noção de medida externa m para uma classe de conjuntos abstratos (a σ-álgebra) e definindo um *conjunto mensuravel* S através da igualdade:

$$m(\mathbb{D}) = m(\mathbb{D} \cap \mathbb{S}) + m(\mathbb{D} \setminus \mathbb{S})$$

para todo conjunto $\mathbb{D}$ na classe considerada.

Através desta definição, obteve uma medida sobre uma classe de conjuntos que possuiam a propriedade de que a medida do todo era igual a soma das medidas das partes. A pergunta que surge naturalmente é se $m_e(\mathbb{S})$, quando $\mathbb{S}$ é mensurável, correspondia realmente à noção intuitiva de área que possuimos. A resposta é que ela é a noção ideal para se obter área apesar de sua forte dose de abstração. Nada foi encontrado que se prove o contrário ou que mostre alguma falha nas noções em relação à intuição, ou seja, não se encontrou um conjunto mensurável cuja área (como demanda nossa intuição) seja outra que não a de Lebesgue. Além disso, não se encontrou um conjunto não-mensurável que poderia possuir área segundo nossa intuição.

Desta forma, está aí a noção mais geral de medida de área e que obteve muitas aplicações.

5. APLICAÇÃO DA TEORIA

A noção de mensurabilidade dada por Lebesgue e reformulada por Carathéodory possibilitou dar uma definição de Integral mais geral do que a Integral de Riemann, denominada Integral de Lebesgue. Tal integral dependia exclusivamente da medida definida num espaço totalmente abstrato (o espaço mensurável) ao invés de, simplesmente, o espaço euclideano – como para a Integral de Riemann.

Entretanto, mais do que uma simples generalização da Integral de Riemann a Integral de Lebesgue possibilitou a explicação de muitos fatos que ocorriam com a teoria de integracão. Por exemplo, uma função limitada é Riemann-integrável se, e somente se, é contínua "quase-sempre". Tal fato não fazia sentido sem os recursos da teoria de Lebesgue de integracão.

Mas, além de poder estabelecer resultados importantes em análise, a noção de mensurabilidade de Lebesgue reformulada por Carathеodóry teve aplicação numa teoria que foi originada no século XVII através de problemas matemáticos que envolviam jogos: a teoria de probabilidades.

Tal assunto, sistematizado por Laplace por volta de 1800, não era considerado um ramo da matemática mas apenas uma disciplina separada que fazia uso das ferramentas de análise matemática. Ela só foi obter o seu lugar de destaque a partir de 1930 com A. N. Kolmogoroff que fez deste assunto uma teoria totalmente rigorosa dentro da matemática.

A axiomatização da probabilidade foi baseada nas idéias da teoria de medidas considerando os eventos como sendo os conjuntos mensuráveis, a probabilidade como uma medida com as propriedades:

(a) A probabilidade do evento vazio é 0 ,

(b) A probabilidade do espaço amostral todo é igual a 1,

(c) A propriedade da σ-aditividade, ou seja, a probabilidade da união de eventos mutuamente exclusivos é a soma das probabilidades de cada evento.

Com tais axiomas pode-se dar à probabilidade o seu lugar dentro da matemática.

6. AS LIMITAÇÕES DA TEORIA

A medida de probabilidade que constitui um importante exemplo de medida clássica foi, até certo ponto, uma aparato matemático bem desenvolvido para lidar com incertezas.

Mas a teoria de probabilidades é aplicável somente em tipos muito especiais de incertezas. Suas limitações foram cada vez mais reconhecidas. Será estudado nos próximos capítulos os vários tipos de incertezas em que a teoria de probabilidade não é aplicável de forma satisfatória.

Um dos conceitos (dado por Zadeh em 1965) que abriu as portas para este problema foi o de conjuntos fuzzy e será visto no capítulo 2. Tal conceito representa uma forma de incerteza verificada pela dificuldade de se definir bem as fronteiras de um conjunto clássico . Este tipo de incerteza dada pelos conjuntos "fuzzy" pode ser avaliado através das medidas de "fuzziness". Já que um conjunto "fuzzy" denota este tipo de incerteza podemos defini-lo como uma função que determina o grau desta incerteza. Tais medidas serão analisadas no final do capítulo 2.

Existe outro tipo de incerteza dada pela análise de processos de decisão que pode ser medido através de outro conceito de medidas dado por Sugeno em 1974 em sua tese de doutorado. Tal medida é denominada medida fuzzy e será o objeto principal deste trabalho sendo abordado no capítulo 3.

Considere, por exemplo, uma situação em que se quer avaliar as condições de moradia de uma cidade. Devem ser considerados vários fatores simultaneamente: localização geográfica, altitude, clima, população, política, etc. A importância de cada um desses fatores varia de pessoa para pessoa e partes de um determinado fator podem não ser importantes. Medir em situações como esta envolvem a subjetividade humana.

Outra situação que envolve incerteza em termos de processo de decisão é quando se pesquisa inteligência artificial em que o uso de funções probabilidade para descrever julgamentos subjetivos leva a resultados contraditórios.

Desta forma, surge a necessidade de se falar em outro tipo de função (medida) que não seja necessariamente aditiva, pois tal condição é muito forte para o tipo de fenômeno estudado , e é o que faremos neste trabalho.

CAPÍTULO 1
TEORIA GERAL DE MEDIDAS

1. INTRODUÇAO

O objetivo deste trabalho é estudar as medidas que se propoem avaliar certos conceitos que envolvem a subjetividade humana. Mas se estamos propondo apresentar o subjetivo (as medidas subjetivas) nada mais coerente do que começar pelo que se conhece: o objetivo (as medidas objetivas).

Vamos fazer aqui uma coletânea geral de alguns tipos de medidas mais conhecidos: a medida propriamente dita, a massa, a medida externa, a medida de Lebesgue, a medida de Hausdorff e a medida de Randon.

Muitas das proposições colocadas aqui não serão demonstradas por serem fatos bem conhecidos, apenas citaremos a fonte na qual se pode encontrar a demonstração.

2. MEDIDA

Medir um elemento é apenas comparar com outro elemento fixado (a unidade de medida)? Não me parece exato isto ou, pelo menos, não iremos muito longe se insistirmos em pensar desta forma.

Digamos que seja melhor dizer que <u>medir um elemento</u> é associar a ele um número real (seja ele positivo ou negativo). Nada mais natural isto: uma associação. Mas como se associa uma valor a este elemento? De que forma (ou várias formas) isto deve ocorrer? Como devem ser estas associações?

Chamaremos de <u>teoria geral de medidas</u> às diversas respostas a estas perguntas. Começaremos definindo o que vamos medir, os elementos que poderão ser medidos.

DEFINIÇÃO 1 - Consideremos um conjunto $\mathbb{X}$ não vazio, uma família de subconjuntos de $\mathbb{X}$, digamos $\mathscr{E}$, é dita ser uma *σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{X}$* se as seguintes condições são satisfeitas:

(σ1) $\mathbb{X} \in \mathscr{E}$

(σ2) Se $\mathbb{A} \in \mathscr{E}$ então o complemento $(\mathbb{X} \setminus \mathbb{A}) \in \mathscr{E}$

(σ3) Se $(\mathbb{A}_n)$ é uma sequência enumerável de conjuntos em $\mathscr{E}$ então a união $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{A}_n \in \mathscr{E}$.

Ao par $(\mathbb{X}, \mathscr{E})$, consistindo do conjunto $\mathbb{X}$ e da σ-álgebra $\mathscr{E}$ de subconjuntos de $\mathbb{X}$, dá-se o nome de *espaço mensurável*. Um conjunto em $\mathscr{E}$ será chamado de *$\mathscr{E}$-mensurável*. Este espaço mensurável possui certas propriedades importantes que serão citadas na proposição abaixo (para sua demonstração ver [2]).

PROPOSIÇÃO 1 - Seja $\mathbb{X}$ um conjunto não vazio e uma σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{X}$, então:

(a) $\emptyset \in \mathscr{E}$

(b) Se $(\mathbb{A}_n)$ é uma sequência enumerável de conjuntos em $\mathscr{E}$, então :

(b_1) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{A}_n \in \mathscr{E}$

(b_2) $\lim\sup \mathbb{A}_n \in \mathscr{E}$

(b_3) $\lim\inf \mathbb{A}_n \in \mathscr{E}$

(c) Se $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathscr{E}$ então $(\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \in \mathscr{E}$

EXEMPLO 1 - *A σ-álgebra gerada por uma coleção de subconjuntos de*

$\mathbb{X}$;

Seja $\mathscr{A}$ uma coleção não-vazia de subconjuntos de $\mathbb{X}$. Existe uma menor σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{X}$ que contém $\mathscr{A}$, e é dada pela intersecção de todas as σ-álgebras contendo $\mathscr{A}$ observando que a coleção de todos os subconjuntos de $\mathbb{X}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{X}$ contendo $\mathscr{A}$ e, além disso, a intersecção de todas as σ-álgebras contendo $\mathscr{A}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos contendo $\mathscr{A}$.

EXEMPLO 2 - *A σ-álgebra de Borel.*

Seja $\mathbb{X}$ o conjunto $\mathbb{R}^n$ das n-uplas de números reais. Daremos o nome de *σ-álgebra de Borel de* $\mathbb{R}^n$ à σ-álgebra $\mathscr{B}$ gerada por por todos os conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ e os conjuntos de $\mathscr{B}$ chamaremos de *conjuntos de Borel*. Mais geralmente, podemos tomar os conjuntos abertos de um espaço métrico $\mathbb{M}$.

Agora que já sabemos o que vamos medir (os conjuntos $\mathscr{E}$-mensuráveis), resta saber com o que vamos medir. Existem vários tipos de medidas, cada qual com suas propriedades necessárias, mas estudaremos aqui os principais. Neste parágrafo, consideraremos o tipo mais geral possível. Tal definição é sugerida pela idéia intuitiva que temos de comprimento, área e volume.

DEFINIÇÃO 2 - Seja $\mathscr{E}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de um conjunto arbitrário $\mathbb{X}$, uma *medida* μ em $\mathscr{E}$ é uma função real que satisfaz as seguintes condições:

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$

(M2) $\mu(\mathbb{A}) \geq 0$ para todo $\mathbb{A} \in \mathscr{E}$

(M3) Para toda sequência enumerável $(\mathbb{A}_n)$ disjunta de conjuntos em $\mathscr{C}$, tem-se:

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{A}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\mathbb{A}_n)$$

Observação:

Eventualmente, pode-se ter $\mu(\mathbb{A}) = \infty$.

A terna $(\mathbb{X}, \mathscr{C}, \mu)$ constituída por um conjunto arbitrário $\mathbb{X}$, uma σ-álgebra $\mathscr{C}$ de subconjuntos de $\mathbb{X}$ e uma medida μ em $\mathscr{C}$, é denominada um *espaço de medida*. Algumas propriedades desta medida serão colocadas a seguir (para suas demonstrações ver [2]).

EXEMPLO 3 - Seja $\mathbb{X} = \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ e $\mathscr{C}$ a σ-álgebra de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$. Definamos μ: $\mathscr{C} \rightarrowtail \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$\mu(\mathbb{A}) = \begin{cases} \text{Número de elementos de } \mathbb{A}, \text{ se } \mathbb{A} \text{ é finito} \\ +\infty, \quad \text{se } \mathbb{A} \text{ é infinito} \end{cases}$$

Então, μ é uma medida em $\mathbb{N}$ denominada *medida de contagem em* $\mathbb{N}$.

EXEMPLO 4 - Seja $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ e $\mathscr{C}$ a σ-álgebra de Borel, veremos no parágrafo seguinte que existe uma medida λ definida em $\mathscr{C}$ que coincide com o comprimento dos intervalos fechados, isto é, se $\mathbb{A}$ é um intervalo fechado não-vazio $[a,b]$ então $\lambda(\mathbb{A}) = (b - a)$. Mais geralmente, podemos considerar $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ e seus intervalos n-dimensionais com seus volumes.

PROPOSIÇÃO 2 - Seja μ uma medida definida numa σ-álgebra $\mathscr{C}$ de subconjuntos de um conjunto arbitrário $\mathbb{X}$. Então, temos

(a) Se $\mathbb{A}$, $\mathbb{B} \in \mathcal{E}$ e $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$, então $\mu(\mathbb{A}) \leq \mu(\mathbb{B})$

(b) Se $\mathbb{A}$, $\mathbb{B} \in \mathcal{E}$ e $\mu(\mathbb{B}) < +\infty$, então $\mu(\mathbb{B}\setminus\mathbb{A}) = \mu(\mathbb{B}) - \mu(\mathbb{A})$

(c) Se $(\mathbb{A}_n)$ é uma sequência enumerável crescente de conjuntos em $\mathcal{E}$, então

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{A}_n) = \lim_{n\to\infty} \mu\ (\mathbb{A}_n)$$

(d) Se $(\mathbb{B}_n)$ é uma sequência enumerável decrescente de conjuntos em $\mathcal{E}$ e $\mu(\mathbb{B}_1) < +\infty$, então

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{B}_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(\mathbb{B}_n)$$

Em certos casos, é interessante considerar funções (sugerida pela noção de carga elétrica) que se comportam como medidas, exceto no assumir somente valores positivos. Uma tal função é denominada *massa* e é definida como sendo uma função real estendida ($\overline{\mathbb{R}}$) em $\mathcal{E}$ que satisfaz apenas as condições (M1) e (M3) da definição 2.

Convém ressaltarmos que, se μ é uma massa, μ não pode assumir os valores $+\infty$ e $-\infty$ ao mesmo tempo. Pois, se existem $\mathbb{A}$, $\mathbb{B} \in \mathcal{E}$ tais que $\mu(\mathbb{A}) = +\infty$ e $\mu(\mathbb{B}) = -\infty$ então teremos:

$\mu(\mathbb{A}\cup\mathbb{B}) = \mu(\mathbb{A}) + \mu(\mathbb{B}) = +\infty + (-\infty)$ e tal expressão não teria significado.

A massa tem uma propriedade importante estabelecida pelo *Teorema da decomposição de Jordan* (Ver página 83 de [2]) que diz que uma massa em $\mathcal{E}$ pode ser decomposta como a diferença de duas medidas finitas.

3. A MEDIDA EXTERNA

No parágrafo anterior, vimos a noção mais geral do conceito de medir objetivamente. Tal noção foi obtida através da exigência de certas propriedades e pode ser gerada por uma função que não seja necessariamente enumeravelmente aditiva. A partir desta função denominada *medida externa*, poderemos construir também uma σ-álgebra obtendo assim um espaço de medida.

DEFINIÇÃO 3 - Sejam $\mathbb{X}$ um conjunto arbitrário e $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ o conjunto das partes de $\mathbb{X}$. Diremos que uma função real estendida α é uma *medida externa* se satisfaz as seguintes condições:

(ME1) $\alpha(\mathbb{A}) \geq 0$, para todo $\mathbb{A} \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$

(ME2) $\alpha(\mathbb{A}) \leq \alpha(\mathbb{B})$ se $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \subseteq \mathbb{X}$

(ME3) $\alpha(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{A}_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(\mathbb{A}_n)$, para toda sequência enumerável de conjuntos $(\mathbb{A}_n)$ em $\mathcal{P}(\mathbb{X})$.

EXEMPLO 5 - Consideremos os intervalos fechados n-dimensionais $I_n = \{ (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n;\ a_i \leq x_i \leq b_i,\ i=1,\ldots,n \}$ contidos em $\mathbb{R}^n$ e seus volumes $v(I_n) = \prod_{n=1}^{\infty} (b_i - a_i)$. Definamos uma função $\mu_l : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \rightarrowtail \mathbb{R}$, tal que para cada $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mu_l(\mathbb{E}) = \inf_k \sum_{1}^{\infty} v(I_n^k)$ onde o ínfimo é tomado sobre todas as coberturas enumeráveis do conjunto $\mathbb{E}$ feita por intervalos I_n^k. Tal função é uma medida externa, denominada *medida externa de Lebesgue* (ou *medida exterior*).

Observação:

Esta noção foi dada por Henri Lebesgue antes de se falar em medida externa. Caratheodóry definiu mais tarde medida externa visando generalizar a noção de medida externa de Lebesgue.

EXEMPLO 6 - *(Vitali)*

Este exemplo responde negativamente à seguinte pergunta:

"É verdade que, para dois subconjuntos quaisquer $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ de $\mathbb{X}$ tem-se $\alpha(\mathbb{A}) + \alpha(\mathbb{B}) = \alpha(\mathbb{A} \cup \mathbb{B})$, onde α é uma medida externa?

Segue-se o exemplo:

Consideremos sobre $\mathbb{R}$ a relação de equivalência:

$x \approx y \iff (x- y) \in \mathbb{Q}$=(conjunto dos números racionais)

Pelo postulado de Zermelo, existe um conjunto $\mathbb{A} \subseteq [0,1]$ tal que

(i) $a_1 \neq a_2$ com $a_1, a_2 \in \mathbb{A} \iff a_1 - a_2 \notin \mathbb{Q}$.

(ii) Para todo $r \in \mathbb{R}$, $\exists\ a \in \mathbb{A}$ tal que $r-a \in \mathbb{Q}$.

Consideremos a família enumerável de conjuntos $(\mathbb{A}_q)$, $q \in \mathbb{Q}$, $|q|<1$ onde $A_q = \{a+q / a \in \mathbb{A}\}$.

Temos $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \mathbb{A}_q \subseteq [-1,2]$ e $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \mathbb{A}_q \supseteq [0,1]$.

Portanto, se μ_l é a medida externa de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ temos pela condição (ME3)

$\mu_l([0,1]) = 1 \leq \sum_{q\in\mathbb{Q}} \mu_l(\mathbb{A}_q)$ uma vez que se tem $\mu_l(\mathbb{A}_q) = \mu_l(\mathbb{A})$.

Da desigualdade acima segue que $\mu_l(\mathbb{A}) > 0$. Existirá, portanto, um número inteiro n tal que $n.\mu_l(\mathbb{A}) > 3$.

Se a aditividade valesse para todos os conjuntos $\mathbb{A}_q$ e, por conseguinte, um número finito (observemos que os conjuntos $\mathbb{A}_q$ são disjuntos dois a dois), teríamos:

$\mu_l([-1,2]) = 3 \geq \sum_{q\in\mathbb{Q}} \mu_l(\mathbb{A}_q) = n.\mu_l(\mathbb{A}) > 3$ o que é um absurdo.

Através da medida externa α constroem-se os conjuntos mensuráveis.

DEFINIÇÃO 4 - Seja α uma medida externa definida nas partes $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ de um conjunto arbitrário $\mathbb{X}$. Diremos que um subconjunto $\mathbb{E}$ de $\mathbb{X}$ é *α-mensurável* ou *mensurável segundo Carathéodory* se:

$$\alpha(\mathbb{A}) = \alpha(\mathbb{A} \cap \mathbb{E}) + \alpha(\mathbb{A} \setminus \mathbb{E}) \text{ para todo } \mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$$

Se $\mathbb{E}$ é um conjunto α-mensurável, diremos que $\alpha(\mathbb{E})$ é a *α-medida* de $\mathbb{E}$. Obtemos com esta definição as seguintes propriedades que caracterizam um espaço de medida, conforme a definição 2.

PROPOSIÇÃO 3 - Seja α uma medida externa definida no conjunto das partes de um conjunto arbitrário $\mathbb{X}$. Então:

(i) A família dos subconjuntos α-mensuráveis de $\mathbb{X}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{X}$.

(ii) A medida externa α restrita aos conjuntos α-mensuráveis é uma medida.

Para sua demonstração ver página 194 de [24].

EXEMPLO 7 - *A σ-álgebra de Borel*

Todo conjunto de Borel é μ_l-mensurável onde μ_l é a medida externa de Lebesgue. Com esta σ-álgebra e a medida externa de Lebesgue temos pela proposição 3 que $(R^n, \mathcal{B}, \mu_l)$ é um espaço de medida e μ_l é denominada *medida de Lebesgue*.

Observação: A medida de Lebesgue constitui uma generalização natural das noções elementares de comprimento de um segmento, área de um retângulo e volume de um paralelepípedo. Esta noção de medida serviu para a construção de uma integral mais geral do que a Integral de Riemann estudada em cursos introdutórios de Análise.

Tanto Lebesgue quanto Riemann estavam mais interessados em integração do que em medida e parece que Lebesgue construiu sua medida original com o principal objetivo de estender a definição de integral.

4. A MEDIDA DE HAUSDORFF

Quando consideramos a medida de Lebesgue vemos que se medirmos, por exemplo, um intervalo em $\mathbb{R}^2$ teremos tal medida igual a zero, pois os abertos de $\mathbb{R}^2$ são reunião de bolas tais que suas medidas tenderão a zero quando cobrirmos o intervalo. Isto ocorre sempre que considerarmos a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ e tentarmos medir conjuntos de dimensão inferior a n. A *medida de Hausdorff* que será definida abaixo, permite que se meça conjuntos de dimensão distinta à do conjunto onde estão mergulhados. Tal medida é utilizada, por exemplo, para definir o *perímetro de um conjunto*.

DEFINIÇÃO 5 - Seja $\mathbb{M}$ um espaço métrico e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{M})$. Consideremos, para todo $\rho > 0$, $\mathcal{F}_\rho = \{\mathbb{F} \in \mathcal{F}\colon \operatorname{diam}(\mathbb{F}) < \rho\}$ e $\alpha_\rho = \alpha|\mathcal{F}_\rho$ onde α é uma medida externa em $\mathcal{P}(\mathbb{M})$. Seja $\beta_\rho = \sup\{ \beta : \beta$ é uma medida externa sobre $\bigcup \mathbb{F}$, $\mathbb{F} \in \mathcal{F}$ e $\beta(\mathbb{F}) \leq \alpha_\rho(\mathbb{F})$ para todo $\mathbb{F} \in \mathcal{F} \}$. Denotemos por H_α a medida externa $\sup\limits_{\rho>0} \beta_\rho$.

Diremos que $H_\alpha(\mathbb{F})$ é uma *medida de Hausdorff k-dimensional* se $\alpha(\mathbb{F}) = (\operatorname{diam} \mathbb{F})^k$, onde $k > 0$ é um número real.

Observações:

(a) Se $\mathbb{M} = \mathbb{R}^n$ escrevemos H_k^n para a medida de Hausdorff sobre $\mathbb{R}^n$ gerada por $\alpha(\mathbb{F}) = (\operatorname{diam}\mathbb{F})^k$.

(b) $H^n_{n+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) = 0$, para todo $\varepsilon > 0$.

(c) Para $k < 0$, $H^n_k(\mathbb{X}) = +\infty$ e $H^n_0(\mathbb{X})$ = cardinalidade de $\mathbb{X}$.

EXEMPLO 8 - Sabemos que a medida de Lebesgue do conjunto de Cantor $\mathbb{K}$ é 0. Se tomarmos $k = \log_3 2$, teremos a medida de Hausdorff $H^1_k(\mathbb{K}) = 1$.

Os seguintes resultados são importantes sobre medida de Hausdorff. Para sua discussão ver página 8 de [4].

PROPOSIÇÃO 4 - H^n_n é proporcional á medida de Lebesgue.

PROPOSIÇÃO 5 - Se $k \in \mathbb{N}$, $0 < k < n$ e $\mathbb{V}$ é uma variedade k-dimensional, então $H^n_k(\mathbb{V})$ coincide com a medida clássica k-dimensional de $\mathbb{V}$.

APLICAÇÕES DA MEDIDA DE HAUSDORFF

A DIMENSÃO DE HAUSDORFF

DEFINIÇÃO 6 - Seja $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, a *dimensão de Hausdorff de* $\mathbb{X}$ é o número real definido por:

$$\dim \mathbb{X} = \inf_{(H^n_k(\mathbb{X})=0)} k = \sup_{(H^n_k(\mathbb{X})=+\infty)} k$$

EXEMPLO 9 - Pela proposição 5, temos que se $\mathbb{X} = \mathbb{V}$ é uma variedade k-dimensional de $\mathbb{R}^n$ então $H^n_k(\mathbb{V})$ = med $\mathbb{V}$ o que implica que $\dim_{(H)} \mathbb{V} = k$

EXEMPLO 10 - A dimensão de Hausdorff não é necessariamente um número inteiro. Temos, por exemplo, o conjunto de Cantor $\mathbb{K}$:

$$\dim_{(H)} (\mathbb{K}) = \log_3 2$$

O PERÍMETRO DE UM CONJUNTO

Através da noção de medida de Hausdorff podemos dar uma definição de perímetro de um conjunto. Para isso, consideremos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, com $\partial\Omega$ (fronteira de Ω) suficientemente regular para que valha o Teorema de Green:

$\int \operatorname{div} \varphi(x)\, dx = \int \varphi . \gamma(x)\, dH_{n-1}$, para toda $\varphi \in [C_0^1(\mathbb{R}^n)]^n$ onde $\varphi(x)$ é o vetor normal exterior.

Notemos que

$$H_{n-1}(\partial\Omega) = \sup \{ \int \varphi(x). \gamma(x)\, dH_{n-1} : \varphi \in [C_0^1(\mathbb{R}^n)],\ |\varphi(x)| \leq 1,\ \forall\ x\}$$

E daí,

$$H_{n-1}(\partial\Omega) = \sup \{ \int \operatorname{div} \varphi(x)\, dx : \varphi \in [C_0^1(\mathbb{R}^n)]^n,\ |\varphi(x)| \leq 1,\ \forall\ x\}$$

A partir desta igualdade, a seguinte definição de perímetro é sugestiva:

DEFINIÇÃO 7 - Se $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto mensurável, chamaremos de *perímetro de* $\mathbb{E}$ o valor (talvez $+\infty$) dado por

$$P(\mathbb{E}) = \sup \{ \int \operatorname{div} \varphi(x)\, dx : \varphi \in [C_0^1(\mathbb{R}^n)]^n,\ |\varphi(x)| \leq 1,\ \forall\ x\}$$

Se $\mathbb{E}$ satisfaz as hipóteses de regularidade do Teorema de Green, temos

$P(\mathbb{E}) = H_{n-1}(\partial\Omega)$, isto é, se $H_{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$ então $P(\mathbb{E}) < +\infty$.

5. OUTROS TIPOS DE MEDIDAS

Além das medidas que foram definidas anteriormente existem outras que são definidas para determinados objetivos. Veja, por exemplo, que a medida externa de Lebesgue em $\mathbb{R}$ foi definida a partir do comprimento de um intervalo . Tal noção pode ser generalizada considerando uma função f finita e monótona crescente tal que para cada intervalo semi-aberto da forma $(a,b]$ tem-se uma medida externa definida por

$$\lambda((a,b]) = \lambda_f((a,b]) = f(b) - f(a)$$

e denominada *medida de Lebesgue-Stieltjes.*

Uma outra medida que é definida em espaços métricos é a *medida de Radon* que é uma função $\mu\colon \mathbb{B}_o(\mathbb{M}) \rightarrowtail [0,+\infty]$ que seja numeravelmente aditiva, onde $\mathbb{M}$ é um espaço métrico e $\mathbb{B}_o(\mathbb{M}) = \{\mathbb{B} \subseteq \mathbb{M}$; $\mathbb{B}$ é um conjunto de Borel e $\overline{\mathbb{B}}$ é compacto$\}$

CAPÍTULO 2
CONJUNTOS FUZZY

1. INTRODUÇÃO

A noção de conjunto fuzzy foi dada por Zadeh em 1965 [29] com o objetivo de definir conjuntos que não possuem bordos (fronteiras) bem definidos.

Considere, por exemplo, o conjunto (clássico) dos números inteiros. É claro que o número 2 pertence efetivamente a este conjunto e é óbvio também que 0,5 não pertence. Como se vê, nos onjuntos clássicos (os que usualmente conhecemos) a relação de pertinência elemento-conjunto ocorre de modo dual, ou seja, dado um conjunto $\mathbb{A}$ e um elemento x dizemos que $x \in \mathbb{A}$ ou então que $x \notin \mathbb{A}$. Porém, existem casos em que esta relação dual não é precisa, isto é, não sabemos dizer se um elemento pertence (efetivamente) a um determinado conjunto ou não.

Observe, por exemplo, o conjunto $\mathbb{F}$ dos números inteiros que são *pequenos*, ou seja,

$$\mathbb{F} = \{ x \in \mathbb{Z} : x \text{ é pequeno } \}$$

Pergunta: O número 3 e o número 25 pertencem a $\mathbb{F}$?

A resposta a esta pergunta é incerta pois não sabemos até que ponto podemos dizer objetivamente que um número inteiro é pequeno ou não. Por outro lado, podemos associar ao número 3 e ao número 25 graus de pertinência compatíveis com o conceito dado pelo conjunto $\mathbb{F}$. Por exemplo, ao invés de dizermos $3 \in \mathbb{F}$ e $25 \notin \mathbb{F}$ associamos a 3 e 25 os respectivos graus de pertinência 0,9 e 0,3 que representam, subjetivamente, os graus de pertinência de 3 e 25 ao conjunto $\mathbb{F}$.

Análogo ao conjunto $\mathbb{F}$, podemos imaginar uma infinidade de conceitos que possuem a característica de não estarem bem definidas em suas fronteiras. Por exemplo, o conjunto dos homens altos, o diagnóstico médico de um paciente, bactérias em relação a classificação animal-vegetal, etc.

Desta forma, surge a noção de *conjunto fuzzy* que representa um tipo de incerteza que envolve a subjetividade humana.

2 CONJUNTOS FUZZY

Por conceito fuzzy entenderemos como sendo qualquer conceito que não possua bordos ou fronteiras bem definidos. Por exemplo, o conceito dado por alto, jovem, pequeno, etc.

DEFINIÇAO 1 - Dado um conjunto universo $\mathbb{U}$ (clássico), um *subconjunto fuzzy* de $\mathbb{U}$ é definido como sendo o par $(\mathbb{F}, \mu_{\mathbb{F}})$ onde $\mathbb{F}$ é um conceito fuzzy e $\mu_{\mathbb{F}}$ é uma função real de $\mathbb{U}$ em $[0,1]$ tal que $\mu_{\mathbb{F}}(u)$ expressa o grau de pertinência de u ao conceito rotulado fuzzy $\mathbb{F}$. Chamaremos $\mu_{\mathbb{F}}$ de função-pertinência.

Observações:

(a) Dado um conceito fuzzy $\mathbb{F}$, diremos também o *conjunto fuzzy* (ao invés de subconjunto) supondo, a priori, o conjunto universo $\mathbb{U}$ e denotaremos simplesmente por $\mathbb{F}$.

(b) Se $\mu_{\mathbb{F}}(u)=0$ ou $\mu_{\mathbb{F}}(u)=1$ para cada $u \in \mathbb{U}$ então $\mathbb{F}$ é claramente um subconjunto clássico de $\mathbb{U}$.

(c) $\mu_{\mathbb{F}}(u)=0$ significa que u não é definitivamente um elemento de $\mathbb{F}$ e $\mu_{\mathbb{F}}(u)=1$ significa que u é definitivamente um elementode $\mathbb{F}$.

(d) De um modo geral, o contradomínio de $\mu_{\mathbb{F}}$ pode ser tomado como sendo um reticulado $\mathbb{L}$ (conjuntos $\mathbb{L}$-fuzzy). Para nossos propósitos é conveniente e suficiente considerar o intervalo [0,1].

Convencionalmente, quando $\mathbb{A}$ é um subconjunto finito de $\mathbb{U}$ (clássico) cujos elementos são $a_1, a_2, \ldots, a_n$, expressa-se $\mathbb{A}$ por:

$$\mathbb{A} = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$$

Para os nossos objetivos, entretanto, será mais conveniente expressar $\mathbb{A}$ como:

$$\mathbb{A} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

observando que para todo $i = 1,2,\ldots,n$ e $j = 1,2,\ldots,n$ tem-se:

$$a_i + a_j = a_j + a_i \quad \text{e} \quad a_i + a_i = a_i$$

Estendendo esta notação para subconjuntos fuzzy (finitos) de $\mathbb{U}$, temos:

$$\mathbb{F} = \mu_1.u_1 + \mu_2.u_2 + \ldots + \mu_n.u_n$$

ou, equivalentemente,

$$\mathbb{F} = \mu_1/u_1 + \mu_2/u_2 + \ldots + \mu_n/u_n$$

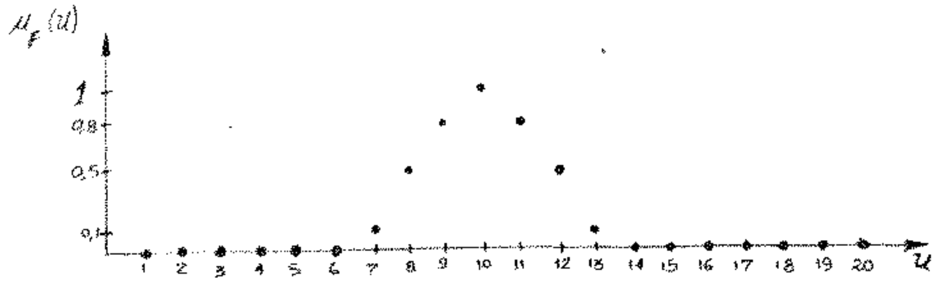
onde $\mu_i = \mu_{\mathbb{F}}(u_i)$, $i = 1,2,\ldots,n$ e $u_i \in \mathbb{U}$. Quando $\mu_k = 0$, omitiremos a parcela μ_i/u_i da expressão acima.

EXEMPLO 1 - Seja $\mathbb{U}$ o conjunto dos números naturais e o conceito fuzzy em $\mathbb{U}$ "aproximadamente igual a 10" dado por:

$$\mathbb{F} = 0{,}1/7 + 0{,}5/8 + 0{,}8/9 + 1{,}0/10 + 0{,}8/11 + 0{,}5/12 + 0{,}1/13$$

significando que: 0,1 é o grau de pertinência do número 7 ao conjunto "aproximadamente igual a 10", etc.

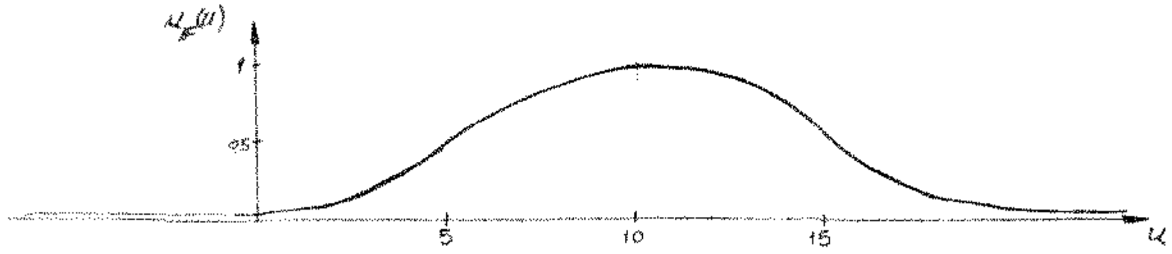
Observemos que quando o número natural não aparece na expressão significa que possui grau de pertinência igual a zero. Graficamente, temos:



EXEMPLO 2 - O exemplo 1 pode ser dado de forma similar estendendo o conjunto universo $\mathbb{U}$ e sua função-pertinência. De fato, considere $\mathbb{U}$ o conjunto dos números reais e o conceito fuzzy do exemplo 2 mas cuja função-pertinência é dada por:

$$\mu_{\mathbb{F}}(u) = \frac{1}{1 + \frac{(u-10)^2}{25}}$$

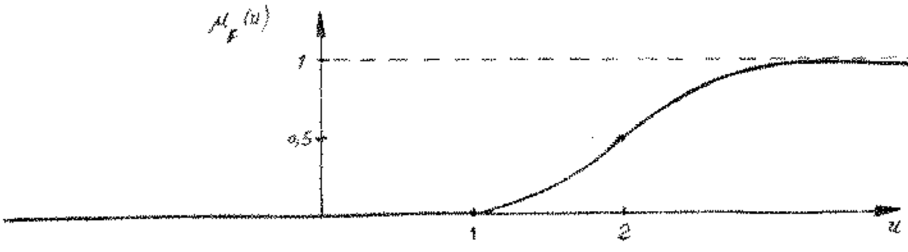
Observe que o único elemento que pertence efetivamente a $\mathbb{F}$ é o número 10 e não existe elemento algum que não pertença efetivamente a $\mathbb{F}$. De fato veja o gráfico:



EXEMPLO 3 - Seja $\mathbb{U}$ o conjunto dos números reais e o conceito fuzzy "muito maior do que 1" em $\mathbb{U}$ dado pela função-pertinência:

$$\mu_{\mathbb{F}}(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u \leq 1 \\ \dfrac{u-1}{u} & \text{se } u > 1 \end{cases}$$

Graficamente, temos:



EXEMPLO 4 – Em muitos casos é conveniente expressar a função-pertinência de um subconjunto fuzzy de $\mathbb{R}$ em termos de uma função-padrão cujos parâmetros podem ser ajustados à função-pertinência de modo apropriado (de acordo com o gosto do freguês). Consideremos, por exemplo, a seguinte função-padrão:

$$S(u;\ \alpha,\beta,\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{se } u \le \alpha \\ 2.[(u-\alpha)/(\gamma-\alpha)]^2 & \text{se } \alpha \le u \le \beta \\ 1 - 2.[(u-\gamma)/(\gamma-\alpha)]^2 & \text{se } \beta \le u \le \gamma \\ 1 & \text{se } u \ge \gamma \end{cases}$$

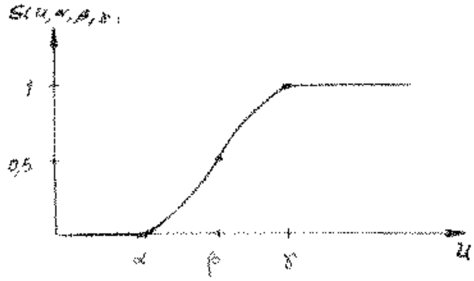
A função-pertinência é dada por:

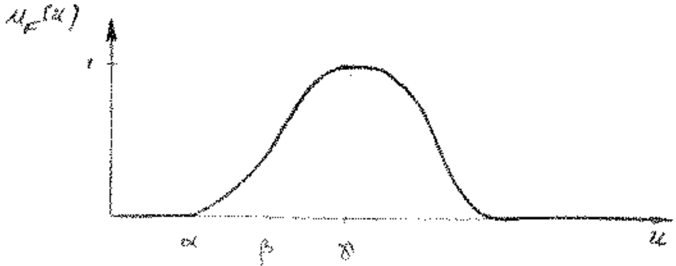
$$\mu_{\mathbb{F}}(u) = \begin{cases} S(u;\ \gamma-\beta\ ,\ \ \gamma-(\beta/2),\ \gamma) & \text{se } u \le \gamma \\ 1 - S(u;\gamma,\ \gamma+(\beta/2),\ \gamma+\beta) & \text{se } u \ge \gamma \end{cases}$$

fixados, a priori, os valores de α, β e γ de acordo com o conceito fuzzy estabelecido.

Esta função-pertinência é comumente usada para definir conceitos fuzzy que envolvem certos tipos padrões: "idade", "alto", "velho", etc.

Veja os gráficos:





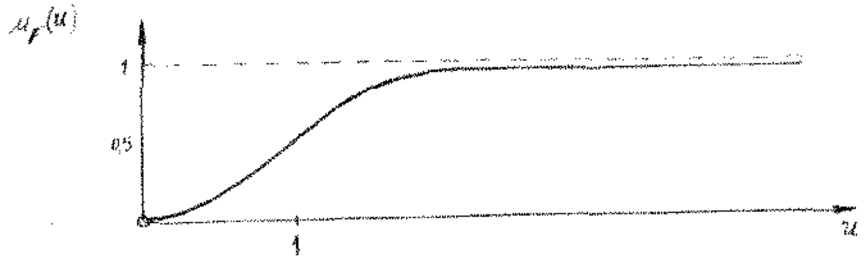
Para um subconjunto fuzzy arbitrário $\mathbb{F}$ de $\mathbb{U}$ costuma-se expressá-lo na forma de uma integral:

$$\mathbb{F} = \int_{\mathbb{U}} \mu_{\mathbb{F}}(u)/u$$

EXEMPLO 5 - Seja $\mathbb{U}$ o conjunto dos números reais estritamente positivos e o conceito fuzzy em $\mathbb{U}$ "muito maior do que zero" dado por:

$$\mathbb{F} = \int_{\mathbb{R}} (1 + u)^{-1}/u$$

Vê-se, por exemplo, que 1 tem grau de pertinência 0,5 a este conjunto enquanto que 1000 tem grau 0,999... e 0,001 tem grau 0,0000009. Nota-se que nenhum elemento de $\mathbb{U}$ pertence (ou não) efetivamente a $\mathbb{F}$. O gráfico abaixo explicita este fato de forma clara:



3. OPERAÇÕES COM CONJUNTOS FUZZY

Definiremos operações envolvendo conjuntos fuzzy que são extensões óbvias das definições correspondentes a conjuntos clássicos. Daremos também os diagramas de Venn estendidos quando $\mathbb{U}$ é um subconjunto fuzzy de $\mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO 2 - Sejam $\mathbb{F}$ e $\mathbb{G}$ subconjuntos fuzzy de um conjunto universo $\mathbb{U}$ com o mesmo conceito fuzzy. Definiremos as seguintes operações com conjuntos fuzzy (análogas a dos conjuntos clássicos):

(o1) Diremos que $\mathbb{F} = \mathbb{G}$ ($\mathbb{F}$ *é igual a* $\mathbb{G}$) se, e somente se,

$$\mu_{\mathbb{F}}(u) = \mu_{\mathbb{G}}(u), \quad \forall\, u \in \mathbb{U}$$

(o2) Diremos que $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{G}$ ($\mathbb{F}$ *esta contido em* $\mathbb{G}$) se, e somente se,

$$\mu_{\mathbb{F}}(u) \leq \mu_{\mathbb{G}}(u), \ \forall\, u \in \mathbb{U}$$

(o3) A *união* de $\mathbb{F}$ e $\mathbb{G}$, denotada por $\mathbb{F}\cup\mathbb{G}$, é dada por:

$$\mu_{\mathbb{F}\cup\mathbb{G}}(u) = \sup_{u\in\mathbb{U}} \left\{\mu_{\mathbb{F}}(u),\ \mu_{\mathbb{G}}(u)\right\}$$

(o4) A *intersecção* de $\mathbb{F}$ e $\mathbb{G}$, denotada por $\mathbb{F}\cap\mathbb{G}$, é dada por:

$$\mu_{\mathbb{F}\cap\mathbb{G}}(u) = \inf_{u\in\mathbb{U}} \left\{\mu_{\mathbb{F}}(u),\ \mu_{\mathbb{G}}(u)\right\}$$

(o5) O *complemento* $\overline{\mathbb{F}}$ *de* $\mathbb{F}$ é definido pela função-pertinência

$$\mu_{\overline{\mathbb{F}}}(u) = 1 - \mu_{\mathbb{F}}(u)$$

(o6) O *produto cartesiano* dos subconjuntos fuzzy $\mathbb{F}$ e $\mathbb{G}$ de $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$, respectivamente, é dado por:

$$\mu_{\mathbb{F}\times\mathbb{G}}(u,v) = \inf_{\substack{u\in\mathbb{U}\\ v\in\mathbb{V}}} \left\{\mu_{\mathbb{F}}(u), \mu_{\mathbb{G}}(v)\right\}$$

(o7) O *conjunto vazio* é definido pela função-pertinência

$$\mu_{\emptyset}(u) = 0, \ \forall\, u \in \mathbb{U}$$

(o8) O *conjunto universo* $\mathbb{U}$ terá como função-pertinência

$$\mu_{\mathbb{U}}(u) = 1, \ \forall\, u \in \mathbb{U}$$

Observações:

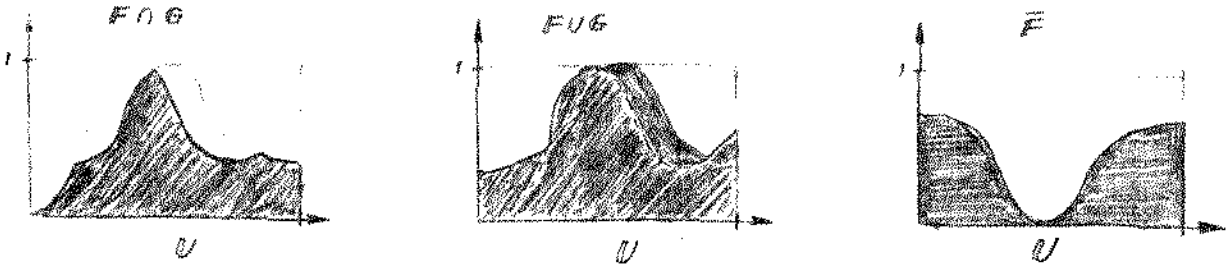
(a) A escolha de supremo e ínfimo para operadores de união e intersecção é justificada por Bellman e Giertz (em *On the analytic formalism of the theory of fuzzy sets-Inform.-Sci., Vol.5,pp149-156*), através da unicidade destes operadores quando se exigem certas condições básicas (ver [14]).

(b) A justificativa para a escolha do complemento é mais difícil. Ainda assim pode-se obter esta definição através da exigência de certas condições (ver [14]).

(c) *Diagramas de Venn estendidos.*

Quando $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}$ podemos visualizar graficamente as definições acima. Considere os subconjuntos fuzzy de $\mathbb{U}$ com os seguinte gráficos:

A interesecção, união e complemento podem ser representadas graficamente da seguinte forma, conforme definição:



Um fato interessante que ocorre com as definições acima é que, além de ter como caso particular as definições clássicas, muitas das propriedades das operações clássicas são preservadas.

PROPOSIÇÃO 1 - As operações de união, intersecção e complemento definidas acima gozam das seguintes propriedades:

(i) $\mathbb{F} \cup \mathbb{G} = \mathbb{G} \cup \mathbb{F}$

(ii) $\mathbb{F} \cap \mathbb{G} = \mathbb{G} \cap \mathbb{F}$

(iii) $\mathbb{F} \cup (\mathbb{G} \cup \mathbb{H}) = (\mathbb{F} \cup \mathbb{G}) \cup \mathbb{H}$

(iv) $\mathbb{F} \cap (\mathbb{G} \cap \mathbb{H}) = (\mathbb{F} \cap \mathbb{G}) \cap \mathbb{H}$

(v) $\mathbb{F} \cup \mathbb{F} = \mathbb{F}$

(vi) $\mathbb{F} \cap \mathbb{F} = \mathbb{F}$

(vii) $\mathbb{F} \cup (\mathbb{G} \cap \mathbb{H}) = (\mathbb{F} \cup \mathbb{G}) \cap (\mathbb{F} \cup \mathbb{H})$

(viii) $\mathbb{F} \cap (\mathbb{G} \cup \mathbb{H}) = (\mathbb{F} \cap \mathbb{G}) \cup (\mathbb{F} \cap \mathbb{H})$

(ix) $\mathbb{F} \cap \emptyset = \emptyset$

(x) $\mathbb{F} \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$

(xi) $\mathbb{F} \cup \emptyset = \mathbb{F}$

(xii) $\mathbb{F} \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$

(xiii) As leis de Morgan:

$$(\overline{\mathbb{F} \cap \mathbb{G}}) = \overline{\mathbb{F}} \cup \overline{\mathbb{G}}$$

$$(\overline{\mathbb{F} \cup \mathbb{G}}) = \overline{\mathbb{F}} \cap \overline{\mathbb{G}}$$

Demonstração:

Demonstraremos apenas as propriedades (i), (ii) e (iii) pois as demais seguem de forma análoga aplicando diretamente as propriedades de máximo e mínimo:

(i) $\mu_{\mathbb{F}\cup\mathbb{G}} = \text{máx } (\mu_{\mathbb{F}}, \mu_{\mathbb{G}}) = \text{máx } (\mu_{\mathbb{G}}, \mu_{\mathbb{F}}) = \mu_{\mathbb{G}\cup\mathbb{F}}$

(ii) $\mu_{\mathbb{F}\cap\mathbb{G}} = \min\,(\mu_{\mathbb{F}},\ \mu_{\mathbb{G}}) = \min\,(\mu_{\mathbb{G}},\ \mu_{\mathbb{F}}) = \mu_{\mathbb{G}\cap\mathbb{F}}$

(iii) $\mu_{\mathbb{A}\cup(\mathbb{B}\cup\mathbb{C})} = \text{máx}\,(\mu_{\mathbb{A}},\ \mu_{\mathbb{B}\cup\mathbb{C}}) = \text{máx}\,(\mu_{\mathbb{A}},\ \text{máx}\,(\mu_{\mathbb{B}},\ \mu_{\mathbb{C}})) =$

$= \text{máx}\,(\,\text{máx}\,(\mu_{\mathbb{A}},\ \mu_{\mathbb{B}}),\ \mu_{\mathbb{C}}) = \text{máx}\,(\mu_{\mathbb{A}\cup\mathbb{B}},\ \mu_{\mathbb{C}}) = \mu_{(\mathbb{A}\cup\mathbb{B})\cup\mathbb{C}}.$

4. RELAÇOES FUZZY

O conceito de relação (que constitui uma generalização de função) possui uma extensão natural para conjuntos fuzzy que desempenha um papel importante nesta teoria e suas aplicações tal como ocorre no caso de conjuntos ordinários. As relações fuzzy ocorrem quando as interações entre elementos são mais ou menos fortes.

DEFINIÇAO 3 - Sejam $\mathbb{U}_1,\ \mathbb{U}_2, \ldots,\ \mathbb{U}_n$ conjuntos universos. Uma *n-relação fuzzy* **R** (ou, simplesmente, *relaçao* **R**) em $\mathbb{U}_1 \times \mathbb{U}_2 \times \ldots \times \mathbb{U}_n$ é um conjunto fuzzy definido em $\mathbb{U}_1 \times \mathbb{U}_2 \times \ldots \times \mathbb{U}_n$.

Notação:

$$\mathbf{R} = \int_{\mathbb{U}_1 \times \ldots \times \mathbb{U}_n} \mu_{\mathbf{R}}(u_1, u_2, \ldots, u_n)/(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

onde $\mu_{\mathbf{R}}$ é a função-pertinência de **R**.

EXEMPLO 6 - Consideremos os conjuntos universo $\mathbb{U}_1 = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $\mathbb{U}_2 = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ e a relação fuzzy "muito maior que" entre os elementos de $\mathbb{U}_1$ e $\mathbb{U}_2$ com a função-pertinência dada por:

$$\mu_R(u_1,u_2) = \begin{cases} 0 & \text{se } u_1 \le u_2 \\ \min(1, (u_1-u_2)/9.u_2) & \text{se } u_2 \le u_1 \le 10.u_2 \\ 0 & \text{se } u_1 \ge 10.u_2 \end{cases}$$

R é uma relação binária em $\mathbb{U}_1 \times \mathbb{U}_2$. Por exemplo, dizemos que (8,1) tem grau de pertinência 0,44 com a relação R. O par (3,3) tem grau de pertinência 0, ou seja, 3 não está em relação fuzzy com 3. O par (50,2) tem grau de pertinência 1, ou seja, 50 está efetivamente em relação fuzzy com 2.

EXEMPLO 7 - Sejam os conjuntos $\mathbb{U}_1 = \mathbb{U}_2 = \mathbb{R}$ e a relação fuzzy "está próximo de" cuja função-pertinência é dada por:

$$R = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-k.|u_1-u_2|} / (u_1, u_2)$$

onde k é um número real positivo escolhido a priori. Note que se $u_1 = u_2$ tem-se $\mu_R(u_1,u_2) = 1$, ou seja, u_1 está efetivamente em relação fuzzy com u_2.

EXEMPLO 8 - Considere $\mathbb{U}_1 = \mathbb{U}_2 = 1 + 2 + 3 + 4$ e R a relação "muito maior que" dada pela matriz:

R	1	2	3	4
1	0	0,4	0,8	1
2	0	0	0,4	0,8
3	0	0	0	0,4
4	0	0	0	0

no qual o elemento (i,j) dá o valor de $\mu_R(u_i,u_j)$. Esta é uma relação fuzzy onde os conjuntos universo são finitos.

Os conjuntos fuzzy são um exemplo trivial de relações fuzzy. No parágrafo seguinte veremos um tipo especial de relação fuzzy que será bastante importante para a construção de medidas de possibilidade que veremos no capitulo 4.

5. RESTRIÇOES FUZZY

Consideremos $\mathbb{U} = \mathbb{U}_1 \times \ldots \times \mathbb{U}_n$ um conjunto universo. Sejam X uma variável pertencente a um determinado conjunto (não necessariamente $\mathbb{U}$), $A(X) = [A_1(X),\ldots,A_n(X)]$ os n-atributos de X que tomam valores em $\mathbb{U}$. A um elemento genérico de $\mathbb{U}$ denotaremos por $u = (u_1,\ldots,u_n)$, de tal forma que $A(X) = u$ significará que aos n-atributo da variável X está dado o valor $u \in \mathbb{U}$.

EXEMPLO 9 - Consideremos a proposição "Fernanda é alta".

Neste caso, a variável X é Fernanda e seu atributo é apenas um: a altura. O conjunto universo $\mathbb{U}$ pode ser dado por $\mathbb{U} = [0,3]$ e $A(X)$ é a altura de X pertencente a $\mathbb{U}$.

EXEMPLO 10 - Consideremos a proposição "O terreno é grande".

A variável X é terreno, seus atributos para designar o conceito <u>grande</u> podem ser dados pela largura e comprimento do terreno. Neste caso, podemos colocar $\mathbb{U} = (0,100]\times(0,100]$ e

$$A_1(x) = \text{Comprimento de X}$$

$$A_2(X) = \text{Largura de X}$$

Obsservacão:

Existem casos onde $A(X) = X$. De fato, consideremos a proposição "X é um número natural pequeno". Aqui, $A(X)$ é o próprio X que toma valores em $\mathbb{N}$.

DEFINIÇÃO 4 - Seja R uma relação fuzzy em $\mathbb{U} = \mathbb{U}_1 x \ldots x \mathbb{U}_n$ que está caracterizada por uma função-pertinência μ_R. Consideremos X uma variável pertencente a um determinado conjunto (não necessariamente $\mathbb{U}$) e $A(X)$ seu n-atributo que toma valores em $\mathbb{U}$. Se diz que R é uma *restrição fuzzy associada a* $A(X) = [A_1(X), \ldots, A_n(X)]$, se R atua como uma restrição sobre os valores que podem ser dados aos n-atributos de X.

Esta definição deve ser entendida no seguinte sentido: O valo $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{U} = \mathbb{U}_1 x \ldots x \mathbb{U}_n$ dado aos n-atributo $A(X) = [A_1(X), \ldots, A_n(X)]$ da variável X tem a forma $A(X) = u$: $\mu_R(u)$, onde $\mu_R(u)$ é interpretado como o grau para o qual a restrição representada por R se satisfaz quando fornecemos o valor $u \in \mathbb{U}$ aos n-atributo $A(X)$ da variável X.

Observações:

(a) Denotaremos por $RE[A(X)]$ uma restrição fuzzy associada com os n-atributo $A(X)$ da variável X.

(b) Para expressar que R desempenha o papel de uma restrição fuzzy associada à $A(X)$, escreveremos $RE[A(X)] = R$ denominada *equação de relação de valores restritos*.

(c) A equação $RE[A(X) = R$ é assim denominada porque representa a igualdade de uma relação fuzzy R com a restrição fuzzy RE[A(X)] associada à A(X).

Para ilustrar o conceito de restrição fuzzy consideremos uma proposição da forma "X é R" onde X pertence a um determinado conjunto e R é o conceito fuzzy dado pela relação fuzzy R em $\mathbb{U}$. Por exemplo,

"X é um número pequeno"

"O terreno é grande"

"Maria é muito inteligente"

"A casa é bonita"

A tradução da proposição "X é R" pode ser expressa através da equação de relação dos valores restritos como RE[A(X)] = R, onde A(X) representa os n-atributos (da variável X) que tomam valores em $\mathbb{U}$. Esta equação significa que a proposição "X é R" tem o efeito de fornecer à relação fuzzy R uma restrição fuzzy sobre os valores de A(X).

Através dos exemplos abaixo, esta noção ficará mais clara:

EXEMPLO 11 - Consideremos a seguinte proposição "X é um número pequeno" . O conceito "pequeno" é fuzzy, portanto pode ser representado por um conjunto fuzzy $\mathbb{F}$ do conjunto universo $\mathbb{R}^+$ caracterizado por uma função de pertinência $\mu_{\mathbb{F}}(x) = e^{-x^2}$. Notemos que temos aqui:

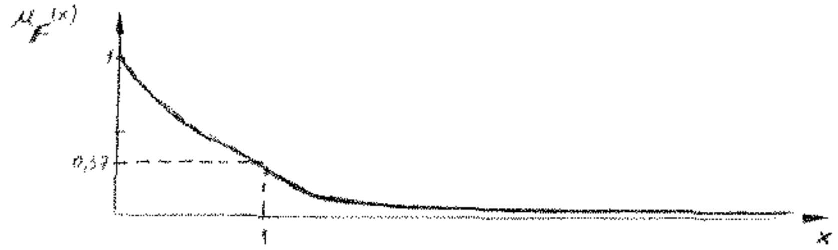
$$\mathbb{U} = \mathbb{R}^+$$

X é um número

$$A(X) = X$$

$$R = \mathbb{F} = \text{subconjunto fuzzy de } \mathbb{U}$$

Graficamente, temos:



Assim , a tradução da proposição "X é um número pequeno" pode ser expressa através da equação de relação dose valores restritos: RE[A(X)] = RE(X) = $\mathbb{F}$, isto é, R[valor(X)] = pequeno.

Interpretação:

Seja x=1, então $\mu_{\mathbb{F}}(1) = \mu_{\text{pequeno}}(1) = e^{-1}$, que interpretamos da seguinte maneira: O grau de pertinência de x=1 no conjunto fuzzy "pequeno" é $e^{-1} \cong 0,37$, ou seja, 0,37 é o grau de compatibilidade de 1 com o conceito rotulado "pequeno".

Em termos gerais, dado que X é um número pequeno, o grau 0,37 representa uma "possibilidade" que X tem de assumir o valor 1.

Se quizermos x=0 teremos grau 1, ou seja, existe uma grande possibilidade que x assuma o valor 0 dado que x é um número pequeno.

EXEMPLO 12 - Consideremos a proposição "João e José são aproximadamente iguais em altura", onde "aproximadamente iguais" é uma relação fuzzy (binária) R dada pelo quadro abaixo:

$x_1 \setminus x_2$	1,70	1,75	1,77	1,80	1,82.	.1,85
1,70	1	0,8	0,6	0,2	0	0

1,75	0,8	1	0,9	0,7	0,3	0
1,77	0,6	0,9	1	0,9	0,7	0
1,80	0,2	0,7	0,9	1	0,9	0,8
1,82	0	0,3	0,7	0,9	1	0,9
1,85	0	0	0	0,8	0,9	1

Assim, podemos traduzir a restrição fuzzy da seguinte forma : Dado que João e José são aproximadamente iguais em altura, se a altura de João é 1,75 e altura de José é 1,77 então o grau de compatibilidade é 0,9, ou visto de outra forma, a possibilidade que João e José tenham, respectivamente, 1,75 e 1,77 de altura é 0,9 dado que João e José são aproximadamente iguais em altura.

6. MEDIDAS DE FUZZINESS

Já que um subconjunto fuzzy $\mathbb{F}$ de um conjunto universo $\mathbb{U}$ é caracterizado basicamente pela sua "confusão" em relação aos elementos de $\mathbb{U}$ (dada pelo grau de pertinência a $\mathbb{F}$), nada mais natural do que considerar todos os subconjuntos fuzzy $\mathbb{F}$ de $\mathbb{U}$ (ou seja, todas as funções $f: \mathbb{U} \rightarrowtail [0,1]$ associadas a um conceito fuzzy $\mathbb{F}$) e daí tentar medir qual é o menos confuso destes.

Esta medida é interessante do ponto de vista de que teremos uma idéia global de todos os subconjuntos fuzzy a respeito de sua "confusão".

Mas medir "graus de confusão" é, de certo modo, também confuso e depende de como se quer avaliar este grau. Existem várias formas de medi-las (as medidas de fuzziness), mas daremos aqui uma definição proposta por De Luca e Termini [8].

DEFINIÇÃO 4 - Seja $\mathbb{U}$ um conjunto universo e $\mathcal{P}'(\mathbb{U})$ a classe de todos os subconjuntos fuzzy de $\mathbb{U}$. Uma *medida de fuzziness* é uma função d: $\mathcal{P}'(\mathbb{U}) \rightarrowtail [0,+\infty)$ satisfazendo as condições:

(F1) $d(\mathbb{F}) = 0$ se, e somente se, $\mathbb{F}$ é um subconjunto clássico de $\mathbb{X}$.

(F2) $d(\mathbb{F})$ é máximo se, e somente se, $\mu_{\mathbb{F}}(u) = 0{,}5$, $\forall$ $u \in \mathbb{U}$.

(F3) $d(\mathbb{F}^{\square}) \leq d(\mathbb{F})$ onde $\mathbb{F}^{\square}$ é uma versão "sharpened" de $\mathbb{F}$, isto é,

$$\mu_{\mathbb{F}^{\square}}(u) \leq \mu_{\mathbb{F}}(u) \text{ se } \mu_{\mathbb{F}}(u) \leq 0{,}5$$

$$\mu_{\mathbb{F}^{\square}}(u) \geq \mu_{\mathbb{F}}(u) \text{ se } \mu_{\mathbb{F}}(u) \geq 0{,}5$$

(F4) $d(\mathbb{F}) = d(\overline{\mathbb{F}})$

Observações:

(a) A condição (F1) exige que o conjunto clássico tenha medida de fuzziness igual a zero já que ele não possui confusão alguma. Esta condição é única para todos os tipos de medidas de fuzziness definidos.

(b) A condição (F2) é natural pois se o conjunto fuzzy $\mathbb{F}$ é dado por $\mu_{\mathbb{F}}(u) = 0{,}5$, $\forall$ $u \in \mathbb{U}$, então significa, sob um certo ponto de vista, que ele é bastante "confuso". Desta forma, nada mais exato do que exigir d máximo para estes conjuntos.

(c) A versão "sharpened" $\mathbb{F}^{\square}$ de um conjunto fuzzy $\mathbb{F}$ é definida para se ter um conjunto que é menos confuso do que $\mathbb{F}$. Existem outras formas de se definir "sharpened" mas a condição (F3) deve sempre ser exigida para medidas de "fuzziness".

(d) A condição (F4) exige que $\mathbb{F}$ deve ser tão confuso quanto seu complemento $\bar{\mathbb{F}}$. Conforme foi observado na seção 3, a definição de complemento pode ser dada de outras maneiras. Assim, a medida de fuzziness fica condicionada ao que se tem como definição de complemento. No nosso caso é dado na seção 3.

Quando o conjunto $\mathbb{U}$ é finito, Loo (1977) propôs uma fórmula matemática geral para d:

$$d(\mathbb{F}) = F\left[\sum_{i=1}^{|\mathbb{U}|} c_i \cdot f_i\left(\mu_{\mathbb{F}}(u_i)\right)\right]$$

onde:

$c_i \in \mathbb{R}^+$

f_i é uma função real tal que $f_i(0) = f_i(1) = 0$

$f_i(u) = f_i(1-u), \ \forall\, u \in \mathbb{U}$

f_i é estritamente crescente em $[0,1/2]$

F é uma função crescente positiva

PROPOSIÇÃO 2 - A função d definida acima satisfaz as condições (F1-F4).

Demonstração:

A condição (F1) é trivial pois se $\mathbb{F}$ é clássico, $\mu_{\mathbb{F}}(u) = 1$ ou $\mu_{\mathbb{F}}(u) = 0$, logo $d(\mathbb{F}) = 0$.

Como f_i é estritamente crescente em $[0,1/2]$ e F é crescente, é óbvio que d é máximo em $\mathbb{F}$ tal que $\mu_{\mathbb{F}}(u) = 1/2, \ \forall\, u \in \mathbb{U}$. Logo, vale (F2).

Seja, agora, $\mathbb{F}^{\square}$ uma versão "sharpened" de $\mathbb{F}$, isto é,

$$\mu_{\mathbb{F}^{\square}}(u) \leq \mu_{\mathbb{F}}(u) \text{ se } \mu_{\mathbb{F}}(u) \leq 1/2$$

$$\mu_{\mathbb{F}^{\square}}(u) \geq \mu_{\mathbb{F}}(u) \text{ se } \mu_{\mathbb{F}}(u) \geq 1/2$$

Como f_i é estritamente crescente em $[0,1/2]$, em qualquer caso temos

$$f_i\left(\mu_{\mathbb{F}^{\square}}(u_i)\right) \leq f_i\left(\mu_{\mathbb{F}}(u_i)\right) \quad \Rightarrow \quad c_i \cdot f_i\left(\mu_{\mathbb{F}^{\square}}(u_i)\right) \leq c_i \cdot f_i\left(\mu_{\mathbb{F}}(u_i)\right)$$

Mas F é crescente, logo

$$\sum_{i=1}^{|\mathbb{U}|} c_i \cdot f_i\left(\mu_{\mathbb{F}^{\square}}(u_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{|\mathbb{U}|} c_i \cdot f_i\left(\mu_{\mathbb{F}}(u_i)\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F\left(\sum_{i=1}^{|\mathbb{U}|} c_i \cdot f_i\left(\mu_{\mathbb{F}^{\square}}(u_i)\right)\right) \leq F\left(\sum_{i=1}^{|\mathbb{U}|} c_i \cdot f_i\left(\mu_{\mathbb{F}}(u_i)\right)\right)$$

Portanto, $d(\mathbb{F}^{\square}) \leq d(\mathbb{F})$.

Quanto à (F4) temos

$$d(\mathbb{F}) = F\left(\sum_{i=1}^{|\mathbb{U}|} c_i \cdot f_i\left(\mu_{\mathbb{F}}(u_i)\right)\right) = F\left(\sum_{i=1}^{|\mathbb{U}|} c_i \cdot f_i\left(1 - \mu_{\overline{\mathbb{F}}}(u_i)\right)\right) =$$

$$F\left(\sum_{i=1}^{|\mathbb{U}|} c_i \cdot f_i\left(\mu_{\overline{\mathbb{F}}}(u_i)\right)\right) = d(\overline{\mathbb{F}})$$

Podemos obter casos particulares de d através das funções F e f_i:

(1) (Kaufmann, 1975)

Seja F a função identidade, $c_i = 1$ e $f_i(u) = u$ quando $u \in [0,1/2]$, para todo i. Temos, então

$$d(\mathbb{F}) = \sum_{i=1}^{|\mathbb{U}|} |\mu_{\mathbb{F}}(u_i) - \mu_{\mathbb{F}_{1/2}}(u_i)|$$

onde:

$$\mathbb{F}_{1/2} = \{ u \in \mathbb{U} : \mu_{\mathbb{F}}(u) \geq 1/2\}$$

$$\mu_{\mathbb{F}_{1/2}}(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u \in \mathbb{F}_{1/2} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(2) (De Luca e Termini 1972)

Toma-se $F(u) = k.u$, $k>0$; $c_i=1$ e $f_i(u) = -u.\log(u) - (1-u).\log(1-u)$.

A função d não é a forma mais geral, outra formulação da medida de fuzziness foi dada por Knopfmacher (1975) para subconjuntos fuzzy de espaços mensuráveis. Considere $(\mathscr{X}, \mathscr{A}, P)$ um espaço mensurável de medida finita,, tal medida de fuzziness é definida por:

$$d(\mathbb{F}) = \frac{1}{P(u)} \int_{\mathbb{U}} F(\mu_{\mathbb{F}}(u))\, dP$$

onde:

$F(u) = F(1-u)$, $u \in [0,1]$, $F(0) = F(1) = 0$

F é estritamente crescente em $[0,1/2]$

As medidas de fuzziness constituem uma forma de se medir um certo tipo de incerteza dada pela imprecisão de determinados conjuntos. Existem outros tipos de incertezas que são medidos por meio das medidas fuzzy, como veremos no capítulo que se segue:

CAPÍTULO 3
MEDIDAS FUZZY

1. INTRODUÇAO

Mais do que uma simples generalização da medida de Lebesgue reformulada por Caratheodóry, o conceito de *medida fuzzy* introduzido por Sugeno em 1974 corresponde à forma mais adequada de expressar (medir) graus de incerteza, valores que dependem quase que exclusivamente da subjetividade humana.

Como foi dito nos capítulos anteriores, podemos classificar a incerteza dada pela subjetividade humana em dois tipos: A incerteza dada pela *imprecisão* e a incerteza dada pela *indecisão*. Os conjuntos fuzzy, vistos no capítulo anterior, constituem uma forma de representar o primeiro tipo de incerteza e as medidas de fuzziness servem para medir este tipo de incerteza. O que apresentaremos agora será uma forma de medir o outro tipo de incerteza que é dado pela indecisão e isto será feito através das medidas fuzzy.

Neste capítulo, trabalharemos especificamente com conjuntos clássicos $\mathcal{X}$ e sua σ-álgebra de conjuntos $\mathcal{B}$.

2. MEDIDAS FUZZY

DEFINIÇAO 1 - Seja $\mathcal{X}$ um conjunto clássico e μ uma função real (estendida) definida na σ-álgebra de subconjuntos de $\mathcal{X}$.. Dizemos que μ é uma *medida fuzzy em* $\mathcal{X}$ se satisfaz as seguintes condições:

(MF1) $\mu(\emptyset) = 0$

(MF2) $\forall\ \mathbb{A},\ \mathbb{B} \in \mathscr{C},\quad \mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \ \Rightarrow \mu(\mathbb{A}) \leq \mu(\mathbb{B})$

(MF3) $\forall\ \langle \mathbb{A}_i : i \in \mathbb{N} \rangle \subseteq \mathscr{C},\quad \mathbb{A}_1 \subseteq \mathbb{A}_2 \subseteq \ldots \ \Rightarrow\ \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{A}_i) = \lim_{i \to \infty} \mu(\mathbb{A}_i)$

(MF4) $\forall\ \langle \mathbb{B}_i : i \in \mathbb{N} \rangle \subseteq \mathscr{C},\quad \mathbb{B}_1 \supseteq \mathbb{B}_2 \supseteq \ldots$ e $\mu(\mathbb{B}_1) < +\infty\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathbb{B}_i) = \lim_{i \to \infty} \mu(\mathbb{B}_i)$$

A terna $(\mathbb{X}, \mathscr{C}, \mu)$ é comumente chamada de *espaço de medida fuzzy* [3].

PROPOSIÇÃO 1 - Seja μ uma medida fuzzy em $\mathbb{X}$ então:

(i) $\mu(\mathbb{A}) \geq 0,\ \forall\ \mathbb{A} \in \mathscr{C}$

(ii) $\forall\ \mathbb{A},\ \mathbb{B} \in \mathscr{C}$, $\min(\mu(\mathbb{A}),\ \mu(\mathbb{B})) \geq \mu(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$ e

$\max(\mu(\mathbb{A}),\ \mu(\mathbb{B})) \leq \mu(\mathbb{A} \cup \mathbb{B})$

(iii) Se $\mathbb{X}$ é finito, tornam-se desnecessárias as condições (MF3) e (MF4).

Demonstração:

(i) Seja $\mathbb{A} \in \mathscr{C}$, como $\mathbb{A} \supseteq \emptyset$ por (MF2) temos $\mu(\mathbb{A}) \geq \mu(\emptyset) = 0$, como queríamos demonstrar.

(ii) É óbvio, pois $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \subseteq \mathbb{A} \subseteq \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ e $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \subseteq \mathbb{B} \subseteq \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$.

(iii) De fato, se tivermos uma sequência crescente ou decrescente de uma coleção finita de conjuntos tal sequência será estacionária.

Observação:

Uma outra forma de se definir medida fuzzy é acrescentando á (MF1) a condição $\mu(\mathbb{X}) = 1$.

Podemos obter vários exemplos de medidas fuzzy a partir de uma medida (conforme parágrafo 2 do capítulo 1) da seguinte forma:

PROPOSIÇÃO 2 - Considere r como sendo uma medida finita e T uma função monótona contínua não-decrescente tal que $T(0) = 0$. Então a composição $\mu = T \circ r$ define uma medida fuzzy.

Demonstração:

De fato, $\mu(\emptyset) = T \circ r(\emptyset) = T(0) = 0$, logo vale (MF1). Para provar (MF2), sejam $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathscr{E}$ tal que $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$, então temos

$$\mu(\mathbb{A}) = T \circ r(\mathbb{A}) = T(r(\mathbb{A})) \quad \text{e} \quad \mu(\mathbb{B}) = T \circ r(\mathbb{B}) = T(r(\mathbb{B})).$$

Como $r(\mathbb{A}) \leq r(\mathbb{B})$ (proposição 2.a do capítulo 1) e T é monótona não-decrescente, temos $\mu(\mathbb{A}) \leq \mu(\mathbb{B})$.

Consideremos agora uma sequência $(\mathbb{A}_i)$ crescente de conjuntos em $\mathscr{E}$ então $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{A}_i) = T \circ r(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{A}_i) = T(r(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{A}_i))$. Mas pela proposição 2.c do cap.1 temos $r(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{A}_i) = \lim_{i \to \infty} r(\mathbb{A}_i)$ e daí segue que

$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{A}_i) = T(\lim_{i \to \infty} r(\mathbb{A}_i)) = \lim_{i \to \infty} T(r(\mathbb{A}_i)) = \lim_{i \to \infty} T \circ r(\mathbb{A}_i) = \lim_{i \to \infty} \mu(\mathbb{A}_i)$,

pois T é contínua.

A demonstração de (MF4) é análoga à (MF3), aplicando agora a parte (d) da proposição 2 do capítulo 1.

3. OS SUBCONJUNTOS DO CONJUNTO DE MEDIDAS FUZZY

Existem vários exemplos de medidas fuzzy, cada um com suas propriedades particulares e suas aplicações. Apresentaremos aqui alguns exemplos e no próximo parágrafo estabeleceremos relações entre eles.

Consideraremos aqui um conjunto $\mathbb{X} \neq \emptyset$ e sua σ-álgebra de subconjuntos .

3.1 A MEDIDA DE PROBABILIDADE

DEFINIÇÃO 2 - Seja P uma função real definida em $\mathscr{C}$, dizemos que P é uma *medida de probabilidade* se, e somente se:

(P1) $P(\mathbb{A}) \geq 0, \ \forall\ \mathbb{A} \in \mathscr{C}$

(P2) $P(\mathbb{X}) = 1$

(P3) Seja $(\mathbb{A}_i)$ uma sequência enumerável em $\mathscr{C}$ tal que $\mathbb{A}_i \cap \mathbb{A}_j = \emptyset$ se $i \neq j$ então temos

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{A}_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\mathbb{A}_i)$$

Observação:

Quando $\mathbb{X}$ é finito a seguinte definição é equivalente:

DEFINIÇÃO 2' - Uma *medida de probabilidade* é uma função real P definida em $\mathscr{C}$ satisfazendo as condições:

(P1') $P(\mathbb{A}) \geq 0, \ \forall\ \mathbb{A} \in \mathscr{C}$

(P2') $P(\mathbb{X}) = 1$

(P3') $P(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = P(\mathbb{A}) + P(\mathbb{B}), \ \forall\ \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathscr{C}$ tal que $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \emptyset$.

PROPOSIÇÃO 3 - Se P é uma medida de probabilidade, então as seguintes propriedade são satisfeitas:

(i) $P(\mathbb{A}^c) = 1 - P(\mathbb{A}), \ \forall\ \mathbb{A} \in \mathscr{C}$

(ii) $\forall\ \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathscr{C}$, se $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ então $P(\mathbb{A}) \leq P(\mathbb{B})$

(iii) $0 \leq P(\mathbb{A}) \leq 1, \ \forall\ \mathbb{A} \in \mathscr{C}$

(iv) $\forall\ \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathscr{C}$, $P(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = P(\mathbb{A}) + P(\mathbb{B}) - P(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$

(v) $P(\emptyset) = 0$

(vi) $\forall\ (\mathbb{A}_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathscr{C},\ P(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{A}_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(\mathbb{A}_i)$

(vii) Se $(\mathbb{A}_i)_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência crescente em $\mathscr{C}$, então

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{A}_i) = \lim_{i\to\infty} P(\mathbb{A}_i)$$

(viii) Se $(\mathbb{B}_i)_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência decrescente em $\mathscr{C}$, então

$$P(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathbb{B}_i) = \lim_{i\to\infty} P(\mathbb{B}_i)$$

(ix) P é uma medida fuzzy em $\mathbb{X}$.

Demonstração:

(i) Como $\mathbb{A} \cup \mathbb{A}^c = \mathbb{X},\ \forall\ \mathbb{A} \in \mathscr{C}$, temos por (P2) e (P3) que $1 = P(\mathbb{X}) = P(\mathbb{A} \cup \mathbb{A}^c) = P(\mathbb{A}) + P(\mathbb{A}^c) \Rightarrow P(\mathbb{A}) = 1 - P(\mathbb{A})$.

(ii) $\mathbb{A} \leq \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B} = \mathbb{A} \cup (\mathbb{B} \setminus \mathbb{A})$. Logo, por (P2) e (P1) temos

$$P(\mathbb{B}) = P(\mathbb{A}) + P(\mathbb{B} \setminus \mathbb{A}) \geq P(\mathbb{A})$$

(iii) Por (P1) temos $P(\mathbb{A}) \geq 0,\ \forall\ \mathbb{A} \in \mathscr{C}$

Por (P2) e (ii) temos $P(\mathbb{A}) \leq P(\mathbb{X}) = 1,\ \forall\ \mathbb{A} \leq \mathbb{X}$.

Logo, $P(\mathbb{A}) \in [0,1]$.

(iv) Sejam $\mathbb{A},\ \mathbb{B} \in \mathscr{C}$ temos que $(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = (\mathbb{A} \cap \bar{\mathbb{B}}) \cup \mathbb{B}$, $(\mathbb{A} \cap \bar{\mathbb{B}}) \cup (\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = \mathbb{A}$ e $(\mathbb{A} \cap \bar{\mathbb{B}}) \cap \mathbb{B} = \emptyset$. Logo, por (P2) temos

$P(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = P(\mathbb{A} \cap \bar{\mathbb{B}}) + P(\mathbb{B})$ e $P(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A} \cap \bar{\mathbb{B}}) + P(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$

Logo, $P(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = P(\mathbb{A}) + P(\mathbb{B}) - P(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$.

(v) Como $\mathbb{X} \cup \emptyset = \mathbb{X}$, $P(\mathbb{X}) = P(\mathbb{X}) + P(\emptyset)$. Logo, $P(\emptyset) = 0$.

(vi) Como $\bigcup_{i=1} A_i = A_1 \cup \left[\bigcup_{i=2}^{\infty}\left(A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{i-1} A_n\right)\right]$ temos por (P2) e (ii) que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + P\left[\bigcup_{i=2}^{\infty}\left(A_i \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{i-1} A_n\right)\right)\right] = P(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} P\left[A_n \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{i-1} A_i\right)\right] \leq$$

$$\leq P(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

(vii)e (viii) Estas propriedades seguem do fato de a medida de probabilidade ser uma medida.

(ix) As condições (FM1), (FM2), (FM3) e (FM4) decorrem, respectivamente, dos itens (iv), (ii), (vii) e (viii). Portanto, P é uma medida fuzzy.

3.2. A MEDIDA CONCENTRADA (DIRAC)

DEFINIÇÃO 3 - Dado $x_o \in \mathscr{X}$, seja μ_{x_o} uma função real definida em $\mathscr{C}$ da seguinte forma:

$$\forall A \in \mathscr{C}, \quad \mu_{x_o}(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_o \in A \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então, dizemos que μ_{x_o} é uma *medida concentrada em* x_o.

PROPOSIÇÃO 4 - Dado $x_o \in \mathscr{X}$, a medida concentrada em x_o é uma medida de probabilidade (portanto, uma medida fuzzy).

Demonstração:

Seja $x_o \in \mathbb{X}$ e μ_{x_o} uma medida concentrada em x_o.

É claro que vale (P1) e (P2). Consideremos agora uma sequência enumerável $(\mathbb{A}_n)$ de conjuntos em $\mathscr{E}$ tal que $A_i \cap \mathbb{A}_j = \emptyset$ se $i \neq j$, então temos

$$\mu_{x_o}(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{A}_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_o \in \mathbb{A}_i \text{ para algum } i \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

No caso 1, ou seja, $x_o \in A_i$ para algum $i \in \mathbb{N}$, digamos i_o, temos que $x_o \notin \mathbb{A}_i$, $\forall\ i \neq i_o$ pois os conjuntos da sequência são disjuntos. Daí, segue que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_{x_o}(\mathbb{A}_i) = \mu_{x_o}(\mathbb{A}_{i_o}) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{x_o}(\mathbb{A}_i) = 1 + 0 = 1 = \mu_{x_o}(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{A}_i)$$

Quando $\mu_{x_o}(\bigcup \mathbb{A}_i) = 0$ é imediato. Portanto, a medida concentrada é uma medida de probabilidade.

As medidas concentradas são também chamadas de *medida de certeza completa*.

3. A MEDIDA λ-FUZZY (OU MEDIDA DE SUGENO)

As medidas λ-fuzzy foram introduzidas por Sugeno (1974) como uma forma de enfraquecer a propriedade aditiva da medida de probabilidade([5], [10] e [14])

DEFINIÇÃO 4 - Seja $\mathbb{X}$ um conjunto arbitrário e $\mathscr{E}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{X}$, considere $\lambda \in (-1,+\infty)$, e g_λ uma função real (não-negativa) definida em $\mathscr{E}$ satisfazendo as condições:

(λ1) $\forall\ \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathscr{E}$ com $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \emptyset$, tem-se

$$g_\lambda(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = g_\lambda(\mathbb{A}) + g_\lambda(\mathbb{B}) + \lambda . g_\lambda(\mathbb{A}) . g_\lambda(\mathbb{B})$$

(λ2) $g_\lambda(\mathbb{X}) = 1$

$(\lambda 3)$ $\forall$ $\{ \mathbb{A}_i : i \in \mathbb{N} \} \subseteq \mathcal{E}$, $\mathbb{A}_1 \subseteq \mathbb{A}_2 \subseteq \ldots \rightarrow g_\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{A}_i) = \lim_{i \to \infty} g_\lambda(\mathbb{A}_i)$

$(\lambda 4)$ $\forall$ $\{ \mathbb{B}_i : i \in \mathbb{N} \} \subseteq \mathcal{E}$, $\mathbb{B}_1 \supseteq \mathbb{B}_2 \supseteq \ldots$ e $g_\lambda(\mathbb{B}_1) < +\infty \Rightarrow$

$$\rightarrow g_\lambda(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathbb{B}_i) = \lim_{i \to \infty} g_\lambda(\mathbb{B}_i)$$

então g_λ será denominada *medida λ-fuzzy* (ou *medida de Sugeno*).

Observações:

(a) Quando $\lambda = 0$ e $\mathcal{X}$ é finito as medidas de Sugeno são medidas de probabilidade.

(b) As medidas concentradas são λ-fuzzy. Mais do que isso, existe uma relação importante entre as medidas de Sugeno e as medidas concentradas que será dada pela proposição abaixo:

PROPOSIÇÃO 5 - Toda função $\mu : \mathcal{E} \rightarrowtail [0,1]$ é uma medida λ-fuzzy para qualquer $\lambda \in (-1, +\infty)$ se, e somente se, μ é uma medida concentrada.

Demonstração:

A recíproca é óbvia.

Seja μ uma medida λ-fuzzy, então $\mu(\{x,y\}) = \mu(\{x\}) + \mu(\{y\}) + \lambda.\mu(\{x\}).\mu(\{y\})$. Supondo λ-fuzzy para todo $\lambda \in (-1, +\infty)$, temos $\mu(\{x\}).\mu(\{y\}) = 0$. Logo, μ é concentrada.

PROPOSIÇÃO 6 - Se g_λ é uma medida λ-fuzzy $(\infty > \lambda > -1)$, então as seguintes propriedades são verdadeiras:

(i) g_λ é uma medida fuzzy

(ii) $\forall$ $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{E}$ tem-se

$$g_\lambda(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = \frac{g_\lambda(\mathbb{A}) + g_\lambda(\mathbb{B}) - g_\lambda(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) + \lambda . g_\lambda(\mathbb{A}) . g_\lambda(\mathbb{B})}{1 + \lambda . g_\lambda(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})}$$

(iii) $g_\lambda(\mathbb{A}) + g_\lambda(\overline{\mathbb{A}}) = 1 - \lambda . g_\lambda(\mathbb{A}) . g_\lambda(\overline{\mathbb{A}}), \quad \forall\ \mathbb{A} \in \mathscr{C}.$

Demonstração:

(i) Só precisamos provar (MF1) e (MF2). Provemos (MF1), por (λ1) temos que

$$g_\lambda(\mathscr{X}) = g_\lambda(\mathscr{X}) + g_\lambda(\emptyset) . [1 + \lambda . g_\lambda(\mathscr{X})]$$

Como $\lambda > -1$ temos que

$$g_\lambda(\emptyset) . [1 + \lambda . g_\lambda(\mathscr{X})] = 0 \Rightarrow g_\lambda(\emptyset) = 0.$$

Quanto à (MF2), sejam $\mathbb{A}$, $\mathbb{B} \in \mathscr{C}$ tal que $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$, então existe $\mathbb{C}$ tal que $\mathbb{B} = \mathbb{A} \cup \mathbb{C}$ e $\mathbb{A} \cap \mathbb{C} = \emptyset$. Logo,

$$g_\lambda(\mathbb{B}) = g_\lambda(\mathbb{A}) + g_\lambda(\mathbb{C}) . [1 + \lambda . g_\lambda(\mathbb{A})] \geq g_\lambda(\mathbb{A})$$

pois $1 + g_\lambda(\mathbb{A}) \geq 0$.

(ii) Como $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = (\mathbb{A} \cap \overline{\mathbb{B}}) \cup \mathbb{B}$ e $(\mathbb{A} \cap \overline{\mathbb{B}}) \cap \mathbb{B} = \emptyset$, $\forall\ \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathscr{C}$, temos:

$$g_\lambda(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = g_\lambda(\mathbb{A} \cap \overline{\mathbb{B}}) + g_\lambda(\mathbb{B}) + \lambda . g_\lambda(\mathbb{A} \cap \overline{\mathbb{B}}) . g_\lambda(\mathbb{B})$$

Ocorre também que $(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) \cup (\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = \mathbb{A}$ e são disjuntos para qualquer $\mathbb{A}$, $\mathbb{B} \in \mathscr{C}$. Daí, temos:

$$g_\lambda(\mathbb{A} \cap \overline{\mathbb{B}}) + g_\lambda(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) + \lambda . g_\lambda(\mathbb{A} \cap \overline{\mathbb{B}}) . g_\lambda(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = g_\lambda(\mathbb{A})$$

O que implica que

$$[1 + \lambda . g_\lambda(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})] . g_\lambda(\mathbb{A} \cap \overline{\mathbb{B}}) = g_\lambda(\mathbb{A}) - g_\lambda(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$$

Portanto,

$$g_\lambda(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = \frac{g_\lambda(\mathbb{A}) - g_\lambda(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})}{1 + g_\lambda(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})} + g_\lambda(\mathbb{B}) +$$

$$+ \lambda . \frac{g_\lambda(\mathbb{A}) - g_\lambda(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})}{1 + g_\lambda(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})} . g_\lambda(\mathbb{B}) =$$

$$= \frac{g_\lambda(\mathbb{A}) - g_\lambda(\mathbb{A}\cap\mathbb{B}) + g_\lambda(\mathbb{B}) + \lambda . g_\lambda(\mathbb{A}\cap\mathbb{B}) . g_\lambda(\mathbb{B}) + \lambda . g_\lambda(\mathbb{A}) . g_\lambda(\mathbb{B}) - \lambda . g_\lambda(\mathbb{A}\cap\mathbb{B}) . g_\lambda(\mathbb{B})}{1 + \lambda . g_\lambda(\mathbb{A}\cap\mathbb{B})} =$$

$$= \frac{g_\lambda(\mathbb{A}) + g_\lambda(\mathbb{B} - g_\lambda(\mathbb{A}\cap\mathbb{B}) + \lambda . g_\lambda(\mathbb{A}) . g_\lambda(\mathbb{B})}{1 + \lambda . g_\lambda(\mathbb{A}\cap\mathbb{B})}$$

(iii) Como $\mathbb{A} \cup \bar{\mathbb{A}} = \mathbb{X}$ e $\mathbb{A} \cap \bar{\mathbb{A}} = \emptyset$, temos

$$1 = g_\lambda(\mathbb{X}) = g_\lambda(\mathbb{A}) + g_\lambda(\bar{\mathbb{A}}) + \lambda . g_\lambda(\mathbb{A}) . g_\lambda(\bar{\mathbb{A}})$$

O que implica

$$g_\lambda(\mathbb{A}) + g_\lambda(\bar{\mathbb{A}}) = 1 - \lambda . g_\lambda(\mathbb{A}) . g_\lambda(\bar{\mathbb{A}})$$

Observação:

Podemos obter outra propriedade da medida de Sugeno trocando o sinal $\cup$ por $\cap$ na expressão dada em (ii). Esta propriedade se prova de forma análoga a (ii).

Se considerarmos o conjunto $\mathbb{X}$ finito, podemos obter uma forma geral para as medidas de Sugeno.

PROPOSIÇÃO 7 -Sejam $\mathbb{X} \neq \emptyset$ um conjunto finito, $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathbb{X})$ e g_λ

uma medida λ-fuzzy definida em $\mathscr{C}$, então:

$$g_\lambda(\mathbb{A}) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \cdot \left\{ \prod_{x \in \mathbb{A}} [1 + \lambda . g_\lambda(\{x\})] - 1 \right\}, & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \sum_{x \in \mathbb{A}} g_\lambda(\{x\}) & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}$$

para todo $\mathbb{A} \in \mathscr{C}$.

Demonstração:

Para $\lambda = 0$ é trivial, suponhamos $\lambda \neq 0$ e façamos a demonstração por indução sobre a cardinalidade de $\mathbb{A}$.

Para $car(\mathbb{A}) = 1$ é óbvio. Suponhamos que seja válido para $car(\mathbb{A}) = n$, ou seja, supomos que se tivermos $\mathbb{A} = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathscr{C}$ então:

$$g_\lambda(\mathbb{A}) = \frac{1}{\lambda} \cdot \left\{ \prod_{x \in \mathbb{A}} [1 + \lambda . g_\lambda(\{x_i\})] - 1 \right\}$$

Provaremos que esta relação vale se tivermos um conjunto com cardinalidade igual n+1. De fato, seja $\mathbb{A}' = \{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$, então

$$g_\lambda(\mathbb{A}') = g_\lambda(\mathbb{A} \cup \{x_{n+1}\}) = g_\lambda(\mathbb{A}) + g_\lambda(\{x_{n+1}\}) + \lambda . g_\lambda(\mathbb{A}) . g_\lambda(\{x_{n+1}\}) =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \left\{ \prod_{i=1}^{n} [1 + \lambda . g_\lambda(\{x_i\})] - 1 \right\} + g_\lambda(\{x_i\}) + g_\lambda(\{x_i\}) . \left\{ \prod_{i=1}^{n} [1 + \lambda . g_\lambda(\{x_i\})] - 1 \right\} = \left[\frac{1}{\lambda} + g_\lambda(\{x_{n+1}\}) \right] . \left\{ \prod_{i=1}^{n} [1 + \lambda . g_\lambda(\{x_i\})] - 1 \right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda} . \left[1 + \lambda . g_\lambda(\{x_{n+1}\}) \right] . \left\{ \prod_{i=1}^{n} [1 + \lambda . g_\lambda(\{x_i\})] \right\} - \frac{1}{\lambda} . \left[1 + \lambda . g_\lambda(\{x_{n+1}\}) \right] + g_\lambda(\{x_{n+1}\}) = \frac{1}{\lambda} . \left\{ \prod_{i=1}^{n} [1 + \lambda . g_\lambda(\{x_i\})] \right\} . \left[1 + \right.$$

$$\lambda . g_\lambda(\{x_{n+1}\})\Big] - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} . \left\{ \prod_{i=1}^{n+1} [1 + \lambda . g_\lambda(\{x_i\})] - 1 \right\}$$

Observação:

No caso $\lambda \neq 0$ a expressão da proposicão acima pode ser escrita da forma:

$$\sum_{\mathbb{B} \subset \mathbb{A}} \lambda^{|\mathbb{B}|-1} . \prod_{x \in \mathbb{B}} f(x)$$

Uma outra caracterização que pode ser dada para as medidas λ-fuzzy é sua relação com as medidas finitas:

PROPOSIÇÃO 8 - Seja $(\mathscr{X}, \mathscr{B}, \mu)$ é um espaço mensurável com uma medida finita μ. A composição $f \circ \mu$ produz uma medida λ-fuzzy se, e somente se, f é da forma

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} . \left[c^x - 1 \right]$$

Demonstração

Suponhamos que $f(x) = \frac{1}{\lambda} . \left[c^x - 1 \right]$, $c > 0$, $c \neq 1$, provemos que $g_\lambda = f \circ \mu$ é uma medida de Sugeno tomando $\lambda = c^{\mu(\mathscr{X})} - 1 > -1$.

De fato, para provar $(\lambda 1)$ sejam $\mathbb{A}$, $\mathbb{B} \in \mathscr{C}$ tal que $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \emptyset$, então temos:

$$g_\lambda(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = f \circ \mu(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = f(\mu(\mathbb{A} \cup \mathbb{B})) = f(\mu(\mathbb{A}) + \mu(\mathbb{B})) =$$

$$\frac{1}{\lambda} . \left[c^{\mu(\mathbb{A}) + \mu(\mathbb{B})} - 1 \right] = \frac{1}{\lambda} . \left[c^{\mu(\mathbb{A})} . c^{\mu(\mathbb{B})} - 1 \right] = \frac{1}{\lambda} . \left[c^{\mu(\mathbb{A})} - 1 \right] +$$

$$\frac{1}{\lambda} . \left[c^{\mu(\mathbb{B})} - 1 \right] + \lambda . \frac{1}{\lambda} . \left[c^{\mu(\mathbb{A})} - 1 \right] . \frac{1}{\lambda} . \left[c^{\mu(\mathbb{B})} - 1 \right] =$$

$$= f(\mu(\mathbb{A})) + f(\mu(\mathbb{B})) + \lambda . f(\mu(\mathbb{A})) . f(\mu(\mathbb{B})) =$$

$= g_\lambda(\mathbb{A}) + g_\lambda(\mathbb{B}) + \lambda . g_\lambda(\mathbb{A}) . g_\lambda(\mathbb{B})$.

Quanto à $(\lambda 2)$, temos

$g_\lambda(\mathcal{X}) = f(\mu(\mathcal{X})) = = \frac{1}{\lambda} . \left[c^{\mu(\mathcal{X})} - 1 \right] = \frac{1}{\lambda} . \lambda = 1$

Por último, como f é contínua, monótona, decrescente e $f(0) = = \frac{1}{\lambda} . (c^0 - 1) = 0$, temos que $g_\lambda = f \circ \mu$ é uma medida fuzzy, logo satisfaz (MF3) e (MF4). Portanto, g_λ é uma medida λ-fuzzy.

Reciprocamente, se $f \circ \mu$ é uma medida λ-fuzzy tal que f seja contínua, monótona, não-decrescente e $f(0) = 0$, mostremos que $f(x) = \frac{1}{\lambda} . \left[c^x - 1 \right]$, para algum $c > 0$ e $c \neq 1$.

Para isto, consideremos a função m tal que $m \circ \mu(\mathbb{A}) = 1 + \lambda . f \circ \mu(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \in \mathcal{B}$. e denotemos $\mu(A)$ por $\underline{a}$ e $\mu(\mathbb{B})$ por $\underline{b}$ onde $\mathbb{A}$, $\mathbb{B} \in \mathcal{B}$ e $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \emptyset$, temos por $(\lambda 1)$ que

$m(a + b) = m[\mu(\mathbb{A}) + \mu(\mathbb{B})] = m[\mu(\mathbb{A} \cup \mathbb{B})] = m \circ \mu(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = 1 + \lambda . f \circ \mu(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = 1 + \lambda . f(\mu(\mathbb{A})) + \lambda . f(\mu(\mathbb{B})) + \lambda^2 . f(\mu(\mathbb{A})) . f(\mu(\mathbb{B})) =$

$= (1 + \lambda . f \circ \mu(\mathbb{A})) . (1 + \lambda . f \circ \mu(\mathbb{B})) = m(a) . m(b)$

Logo, $m(a) = c^a$, para algum $c > 0$, $c \neq 1$

Portanto, $1 + \lambda . f(\mu(\mathbb{A})) = c^{\mu(\mathbb{A})}$, $\quad \mathbb{A} \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad f(\mu(\mathbb{A})) = \frac{1}{\lambda} . \left[c^{\mu(\mathbb{A})} - 1 \right]$$

(c.q.d.)

Um resultado interessante decorrente da proposição acima dado pelas medidas de Sugeno relacionadas com as medidas de probabilidade é o seguinte:

COROLÁRIO - Seja $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço mensurável com medida finita μ e $g_\lambda = f \circ \mu$ uma medida λ-fuzzy definida em $\mathcal{B}$ tal que f é uma função real então g_λ produz exatamente uma medida de probabilidade p definida em $\mathcal{B}$ tal que

$$P(A) = \log_{(1+\lambda)}[1 + \lambda . g_\lambda(A)], \qquad A \in \mathcal{B}$$

O inverso não é, em geral, verdadeiro, mas podemos através de uma medida subjetiva ω [13] encontrar uma medida de Sugeno g_λ tal que

$$\sum_{A \in \mathcal{B}} [\omega(A) - g_\lambda(A)]^2 \text{ seja mínimo.}$$

Existe um algoritmo que resolve este problema e tal algoritmo pode ser implementado por um programa de computador escrito em FORTRAN (ver [5]).

3.4. FUNÇÃO CONFIANÇA (OU MEDIDA DE CREDIBILIDADE)

Para entender o conceito de função confiança vejamos os seguintes exemplos:

(1) Consideremos que a ignorância total consiste em afirmar: "Eu sei que um dos elementos do espaço $\mathcal{X}$ é verdade, não sei qual, e não tenho qualquer evidência que permita afirmar que um subconjunto não-vazio próprio de $\mathcal{X}$ é mais provável que outro".

Isto implica que um grau de confiança é igual para todo subconjunto não-vazio próprio de $\mathcal{X}$, que é impossível dentro do esquema da teoria de probabilidades onde $\mathcal{X}$ tem mais de dois elementos.

(2) Em termos de diagnóstico médico de um paciente, suponhamos que um sintoma $\underline{s}$ é mais frequente entre os pacientes que pertencem a um grupo diagnóstico A, mas que $\underline{s}$ pode ser encontrado entre os pacientes que não pertencem a A. Se observarmos o sintoma $\underline{s}$ numa paciente u, cresce nosso grau de confiança de que $u \in A$. A aditividade da probabilidade implica que nosso grau de confiança de que $u \notin A$ decresceria. Assim $\underline{s}$ corresponde a uma evidência oposta a $\bar{A}$. Mas não nos agrada o fato de que um tal sintoma compatível com A seja necessariamente uma evidência oposta a $\bar{A}$ só porque é muito frequentemente encontrado em A.

Desta forma, vemos que a teoria de probabilidade é muito restritiva para descrever graus de confiança. Assim com a perspectiva de construir uma teoria de raciocínio provável, Shafer [21] reinterpretou os estudos matemáticos de Choquet [6] e de Dempster [9].

O modelo adotado por Shafer tem novas características, pois assumiu principalmente que o grau de confiança de uma proposição A ($A \neq \emptyset$) que é sempre verdadeira não é necessariamente igual a 1, ou que a soma dos graus de confiança de uma proposição A e sua negação $\bar{A}$ não é necessariamente igual a 1, mas menor ou igual a 1.

DEFINIÇÃO 5 - Seja $\mathcal{X}$ um conjunto finito e $\mathcal{E}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de $\mathcal{X}$. Uma *função de credibilidade* b é uma função real definida em $\mathcal{E}$ tal que:

(c1) $b(\emptyset) = 0$

(c2) $b(\mathbb{X}) = 1$

(c3) $0 \leq b(\mathbb{A}) < 1, \quad \forall\, \mathbb{A} \in \mathscr{C}$

(c4) $\forall\, \mathscr{B} \subseteq \mathscr{C},\ \mathscr{B} \neq \emptyset$ tem-se:

$$b(\bigcup_{\mathbb{A}\in\mathscr{B}} \mathbb{A}) \geq \sum_{\mathscr{D}\subseteq\mathscr{B}} (-1)^{|\mathscr{D}|+1} . b(\bigcap_{\mathbb{A}\in\mathscr{D}} \mathbb{A})$$

O valor $b(\mathbb{A})$ é interpretado como o grau de credibilidade com que um dado elemento x pertença a $\mathbb{A}$.

Outra definição equivalente pode ser dada:

DEFINIÇÃO 6 - Consideremos $\mathbb{X}$ um conjunto finito, $\mathscr{C}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{X}$ e m uma função real definida em $\mathscr{C}$ satisfazendo as condições

(m1) $m(\emptyset) = 0$

(m2) $\sum_{\mathbb{A}\in\mathscr{C}} m(\mathbb{A}) = 1$

Uma função real b definida por

$$b(\mathbb{A}) = \sum_{\mathbb{B}\subseteq\mathbb{A}} m(\mathbb{B}), \quad \forall\, \mathbb{A} \in \mathscr{C}$$

é denominada *função de credibilidade*.

PROPOSIÇÃO 8 - Considere a função de credibilidade dada pelas definições 5 e 6 acima. Então:

(i) A função m em (6) é única.

(ii) $\forall\, \mathbb{A} \in \mathscr{C},\quad b(\mathbb{A}) + b(\overline{\mathbb{A}}) = 1 - \sum_{\substack{\mathbb{B}\subseteq\mathbb{A} \\ \mathbb{B}\cap\mathbb{A}\neq\emptyset}} m(\mathbb{B})$

(iii) b é uma medida fuzzy

Demonstração:

(i) Suponhamos que exista outra função m' tal que

$$m'(\mathbb{A}) = 0, \ \sum_{\mathbb{A}\in\mathcal{C}} m'(\mathbb{A}) = 1 \quad \text{e} \ b(\mathbb{A}) = \sum_{\mathbb{B}\subseteq\mathbb{A}} m'(\mathbb{B}), \quad \forall\ \mathbb{A} \in \mathcal{C}$$

Temos que mostrar que $m(\mathbb{A}) = m'(\mathbb{A}), \ \forall\ \mathbb{A} \in \mathcal{C}$.

De fato, $b(\mathbb{X}) = \sum_{\mathbb{A}\subseteq\mathbb{X}} m'(\mathbb{A}) = \sum_{\mathbb{A}\in\mathcal{C}} m(\mathbb{A}) = 1$. Logo,

$$m(\mathbb{A}) = 1 - \sum_{\mathbb{B}\subseteq\mathbb{A}} m(\mathbb{B}) = 1 - \sum_{\mathbb{B}\subseteq\mathbb{C}} m(\mathbb{B}) = 1 - b(\mathbb{C})$$

e $$m'(\mathbb{A}) = 1 - \sum_{\mathbb{B}\subseteq\mathbb{A}} m'(\mathbb{B}) = 1 - \sum_{\mathbb{B}\subseteq\mathbb{C}} m'(\mathbb{B}) = 1 - b(\mathbb{C})$$

Portanto, $m(\mathbb{A}) = m'(\mathbb{A})$.

(ii) De fato, pela propriedade da função m temos $\sum_{\mathbb{B}\in\mathcal{C}} m(\mathbb{B} = 1$ e

daí $\sum_{\mathbb{B}\subseteq\mathbb{A}} m(\mathbb{B}) + \sum_{\mathbb{B}\subseteq\mathbb{A}} m(\mathbb{B}) + \sum_{\substack{\mathbb{B}\subseteq\mathbb{A}\\ \mathbb{B}\cap\mathbb{A}\neq\emptyset}} m(\mathbb{B}) = 1$. Portanto,

$$b(\mathbb{A}) + b(\bar{\mathbb{A}}) = 1 - \sum_{\substack{\mathbb{B}\subseteq\mathbb{A}\\ \mathbb{B}\cap\mathbb{A}\neq\emptyset}} m(\mathbb{B})$$

(iii) Como $\mathbb{X}$ é finito, basta verificar as propriedades (MF1) e (MF2):

É claro que vale (MF1), pois pela função m da definição (8) temos:

$$b(\emptyset) = \sum_{\mathbb{A}\subseteq\emptyset} m(\mathbb{A}) = m(\emptyset) = 0$$

Suponhamos agora que $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ então temos que:

$$b(\mathbb{A}) = \sum_{\mathbb{C}\subseteq\mathbb{A}} m(\mathbb{C}) \leq \sum_{\mathbb{C}\subseteq\mathbb{A}} m(\mathbb{C}) + \sum_{\mathbb{C}\subseteq\mathbb{A}} m(\mathbb{C}) = \sum_{\mathbb{C}\subseteq\mathbb{B}} m(\mathbb{C}) = b(\mathbb{B})$$

Portanto, b é uma medida fuzzy.

Observação:

A equivalência das definições 5 e 6 pode ser demonstrada mas não de forma elementar, ela se encontra em [21].

3.5. FUNÇOES DE CREDIBILIDADE CONSOANTE

Esta função é um caso particular de função de credibilidade (logo, uma medida fuzzy) dentre outros casos particulares de funções de credibilidade, dada por Shafer [21].

DEFINIÇÃO 7 - Sejam $\mathbb{X} \neq \emptyset$ um conjunto finito e $\mathscr{C}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{X}$. Uma *função de credibilidade consoante* é uma função de credibilidade que possua a seguinte propriedade:

"A classe de conjuntos $\mathscr{B} = \{ \mathbb{B} \in \mathscr{C} : m(\mathbb{B}) > 0\}$, *denominada o centro de* b, *é totalmente ordenada por inclusão"*.

Assim, como foi feito para funções de credibilidade, podemos dar uma definição equivalente para funções de credibilidade consoante (ver [21]).

DEFINIÇÃO 8 - Sejam $\mathbb{X} \neq \emptyset$ um conjunto finito e $\mathscr{C}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{X}$. Uma *função de credibilidade consoante* é uma função real f definida em $\mathscr{C}$ tal que:

(cc1) $f(\emptyset) = 0$

(cc2) $f(\mathbb{X}) = 1$

(cc2) $\forall\ \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathscr{C}, \quad f(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = \min(f(\mathbb{A}), f(\mathbb{B}))$

3.6. MEDIDAS DE PLAUSIBILIDADE

A definição abaixo foi dada por Shafer em 1976.

DEFINIÇÃO 9 - Seja $\mathcal{X}$ um conjunto finito e $\mathcal{C}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de $\mathcal{X}$. A *medida de plausibilidade* de um subconjunto $\mathbb{A}$ de $\mathcal{C}$ é definido por

$$Pl(\mathbb{A}) = 1 - b(\bar{\mathbb{A}})$$

onde b é uma função de credibilidade.

PROPOSIÇÃO 11 - A medida de plausibilidade, digamos $Pl:\mathcal{C} \mapsto [0,1]$, possui as seguintes propriedades:

(i) $Pl(\emptyset) = 0$

(ii) $Pl(\mathcal{X}) = 1$

(iii) Pl é uma medida fuzzy

(iv) $\forall\ \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C},\ \mathcal{B} \neq \emptyset$, temos

$$Pl(\bigcap_{\mathbb{A}\in\mathcal{B}} \mathbb{A}) \leq \sum_{\mathcal{D}\subseteq\mathcal{B}} (-1)^{|\mathcal{D}|+1}.Pl(\bigcup_{\mathbb{A}\in\mathcal{D}} \mathbb{A})$$

Demonstração:

(i) $Pl(\emptyset) = 1 - b(\bar{\emptyset}) = 1 - b(\mathcal{X}) = 0$

(ii) $Pl(\mathcal{X}) = 1 - b(\bar{\mathcal{X}}) = 1 - b(\emptyset) = 1$

(iii) Se $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$, temos $\bar{\mathbb{B}} \subseteq \bar{\mathbb{A}}$ e daí segue que

$$Pl(\mathbb{A}) = 1 - b(\bar{\mathbb{A}}) \leq 1 - b(\bar{\mathbb{B}}) = Pl(\mathbb{B})$$

Logo, $Pl(\mathbb{A}) \leq Pl(\mathbb{B})$ e, portanto, Pl é uma medida fuzzy.

(iii) Seja $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{B} \neq \emptyset$, então

$$Pl(\bigcap_{\mathbb{A}\in\mathcal{B}} \mathbb{A}) = 1 - b(\overline{\bigcap_{\mathbb{A}\in\mathcal{B}} \mathbb{A}}) = 1 - b(\bigcup_{\mathbb{A}\in\mathcal{B}} \bar{\mathbb{A}}) \leq 1 - \sum_{\mathcal{D}\subseteq\mathcal{B}} (-1)^{|\mathbb{A}|+1}.b(\bigcap_{\mathbb{A}\in\mathcal{D}} \mathbb{A}) =$$

$$= 1 - \sum_{\mathcal{D}\subseteq\mathcal{B}} (-1)^{|\mathbb{A}|+1}.[1 - Pl(\bigcup_{\mathbb{A}\in\mathcal{D}} \mathbb{A})] = \sum_{\mathcal{D}\subseteq\mathcal{B}} (-1)^{|\mathbb{A}|+1}.Pl(\bigcup_{\mathbb{A}\in\mathcal{D}} \mathbb{A})$$

Observações:

(a) As propriedades (i) e (iii) podem ser usadas para definir medidas de plausibilidade.

(b) Obviamente, para medidas de plausibilidade, temos uma definição equivalente ao caso de funções confiança em termos de uma função $m: \mathscr{C} \rightarrowtail [0,1]$. Neste caso, teremos

$$Pl(\mathbb{A}) = \sum_{\mathbb{B}\subseteq\mathbb{A}} m(\mathbb{B}), \quad \forall\ \mathbb{A} \in \mathscr{C}$$

3.7. A MEDIDA DE POSSIBILIDADE

DEFINIÇÃO 10 - Seja $\mathbb{X}\neq\emptyset$ um conjunto qualquer e $\mathscr{C}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{X}$. Uma *medida de possibilidade* é uma função $\mu: \mathscr{C} \rightarrowtail \mathbb{R}$ tal que

$$\mu(\mathbb{A}) = \begin{cases} \sup_{x\in\mathbb{A}} f(x) & \text{se } \mathbb{A} \neq \emptyset \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $f: \mathbb{X} \rightarrowtail [0,1]$ é uma função dada, com $\sup_{x\in\mathbb{X}} f(x) = 1$.

Observações:

(a) A medida de possibilidade μ é unicamente determinada por f. De fato, se $f': \mathbb{X} \rightarrowtail [0,1]$ é outra função dada, então dado $x \in \mathbb{X}$, temos $f(x) = \sup f(x_o) = \mu(\{x\}) = \sup f'(x_o) = f'(x)$.

(b) A função f acima é denominada *densidade fuzzy* ou *função-distribuição de possibilidade*.

Pode ser dada uma outra definição de medida de possibilidade que é equivalente à definição 10.

DEFINIÇÃO 11 - Seja $\mathbb{X}$ uma conjunto arbitrário e $\mathscr{C}$ uma σ-álgebra de subconjunto de $\mathbb{X}$. Uma *medida de possibilidade* é uma função $\mu: \mathscr{C} \rightarrowtail \mathbb{R}$ tal que:

(P1) $\mu(\emptyset) = 0$

(P2) $\forall\ \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathscr{C}$, se $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ então $\mu(\mathbb{A}) \leq \mu(\mathbb{B})$

(P3) $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{A}_i) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \mu(\mathbb{A}_i)$

Observações:

(a)Quando $\mathbb{X}$ é finito as condições (P2) e (P3) da definição 11 podem ser trocadas por

(P4) $\forall\ \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathscr{C}$, $\mu(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = \text{máx} \{ \mu(\mathbb{A}), \mu(\mathbb{B}) \}$

(b) A medida concentrada é, obviamente, uma medida de possibilidade.

PROPOSIÇÃO 12 - As definições 10 e 11 são equivalentes.

Demonstração:

A definição (10) implica na definição (11):

De fato, é óbvio que $\mu(\emptyset) = 0$ e se $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ temos $\mu(\mathbb{A}) = \sup_{x \in \mathbb{A}} f(x)$ e $\mu(\mathbb{B}) = \sup_{x \in \mathbb{B}} f(x)$

Como $\{f(x): x \in \mathbb{A}\} \subseteq \{f(x): x \in \mathbb{B}\}$ temos $\mu(\mathbb{A}) \leq \mu(\mathbb{B})$.

Quanto a (P3), temos

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{A}_i) = \sup_{x \in \cup \mathbb{A}_i} f(x) \qquad \text{e} \qquad \mu(\mathbb{A}_i) = \sup_{x \in \mathbb{A}_i} f(x)$$

Daí, segue que

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \mu(\mathbb{A}_i) = \sup_{i \in \mathbb{N}} (\sup_{x \in \mathbb{A}_i} f(x)) = \sup_{x \in \cup \mathbb{A}_i} f(x) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{A}_i)$$

A definição (11) implica na definição (10):

De fato, considere $f\colon \mathbb{X} \mapsto [0,1]$ dada por $f(x) = \mu(\{x\})$. Temos que para qualquer $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$, se $\mathbb{A} \neq \emptyset$

$$\mu(\mathbb{A}) = \mu(\bigcup_{x \in \mathbb{A}} \{x\}) = \sup_{x \in \mathbb{A}} \mu(\{x\}) = \sup_{x \in \mathbb{A}} f(x)$$

Se $\mathbb{A} = \emptyset$ então $\mu(\emptyset) = 0$, por hipótese.

Portanto, as definições são equivalentes.

PROPOSIÇÃO 13 - A medida de possibilidade satisfaz as propriedades (MF1), (MF2) e (MF3) da definição 1.

A *demonstração* é imediata.

A pergunta que surge naturalmente é se a medida de possibilidade é uma medida fuzzy. É óbvio que não!

Vamos ver dois exemplos que mostram claramente que a medida de possibilidade, em geral, não é uma medida fuzzy [20], isto é, não satisfaz a propriedade (MF4) da definição 1.

EXEMPLO 1 - Considere $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ e $\mu(\mathbb{A}) = \begin{cases} \sup_{x \in \mathbb{A}} f(x) & \text{se } \mathbb{A} \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } \mathbb{A} = \emptyset \end{cases}$

Se tomarmos $\mathbb{A}_n = (n, +\infty)$ temos $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{A}_n) = 0$ e $\lim_{n \to \infty} \mu(\mathbb{A}_n) = 1$.

Portanto, (FM4) não é válida.

EXEMPLO 2 - Considere $\mathbb{X} = [0,1]$, $f(x) = 1$ para $x \in [0,1)$ e $f(1) = 0$. Se tomarmos $\mathbb{A}_n = [1-1/n,\ 1]$, então $\mu(\bigcap_{n=1} \mathbb{A}_n) = 0$ mas $\lim_{n\to\infty} \mu(\mathbb{A}_n) = 1$. Portanto, não vale (MF4).

Existem casos razoavelmente particulares em que a medida de possibilidade é uma medida fuzzy.

PROPOSIÇÃO 14 - Quando $\mathbb{X}$ é um conjunto finito a medida de possibilidade é uma medida fuzzy.

A *demonstração* é imediata.:

PROPOSIÇÃO 15 - Sejam $f: \mathbb{R}^k \mapsto [0,1]$ e a medida de possibilidade $\mu(\mathbb{A}) = \sup_{x\in\mathbb{A}} f(x)$, $\forall\ \mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^k$, associada a f. Se μ é uma medida fuzzy, então $f(x) = 0$ em todo ponto de continuidade de f.

Demonstração:

Tomemos um ponto $x_o \in \mathbb{R}^k$ tal que f é contínua em x_o. Definamos $\mathbb{A}_n = \{x \in \mathbb{R}^k:\ |x - x_o| < 1/n,\ x \neq x_o\}$ (onde $|.|$ é a norma euclideana em $\mathbb{R}^k$).

Obviamente, $\mathbb{A}_n \neq \emptyset$, também temos $\mathbb{A}_1 \supseteq \mathbb{A}_2 \supseteq \dots$ e $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{A}_n = \emptyset$ e $\mu(\mathbb{A}_n) < +\infty$. Desde que μ satisfaz (MF4) segue que $\lim \mu(\mathbb{A}_n) = 0$.

Seja (x_j) uma sequência tal que $x_o = \lim x_j$, $x_j \neq x_o$. Se $n \geq 1$ é fixo, então $x_j \in \mathbb{A}_n$ para todo $j \geq j_n$ para algum $j_n \in \mathbb{N}$.

Segue que

$$0 \leq \limsup_{j \in \mathbb{N}} f(x_j) \leq \sup_{x \in \mathbb{A}_n} f(x) = \mu(\mathbb{A}_n)$$

Desde que isto é verdade para todo $n \geq 1$, concluimos que $\limsup f(x_j) = 0$, então $\lim f(x_j) = 0$.

Finalmente, desde que f é contínua em x_o, segue que $f(x_o) = \lim f(x_j) = 0$.

COROLÁRIO - Seja μ uma medida de possibilidade com densidade contínua f. Se μ é uma medida fuzzy então $\mu \equiv 0$.

Para finalizar este parágrafo daremos uma relação entre as funções de credibilidade consoante e as medidas de plausibilidade que nos será útil no parágrafo 4:

LEMA - Sejam μ e υ duas funções reais definidas numa σ-álgebra $\mathcal{E}$ de subconjuntos de um conjunto $\mathbb{X}$ finito tais que $\mu(\mathbb{A}) + \upsilon(\bar{\mathbb{A}}) = 1$, $\forall\ \mathbb{A} \in \mathcal{E}$, então μ é uma função de credibilidade consoante se, e somente se, υ é uma medida de possibilidade.

Demonstração:

Seja μ uma funcão de credibilidade consoante então:

$$\mu(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = \min\{\mu(\mathbb{A}), \mathbb{B})\}, \quad \forall\ \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{E}$$

e

$$\upsilon(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = 1 - \mu(\overline{\mathbb{A} \cup \mathbb{B}}) = 1 - \mu(\bar{\mathbb{A}} \cap \bar{\mathbb{B}}) = 1 - \min\{\mu(\bar{\mathbb{A}}), \mu(\bar{\mathbb{B}})\} =$$

$= 1 - \min\{[1 - \upsilon(\mathbb{A})], [1 - \upsilon(\mathbb{B})]\} = \max\{\upsilon(\mathbb{A}), \upsilon(\mathbb{B})\}$, o que implica que υ é uma medida de possibilidade, pois $\mathbb{X}$ é finito.

A recíproca é feita de forma análoga.

3.9. FUNÇOES SUPORTE SIMPLES

DEFINIÇÃO 12 - (Shafer) Sejam $\mathbb{X} \neq \emptyset$ um conjunto qualquer e $\mathscr{E}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{X}$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$ e $s \in [0,1]$. Uma função $\mu : \mathscr{E} \mapsto [0,1]$ definida por:

$$\forall\, \mathbb{B} \in \mathscr{E}, \quad \mu(\mathbb{B}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbb{B} = \mathbb{X} \\ s & \text{se } \mathbb{B} \geq \mathbb{A} \text{ e } B \neq \mathbb{X} \\ 0 & \text{se } \mathbb{B} \geqq \mathbb{A} \end{cases}$$

é chamada de *função suporte simples concentrada em* $\mathbb{A}$.

Observações:

(a) Se $s = 1$ chamamos μ de *medida certa concentrada em* $\mathbb{A}$.

(b) Se $|\mathbb{A}| = 1$ temos a *medida concentrada em* $\mathbb{A}$.

(c) Esta função inclui o caso de completa ignorância bastando tomar $s = 0$ ou $\mathbb{A} = \mathbb{X}$ e que, neste caso, é denominada de *função de credibilidade vazia*.

PROPOSIÇÃO 16 - Toda função suporte simples é uma medida fuzzy.

A *demonstraçao* é imediata.

3.10. MEDIDA DE POSSIBILIDADE t-um

No capitulo 4 veremos uma correspondência entre as medidas de possibilidade e as funções confiança consoante. Relativamente a funções suporte simples temos uma correspondência com um outro tipo de medida: a medida de possibilidade t-um.

DEFINIÇÃO 13 - Sejam $\mathbb{X}$ um conjunto qualquer, $\mathscr{E}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{X}$, $t \in [0,1]$ e $\mathbb{A} \in \mathcal{E}$. Uma função μ: $\mathcal{E} \mapsto [0,1]$ definida por:

$$\forall\ \mathbb{B} \in \mathcal{E},\quad \mu(\mathbb{B}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbb{B} \cap \mathbb{A} \neq \emptyset \\ t & \text{se } \mathbb{B} \cap \mathbb{A} = \emptyset \\ 0 & \text{se } \mathbb{B} = \emptyset \end{cases}$$

é denominada *medida de possibilidade t-um*.

Observações:

Quando $t = 0$ ou $\mathbb{A} = \mathbb{X}$, chamamos tal função de *medida de possibilidade máxima*.

PROPOSIÇÃO 17 - Toda medida de possibilidade t-um é uma medida fuzzy.

Demonstração:

Seja μ uma medida de possibilidade t-um definida num conjunto $\mathbb{X}$ e $\mathcal{E}$ uma σ-álgebra de $\mathbb{X}$.

Fixemos um conjunto $\mathbb{A} \in \mathcal{E}$. É claro que vale (MF1), quanto a (MF2) sejam $\mathbb{B}$, $\mathbb{C} \in \mathcal{E}$ tais que $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{C}$, então

$$(1)\ \mathbb{B} \cap \mathbb{A} = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{C} \cap \mathbb{A} = \emptyset \Rightarrow \mu(\mathbb{B}) = t \leq 1 = \mu(\mathbb{C}) \\ \\ \mathbb{C} \cap \mathbb{A} \neq \emptyset \Rightarrow \mu(\mathbb{B}) = t = \mu(\mathbb{C}) \end{cases}$$

(2) $\mathbb{B} \cap \mathbb{A} \neq \emptyset \Rightarrow \mathbb{C} \cap \mathbb{A} \neq \emptyset \Rightarrow \mu(\mathbb{B}) = 1 = \mu(\mathbb{C})$, portanto

vale (MF2).

Verifiquemos, agora, a condição (MF3): Seja $(\mathbb{A}_i : i \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{E}$ tal que $\mathbb{A}_1 \subseteq \mathbb{A}_2 \subseteq \ldots$, então:

(1) $\mathbb{A}_j \cap \mathbb{A} \neq \emptyset$ para algum $j \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{A}_k \cap \mathbb{A} \neq \emptyset$, para todo $k>j$ e daí segue que

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{A}_i) = 1 = \mu(\mathbb{A}_j) = \lim_{i\to\infty} \mu(\mathbb{A}_i)$$

pois $[\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{A}_i] \cap \mathbb{A} \neq \emptyset$, neste caso.

(2) $\mathbb{A}_j \cap \mathbb{A} = \emptyset$, para todo $j \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\mu(\mathbb{A}_j) = t$, para todo $j \in \mathbb{N}$, daí segue que:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{A}_i) = t = \mu(\mathbb{A}_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(\mathbb{A}_i)$$

Logo, a propriedade (MF3) é válida.

De forma análoga, mostra-se que (MF4) também é válida.

Portanto, a medida de possibilidade t-um é uma medida fuzzy.

4. RELAÇÕES ENTRE AS DIVERSAS MEDIDAS FUZZY

No parágrafo anterior vimos vários exemplos particulares de medidas fuzzy. Considerando o conjunto de todas as medidas fuzzy estabeleceremos várias relações entre os subconjuntos citados no capítulo anterior.

Suporemos, neste capítulo, que $\mathbb{X}$ é um conjunto finito para tornar possível a maioria das comparações feitas. Consideraremos $\mathscr{C}$ a σ-álgebra formada por todos os subconjuntos de $\mathbb{X}$.

As medidas concentradas serão excluídas da nossa análise pois constituem um exemplo patológico no universo das medidas fuzzy (algumas proposições esclarecerão esta exclusão). As medidas de possibilidade serão consideradas tais que $\mu(\mathbb{X}) = 1$.

Notações:

$\mathbf{A}$ = { medidas fuzzy } \ { medidas concentradas }

$\mathbf{B}_1$ = { funções de credibilidade }

B_2 = { medidas de plausibilidade }

B = { medidas de probabilidade }

C_λ = { medidas λ-fuzzy }

D_1 = { funções de credibilidade consoante }

D_2 = { medidas de possibilidade }

E_1 = { funções suporte simples }

E_2 = { medida de possibilidade t-um }

μ_1 = { função de credibilidade vazia vazia }

μ_2 = { medida de possibilidade máxima }

Sabemos pelo parágrafo anterior que os conjuntos citados acima são subconjuntos de $\mathbb{A}$.

O que faremos a seguir será ordená-los por inclusão. Para isto usaremos ainda alguns resultados que seguem:

PROPOSIÇÃO 18 - Toda medida de probabilidade é uma função de credibilidade.

Demonstração:

Mostraremos que uma medida de probabilidade P satisfaz a condição (b3) da definição 5.

Provaremos por indução em $\mathscr{B}$:

Suponhamos que para $\mathscr{B} = \{\mathbb{A}_1,\dots,\mathbb{A}_n\}$ com $n > 1$, temos que seja válida a condição (b3) da definição 5 e provemos que vale para uma coleção com n+1 elementos.

De fato, seja $\mathscr{B}' = \{\mathbb{A}_1,\dots,\mathbb{A}_n,\mathbb{A}_{n+1}\}$ e temos:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{A}_i) = P\left[(\mathbb{A}_{n+1}) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{A}_i)\right] = P(\mathbb{A}_{n+1}) + P(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{A}_i) - P\left[(\mathbb{A}_{n+1}) \cap (\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{A}_i)\right] =$$

$$= P(\mathbb{A}_{n+1}) + \sum_{\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}} (-1)^{|\mathscr{A}|+1} . P(\bigcap_{\mathbb{A} \in \mathscr{A}} \mathbb{A}) - P\left[(\mathbb{A}_{n+1}) \cap (\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{A}_i)\right] =$$

$$= \sum_{\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}'} (-1)^{|\mathscr{A}|+1} . P(\bigcap_{\mathbb{A} \in \mathscr{A}} \mathbb{A})$$

Portanto, toda medida de probabilidade é uma função de credibilidade.

PROPOSIÇÃO 19 - Sejam μ e υ duas funções reais definidas em $\mathscr{C}$ tais que $\mu(\mathbb{A}) + \upsilon(\overline{\mathbb{A}}) = 1$, $\forall\ \mathbb{A} \in \mathscr{C}$, então μ é uma função de credibilidade se, e somente se, υ é uma medida de plausibilidade.

Demonstração:

Seja $\mathbb{A} \in \mathscr{C}$, $\mathscr{B} = \{ \mathbb{B} \subseteq \mathscr{X}: \mathbb{B} \subseteq \overline{\mathbb{A}} \}$ e $\mathscr{B}' = \{ \mathbb{B} \subseteq \mathscr{X}: \mathbb{B} \cap \mathbb{A} \neq \emptyset \}$, observemos que $\forall\ \mathbb{A} \in \mathscr{C}$, $\mathscr{B} \cap \mathscr{B}' = \emptyset$, $\mathscr{B} \cup \mathscr{B}' = \mathscr{C}$.

Considere μ uma função de credibilidade qualquer, então existe $m\ \mathscr{C} \mapsto [0,1]$, tal que $m(\emptyset) = 0$ e $\sum_{\mathbb{A} \subseteq \mathscr{X}} m(\mathbb{A}) = 1$ tal que:

$$\mu(\mathbb{A}) = \sum_{\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}} m(\mathbb{B}) \quad \forall\ \mathbb{A} \in \mathscr{C}$$

Logo, $\upsilon(\mathbb{A}) = 1 - \mu(\overline{\mathbb{A}}) = \sum_{\mathbb{B} \subseteq \mathscr{X}} m(\mathbb{B}) - \sum_{\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}} m(\mathbb{B}) = \sum_{\mathbb{B} \cap \mathbb{A} = \emptyset} m(\mathbb{B})$

Portanto, υ é uma medida de plausibilidade.

Reciprocamente, seja υ uma medida de plausibildiade qualquer, então existe uma função real definida em tal que $m(\emptyset) = 0$ e $\sum_{\mathbb{B} \subseteq \mathscr{X}} m(\mathbb{B}) =$

1 e $\nu(\mathbb{A}) = \sum_{\mathbb{B}\subseteq\mathbb{A}} m(\mathbb{B})$, $\forall\, \mathbb{A} \in \mathscr{C}$.

Daí, segue que

$$\mu(\mathbb{A}) = 1 - \nu(\bar{\mathbb{A}}) = \sum_{\mathbb{B}\subseteq\mathbb{X}} m(\mathbb{B}) - \sum_{\mathbb{B}\cap\bar{\mathbb{A}}=\emptyset} m(\mathbb{B}) = \sum_{\mathbb{B}\subseteq\mathbb{A}} m(\mathbb{B})$$

Portanto, μ é uma função de credibilidade.

PROPOSIÇÃO 20 - Seja $\mu: \mathscr{C} \rightarrowtail R$ uma função real, se μ é uma função de credibilidade e, além disso, é uma medida de plausibilidade então μ é uma medida de probabilidade.

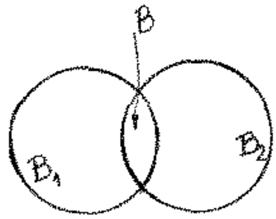
Demonstração:

Basta notar que para $\forall\, \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathscr{C}$ $\mu(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \geq \mu(\mathbb{A}) + \mu(\mathbb{B})$ pois μ é uma função de credibilidade e, além disso,

$\forall\, \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathscr{C}$ $\mu(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \leq \mu(\mathbb{A}) + \mu(\mathbb{B})$ pois

Portanto, μ é uma medida de probabilidade.

Dos resultados acima, podemos concluir que $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_2$ e completar o diagrama da seguinte forma:



Vamos agora localizar as medidas λ-fuzzy dentro deste diagrama:

PROPOSIÇÃO 21 - As medidas 0-fuzzy são idênticas às medidas de probabilidade.

Demonstração:

De fato, para $\lambda=0$, vemos que $(\lambda 1) \Rightarrow (P2')$.

PROPOSIÇÃO 22 - Toda medida λ-fuzzy que não é uma medida concentrada é uma função de credibilidade se, e somente se, $\lambda \geq 0$.

Demonstração:

Seja μ uma medida λ-fuzzy e $f: \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \mu(\{x\})$, $\forall\, x \in \mathbb{X}$. Pela proposição 7, temos que

$$\forall\, \mathbb{A} \in \mathscr{E},\ \mathbb{A} \neq \emptyset :\ \mu(\mathbb{A}) = \sum_{\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}} \lambda^{|\mathbb{B}|-1} . \prod_{x \in \mathbb{B}} f(x)$$

Seja h uma função definida por

$$\mathbb{A} \in \mathscr{E} \Rightarrow h(\mathbb{A}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbb{A} = \emptyset \\ \lambda^{|\mathbb{A}-1|} . \prod_{x \in \mathbb{A}} f(x) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

então para todo $\mathbb{A} \in \mathscr{E}$ temos $\mu(\mathbb{A}) = \sum_{\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}} h(\mathbb{B})$.

Desde que as medidas concentradas são descartadas, existe pelo menos um $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$ tal que o fator $\prod_{x \in \mathbb{A}} f(x)$ é não nulo e $|\mathscr{E}|$ é par.

Logo, $\lambda \geq 0$ se, e somente se, h é positiva e μ é uma função de credibilidade (ver definição 6).

PROPOSIÇÃO 23 - Sejam μ, υ: $\mathscr{E} \mapsto [0,1]$ funções tais que para todo $\mathbb{A} \in \mathscr{E}$ tem-se $\mu(\mathbb{A}) + \upsilon(\overline{\mathbb{A}}) = 1$, então μ é uma medida α-fuzzy com $\alpha \in]-1,0]$ se, e somente se, υ é uma medida β-fuzzy com $\beta \in [0,+\infty[$.

Demonstração:

Seja $\lambda \in [-1,+\infty[$, então a função υ dada por $\upsilon(\mathbb{A}) = 1 - g_\lambda(\overline{\mathbb{A}})$, $\forall\, \mathbb{A} \in \mathscr{C}$, satisfaz $\upsilon(\mathbb{X}) = 1$, onde g_λ é uma medida λ-fuzzy).

Além disso, da proposição 6.(ii) temos que:

$$\forall\, \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathscr{C},\ \mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \emptyset :\quad \upsilon(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = 1 - g_\lambda(\overline{\mathbb{A} \cup \mathbb{B}}) =$$

$$= 1 - \frac{g_\lambda(\overline{\mathbb{A}}) + g_\lambda - g_\lambda(\overline{\mathbb{A}}\quad \overline{\mathbb{B}}) + \lambda.g_\lambda(\overline{\mathbb{A}}).g_\lambda(\overline{\mathbb{B}})}{1 + \lambda.g_\lambda(\overline{\mathbb{A}} \cup \overline{\mathbb{B}})} =$$

$$= \frac{1 + \lambda - g_\lambda(\overline{\mathbb{A}}) - g_\lambda(\overline{\mathbb{B}}) + 1 - \lambda.g_\lambda(\overline{\mathbb{A}}).g_\lambda(\overline{\mathbb{B}})}{1 + \lambda} =$$

$$= (1 - g_\lambda(\overline{\mathbb{A}})) + (1 - g_\lambda(\overline{\mathbb{B}})) - \frac{\lambda}{1 + \lambda}.(1 - g_\lambda(\overline{\mathbb{A}})).(1 - g_\lambda(\overline{\mathbb{B}})) =$$

$$= \upsilon(\mathbb{A}) + \upsilon(\mathbb{B}) - \frac{\lambda}{1 + \lambda}.\upsilon(\mathbb{A}).\upsilon(\mathbb{B}).$$

Desta forma, υ é uma medida λ-fuzzy com $\lambda' = \dfrac{\lambda}{1 + \lambda}$.

Observando que a função $f : (-1,0] \mapsto [0,+\infty)$ dada por $f(\lambda) = \dfrac{-\lambda}{1+\lambda}$ é uma bijeção, vemos que o teorema está demonstrado.

PROPOSIÇÃO 24 - Toda medida λ-fuzzy que não é uma medida concentrada é uma medida de plausibilidade se, e somente se, $\lambda \leq 0$.

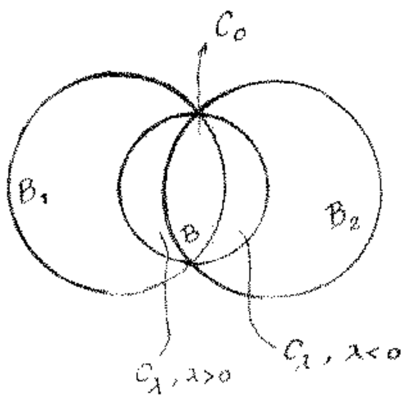
Demonstração:

De fato, seja μ uma medida tal que $\mu(\mathbb{A}) = 1 - \upsilon(\bar{\mathbb{A}})$ onde υ é uma medida λ-fuzzy (que não é uma medida concentrada).

Logo, pela proposição 22 e 23 temos:

$\lambda \leq 0 \iff \mu$ é uma medida λ-fuzzy com $\lambda \in [0,+\infty) \iff \mu$ é uma função confiança $\iff \upsilon$ é uma medida de plausibilidade.

As medidas λ-fuzzy ficam, agora, bem localizadas dentro do diagrama 2.



Veremos agora que existem medidas que são de plausibilidade ou função de credibilidade mas que não são necessariamente λ-fuzzy.

As funções de credibilidade consoante são exemplos de funções de credibilidade que não são medidas λ-fuzzy. De fato, pela definição 8 temos

$$f(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = \min \{f(\mathbb{A}), f(\mathbb{B})\}, \quad \forall\, \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{C}$$

e pela proposição 6.(ii)

$$g_\lambda(\mathbb{A}\cap\mathbb{B}) = \frac{g_\lambda(\mathbb{A}) + g_\lambda(\mathbb{B}) - g_\lambda\mathbb{A}\cup\mathbb{B}) + \lambda.g_\lambda(\mathbb{A}).g_\lambda(\mathbb{B})}{1 + \lambda.g_\lambda(\mathbb{A}\cup\mathbb{B})}$$

Se existir μ satisfazendo as duas condições acima, teremos (suporemos $\mu \in D_1 \cap B_1$):

Primeiro caso: $\min\{f(\mathbb{A}), f(\mathbb{B})\} = f(\mathbb{A})$

$$\mu(\mathbb{A}) = \frac{\mu(\mathbb{A}) + \mu(\mathbb{B}) - \mu(\mathbb{A}\cup\mathbb{B}) + \lambda.\mu(\mathbb{A}).\mu(\mathbb{B})}{1 + \lambda.f(\mathbb{A}\cup\mathbb{B})} \quad \Rightarrow$$

$$\mu(\mathbb{A}) + \lambda.\mu(\mathbb{A}\cup\mathbb{B}).\mu(\mathbb{A}) = \mu(\mathbb{A}) + \mu(\mathbb{B}) - \mu(\mathbb{A}\cup\mathbb{B}) + \lambda.\mu(\mathbb{A}).\mu(\mathbb{B}) \quad \Rightarrow$$

$$\lambda.\mu(\mathbb{A}\cup\mathbb{B}).\mu(\mathbb{A}) = \mu(\mathbb{B}) - \mu(\mathbb{A}\cup\mathbb{B}) + \lambda.\mu(\mathbb{A}).\mu(\mathbb{B}) \quad \Rightarrow$$

$$(\lambda.\mu(\mathbb{A}) + 1).\mu(\mathbb{A}\cup\mathbb{B}) = \mu(\mathbb{B}).(1 + \lambda.\mu(\mathbb{A}))$$

Como $1 + \lambda.\mu(\mathbb{A}) \neq 0$, temos $\mu(\mathbb{A}\cup\mathbb{B}) = \mu(\mathbb{B})$, o que é um absurdo.

O segundo caso em que $\min(f(\mathbb{A}), f(\mathbb{B})) = f(\mathbb{B})$ é feito de forma análoga. Logo, $D_1 \cap \mathbb{B}_1 = \emptyset$.

PROPOSIÇÃO 25 - Toda medida de possibilidade μ é uma medida λ-fuzzy ($\lambda \in]-1,+\infty[$) se, e somente se, μ é uma medida concentrada.

Demonstração:

Seja μ uma medida de possibilidade e f sua função distribuição, então

$$\mu(\{x,y\}) = \max(f(x),\ f(y)), \quad \forall\ x,y \in \mathbb{X}\ .$$

Desde que $\lambda \in (-1,+\infty)$ e $f(x) \in [0,1]\ \forall\ x \in \mathbb{X}$ devemos ter $\min\ \{f(x),\ f(y)\} = 0$. Logo, μ é uma medida concentrada pois $\mu(\mathbb{X})=1$.

A recíproca é verdadeira pois toda medida concentrada é de possibilidade e é também λ-fuzzy.

Desta forma, como foram excluídas do estudo as medidas concentrada temos que $D_2 \cap C_\lambda = \emptyset$.

PROPOSIÇÃO 26 - Toda medida de possibilidade μ tal que $\mu(\mathbb{X}) = 1$ é uma medida de plausibilidade.

Demonstração:

Seja μ uma medida de possibilidade e definamos uma função b da seguinte forma:

$$b(\mathbb{A}) = 1 - \mu(\overline{\mathbb{A}})$$

Temos pelo LEMA dado no parágrafo 3.7 que b é uma função confiança, logo, por definição μ é uma medida de plausibilidade.

PROPOSIÇÃO 27 - Toda função suporte simples é uma função de credibilidade consoante.

Demonstração:

Seja μ uma função suporte simples, então existe $\mathbb{A} \in \mathscr{C}$ e $s \in [0,1]$ tal que:

$$\mu(\mathbb{B}) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \mathbb{B} = \mathbb{X} \\ s & \text{se} \quad \mathbb{B} \geq \mathbb{A} \quad \text{ou} \quad \mathbb{B} \neq \mathbb{X} \\ 0 & \text{se} \quad \mathbb{B} \geq \mathbb{A} \end{cases}$$

Definamos uma função m da seguinte forma:

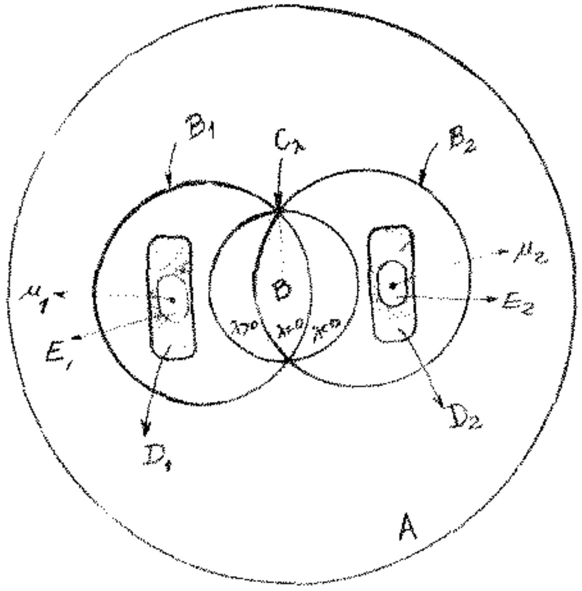
$$m(\mathbb{B}) = \begin{cases} s & \text{se} \quad \mathbb{B} = \mathbb{A} \\ 1 - s, & \text{se} \quad \mathbb{B} = \mathbb{X} \\ 0 & \text{se} \quad \mathbb{B} \neq \mathbb{A},\ \mathbb{B} \neq \mathbb{X} \end{cases}$$

Temos que:

$$\sum_{\mathbb{B} \subseteq \mathbb{X}} m(\mathbb{B}) = 1 \qquad \text{e} \qquad \mu(\mathbb{C}) = \sum_{\mathbb{B} \subseteq \mathbb{C}} m(\mathbb{B}) \qquad \forall\ \mathbb{C} \in \mathscr{C}$$

Temos também que se $\mathbb{A} = \mathbb{X}$ o centro $\mathscr{B}$ de μ é igual a $\{ \mathbb{X} \}$ e se $\mathbb{A} \neq \mathbb{X}$ o centro $\mathscr{B}$ de μ é igual $\{ \mathbb{A}, \mathbb{X} \}$. Em ambos os casos o centro $\mathscr{B}$ de μ é totalmente ordenado por inclusão. Logo, μ é uma funcão de credibilidade consoante.

Considerando a proposição 17 e a proposição acima, completamos o diagrama que assume sua forma final:



CAPÍTULO 4
MEDIDAS DE POSSIBILIDADE

1. INTRODUÇÃO

Vimos no capítulo 3 que as medidas de possibilidade constituiam um bom exemplo de medidas fuzzy quando considerávamos o conjunto universo $\mathbb{U}$ finito. Observamos também, através de contra-exemplos que quando $\mathbb{U}$ é infinito as medidas de possibilidade nem sempre são medidas fuzzy.

O objetivo principal deste capítulo será construirmos a medida de possibilidade através de uma classe especial de relações fuzzy: a classe de restrições fuzzy (ver parágrafo 5 do capítulo 2). Além disso, faremos uma conexão com as medidas de probabilidade já que elas nos fornecem uma boa motivação para o assunto aqui abordado, pois a teoria de probabilidades, apesar de ser um instrumento matemático útil em diversas aplicações, é insatisfatória quando os problemas envolvem tomada de decisão, reconhecimento de linguagem, diagnósticos médicos, análise de quadros de pintura, recuperação de informação, etc.

A propriedade que caracteriza basicamente a probabilidade é a da união de dois eventos disjuntos que é dada pela soma das probabilidades de cada evento, ou seja, dados $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ dois eventos quaisquer pertencentes a um espaço de probabilidade tais que $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \emptyset$ temos $P(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = P(\mathbb{A}) + P(\mathbb{B})$. Porém, nem sempre isto representa de forma adequada situações em que o grau de incerteza e subjetividade humana é muito grande. De fato, existem casos em que pode ocorrer como resultado, ao invés da soma, o maior dos valores.

Por exemplo, dados $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ dois eventos quaisquer disjuntos podemos ter $\mathbb{P}(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = \sup \left\{ P(\mathbb{A}), P(\mathbb{B}) \right\}$ que, em geral, não é igual a $P(\mathbb{A}) + P(\mathbb{B})$.

Contudo, é importante reconhecer que alguns problemas se adaptam dentro dos padrões da teoria de probabilidade e outros dentro da teoria de possibilidade e, em certos casos de interesse prático ambas as teorias devem ser combinadas e daí produzirem soluções ótimas para problemas que, em geral, envolvem análise de decisão.

Zadeh, em [30], caracterizou bem a diferença entre probabilidade e possibilidade: "Intuitivamente, a possibilidade relata nossa percepção do grau de praticabilidade ou facilidade de realização enquanto que probabilidade é associada com um grau de confiança, frequência ou proporção".

2. FUNÇÃO-DISTRIBUIÇÃO DE POSSIBILIDADE

Na definição de medida de possibilidade (ver parágrafo 3.7 do capítulo 3) tínhamos como parte principal uma função que denominamos função-distribuição. Esta, como veremos, será dada por um conjunto fuzzy, melhor dizendo uma restrição fuzzy, conforme foi definido no parágrafo 5 do capítulo 2.

Convém ressaltarmos que esta função desempenha o mesmo papel que a função-densidade de uma variável aleatória quando estudamos a teoria de probabilidades.

DEFINIÇÃO 1 - Seja $\mathbb{F}$ um conjunto fuzzy definido num conjunto universo $\mathbb{U}$ caracterizado pela função-pertinência $\mu_{\mathbb{F}}$, onde $\mu_{\mathbb{F}}(u)$ é interpretada como a compatibilidade de u com o conceito fuzzy $\mathbb{F}$.

Seja X uma variável de um determinado conjunto (não necessariamente $\mathbb{U}$) e A(X) um atributo da variável X que toma valores em $\mathbb{U}$. Suponhamos que $\mathbb{F}$ age como uma restrição fuzzy RE[A(X)] associada a A(X). Nestas condições, diremos que a *proposição* "X é $\mathbb{F}$", transformada através da equação de relação dos valores restritos em R[A(X)] = $\mathbb{F}$, *associa uma distribuição de possibilidade com A(X) induzida pela proposiçao dada*, digamos $\Pi_{A(X)}$, *que postulamos ser igual a* RE[A(X)]. Desta forma, temos $\Pi_{A(X)}$ = RE[A(X)] = $\mathbb{F}$.

EXEMPLO 1 - Seja $\mathbb{F}$ o subconjunto fuzzy dos "números naturais pequenos" do conjunto universo $\mathbb{U} = \mathbb{N}$ definido como segue:

$$\mathbb{F} = 1/1 + 1/2 + 0{,}9/3 + 0{,}8/4 + 0{,}6/5 + 0{,}4/6 + 0{,}2/7 + 0{,}1/8$$

Deste conjunto fuzzy, a proposição "X é um número natural pequeno" associa com a variável X a distribuição de possibilidade:

$$\Pi_X = 1/1 + 1/2 + 0{,}9/3 + 0{,}8/4 + 0{,}6/5 + 0{,}4/6 + 0{,}2/7 + 0{,}1/8$$

Observemos que, neste caso, temos A(X) = X.

Interpretação: O termo 0,9/3 significa que a possibilidade que a variável X assuma o valor 3, dado que X é um número natural pequeno, é 0,9. Analogamente, temos que a possibilidade que a variável X assuma o valor 9, dado que X é um número natural pequeno, é 0.

EXEMPLO 2 - Seja $\mathbb{U}$ = [0,100] o conjunto universo e $\mathbb{F}$ o subconjunto fuzzy de $\mathbb{U}$ dado pelo conceito "velho" e a função-pertinência

$$\mu_{\mathbb{F}}(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le u \le 40 \\ \left[1 + \left(\frac{u-40}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & \text{se } 40 \le u \le 100 \end{cases}$$

Deste conjunto fuzzy a proposição " Carlos é velho" associa com a variável Carlos uma distribuição de possibilidade dada pela igualdade $\Pi_{Idade(Carlos)} = \mu_{\mathbb{F}}$. Observemos que, neste caso, X é variável de um conjunto de pessoas e A(X) é a idade de X.

Interpretação: Se u = 90, por exemplo, teremos $\mu_{\mathbb{F}}(u) = 0{,}99$. Este número significa que, dado que Carlos é velho, a possibilidade de Carlos possuir 90 anos é 0,99. Analogamente, a possibilidade de Carlos possuir 30 anos, dado a afirmação de que Carlos é velho, é 0.

DEFINIÇÃO 2 - Seja $\mathbb{F}$ um subconjunto fuzzy de um conjunto universo $\mathbb{U}$ caracterizado pela função-pertinência $\mu_{\mathbb{F}}$, onde $\mu_{\mathbb{F}}(u)$ é interpretado do mesmo modo que na definição 1. Seja X uma variável de um determinado conjunto (não necessariamente $\mathbb{U}$) tal que o atributo A(X) toma valores em $\mathbb{U}$ e suponhamos que $\mathbb{F}$ atua como uma restrição fuzzy RE[A(X)] associada com o atributo A(X). A proposição "X é $\mathbb{F}$" associa com o atributo A(X) a distribuição de possibilidade $\Pi_{A(X)}$. A *função-distribuição de possibilidade de* $\Pi_{A(X)}$ ou a *função-distribuição de possibilidade associada com o atributo A(X)*, denotada por $\pi_{A(X)}$, se define como numericamente igual à função-pertinência de $\mathbb{F}$, isto é, $\pi_{A(X)} = \mu_{\mathbb{F}}$.

Deste modo, a possibilidade que A(X) = u , denotada por $\pi_{A(X)}(u)$, é postulada como sendo igual a $\mu_{\mathbb{F}}(u)$.

EXEMPLO 3 - Considerando o exemplo 1 acima, sabemos que

$$\Pi_X = 1/1 + 1/2 + 0{,}9/3 + 0{,}8/4 + 0{,}6/5 + 0{,}4/6 + 0{,}2/7 + 0{,}1/8$$

Daí, segue que

$$\pi_X = 1/1 + 1/2 + 0{,}9/3 + 0{,}8/4 + 0{,}6/5 + 0{,}4/5 + 0{,}2/7 + 0{,}1/8$$

Por exemplo, $\Pi_X(3) = 0{,}9$ e $\Pi_X(9) = 0$.

EXEMPLO 4 - Considerando o exemplo 2, teremos a função-distribuição de possibilidade associada à Idade de uma pessoa X como sendo:

$$\pi_{\text{Idade}(X)}(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq u \leq 40 \\ \left[1 + \left(\dfrac{u - 40}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & \text{se } 40 \leq u \leq 100 \end{cases}$$

Observações:

(a) Nota-se que o atributo da variável X está associada com a função-distribuição de possibilidade da mesma forma que uma variável aleatória em teoria de probabilidades (ver [13]) está associada com uma função-densidade de uma distribuição de probabilidade.

(b) A definição 1 implica que a distribuição de possibilidade $\Pi_{A(X)}$ pode ser considerada como uma interpretação do conceito de restrição fuzzy e, consequentemente, a "ferramenta" matemática da teoria dos conjuntos fuzzy e o cálculo de restrições fuzzy (ver [27]) constituem uma base para a manipulação da distribuição de possibilidade através das leis deste cálculo.

(c) A definição 2 implica que o grau de possibilidade pode ser qualquer número no intervalo [0,1] além do 0 e do 1. Assim, nota-se que a existência de graus intermediários de possibilidade está implícito em proposições comumente encontradas tais como:

"É bastante possível que Carlos seja promovido."

"É pouco possível que J.J., candidato a prefeito, seja eleito."

"É quase impossível encontrar um candidato eleito que cumpra suas promessas feitas em época de eleições."

Através da linguagem coloquial, se tende a interpretar que uma caracterização de um grau intermediário de possibilidade para uma rotulação tal como "pequena possibilidade" está associada como "pequena probabilidade". Porém, esta interpretação não é correta pois existe uma diferença fundamental entre probabilidade e possibilidade, que bem entendida, leva a uma diferenciação mais cuidadosa entre as caracterizações de graus de possibilidade versus grau de probabilidade. Para ilustrar uma diferença entre possibilidade e probabilidade desenvolveremos dois exemplos (um no caso discreto e outro no caso contínuo):

EXEMPLO 5 - Considere uma cidade do Estado de São Paulo, que chamaremos simbolicamente de Bimboca, suponhamos que possua 5.000 habitantes que, efetivamente, darão seu voto de *esperança* no dia 15 de novembro de 1988 a algum candidato a prefeito.

Seja a proposição " J. Pedroso, um dos dois candidatos à prefeito de Bimboca, obterá X votos nas eleições de 15 de novembro." , onde X toma valores em $U = \{0,1,2,\ldots,5000\}$.

Podemos associar uma distribuição de possibilidade a X interpretando $\pi_X(u)$ como o grau de possibilidade com que J. Pedroso obterá u votos. Podemos associar também uma função densidade de probabilidade a X interpretando $P_X(u)$ como o grau de probabilidade de J. Pedroso obter u votos. Assumindo que foi empregado algum critério para determinar o grau de possibilidade com que J. Pedroso obterá u votos em 15 de novembro, colocaremos os valores como segue na tabela abaixo:

u	1 a 500	500 a 1000	1000 a 1500	1500 a 2000	2000 a 2500	2500 a 3000	3000 a 3500	3500 a 4000	4000 a 4500	4500 a 5000
$\Pi(u)$	1	1	1	0,8	0,7	0,5	0,4	0,2	0,1	0
$P_X(u)$	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1	0	0	0	0	0

Através da tabela vemos, por exemplo, que a possibilidade que J. Pedroso tem de obter 450 votos é 1 enquanto que a probabilidade é muito pequena : 0,1. Notemos também que tanto a possibilidade quanto a probabilidade de J. Pedroso obter 4500 votos é 0.

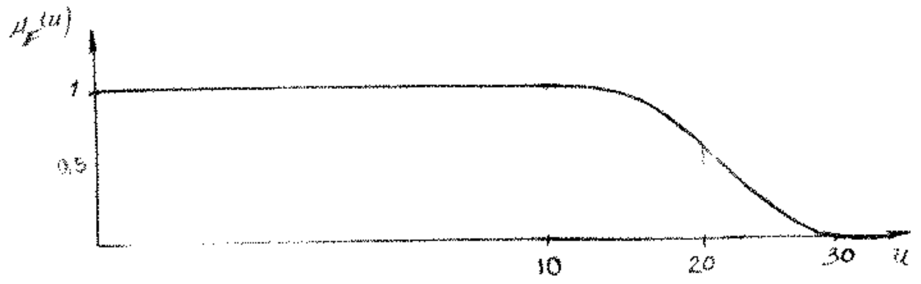
EXEMPLO 6 - (Ver exemplo 5 do capítulo 1)

Seja a proposição da forma "X é $\mathbb{F}$" dada por "João é jovem". Claramente, o subconjunto fuzzy denotado por $\mathbb{F}$ toma valores em $\mathbb{U}$ = [0,100]. Tal conjunto está caracterizado pela função-pertinência

$\mu_{\mathbb{F}}(u) = \mu_{\text{Jovem}}(u) = 1 - S(u;10,20,30)$; $u \in \mathbb{U}$, onde

$$S(u;10,20,30) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad u \leq 10 \\ 2.(u-10)^2/400 & \text{se} \quad 10 \leq u \leq 20 \\ 1 - 2.(u-30)^2/400 & \text{se} \quad 20 \leq u \leq 30 \\ 1 & \text{se} \quad u \geq 30 \end{cases}$$

Graficamente, teríamos a seguinte situação:



Nota-se que $\mu_{\mathbb{F}}(20) = \mu_{\text{Jovem}}(20) = 0,5$. O atributo implícito

$A(X)$ de X, neste caso, é a idade de X. Assim a tradução da proposição "X é $\mathbb{F}$" dada por "João é jovem" pode ser expressa através da equação de relação de valores restritos como

$$RE[A(X)] = \mathbb{F}, \text{ isto é, } R[Idade(João)] = Jovem.$$

Desta forma, associamos uma distribuição de possibilidade com $A(X)$ como segue:

$$\Pi_{A(X)} = \Pi_{Idade(Joao)} = RE[A(X)] = RE[Idade(João)] = Jovem = \mathbb{F}$$

A função-distribuição de possibilidade associada com $A(X)$ é $\pi_{A(X)} = \mu_{jovem} = \mu_{\mathbb{F}}$ que se pode interpretar como segue:

Interpretação:

Suponhamos u = 30, sabendo que João é jovem a possibilidade de João ter 30 anos é 0,5. Assim, a função-distribuição de possibilidade induzida por X não é outra, senão

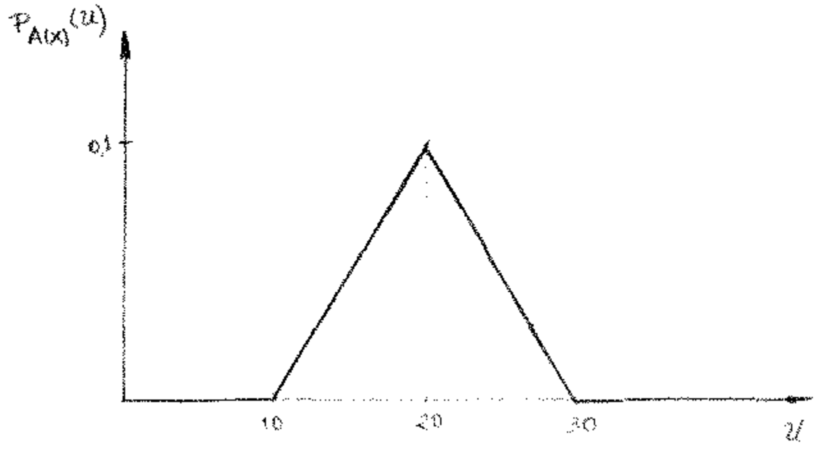
$$\pi_{A(X)}(u) = \mu_{\mathbb{F}}(u) = \mu_{Jovem}(u) = 1 - S(u;10,20,30)$$

Vamos analisar, agora, do ponto de vista probabilístico, associando uma função densidade de probabilidade a $A(X)$, digamos $P_{A(X)}(u)$, interpretando como sendo a probabilidade de que João tenha u anos.

Neste caso, tomaremos o sinal negativo da derivada de $\mu_{\mathbb{F}}$ com respeito a u e obtemos uma função densidade de probabilidade $P_{A(X)}$. Assim,

$$P_{A(X)}(u) = -\frac{d\mu_{\mathbb{F}}}{du} = \begin{cases} 0 & \text{se } u \leq 10 \\ \dfrac{u-10}{100} & \text{se } 10 \leq u \leq 20 \\ -\dfrac{u-30}{100} & \text{se } 20 \leq u \leq 30 \\ 0 & \text{se } u \geq 30 \end{cases}$$

Graficamente, teríamos a seguinte situação :



Note que $P_{A(X)}(20) = 0,1$. Coloquemos alguns valores discretos numa tabela e comparemos as função-distribuição de possibilidade e a função densidade de probabilidade associada com A(X):

u (anos)	0-10	11	12.	.18	19	20	21	22.	.28	29..	30 100
π (u)	1	0,99	0,98	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,02	0,005	0
$P_{A(X)}(u)$	0	0,01	0,02	0,08	0,09	0,1	0,09	0,08	0,02	0,01	0

Através da tabela vemos, por exemplo, que a possibilidade de João ter 10 anos ou menos é 1 enquanto que sua probabilidade é 0.

Observação:

Notemos, através dos exemplos 5 e 6, que um alto grau de possibilidade não implica num alto grau de probabilidade e nem uma baixo grau de probabilidade implica num baixo grau de possibilidade. Entretanto, *se um evento é impossível, entao ele é improvavel.*

Embora, em princípio, não exista uma conexão entre probabilidade e possibilidade, na prática o conhecimento de possibilidade transmite alguma informação sobre probabilidade, mas não vice-versa. Esta relação bastante fraca entre os dois pode ser estabelecida mais precisamente através de um princípio denominado *princípio de consistência possibilidade/probabilidade*, dado a seguir:

Se o atributo A(X) de uma variável X toma valores u_1, u_2, ..., u_n com respectivas possibilidades $\Pi_{A(X)} = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ e probabilidades $P_{A(X)} = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$, então o *grau de consistência* da distribuição de possibilidade $\Pi_{A(X)}$ é expressa pela soma aritmética

$$\pi_1 . P_1 + \pi_2 . P_2 + \ldots + \pi_n . P_n$$

Este princípio -- usado em situações nas quais o que se conhece sobre o atributo A(X) é sua possibilidade -- não é uma lei precisa, nem tampouco uma relação que é intrínseca aos conceitos de possibilidade e probabilidade, mas somente uma formalização aproximada de observações *heurísticas*, no sentido de que uma diminuição da possibilidade de um evento tende a diminuir a probabilidade desse evento, mas não vice-versa.

3. A MEDIDA DE POSSIBILIDADE

Uma outra diferença entre possibilidade e probabilidade pode ser examinada através do conceito de medida de possibilidade.

DEFINIÇÃO 3 - Sejam $\mathbb{B}$ um subconjunto clássico de um conjunto universo $\mathbb{U}$ e $\Pi_{A(X)}$ a distribuição de possibilidade associada com o atributo A(X) de uma variável X pertencente a um determinado conjunto (não necessariamente $\mathbb{U}$) tal que A(X) toma valores em $\mathbb{U}$. Então a *medida de possibilidade*, $\pi(\mathbb{B})$, de $\mathbb{B}$ é definida como um número em [0,1] dado por:

$\pi(\mathbb{B}) = \sup \pi_{A(X)}(u)$, onde o sup é tomado sobre todos os valores $u \in \mathbb{B}$ e $\pi_{A(X)}$ é a função-distribuição de possibilidade de $\Pi_{A(X)}$.

Este número pode ser interpretado como a *possibilidade* de que $A(X)$ pertença a $\mathbb{B}$, isto é,

$$\mathrm{Poss}\langle A(X) \in \mathbb{B}\rangle = \pi(\mathbb{B}) = \sup_{u \in \mathbb{B}} \pi_{A(X)}(u)$$

Observação:

Se considerarmos uma σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{U}$ e fizermos $\pi(\phi) = 0$, teremos a medida de possibilidade definida no parágrafo 3.7 do capítulo 2.

EXEMPLO 7 - Seja $\mathbb{F}$ o subconjunto fuzzy dos "números naturais pequenos" do conjunto universo $\mathbb{U} = \mathbb{N}$ (Ver exemplo 1), definido por

$$\mathbb{F} = 1/1 + 1/2 + 0,9/3 + 0,8/4 + 0,6/5 + 0,4/6 + 0,2/7 + 0,1/8$$

Deste conjunto fuzzy, a proposição "X é um número natural pequeno" associa com a variável X a distribuição de possibilidade $\Pi_X = \mathbb{F}$. Se tomarmos $\mathbb{B} = \{ 6,7,8,9\}$, como a função-distribuição de possibilidade é dada por $\pi_X(u) = \mu_{\mathbb{F}}(u)$ temos $\pi(\mathbb{B}) = \sup(0,4;\ 0,2;\ 0,\ 0) = 0,4$.

O número 0,4 pode ser interpretado da seguinte forma: Dado que X é um número pequeno a possibilidade que X tem de pertencer a $\mathbb{B}$ é 0,4.

A definição acima pode ser dada mais geralmente para subconjuntos fuzzy de $\mathbb{U}$.

DEFINIÇÃO 4 - Seja $\mathbb{G}$ um subconjunto fuzzy de $\mathbb{U}$, cuja função-pertinência é dada por $\mu_{\mathbb{G}}$, e $\Pi_{A(X)}$ a distribuição de possibilidade associada com o atributo A(X) da variável X que toma valores em $\mathbb{U}$. A *medida de possibilidade*, $\pi(\mathbb{G})$, de $\mathbb{G}$ é definida por

$$\pi(\mathbb{G}) = \sup_{u \in \mathbb{U}} \{\mu_{\mathbb{G}}(u) \wedge \pi_{A(X)}(u)\}$$

EXEMPLO 8 - Consideremos a distribuição de possibilidade dada no exemplo 7:

$$\Pi_X = 1/1 + 1/2 + 0{,}9/3 + 0{,}8/4 + 0{,}6/5 + 0{,}4/6 + 0{,}2/7\ 0{,}1/8$$

e $\mathbb{G}$ o subconjunto fuzzy dos "números naturais que não são pequenos" dado por

$$\mathbb{G} = 0{,}1/4 + 0{,}3/5 + 0{,}4/6 + 0{,}5/7 + 0{,}8/8 + 1/9 + 1/10 + \ldots$$

Deste modo, temos

$$\pi(\mathbb{G}) = \sup \{0;\ 0;\ 0;\ 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0;\ 0;\ \ldots\} =$$
$$= 0{,}4$$

O número 0,4 pode ser interpretado da seguinte forma: Dada a afirmação de que X é um número pequeno a possibilidade que X tem de não ser um número pequeno é 0,4.

Observação:

Com a noção de medida de possibilidade podemos notar uma diferença básica com a medida de probabilidade:

Sabemos que, se $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ são dois eventos disjuntos, então $P(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = P(\mathbb{A}) + P(\mathbb{B})$ onde P é uma medida de possibilidade. Esta igualdade não ocorre com a medida de possibilidade. De fato,

$$\pi(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = \pi(\mathbb{A}) \vee \pi(\mathbb{B}) \leq \pi(\mathbb{A}) + \pi(\mathbb{B})$$

Notamos apenas uma analogia entre as medidas obtida através dos sinais + e $\vee$. O mesmo ocorre considerando a intersecção dos eventos $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, onde temos

$\pi(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) \leq \pi(\mathbb{A}) \wedge \pi(\mathbb{B})$ e $P(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) \leq P(\mathbb{A}) + P(\mathbb{B})$.

4. A DISTRIBUIÇÃO DE POSSIBILIDADE n-DIMENSIONAL

Vimos anteriormente que uma proposição da forma "X é $\mathbb{F}$", onde X é uma variável com atributo A(X) e $\mathbb{F}$ é um conceito fuzzy, pode ser traduzida através da equação de relação de valores restritos

$$\Pi_{A(X)} = RE[A(X)] = \mathbb{F}$$

Porém, existem casos em que o atributo A(X) da variável não é um atributo simples, ou seja, não envolve apenas uma característica da variável X. Vejamos, por exemplo, uma proposição da forma " O terreno é grande", podemos ter dois atributos para expressar o conceito fuzzy "grande": comprimento e largura. Neste caso, como poderemos associar uma distribuição de possibilidade aos atributos da variável X?

Eliminaremos este problema dando uma generalização natural para o conceito definido no parágrafo 2, no sentido de que, a proposição contenha n atributos implícitos da variável X, digamos $A_1(X)$, ..., $A_n(X)$ com $A_i(X)$ tomando valores em certos conjuntos universos $\mathbb{U}_i$; i = 1, 2, ..., n. Denotaremos tais atributos pela n-upla $A(X) = [A_1(X), \ldots A_n(X)]$ e o chamaremos de n-atributo.

DEFINIÇÃO 5 - Seja R uma relação fuzzy de $\mathbb{U} = \mathbb{U}_1 \times \ldots \times \mathbb{U}_n$ caracterizada por uma função-pertinência μ_R. Seja A(X) o n-atributo da variável X que indica os n atributos implícitos que tomam valores em $\mathbb{U}$, isto é, o atributo simples $A_i(X)$ toma valores em $\mathbb{U}_i$, para i = 1,2,...,n.

Suponhamos que R atua como uma restrição fuzzy RE[A(X)] associada com o n-atributo A(X) da variável X. Diremos que *a* *proposição* "X é R" - traduzida pela equação de valores restritos RE[A(X)] = R - *associa uma n-distribuição de possibilidade conjunta com A(X)*, denotada por $\Pi_{A(X)}$, e *postulamos ser igual a* RE[A(X)], ou seja,

$$\Pi_{A(X)} = RE[A(X)] = R$$

Observação:

O n-atributo A(X) da variável X está associado com uma n-distribuição $\Pi_{A(X)}$ da mesma forma que uma variável aleatória n-dimensional está associada com uma distribuição de probabilidade conjunta n-dimensional (ver [13]).

DEFINIÇÃO 6 - Seja R uma relação fuzzy de $\mathbb{U} = \mathbb{U}_1 \times \ldots \times \mathbb{U}_n$ caracterizada pela função-pertinência μ_R. Seja A(X) o n-atributo da variável X que toma valores em $\mathbb{U}$. A proposição "X é R" associa com o n-atributo A(X) da variável X a distribuição de possibilidade conjunta $\Pi_{A(X)}$. Definiremos a *n-função-distribuição de possibilidade de* $\Pi_{A(X)}$, digamos $\pi_{A(X)}$, como sendo igual a μ_R.

Em particular, se tivermos o conceito fuzzy R definido como o produto cartesiano de n conceitos fuzzy $\mathbb{F}_i$, i = 1,..., n então a equação de relação de valores restritos se decompõe num sistema de n equações de valores restritos:

$$RE[A_1(X)] = \mathbb{F}_1$$

$$\vdots$$

$$RE[A_n(X)] = \mathbb{F}_n$$

Teremos assim,

$$\Pi_{A(X)} = \Pi_{A_1(X)} \times \ldots \times \Pi_{A_n(X)}$$

e

$$\pi_{A(X)}(u_1, \ldots, u_n) = \pi_{A_1(X)}(u_1) \wedge \ldots \wedge \pi_{A_n(X)}(u_n)$$

onde:

$\pi_{A_i(X)}(u_i) = \mu_{\mathbb{F}_i}(u_i), \; u_i \in \mathbb{U}_i \; , \; i = 1, \ldots, n$

$\wedge$ denota o mínimo

$\times$ denota o produto cartesiano

EXEMPLO 8 - Seja proposição "O terreno é grande", em que X é a variável terreno e, grande é o subconjunto fuzzy $\mathbb{F}$ de $\mathbb{U} = [0, 100] \times [0, 100]$ em metros, cuja função-pertinência $\mu_{\mathbb{F}}$ está dada no quadro abaixo:

LARGURA	COMPRIMENTO	$\mu_{\mathbb{F}} = \mu_{Grande}$
40	25	0,3
65	30	0,4
80	40	0,5
85	60	0,6
90	60	0,7
90	90	0,7
100	95	0,9

A proposição "O terreno é grande" pode ser traduzida através da equação de relação de valores restritos em:

$$\Pi_{[A_1(X),\; A_2(X)]} = \mathbb{F}$$

que denota

$$\Pi_{[\text{Largura(Terreno)},\; \text{Comprimento(Terreno)}]} = \text{Grande}$$

Interpretação:

Se tivermos, por exemplo, o comprimento 90 m e a largura 60 m e a afirmação "O terreno é grande", então a possibilidade que este terreno tem de possuir 90m de comprimento e 60m de largura é 0,7.

Agora, se definirmos grande como largo x comprido , onde largo e comprido são dois subconjuntos fuzzy $\mathbb{F}_1$ e $\mathbb{F}_2$ de $\mathbb{U}_1 = \mathbb{U}_2 = [0, 100]$ a equação de relacão de valores restritos acima se decompõe num sistema de duas equações de relação de valores restritos 1-dimensional:

$$\Pi_{A_1(X)} = \mathbb{F}_1 \quad \text{que expressa } \Pi_{\text{Largura(terreno)}} = \text{Largo}$$

$$\Pi_{A_2(X)} = \mathbb{F}_2 \quad \text{que expressa } \Pi_{\text{Comprimento(Terreno)}} = \text{Comprido}$$

onde as funções-pertinência $\mu_{\mathbb{F}_1}$ e $\mu_{\mathbb{F}_2}$ são dadas pelo quadro abaixo:

LARGURA	$\mu_{\mathbb{F}_1}$	COMPRIMENTO	$\mu_{\mathbb{F}_2}$
40	0,4	25	0,2
65	0,5	30	0,4
80	0,6	40	0,5
85	0,6	60	0,8
90	0,7	60	0,8
90	0,7	90	0,9
100	0,9	95	1

Notemos que a distribuição de possibilidade conjunta de $A(X) = [A_1(X), A_2(X)]$ pode ser escrita como:

$$\Pi_{A(X)} = \Pi_{(A_1(X),\, A_2(X))} = \Pi_{A_1(X)} \times \Pi_{A_2(X)} = \mathbb{F},$$

ou seja,

$$\Pi_{(Largura(Terreno),\ Comprimento(Terreno))} =$$

$$= \Pi_{Largura(Terreno)} \times \Pi_{Comprimento(Terreno)} = \text{Grande}$$

E, portanto, a função-distribuição de possibilidade conjunta associada com o 2-atributo $[A_1(X),\ A_2(X)]$ é dada por:

$$\pi_{[A_1(X),\ A_2(X)]}(u_1,\ u_2) = \pi_{A_1(X)}(u_1) \wedge \pi_{A_2(X)}(u_2)$$

5. DISTRIBUIÇAO DE POSSIBILIDADE CONDICIONAL

Em analogia ao conceito de distribuição de probabilidade condicional daremos o conceito de distribuição de possibilidade condicional.

DEFINIÇAO 7 - Seja $A(X) = [\ A_1(X),\ \ldots,\ A_2(X)]$ o n-atributo de uma variável X que toma valores em $\mathbb{U} = \mathbb{U}_1 \times \ldots \times \mathbb{U}_n$, com n-distribuição de possibilidade conjunta $\Pi_{A(X)}$, caracterizada pela função-distribuição de possibilidade $\pi_{A(X)}$ que associa a cada u $= (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{U} = \mathbb{U}_1 \times \ldots \times \mathbb{U}_n$ a sua possibilidade $\pi_{A(X)}(u_1, \ldots, u_n)$.

Sejam $q = (i_1, \ldots, i_k)$ e $q' = (j_1, \ldots, j_m)$ subsequências de uma sequência de índices $(1, \ldots,\ n)$, onde q' é o complementar de q e $(a_{j_1}, \ldots, a_{j_m})$ uma n-upla de valores que podem ser atribuídos a $A_{(q')}(X) = [A_{j_1}(X), \ldots,\ A_{j_m}(X)]$. Por definição, a *distribuiçao de possibilidade condicional* de $A_{(q)}(X) = [A_{i_1}(X), \ldots, A_{i_k}(X)]$ dados os valores $A_{(q')}(X) = [a_{j_1},\dots,a_{j_m}]$ é uma distribuição de possibilidade expressa por:

$$\Pi_{A(X)}[A_j(X) = a_j \ ;\dots;\ A_j(X) = a_j]$$

e sua função-distribuição de possibilidade é dada por

$$\pi_{A_{(q)}(X)}[u_{i_1},\dots, u_{i_k} | A_{j_1}(X) = a_{j_1},\dots, A_{j_m}(X) = a_{j_m}] =$$

$$= \pi_{A(X)}(u_1,\dots,u_n)\Big|_{u_{j_1}=a_{j_1},\dots,\ u_{j_m}=a_{j_m}}$$

EXEMPLO 9 - Suponhamos $A(X) = [A_1(X),\ A_2(X),\ A_3(X)]$ tomando valores no conjunto universo $\mathbb{U} = \mathbb{U}_1 \times \mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_3 = \{a,b\}\times\{a,b\}\times\{a,b\}$ e cuja 3-distribuição é dada pelo quadro:

$A_1(X)$	$A_2(X)$	$A_3(X)$	$\pi_{A(X)}$
a	a	a	0,9
a	a	b	1
a	b	a	0,9
b	a	a	0,2
b	a	b	0
b	b	a	1
b	b	b	0,2
a	b	b	0,9

Por exemplo, se q = (1) e q' = (2,3) temos,

$\Pi_{[A_1(X)]}[A_2(X) = a,\ A_3(X) = b] = 1.a + 0.b$

Da mesma forma, se tivermos q = (1,3) e q'= (2) temos,

$\Pi_{[A_1(X),A_2(X)]}[A_2(X) = a] = 0,9.aa + 1.ab + 0,9.ba + 0,9.bb$

BIBLIOGRAFIA

[1] Aaboe, Asger - "Episódios da História Antiga da Matemática", Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, SBM.

[2] Bartle, Robert G. - "The Elements of Integration", John Wiley e Sons, Inc., New York.

[3] Bassanezi, Rodney C. - "Medidas e Integrais Fuzzy", Relatório Técnico n$\underline{o}$ 06/87, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil.

[4] Bassanezi, Rodney C. - "Teoria Geral de Medidas - Aplicações", Relatório Técnico n$\underline{o}$ 07/87, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil.

[5] Banon, G. - "Distinction between several subsets of fuzzy measures", Fuzzy Sets and Sistems 5 (1981) 291-306, North-Holland Publishing Company.

[6] Choquet, G. - "Theory of Capacities", Ann. Inst. Fourier 5 (1953), 131-295.

[7] Costa, M. A. - "As Idéias Fundamentais da Matemática e outros Ensaios", Biblioteca do Pensamento Brasileiro, Editora Convívio.

[8] De Luca, A, and Termini - "A definition of a non-probabilistic entropy in the setting of fuzzysets theory", Inf. Control 20, 301-312 (1972).

[9] Dempster, A.P. - "Upper and Lower probabilities induced by multi-valued mapping",Ann.Math.Statist. 38 (1967), 325-339.

[10] Dubois, D. and Prade - "Fuzzy sets: Theory and Applications", Mathematics en Science and Engineering, vol.144.

[11] Ebanks, Bruce R. - "On Measures of Fuzziness and Their Representations",Journal of Mathematical Analysis and Applications 94, 24-37, 1983.

[12] Hohle, Ulrich - "A General Theory of Fuzzy Plausibility Measures",Journal of Mathematical Analysis and Applications 127, 346-364 (1987).

[13] James, Barry J. - " Probabilidade: um curso em nivel intermediário", Projeto Euclides, IMPA.

[14] Kandel, A. - "Fuzzy Mathematical Techniques with Applications", Addison-Wesley Publishing Company.

[15] Klir, George J. - " Where do we stand on measures of uncertainty, ambiguity, fuzziness, and the like?", Fuzzy Sets and Systems 24 (1987)

141-160, North-Holland.

[16] Kupka, Joseph - " Measure Theory: The Heart of the Matter", The Mathematical Inteligencer, Vol. 8, nº 4, 47-56.

[17] Lebesgue, Henri - "Leçons sur L'intégration et la Recherche des Fonctions Primitives", Chelsea Publishing Company, Bronx, New York.

[18] Puri, Madan L. and Ralescu - "A short communication: A possibility measure is not a fuzzy measure", Fuzzy Sets and Sistems 7 (1982), 311-313, North-Publishing Company.

[19] Rudin, W - "Principles of Mathematical Analysis", International Student Edition.

[20] Schwartz, L. - "Radon Measures", Tata Institute of Fundamental Research, Oxford University Press, 1973.

[21] Shafer, G. - "A mathematical theory of evidence", Princeton University Press, Princeton, N.J., 1976.

[22] Smets, Philipp - "Medical Diagnosis: Fuzzy sets and Degrees of belief", Fuzzy Sets and Sistems,(1981), 259-266, North-Holland Publishing Company.

[23] Vulikh, B.Z. - "A Brief course in the theory of functions of a Real Variable", Mir Publishers Moscow.

[24] Wheeden, Richard L. and Zygmund - "Measure and Integral, an introduction to Real Analysis".

[25] Wierzchón, S.T. - " An algorithm for identification of fuzzy measure", Fuzzy Sets and Sistems,(1983), 69-78, North-Holland Publishing Company.

[26] Wierzchón, S.T. - "On fuzzy measure and fuzzy integral", Fuzzy Information and Decision Processes, North-Holland Publishing Company, 1982.

[27] Zadeh, L.A. - "Calculus of fuzzy restrictions", Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes, Academic Press, New York, 1975, 1-39.

[28] Zadeh, L.A. - "Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility", Fuzzy Sets and Sistems, 1, (1978), 3-28, North-Holland Publishing Company.

[29] Zadeh, L.A. - "Fuzzy Sets, Inform and Control 8, 1965,338-353.

[30] Zadeh, L.A. - "Linguistic characterization of preference relations as a basis for choice in social sistems, Erkenntnis, 1977, vol.11, 383-410.