

Este exemplar corresponde à redação final da
Tese defendida pela aluna Teresinha J. Stuchi Bezerra
Coutinho e aprovada pela Comissão Julgadora

5 de outubro, 1984

Alfredo M. Ozório de Almeida

"MOVIMENTO REGULAR E CAÓTICO
EM APLICAÇÕES QUADRÁTICAS"

Teresinha J. Stuchi Bezerra Coutinho

Orientador: Prof. Dr. Alfredo M. Ozório de Almeida

Tese apresentada no Instituto de Física
"Gleb Wataghin" da Universidade
Estadual de Campinas, para a obtenção
do título de Mestre em Ciências.

maio/1984

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO I - SISTEMAS HAMILTONIANOS	5
1.1 - Sistemas Hamiltonianos Integráveis	5
1.2 - Sistemas Hamiltonianos Quase-Integráveis e Ergódicos	12
CAPÍTULO II - SEÇÃO DE POINCARÉ - APLICAÇÕES QUE PRESERVAM A ÁREA	16
2.1 - Seção de Poincaré	16
2.2 - Classificação das Aplicações da Superfície Sobre si Mesma	23
CAPÍTULO III - APLICAÇÃO DE HENON MODIFICADA	29
3.1 - Propriedades Gerais	29
3.2 - Resultados Numéricos	46
CAPÍTULO IV - SEPARATRIZES - FORMA NORMAL DE BIRKHOFF	54
4.1 - Separatrizes e Regiões Caóticas	54
4.2 - Forma Normal de Birkhoff	65
REFERÊNCIAS	77

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Alfredo M. Ozório de Almeida pela sua orientação e amizade.

A FAPESP e CNPq pelo apoio financeiro.

Aos Profs. Edison Zacarias e Carlos Lenz e também a Elizabeth Gonçalves sempre dispostos a transmitirem sua experiência em computação.

Aos Profs. Armando Moreira, J. Bellandi Filho e Amir Caldeira pelas conversas, estímulo e amizade.

Aos colegas e amigos Maurício, Absair, Mahon, Carlson, Lucila e Luiz pelas nossas discussões sobre Pós, Física e tudo mais.

Aos amigos Laura, Zélia, Chaw, A. Carlos, Beti, Lea, Guacira, Maria Elisa, Eduardo S. e Eduardo L. pelo inestimável apoio e pelo afeto que lhes dedico.

Aos amigos e companheiros de Ronda pelas boas horas perdidas sem as quais nenhum trabalho é possível.

A Lori, Ana e Vasco pela arte final e sobretudo pela amizade.

A todos os funcionários do IFGW que de uma forma ou outra tiveram envolvimento com este trabalho, tornando o cotidiano mais agradável (apesar dos salários).

INTRODUÇÃO

A compreensão dos sistemas Hamiltonianos tem sido fruto de extensas pesquisas que remontam há mais de um século. Poincaré foi um dos pioneiros em propor a busca de informação sobre estes sistemas via outros métodos que não a infrutífera busca de soluções explícitas. Nasceu com Poincaré a idéia de se tratar o espaço de fases dos sistemas Hamiltonianos como um ente geométrico e através deste conceito se tentar obter linhas gerais sobre o que acontece ao sistema dadas diferentes condições iniciais, sob perturbações, com a variação da "grandeza" da perturbação, etc.

Dentro desta linha de pensamento é que se situa este trabalho. No capítulo I é feita uma rápida revisão dos sistemas Hamiltonianos, conceito de integrabilidade, existência de soluções explícitas, do conceito oposto, ou seja, a ergodicidade e do conceito mais atual de sistemas quase-integráveis, onde coexistem regiões estáveis e regiões "caóticas" no espaço de fases de um mesmo sistema. Este último conceito tem origem no teorema de Kolmogorov, Arnold e Moser, conhecido como teorema K. A. M.. Conforme será discutido no capítulo sobre sistemas Hamiltonianos, tal teorema não é suficiente para uma descrição, mesmo qualitativa, satisfatória. Fez-se então necessário juntar o método de superfície de secção, também chamada de Poincaré, método este melhor apropriado para o estudo de sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade.

A redução do problema do cálculo de aplicações, de

finidas pela aplicação de Poincaré na superfície de secção, oferece um método muito menos envolvido, tanto do ponto de vista computacional como analítico. Embora tal método tenha sido proposto por Poincaré no fim do século passado e continuado por Birkhoff em vários trabalhos subsequentes, só foi efetivamente usado pela primeira vez por Hénon⁽¹⁾ em 1963, no que poderíamos considerar um trabalho pioneiro neste sentido. É curioso notar que o teorema K. A. M. foi definitivamente provado neste mesmo ano, apesar de sua idéia inicial ter sido proposta por Kolmogorov em 1954. O método de secção de Poincaré e os conceitos sobre as aplicações de mesmo nome serão tratados no capítulo II.. Em particular serão examinados os conceitos de ponto fixo estável ou instável, correspondentes ao de órbita, periódica estável ou instável de um sistema Hamiltoniano.

Nas duas últimas décadas surgiram vários trabalhos de pesquisa sobre diferentes aplicações. A aplicação aqui tratada é uma variação da aplicação quadrática proposta por Hénon⁽²⁾, a saber:

$$\begin{aligned}x_1 &= x \cos \alpha - (y - x^2) \operatorname{sen} \alpha \\y_1 &= x \operatorname{sen} \alpha + (y - x^2) \cos \alpha\end{aligned}\tag{I.1}$$

à qual, como veremos no capítulo III, podem ser reduzidas todas as aplicações polinomiais quadráticas. A aplicação (I.1) oferece um complemento satisfatório ao teorema K. A. M. na análise do comportamento dos sistemas Hamiltonianos. Faz-se necessário salientar que este tipo de estudo não visa o tratamento de um sistema Hamiltoniano específico, mas sim de uma classe de

sistemas Hamiltonianos passíveis de serem satisfatoriamente descritos, do ponto de vista qualitativo, por aplicações de Poincaré, que no nosso caso em particular é uma aplicação polinomial quadrática e que portanto aproxima aplicações mais gerais na vizinhança da origem (ponto fixo estável). A aplicação aqui tratada é:

$$\begin{aligned}x_1 &= x \cosh \alpha + (y - x^2) \sinh \alpha \\y_1 &= x \sinh \alpha + (y - x^2) \cosh \alpha\end{aligned}\tag{I.2}$$

Esta aplicação, como será visto em detalhe no capítulo III, é complementar à I.1 no sentido de que se presta ao estudo da ocorrência de caos (ou instabilidade) nos sistemas Hamiltonianos. A aplicação I.1 descreve satisfatoriamente regiões caóticas, circunscritas por órbitas estáveis na vizinhança de origem, em sua coexistência com "ilhas" de estabilidade. Já no caso da aplicação I.2 obtemos sempre regiões caóticas abertas, perto da origem, "provocadas" pela presença do ponto fixo instável na origem, que age como uma espécie de destabilizador do sistema com uma transição do quase-integrável à total ergodicidade, conforme se aumenta o parâmetro α da perturbação quadrática.

Devido a estas características que notamos na aplicação de Hénon modificada, concentramos a maior parte do trabalho no estudo das separatrizes que surgem do ponto fixo instável e, conforme poderá ser visto no capítulo IV, vão gradualmente trazendo maior "caoticidade" ao sistema, até que para um dado valor de α o ponto estável associado se torna instável, dando origem a uma bifurcação, i. é, o aparecimento de dois

pontos estáveis associados ao novo instável.

A ligação entre as assintotas e o caos das órbitas vizinhas aparece quando aquelas se cruzam em pontos homoclínicos, i. é, pontos não fixos. No capítulo IV calcularemos a forma normal de Birkhoff⁽³⁾ para a aplicação na vizinhança do ponto instável até 3a. ordem, e obtemos razoável concordância para a posição do primeiro ponto homoclínico. É interessante notar que até agora o emprego de formas normais tem se dado sempre nas vizinhanças de pontos fixos estáveis, obtendo-se assim aproximações integráveis. O seu uso sistemático para o estudo de regiões caóticas parece promissor.

CAPÍTULO I

SISTEMAS HAMILTONIANOS

1.1 - Sistemas Hamiltonianos Integráveis

Um sistema Hamiltoniano é caracterizado por um espaço de fases de dimensão:

$$N = 2n \quad (1.1)$$

onde n é o número de graus de liberdade do sistema. Neste espaço de fases podem ser definidos dois sistemas de coordenadas conjugadas $(\underline{q}, \underline{p})$ e uma função H destas coordenadas (exclui-se aqui a dependência temporal explícita), chamada função Hamiltoniana do sistema $H(\underline{q}, \underline{p})$ que juntamente com o sistema de $2n$ equações:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{q}} &= \nabla_{\underline{p}} H \\ \dot{\underline{p}} &= -\nabla_{\underline{q}} H \end{aligned} \quad (1.2)$$

definem inteiramente o sistema. O campo vetorial formado pelo conjunto de vetores $(\dot{\underline{q}}, \dot{\underline{p}})$, chamado campo vetorial Hamiltoniano, determinam o fluxo de fase. Diz-se que um sistema Hamiltoniano é completamente integrável quando existem n primeiras integrais analíticas e unívocas, i. é, n funções $F_i(\underline{q}, \underline{p})$ que são constantes ao longo da trajetória do sistema no espaço de fases, também chamadas constantes de integração, i. é:

$$F_i(\underline{q}, \underline{p}) = f_i \quad (1.3)$$

Além disso, estas n funções devem ser independentes

entre si e satisfazer a condição

$$\begin{aligned} \{ F_i, F_j \} &= 0 \\ i, j &= 1, 2 \dots n \end{aligned} \tag{1.4}$$

onde $\{ \}$ é o colchete de Poisson. Neste caso as n F_i 's são ditas "em involução".

Como o sistema Hamiltoniano é conservativo, a energia total do sistema pode ser tomada como uma destas constantes, ou seja,

$$F_1(\underline{q}, \underline{p}) = H(\underline{q}, \underline{p}) \tag{1.5}$$

A existência destas n funções, constantes ao longo da trajetória do sistema no espaço de fases, implica que a trajetória do sistema se limita a um sub-espaço de n dimensões imerso no espaço de fases R^{2n} . Prova-se por argumentos de topologia que este sub-espaço é um toro de n dimensões ao qual o fluxo Hamiltoniano

$$\underline{v}_j = (\underline{\nabla}_{\underline{p}} F_j, -\underline{\nabla}_{\underline{q}} F_j), \quad j = 1, 2 \dots n \tag{1.6}$$

constituído de $2n$ componentes é sempre tangente.

No caso de sistemas com apenas um grau de liberdade a constante de integração, devido à relação (1.5), é a própria energia total do sistema, em outras palavras, todo sistema unidimensional é obviamente integrável, assim como qualquer sistema de n dimensões que seja separável, visto que sempre podemos desacoplá-lo em n sistemas unidimensionais.

Nos sistemas com um grau de liberdade o espaço de

fases é bidimensional e os toros de uma dimensão são simplesmente as curvas de nível de $H(p, q)$. Tomemos como exemplo um pêndulo simples, cujo espaço de fases é bastante familiar (Fig.1.1)

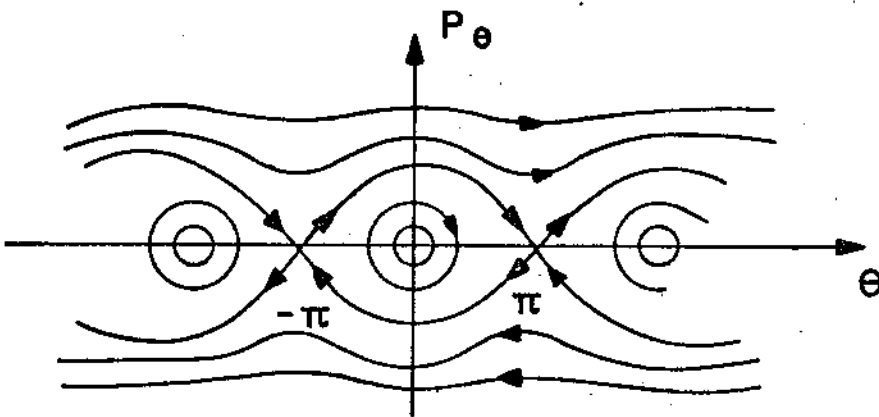


Fig. 1.1

Como a Hamiltoniana pode ser dada por

$$H(\theta, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{2m_1 l^2} - mgl \cos \theta = E_i \quad (1.7)$$

a equação

$$p_\theta(\theta, E) = \left(2 m_1 l^2 (E + mgl \cos \theta) \right)^{1/2} \quad (1.8)$$

define as curvas da Fig. 1.1 - a família de curvas unidimensionais definida pela eq. (1.8) são os toros que neste caso coincidem com a própria trajetória do sistema.

Podemos tomar outros potenciais unidimensionais para ilustrar trajetórias do sistema no espaço de fase. Tomemos por exemplo as Hamiltonianas.

$$H(x, p_x) = \frac{\pm x^2 + p_x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad (1.9)$$

Se levarmos em conta o termo cúbico temos a equação da 1ª. aproximação de um oscilador não-harmônico. A forma dos potenciais incluindo-se o termo cúbico e as respectivas curvas de fase é ilustrada nas figuras 1.2a e 1.2b, respectivamente para cada conjunto de sinais da equação (1.9).

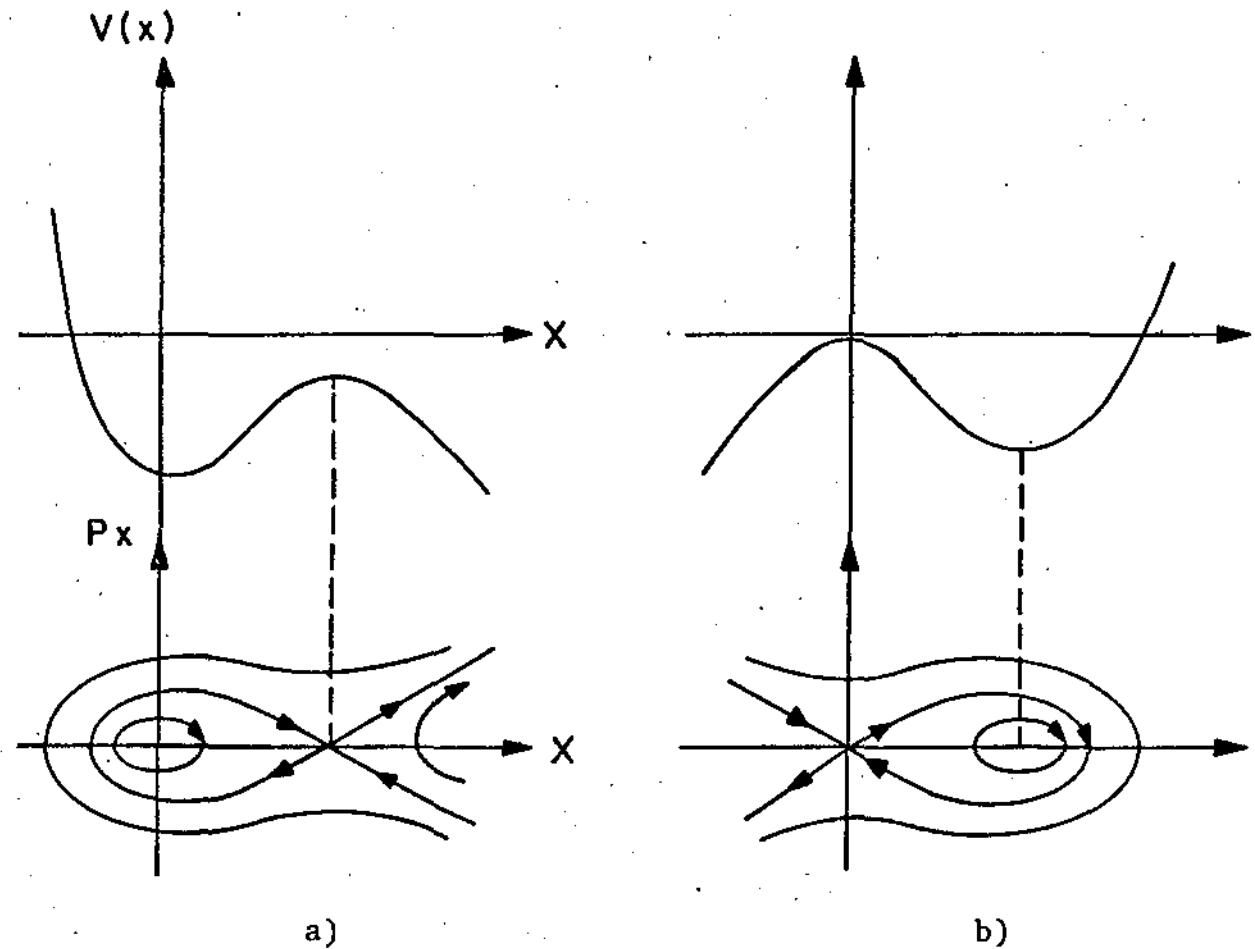


Fig. 1.2

Estes potenciais correspondem a osciladores perturbados por um termo cúbico. As curvas unidimensionais correspondentes a $E = \text{cte}$ são o sub-espaco definido por esta primeira integral, ou seja, os toros unidimensionais. A visualização pa

ra sistemas com mais de um grau de liberdade, cujos espaços de fases têm dimensão $2n$, já não é tão simples e temos que recorrer à intuição. Para isto faz-se necessário colocarmos o problema em termos de coordenadas conjugadas mais apropriadas.

A existência de toros folhendo o espaço de fases de uma forma densa, torna razoável a escolha de coordenadas conjugadas topologicamente mais naturais, que podem ser obtidas mediante uma transformação canônica. Estas variáveis são ditas normais e são mais conhecidas como variáveis de ângulo-ação. $(\underline{I}, \underline{\theta})$. Nestas variáveis a função Hamiltoniana é cíclica nos ângulos e portanto H depende apenas das ações. Temos então:

$$I_j(t) = \text{cte} = C_j \quad j = 1, 2 \dots n \quad (1.10)$$

e:

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial I_j} = \omega_i(C_1 \dots C_n) \quad (1.11)$$

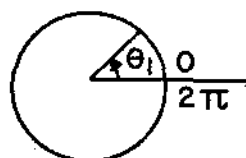
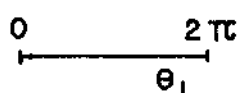
As funções ω_i são chamadas frequências normais do sistema e facilmente podemos integrar (1.11) como:

$$\theta_i(t) = \omega_i t + \alpha_i \quad (1.12)$$

onde os α_i s são determinadas pelas condições iniciais.

Em uma dimensão representamos o toro, inicialmente, como um segmento de reta de comprimento 2π . O ponto correspondente à evolução temporal do sistema se move ao longo deste segmento de 0 a 2π com a velocidade ω dada pela eq.(1.12). Como o movimento é periódico, pois θ é um ângulo, ao atingir 2π

o ponto passa subitamente de 2π de volta a $\theta = 0$. Para evitar esta descontinuidade podemos juntar as duas pontas do segmento obtendo assim um círculo (Fig. 1.3).



a) $\theta(t) = \omega t + \alpha$

b) Trajetória representada como um círculo onde θ é coordenada angular e $E = I$, a ação.

Fig. 1.3

No caso de dois graus de liberdade que pode-se fazer uma construção semelhante. No plano (θ_1, θ_2) o movimento se dá num quadrado de lado 2π , uma óbvia extensão do caso $n = 1$. O ponto da trajetória se move com velocidade ω_1 e ω_2 respectivamente; quando um lado do quadrado é atingido ele reaparece no lado oposto e paralelo a si mesmo (Fig. 1.4). Desta forma vemos que a superfície é de fato um toro de duas dimensões que nos é familiar também no espaço Euclidiano.

Como será então a forma da trajetória num toro genérico de n dimensões? No caso $n = 1$ a trajetória é, como já vimos, o próprio toro, ou seja, o círculo $H = \text{cte}$. No caso de dois graus de liberdade a trajetória pode ou não cobrir densamente o toro bidimensional; isto depende de como as duas frequências distintas ω_1 e ω_2 se relacionam entre

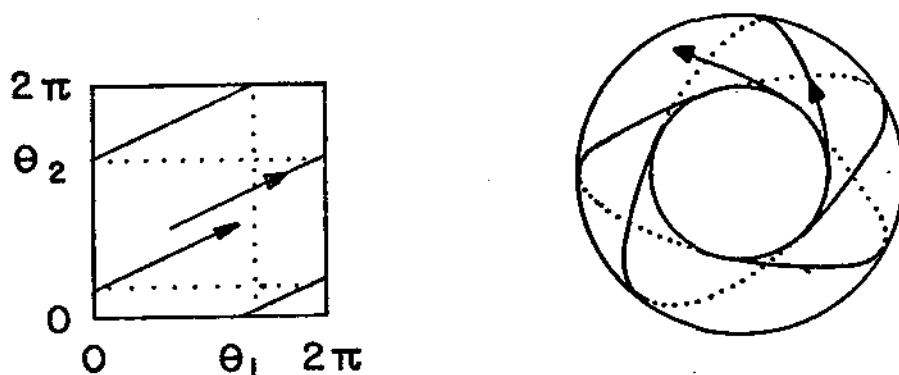


Fig. 1.4

si. Se a razão $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ é racional temos uma trajetória fechada na superfície do toro. Quando as frequências não são ressonantes, ou seja não existe uma relação do tipo

$$m_1 \omega_1 \mp m_2 \omega_2 = 0 \quad (m_1, m_2 \text{ inteiros})$$

é fácil imaginar que o toro é densamente coberto pela trajetória que nunca se fecha e tal trajetória é dita quase-periódica.

No caso geral, para n graus de liberdade, se as frequências não obedecem uma relação do tipo

$$\sum_{i=1}^n m_i \omega_i = 0 \tag{1.12}$$

para nenhum \underline{m} então a trajetória é densa no toro n -dimensio-

nal; caso exista uma relação parcial de comensurabilidade, ou seja p relações do tipo (1.12) independentes entre si, a trajetória ocupa um sub-espço de dimensão $(m - p)$ no toro.

A relação

$$v_1 = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad (1.13)$$

é chamada n° de rotação da frequência ω_1 e pode ser interpretada como o ângulo entre pontos sucessivos no circuito γ_1 correspondente à coordenada θ_1 , enquanto a órbita dá uma volta completa no outro circuito γ_2 correspondente a θ_2 . Caso não haja comensurabilidade, v_1 é irracional e o toro é coberto densamente.

Podemos imaginar o espaço de fase como que folheado por toros nos quais estão todas as possíveis trajetórias do sistema. É fácil extrapolar o caso visto de duas dimensões para o caso de n dimensões onde cada um dos ω_i ($i = 1, \dots, n$) são coordenadas nos toros e cada toro é representado pela sua ação \underline{I} .

1.2 - Sistemas Hamiltonianos Quasi-Integráveis e Ergódicos

Dado um sistema Hamiltoniano estável é sempre possível reduzi-lo à forma normal, ou seja:

$$H(\underline{I}, \underline{\theta}) = H_0(\underline{I}) + \epsilon H_1(\underline{I}, \underline{\theta}) \quad (1.14)$$

onde $\epsilon H_1(\underline{I}, \underline{\theta})$ representa uma perturbação do sistema $H_0(\underline{I})$ integrável e ϵ é um parâmetro que nos dá a "grandeza" da perturbação. A pergunta que se coloca é se neste novo sistema

as n constantes de integração podem ainda ser encontradas. Isto significaria que o espaço de fases correspondente seria, no caso afirmativo, estruturado pela mesma folheação de toros como descrito na secção anterior. A resposta é que, em geral, não é possível encontrar n constantes de integração, sendo a integrabilidade uma excessão e não a regra.

No caso de $\epsilon \neq 0$ a folheação de toros no espaço de fases é destruída parcialmente e apenas uma parte dos toros sobrevivem distorcidos. A parte que sobrevive é um conjunto de medida finita. Neste caso dizemos que o sistema é quase-integrável, na medida em que o espaço de fase é ainda povoado por toros sobre os quais temos trajetórias com as mesmas características encontradas no caso integrável. É natural que se pergunte quais são os toros destruídos e quais os sobreviventes. Esta é exatamente a pergunta respondida pelo teorema K. A. M.

A prova de Arnold parte de um sistema integrável com n graus de liberdade, e neste sistema considera um dos toros de dimensão n caracterizado por suas n frequências $\omega_1(I_1, \dots, I_n), \dots, \omega_n(I_1, \dots, I_n)$. Ao sistema integrável é então adicionada uma pequena perturbação representada por $\epsilon H_1(I, \theta)$ e procura-se a existência de um toro no sistema perturbado com exatamente estas frequências. É usado para tanto um método iterativo, ao contrário da teoria de perturbações canônicas que parte da Hamiltoniana integrável $H_0(I)$ para obtenção de uma série que em geral é divergente. O método de Arnold é semelhante ao método de Newton para se encontrar raízes de fun-

ções.

Podemos resumir o resultado do teorema em poucas palavras. O toro permanece, embora distorcido, se as frequências ω_i são suficientemente afastadas de qualquer relação de comensurabilidade do tipo (1.12), mais precisamente os ω_i devem obedecer a seguinte desigualdade

$$\left| \sum_{i=1}^n m_i \omega_i \right| > c \left| \sum_{i=1}^n |m_i| \right|^{-\gamma}, \quad (1.15)$$

onde c e γ são constantes para qualquer conjunto de inteiros m_i (não todos nulos ao mesmo tempo); γ é fixo e c depende da amplitude da perturbação.

O teorema K. A. M. nos fornece então uma condição suficiente para a existência de toros invariantes sob perturbação. No entanto, nada se pode afirmar com relação às regiões que são excluídas pela relação (1.15), ou seja, o que acontece com os toros cujas frequências são comensuráveis e suas vizinhanças. Ao contrário do que às vezes se acredita, este teorema nada afirma sobre a destruição de toros nesta região, apenas afirma a existência dos toros nas demais. No entanto se examinarmos o problema com métodos numéricos, estes tendem a sugerir, como veremos no capítulo III, que os toros são de fato destruídos nas vizinhas das frequências comensuráveis.

Existem alguns sistemas específicos que podem ser considerados resultantes de um sistema integrável fortemente perturbado, para os quais já foi demonstrada a ergodicidade. Nestes sistemas as órbitas são quase todas caóticas no sen

tido de que com o tempo a vizinhança de qualquer ponto da superfície de energia é atingida e isto implica na destruição dos toros originais que limitam, como já vimos, a órbita do sistema a um sub-espaco do espaco de energia. A sobrevivência de uma ou outra órbita periódica conforme o sistema considerado, não quebra a ergodicidade, pois constituem um conjunto específico devido a condições iniciais muito especiais.

CAPÍTULO II

SEÇÃO DE POINCARÉ - APLICAÇÕES QUE PRESERVAM A ÁREA

2.1 - Seção de Poincaré

Como já foi dito na introdução, a superfície de Seção de Poincaré facilita o estudo qualitativo dos sistemas mecânicos hamiltonianos. Embora tal técnica seja genérica, ela melhor se aplica a sistemas de dois graus de liberdade. Nesse sistema o espaço de fase R^4 é definido pelo conjunto das quadruplas (x, y, p_x, p_y) . A equação $H(x, y, p_x, p_y) = E = \text{cte.}$ define superfícies tridimensionais que são superfícies de nível de energia total constante. Se interceptarmos uma destas superfícies com o plano $y = 0$ obteremos a superfície de Seção de Poincaré, S_x . Desta forma se conhecermos o estado inicial do sistema em S_x digamos P_0 , temos:

$$(x, p_x) \text{ e } y = 0,$$

e p_y pode ser obtido da Hamiltoniana a menos de um sinal, que é escolhido arbitrariamente para o estudo em questão.

Uma órbita que descreve a evolução do estado do sistema no espaço de fases cruzará a superfície de Seção de Poincaré repetidas vezes Fig. (2.1). É claro que o sistema considerado deve ser ligado (ou limitado) para que possamos extrair alguma informação a respeito do mesmo através das sucessivas passagens da órbita pela superfície de Poincaré. Pouco se poderia dizer de um sis-

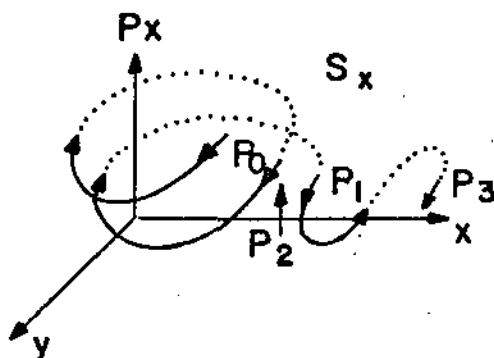


Fig. 2.1

tema não limitado, que tem apenas uma passagem por esta superfície. Mantendo-se uma coerência com a escolha feita para o sinal do movimento p_y dizemos que o ponto P_1 é a imagem de P_0 sob uma aplicação T da superfície de Poincaré pela mesma. Podemos então agora mudar a nossa linguagem e ao invés de se falar em órbitas, falarmos dos sucessivos pontos $P_0, P_1 \dots P_n$ que vão sendo obtidos a partir de P_0 .

$$P_n = T(P_{n-1}) \dots P_1 = T(P_0). \quad (2.2)$$

Com o conceito desta aplicação da superfície nela mesma, podemos agora reduzir o estudo do problema Hamiltoniano ao estudo das aplicações deste tipo.

Consideremos agora ao invés de apenas uma órbita, um tubo de órbitas que intercepta a superfície de secção numa curva C_0 de área A_0 . Então, na sua próxima pas-

sagem o tubo cortará um contorno C_1 de área A_1 (Fig. 2.2).

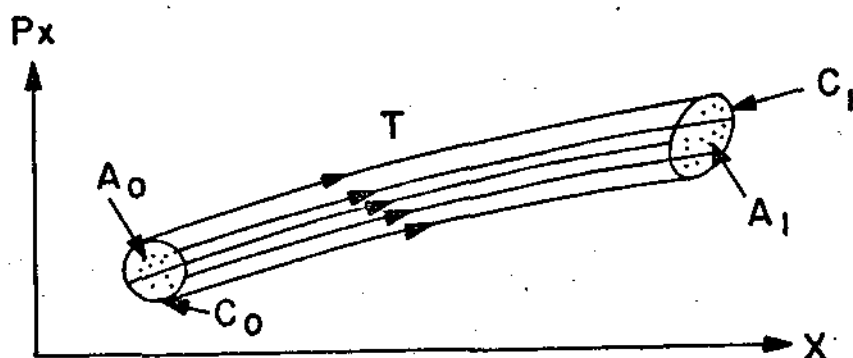


Fig. 2.2

De acordo com a definição da aplicação T acima podemos dizer que todo ponto que passa por A_0 volta em A_1 .

$$T: C_0 \rightarrow C_1 \quad (2.3)$$

$$T: A_0 \rightarrow A_1$$

Os tempos de chegada de cada ponto $P_i \in [A_0]$ podem ser diferentes uma vez que cada órbita tem as suas características próprias, mas do ponto de vista da aplicação considerada isto é irrelevante.

O teorema do invariante de Poincaré - Cartan nos diz que

$$\oint (\underline{p} \cdot d\underline{q} - H dt) = \text{cte} \quad (2.4)$$

para qualquer tubo de órbitas no espaço de fase estendido. No caso em questão $H = E = \text{cte.}$, logo $\int dt = 0$. Portanto, (2.4) se reduz a :

$$\oint \underline{p} \cdot d\underline{q} = \text{cte.} \quad (2.5)$$

Pode-se então concluir que a área determinada pelo tubo de órbitas na superfície de Poincaré, sob a ação de T é preservada, i.e.,

$$T(A_0) = A_1,$$

e por (2.5) podemos concluir que

$$A_0 = A_1.$$

Por esta razão restringiremos o estudo de aplicação T do plano sobre si mesmo àquelas que preservam a área.

No caso de sistemas integráveis de 2 graus de liberdade sabemos que as órbitas estão "presas" a toros bidimensionais $H(\underline{p}, \underline{q}) = E$. Um toro é uma espécie de tubo que volta sobre si mesmo, portanto um corte determinado por S_x sobre a família de um parâmetro de toros $H(\underline{p}, \underline{q}) = E$, nos dá curvas concêntricas, cada uma delas sendo a interseção de um toro com S_x (Fig. 2.3).

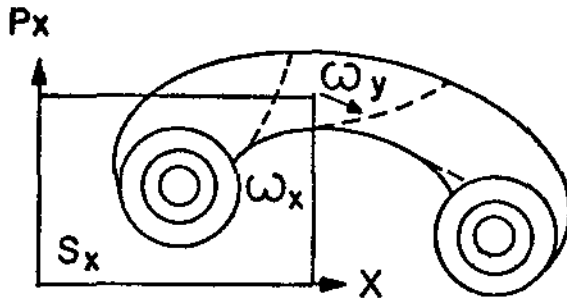


Fig. 2.3

Pela relação (2.5) sabemos que a área destas curvas fechadas em S_x é

$$A_x = 2 \pi I_x \quad (2.6)$$

onde:

$$I_x = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_x} p_x dx \quad (2.7)$$

e γ_x corresponde a um dos circuitos irredutíveis do toro correspondente à frequência normal ω_x . Portanto podemos reconhecer um toro em S_x pela área "interceptada", e a posição no toro pelo ângulo θ que, como já foi visto no capítulo anterior, é tal que

$$\frac{d\theta_x}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I_x} = \omega_x(I_x) \quad (2.8)$$

As curvas correspondentes ao caso integrável são de dois tipos conforme a relação de comensurabilidade entre as duas frequências normais ω_x e ω_y (Fig. 2.4) e conforme discutido no capítulo anterior.

i) se o número de rotação

$$v = \frac{\omega_x}{\omega_y} = P/q \quad P, q \text{ inteiro} \quad (2.9)$$

é racional então a "curva" é constituída de ^{no máximo} q pontos fixos de T^q (Fig. 2.4a), ou seja

$$T^q (P_0) = P_0, \quad (2.10)$$

e dizemos que o número de iterações q é a ordem de comensurabilidade;

ii) se v é irracional temos ergodicidade no toro e, como neste caso a órbita nunca se fecha, os pontos $P_1 \dots P_q$ "desenham" uma curva fechada sobre a qual são densos. Para se observar isto basta que tenhamos um grande número de iterações que corresponde a uma longa observação do sistema (Fig. 2.4b).

Quando o sistema é não integrável temos pontos aleatórios (caóticos) que varrem uma região bidimensional em S_x para os valores de x e P_x permitidos (Fig. 2.5). Isto significa que a órbita não está mais circunscrita à superfície de toros e pode "varrer" uma fração finita da superfície

$$H(\underline{p}, q) = E.$$

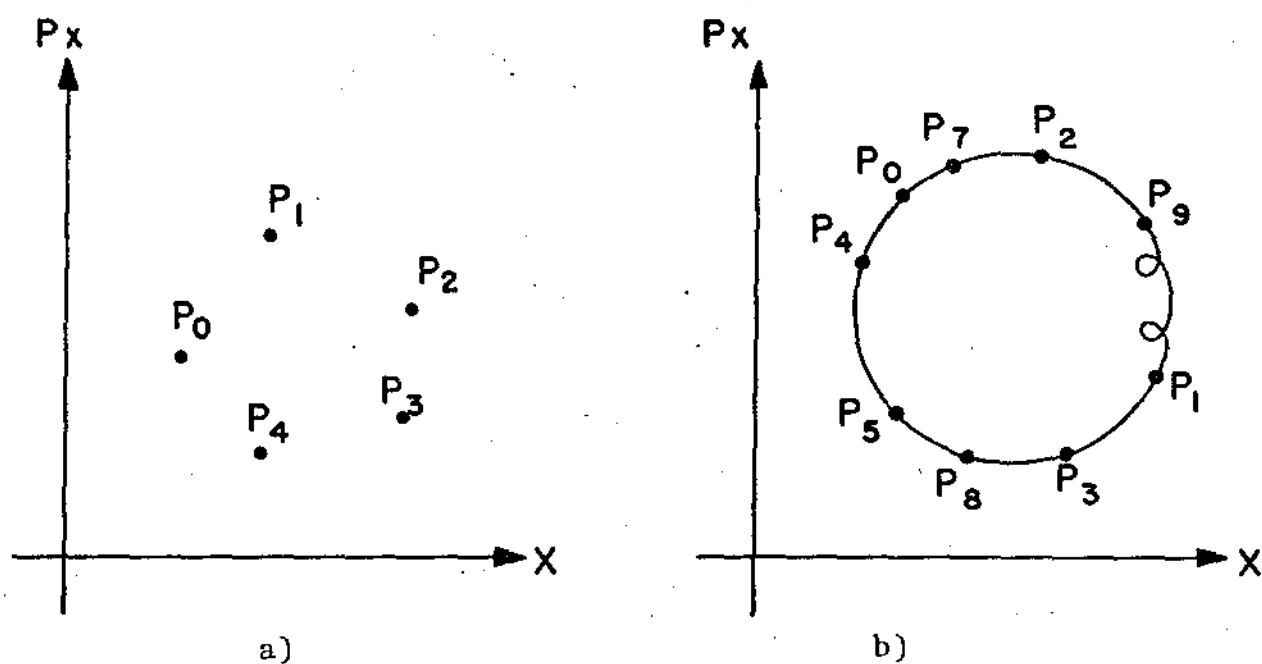


Fig. 2.4

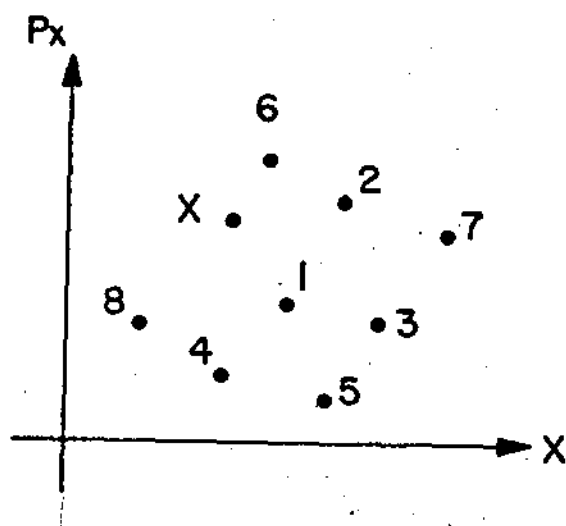


Fig. 2.5

No caso integrável as curvas que as sucessivas iterações sob T , a partir de um ponto inicial P_0 , desenham na superfície de secção são chamadas curvas invariantes de aplicação T .

2.2 - Classificação das Aplicações da Superfície sobre si mesma.

Genericamente definimos uma aplicação de uma superfície sobre si mesma como:

$$T : x_1 = f(x, y) \quad e \quad y_1 = g(x, y) \quad (2.11)$$

onde (x, y) são coordenadas escolhidas de tal forma que a origem seja um ponto fixo, ou seja

$$T(\underline{0}) = \underline{0}$$

e f e g são funções analíticas numa vizinhança da origem.

Nestes termos a preservação da área é definida pelo determinante do Jacobiano de T

$$\det \left| \frac{\partial(x_1, y_1)}{\partial(x, y)} \right| = 1 \quad (2.12)$$

A aplicação mais simples que podemos ter é uma aplicação linear:

$$\begin{aligned} x_1 &= ax + by \\ y_1 &= cx + dy \end{aligned} \quad (2.13)$$

A classificação dos pontos invariantes depende das raízes da equação

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \quad (2.14)$$

ou seja dos autovalores da matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

De acordo com (2.13) temos:

$$ad - bc = 1 \quad (2.16)$$

donde se infere que os autovalores obedecem à relação:

$$\lambda_2 \lambda_1 = 1. \quad (2.17)$$

Temos então apenas duas possibilidades; ou os autovalores são complexos conjugados no círculo unitário, ou números reais λ e $1/\lambda$.

Se λ_1 e λ_2 são complexos podem então ser escritos como:

$$\lambda_1 = e^{i\alpha}, \quad \lambda_2 = e^{-i\alpha} \quad (2.18)$$

onde α é real. Mediante transformação linear de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= x' + iy' \\ y &= x' - iy' \end{aligned} \quad (2.19)$$

a aplicação T pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y'_1 &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Neste caso a aplicação é mera rotação de α em

torno do ponto fixo $(0,0)$. As curvas invariantes são então círculos $(x^2 + y^2)$ e a aplicação é dita integrável. Em casos mais gerais as curvas invariantes são elipses (Fig. 2.6) e dizemos então que o ponto fixo ou a transformação é elíptica (ou estável): porque qualquer ponto inicial nas proximidades da origem sob ação de T , (ou T^{-1}), permanece próximo à mesma independentemente do número de iterações e todos os pontos giram com a mesma velocidade angular α , qualquer que seja curva invariante considerada.

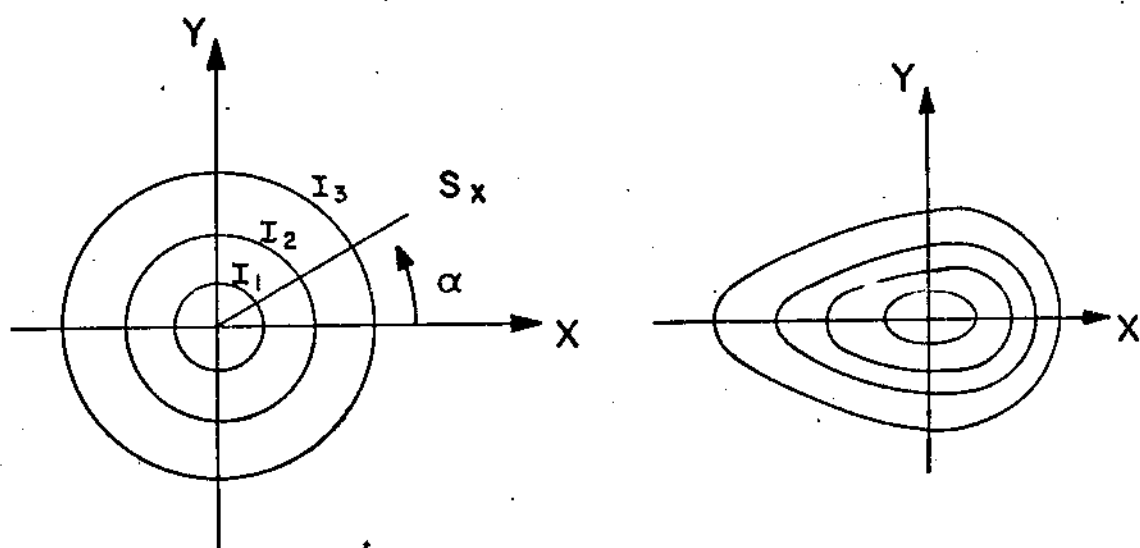


Fig. 2.6

Quando os autovalores são reais ($|\lambda| > 1$) as curvas invariantes são hipérboles quadradas $xy = \text{cte}$ (nas coordenadas das assíntotas) e a transformação T pode ser transformada na forma

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda x \\ y_1 &= \lambda^{-1} y \end{aligned} \tag{2.21}$$

Neste caso a aplicação se diz hiperbólica e o ponto fixo $(0,0)$ a ela associado é dito instável ou hiperbólico. No caso geral as hipérbolas não são quadradas (Fig. 2-7).

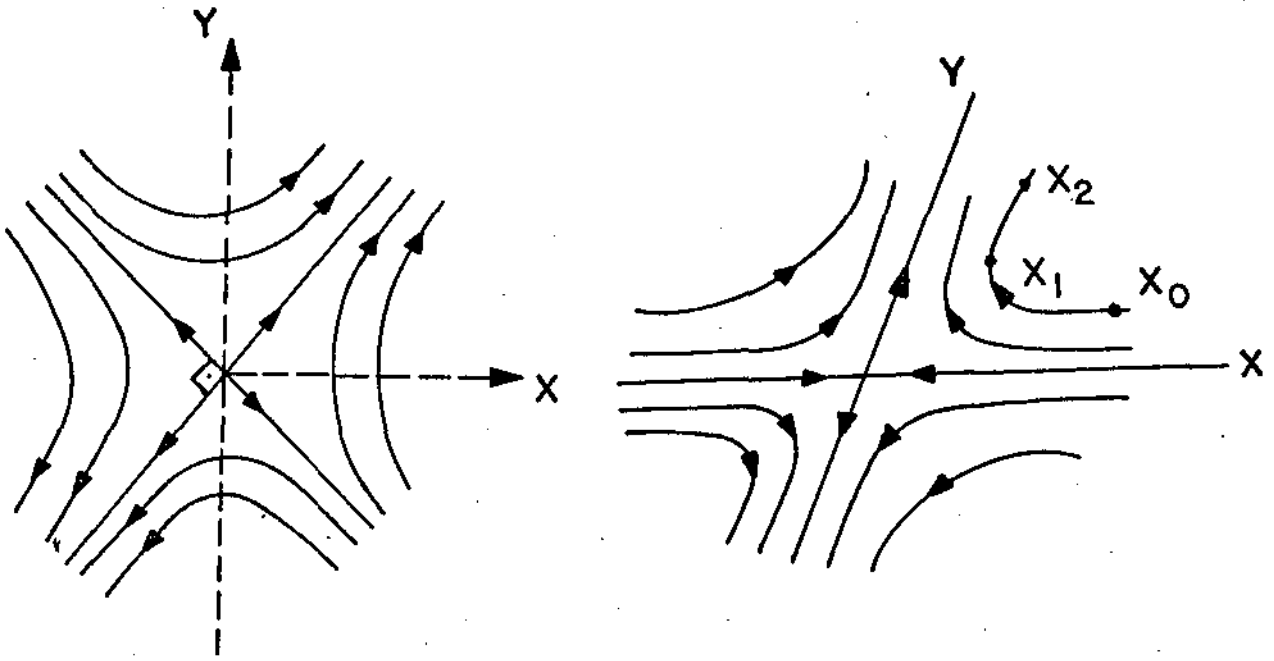


Fig. 2.7

No caso hiperbólico temos o ponto fixo ordinário ou com reflexões. Este último caso ocorre para valores de $\lambda < 0$ e é ilustrado na Fig. 2.8.

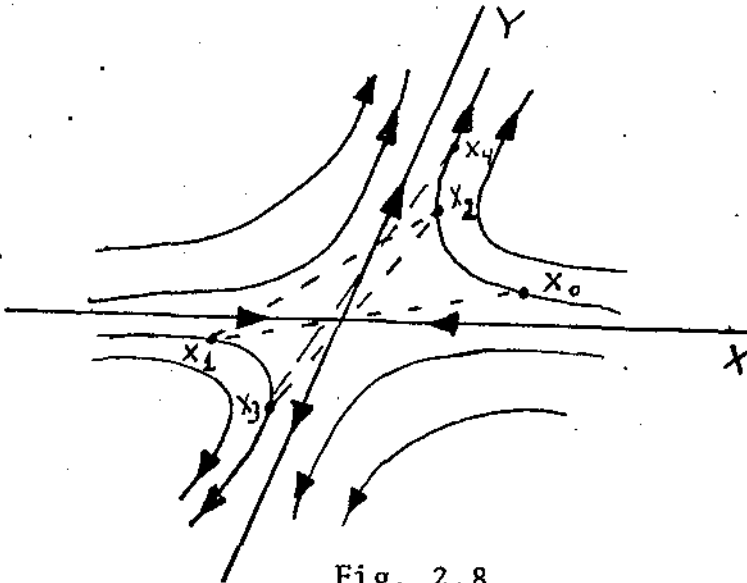


Fig. 2.8

O ponto fixo hiperbólico é dito instável porque um ponto P_0 nas proximidades da origem é carregado para longe da mesma sob ação de T .

Quando os autovalores são iguais, ($\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$) temos o ponto fixo parabólico. Neste caso, como no hiperbólico, também temos dois tipos de aplicações que correspondem ao ponto ordinário ($\lambda = 1$) e a aplicação com reflexão ($\lambda = -1$). A aplicação pode ser posta na forma.

$$x_1 = x$$

$$y_1 = x + cy \quad (c \neq 0)$$

As curvas invariantes serão então um cisalhamento ao longo de $x = \text{constante}$ (Fig. 2-9).

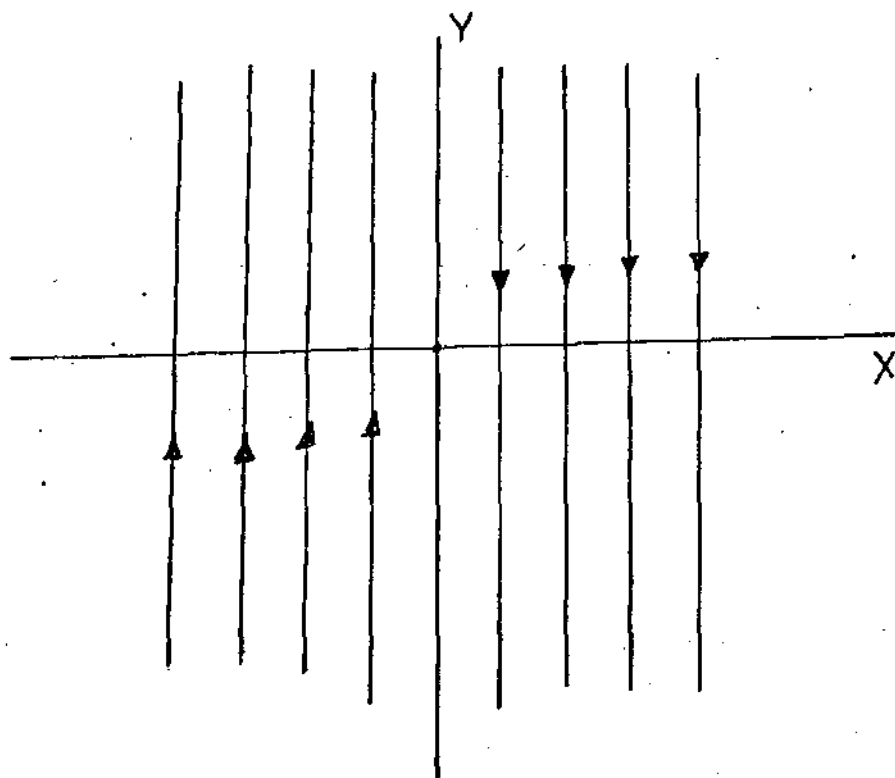


Fig. 2.9

As aplicações lineares são, entretanto, demasiado triviais. Por serem sempre integráveis não correspondem à realidade do movimento hamiltoniano em geral. Como já vimos na introdução, sabemos pelo teorema K.A.M que há toros que desaparecem e outros que permanecem distorcidos. Faz-se necessário portanto buscar aplicações mais "sofisticadas" para se entender o que acontece na região onde os toros são destruídos por uma perturbação, que no nosso caso se reduz à adição de termos não lineares à aplicação.

CAPÍTULO III

APLICAÇÃO DE HENON MODIFICADA

3.1 - Propriedades Gerais

Conforme vimos no capítulo anterior, as aplicações lineares não são suficientes para descrever a complexidade dos sistemas Hamiltonianos por serem sempre integráveis. Uma das aplicações não triviais, porém simples, e que descreve satisfatoriamente muitas propriedades destes sistemas é a aplicação polinomial quadrática:

$$\begin{aligned}x_1 &= ax + by + cx^2 + dxy + ey^2 \\y_1 &= a'x + b'y + c'x^2 + d'xy + e'y^2\end{aligned}\tag{3.1}$$

É demonstrado por Hénon que aplicações quadráticas genéricas que preservam a área podem ser reduzidas por mudanças lineares de coordenadas à forma:

$$\begin{aligned}x_1 &= x \cos \alpha - (y - x^2) \sin \alpha \\y_1 &= x \sin \alpha + (y - x^2) \cos \alpha\end{aligned}\tag{3.2}$$

A aplicação quadrática de Hénon (3.2) é a mais geral com um ponto fixo estável da origem, enquanto que a aplicação T:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 \cosh \alpha + (y_0 - x_0^2) \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha} \\y_1 &= x_0 \sinh \alpha + (y_0 - x_0^2) \cosh \alpha\end{aligned}\tag{3.3}$$

escolhida para este trabalho é a mais geral com ponto fixo instável na origem.

A aplicação de Hénon e a sua modificação se confundem mediante uma mudança de coordenadas pois ambas possuem um par de pontos fixos sendo um estável e outro instável. No caso de Hénon o ponto fixo instável associado ao par (0,0), tem por coordenadas:

$$x = 2 \operatorname{tg} (\alpha/2)$$

$$y = 2 \operatorname{tg}^2 (\alpha/2)$$

e no caso da aplicação (3.4) o ponto fixo elítico (estável) associado ao instável (hiperbólico) é:

$$x = 2 \operatorname{tgh} \alpha/2$$

$$y = 2 \operatorname{tgh}^2 \alpha/2$$

Vamos examinar alguns aspectos importantes da transformação T. O primeiro é a preservação da área. Para tanto basta que determinemos o determinante da matriz jacobiana correspondente.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_1}{\partial y} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial y_1}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\cosh \alpha - 2x \operatorname{senh} \alpha) \operatorname{senh} \alpha & \\ & (\operatorname{senh} \alpha - 2x \cosh \alpha) \cosh \alpha \end{vmatrix} = \\ = \cosh^2 \alpha - \operatorname{senh}^2 \alpha = 1$$

Provamos agora que a aplicação de Hénon modificada é obtida também de uma transformação polinomial quadrática genérica do tipo (3.1).

Para o caso em questão queremos que a origem seja um ponto fixo instável. Usando-se então a forma linear de Birkhoff para ponto fixo instável, obtemos:

$$\begin{aligned}x_1 &= \pm x \cosh \alpha + y \sinh \alpha + cx^2 + dxy + ey^2 \\y_1 &= x \sinh \alpha \pm y \cosh \alpha + c'x^2 + d'xy + e'y^2.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Da condição que a área seja preservada, i. e.:

$$\begin{vmatrix} \pm \cosh \alpha + 2cx + dy & \sinh \alpha + dx + 2ey \\ \sinh \alpha + 2c'x + d'y & \pm \cosh \alpha + d'x + 2e'y \end{vmatrix} = 1$$

temos:

$$\begin{aligned}cd' - dc' &= 0 \\ce' - e'c &= 0 \\de' - ed' &= 0 \\ \pm \cosh \alpha (d' + 2c) - \sinh \alpha (2c' + d) &= 0 \\ \pm \cosh \alpha (d' + 2e') - \sinh \alpha (2e' + d') &= 0.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Das três primeiras relações do conjunto de relações (3.7) vemos que os coeficientes dos termos de 2º grau são proporcionais.

Chamemos:

$$\frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{e}{e'} = \operatorname{tgh} \beta = \frac{\sinh \beta}{\cosh \beta}$$

donde podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 c &= C \operatorname{senh} \beta & d &= D \operatorname{senh} \beta & e &= E \operatorname{senh} \beta \\
 c' &= C \operatorname{cosh} \beta & d' &= D \operatorname{cosh} \beta & e' &= E \operatorname{cosh} \beta .
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

Usando-se estas relações (3.8) nas últimas de (3.7) obtemos:

$$\pm \operatorname{cosh} \alpha (D \operatorname{cosh} \beta + 2C \operatorname{senh} \beta) - \operatorname{senh} \alpha (D \operatorname{senh} \beta + 2C \operatorname{cosh} \beta) = 0$$

$$\pm \operatorname{cosh} \alpha (D \operatorname{senh} \beta + 2E \operatorname{cosh} \beta) - \operatorname{senh} \alpha (D \operatorname{senh} \beta + 2E \operatorname{senh} \beta) = 0$$

donde:

$$D (\pm \operatorname{cosh} \alpha \operatorname{cosh} \beta - \operatorname{senh} \alpha \operatorname{senh} \beta) + 2C (\pm \operatorname{cosh} \alpha \operatorname{senh} \beta - \operatorname{senh} \alpha \operatorname{cosh} \beta) = 0$$

$$-D (\mp \operatorname{cosh} \alpha \operatorname{senh} \beta + \operatorname{senh} \alpha \operatorname{senh} \beta) + 2E (\pm \operatorname{cosh} \alpha \operatorname{cosh} \beta - \operatorname{senh} \alpha \operatorname{senh} \beta) = 0.$$

Tomando-se o sinal positivo temos:

$$D \operatorname{cosh} (\alpha - \beta) - 2C \operatorname{senh} (\alpha - \beta) = 0$$

$$D \operatorname{senh} (\alpha - \beta) - 2E \operatorname{cosh} (\alpha - \beta) = 0$$

e com o sinal negativo:

$$D \operatorname{cosh} (\alpha + \beta) + 2C \operatorname{senh} (\alpha + \beta) = 0$$

$$D \operatorname{senh} (\alpha + \beta) + 2E \operatorname{cosh} (\alpha + \beta) = 0.$$

Façamos agora a seguinte transformação linear de coordenadas:

$$x' = A [x \operatorname{cosh} (\alpha - \beta) + y \operatorname{senh} (\alpha - \beta)]$$

$$y' = A [x \operatorname{senh} (\alpha - \beta) + y \operatorname{cosh} (\alpha - \beta)],$$

Para o caso do sinal positivo. Chamemos a transformação origi

nal de T e de coordenadas de B, então:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

então teremos que efetuar a transformação de semelhança

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = BTB^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Substituiremos então x e y por: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$

$$= T^{-1} \begin{pmatrix} x' \cosh(\alpha-\beta) - y' \sinh(\alpha-\beta) \\ -x' \sinh(\alpha-\beta) + y' \cosh(\alpha-\beta) \end{pmatrix} \quad \text{apenas na parte qua}$$

drática. Temos então:

$$cx^2 + dxy + ey^2 = \frac{\sinh^2 \beta}{A^2} \{ C [x' \cosh(\alpha-\beta) - y' \sinh(\alpha-\beta)]^2 +$$

$$+ D [(x' \cosh(\alpha-\beta) - y' \sinh(\alpha-\beta)) (-x' \sinh(\alpha-\beta) + y' \cosh(\alpha-\beta))] +$$

$$+ E (-x' \sinh(\alpha-\beta) + y' \cosh(\alpha-\beta))^2 \}.$$

Definimos então C', D' e E' como:

$$C' = C \cosh^2 \gamma - D \cosh \gamma \sinh \gamma + E \sinh^2 \gamma$$

$$E' = C \sinh^2 \gamma - D \cosh \gamma \sinh \gamma + E \cosh^2 \gamma$$

$$D' = -2 (C+E) \cosh \gamma \sinh \gamma - D (\sinh^2 \gamma + \cosh^2 \gamma)$$

onde $\alpha - \beta = \gamma$, como os coeficientes de x'^2 , y'^2 e $x' y'$.

Usando-se as relações (3.9) convenientemente manipuladas entre si temos que:

$$D' = E' = 0$$

$$C' = (C - E)$$

A transformação se reduz em termos de x' e y' a:

$$x_1 = \frac{\sinh \beta}{A^2} (C \cosh^2 \gamma + E \sinh^2 \gamma - D \cosh \gamma \sinh \gamma) x'^2$$

$$y_1 = \frac{\cosh \beta}{A^2} (C \cosh^2 \gamma + E \sinh^2 \gamma - D \cosh \gamma \sinh \gamma) x'^2$$

ou conforme redenominação acima:

$$x_1 = C'/A^2 \sinh \beta x'^2$$

(3.11)

$$y_1 = C'/A^2 \cosh \beta x'^2$$

Completando a transformação de semelhança podemos escrever que:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = B(TB^{-1}) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \frac{\sinh \beta}{A^2} C' x'^2 \\ \frac{\cosh \beta}{A^2} C' y'^2 \end{pmatrix} + \text{parte linear}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \cosh \gamma & \sinh \gamma \\ \sinh \gamma & \cosh \gamma \end{pmatrix} \frac{C'}{A^2} \begin{pmatrix} \sinh \beta x'^2 \\ \cosh \beta x'^2 \end{pmatrix} + \text{parte linear}$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = \frac{C'}{A} x'^2 \begin{pmatrix} \cosh \gamma \sinh \beta + \cosh \gamma \cosh \beta \\ \sinh \gamma \sinh \beta + \cosh \gamma \cosh \beta \end{pmatrix} + \text{parte linear.}$$

Substituindo-se $C' = (C-E)$ e desenvolvendo os \cosh e \sinh da diferença temos:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = \frac{x'^2}{A} (C-E) \begin{pmatrix} \sinh \alpha \\ \cosh \alpha \end{pmatrix} + \text{parte linear.}$$

Portando tomando-se $A = -(C-E)$ temos a transformação reduzida à forma desejada, i. e. :

$$x'_1 = x' \cosh \alpha + (y' - x'^2) \sinh \alpha$$

$$y'_1 = x' \cosh \alpha + (y' - x'^2) \cosh \alpha .$$

Doravante não usaremos mais as linhas que só foram usadas para facilitar a exposição das transformações necessárias.

A transformação genérica foi reduzida a um só parâmetro α ao invés dos dez iniciais. Como já vimos α é o ângulo de rotação (hiperbólica) da aproximação linear e é uma característica da aplicação. Temos então uma família de aplicações a um parâmetro. Podemos então nos estudos numéricos varrer toda a amplitude de α e examinar toda a família de aplicações. Nestes estudos veremos que a modificação em estudo amplia os trabalhos de Hénon, sendo-lhe assim complementar.

Não é nada difícil obter-se a inversa, T^{-1} da transformação T e apresentar também propriedades de simetria. Só que

neste caso não temos um eixo de simetria de $\alpha/2$ como no caso da aplicação original de Hénon. Neste caso ela apresenta "simetrias locais" e ao invés de um eixo teremos uma linha menos simples de simetria.

A aplicação T em estudo pode ser decomposta em duas outras mais simples: $T = RS$ onde S é um cisalhamento do longo do eixo y :

$$x' = x \quad y' = y - x^2$$

Este cisalhamento é uma aplicação que por si preserva a área; basta examinar o determinante do jacobiano.

$$|J| = \left| \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2x & 1 \end{vmatrix} = 1$$

A rotação hiperbólica R que se segue

$$x_1 = x' \cosh \alpha + y' \sinh \alpha$$

$$y_1 = x' \sinh \alpha + y' \cosh \alpha$$

também preserva a área o que é facilmente verificável.

É resultado já demonstrado Engel⁽⁴⁾ que qualquer aplicação polinomial que preserva a área pode ser decomposta desta maneira.

Se $T = RS$, podemos afirmar que sua inversa é

$$T^{-1} = S^{-1} R^{-1}$$

donde podemos obter T^{-1} . Como acima S^{-1} é da forma:

$$x = x' \quad y = y' + x'^2$$

enquanto R^{-1} é:

$$x' = \cosh \alpha x_1 - \sinh \alpha y_1$$

$$y' = -\sinh \alpha x_1 + \cosh \alpha y_1$$

Portanto temos,

$$x = x_1 \cosh \alpha - y_1 \sinh \alpha \tag{3.12}$$

$$y = -x_1 \sinh \alpha + y_1 \cosh \alpha + (x_1 \cosh \alpha - y_1 \sinh \alpha)^2$$

Pode-se notar que a inversa de T é também quadrática e preserva a área, conforme foi demonstrado por Engel, a inversa de uma aplicação polonomial que preserva a área, é em geral também polinomial, preservando a área.

Como:

$$\cosh \alpha = \cosh (-\alpha); \quad -\sinh \alpha = \sinh (-\alpha)$$

notamos que para $\alpha > 0$ temos a aplicação correspondente a interações sem reflexões na origem; com $\alpha < 0$ a aplicação se torna uma aplicação do ponto fixo hiperbólico com reflexões.

Estudaremos inicialmente o primeiro caso que já apresenta uma série de resultados interessantes. Se $\alpha = 0$, a aplicação T se reduz a S , i.e.,

$$x_1 = x$$

$$y_1 = y - x^2$$

e por interação T^n é da forma:

$$x_n = x$$

$$y_n = y - nx^2$$

isto é, um ponto inicial vai sendo apenas arrastado ao longo da linha $x = \text{constante}$, com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty \quad (3.14)$$

Portanto, S é uma aplicação integrável do tipo parabólico. Sabemos pelo capítulo anterior que tal transformação linear de coordenadas pode ser posta na forma (2.13) e, R corresponde então a uma aplicação hiperbólica.

Podemos associar a cada uma dessas aplicações integráveis uma Hamiltoniana correspondente a um movimento com apenas um grau de liberdade. As iterações destas aplicações corresponderiam a uma fotografia estroboscópica do fluxo Hamiltoniano no espaço de fase (x, y) . Podemos escrever

$$\begin{aligned} H_S &= \pm \frac{x^3}{3} && \text{para } S, \\ H_{R_h} &= \frac{-x^2 + y^2}{2} \\ H_{R_e} &= \frac{x^2 + y^2}{2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

para R no caso da aplicação de Hénon modificada e da aplicação de Hénon, respectivamente. Nos dois casos de rotação o intervalo de tempo de observação é $\tau = \alpha$ e observaríamos o movimento em torno dos pontos instável e estável. Como já vimos para $\alpha \rightarrow 0$ teremos apenas cisalhamento; isto é verdadeiro tanto para a aplicação modificada como para a de Hénon.

Podemos agora considerar que os movimentos se dão no limite de $\alpha \rightarrow 0$, sob a ação das Hamiltonianas

$$H_{P.E} = H_S + H_E \quad (3.16a)$$

$$H_{P.H} = H_S + H_H \quad (3.16b)$$

As figuras 3.1a. e 3.1b ilustram a analogia entre aplicações e a observação do fluxo das Hamiltonianas 3.16a e 3.16b, respectivamente, para $\tau \rightarrow 0$.

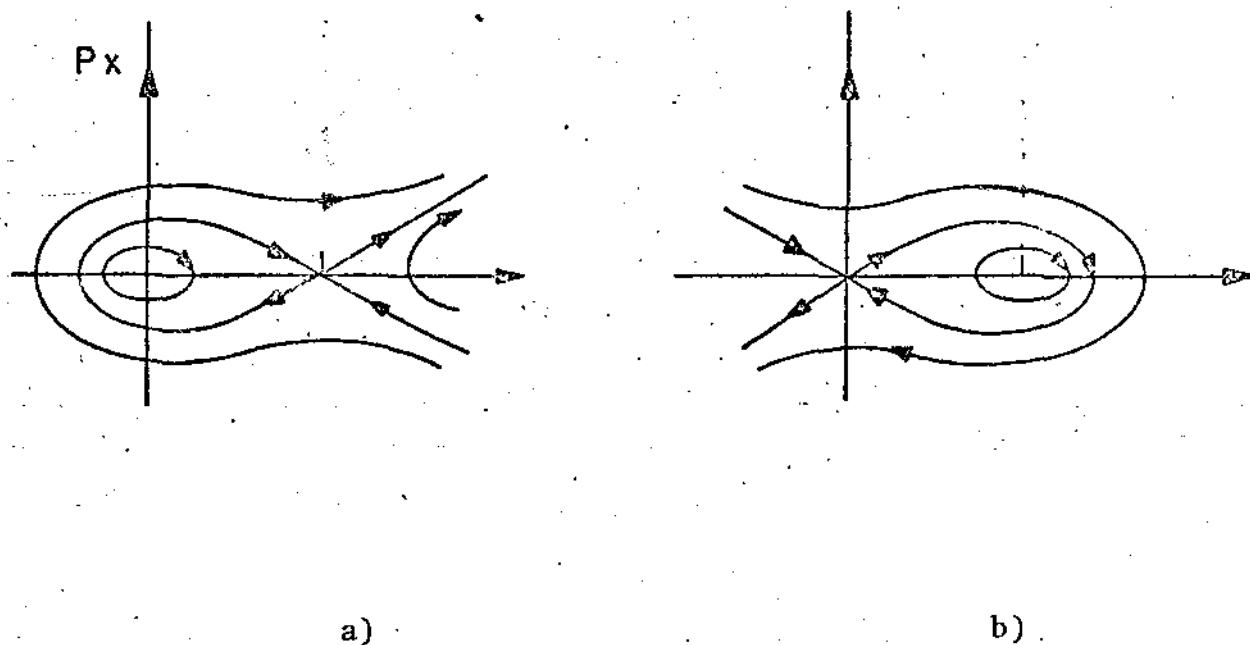


Fig. 3.1

Estas Hamiltonianas são na verdade as mesmas discutidas no capítulo I para exemplificar a forma dos toros unidimensionais. Embora as aplicações quadráticas em discussão descrevam sistemas com dois graus de liberdade na superfície de Poincaré, é

interessante notar que podem ser visualizadas como Hamiltonianas com apenas um grau de liberdade. Note-se a semelhança entre a figura 3.1b e as figs 1 e 2 obtida numericamente com a aplicação de Hénon modificada para α pequeno.

Vejamos agora a obtenção dos pontos fixos de primeira ordem. Dado o sistema na forma:

$$x_{i+1} = x_i \cosh \alpha + (y_i - x_i^2) \sinh \alpha$$

$$y_{i+1} = x_i \sinh \alpha + (y_i - x_i^2) \cosh \alpha$$

onde,

$$i = 0, 1, 2 \dots n - 1$$

a condição para que um ponto seja fixo é que:

$$x_0 = x_n, \quad y_0 = y_n$$

ou seja, de um par (x_0, y_0) , o par (x_n, y_n) da n-ésima interação coincide com o par inicial. Temos então um sistema de $2n$ equações a $2n$ incógnitas. Este sistema apresenta um número finito de raízes.

$$T^n(x_0) = x_n = x_0$$

A partir da aplicação inversa (3.12) temos:

$$x_{i-1} = x_i \cosh \alpha - y_i \sinh \alpha$$

donde

$$y_i = (x_i \cosh \alpha - x_{i-1}) / \sinh \alpha. \quad (3.17)$$

Substituindo-se na 1ª. equação do sistema de expressão (3.17) obtemos

$$x_{i+1} + x_i^2 \sinh \alpha - 2 x_i \cosh \alpha + x_{i-1} = 0 \quad (3.18)$$

$$(i = 0, 1, \dots, n - 1)$$

modificando-se agora as condições de ponto invariante para:

$$x_n = x_0$$

$$x_{n-1} = x_{-1}$$

Reduzimos então o cálculo dos pontos invariantes a um sistema de n equações a n incógnitas. Cada equação do sistema sendo de 2º grau, o número de soluções será no máximo 2^n ; para n par tal resultado pode ser obtido de um lema mais geral devido a Moser.

No caso tomamos $n = 1$, o que nos dá $i = 0$, e a equação (3.18) se reduz a:

$$x_1 + x_0^2 \sinh \alpha - 2 x_0 \cosh \alpha + x_{-1} = 0$$

Como $x_1 = x_0$ e $x_{-1} = x_0$, teremos, chamando a incógnita de x_1 , simplesmente:

$$x_1 + x_1^2 \sinh \alpha - 2 x_1 \cosh \alpha + x_1 = 0$$

donde:

$$x_1 = 0 \quad (3.19)$$

e

$$x_1' = \frac{2(\cosh \alpha - 1)}{\sinh \alpha} = 2 \operatorname{tgh} \alpha/2, \quad (3.20)$$

Usando-se a relação (19) temos que

$$y_1 = 0 \quad (3.21)$$

$$y_1' = 2 \operatorname{tgh}^2 \alpha/2.$$

Portanto, os pontos invariantes de T são os pontos $I_1 = (0, 0)$ e $I_1' = (2 \operatorname{tgh} \alpha/2, 2 \operatorname{tgh}^2 \alpha/2)$. O ponto I_1 não nos causa surpresa pois está embutido na construção da aplicação, conforme dito anteriormente, a origem é um ponto fixo instável por hipótese. Resta-nos estudar a natureza do ponto fixo I_1' .

Para isto desloca-se a origem para o ponto I_1' e procede-se a um exame da natureza da aplicação assim obtida quando linearizada. Para tal deslocamento usa-se a translação:

$$X = x - 2 \operatorname{tgh} \alpha/2 \quad (3.22)$$

$$Y = y - 2 \operatorname{tgh}^2 \alpha/2$$

Substituindo-se na transformação original obtemos T_L :

$$X_1 = X(\cosh \alpha - 4 \operatorname{tgh} \alpha/2 \sinh \alpha) + (Y - X^2) \sinh \alpha \quad (3.23)$$

$$Y_1 = X(\sinh \alpha - 4 \operatorname{tgh} \alpha/2 \cosh \alpha) + (Y - X^2) \cosh \alpha$$

O traço da parte linear desta transformação é:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} T_L &= \cosh \alpha - 4 \operatorname{tgh} \alpha/2 \sinh \alpha + \cosh \alpha \\ &= 2 - 4 \operatorname{senh}^2 \alpha/2 \end{aligned}$$

*) Para obter o traço da parte linear da transformação linearizada, basta calcular $k = 2 - \cosh \alpha \pm \sqrt{(2 - \cosh \alpha)^2 - 1}$, pois $\cosh \alpha$

Então temos que:

$$\text{Tr } T_L \leq 2$$

onde o sinal de igual vale apenas para $\alpha = 0$ que já descartamos. Sabemos que o traço de uma matriz é invariante, portanto vamos examinar qual deve ser o valor do traço para os dois tipos de pontos fixos. No caso elítico temos que:

$$\text{Tr } T = \lambda_1 + \lambda_2 = e^{i\alpha'} + e^{-i\alpha'} = 2 \cos \alpha' \quad (*)$$

portanto,

$$-2 \leq \text{Tr } T \leq 2$$

No caso hiperbólico:

$$\text{Tr } T = \lambda_1 + \lambda_2 = \pm(e^{\alpha'} + e^{-\alpha'}) = \pm 2 \cosh \alpha'$$

$$\cosh \alpha' \geq 1$$

portanto,

$$|\text{Tr } T| \geq 2$$

Concluimos então que o ponto dado pelas coordenadas

$(2 \text{ tgh } \alpha/2, e \text{ tgh}^2 \alpha/2)$ é um ponto elítico ou estável, até que ocorra bifurcação, o que acontece para $\alpha = 1.762748$; quando α atinge este valor, $\text{Tr } T_L = -2$, o ponto fixo muda seu caráter de elítico para hiperbólico.

Calculando-se os pontos fixos de T^2 , através do sistema (3.18), obtemos quatro raízes das quais duas são também pontos fixos de T e as outras duas são complexas conjugadas.

Se α' não é o mesmo que α e se α' é o mesmo que α para $\alpha < 1.762748$ então $h = h(\alpha) \equiv e^{i\alpha'}$.

das:

$$x = \operatorname{ctgh} \frac{\alpha}{2} \pm \left(1 - \frac{1}{\operatorname{senh}^2 \frac{\alpha}{2}} \right)^{1/2}$$

$$y = 1 \pm \operatorname{tgh} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{senh}^2 \frac{\alpha}{2}} \right)^{1/2}$$

Quando o discriminante $\Delta < 0$ as raízes não são "soluções" enquanto pontos fixos da aplicação. Entretanto, quando $\Delta > 0$ as raízes se tornam reais e isto acontece exatamente para $\alpha = 1.762748$, i.e., o mesmo valor encontrado para satisfazer $\operatorname{Tr} . T = -2$. Quando há bifurcação temos então, a mudança de caráter do ponto fixo de T^{2n} , acompanhada do aparecimento de dois outros pontos fixos elípticos com o dobro do período da órbita original.

Este processo continua gerando uma sequência infinita de bifurcações com duplicação de órbitas. T.C. Bountis⁽⁶⁾ realizou um trabalho recente onde ocorrem estas bifurcações em uma aplicação quadrática. Seus resultados tendem a confirmar a hipótese de que há para estes sistemas, à semelhança dos dissipativos as mesmas propriedades universais encontradas por Feigenbaum⁽⁷⁾, i. e., esta sequência de bifurcações é atingida dentro de um intervalo finito do parâmetro de perturbação no caso da aplicação de Hénon modificada. A sequência de bifurcações está relacionada com a destruição das curvas invariantes fechadas, destruição esta que leva ao aparecimento de caos.

Resta-nos ainda examinar o comportamento da aplicação a distâncias grandes do eixo y . Neste caso os termos quadráticos dominam e podemos reduzir T a :

$$x_{i+1} = x_i^2 \sinh \alpha; \quad y_{i+1} = -x_i^2 \cosh \alpha$$

$$x_{i+j} \sinh \alpha = -(x_i \sinh \alpha)^{2^j}$$

se $|x_i| > 1/\sinh \alpha$ então quando $j \rightarrow \infty$, $x_{i+j} \rightarrow \infty$, i.e., os pontos da aplicação, para valores iniciais ou valores que após sucessivas iterações atingem este valor, escapam para o infinito rapidamente, uma vez que a distância à origem cresce exponencialmente a cada iteração.

3.2 - Resultados Numéricos

Apesar de pertencer a uma classe de aplicações bastante estudadas nas últimas décadas, não se tinha nenhum estudo numérico com a aplicação aqui considerada. Não havia portanto, muitas informações numéricas para se prever o comportamento de uma aplicação que se prestasse ao estudo das proximidades do ponto hiperbólico.

Numa primeira fase para se testar a precisão do programa e da sub-rotina de gráficos, reproduziu-se a partir de dados de Hénon, alguns dos seus resultados. Desta forma poderíamos ter segurança com relação à forma computacional desenvolvida para os "experimentos numéricos". O programa foi executado em precisão dupla devido ao seu caráter exponencial que leva a uma rápida acumulação de erros no processo iterativo. No que tange argumentos relativos a erros numéricos, em geral, devidos aos mecanismos de aproximação inerentes do próprio computador, Hénon⁽⁸⁾ descreve uma aplicação onde apenas números inteiros são envolvidos, i. e., a superfície de secção é considerada discreta mediante arranjos convenientes na aplicação de partida. Os resultados que são apresentados comparando uma aplicação assim trabalhada e, a sua forma original não apresentam discrepâncias. Isto nos dá alguma segurança com relação às computações envolvidas neste tipo de trabalho como o aqui apresentado. Na verdade, o computador também trabalha com uma rede discreta mesmo quando se trata de números reais mas, neste caso não se tem controle direto do que acontece internamente quando um cálculo é efetuado, ao passo que no método descrito por Hénon é o programador quem controla o pro-

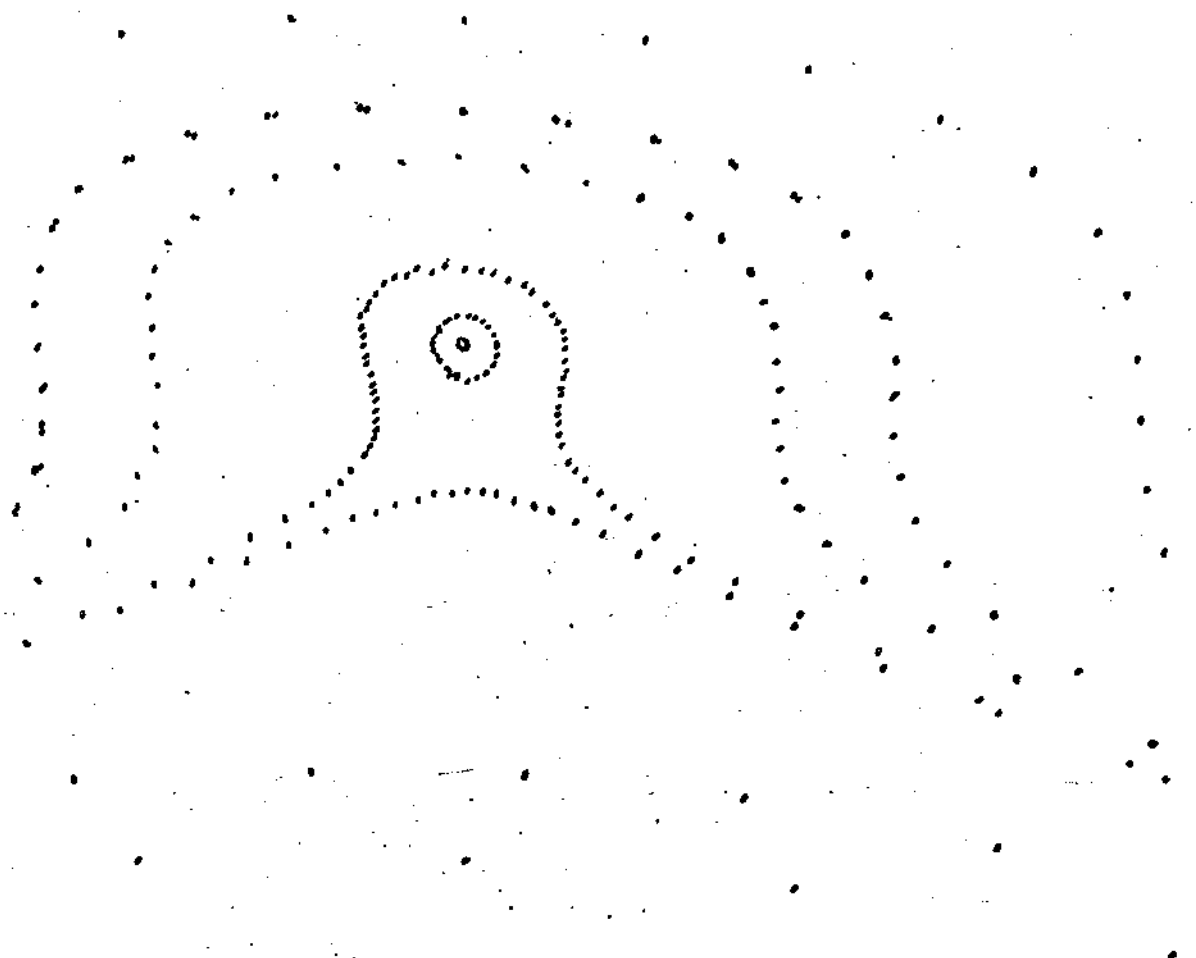
cesso de arredondamento.

Após os testes iniciais passamos então ao trabalho com a aplicação de Hénon modificada. Teoricamente estamos trabalhando com todos os valores de α positivos, mas, os primeiros resultados nos mostram que só a partir de $\alpha \approx 0,01$ se notava algum comportamento diferente de um mero cizalhamento. Os aspectos teóricos deste comportamento já foram discutidos na 1.ª secção deste capítulo. Usamos a aplicação T e sua inversa para se obter primeiramente o aspecto global da aplicação; nos casos em que as curvas invariantes são fechadas não se necessitaria da inversa pois obviamente coincidem. No entanto, isto pode ser visto como um controle extra da precisão dos resultados numéricos.

Como se pode apreender das figuras 1, 2 e 3 as curvas à esquerda da origem são ramos de hipérbolas deformadas e dado qualquer ponto inicial nas proximidades da origem as sucessivas iterações carregam-no rapidamente para o infinito. À esquerda da origem temos curvas fechadas em torno do ponto fixo elíptico associado ao ponto fixo hiperbólico e, curvas abertas que contornam a região estável para depois se afastarem novamente para o infinito. Já salientamos as semelhanças deste gráfico numérico com o fluxo de uma Hamiltoniana para um sistema com um grau de liberdade em um plano de fases bidimensional (Fig. 3.1).

À medida que se aumenta o valor de α , nota-se um afastamento para a direita do ponto elíptico associado, sem haver, no entanto, variações significativas na estrutura global das iterações. Este resultado está em consonância com os

$\alpha = 0.1$



000

001

Fig. 1

$\gamma = 0.0$

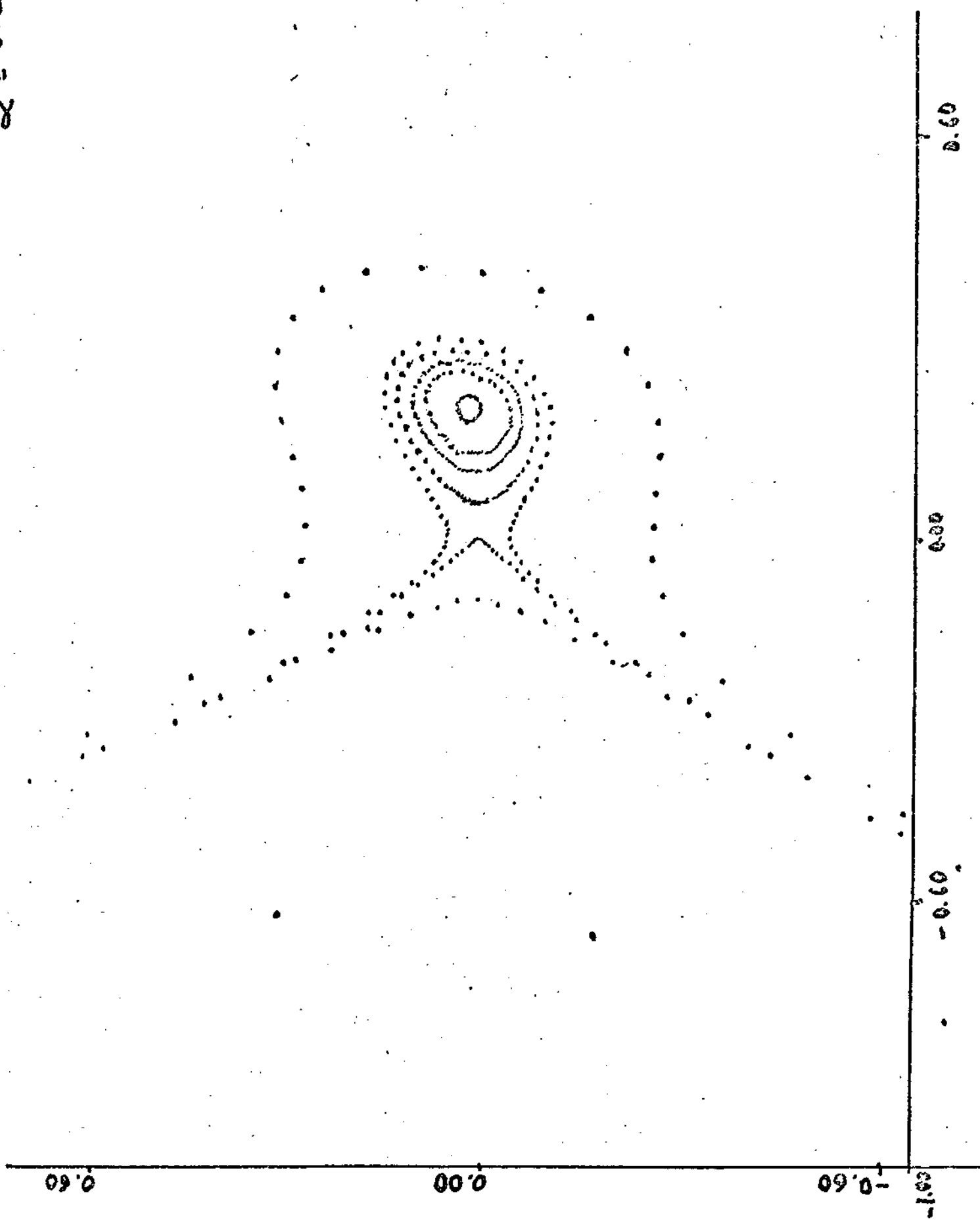


Fig. 2

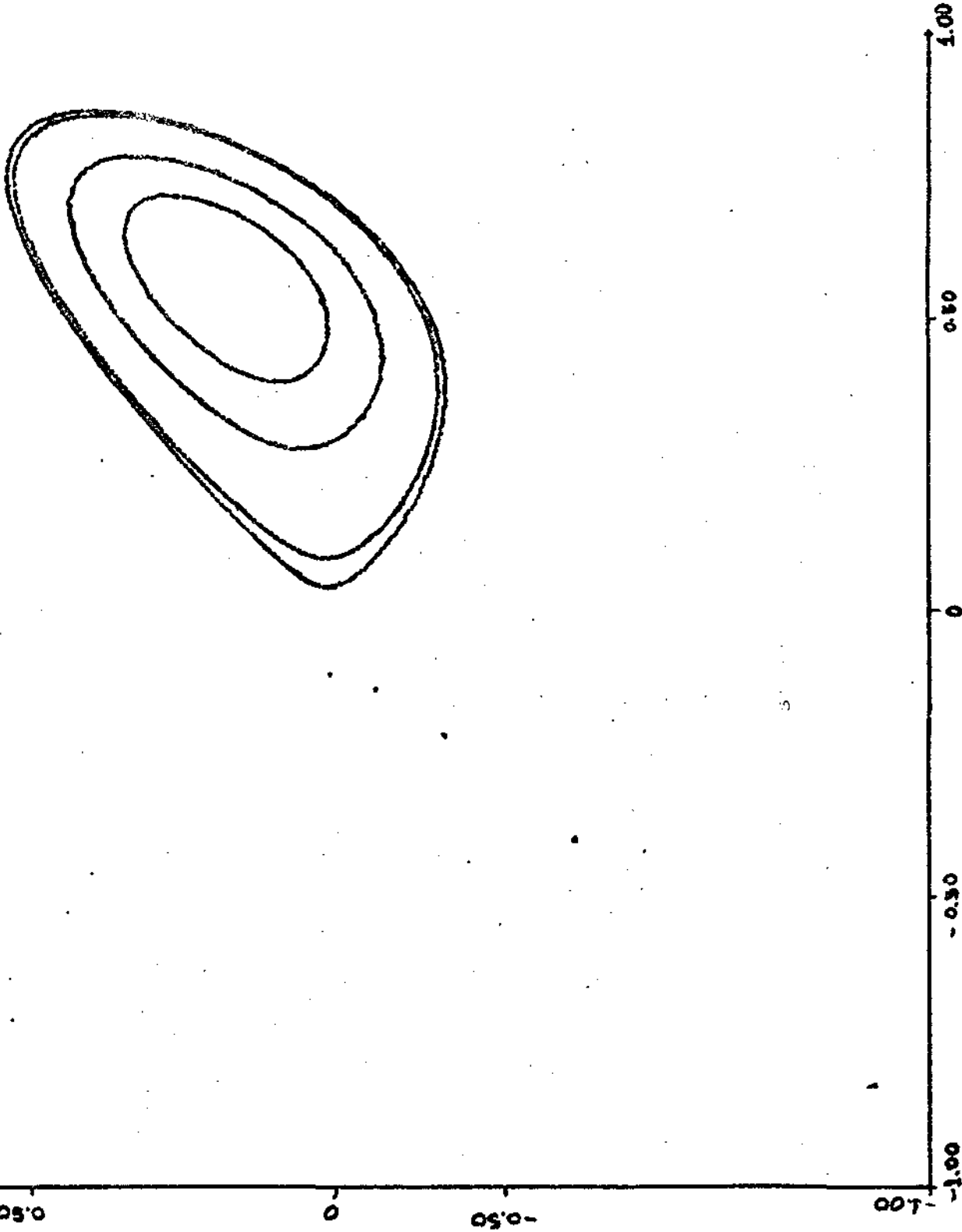


Fig. 3

valores obtidos para o ponto elíptico associado:

$$x = 2 \operatorname{tgh} \alpha/2$$

$$y = 2 \operatorname{tgh}^2 \alpha/2$$

O aparecimento de órbitas caóticas pode ocorrer em regiões circunscritas ou não. Por caos circunscrito queremos dizer quebra de curvas invariantes em cadeias de pontos fixos de ordem superior cerceado por curvas invariantes que permanecem, correspondentes aos toros não ressonantes. Já no caso do caos abertos é o ponto hiperbólico que "desmancha" as curvas invariantes (abertas e fechadas) na sua vizinhança. Confirmamos que em direção ao ponto elíptico as curvas fechadas protegem a região interior, ao passo que a região externa torna-se uma região caótica (Fig.4 e 5) em coexistência com ilhas de estabilidade.

Colocou-se então a pergunta se o caos só apareceria para determinados valores de α ou ele sempre estaria presente embora ocupando apenas pequenas regiões de um quadro regular e bem composto. Com esta pergunta em mente passamos então ao estudo das separatrizes que será tratado no próximo capítulo.

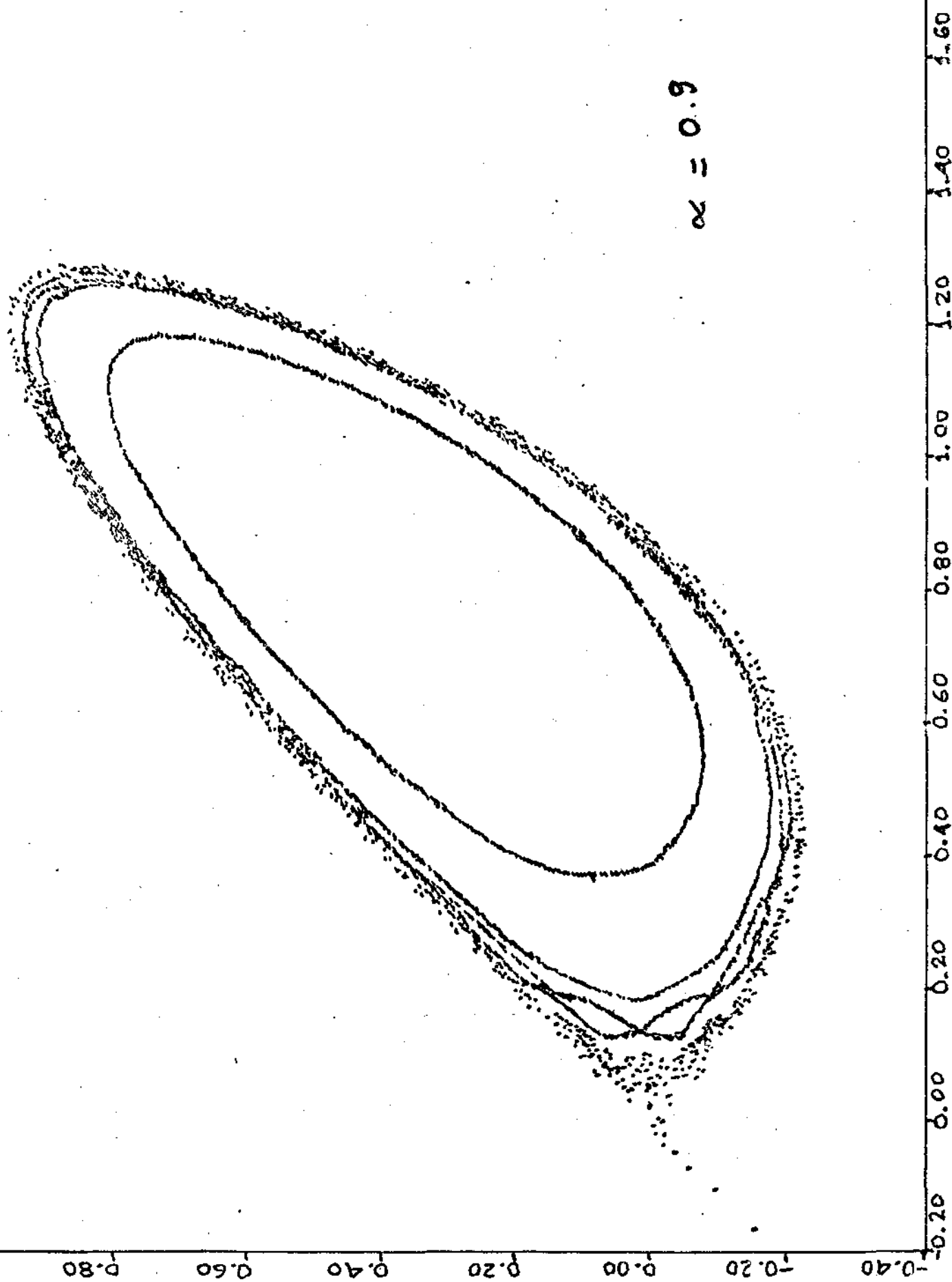


Fig. 4

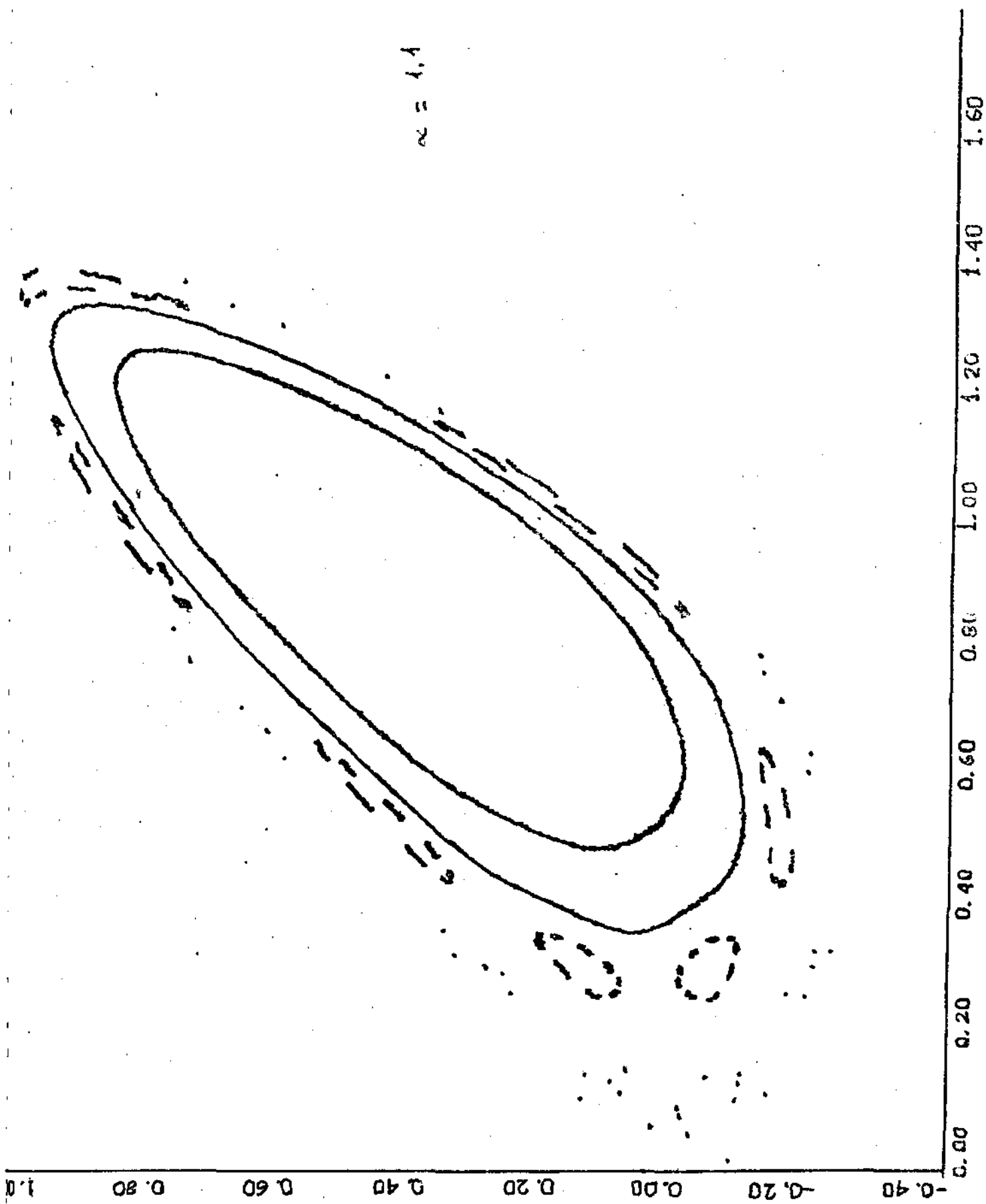


Fig. 5

CAPÍTULO IV

SEPARATRIZES - FORMA NORMAL DE BIRKHOFF

4.1 - Separatrizes e Regiões Caóticas

Pelos resultados do capítulo anterior, Figs. 1 e 2 por exemplo, podemos ver que o ponto elíptico é circundado por curvas invariantes fechadas até o limite das separatrizes. Para pequenos valores do parâmetro α , estamos ainda bem próximos do comportamento integrável, e as separatrizes são como mostra a Fig. 4.1.a onde temos apenas um ponto fixo hiperbólico; na Fig. 4.1b podemos ver um outro caso onde temos dois pontos fixos hiperbólicos associados a um ponto elíptico

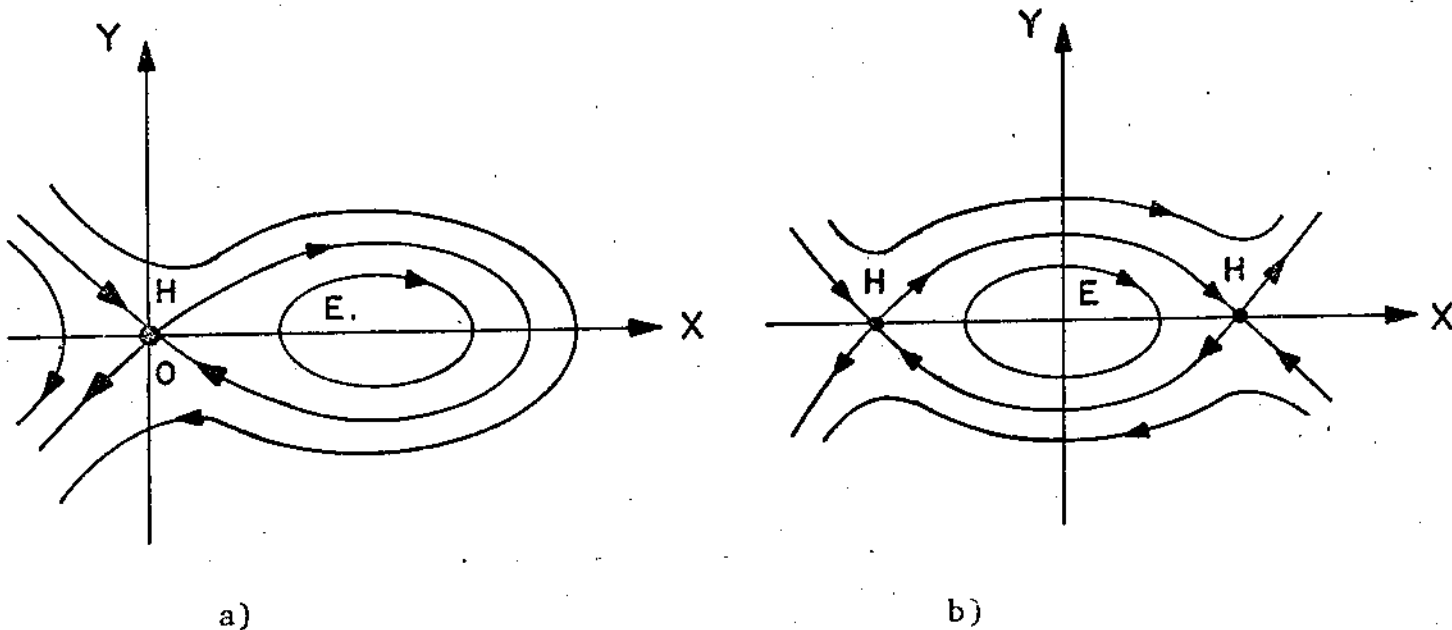


Fig. 4.1

Nos dois casos as curvas invariantes mais externas se juntam

no ponto fixo hiperbólico. Todas as curvas à esquerda do vetor velocidade ao longo destas curvas não correspondem a órbitas recorrentes. Duas destas curvas, H^+ , cujos pontos satisfazem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^k(P) \rightarrow 0 \quad (4.1)$$

onde O é o ponto hiperbólico, são chamadas curvas estáveis ao contrário das instáveis H^- onde, para um dado ponto P pertencente a H^- temos:

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} T^k(P) \rightarrow 0 \quad (4.2)$$

Isto quer dizer que dado um ponto P pertencente a H^+ (Fig. 4.2) as sucessivas iterações de P , sob T , caminham para o ponto hiperbólico. Se um ponto P pertence a H^- podemos dizer, de maneira pouco rigorosa, que P ^{chegam} ~~saem da~~ origem após infinitas iterações de T^{-1} (a aplicação inversa).

Quando um sistema é integrável estas curvas H^+ e H^- se juntam de uma forma contínua como mostrado na Fig. 4.2. Isto também pode ser observado nas figuras 1 e 2 do capítulo anterior para o caso da aplicação em estudo. Poderíamos dizer que um ponto que se inicia muito próximo ao ponto hiperbólico em H^- atinge este ponto novamente após um número infinito de iterações de T . Em geral, se o ponto hiperbólico é de ordem m ou seja um ponto fixo de T^m , ele é então membro de um conjunto de pontos hiperbólicos (com m pontos elípticos associados - as ilhas) as curvas H^+ e H^- também se juntam de maneira contínua (Fig. 4.2), i.e., não

se interceptam.

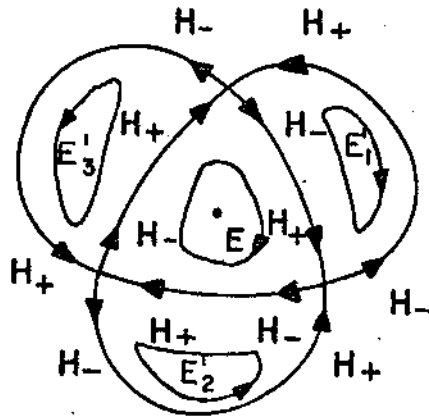


Fig. 4.2

O conjunto de curvas H^+ e H^- acima caracteriza uma órbita fechada instável, ao contrário das curvas invariantes que circundam uma órbita estável mantendo as iterações sempre na vizinhança do mesmo. Os pontos elípticos de terceira ordem podem ser imaginados como uma órbita que cruza três vezes a superfície de secção antes de se fechar e o folheamento que envolve esta órbita, os toros, podem ser visualizados como mangueiras que circundam densamente o "fio" e também cruzam três vezes a superfície.

Tudo o que foi afirmado até este ponto vale para o caso integrável. Quando se adiciona uma perturbação ao sistema, que no nosso caso corresponde ao termo quadrático da aplicação (a Hamiltoniana H_S do Capítulo III), as curvas já não se juntam de forma suave, i.e., H^+ e H^- se cruzam em um ponto que chamaremos de H_0 (Fig. 4.3a).

Este ponto é chamado de primeiro ponto homoclínico porque H^+ e H^- pertencem ao mesmo ponto hiperbólico quando há cruza-

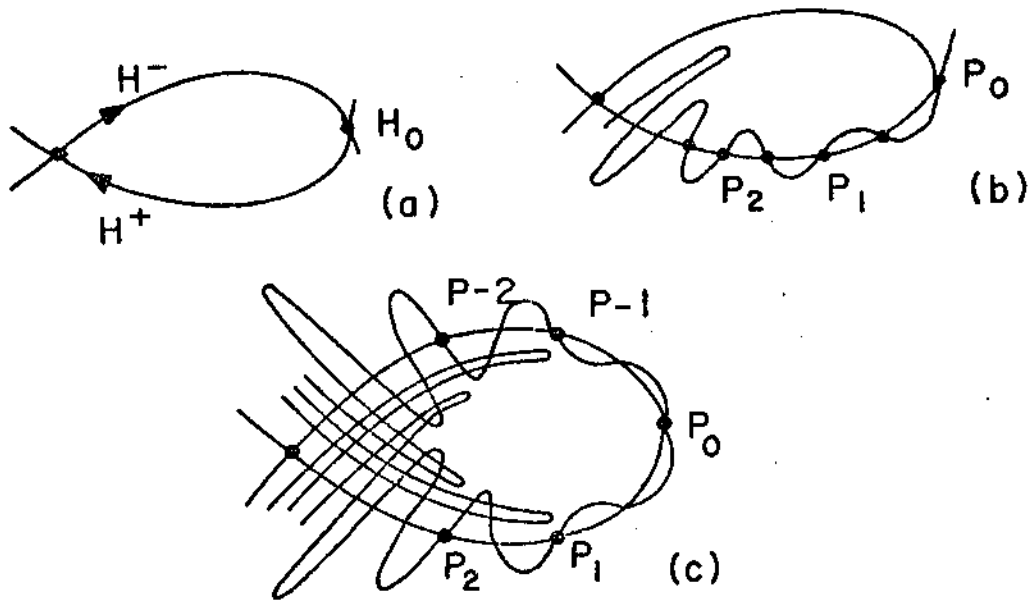


Fig. 4-3

mento dos H^+ 's e H^- 's de um ponto hiperbólico múltiplo, esta intersecção é também denominada homoclínica. No caso da intersecção de curvas H^+ e H^- oriundas de pontos hiperbólicos distintos mas de mesma ordem (Fig. 4.1b), H_0 é denominado heteroclínico. No caso da aplicação aqui tratada não aparecem estes tipos de pontos.

A existência deste ponto H_0 tem consequências interessantes e importantes. Consideremos H_0 como pertencente a H^+ então suas imagens, sob T , H_1, H_2, \dots, H_n são necessariamente pontos de H^+ e tendem ao ponto hiperbólico (Fig. 4.3b). Lembremos que H_0 pertence a H^- , o que implica que H^- volteia em redor de H^+ de tal forma a poder passar pelos pontos H_1, H_2, \dots, H_n . O mesmo é verdadeiro se considerarmos H_0 como ponto de H^- e a aplicação inversa T^{-1} . Como a aplicação preserva a área, os laços formados pela intersecção, de H^+ e H^- devem ter a mesma área de um e de outro lado de H^+ (ou H^-). Como os pontos vão ficando muito juntos à medida que tendem

ao ponto hiperbólico, para que se dê a preservação de área e estes laços vão se tornando, mais longos e mais finos, até que a preservação de área os obrigue a tangenciarem H^+ (ou H^-) uma vez que H^+ (ou H^-) não se auto interceptam. O enrolar dos laços no interior de H^+ e H^- determinam pontos homoclínicos de ordem superior, ou seja H^+ e H^- vão se cruzando sucessivamente formando uma rede altamente complexa (Fig. 4.3c).

Quanto a estudos numéricos recentes há alguns resultados devidos a Cuthill (citado por Berry),⁽⁹⁾ Contopoulos Jenkins e Bartlett,⁽¹⁰⁾ para citar alguns. Entretanto os dois primeiros autores se limitaram a estudar evoluções nas proximidades do ponto hiperbólico. Resultado semelhante, obtido com a aplicação hiperbólica é mostrado na Fig. 9. Já os dois últimos autores acima se dedicaram a um estudo mais global da superfície de Poincaré com uma aplicação cúbica.

Vizando então examinar o comportamento global das separatrizes enquanto causadoras do caos obtivemos uma série de resultados interessantes.

Ampliações de órbitas já obtidas nas proximidades do ponto hiperbólico apenas confirmavam o conhecido resultado de que nas proximidades deste ponto as curvas invariantes são ramos de hipérboles quadradas. A Fig. 6 obtida para $\alpha = 0.5$ bem ilustra este fenômeno. Dado isto, pensou-se então em examinar o aparecimento de caos a partir das assíntotas a estas hipérboles que correspondem, na aproximação linear, às separatrizes.

Portanto, isto nos permite tomar pequenos segmentos retilíneos a 45° , compostos de um número de pontos

(2000 em média) com ordem de grandeza apropriada para o valor de α em estudo. A dificuldade envolvida se relaciona com a otimização entre a necessidade de escolher pontos próximos a origem, onde a aproximação linear é satisfatória, e a de reduzir o número de iterações necessárias para conseguir "mapear" o ponto das proximidades do ponto hiperbólico para outras regiões do plano. Para valores de α muito pequenos são necessários pontos de ordem de grandeza de 10^{-10} , e o número de iterações sendo muito grande acarretam um acúmulo de erros que desviam a trajetória do ponto que estaria sobre a separatriz para órbitas estáveis. Mesmo assim com sucessivas "ampliações" foi possível chegar até $\alpha \approx 0.4$.

Estes pontos pertencentes à assíntota foram iterados com a aplicação de Henon modificada em sua forma exata. Observou-se que, por exemplo (Figs. 5.7 e 8) a "curva" desenhada pelas sucessivas iterações dos pontos iniciais voltavam à origem circunscrevendo o ponto elíptico de uma forma extremamente complexa. Esta complexidade obedece a um modelo de uma beleza e simplicidade que pode ser observado na Fig. 9, onde é mostrado o caminho seguido por uma das separatrizes apenas. Nesta figura o segmento inicial está no segundo quadrante e é levado ao primeiro, de volta às proximidades do ponto hiperbólico por sucessivas iterações de T^{-1} . Como já vimos, na discussão teórica, é o entreteçamento das duas separatrizes que produz os pontos homoclínicos e origina a figura altamente complexa. À medida que o valor de α vai diminuindo na mesma escala, a homoclinicidade vai se tornando mais e mais "estreita" até desaparecer. Os dois ramos correspondentes a H^+ e H^- voltam à origem como se fossem um ramo de hipérbole "liso" dan

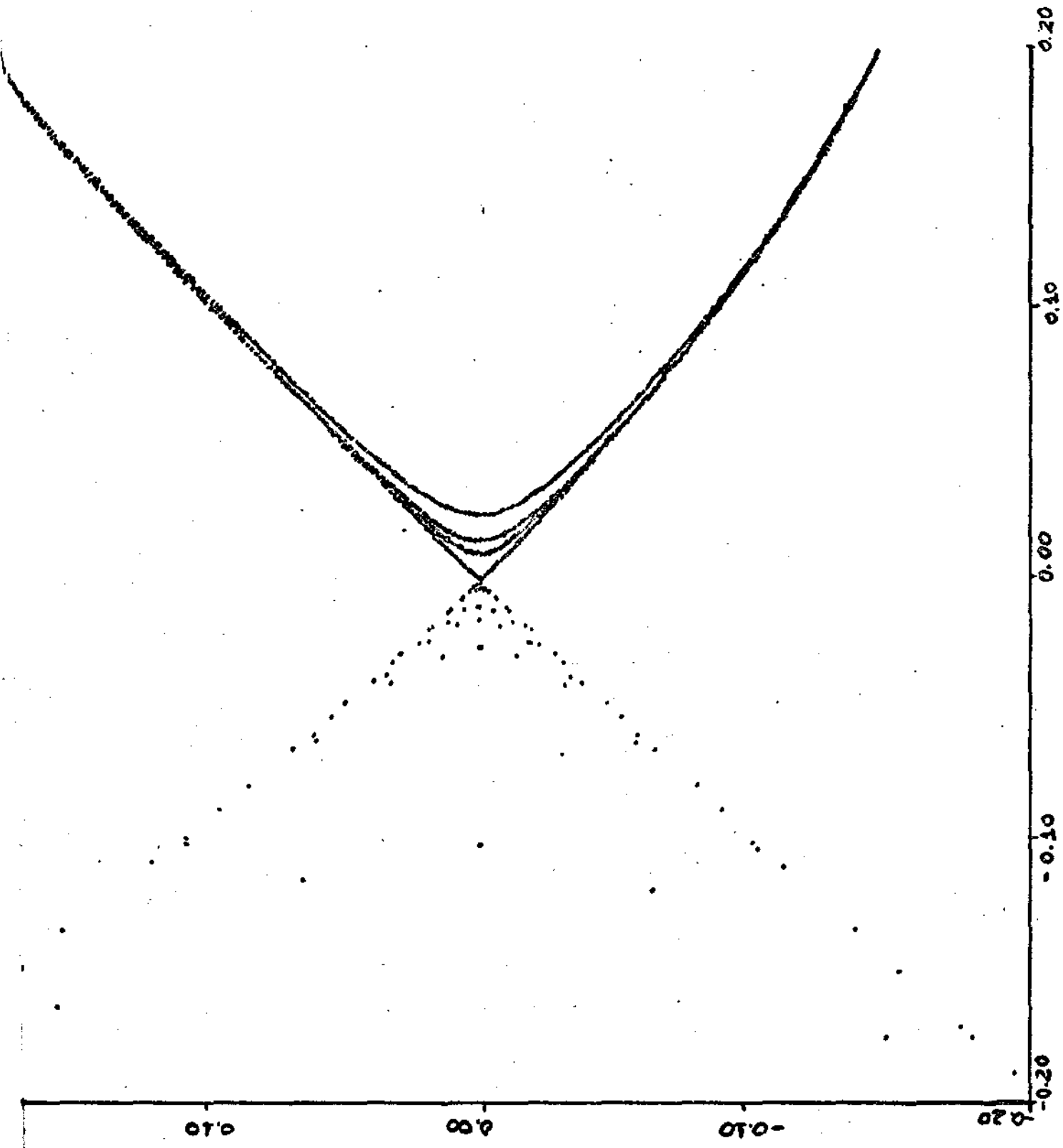


Fig. 6 - $\alpha = 0,5$

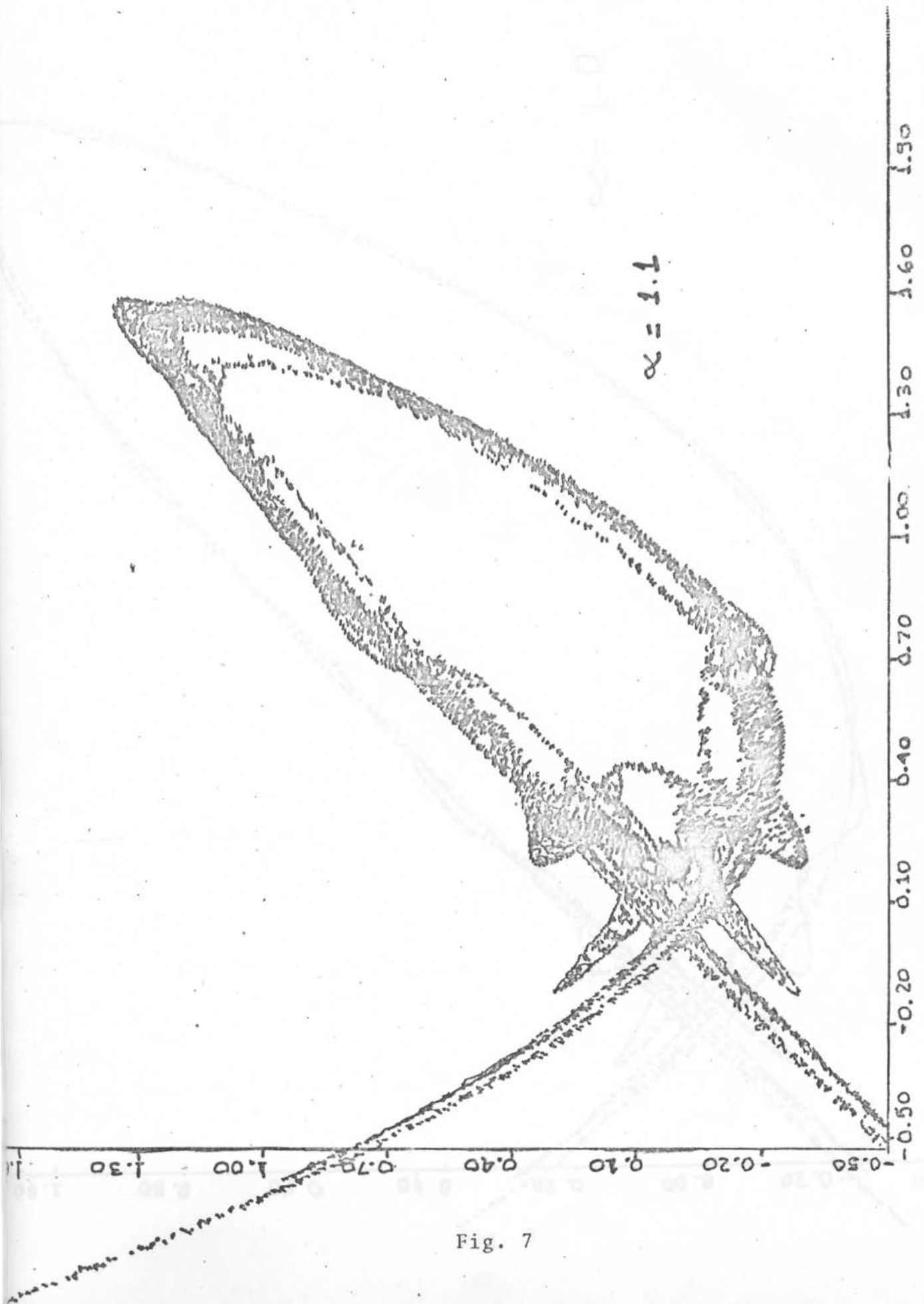


Fig. 7

$\alpha = 1.0$

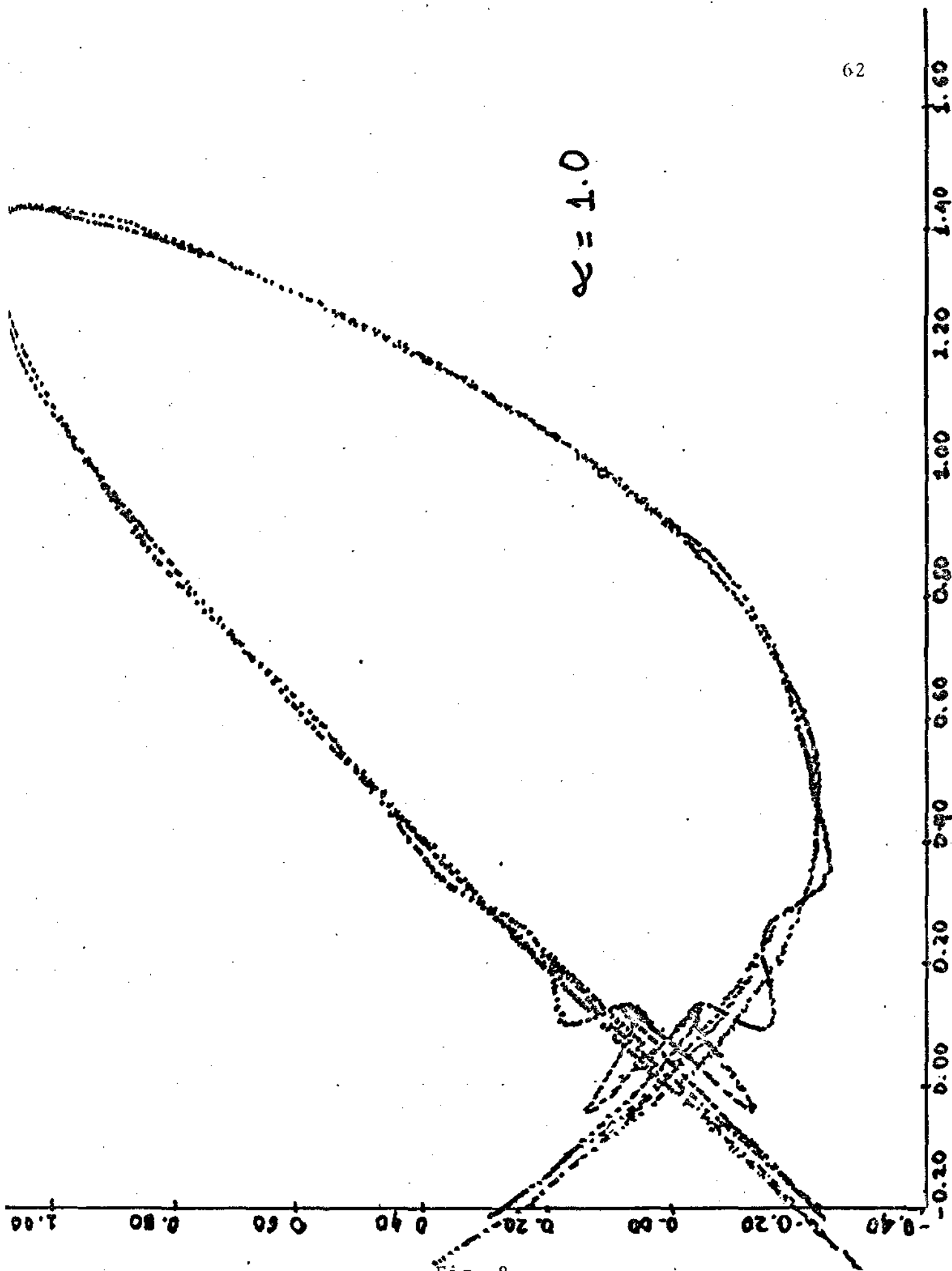


Fig. 8

~ 1.1

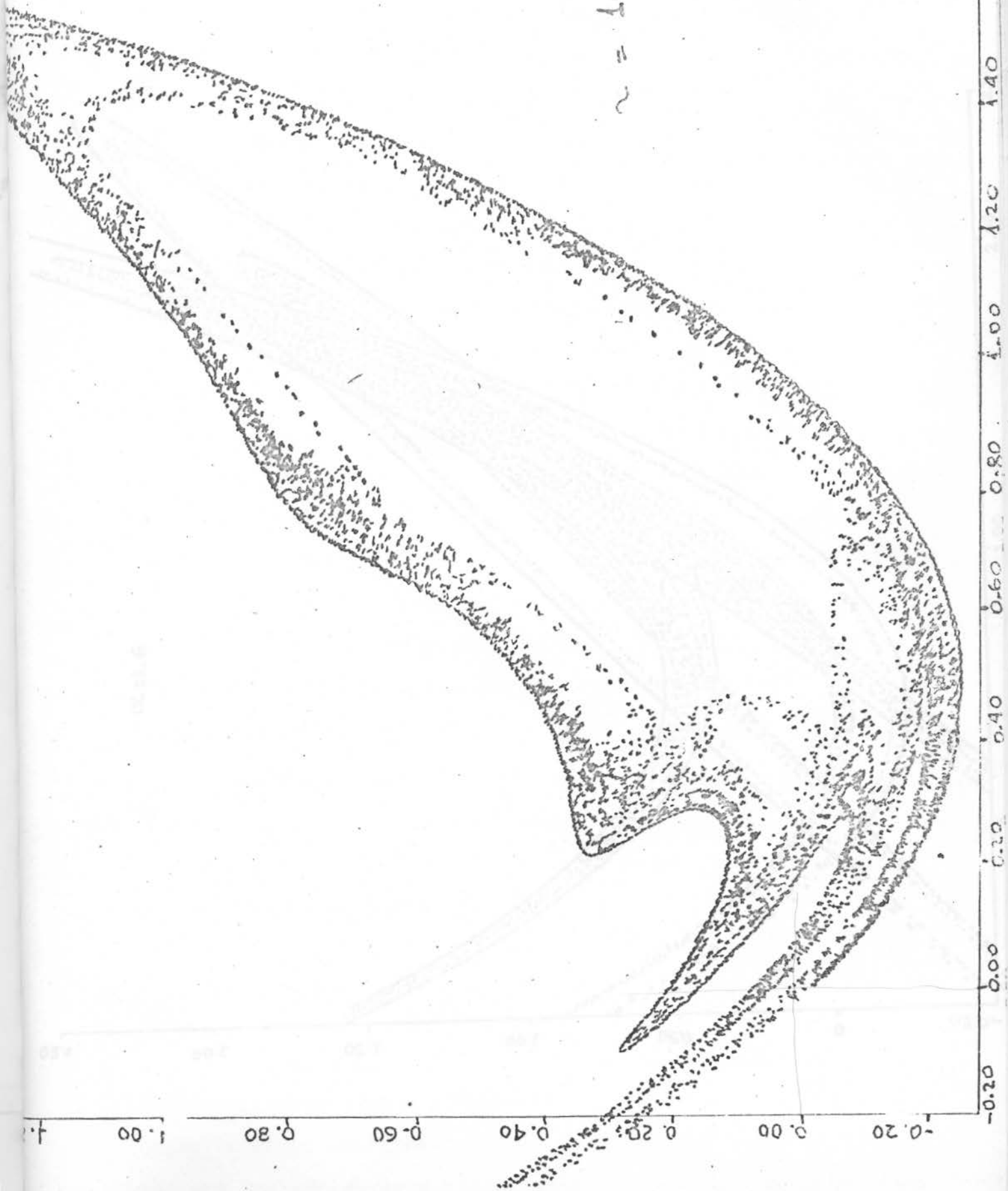


Fig. 9

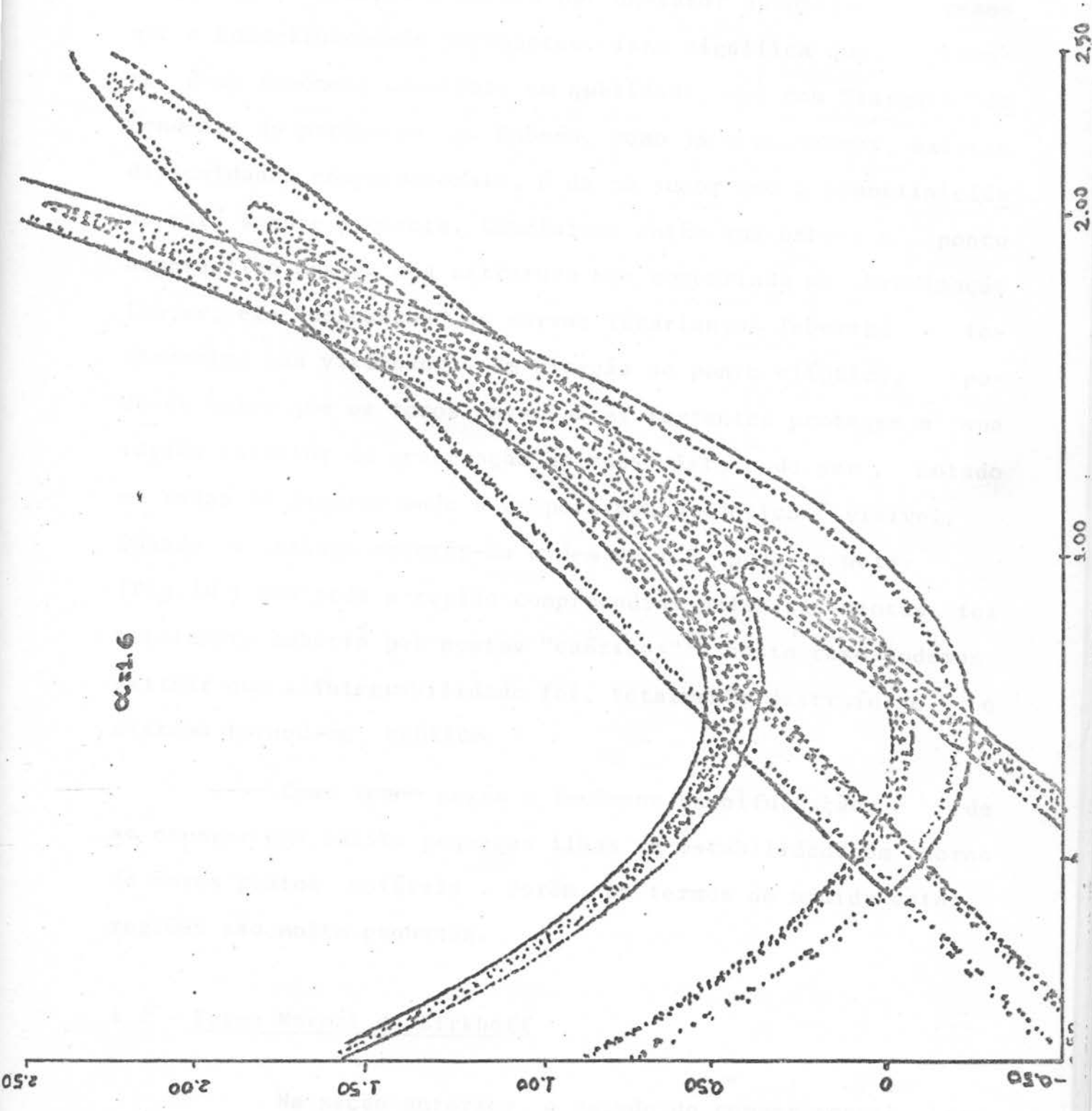


Fig. 10

do, à primeira vista, a impressão de que o "caos" desapareceu. Se porém, se diminui a escala por um fator apropriado, vemos que a homoclinicidade permaneceu. Isto significa que realmente é um fenômeno constante em qualidade, mas com "largura" dependente do parâmetro α . Embora, como já mencionamos, existam dificuldades computacionais, é de se supor que a homoclinicidade está sempre presente. Concluimos então que embora o ponto hiperbólico mantém sua estrutura bem comportada na aproximação linear, ele "desmancha" as curvas invariantes (abertas e fechadas) na sua vizinhança. Em direção ao ponto elíptico, pode-se notar que os toros invariantes restantes protegem a sua região interior da penetração do caos. Isto pode ser notado em todas as figuras onde o comportamento caótico é visível.

Quando α atinge valores da ordem de 1.7 pode-se notar (Fig. 10) que toda a região compreendida pelas assíntotas foi totalmente coberta por pontos "caóticos" e neste caso podemos afirmar que a integrabilidade foi, totalmente destruída e o sistema tornou-se caótico.

Como temos porém o fenômeno da bifurcação, é de se esperar que exista pequenas ilhas de estabilidade em torno de novos pontos estáveis. Porém, em termos de medida estas regiões são muito pequenas.

4.2 - Forma Normal de Birkhoff

Na seção anterior, o estudo do comportamento irregular oriundo dos pontos homoclínicos foi realizado com a aplicação de Hénon modificada na sua forma exata. Nesta seção faremos uso das séries de Birkhoff para testar se no caso hiperbólico elas se prestam à obtenção de boas aproximações do

comportamento das curvas invariantes.

O primeiro estudo feito com as séries divergentes de Birkhoff foram realizados por M. Henon & J. Roels⁽¹¹⁾ para a aplicação de Henon. Constatatou-se que apesar das séries serem divergentes, uma aproximação até 20^a. ordem reproduzia as curvas invariantes com uma margem de erro desprezível até determinados valores de R (distância da origem); a partir de tais valores o desvio em relação as curvas obtidas de forma exata cresce rapidamente com o valor de R. Não nos propusemos no nosso trabalho a fazer um estudo tão preciso quanto ao de Henon, mas simplesmente verificar se uma aproximação por série de Birkhoff nos mostraria a homoclinicidade das assíntotas. Antes dos cálculos para o caso em questão, faremos um ligeiro apanhado sobre as séries de Birkhoff⁽³⁾ e as suas formas normais.

Como já vimos anteriormente qualquer transformação analítica T com pontos invariantes na origem pode ser posta em forma de série:

$$\begin{aligned}x_1 &= ax + by + \dots \\y_1 &= a'x + b'y + \dots\end{aligned}\tag{4-1}$$

onde os termos que se seguem são de grau ≥ 2 .

Podemos mediante uma transformação linear de coordenadas reduzir a série (4-1) à forma:

$$\begin{aligned}X_1 &= \lambda X + \sum_{m+n=2}^{\infty} x_{mn} X^m Y^n \\Y_1 &= \lambda^{-1} Y + \sum_{m+n=2}^{\infty} y_{mn} X^m Y^n\end{aligned}\tag{4-2}$$

que é a chamada forma de Birkhoff. Exclui-se o caso onde $|a+b'| =$

= 2, o caso parabólico, que não é de interesse para este trabalho. No caso elíptico ($\lambda = e^{\pm i\alpha}$), tomando-se variáveis reais:

$$x = X + iY$$

$$X, Y \in \mathbb{R} \quad (4-3)$$

$$y = X - iY$$

temos a transformação na forma que nos é mais familiar:

$$x_1 = x \cos \alpha - y \sin \alpha + \dots$$

$$(4-4)$$

$$y_1 = x \sin \alpha + y \cos \alpha + \dots$$

No caso hiperbólico ($\lambda = e^{\pm \alpha}$) toma-se novas coordenadas sobre as assíntotas, a saber:

$$\left. \begin{array}{l} X = x + y \\ Y = x - y \end{array} \right\} \text{notação de } \frac{1}{2} \quad (4-5)$$

e também levamos à forma de Birkhoff o que chamamos a aplicação quadrática de Hénon modificada:

$$x_1 = x \cosh \alpha + y \sinh \alpha + \dots$$

$$(4-6)$$

$$y_1 = x \sinh \alpha + y \cosh \alpha + \dots$$

As funções invariantes da aproximação linear no primeiro caso são círculos ($x^2 + y^2 = \text{cte}$) e no segundo hipérbolas ($XY = \text{cte}$).

A proposta de Birkhoff é descobrir qual a mudança de coordenadas que nos permitiria manter esta forma simples de funções invariantes mesmo quando considerássemos os termos de ordem superior e não tão somente a parte linear.

De fato, Birkhoff prova que existe uma expansão formal das antigas variáveis (x, y) em termos de novas coordenadas (ξ, η) do tipo:

$$X = \xi + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k x_{k\ell} \xi^{k-\ell} \eta^{\ell} \quad (4-7)$$

$$Y = \eta + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k y_{k\ell} \xi^{k-\ell} \eta^{\ell}$$

tal que nas variáveis (ξ, η) a transformação original toma a forma:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= u\xi \\ \eta_1 &= u^{-1}\eta \end{aligned} \quad (4-8)$$

que é a forma normal de Birkhoff, onde:

$$u = \lambda \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k} (\xi\eta)^k \right] \quad (4-9)$$

Como se pode notar, a aplicação (4-8) é formalmente mais simples do que (4-2) e as curvas invariantes sob a transformação T são:

$$\xi_1 \eta_1 = \xi \eta = \text{cte}$$

Vemos que neste caso a aplicação se reduz a rotações sobre os ramos das várias hipérboles de um ângulo hiperbólico u dependente do produto $\xi\eta$ que define a hipérbole onde se dá a rotação. Se $\xi=0$ ou $\eta=0$ estamos sobre as assíntotas.

Para se obter curvas invariantes no plano "real" (X, Y) ou (x, y) , conforme usemos coordenadas sobre as assíntotas ou não, partimos de hipérboles invariantes no plano (ξ, η)

e via a mesma sequência de transformações (inversas) chegamos às curvas invariantes desejadas.

No caso de nossa transformação hiperbólica partimos de

$$\begin{aligned}x_1 &= x \cosh \alpha + y \sinh \alpha - x^2 \sinh \alpha \\y_1 &= x \sinh \alpha + y \cosh \alpha - x^2 \cosh \alpha\end{aligned}\tag{4-10}$$

e fazendo-se uso da transformação linear (4-5), obtemos:

$$\begin{aligned}X_1 &= \lambda X - \frac{\lambda}{2} (X + Y)^2 \\Y_1 &= \lambda^{-1} Y - \frac{\lambda}{2} (X + Y)^2\end{aligned}\tag{4-11}$$

Teremos agora que calcular os coeficientes $x_{k\ell}$, $y_{k\ell}$ e u_{2k} da transformação não linear (4-7) de tal forma, que (4-11) se reduza a (4-8) nas novas variáveis (ξ, η) .

Isto foi feito por aproximações sucessivas. Convém notar que próximo à origem o truncamento de série (4-8) é uma aproximação válida. Então nas proximidades da origem

$$\left(\eta_1 = \frac{\eta}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\lambda} \sum_{\kappa=1}^{\infty} u_{2\kappa} (\xi\eta)^\kappa \right) \right)$$

Expandindo-se o parênteses da última expressão em série de Taylor temos:

$$\eta_1 = \frac{\eta}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\lambda} \sum_{\kappa=1}^{\infty} u_{2\kappa} (\xi\eta)^\kappa + \frac{1}{\lambda^2} \left(\sum_{\kappa=1}^{\infty} u_{2\kappa} (\xi\eta)^\kappa \right)^2 + \dots \right)$$

E podemos escrever:

$$\eta_1 = \left(\frac{1}{\lambda} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} v_{2\kappa} (\xi\eta)^\kappa \right) \eta$$

onde:

$$v_{2\kappa} = (-1)^\kappa \left(\frac{u_{2\kappa}}{\lambda} \right)^\kappa$$

Para $\kappa = 1$, primeira aproximação, temos:

$$X^{(1)} = \xi$$

$$Y^{(1)} = \eta$$

Substituindo-se X e Y em primeira aproximação em (4-11) temos:

$$X_1^{(1)} = \lambda\xi - (\xi + \eta)^2 \lambda/2 = \xi_1$$

$$Y_1^{(1)} = \lambda^{-1}\eta + (\xi + \eta)^2 \lambda/2 = \eta_1$$

ignorando-se termos de segunda ordem em ξ e η obtemos:

$$X_1^{(1)} = \xi_1 = \lambda\xi$$

$$Y_1^{(1)} = \eta_1 = \lambda^{-1}\eta$$

Isto quer dizer que a parte linear já estava correta. O próximo passo seria $\kappa = 2$, usando-se $X^{(2)}$ e $Y^{(2)}$ calculados até 2^a ordem na aplicação (11) e usando-se $u = \lambda + u_2\xi\eta$ e $v = \lambda^{-1}v_2\xi\eta$ mas, com este procedimento obteríamos termos de 3^a ordem para $X_1^{(2)}$ e $Y_1^{(2)}$. Temos, portanto, que examinar a 2^a e 3^a em conjunto. Para tanto temos que examinar $\kappa = 3$.

Partindo de:

$$\begin{aligned} X_1^{(3)} &= \xi_1 + \sum_{\ell=0}^2 x_{2\ell} \xi_1^{2-\ell} \eta^\ell + \sum_{\ell=0}^3 x_{3\ell} \xi_1^{3-\ell} \eta^\ell = \\ &= (\lambda + u_2\xi\eta)\xi + \sum_{\ell=0}^2 x_{2\ell} \lambda^{2-2\ell} \eta^\ell + \sum_{\ell=0}^3 x_{3\ell} \lambda^{3-2\ell} \xi^{3-\ell} \eta^\ell = \end{aligned}$$

$$= \lambda \xi + \sum_{\ell=0}^2 \lambda x_{2\ell} \xi^{2-\ell} \eta^\ell + \sum_{\ell=0}^3 \lambda x_{3\ell} \xi^{3-\ell} \eta^\ell -$$

$$- \frac{\lambda}{2} \left[\xi + \sum_{\ell=0}^2 x_{2\ell} \xi^{2-\ell} \eta^\ell + \eta + \sum_{\ell=0}^2 \lambda_{2\ell} \xi^{2-\ell} \eta^\ell \right]^2$$

Desenvolvendo-se o quadrado do lado direito da expressão, agrupando-se em potências da mesma ordem temos os seguintes valores para os coeficientes, após comparação termo a termo:

$$x_{20} = \frac{1}{2(1-\lambda)} \quad x_{30} = + \frac{(x_{20} + y_{20})}{(1-\lambda^2)}$$

$$x_{21} = \frac{\lambda}{\lambda-1} \quad x_{31} \text{ indeterminado} \quad (4.12)$$

$$x_{22} = \frac{\lambda^3}{2(\lambda^3-1)} \quad x_{32} = \frac{\lambda^2 (x_{22} + \lambda_{22} + x_{21} + \lambda_{21})}{(1-\lambda^2)}$$

$$x_{33} = \frac{\lambda^3 (x_{22} + y_{22})}{(\lambda^4-1)}$$

com

$$u_2 = -\lambda(x_{21} + y_{21} + x_{20} + y_{20})$$

Fazendo-se cálculo inteiramente análogo para a coordenada y até 3^a ordem obtemos:

$$y_{20} = \frac{1}{2(\lambda^3-1)} \quad y_{30} = \frac{(x_{20} + y_{20})}{(\lambda^4-1)}$$

$$y_{21} = \frac{1}{(\lambda - 1)}$$

$$y_{31} = \frac{(x_{21} + y_{21} + x_{20} + y_{20})}{(\lambda^2 - 1)}$$

$$y_{22} = \frac{\lambda}{2(1 - \lambda)}$$

$$x_{32} = \frac{\lambda^2 (x_{22} + y_{22} + x_{21} + y_{21})}{(1 - \lambda^2)}$$

(4-13)

$$y_{33} = \frac{\lambda^2 (x_{22} + y_{22})}{(1 - \lambda^2)}$$

com:

$$v_2 = \lambda^{-1} (x_{22} + y_{22} + x_{21} + y_{21})$$

A compatibilidade entre os valores obtidos para u_2 e v_2 foi verificada através da expressão:

$$v_{2\kappa} = (-1)^\kappa \left(\frac{u_{2\kappa}}{\lambda} \right)^\kappa$$

Pode-se levar este cálculo sucessivamente até a ordem desejada. Trata-se porém de cálculo algébrico simples mas laborioso na proporção direta da ordem desejada. Nossa intenção porém não era um cálculo altamente preciso mas, apenas um estudo qualitativo da viabilidade do emprego das séries normais de Birkhoff para o caso hiperbólico. Caso a aproximação acima se revelasse insuficiente para algo conclusivo teríamos então aumentado a ordem onde a série é truncada. Certamente, quanto maior for a ordem da aproximação usada mais nos aproximariamos da realidade, isto é, possivelmente obteríamos um maior número de pontos homoclínicos, ou seja, interseções das

assíntotas.

A expressão formal (4-7) adquire com os coeficientes acima a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} X &= \xi + x_{20}\xi^2 + x_{21}\xi\eta + x_{22}\eta^2 + x_{30}\xi^3 + x_{31}\xi\eta + x_{32}\xi\eta^2 + x_{33}\eta^3 \\ Y &= \eta + y_{20}\xi^2 + y_{21}\xi\eta + y_{22}\eta^2 + y_{30}\xi^3 + x_{31}\xi^2\eta + y_{32}\xi\eta^2 + y_{33}\eta^3 \end{aligned}$$

(4-14)

e nas coordenadas (ξ, η) a aplicação T toma a forma:

$$\xi_1 = \lambda\xi - \lambda(x_{21} + y_{21} + x_{20} + y_{20})\xi^2\eta$$

(4-15)

$$\eta_1 = \lambda^{-1}\eta + \lambda^{-1}(x_{22} + y_{22} + x_{21} + y_{21})\xi\eta^2$$

Finalmente usando-se o inverso da transformação (4-5) obtemos a equação paramétrica para as coordenadas "reais" (x, y) em termos dos (ξ, η) :

$$\begin{aligned} x &= (\xi + \eta) + \xi^2(x_{20} + y_{20}) + \xi\eta(x_{21} + y_{21}) + \eta^2(x_{22} + y_{22}) + \xi^3(x_{30} + y_{30}) + \\ &+ \xi^2\eta(x_{31} + y_{31}) + \xi\eta^2(x_{32} + y_{32}) + \eta^3(x_{33} + y_{33}) \end{aligned}$$

(4.16)

$$\begin{aligned} y &= (\xi - \eta) + \xi^2(x_{20} - y_{20}) + \xi\eta(x_{21} - y_{21}) + \eta^2(x_{22} - y_{22}) + \\ &+ \xi^3(x_{30} - y_{30}) + \xi^2\eta(x_{31} - y_{31}) + \xi\eta^2(x_{32} - y_{32}) + \eta^3(x_{33} - y_{33}) \end{aligned}$$

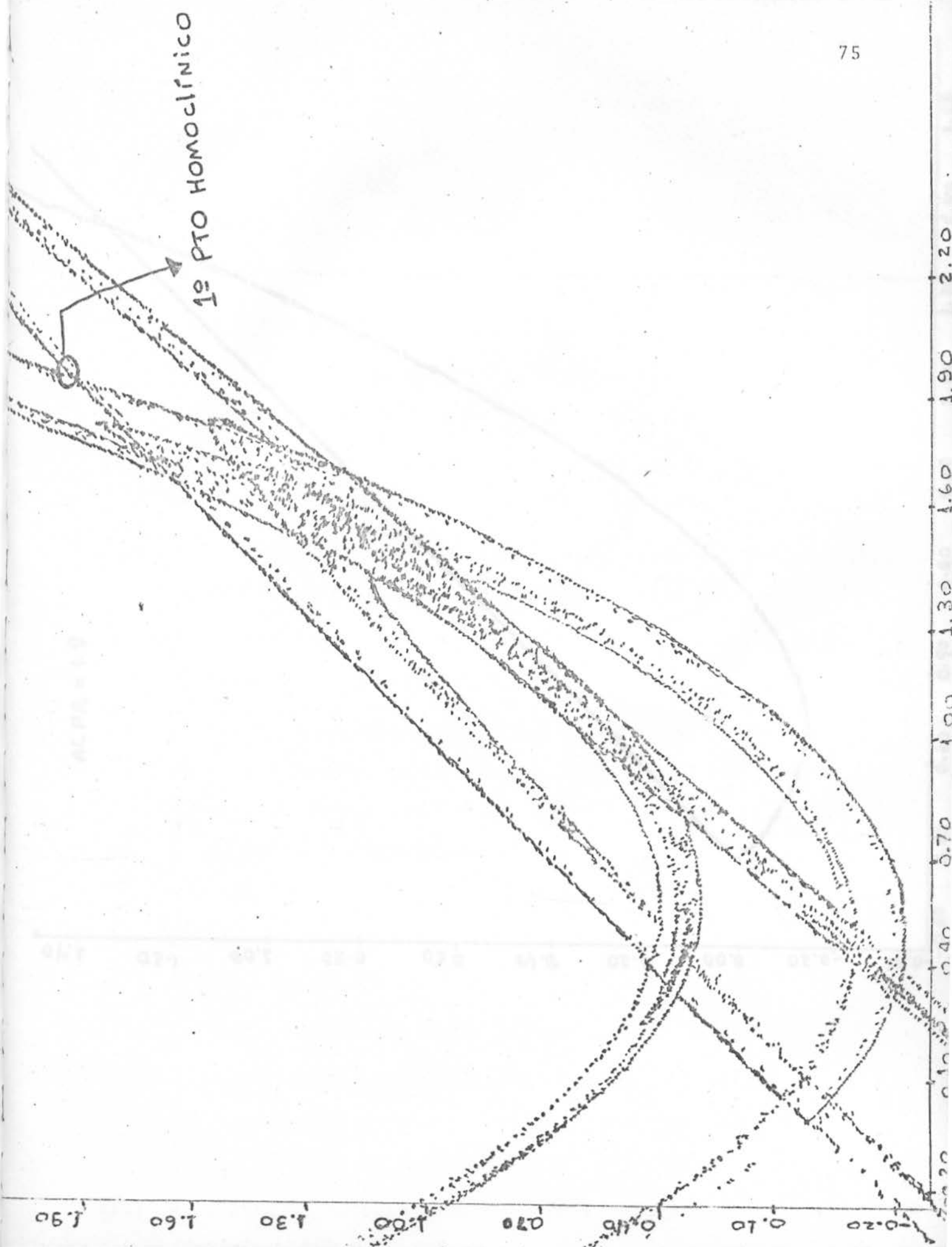
como x_{31} e y_{32} são indeterminados, tomaremos para simplificar

$$x_{31} = y_{32} = 0.$$

Na forma normal (4-15) a transformação T descreve curvas abertas (hipérboles) no plano (ξ, η) . Se estamos interessados em estudar as assíntotas, tomamos então o eixo $\xi = 0$ e $\eta = 0$ respectivamente, e fazendo-se uso da expressão (4-16) obtemos a tradução para o plano "real" (x, y) apenas fazendo ξ e η nulos conforme a assíntota em estudo. Como a transformação de coordenadas usadas, para se passar de um a outro é não linear, estes eixos $\xi = 0$ e $\eta = 0$ nos darão aproximações das assíntotas estudadas na seção anterior, isto é os eixos $\xi = 0$ e $\eta = 0$ devem se dobrar dando-nos pelo menos um ponto homoclínico. A computação numérica envolvida não é muito elaborada. Basta-se tomar uma rede de valores para $\xi(\eta=0)$ e $\eta(\xi=0)$ e através da expressão (4-16) obter os valores que serão, via subrotina gráfica, "desenhados" no plano (x, y) . O número de pontos e o passo entre eles foi adequado a cada valor do parâmetro α .

Como podemos ver nos gráficos aparece um ponto homoclínico, ou seja, o cruzamento das assíntotas. (Figs. 11 e 12).

O truncamento da série na 3^a ordem nos dá um polinômio de 3^o grau e com este polinômio não seria de se esperar que obtivéssemos mais de um ponto homoclínico.

Fig. 11 - $\alpha = 1.8$

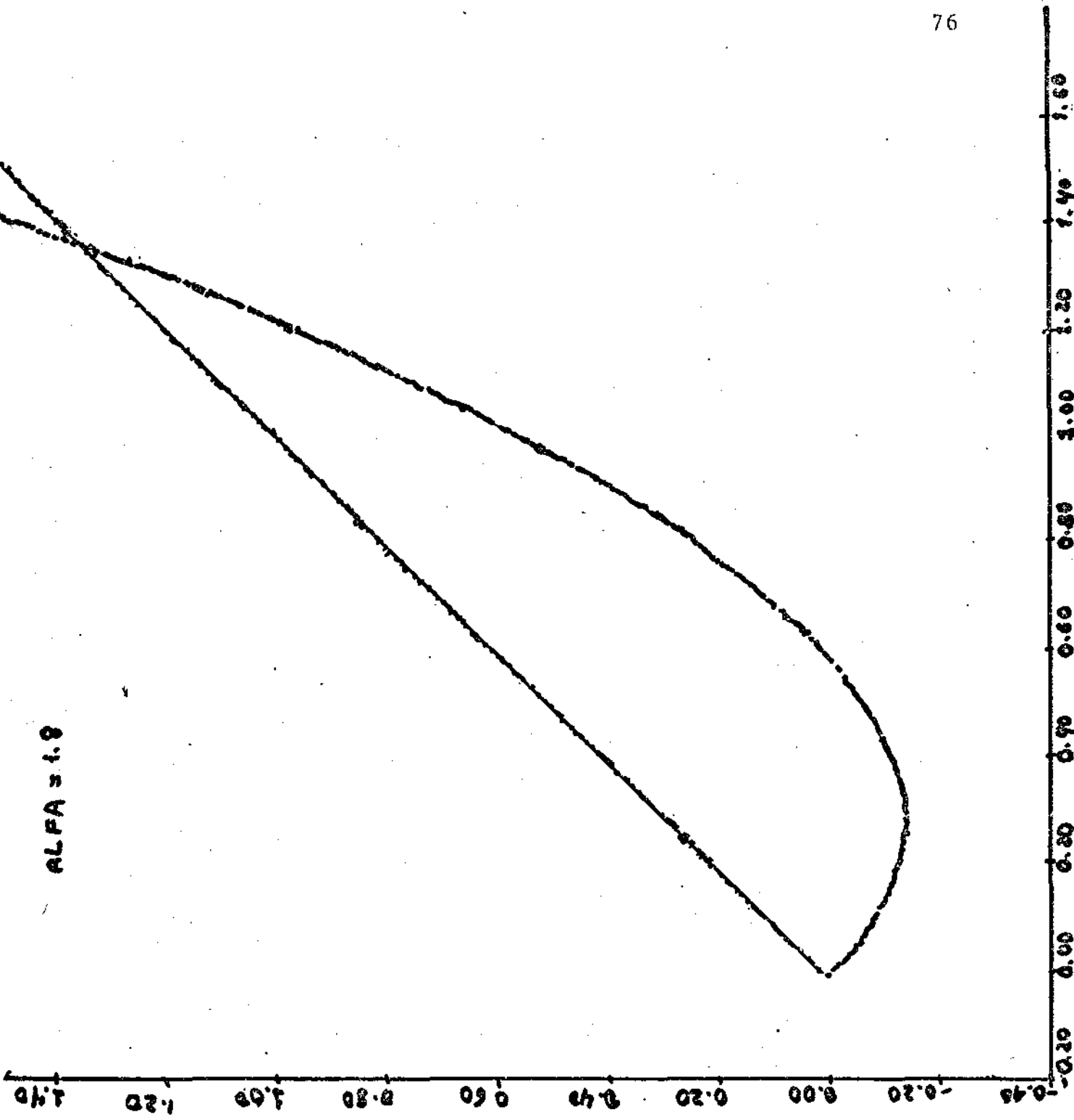


Fig. 12 - $\alpha = 1.8$

REFERÊNCIAS

- (1) M. Henon e C. Heiles, *Astron. J.* 69, 73 (1963).
- (2) M. Henon, *Quarterly of Applied Math.* 27, 291 (1969).
- (3) G.D. Birkhoff, *Acta Math.* 43, 1 (1920).
- (4) W. Engel, Ein Satz Über Ganze Cremona-Transformationen der Ebene, *Math. Ann.* 130, 11-19 (1955).
- (5) W. Engel, Ganze Cremona-Transformationen von Primzahlgrad in der Ebene, *Math. Ann.* 136, 319-325 (1958).
- (6) T.C. Bountis, Period Doubling Bifurcations and Universality in Conservative Systems, *Physica 3D* (1981) 577-589.
- (7) M. J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* 19, (1978) 25; também *J. Stat. Phys.* 21, (1979) 6.
- (8) M. Henon, Numerical Exploration of Hamiltonian Systems, Chaotic Behaviour of Deterministic Systems, Les Houches, (1981), North Holland (1983).
- (9) M. V. Berry, Topics in Non-Linear Mechanics, S. Jorna, ed. (*Am. Inst. Phys. Proc.* 46, (1978) 16.
- (10) Jenkins, B.Z. e J. H. Bartlett (1972) *Celestial Mechanics* 5, 407.
- (11) J. Roels e M. Henon, *Bull. Astron.* 2, 267 (1967).
- (12) J. Moser, On the integrability of area-preserving Cremona mappings near an elliptic fixed point, *Bol. Soc. Mexicana*, 176-180 (1960).
- (13) W.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer, New York, 1978).

- (14) J. M. Greene, J. Math. Phys. 20, 1183 (1979).
- (15) J. M. Greene et al., Universal Behaviour in Families of Area-Preserving Maps, Physica 3D (1981) 468 - 486.
- (16) B. V. Chirikov, Physics Reports 52, 265 (1979).