Henrique Costa dos Reis

Estimativas para n-Larguras de Classes de Sobolev sobre a Esfera

CAMPINAS
2014

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

HENRIQUE COSTA DOS REIS

ESTIMATIVAS PARA n-LARGURAS DE CLASSES DE SOBOLEV SOBRE A ESFERA

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador: Sergio Antonio Tozoni

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO HENRIQUE COSTA DOS REIS, E ORIENTADA PELO PROF. DR. SERGIO ANTONIO TOZONI.

Assinatura do Orientador

CAMPINAS
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

R277e Reis, Henrique Costa dos, 1988-
Estimativas para n-larguras de classes de Sobolev sobre a esfera / Henrique Costa dos Reis. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Sergio Antonio Tozoni.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. N-Larguras. I. Tozoni, Sergio Antonio,1953-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Estimates for n-widths of Sobolev classes on the sphere
Palavras-chave em inglês:
N-Widths
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Sergio Antonio Tozoni [Orientador]
Benjamin Bordin
Márcia Sayuri Kashimoto
Data de defesa: 16-05-2014
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 16 de maio de 2014 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). SERGIO ANTONIO TOZONI

Prof.(a). Dr(a). BENJAMIN BORDIN

Marcia Sayuri Kashimoto

Prof.(a). Dr(a). MÁRCIA SAYURI KASHIMOTO

Abstract

The main purpose of this work is to study upper and lower bounds for n-widths of Sobolev classes on the d-dimensional real unit sphere. In the first chapter, it is studied some basic results about L^p spaces. In the second chapter, it is studied some functions defined on the d-dimensional real sphere such as spherical harmonics and zonal harmonics and also it is studied estimates for Levy means of some special norms defined on the n-dimensional Euclidean space. The third chapter is the last and the most important. In this chapter, it is studied upper and lower bounds for Kolmogorov n-widths of Sobolev classes of functions defined on the sphere. Many of these estimates are asymptotically sharp in the sense of order.

Keywords: n-Widths, approximation, Sobolev classes.

Resumo

Essa dissertação tem como objetivo principal estudar estimativas superiores e inferiores de n-larguras de classes de Sobolev sobre a esfera unitária d-dimensional real. No primeiro capítulo, é realizado um estudo de alguns resultados básicos sobre os espaços L^p. No segundo capítulo, é realizado um estudo sobre algumas funções definidas na esfera d-dimensional real tais como os harmônicos esféricos e os harmônicos zonais e também são estudadas estimativas para médias de Levy de algumas normas especiais definidas no espaço euclidiano n-dimensional. O terceiro capítulo é o último e mais importante. Nele são estudadas estimativas superiores e inferiores para n-larguras de Kolmogorov das classes de Sobolev de funções definidas na esfera. Várias dessas estimativas são assintoticamente exatas em termos de ordem.

Palavras-chave: n-larguras, aproximação, classes de Sobolev.

Sumário

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha mãe Sandra, meu irmão Herbert e minha futura esposa Evelyn pelo grande incentivo que me deram para suportar as dificuldades proporcionadas pelos longos dois anos de curso. Agradeço também aos professores da Universidade de Brasília Celius Magalhães, Arthur Vicentini e Mauro Rabelo pela ajuda na minha formação acadêmica e por terem contribuído com meu ingresso no mestrado. Meus sinceros agradecimentos ao meu orientador Sergio Tozoni pela maneira paciente e brilhante de orientar e trabalhar. Por fim, agradeço à CNPq pelo apoio financeiro.

Lista de Símbolos

$(\cdot,\cdot)$: ver Teorema 1.2.3, página 5

$\asymp$: ver página 11

e : Definição 2.3.6 , página 16

S^d : esfera unitária de $\mathbb{R}^{d+1}$, página 13

$|||v|||$: norma euclidiana de v, página 13

$SO(d)$: ver Notação 2.1.11, página 13

$\langle\cdot,\cdot\rangle$: Produto interno euclidiano, página 13

μ : medida de Lesbegue normalizada em S^d, página 13

$\mathcal{H}_k$: espaço dos harmônicos esféricos de grau k, página 14

d_k : dimensão de $\mathcal{H}_k$, página 14

$Z_x^{(k)}$: harmônico zonal de pólo x e grau k, página 15

$\tilde{Z}^{(k)}$: ver Definição 2.3.7, página 16

$f * g$: produto de convolução entre f e g, página 16

$\mathcal{T}_N$: ver Teorema 2.3.13, página 17

S_n^δ : soma de Cesàro, página 17

C_m^δ : coeficiente da soma de Cesàro, página 17

$\|v\|_{(p)}$: ver Observação 2.4.3 página 18

$M(\|\cdot\|)$: média de Levy da norma $\|\cdot\|$, página 18

$\mathcal{T}_{N_0,N_1}$: ver página 18

$B^n_{(p)}$: ver Observação 2.4.3, página 18

B_p^n : ver Observação 2.4.3, página 18

$\lfloor x \rfloor$: parte inteira de x, página 26

a^+ : espaço de Sobolev, página 26

$d_n(A, X)$: ver Definição 3.1.5, página 27

$d^n(A, X)$: ver Definição 3.1.6, página 27

B_X : ver Notação 3.1.8, página 28

$L(X, Y)$: espaço dos operadores contínuos $T : X \to Y$, página 28

$K(X, Y)$: ver Notação 3.1.10, página 28

$\|\cdot\|^*$: ver Observação 3.1.12, página 28

U_p : ver Notação 3.1.8, página 28

$d_n(T)$: ver Definição 3.1.13, página 28

$d^n(T)$: ver Definição 3.1.13, página 28

$\Lambda(f)$: ver Definição 3.2.1, página 29

T^* : operador adjunto de T, página 29

$W_p^\gamma(S^d)$: classe de Sobolev, página 30

$\overline{W}_p^\gamma$: espaço de Sobolev, página 30

$\left(S_N^\delta\right)^{(k)}$: ver página 44

$\Lambda^\gamma(f)$: ver Observação 3.2.3, página 30

$\|\cdot\|^\circ$: ver Definição 3.2.6, página 30

$L^p \cap V$: ver página 34

Introdução

A teoria de n-larguras foi introduzida na década de 1930 pelo matemático russo Andrey Nikolo-evich Kolmogorov. Entre 1930 e 1960, além do artigo de Kolgomorov, somente outros dois artigos de autoria de Rudin e Stechkin foram publicados nesta área. Nesses artigos, foram estudadas as n-larguras de Kolmogorov $d_n(W_p^r, L^q)$ das classes de Sobolev W_p^r de funções definidas sobre o círculo unitário S^1, nos espaços $L^q(S^1)$. Após 1960, ocorreu um aumento significativo de interesse na área, com a participação de importantes matemáticos tais como Chui, Micchelli, Pinkus, Dyn, Tikhomirov, De Vore, Triebel, Wozniakowski, Traub, Kashin, dentre outros.

O primeiro resultado sobre estimativas para n-larguras de classes de Sobolev sobre o círculo está contido no artigo de Kolmogorov [9] de 1936, onde ele demonstra que $d_n(W_2^r, L^2) \asymp n^{-r}$. Mais tarde, em 1952, Rudin demonstra em [21] o que parece ter sido o primeiro resultado assintótico para $d_n(W_p^r, L^q)$, com $p < q$, tendo sido este generalizado dois anos mais tarde por Stechkin em [24]. Em seguida, estimativas para n-larguras de classes de Sobolev foram demonstradas para vários outros casos por diversos matemáticos, dos quais destacamos Gluskin, Ismagilov, Maiorov, Makovoz e Scholz, em [5], [6], [15], [16] e [22]. Em 1977, Kashin completa o quadro de estimativas para as n-larguras de Kolmogorov das classes de Sobolev em $L^q(S^1)$ com os artigos [7] e [8]. Diversas técnicas foram empregadas nestes diferentes casos, das quais podemos destacar a técnica de discretização, devida a Maiorov e o Teorema de Borsuk.

O objetivo principal deste trabalho é realizar um estudo sobre n-larguras de classes de Sobolev de funções definidas na esfera S^d, nos espaços $L^q(S^d)$, o que será feito no Capítulo 3. Esses resultados foram demonstrados por Kushpel em [13], mas para o estudo das estimativas superiores, fazemos uso de outras técnicas que utilizam médias de Levy, desenvolvidas para o estudo de n-larguras de classes de funções suaves sobre espaços homogêneos em [11]. Estudos sobre n-larguras de classes de funções suaves sobre a esfera unitária S^d de $\mathbb{R}^{d+1}$, nos espaçoes $L^q(S^d)$, incluindo as classes de Sobolev, foram realizados em [1], [11], [13], [2] e [12].

Iniciamos o Capítulo 1 com o estudo dos espaços L^p. Apresentamos os conceitos básicos e em seguida demonstramos alguns teoremas que serão de grande relevância nos capítulos seguintes.

No Capítulo 2, mais precisamente nas três primeiras seções, fazemos uma exposição breve e sem muitas demonstrações de assuntos relacionados à Análise Harmônica na esfera S^d. Um estudo cuidadoso dos resultados nestas seções foi realizado em [17]. Na última seção deste capítulo, estudamos estimativas para médias de Levy de uma norma específica definida em $\mathbb{R}^n$, tomando como base os trabalhos [11] e [23]. Essas estimativas são fundamentais no estudo das estimativas superiores para n-larguras de classes de Sobolev que é realizado na segunda seção do Capítulo 3.

O Capítulo 3 é o mais importante desse trabalho. Inicialmente, estudamos as definições e propriedades das n-larguras de Kolmogorov e de Gel'fand. Um estudo cuidadoso desse assunto é realizado em [23]. Na segunda seção, estudamos estimativas superiores para n-larguras de Kolmogorov de classes de Sobolev, fazendo uso dos resultados sobre médias de Levy do Capítulo 2 e tendo como base os trabalhos [13], [11] e [23]. Na seção 3, estudamos estimativas inferiores para n-larguras de classes de Sobolev, seguindo as linhas apresentadas nos trabalhos [1] e [13]. Apresentamos no final da seção um resultado, consequência dos resultados das duas últimas seções, que fornece estimativas assintoticamente exatas, em termos de ordem, para n-larguras de Kolmogorov de classes de Sobolev em S^d.

Capítulo 1

Os Espaços L^p

Neste capítulo, apresentamos as definições básicas sobre os espaços L^p e também alguns resultados que serão aplicados nos capítulos seguintes. No entanto, apenas alguns lemas e teoremas nessa parte do texto serão demonstrados uma vez que os resultados aqui não demonstrados podem ser encontrados facilmente em diversos livros que abordam esse assunto. As referências para este capítulo são [3] e [4].

1.1 Definições Básicas

Definição 1.1.1. Seja (Ω, Σ, ν) um espaço de medida, ou seja, Ω é um conjunto não-vazio, Σ é uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω e $\nu : \Sigma \to [0, \infty]$ é uma medida. Para $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$, $\mathfrak{L}^p(\Omega, \Sigma, \nu)$ é o espaço vetorial complexo de todas as funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{C}$ que satisfazem

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, d\nu(x) \right)^{1/p} < \infty, \tag{1.1}$$

munido da soma usual de funções e multiplicação usual por escalar.

Definição 1.1.2. O espaço vetorial complexo formado por todas as funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{C}$, para as quais existe uma constante $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C \ \nu - q.t.p.$, munido da soma usual de funções e da multiplicação usual por escalar, será denotado por $\mathfrak{L}^\infty(\Omega, \Sigma, \nu)$. Para cada $f \in \mathfrak{L}^\infty(\Omega, \Sigma, \nu)$, escrevemos

$$\|f\|_\infty = \inf \{C : |f(x)| \leq C \ \nu - q.t.p.\} . \tag{1.2}$$

Observação 1.1.3. As igualdades (1.1) e (1.2) definem semi-normas em $\mathfrak{L}^p(\Omega, \Sigma, \nu)$, $1 \leq p \leq \infty$. Em outras palavras, dado $1 \leq p \leq \infty$, $c \in \mathbb{C}$ e $f \in \mathfrak{L}^p(\Omega, \Sigma, \nu)$,

(a) $\|f\|_p \geq 0$,

(b) $\|cf\|_p = |c| \, \|f\|_p$,

(c) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Observação 1.1.4. Consideremos um espaço de medida (Ω, Σ, ν). Para $f, g \in \mathfrak{L}^p(\Omega, \Sigma, \nu)$, $1 \leq p \leq \infty$, seja $\sim$ a seguinte relação em $\mathfrak{L}^p(\Omega, \Sigma, \nu)$:

$$f \sim g \quad \text{se, e somente se,} \quad f = g \ \ \nu - q.t.p..$$

Temos que $\sim$ é uma relação de equivalência. Denotamos por $[f]$ a classe de equivalência da função f, ou seja,

$$[f] = \{f' \in \mathfrak{L}^p(\Omega, \Sigma, \nu) : f' \sim f\}$$

e por $L^p(\Omega, \Sigma, \nu)$ o conjunto de todas as classes de equivalência de $\sim$ em $\mathfrak{L}^p(\Omega, \Sigma, \nu)$. Definimos a soma de dois elementos $[f], [g] \in L^p(\Omega, \Sigma, \nu)$ e a multiplicação por um escalar $c \in \mathbb{C}$ por

$$[f] + [g] = [f + g], \quad c[g] = [cg].$$

Com essas operações, $L^p(\Omega, \Sigma, \nu)$ é um espaço vetorial. Sejam agora

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, d\nu(x)\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|[f]\|_\infty = \|f\|_\infty = \inf\{C : |f(x)| \leq C, \nu - q.t.p.\}.$$

Então segue pelo Lema 1.2.2 que $\|\cdot\|_p$ é uma norma em $L^p(\Omega, \Sigma, \nu)$ para $1 \leq p \leq \infty$.

Observação 1.1.5. Quando a σ-álgebra Σ e a medida ν estiverem claras no contexto, usaremos simplesmente a notação $L^p(\Omega)$ para denotar o espaço $L^p(\Omega, \Sigma, \nu)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Observação 1.1.6. Daqui em diante, denotaremos um elemento de $L^p(\Omega, \Sigma, \nu)$ por f ao invés de $[f]$, visto que o primeiro símbolo é mais simples. Desta forma, podemos entender que o espaço $L^p(\Omega, \Sigma, \nu)$ é um espaço de funções, desde que duas funções f e g sejam consideradas iguais se $f = g \ \nu - q.t.p.$.

1.2 Propriedades

A seguir, destacaremos alguns teoremas de relevância envolvendo os espaços L^p que serão usados nos capítulos seguintes.

Teorema 1.2.1. Sejam (Ω, Σ, ν) um espaço de medida e $1 \leq p \leq \infty$. Então o espaço vetorial $L^p(\Omega, \Sigma, \nu)$ munido da norma $\|\cdot\|_p$ é um espaço de Banach, isto é, é um espaço vetorial normado e completo.

Lema 1.2.2. Seja (Ω, Σ, ν) um espaço de medida e sejam $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ funções mensuráveis tais que $f = g \ \nu - q.t.p.$. Se $\int_\Omega f \, d\nu$ existe ou $\int_\Omega g \, d\nu$ existe, então as duas integrais existem e

$$\int_\Omega f \, d\nu = \int_\Omega g \, d\nu.$$

Por outro lado, se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é uma função mensurável tal que $\int_\Omega |f| \, d\nu = 0$, então $f = 0 \ \nu - q.t.p.$.

Com esses dois lemas em mãos, obtemos o resultado seguinte.

Teorema 1.2.3. A função $(\cdot,\cdot) : L^2(\Omega,\Sigma,\nu) \times L^2(\Omega,\Sigma,\nu) \to \mathbb{C}$ definida por

$$(f,g) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}d\nu(x)$$

é um produto interno em $L^2(\Omega,\Sigma,\nu)$.

Demonstração. Sejam $f,g,h \in L^2(\Omega,\Sigma,\nu)$ e $c \in \mathbb{C}$. Lembremos que $(\cdot,\cdot)$ será um produto interno se as igualdades seguintes forem verdadeiras:

(a) $(cf+g,h) = c(f,h)+(g,h)$,

(b) $(f,h) = \overline{(h,f)}$,

(c) $(f,f) = 0$ se, e somente se $f = 0$.

A primeira igualdade é imediata pois

$$\begin{aligned}(cf+g,h) &= \int_\Omega (cf+g)\overline{h}\, d\nu \\ &= \int_\Omega (cf)\overline{h} + g\overline{h}\, d\nu \\ &= \int_\Omega (cf)\overline{h}\, d\nu + \int_\Omega g\overline{h}\, d\nu \\ &= c\int_\Omega f\overline{h}\, d\nu + \int_\Omega g\overline{h}\, d\nu \\ &= c(f,h)+(g,h).\end{aligned}$$

Para demonstrar a segunda igualdade, lembremos que, por definição,

$$\int_\Omega f(x)d\nu(x) = \int_\Omega \mathrm{Re}(f(x))d\nu(x) + i\int_\Omega \mathrm{Im}(f(x))d\nu(x).$$

Como $\mathrm{Re}(f\overline{h}) = \mathrm{Re}(f)\mathrm{Re}(h)+\mathrm{Im}(f)\mathrm{Im}(h)$ e $\mathrm{Im}(f\overline{h}) = \mathrm{Im}(f)\mathrm{Re}(h)-\mathrm{Re}(f)\mathrm{Im}(h)$, segue que

$$\begin{aligned}(f,h) &= \int_\Omega f\overline{h}\, d\nu \\ &= \int_\Omega \mathrm{Re}(f\overline{h})d\nu + i\int_\Omega \mathrm{Im}(f\overline{h})\, d\nu \\ &= \int_\Omega (\mathrm{Re}(f)\mathrm{Re}(h)+\mathrm{Im}(f)\mathrm{Im}(h))\, d\nu + i\int_\Omega (\mathrm{Im}(f)\mathrm{Re}(h)-\mathrm{Re}(f)\mathrm{Im}(h))\, d\nu.\end{aligned} \tag{1.3}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\overline{(h,f)} &= \overline{\int_\Omega h\overline{f}d\nu} \\ &= \overline{\int_\Omega (\mathrm{Re}(h)\mathrm{Re}(f)+\mathrm{Im}(h)\mathrm{Im}(f))\, d\nu + i\int_\Omega (\mathrm{Im}(h)\mathrm{Re}(f)-\mathrm{Re}(h)\mathrm{Im}(f))\, d\nu} \\ &= \int_\Omega (\mathrm{Re}(h)\mathrm{Re}(f)+\mathrm{Im}(h)\mathrm{Im}(f))\, d\nu - i\int_\Omega (\mathrm{Im}(h)\mathrm{Re}(f)-\mathrm{Re}(h)\mathrm{Im}(f))\, d\nu \\ &= \int_\Omega (\mathrm{Re}(h)\mathrm{Re}(f)+\mathrm{Im}(h)\mathrm{Im}(f))\, d\nu + i\int_\Omega (\mathrm{Re}(h)\mathrm{Im}(f)-\mathrm{Im}(h)\mathrm{Re}(f))\, d\nu.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Comparando (1.3) com (1.4), vemos que $(f,h) = \overline{(h,f)}$.

Seja agora $f \in L^2(\Omega,\Sigma,\nu)$ tal que $f = 0$. Podemos dizer que f é uma função e $f = 0$ $\nu - q.t.p.$ (ver Observação 1.1.6). Desta forma, $|f|^2 = 0$ $\nu - q.t.p.$ e assim, pelo Lema 1.2.2,

$$(f,f) = \int_\Omega f\overline{f} d\nu = \int_\Omega |f|^2 \, d\nu = 0.$$

Reciprocamente, se $(f,f) = 0$, então

$$\int_\Omega f\overline{f} \, d\nu = \int_\Omega |f|^2 \, d\nu = 0.$$

Pelo Lema 1.2.2, temos $|f|^2 = 0$ $\nu - q.t.p.$, o que implica $f = 0$ $\nu - q.t.p.$. Segue pela Observação 1.1.6 que $f = 0$ em $L^p(\Omega,\Sigma,\nu)$.

□

Teorema 1.2.4. (Desigualdade de Hölder) Seja (Ω,Σ,ν) um espaço de medida e sejam $p,q \in \mathbb{R}$ tais que $1 \leq p,q \leq \infty$ e $1/p + 1/q = 1$. Se $f,g : \Omega \to \mathbb{C}$ são tais que $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então

$$\|fg\|_1 = \int_\Omega |fg| \, d\nu \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \, .$$

Lema 1.2.5. Seja (Ω,Σ,ν) um espaço de medida finita, ou seja, $\nu(\Omega) < \infty$. Para quaisquer números reais p,q tais que $1 \leq p < q \leq \infty$, temos $L^q(\Omega,\Sigma,\nu) \subset L^p(\Omega,\Sigma,\nu)$.

Demonstração. Se $q = \infty$ e $f \in L^\infty(\Omega,\Sigma,\nu)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ $\nu - q.t.p.$. Assim,

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f(x)|^p \, d\nu(x) \leq \int_\Omega C^p d\nu(x) = C^p \nu(\Omega) < \infty,$$

e portanto $f \in L^p(\Omega,\Sigma,\nu)$.

Suponhamos agora $q < \infty$. Então temos $0 < 1/p - 1/q < 1$. Assim, seja $1 < r < \infty$ tal que $1/r = 1/p - 1/q$. Logo, $1/r + 1/q = 1/p$. Consequentemente,

$$\frac{1}{(r/p)} + \frac{1}{(q/p)} = 1.$$

Seja $f \in L^q(\Omega)$. Pelo Teorema 1.2.4,

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f(x)|^p \, d\nu(x) \leq \left(\int_\Omega (|f(x)|^p)^{q/p} \, d\nu(x)\right)^{p/q} \left(\int_\Omega d\nu(x)\right)^{p/r} = \|f\|_q^p \, \nu(\Omega)^{p/r}. \tag{1.5}$$

Como $\nu(\Omega) < \infty$ e $\|f\|_q < \infty$, concluímos que $\|f\|_p < \infty$, ou seja, $f \in L^p(\Omega)$.

□

Definição 1.2.6. Consideremos $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e uma função $f : (a,b) \to \mathbb{R}$.

(a) A função f é dita convexa se

$$f\left((1-\lambda)s+\lambda t\right) \leq (1-\lambda)f(s)+\lambda f(t),$$

para todo $s, t \in (a,b)$ e $\lambda \in (0,1)$.

(b) A função f é dita côncava se

$$f\left((1-\lambda)s+\lambda t\right) \geq (1-\lambda)f(s)+\lambda f(t),$$

para todo $s, t \in (a,b)$ e $\lambda \in (0,1)$.

Lema 1.2.7. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função convexa.

(a) Se $s, s', t, t' \in \mathbb{R}$ são tais que $s \leq s' < t'$ e $s < t \leq t'$, então

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s} \leq \frac{f(t')-f(s')}{t'-s'}. \tag{1.6}$$

(b) Se f tem derivada contínua em (a,b) e $t_0 \in (a,b)$, então existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(t)-f(t_0) \geq C(t-t_0), \tag{1.7}$$

para todo $t \in (a,b)$.

Demonstração. Para demonstrar o primeiro item do lema, sejam $\lambda_0, \lambda_1 \in (0,1)$ tais que

$$s' = (1-\lambda_0)s+\lambda_0 t', \quad t = (1-\lambda_1)s+\lambda_1 t'.$$

Segue dessas igualdades que

$$\lambda_0 = \frac{s'-s}{t'-s}, \quad \lambda_1 = \frac{t-s}{t'-s}.$$

Além disso,

$$1-\lambda_0 = 1-\frac{s'-s}{t'-s} = \frac{t'-s-s'+s}{t'-s} = \frac{t'-s'}{t'-s}.$$

Pela convexidade de f,

$$f(s') = f((1-\lambda_0)s+\lambda_0 t') \leq (1-\lambda_0)f(s)+\lambda_0 f(t'), \tag{1.8}$$
$$f(t) = f((1-\lambda_1)s+\lambda_1 t') \leq (1-\lambda_1)f(s)+\lambda_1 f(t'). \tag{1.9}$$

Pela desigualdade (1.8),

$$f(s) \geq \frac{f(s') - \lambda_0 f(t')}{1 - \lambda_0}. \tag{1.10}$$

Logo, pelas desigualdades (1.9) e (1.10),

$$\begin{aligned} f(t) - f(s) &\leq (1 - \lambda_1) f(s) + \lambda_1 f(t') - f(s) \\ &= \lambda_1 (f(t') - f(s)) \\ &\leq \lambda_1 \left(f(t') + \frac{\lambda_0 f(t') - f(s')}{1 - \lambda_0} \right) \\ &= \lambda_1 \left(\frac{f(t') - \lambda_0 f(t') + \lambda_0 f(t') - f(s')}{1 - \lambda_0} \right) \\ &= \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_0} (f(t') - f(s')). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Por outro lado,

$$\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_0} = \lambda_1 \frac{1}{1 - \lambda_0} = \left(\frac{t - s}{t' - s} \right) \left(\frac{t' - s}{t' - s'} \right) = \frac{t - s}{t' - s'}. \tag{1.12}$$

Portanto, (1.6) segue de (1.11) e (1.12).

Seja agora $t_0 \in (a, b)$. Escolhemos $x \in (a, t_0)$ e $\overline{y} \in (t_0, b)$. Dado $t \in (a, b)$, podemos supor, sem perda de generalidade, $t_0 \leq t$. Escolhemos agora y satisfazendo $x < y < \min\{\overline{y}, t\}$. Assim, $x \leq t_0 \leq t$ e $x < y \leq t$ e portanto, por (1.6),

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (x, y)$ tal que $f'(\theta)(y - x) = f(y) - f(x)$. Logo, para $C = \inf\limits_{\theta \in [x, \overline{y}]} f'(\theta)$ (o ínfimo existe e é finito pois f' é uma função contínua),

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{f'(\theta)(y - x)}{y - x} \geq C. \tag{1.13}$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade (1.13) por $t - t_0$, obtemos (1.7).

$\square$

Observação 1.2.8. Suponhamos que a função $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ seja côncava. Então o sentido das desigualdades (1.6) e (1.7) do Lema 1.2.7 fica invertido. É claro que para a desigualdade (1.7) é necessário que f tenha derivada contínua. A demonstração segue de maneira inteiramente análoga à demonstração do Lema 1.2.7, alterando apenas o sentido das desigualdades (1.8), (1.9), (1.10), (1.11) e (1.13).

Teorema 1.2.9. (Desigualdade de Jensen) Seja (Ω, Σ, ν) um espaço de medida com $\nu(\Omega) = 1$, $g : \Omega \to (a, b)$ uma função integrável e f uma função convexa e com derivada contínua em (a, b). Então

$$f\left(\int_\Omega g \, d\nu \right) \leq \int_\Omega f \circ g \, d\nu.$$

Demonstração. Sejam

$$t_0 = \int_\Omega g \, d\nu, \quad t = g(x).$$

Pela desigualdade (1.7) do Lema 1.2.7,

$$f(g(x)) - f\left(\int_\Omega g \, d\nu\right) \geq C\left(g(x) - \int_\Omega g \, d\nu\right). \tag{1.14}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(f \circ g - f\left(\int_\Omega g \, d\nu\right)\right) d\nu &= \int_\Omega f \circ g \, d\nu - \int_\Omega f\left(\int_\Omega g \, d\nu\right) d\nu \\
&= \int_\Omega f \circ g \, d\nu - f\left(\int_\Omega g \, d\nu\right) \nu(\Omega) \\
&= \int_\Omega f \circ g \, d\nu - f\left(\int_\Omega g \, d\nu\right).
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega C\left(g - \int_\Omega g \, d\nu\right) d\nu &= C\left(\int_\Omega g \, d\nu - \int_\Omega \left(\int_\Omega g \, d\nu\right) d\nu\right) \\
&= C\left(\int_\Omega g \, d\nu - \left(\int_\Omega g \, d\nu\right) \nu(\Omega)\right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Portanto, integrando ambos os lados da desigualdade (1.14) e utilizando as identidades (1.15) e (1.16), obtemos

$$\int_\Omega f \circ g \, d\nu - f\left(\int_\Omega g \, d\nu\right) \geq 0,$$

ou seja,

$$\int_\Omega f \circ g \, d\nu \geq f\left(\int_\Omega g \, d\nu\right).$$

□

Observação 1.2.10. Se ao invés de convexa, a função f do Teorema 1.2.9 for côncava e todas as outras hipóteses do teorema mantiverem-se inalteradas, então a desigualdade do resultado fica invertida, ou seja,

$$f\left(\int_\Omega g \, d\nu\right) \geq \int_\Omega f \circ g \, d\nu.$$

A demonstração desse resultado se faz seguindo os mesmos passos da demonstração do Teorema 1.2.9, alterando apenas o sentido da desigualdade (1.14), que é consequência da Observação 1.2.8.

Lema 1.2.11. (Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin, ver [4]) Sejam $(X, \mathcal{M}, \sigma)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ dois espaços de medida semi-finitas (em particular σ-finitas), $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ e, para cada $0 \leq t \leq 1$, sejam p_t e q_t tais que

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Seja T um operador linear limitado de $L^{p_t}(X, \mathcal{M}, \sigma)$ em $L^{q_t}(Y, \mathcal{N}, \nu)$ para $t \in \{0, 1\}$ e tal que

$$\|Tf\|_{q_t} \leq K_t \|f\|_{p_t}, \quad f \in L^{p_t}(X, \mathcal{M}, \sigma), \ t \in \{0, 1\}.$$

Então

$$\|Tf\|_{q_t} \leq K_0^{1-t} K_1^t \|f\|_{p_t}, \quad f \in L^{p_t}(X, \mathcal{M}, \sigma), \ t \in [0, 1].$$

Teorema 1.2.12. (Teorema de Fubini) Sejam (Ω, Σ, ν) e (Ψ, Ξ, μ) espaços de medidas σ-finitas, $\Sigma \times \Xi$ a σ-álgebra produto das σ-álgebras Σ e Ξ e $\nu \times \mu$ a medida produto em $\Sigma \times \Xi$. Se $f \in L^1(\Omega \times \Psi, \Sigma \times \Xi, \nu \times \mu)$, então $f(x, \cdot) \in L^1(\Psi, \Xi, \mu)$ para *q.t.p.* $x \in \Omega$, $f(\cdot, y) \in L^1(\Omega, \Sigma, \nu)$ para *q.t.p.* $y \in \Psi$, a função

$$g(x) = \int_\Psi f(x, y) d\mu(y)$$

pertence a $L^1(\Omega, \Sigma, \nu)$, a função

$$h(y) = \int_\Omega f(x, y) d\nu(x)$$

pertence a $L^1(\Psi, \Xi, \mu)$ e

$$\int_{\Omega \times \Psi} f \ d(\nu \times \mu) = \int_\Psi \left[\int_\Omega f(x, y) \ d\nu(x) \right] d\mu(y) = \int_\Omega \left[\int_\Psi f(x, y) \ d\mu(y) \right] d\nu(x).$$

Capítulo 2

Análise na Esfera S^d

Neste capítulo, trataremos de alguns elementos da análise na esfera S^d. A primeira seção será devotada à introdução de algumas definições e notações básicas e de algumas propriedades da esfera S^d, do grupo topológico $SO(d+1)$ e da medida de Lebesgue sobre S^d.

Nas duas seções seguintes, faremos um estudo resumido e sem demonstrações sobre Harmônicos Esféricos e Harmônicos Zonais. A referência principal para as três primeiras seções é [17]. Nesta referência, o leitor encontra demonstrações cuidadosas dos resultados apresentados nestas seções.

Na última seção, realizaremos um estudo sobre as médias de Levy. Estudaremos estimativas para médias de Levy de normas específicas em $\mathbb{R}^n$, as quais serão aplicadas no capítulo seguinte. As referências para esta última seção são [11] e [23].

Na última seção, usaremos, para duas sequências numéricas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a terminologia $a_n \asymp b_n$ para indicarmos a existência de constantes universais C_1 e C_2 satisfazendo $C_1 b_n \leq a_n \leq C_2 b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.1 Preliminares

Notação 2.1.1. Seja X um espaço topológico. Denotaremos por $C(X)$ o conjunto formado por todas as funções contínuas $f : X \to \mathbb{R}$ e por $\mathfrak{B}(X)$ a σ-álgebra de Borel de X.

Notação 2.1.2. Seja D um aberto de $\mathbb{R}^{d+1}$ e seja m um inteiro positivo. O conjunto formado por todas as funções $f : D \to \mathbb{R}$ de classe C^m sobre D será denotado por $C^m(D)$. Denotaremos também

$$C^\infty(D) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} C^m(D).$$

Observação 2.1.3. O conjunto $C^m(D)$ pode ser visto como o conjunto de todas as funções $f : D \to \mathbb{R}$ com derivadas parciais

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_{d+1}^{\alpha_{d+1}}}$$

contínuas para todo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{d+1}) \in \mathbb{N}^{d+1}$ com $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{d+1} \leq m$.

Definição 2.1.4. Seja ν uma medida sobre a σ-álgebra de Borel $\mathfrak{B}(X)$ de X, onde X é um espaço topológico localmente compacto de Hausdorff.

(a) ν é chamada regular exteriormente sobre $E \in \mathfrak{B}(X)$ se

$$\nu(E) = \inf \{\nu(U) : E \subset U,\ U \text{ aberto}\}.$$

(b) ν é chamada regular interiormente sobre $E \in \mathfrak{B}(X)$ se

$$\nu(E) = \sup \{\nu(K) : K \subset E,\ K \text{ compacto}\}.$$

(c) Se ν for regular exteriormente e interiormente sobre todo $E \in \mathfrak{B}(X)$, dizemos que ν é regular.

(d) Se ν for finita sobre compactos, regular exteriormente sobre todo boreliano e regular interiormente sobre todo aberto, dizemos que ν é uma medida de Radon.

Definição 2.1.5. Um grupo topológico é um grupo G que também é um espaço topológico e cujas operações de grupo $G \times G \ni (u,v) \mapsto u \cdot v \in G$ e $G \ni u \mapsto u^{-1} \in G$ são contínuas.

Exemplo 2.1.6. Sabemos que o conjunto $\mathbb{R}$ com a operação usual de soma é um grupo. Além disso, com a topologia usual de $\mathbb{R}$, sabemos também que as funções

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x + y \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x \end{array}$$

são contínuas. Portanto, $\mathbb{R}$ é um grupo topológico.

Definição 2.1.7. Uma medida de Haar à esquerda sobre o grupo topológico localmente compacto G é uma medida de Radon ν sobre G tal que $\nu(uE) = \nu(E)$ para todo $u \in G$ e $E \in \mathfrak{B}(G)$, onde $uE = \{ua : a \in E\}$.

Teorema 2.1.8. (ver [4]) Sobre todo grupo localmente compacto existe uma medida de Haar à esquerda, que é única a menos de constantes multiplicativas positivas.

Observação 2.1.9. (ver [3]) Podemos definir medida de Haar à direita da mesma forma que definimos medida de Haar à esqueda e nesse caso também vale o teorema precedente. Observamos que se G é um grupo topológico compacto e ν é uma medida de Haar à esquerda sobre G, então ν também é uma medida de Haar à direita sobre G e para todo $g \in G$ e $f \in C(G)$,

$$\int_G f(u)d\nu(u) = \int_G f(u^{-1})d\nu(u) = \int_G f(gu)d\nu(u) = \int_G f(ug)d\nu(u).$$

Notação 2.1.10. Sejam $x = (x_1, \ldots, x_{d+1})$, $y = (y_1, \ldots, y_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1}$. Denotemos por $\langle x, y \rangle$ o produto interno usual de x, y em $\mathbb{R}^{d+1}$, isto é,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{d+1} x_k y_k.$$

Representaremos a norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ através do símbolo $|||x||| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ e a esfera unitária de $\mathbb{R}^{d+1}$ pelo símbolo S^d, isto é,

$$S^d = \left\{ x \in \mathbb{R}^{d+1} : |||x||| = 1 \right\}.$$

Denotaremos por μ a medida de Lebesgue normalizada em S^d. Finalmente, para $1 \leq p \leq \infty$ e Σ a σ-álgebra de Lebesgue sobre S^d, denotaremos o espaço $L^p(S^d, \Sigma, \mu)$ simplesmente por $L^p(S^d)$.

Notação 2.1.11. O grupo formado por todas as rotações próprias em $\mathbb{R}^{d+1}$ será denotado por $SO(d+1)$. Esse grupo pode ser identificado como o conjunto formado por todas as matrizes ortogonais de ordem $(d+1) \times (d+1)$ e com determinante igual a 1, munido da operação usual de multiplicação de matrizes.

Observação 2.1.12. O grupo $SO(d+1)$ age sobre a esfera S^d através da ação

$$\begin{array}{rcl} SO(d+1) \times S^d & \rightarrow & S^d \\ (u, x) & \mapsto & ux. \end{array}$$

Mais ainda, $SO(d+1)$ age sobre S^d transitivamente, no sentido que, dados $x, y \in S^d$, existe $u \in SO(d+1)$ tal que $ux = y$.

Observação 2.1.13. Se $1 \leq p \leq q \leq \infty$ e $f \in L^q(S^d)$, então pela desigualdade (1.5) obtida na demostração do Lema 1.2.5 e pelo fato de $\mu(S^d) = 1$, temos

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q.$$

Em particular, $\|f\|_q \leq 1$ implica $\|f\|_p \leq 1$.

Proposição 2.1.14. A medida de Lebesgue μ sobre S^d é invariante por rotações, isto é, $\mu(uA) = \mu(A)$ para todo $u \in SO(d+1)$ e para todo conjunto mensurável A de S^d. Se $f \in L^1(S^d)$ e $u \in SO(d+1)$, então

$$\int_{S^d} f(u^{-1}y) d\mu(y) = \int_{S^d} f(y) d\mu(y).$$

2.2 Harmônicos Esféricos

Definição 2.2.1. Uma função $f : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{C}$ é chamada homogênea de grau k, $k \in \mathbb{Z}$, se $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ para qualquer $\lambda > 0$ e $x \in \mathbb{R}^{d+1}$.

Notação 2.2.2. Denotaremos por $\mathcal{P}$ o conjunto de todos os polinômios definidos sobre $\mathbb{R}^{d+1}$ e por $\mathcal{P}_k$ o subconjunto de $\mathcal{P}$ formado pelos polinômios homogêneos de grau k.

Teorema 2.2.3. Para todo $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_k$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}$ e

$$a_k = \dim \mathcal{P}_k = \binom{d+k}{k}.$$

Notação 2.2.4. Seja Δ o operador laplaciano em $\mathbb{R}^{d+1}$, isto é,

$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_{d+1}^2}(x), \quad f \in C^2(\mathbb{R}^{d+1}),$$

e seja $k \in \mathbb{N}$. Denotaremos por $\mathcal{A}_k$ o subespaço vetorial de $\mathcal{P}_k$ definido por

$$\mathcal{A}_k = \{p \in \mathcal{P}_k : \Delta p = 0\}.$$

Em outras palavras, $\mathcal{A}_k$ é o espaço vetorial de todos os polinômios harmônicos e homogêneos de grau k.

Definição 2.2.5. Um harmônico esférico de grau k é a restrição à esfera S^d de um elemento de $\mathcal{A}_k$. Denotaremos por $\mathcal{H}_k$ o conjunto dos harmônicos esféricos de grau k.

Teorema 2.2.6. Temos que $\dim \mathcal{H}_0 = 1$, $\dim \mathcal{H}_1 = d + 1$ e

$$d_k = \dim \mathcal{H}_k = \binom{d+k}{d} - \binom{d+k-2}{k-2}, \; k \geq 2.$$

Corolário 2.2.7. A restrição à esfera S^d de qualquer polinômio de $(d+1)$ variáveis é uma soma finita de harmônicos esféricos.

Corolário 2.2.8. Toda função contínua sobre S^d pode ser aproximada uniformemente por combinações lineares finitas de harmônicos esféricos.

Corolário 2.2.9. O espaço vetorial gerado pela união $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$, isto é, o conjunto formado por todas as combinações lineares finitas de elementos de $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$, que denotaremos por $\mathcal{H}$, é denso em $L^p(S^d)$ para $1 \leq p < \infty$.

Notação 2.2.10. Mostramos no Capítulo 1 que dado um espaço de medida (Ω, Σ, ν), a função $(\cdot, \cdot) : L^2(\Omega, \Sigma, \nu) \times L^2(\Omega, \Sigma, \nu) \to \mathbb{C}$ definida por

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)} d\nu(x), \quad f, g \in L^2(\Omega, \Sigma, \nu),$$

é um produto interno em $L^2(\Omega, \Sigma, \nu)$. Para o caso particular da esfera S^d, usaremos também $(\cdot, \cdot)$ para denotar o produto interno em $L^2(S^d)$, isto é, dados $f, g \in L^2(S^d)$,

$$(f, g) = \int_{S^d} f(x)\overline{g(x)} d\mu(x).$$

Teorema 2.2.11. Para $k, l \in \mathbb{N}$, $k \neq l$, temos $\mathcal{H}_k \perp \mathcal{H}_l$ em relação ao produto interno $(\cdot, \cdot)$.

Corolário 2.2.12. Se $f \in L^2(S^d)$, então f admite uma única representação na forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y^{(k)}(x),$$

onde a série acima converge para f na norma de $L^2(S^d)$ e $Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k$. Além disso,

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left\|Y^{(k)}\right\|_2^2.$$

2.3 Harmônicos Zonais

Definição 2.3.1. Fixado $x \in S^d$, considere o funcional linear $L_x^{(k)}$ sobre $\mathcal{H}_k$ que, a cada elemento $Y \in \mathcal{H}_k$, associa o valor $L_x^{(k)}(Y) = Y(x)$. Como $\mathcal{H}_k$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno $(\cdot, \cdot)$ de $L^2(S^d)$, existe um único harmônico esférico $Z_x^{(k)} \in \mathcal{H}_k$ tal que

$$Y(x) = L_x^{(k)}(Y) = \left(Y, \overline{Z_x^{(k)}}\right) = \int_{S^d} Y(y) Z_x^{(k)}(y) d\mu(y),$$

para todo $Y \in \mathcal{H}_k$. O harmônico esférico $Z_x^{(k)}$ é chamado de zonal de grau k e pólo x.

Lema 2.3.2. (a) Se $\left\{Y_1^{(k)}, ..., Y_{d_k}^{(k)}\right\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}_k$, então

$$Z_x^{(k)}(y) = \sum_{j=1}^{d_k} \overline{Y_j^{(k)}}(x) Y_j^{(k)}(y).$$

(b) $Z_x^{(k)}$ assume valores reais e $Z_x^{(k)}(y) = Z_y^{(k)}(x)$.

(c) Se $u \in SO(d+1)$, então $Z_{ux}^{(k)}(uy) = Z_x^{(k)}(y)$.

Corolário 2.3.3. (a) $Z_x^{(k)}(x) = d_k$, para $x \in S^d$.

(b) $\sum_{j=1}^{d_k} \left|Y_j^{(k)}(x)\right|^2 = d_k$, para $x \in S^d$.

(c) $\left|Z_x^{(k)}(y)\right| \leq d_k$, para $x, y \in S^d$.

Definição 2.3.4. Seja $\lambda > 0$. Os polinômios $P_k^\lambda(t)$, $-1 \leq t \leq 1$, $k \geq 0$, definidos por

$$P_k^\lambda(t) = \sum_{l+j=k} a_l a_j \left(t - i\sqrt{1-t^2}\right)^l \left(t + i\sqrt{1-t^2}\right)^j,$$

onde $a_0 = 1$ e

$$a_k = \frac{\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+k-1)}{k!}, \ k \geq 1$$

são chamados polinômios ultraesféricos ou de Gegenbauer.

Teorema 2.3.5. Sejam $d \geq 2$, $\lambda = (d-1)/2$ e $k = 0, 1, 2, \ldots$. Então para todos $x, y \in S^d$, temos

$$Z_y^{(k)}(x) = \frac{d+2k-1}{d-1} P_k^{\lambda}(\langle x, y \rangle).$$

Definição 2.3.6. Seja $K(t)$ uma função mensurável definida em $[-1,1]$ e seja $\overline{K}(x) = K(\langle x, e \rangle)$, onde $x \in S^d$ e $e = e_{d+1} = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ é o pólo norte de S^d. Se $\overline{K}, f \in L^1(S^d)$, então o produto de convolução $K * f$ é definido por

$$K * f(x) = \int_{S^d} K(\langle x, y \rangle) f(y) d\mu(y), \quad x \in S^d.$$

Definição 2.3.7. Para $t \in [-1,1]$, definimos

$$\tilde{Z}^{(k)}(t) = \frac{d+2k-1}{d-1} P_k^{(d-1)/2}(t).$$

Teorema 2.3.8. (Desigualdade de Young) Sejam $1 \leq r, p, q \leq \infty$ tais que $1 - 1/r = 1/p - 1/q$ e seja $K(t)$ uma função mensurável definida sobre $[-1,1]$. Se $\overline{K} \in L^r(S^d)$ e $f \in L^p(S^d)$, então $K * f(x)$ está bem definida para quase todo $x \in S^d$, $K * f \in L^q(S^d)$ e

$$\|K * f\|_q \leq \left\|\overline{K}\right\|_r \|f\|_p.$$

Definição 2.3.9. Seja $g : [-1,1] \to \mathbb{C}$ uma função mensurável e seja $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$. Definimos

$$\|g\|_p = \left(\int_{-1}^{1} |g(t)|^p (1-t^2)^{(d-2)/2} dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|g\|_\infty = \inf \{ C : |g(t)| \leq C \text{ q.t.p} \},$$

considerando que $\inf \emptyset = \infty$. Denotaremos por $L^p\left([-1,1], (1-t^2)^{(d-2)/2} dt\right)$, $1 \leq p \leq \infty$, o espaço vetorial formado por todas as funções mensuráveis g definidas em $[-1,1]$ e com valores em $\mathbb{C}$ que satisfazem $\|g\|_p < \infty$. Duas funções $g, h \in L^p\left([-1,1], (1-t^2)^{(d-2)/2} dt\right)$ que coincidem em quase todo ponto serão consideradas iguais.

Observação 2.3.10. Sejam $g, h \in L^p\left([-1,1], (1-t^2)^{(d-2)/2} dt\right)$, $1 \leq p \leq \infty$ e seja $\overline{g} : S^d \times S^d \to \mathbb{C}$ a função definida por $\overline{g}(x,y) = g(\langle x, y \rangle)$, $x, y \in S^d$. Segue pela Observação 2.2.7, p. 51 em [17] que, para qualquer $y \in S^d$,

$$\int_{S^d} |\overline{g}(x,y)|^p d\mu(x) = \frac{\omega_{d-1}}{\omega_d} \int_{-1}^{1} |g(t)|^p (1-t^2)^{(d-2)/2} dt,$$

se $1 \leq p < \infty$, onde ω_d é a área de S^d. Assim,

$$\|\overline{g}(\cdot, y)\|_p = \left(\frac{\omega_{d-1}}{\omega_d} \right)^{1/p} \|g\|_p \leq \|g\|_p, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|\overline{g}(\cdot, y)\|_\infty = \|g\|_\infty.$$

Escreveremos $h * g(x,y)$ para representar o produto de convolução $(h * \overline{g}(\cdot,y))(x)$. Segue pela desigualdade acima que podemos trocar $\left\|\overline{K}\right\|_r$ por $\|K\|_r$ na Desigualdade de Young (Teorema 2.3.8).

Observação 2.3.11. Se $Y \in \mathcal{H}_k$, segue pela Definição 2.3.1 que

$$\tilde{Z}^{(k)} * Y(x) = \int_{S^d} \tilde{Z}^{(k)}(\langle x,y\rangle)Y(y)d\mu(y) = \int_{S^d} Z_x^{(k)}(y)Y(y)d\mu(y) = Y(x)$$

e se $Y \in \mathcal{H}_l$, $l \neq k$, então $Z_x^{(k)}$ e Y são ortogonais e assim $\tilde{Z}^{(k)} * Y = 0$. Em particular temos

$$\begin{aligned}\tilde{Z}^{(k)} * Z_x^{(l)}(y) &= \begin{cases} 0, & \text{se } l \neq k, \\ Z_x^{(k)}(y), & \text{se } l = k, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } l \neq k, \\ \tilde{Z}^{(k)}(\langle x,y\rangle), & \text{se } l = k. \end{cases}\end{aligned}$$

Teorema 2.3.12. Seja $f \in L^2(S^d)$. Então

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{Z}^{(k)} * f(x),$$

onde a série acima converge para f na norma de $L^2(S^d)$ e $\tilde{Z}^{(k)} * f(x) \in \mathcal{H}_k$.

Lema 2.3.13. ([23]) Seja $\mathcal{T}_N = \bigoplus_{k=0}^{N} \mathcal{H}_k$. Então

$$\dim \mathcal{T}_N = \frac{2(N+d/2)(N+d-1)!}{d!\,N!}.$$

Lema 2.3.14. ([23]) Temos que

$$\dim \mathcal{H}_k = \frac{2}{(d-1)!}k^{d-1} + b_1 k^{d-2} + \cdots + b_{d-1},$$

$$\dim \mathcal{T}_N = \frac{2}{d!}N^d + c_1 N^{d-1} + \cdots + c_d,$$

onde $b_1, ..., b_{d-1}, c_1, ..., c_d$ são constantes maiores ou iguais a zero.

Definição 2.3.15. A soma de Cesàro S_n^δ de ordem $n \in \mathbb{N}$ e índice $\delta \geq 0$ é definida por

$$S_n^\delta(t) = \frac{1}{C_n^\delta} \sum_{m=0}^{n} C_{n-m}^\delta \tilde{Z}^{(m)}(t),$$

onde

$$C_m^\delta = \frac{\Gamma(m+\delta+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(\delta+1)}.$$

Observação 2.3.16. Para $n, \delta \in \mathbb{N}$, temos

$$
\begin{aligned}
C_n^\delta &= \frac{(n+\delta)\,!}{n!\,\delta!} \\
&= \frac{(n+\delta)\,(n+\delta-1)\cdots(n+1)\,(n!\,)}{n!\,\delta!} \\
&= \left(\frac{n+\delta}{\delta}\right)\left(\frac{n+\delta-1}{\delta-1}\right)\cdots\left(\frac{n+2}{2}\right)\left(\frac{n+1}{1}\right) \\
&= \left(\frac{n}{\delta}+1\right)\left(\frac{n}{\delta-1}+1\right)\cdots\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{1}+1\right).
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Portanto,

$$
\frac{n^\delta}{\delta!} \le C_n^\delta \le 2^\delta n^\delta. \tag{2.2}
$$

Lema 2.3.17. (ver [17]) Consideremos a L^p-norma $\left\|S_n^\delta\right\|_p$ da soma de Cesàro S_n^δ (ver Definição 2.3.9).

(a) Se $0 \le \delta \le (d+1)/2$, então existe uma constante $C > 0$ independente de n tal que

$$
\left\|S_n^\delta\right\|_p \le C \begin{cases} n^{(d-2\delta-1)/2}, & 1 \le p < 2d/(d+2\delta+1), \\ n^{(d-2\delta-1)/2}(\ln n)^{(d+2\delta+1)/(2d)}, & p = 2d/(d+2\delta+1), \\ n^{d(1-1/p)}, & p > 2d/(d+2\delta+1). \end{cases}
$$

(b) Se $(d+1)/2 \le \delta \le d$, então existe uma constante $C > 0$ independente de n tal que

$$
\left\|S_n^\delta\right\|_p \le C n^{d(1-1/p)}, \qquad 1 \le p \le \infty.
$$

2.4 Médias de Levy

Notação 2.4.1. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\langle x, y\rangle$ o produto interno usual de dois elementos $x, y \in \mathbb{R}^n$, por $|||x|||$ a norma euclidiana do elemento $x \in \mathbb{R}^n$, por S^{n-1} a esfera unitária de $\mathbb{R}^n$ e por μ a medida de Lebesgue normalizada em S^{n-1}.

Definição 2.4.2. A média de Levy de uma norma $\|\cdot\|$ definida em $\mathbb{R}^n$ é definida por

$$
M(\|\cdot\|) = M(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) = \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|^2\, d\mu(x)\right)^{1/2}.
$$

Observação 2.4.3. Para cada $l = 0, 1, 2, \ldots$, seja $\{\xi_j^l : 1 \le j \le d_l\}$, onde $d_l = \dim \mathcal{H}_l$, uma base de $\mathcal{H}_l$ ortonormal em $L^2(S^d)$. Fixamos $N_0, N_1 \in \mathbb{N}$, $N_0 < N_1$, e denotamos

$$\mathcal{T}_{N_0,N_1} = \bigoplus_{l=N_0+1}^{N_1} \mathcal{H}_l, \quad n = \dim \mathcal{T}_{N_0,N_1} = \sum_{l=N_0+1}^{N_1} d_l.$$

Temos que

$$\{\xi_k\}_{k=1}^n = \{\xi_j^l : 1 \le j \le d_l, N_0 + 1 \le l \le N_1\},$$

onde $\xi_k = \xi_s^{r+1}$ se $k = \sum_{l=N_0+1}^r d_l + s$ com $N_0 \le r < N_1$ e $1 \le s \le d_{r+1}$, é uma base de $\mathcal{T}_{N_0,N_1}$, ortonormal em $L^2(S^d)$.

Definimos o isomorfismo $J : \mathbb{R}^n \to \mathcal{T}_{N_0,N_1}$ por

$$J(v) = \xi^v = \sum_{k=1}^n v_k \xi_k = \sum_{l=N_0+1}^{N_1} \sum_{j=1}^{d_l} v_j^l \xi_j^l,$$

onde $v = (v_1, \dots, v_n) = (v_1^{N_0+1}, \dots, v_{d_{N_0+1}}^{N_0+1}, v_1^{N_0+2}, \dots, v_{d_{N_0+2}}^{N_0+2}, \dots, v_1^{N_1}, \dots, v_{d_{N_1}}^{N_1})$. Dado $1 \le p \le \infty$ e $v \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$\|v\|_{(p)} = \|J(v)\|_p = \|\xi^v\|_p \,. \tag{2.3}$$

Observamos que $\|\cdot\|_{(p)} : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$. Denotamos

$$B_{(p)}^n = \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \|v\|_{(p)} \le 1 \right\}, \quad B_p^n = \left\{ \xi \in \mathcal{T}_{N_0,N_1} : \|\xi\|_p \le 1 \right\}.$$

Lema 2.4.4. ([23]) Seja $f \in C(S^{n-1})$ e $\tilde{f}$ a extensão de f para $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dada por

$$\tilde{f}(x) = |||x|||^2 f\left(\frac{x}{|||x|||}\right).$$

Então

$$\int_{S^{n-1}} f(x) d\mu(x) = \frac{2\pi}{n} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) d\gamma(x),$$

onde $d\gamma(x) = e^{-\pi|||x|||^2} dx$ denota a medida Gaussiana em $\mathbb{R}^n$.

Lema 2.4.5. ([14]) Seja $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ a sequência das funções de Rademacher

$$r_k(\theta) = \operatorname{sgn}\ \operatorname{sen}\left(2^k \pi \theta\right),$$

onde $\theta \in [0, 1]$. Para $m, n \in \mathbb{N}$ fixos e $i = 1, 2, \dots, n$, seja

$$\delta_i^m(\theta) = m^{-1/2}\left(r_{(i-1)m+1}(\theta) + r_{(i-1)m+2}(\theta) + \cdots + r_{im}(\theta)\right).$$

Nestas condições, se $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo

$$h(x_1, \dots, x_n) e^{-\sum_{k=1}^n |x_k|} \to 0$$

uniformemente quando $\sum_{k=1}^{n} |x_k| \to 0$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x) d\gamma(x) = \lim_{m\to\infty} \int_0^1 h\left((2\pi)^{-1/2} \left(\delta_1^m(\theta), \dots, \delta_n^m(\theta)\right)\right) d\theta.$$

Lema 2.4.6. (Desigualdade de Khintchine, [19]) Seja $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ a sequência das funções de Rademacher definida no lema anterior e seja $1 \leq p < \infty$. Então existem constantes positivas $\beta(p)$ e $\gamma(p)$ tais que, para toda escolha de escalares $\{c_k\}_{k=1}^{u}$, $u \in \mathbb{N}$,

$$\beta(p) \left(\sum_{k=1}^{u} |c_k|^2\right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{u} r_k(\theta) c_k\right|^p d\theta\right)^{1/p} \leq \gamma(p) \left(\sum_{k=1}^{u} |c_k|^2\right)^{1/2},$$

onde $\beta(1) \geq 1/2$ e $\gamma(p) = 2^{1/2}\Gamma\left((1+p)/2\right)/\Gamma(1/2) \asymp p^{1/2}, p \to \infty$.

Lema 2.4.7. (Ver [23]) Sejam $N_0, N_1 \in \mathbb{N}$, $N_0 < N_1$. Se $t_n \in \bigoplus_{k=N_0+1}^{N_1} \mathcal{H}_k$ e $n = \dim\left(\bigoplus_{k=N_0+1}^{N_1} \mathcal{H}_k\right)$, então

$$\|t_n\|_\infty \leq n^{1/p} \|t_n\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

$$\|t_n\|_2 \leq n^{1/p-1/2} \|t_n\|_p, \quad 1 \leq p \leq 2,$$

$$\|t_n\|_q \leq n^{1/2-1/q} \|t_n\|_2, \quad 2 \leq q \leq \infty.$$

Teorema 2.4.8. Sejam $N_0, N_1 \in \mathbb{N}$, $N_0 < N_1$ e $\{\xi_k\}_{k=1}^{n}$ um sistema ortonormal de harmônicos esféricos de $\mathcal{T}_{N_0,N_1} = \bigoplus_{k=N_0+1}^{N_1} \mathcal{H}_k$, $n = \dim \mathcal{T}_{N_0,N_1}$, como na Observação 2.4.3. Então existe uma constante absoluta $C > 0$ tal que:

$$1 \leq M(\|\cdot\|_{(p)}) \leq Cp^{1/2}, \quad 2 \leq p < \infty; \tag{2.4}$$

$$1 \leq M(\|\cdot\|_{(\infty)}) \leq C(\ln n)^{1/2}; \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{2} \leq M(\|\cdot\|_{(p)}) \leq 1, \quad 1 \leq p \leq 2; \tag{2.6}$$

$$M(\|\cdot\|_{(2)}) = 1. \tag{2.7}$$

Demonstração. Para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, pela ortonormalidade de $\{\xi_k\}_{k=1}^{n}$ em $L^2(S^d)$,

$$\|x\|_{(2)}^2 = \left\|\sum_{l=N_0+1}^{N_1} \sum_{j=1}^{d_l} x_j^l \xi_k^l\right\|_2^2 = \sum_{l=N_0+1}^{N_1} \sum_{j=1}^{d_l} \left(x_j^l\right)^2 \left\|\xi_j^l\right\|_2^2 = \sum_{l=N_0+1}^{N_1} \sum_{j=1}^{d_l} \left(x_j^l\right)^2.$$

Logo,

$$\int_{S^{n-1}} \|x\|_{(2)}^2 \, d\mu(x) = \sum_{l=N_0+1}^{N_1} \sum_{j=1}^{d_l} \int_{S^{n-1}} \left(x_j^l\right)^2 d\mu(x). \tag{2.8}$$

No entanto,

$$1 = \int_{S^{n-1}} |||x|||^2 \, d\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{S^{n-1}} x_j^2 d\mu(x) = n \int_{S^{n-1}} x_i^2 d\mu(x),$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. Desta forma, para todo $i = 1, \ldots, n$,

$$\int_{S^{n-1}} x_i^2 d\mu(x) = \frac{1}{n}. \tag{2.9}$$

Pelas igualdades (2.8) e (2.9),

$$\int_{S^{n-1}} \|x\|_{(2)}^2 \, d\mu(x) = \frac{1}{n} \sum_{l=N_0+1}^{N_1} \sum_{j=1}^{d_l} 1 = \frac{1}{n} \sum_{l=N_0+1}^{N_1} d_l = 1.$$

Assim,

$$M(\|\cdot\|_{(2)}) = \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|_{(2)}^2 \, d\mu(x)\right)^{1/2} = 1, \tag{2.10}$$

que é a igualdade (2.7) do teorema.

Pela Observação 2.1.13,

$$\|x\|_{(p)} = \left\| \sum_{l=N_0+1}^{N_1} \sum_{j=1}^{d_l} x_j^l \xi_k^l \right\|_p \leq \left\| \sum_{l=N_0+1}^{N_1} \sum_{j=1}^{d_l} x_j^l \xi_k^l \right\|_q = \|x\|_{(q)}$$

para quaisquer $p, q \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Consequentemente,

$$M(\|\cdot\|_{(p)}) = \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|_{(p)}^2 \, \mu(x)\right)^{1/2} \leq \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|_{(q)}^2 \, d\mu(x)\right)^{1/2} = M(\|\cdot\|_{(q)}). \tag{2.11}$$

Portanto, por (2.10) e (2.11), seguem as desigualdades inferiores em (2.4) e (2.5) e a desigualdade superior (2.6).

Seja agora $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, $f(x) = \|x\|_{(p)}^2$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1}$ e seja $\tilde{f}$ a extensão de f para $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ como no Lema 2.4.4. Observe que

$$\tilde{f}(x) = |||x|||^2 \, f\left(\frac{x}{|||x|||}\right) = |||x|||^2 \left\| \frac{x}{|||x|||} \right\|_{(p)}^2 = \|x\|_{(p)}^2 \, .$$

Ainda pelo Lema 2.4.4,

$$\int_{S^{n-1}} \|x\|_{(p)}^2 \, d\mu(x) = \frac{2\pi}{n} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) d\gamma(x) = \frac{2\pi}{n} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_{(p)}^2 \, d\gamma(x). \tag{2.12}$$

Como $\|x\|_{(p)} \leq C_{N_0,N_1,p} \sum_{k=1}^{n} |x_k|$, vemos que

$$\tilde{f}(x)e^{-\sum_{k=1}^{n}|x_k|} = \|x\|_{(p)}^2 \, e^{-\sum_{k=1}^{n}|x_k|} \to 0$$

uniformemente quando $\sum_{k=1}^{n}|x_k| \to 0$. Desta forma, pelo Lema 2.4.5,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)d\gamma(x) = \lim_{m\to\infty}\int_0^1 \left\|(2\pi)^{-1/2}\left(\delta_1^m(\theta),\ldots,\delta_n^m(\theta)\right)\right\|_{(p)}^2 d\theta. \tag{2.13}$$

De (2.12) e (2.13), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{S^n}\|x\|_{(p)}^2\, d\mu(x) &= \frac{2\pi}{n}\lim_{m\to\infty}\int_0^1 \left\|(2\pi)^{-1/2}\left(\delta_1^m(\theta),\ldots,\delta_n^m(\theta)\right)\right\|_{(p)}^2 d\theta \\ &= \frac{1}{n}\lim_{m\to\infty}\int_0^1 \left\|\left(\delta_1^m(\theta),\ldots,\delta_n^m(\theta)\right)\right\|_{(p)}^2 d\theta.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\left\|\left(\delta_1^m(\theta),\ldots,\delta_n^m(\theta)\right)\right\|_{(p)}^2 &= \left\|\xi^{(\delta_1^m(\theta),\ldots,\delta_n^m(\theta))}\right\|_p^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n}\delta_i^m(\theta)\xi_i\right\|_p^2 \\ &= \left(\int_{S^n}\left|\sum_{i=1}^{n}\delta_i^m(\theta)\xi_i(\tau)\right|^p d\mu(\tau)\right)^{2/p}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Além disso,

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i^m(\theta)\xi_i(\tau) = \sum_{i=1}^{n} m^{-1/2}\xi_i(\tau)\left(r_{(i-1)m+1}(\theta)+\cdots+r_{im}(\theta)\right).$$

Denotando $\tilde{\xi}_{(i-1)m+k}(\tau) = m^{-1/2}\xi_i(\tau)$, $\tau\in S^d$, $i=1,\ldots,n$, $k=1,\ldots,m$ e $m=1,2,\ldots$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i^m(\theta)\xi_i(\tau) = \sum_{j=1}^{mn} r_j(\theta)\tilde{\xi}_j(\tau). \tag{2.15}$$

Segue então de (2.14) e (2.15) que

$$M(\|\cdot\|_{(p)}) = n^{-1/2}\lim_{m\to\infty}\left(\int_0^1\left(\int_{S^d}\left|\sum_{j=1}^{mn} r_j(\theta)\tilde{\xi}_j(\tau)\right|^p d\mu(\tau)\right)^{2/p} d\theta\right)^{1/2}. \tag{2.16}$$

Considere agora $p\in\mathbb{R}$ tal que $2\le p\le\infty$, e $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $g(t)=t^{2/p}$. Essa função possui derivada contínua em $(0,\infty)$. Temos também que g é côncava porque $2\le p$. Logo, para

$$h(\theta) = \int_{S^d}\left|\sum_{j=1}^{mn} r_j(\theta)\tilde{\xi}_j(\tau)\right|^p d\mu(\tau), \tag{2.17}$$

segue do Teorema 1.2.9, da Observação 1.2.10 e do Teorema 1.2.12 que

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_{S^d} \left| \sum_{j=1}^{mn} r_j(\theta)\tilde{\xi}_j(\tau) \right|^p d\mu(\tau) \right)^{2/p} d\theta &= \int_0^1 g \circ h \; d\theta \leq g\left(\int_0^1 h(\theta)\; d\theta \right) \\
&= \left(\int_0^1 \int_{S^d} \left| \sum_{j=1}^{mn} r_j(\theta)\tilde{\xi}_j(\tau) \right|^p d\mu(\tau) d\theta \right)^{2/p} \\
&= \left(\int_{S^d} \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{mn} r_j(\theta)\tilde{\xi}_j(\tau) \right|^p d\theta d\mu(\tau) \right)^{2/p}.
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

Pelas relações (2.16) e (2.18) e pelo Lema 2.4.6,

$$
\begin{aligned}
M(\|\cdot\|_{(p)}) &= n^{-1/2} \lim_{m\to\infty} \left(\int_0^1 \left(\int_{S^d} \left| \sum_{j=1}^{mn} r_j(\theta)\tilde{\xi}_j(\tau) \right|^p d\mu(\tau) \right)^{2/p} d\theta \right)^{1/2} \\
&\leq n^{-1/2} \lim_{m\to\infty} \left(\left(\int_{S^d} \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{mn} r_j(\theta)\tilde{\xi}_j(\tau) \right|^p d\theta d\mu(\tau) \right)^{2/p} \right)^{1/2} \\
&\leq \gamma(p) n^{-1/2} \lim_{m\to\infty} \left(\int_{S^d} \left(\sum_{j=1}^{mn} \left| \tilde{\xi}_j(\tau) \right|^2 \right)^{p/2} d\mu(\tau) \right)^{1/p}.
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

Pelo item (b) do Corolário 2.3.3,

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{mn} \left| \tilde{\xi}_j(\tau) \right|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left| \tilde{\xi}_{(i-1)m+k}(\tau) \right|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left| m^{-1/2} \xi_i(\tau) \right|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} m m^{-1} \left| \xi_i(\tau) \right|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \xi_i(\tau) \right|^2 \\
&= \sum_{j=N_0+1}^{N_1} \sum_{i=1}^{d_j} \left| \xi_i^j(\tau) \right|^2 = \sum_{j=N_0+1}^{N_1} d_j = n.
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Portanto, por (2.19) e (2.20),

$$
\begin{aligned}
M(\|\cdot\|_{(p)}) &\leq \gamma(p) n^{-1/2} \lim_{m\to\infty} \left(\int_{S^d} n^{p/2} d\mu(\tau) \right)^{1/p} \\
&= \gamma(p) n^{-1/2} n^{1/2} \\
&\leq C_1 p^{1/2},
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

onde a constante universal C_1 da última desigualdade é obtida do fato de $\gamma(p) \asymp p^{1/2}$. Assim, obtemos a desigualdade superior em (2.4).

Passamos agora à demonstração da desigualdade inferior em (2.6). Seja $\tilde{g} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $\tilde{g}(t) = t^2$. Essa função, assim como g, também possui derivada contínua em $(0, \infty)$. No entanto, $\tilde{g}$ é convexa. Para

$$\tilde{h}(\theta) = \int_{S^d} \left| \sum_{j=1}^{mn} r_j(\theta) \tilde{\xi}_j(\tau) \right| d\mu(\tau),$$

segue do Teorema 1.2.9 e do Teorema 1.2.12 que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_{S^d} \left| \sum_{j=1}^{mn} r_j(\theta) \tilde{\xi}_j(\tau) \right| d\mu(\tau) \right)^2 d\theta &= \int_0^1 \tilde{g} \circ \tilde{h} \; d\theta \geq \tilde{g} \left(\int_0^1 \tilde{h}(\theta) \; d\theta \right) \\
&= \left(\int_0^1 \int_{S^d} \left| \sum_{j=1}^{mn} r_j(\theta) \tilde{\xi}_j(\tau) \right| d\mu(\tau) d\theta \right)^2 \qquad (2.22) \\
&= \left(\int_{S^d} \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{mn} r_j(\theta) \tilde{\xi}_j(\tau) \right| d\theta d\mu(\tau) \right)^2 .
\end{aligned}$$

Consequentemente, pelas identidades (2.16) e (2.22), pelo Lema 2.4.6 e pelo item (b) do Corolário 2.3.3,

$$\begin{aligned}
M(\|\cdot\|_{(1)}) &= n^{-1/2} \lim_{m \to \infty} \left(\int_0^1 \left(\int_{S^d} \left| \sum_{j=1}^{mn} r_j(\theta) \tilde{\xi}_j(\tau) \right| d\mu(\tau) \right)^2 d\theta \right)^{1/2} \\
&\geq n^{-1/2} \lim_{m \to \infty} \int_{S^d} \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{mn} r_j(\theta) \tilde{\xi}_j(\tau) \right| d\theta d\mu(\tau) \\
&\geq \beta(1) n^{-1/2} \lim_{m \to \infty} \int_{S^d} \left(\sum_{j=1}^{mn} \left| \tilde{\xi}_j(\tau) \right|^2 \right)^{1/2} d\mu(\tau) \\
&= \beta(1) n^{-1/2} \int_{S^d} \left(\sum_{j=N_0+1}^{N_1} d_j \right)^{1/2} d\mu(\tau) \\
&\geq \frac{1}{2} n^{-1/2} n^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Por (2.11), concluímos que, para $1 \leq p \leq 2$,

$$M(\|\cdot\|_{(p)}) \geq M(\|\cdot\|_{(1)}) \geq \frac{1}{2}.$$

Finalmente, pela primeira desigualdade do Lema 2.4.7 com $p = \log_2 n$ (assumiremos então $p \geq 2$) e pela desigualdade (2.21),

$$
\begin{aligned}
M(\|\cdot\|_{(\infty)}) &= \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|_{(\infty)}^2 \, d\mu(x)\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{S^{n-1}} \|\xi^x\|_{\infty}^2 \, d\mu(x)\right)^{1/2} \\
&\leq \left(n^{2/p} \int_{S^{n-1}} \|\xi^x\|_{p}^2 \, d\mu(x)\right)^{1/2} \\
&= n^{1/p} \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|_{(p)}^2 \, d\mu(x)\right)^{1/2} \\
&\leq C_1 n^{1/p} p^{1/2} \\
&= C_1 (2^p)^{1/p} \left(\log_2 n\right)^{1/2} \\
&\leq C_2 \left(\ln n\right)^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Obtemos então a desigualdade superior em (2.5).

$\square$

Capítulo 3

Estimativas para n-Larguras de Classes de Sobolev em S^d

Na primeira seção deste capítulo, apresentamos os conceitos de n-larguras de Kolmogorov e de Gel'fand de um subconjunto A de um espaço vetorial normado X e também algumas propriedades dessas n-larguras. As demonstrações das propriedades aqui apresentadas podem ser encontradas nas referências [20] e [23].

Na segunda seção, estudamos estimativas superiores para as n-larguras de Kolmogorov das classes de Sobolev em S^d nos espaços L^q. Esses resultados foram demonstrados por Kushpel em [13], mas em nossos estudos, utilizamos uma técnica diferente daquela utilizada em [13] e que faz uso das estimativas para médias de Levy obtidas no Capítulo 2. As referências para esta seção são [11] e [23].

Na terceira seção, estudamos estimativas inferiores para as n-larguras de Kolmogorov das classes de Sobolev em S^d. Esses resultados foram demonstrados por Kushpel em [13] e em nossos estudos fazemos uso das técnicas apresentadas em [13] e em [1].

No final da terceira seção, apresentamos uma consequência imediata dos resultados das Seções 3.2 e 3.3 que diz que as n-larguras das classes de Sobolev em S^d nos espaços L^q são assintoticamente exatas, em termos de ordem, em diversas situações.

Neste capítulo, consideraremos espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dos números reais ou sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dos números complexos. Usaremos a notação $\lfloor x \rfloor$ para denotar a parte inteira do número $x \in \mathbb{R}$ e para $a \in \mathbb{R}$, usaremos também a notação

$$(a)_+ = \begin{cases} a, & \text{se } a > 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

3.1 n-Larguras

Definição 3.1.1. Sejam X um espaço vetorial normado sobre o corpo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ e com norma $\|\cdot\|_X$ e X_n um subespaço n-dimensional de X. Para cada $x \in X$, $E(x, X_n)$ denotará a distância do subespaço X_n ao ponto x. Em outras palavras,

$$E(x, X_n) = \inf\{\|x - y\|_X : y \in X_n\}.$$

Dizemos que um elemento $y^* \in X_n$ é a melhor aproximação de x em X_n quando $E(x, X_n) = \|x - y^*\|_X$.

Definição 3.1.2. Sejam X um espaço vetorial normado, X_n um subespaço n-dimensional de X e A um subconjunto não vazio de X. O desvio de A em X_n é definido por

$$E(A, X_n) = \sup\{E(x, X_n) : x \in A\} = \sup_{x\in A} \inf_{y\in X_n} \|x - y\|_X .$$

Definição 3.1.3. Sejam X um espaço vetorial normado e $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. A n-largura de Kolmogorov de A em X é definida por

$$\begin{aligned} d_n(A, X) &= \inf\{E(A, X_n) : X_n \text{ é um subespaço } n\text{-dimensional de } X\} \\ &= \inf_{X_n} \sup_{x\in A} \inf_{y\in X_n} \|x - y\|_X . \end{aligned}$$

Observação 3.1.4. Alguns autores preferem o termo n-diâmetro ao termo n-largura. Porém, somente a segunda nomenclatura será adotada no decorrer desse texto.

Listaremos agora algumas propriedades de relevância da n-largura de Kolmogorov.

Teorema 3.1.5. Sejam X e Y espaços vetoriais normados, A e B subconjuntos não vazios de X e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então:

(a) $d_n(\alpha A, X) = |\alpha|\, d_n(A, X)$;

(b) $d_n(A, X) = d_n(b(A), X)$, onde $b(A) = \{\beta x : x \in A, \beta \in \mathbb{K}, |\beta| \leq 1\}$;

(c) se $B \subset A$, então $d_n(B, X) \leq d_n(A, X)$;

(d) $d_n(A, X) \geq d_{n+1}(A, X)$, $n = 0, 1, ...$;

(e) se $X \subset Y$, X tem a norma induzida de Y e $A \subset X$, então $d_n(A, X) \geq d_n(A, Y)$;

(f) $d_{m+n}(C + D, U + V) \leq d_m(C, U) + d_n(D, V)$, onde U e V são subespaços de X com a norma induzida de X, $C \subset U$, $D \subset V$ e $U \cap V = \{0\}$.

Definição 3.1.6. Seja X um espaço vetorial normado e $A \subset X$. A n-largura de Gel'fand de A em X é definida por

$$d^n(A, X) = \inf_{L^n} \sup_{x\in A\cap L^n} \|x\|_X ,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os subespaços L^n de X de codimensão no máximo n.

Lembremos que a codimensão de um subespaço Y de um espaço vetorial X é definida como a dimensão do espaço quociente X/Y.

Vejamos algumas propriedades que a n-largura de Gel'fand satisfaz.

Teorema 3.1.7. Sejam X um espaço vetorial normado, A e B subconjuntos não vazios de X e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então:

(a) $d^n(\alpha A, X) = |\alpha|\, d^n(A, X)$;

(b) $d^n(A, X) = d^n(b(A), X)$, onde $b(A) = \{\beta x : x \in A, \beta \in \mathbb{K}, |\beta| \leq 1\}$;

(c) se $B \subset A$, então $d^n(B, X) \leq d^n(A, X)$;

(d) $d^n(A, X) \geq d^{n+1}(A, X)$, $n = 0, 1, \ldots$.

Notação 3.1.8. Seja X um espaço vetorial com norma $\|\cdot\|_X$. Denotaremos por B_X a bola unitária fechada

$$B_X = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}.$$

Para $1 \leq p \leq \infty$, denotaremos por U_p a bola unitária fechada $B_{L^p(S^d)}$ de $L^p(S^d)$.

Notação 3.1.9. O espaço vetorial de todos os operadores lineares contínuos $T : X \to Y$, onde X e Y são espaços vetoriais normados, será representado por $L(X, Y)$. A norma de $T \in L(X, Y)$ é definida por

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_Y : x \in B_X\}.$$

Consideraremos sempre o espaço vetorial $L(X, Y)$ munido com essa norma.

Notação 3.1.10. Denotaremos por $K(X, Y)$ o subespaço vetorial de $L(X, Y)$ formado por todos os operadores compactos de X em Y, isto é, por todos os operadores $T \in L(X, Y)$ para os quais o fecho do conjunto $T(B_X) = \{T(x) : x \in B_X\}$ é compacto em Y.

Notação 3.1.11. Seja X um espaço vetorial normado sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). O espaço dual $L(X, \mathbb{K})$ de X, isto é, o espaço vetorial formado por todos os funcionais lineares contínuos de X, será denotado por X^*.

Observação 3.1.12. Lembremos que, se $\|\cdot\|_X$ é a norma considerada em X, então X^* é um espaço vetorial normado cuja norma de um funcional $f \in X^*$ é dada por

$$\|f\|^* = \sup\{|f(x)| : x \in B_X\}.$$

Definição 3.1.13. Seja $T \in L(X, Y)$. Definimos a n-largura de Kolmogorov do operador T por

$$d_n(T) = d_n(T(B_X), Y) = \inf_{Y_n} \sup_{x \in B_X} \inf_{y \in Y_n} \|T(x) - y\|_Y,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os subespaços n-dimensionais Y_n de Y. Definimos a n-largura de Gel'fand do operador T por

$$d^n(T) = d^n(T(B_X), Y) = \inf_{L^n} \sup_{x \in B_X \cap L^n} \|T(x)\|_Y ,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os subespaços L^n de X de codimensão no máximo n.

Definição 3.1.14. Seja $T \in L(X, Y)$. Definimos o operador adjunto $T^* : Y^* \to X^*$ de T como sendo o operador que a cada elemento $g \in Y^*$ associa o elemento $T^*(g) \in X^*$ definido por

$$T^*(g)(x) = g(T(x)), \quad x \in X.$$

Teorema 3.1.15. (ver [23]) Se $T \in K(X, Y)$, então

$$d_n(T) = d^n(T^*).$$

3.2 Estimativas Superiores

Definição 3.2.1. Seja $\mathcal{H}$ o espaço vetorial formado por todas as combinações lineares finitas de elementos de $\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$ e seja $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ uma sequência de números complexos. O operador linear $\Lambda : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido por

$$\Lambda\left(\sum_{k=0}^{n} Y^{(k)}\right) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k Y^{(k)},$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k$, $k = 0, 1, \ldots$, ou equivalentemente,

$$\Lambda\left(f\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \tilde{Z}^{(k)} * f,$$

para toda

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{Z}^{(k)} * f \in \mathcal{H},$$

é chamado o operador multiplicador associado à sequência $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Observação 3.2.2. Seja $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ uma sequência de números complexos e seja Λ o operador multiplicador associado à sequência $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$. Para $f \in \mathcal{H}$, temos

$$\|\Lambda(f)\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k|^2 \left\|\tilde{Z}^{(k)} * f\right\|_2^2 .$$

Se a sequência $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ é limitada, isto é, $C = \sup_k |\lambda_k| < \infty$, então

$$\|\Lambda(f)\|_2^2 \leq C^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left\|\tilde{Z}^{(k)} * f\right\|_2^2 = C^2 \|f\|_2^2 .$$

Portanto, como $\mathcal{H}$ é denso em $L^2(S^d)$ (ver Corolário 2.2.9), então Λ pode ser extendido à toda função $f \in L^2(S^d)$ e essa extensão, que ainda denotaremos por Λ, é um operador limitado de $L^2(S^d)$ em $L^2(S^d)$, isto é,

$$\|\Lambda(f)\|_2 \leq C \|f\|_2 , \quad f \in L^2(S^d).$$

É fácil ver que se o operador Λ pode ser extendido como um operador limitado de $L^2(S^d)$ em $L^2(S^d)$, então a sequência $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ tem que ser limitada (ver Teorema 1.4.9, [17]).

Observação 3.2.3. Seja $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, e seja $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ a sequência numérica definida por $\lambda_k = (k(k+d-1))^{-\gamma/2}$ para $k \geq 1$ e $\lambda_0 = 0$. Denotamos por Λ^γ o operador multiplicador associado à sequência $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$, isto é,

$$\Lambda^\gamma(f) = \sum_{k=1}^{\infty} (k(k+d-1))^{-\gamma/2} \tilde{Z}^{(k)} * f, \quad f \in \mathcal{H}.$$

Consideremos $p, q \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$. Se $\gamma > 0$ e $\gamma > d(1/p - 1/q)$, então o operador Λ^γ é um operador limitado de $L^p(S^d)$ em $L^q(S^d)$ (ver Observação 3.3.6, [17]).

Definição 3.2.4. Sejam $\gamma, p \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$. A classe de Sobolev $W_p^\gamma(S^d)$ na esfera S^d é definida como sendo o conjunto

$$W_p^\gamma(S^d) = \{c + \Lambda^\gamma(\varphi) : \varphi \in U_p, c \in \mathbb{R}\} .$$

Observação 3.2.5. Segue pela Observação 3.2.3 que $W_p^\gamma(S^d) \subset L^q(S^d)$ se $\gamma > d(1/p - 1/q)$.

Considere agora o operador multiplicador $\Lambda^{-\gamma}$ associado à sequência $\left\{\overline{\lambda}_k\right\}_{k=0}^{\infty}$, $\overline{\lambda}_k = (k(k+d-1))^{\gamma/2}$, $k \geq 0$. O espaço de Sobolev $\overline{W}_p^\gamma(S^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\gamma > 0$, é definido como sendo o espaço vetorial

$$\overline{W}_p^\gamma(S^d) = \left\{\varphi \in L^p(S^d) : \Lambda^{-\gamma}(\varphi) \in L^p(S^d)\right\}$$

munido da norma

$$\|\varphi\|_{\overline{W}_p^\gamma} = \left\|\Lambda^{-\gamma}(\varphi)\right\|_p .$$

Observamos que a classe de Sobolev $W_p^\gamma(S^d)$ é a bola unitária fechada $\left\{\varphi \in \overline{W}_p^\gamma(S^d) : \|\varphi\|_{\overline{W}_p^\gamma} \leq 1\right\}$ do espaço de Sobolev $\overline{W}_p^\gamma(S^d)$ (ver Observação 3.3.4, [17]).

Definição 3.2.6. Seja $\|\cdot\|$ uma norma em $\mathbb{R}^n$. Definimos a norma dual $\|\cdot\|^\circ$ em $\mathbb{R}^n$ por

$$\|x\|^\circ = \sup\{|\langle x, y\rangle| : y \in \mathbb{R}^n, \|y\| \leq 1\} , \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Notação 3.2.7. Se B^n é a bola unitária $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, denotaremos por $(B^n)^\circ$ a bola unitária $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^\circ \leq 1\}$.

Observação 3.2.8. Seja $\|\cdot\|$ uma norma em $\mathbb{R}^n$ e seja $\|\cdot\|^{\circ\circ}$ a norma dual de $\|\cdot\|^\circ$. Pela definição de norma, $\|0\| = \|0\|^{\circ\circ}$. Por outro lado, para $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, temos

$$\begin{aligned}
\|x\|^{\circ\circ} &= \sup\{|\langle x, y\rangle| : y \in \mathbb{R}^n, \|y\|^\circ \leq 1\} \\
&= \sup\left\{|\langle x, y\rangle| : y \in \mathbb{R}^n, \|y\|^\circ = \sup_{\|z\|\leq 1} |\langle y, z\rangle| \leq 1\right\} \\
&= \sup\left\{\|x\| \left|\left\langle \frac{x}{\|x\|}, y\right\rangle\right| : y \in \mathbb{R}^n, \|y\|^\circ = \sup_{\|z\|\leq 1} |\langle y, z\rangle| \leq 1\right\} \\
&= \|x\| \sup\left\{\left|\left\langle \frac{x}{\|x\|}, y\right\rangle\right| : y \in \mathbb{R}^n, \|y\|^\circ = \sup_{\|z\|\leq 1} |\langle y, z\rangle| \leq 1\right\} \leq \|x\|,
\end{aligned}$$

isto é, $\|x\|^{\circ\circ} \leq \|x\|$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$.

Lema 3.2.9. Dado um funcional linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, existe um único $v \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(x) = \langle x, v\rangle, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Seja $v = f(e_1)e_1 + \cdots + f(e_n)e_n \in \mathbb{R}^n$, onde $\{e_k\}_{k=1}^n$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Seja $\varphi_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi_v(x) = \langle x, v\rangle$. Pelas propriedades do produto interno, segue que φ_v é um funcional linear em $\mathbb{R}^n$ e, se $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, então

$$\begin{aligned}
\varphi_v(x) &= \langle x, v\rangle \\
&= \langle x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n, f(e_1)e_1 + \cdots + f(e_n)e_n\rangle \\
&= x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n) \\
&= f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Se $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ satizfaz $f(x) = \langle x, w\rangle$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então em particular, para $x = v - w$, temos

$$\begin{aligned}
0 &= f(v - w) - f(v - w) \\
&= \langle v - w, v\rangle - \langle v - w, w\rangle \\
&= \langle v - w, v - w\rangle \\
&= |||v - w|||^2,
\end{aligned}$$

o que implica $v = w$.

□

Teorema 3.2.10. Se $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$, então existe um isomorfismo $F : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|^\circ) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)^*$ tal que

$$\|x\|^\circ = \|F(x)\|^*$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Seja $F : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|^\circ) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)^*$ definida por

$$F(x) = \varphi_x,$$

onde φ_x é o funcional linear definido por $\varphi_x(u) = \langle u, x \rangle$ (ver Lema 3.2.9). Dado $f \in (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)^*$, ainda pelo Lema 3.2.9, existe um único $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $f = \varphi_v = F(v)$. Logo, F é sobrejetiva. Pelas priopriedades usuais do produto interno, temos

$$\begin{aligned} F(cx+y)(v) &= \varphi_{cx+y}(v) \\ &= \langle v, cx+y \rangle \\ &= c\langle v, x \rangle + \langle v, y \rangle \\ &= c\varphi_x(v) + \varphi_y(v) \\ &= cF(x)(v) + F(y)(v) \\ &= (cF(x) + F(y))(v), \end{aligned} \tag{3.1}$$

para todos $x, y, v \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$. Logo, $F(cx + y) = cF(x) + F(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$, isto é, F é linear. Se $x \in \mathbb{R}^n$ é tal que $F(x) = 0$, então

$$0 = F(x)(v) = \varphi_x(v) = \langle v, x \rangle = 0, \quad \text{para todo } v \in \mathbb{R}^n.$$

Em particular, $|||x|||^2 = \langle x, x \rangle = 0$, o que implica $x = 0$ e consequentemente, a injetividade de F. Por fim,

$$\begin{aligned} \|F(x)\|^* = \|\varphi_x\|^* &= \sup\{|\varphi_x(v)| : v \in \mathbb{R}^n, \|v\| \le 1\} \\ &= \sup\{|\langle v, x \rangle| : v \in \mathbb{R}^n, \|v\| \le 1\} = \|x\|^\circ. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.11. (ver [18]) Seja $\|\cdot\|$ uma norma em $\mathbb{R}^n$ e seja $\|\cdot\|^\circ$ a sua norma dual. Então, para cada $0 < \lambda < 1$, existe um subespaço F_k de $\mathbb{R}^n$, com $\dim F_k = k > \lambda n$, tal que

$$|||x||| \le CM^\circ(1-\lambda)^{-1/2} \|x\|, \quad \text{para todo } x \in F_k,$$

onde $C > 0$ é uma constante absoluta e

$$M^\circ = M(\|\cdot\|^\circ) = \left(\int_{S^{n-1}} (\|x\|^\circ)^2 d\mu(x) \right)^{1/2}$$

é a Média de Levy da norma dual $\|\cdot\|^\circ$.

Notação 3.2.12. Seja V um subespaço vetorial de $L^p(S^d)$, $1 \le p \le \infty$. Usaremos a notação $L^p(S^d) \cap V$ para designar o subespaço vetorial V quando munido da norma de $L^p(S^d)$.

Teorema 3.2.13. Para as classes de Sobolev em S^d, temos,

$$d_n\left(W_p^\gamma(S^d), L^q(S^d)\right) \le C \begin{cases} n^{-\gamma/d}, & \text{se } 2 \le p \le q < \infty \text{ e } \gamma > d/2, \\ n^{-\gamma/d+(1/p-1/2)}, & \text{se } 1 \le p \le 2 \le q < \infty \text{ e } \gamma > d/p, \end{cases}$$

e

$$d_n\left(W_p^\gamma(S^d), L^\infty(S^d)\right) \le C \begin{cases} (\ln n)^{1/2} n^{-\gamma/d}, & \text{se } p \ge 2 \text{ e } \gamma > d/2, \\ (\ln n)^{1/2} n^{-\gamma/d+(1/p-1/2)}, & \text{se } 1 \le p \le 2 \text{ e } \gamma > d/p. \end{cases}$$

Demonstração. Sejam $0 < \lambda < 1$, $1 \le p \le 2 \le q < \infty$ e $\{N_k\}_{k=0}^\infty$ uma sequência de números inteiros não-negativos tal que $N_0 = 0$ e $N_k < N_{k+1}$ quando $k \ge 1$. Denotamos $\mathcal{T}_{N_0,N_1} = \bigoplus_{l=0}^{N_1} \mathcal{H}_l$ e para $k \ge 1$, $\mathcal{T}_{N_k,N_{k+1}} = \bigoplus_{l=N_k+1}^{N_{k+1}} \mathcal{H}_l$ e $n_k = \dim \mathcal{T}_{N_k,N_{k+1}}$. Pelo Teorema 3.2.11, existe um subespaço F_j de $\mathbb{R}^{n_k}$ com $\dim F_j = j > \lambda n_k$, tal que

$$\|x\|_{(2)} \le CM(\|\cdot\|_{(q)}^{\circ\circ})(1-\lambda)^{-1/2} \|x\|_{(q)}^\circ, \quad x \in F_j.$$

Pela Observação 3.2.8, $\|x\|_{(q)}^{\circ\circ} \le \|x\|_{(q)}$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^{n_k}$. Assim, pela definição de Média de Levy,

$$M(\|\cdot\|_{(q)}^{\circ\circ}) \le M(\|\cdot\|_{(q)}).$$

Portanto,

$$\|x\|_{(2)} \le CM(\|\cdot\|_{(q)})(1-\lambda)^{-1/2} \|x\|_{(q)}^\circ, \quad x \in F_j.$$

Se $m = n_k - j$, então

$$m = n_k - j < n_k - \lambda n_k = (1-\lambda) n_k$$

e assim $(1-\lambda)^{-1/2} < (n_k/m)^{1/2}$. Com isso,

$$\|x\|_{(2)} \le CM(\|\cdot\|_{(q)}) \left(\frac{n_k}{m}\right)^{1/2} \|x\|_{(q)}^\circ, \quad x \in F_j.$$

Pelo Teorema 2.4.8,

$$M(\|\cdot\|_{(q)}) \le \begin{cases} C_1 q^{1/2}, & 2 \le q < \infty, \\ C_1 (\ln n_k)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases}$$

o que implica

$$\|x\|_{(2)} \le C_2 \left(\frac{n_k}{m}\right)^{1/2} \|x\|_{(q)}^\circ \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \le q < \infty, \\ (\ln n_k)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \quad x \in F_j. \tag{3.2}$$

Seja J o isomorfismo entre $\mathbb{R}^{n_k}$ e $\mathcal{T}_{N_k,N_{k+1}}$ citado na Observação 2.4.3. Pela igualdade (2.3),

$$\left\|J^{-1}(\xi)\right\|_{(q)} = \left\|J\left(J^{-1}(\xi)\right)\right\|_q = \|\xi\|_q\,, \quad \xi \in \mathcal{T}_{N_k,N_{k+1}}. \tag{3.3}$$

Logo, $B^{n_k}_{(p)} = J^{-1}(B^{n_k}_p)$. Além disso, se X_m é um subespaço m-dimensional de $\mathcal{T}_{N_k,N_{k+1}}$, então $Y_m = J^{-1}(X_m)$ é um subespaço m-dimensional de $\mathbb{R}^{n_k}$. Lembramos que $\dim F_j = j$ e portanto $\operatorname{codim} F_j = n_k - j = m$. Assim, pelas Definições 3.1.3 e 3.1.6, pela igualdade (3.3), pelo Teorema 3.1.15 e por (3.2),

$$\begin{aligned}
d_m\left(B^{n_k}_2, L^q(S^d)\cap\mathcal{T}_{N_k,N_{k+1}}\right) &= \inf_{X_m}\sup_{\varphi\in B^{n_k}_2}\inf_{\xi\in X_m}\|\varphi-\xi\|_q\\
&= \inf_{X_m}\sup_{\varphi\in B^{n_k}_2}\inf_{\xi\in X_m}\left\|J^{-1}(\varphi)-J^{-1}(\xi)\right\|_{(q)}\\
&= \inf_{Y_m}\sup_{J^{-1}(\varphi)\in B^{n_k}_{(2)}}\inf_{J^{-1}(\xi)\in Y_m}\left\|J^{-1}(\varphi)-J^{-1}(\xi)\right\|_{(q)}\\
&= \inf_{Y_m}\sup_{y\in B^{n_k}_{(2)}}\inf_{x\in Y_m}\|y-x\|_{(q)} = d_m\left(B^{n_k}_{(2)}, (\mathbb{R}^{n_k}, \|\cdot\|_{(q)})\right)\\
&= d^m\left((B^{n_k}_{(q)})^\circ, (\mathbb{R}^{n_k}, \|\cdot\|_2)\right) = \inf_{L^m}\sup_{x\in(B^{n_k}_{(q)})^\circ\cap L^m}\|x\|_{(2)}\\
&\le \sup_{x\in(B^{n_k}_{(q)})^\circ\cap F_j}\|x\|_{(2)}\\
&\le \sup_{x\in(B^{n_k}_{(q)})^\circ\cap F_j} C_2\left(\frac{n_k}{m}\right)^{1/2}\|x\|^\circ_{(q)}\begin{cases} q^{1/2}, & 2\le q<\infty,\\ (\ln n_k)^{1/2}, & q=\infty,\end{cases}\\
&\le C_2\left(\frac{n_k}{m}\right)^{1/2}\begin{cases} q^{1/2}, & 2\le q<\infty,\\ (\ln n_k)^{1/2}, & q=\infty,\end{cases}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

onde $L^q(S^d)\cap\mathcal{T}_{N_k,N_{k+1}}$ denota o subespaço vetorial $\mathcal{T}_{N_k,N_{k+1}}$ de $L^q(S^d)$ quando munido da norma de $L^q(S^d)$. Observamos que, como λ foi tomado arbitrário e $0\le m<(1-\lambda)n_k$, podemos concluir que m pode ser qualquer inteiro satisfazendo $0\le m<n_k$.

Seja agora S_{N_k} a soma parcial definida por

$$S_{N_k}(f) = \sum_{j=0}^{N_k}\tilde{Z}^{(j)} * f, \quad f\in W^\gamma_p(S^d).$$

Definimos $\phi_{N_0,N_1}(f) = S_{N_1}(f)$ e $\phi_{N_k,N_{k+1}}(f) = S_{N_{k+1}}(f) - S_{N_k}(f)$ para $k\ge 1$. Notemos que

$$\phi_{N_k,N_{k+1}}(f) = \sum_{j=0}^{N_{k+1}}\tilde{Z}^{(j)} * f - \sum_{j=0}^{N_k}\tilde{Z}^{(j)} * f = \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}}\tilde{Z}^{(j)} * f. \tag{3.5}$$

Como $p\le 2$ e $\gamma > d/p > d(1/p-1/2)$, segue da Observação 3.2.5 que $W^\gamma_p(S^d)\subset L^2(S^d)$. Assim, pelo Teorema 2.3.12, podemos escrever

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{Z}^{(j)} * f,$$

onde a série acima converge em $L^2(S^d)$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
f - S_{N_s}(f) &= \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{Z}^{(j)} * f - \sum_{j=0}^{N_s} \tilde{Z}^{(j)} * f = \sum_{j=N_s+1}^{\infty} \tilde{Z}^{(j)} * f \\
&= \sum_{j=N_s+1}^{N_{s+1}} \tilde{Z}^{(j)} * f + \sum_{j=N_{s+1}+1}^{N_{s+2}} \tilde{Z}^{(j)} * f + \cdots \\
&= \phi_{N_s,N_{s+1}}(f) + \phi_{N_{s+1},N_{s+2}}(f) + \cdots \\
&= \sum_{k=s}^{\infty} \phi_{N_k,N_{k+1}}(f). \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Como $S_{N_s}(f) \to f$ em $L^2(S^d)$, a igualdade (3.6) implica que

$$\lim_{s\to\infty} \left\| \sum_{k=s}^{\infty} \phi_{N_k,N_{k+1}}(f) \right\|_2 = 0.$$

Ou seja, dada $f \in W_p^\gamma(S^d)$, temos

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{N_k,N_{k+1}}(f), \qquad (3.7)$$

onde a convergência da série ocorre em $L^2(S^d)$. Por outro lado, se $f = c + \Lambda^\gamma\varphi$, $\varphi \in U_p$, então pela igualdade (3.5) e pela Observação 2.3.11,

$$\begin{aligned}
\phi_{N_k,N_{k+1}}(f) &= \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \tilde{Z}^{(j)} * (c + \Lambda^\gamma\varphi) = \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \tilde{Z}^{(j)} * \Lambda^\gamma\varphi \\
&= \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \tilde{Z}^{(j)} * \left(\sum_{i=0}^{\infty} (i(i+d-1))^{-\gamma/2} \tilde{Z}^{(i)} * \varphi \right) \\
&= \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} (j(j+d-1))^{-\gamma/2} \tilde{Z}^{(j)} * \varphi = \Lambda^\gamma \left(\sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \tilde{Z}^{(j)} * \varphi \right) \\
&= \Lambda^\gamma \left(\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi \right). \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Pelas igualdades (3.7) e (3.8), obtemos

$$W_p^\gamma(S^d) \subset \bigoplus_{k=0}^{\infty} \left(\Lambda^\gamma \circ \phi_{N_k,N_{k+1}} \right) U_p = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^\gamma \left(\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi \right) : \varphi \in U_p \right\}. \qquad (3.9)$$

Como a sequência $\lambda_k = (k(k+d-1))^{-\gamma/2}$ é decrescente, temos

$$
\begin{aligned}
\left\|(\Lambda^\gamma \circ \phi_{N_k,N_{k+1}})\varphi\right\|_2^2 &= \left\|\sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} (j(j+d-1))^{-\gamma/2}\tilde{Z}^{(j)} * \varphi\right\|_2^2 \\
&= \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} (j(j+d-1))^{-\gamma} \left\|\tilde{Z}^{(j)} * \varphi\right\|_2^2 \\
&\leq ((N_k+1)((N_k+1)+d-1))^{-\gamma} \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \left\|\tilde{Z}^{(j)} * \varphi\right\|_2^2 \\
&\leq (N_k(N_k+d-1))^{-\gamma} \left\|\sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \tilde{Z}^{(j)} * \varphi\right\|_2^2 \\
&\leq N_k^{-2\gamma} \left\|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\right\|_2^2 .
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

Pelo Teorema 2.3.8,

$$
\left\|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\right\|_2 = \left\|\sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \tilde{Z}^{(j)} * \varphi\right\|_2 \leq \|\varphi\|_p \left\|\sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} Z_e^{(j)}\right\|_{1/(3/2-1/p)}, \quad 1 \leq p \leq 2. \tag{3.11}
$$

Pela definição de Harmônico Zonal e pelo Corolário 2.3.3,

$$
\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} Z_e^{(j)}\right\|_2^2 &= \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \int_{S^d} Z_e^{(j)}\overline{Z_e^{(j)}} d\mu = \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \overline{Z_e^{(j)}}(e) \\
&= \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} d_k = n_k.
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

Para $p = 1$ obtemos de (3.11) e (3.12) que

$$
\left\|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\right\|_2 \leq n_k^{1/2} \|\varphi\|_1 .
$$

Para $p = 2$, temos $\varphi \in U_2 \subset L^2(S^d)$. Assim, pelo Teorema 2.3.12, podemos escrever

$$
\varphi = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{Z}^{(j)} * \varphi.
$$

Novamente pela igualdade (3.5),

$$
\left\|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\right\|_2^2 = \left\|\sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \tilde{Z}^{(j)} * \varphi\right\|_2^2 = \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \left\|\tilde{Z}^{(j)} * \varphi\right\|_2^2 \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left\|\tilde{Z}^{(j)} * \varphi\right\|_2^2 \leq \left\|\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{Z}^{(j)} * \varphi\right\|_2^2 = \|\varphi\|_2^2 .
$$

Consequentemente, obtemos as seguintes desigualdades:

$$\left\|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\right\|_2 \le n_k^{1/2}\left\|\varphi\right\|_1, \quad \left\|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\right\|_2 \le \left\|\varphi\right\|_2.$$

Tomemos

$$\begin{cases} K_0 = n_k^{1/2}, & K_1 = 1, \\ q_0 = 2, & p_0 = 1, \\ q_1 = 2, & p_1 = 2. \end{cases}$$

Aplicando o Lema 1.2.11 temos,

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} = \frac{1-t}{1} + \frac{t}{2} = \frac{2-t}{2}, \qquad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1} = \frac{1-t}{2} + \frac{t}{2} = \frac{1}{2}, \quad t \in [0,1]$$

e

$$K_0^{1-t}K_1^t = \left(n_k^{1/2}\right)^{1-t} = \left(n_k^{1/2}\right)^{2/p_t-1} = n_k^{1/p_t-1/2},$$

resultando a desigualdade

$$\left\|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\right\|_2 \le n_k^{1/p-1/2}\left\|\varphi\right\|_p \le n_k^{1/p-1/2}, \quad 1 \le p \le 2. \tag{3.13}$$

Segue de (3.10) e (3.13) que

$$\left\|\frac{(\Lambda^\gamma \circ \phi_{N_k,N_{k+1}})\varphi}{N_k^{-\gamma}n_k^{1/p-1/2}}\right\|_2 \le 1,$$

isto é, $(\Lambda^\gamma \circ \phi_{N_k,N_{k+1}})\varphi \in N_k^{-\gamma}n_k^{1/p-1/2}B_2^{n_k}$. Desta forma, $(\Lambda^\gamma \circ \phi_{N_k,N_{k+1}})U_p \subset N_k^{-\gamma}n_k^{1/p-1/2}B_2^{n_k}$. Portanto dessa inclusão e da inclusão (3.9),

$$W_p^\gamma(S^d) \subset \bigoplus_{k=0}^{\infty} N_k^{-\gamma}n_k^{1/p-1/2}B_2^{n_k}. \tag{3.14}$$

Pelo Teorema 2.4.7, temos para $\psi \in B_2^{n_k}$ que

$$\left\|\psi\right\|_q \le n_k^{1/2-1/q}\left\|\psi\right\|_2 \le n_k^{1/2-1/q},$$

ou seja, $\psi \in n_k^{1/2-1/q}B_q^{n_k}$ e portanto $B_2^{n_k} \subset n_k^{1/2-1/q}B_q^{n_k}$. Segue dessa última inclusão e da inclusão (3.14) que para qualquer $M \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
W_p^\gamma(S^d) &\subset \bigoplus_{k=0}^{\infty} N_k^{-\gamma} n_k^{1/p-1/2} B_2^{n_k} \\
&= \bigoplus_{k=0}^{M} N_k^{-\gamma} n_k^{1/p-1/2} B_2^{n_k} + \bigoplus_{k=M+1}^{\infty} N_k^{-\gamma} n_k^{1/p-1/2} B_2^{n_k} \\
&\subset \bigoplus_{k=0}^{M} N_k^{-\gamma} n_k^{1/p-1/2} B_2^{n_k} + \bigoplus_{k=M+1}^{\infty} N_k^{-\gamma} n_k^{1/p-1/2} \left(n_k^{1/2-1/q} B_q^{n_k}\right) \\
&= \bigoplus_{k=0}^{M} N_k^{-\gamma} n_k^{1/p-1/2} B_2^{n_k} + \bigoplus_{k=M+1}^{\infty} N_k^{-\gamma} n_k^{1/p-1/q} B_q^{n_k}.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Seja $\beta \in \mathbb{N}$ e $\{m_k\}_{k=0}^{M}$ uma sequência de números naturais tal que

$$
\sum_{k=0}^{M} m_k \leq \beta.
$$

Denotemos $\mathcal{T}_{N_M} = \bigoplus_{k=0}^{M} \mathcal{T}_{N_k, N_{k+1}} = \bigoplus_{l=0}^{N_{M+1}} \mathcal{H}_l$, $\overline{\mathcal{T}}_{N_M} = \left\{ f \in L^1(S^d) : \tilde{Z}^{(k)} * f = 0, 0 \leq k \leq N_{M+1} \right\}$. Temos que $\mathcal{T}_{N_M} \cap \overline{\mathcal{T}}_{N_M} = \{0\}$ e $\mathcal{T}_{N_M} \oplus \overline{\mathcal{T}}_{N_M} = L^1(S^d)$, assim

$$
L^p(S^d) = L^p(S^d) \cap \mathcal{T}_{N_M} \oplus L^p(S^d) \cap \overline{\mathcal{T}}_{N_M}, \quad 1 \leq p \leq \infty.
$$

Então pelos itens (a), (c), (e) e (f) do Teorema 3.1.5,

$$
\begin{aligned}
&d_\beta\left(W_p^\gamma\,(S^d), L^q(S^d)\right) \\
&\quad \leq d_\beta\left(\bigoplus_{k=0}^{M} N_k^{-\gamma} n_k^{1/p-1/2} B_2^{n_k} + \bigoplus_{k=M+1}^{\infty} N_k^{-\gamma} n_k^{1/p-1/q} B_q^{n_k}, L^q(S^d) \cap \mathcal{T}_{N_M} \oplus L^q(S^d) \cap \overline{\mathcal{T}}_{N_M}\right) \\
&\quad \leq d_\beta\left(\bigoplus_{k=0}^{M} N_k^{-\gamma} n_k^{1/p-1/2} B_2^{n_k}, \bigoplus_{k=0}^{M} L^q(S^d) \cap \mathcal{T}_{N_k, N_{k+1}}\right) \\
&\quad + d_0\left(\bigoplus_{k=M+1}^{\infty} N_k^{-\gamma} n_k^{1/p-1/q} B_q^{n_k}, L^q(S^d) \cap \overline{\mathcal{T}}_{N_M}\right) \\
&\quad \leq \sum_{k=0}^{M} d_{m_k}\left(N_k^{-\gamma} n_k^{1/p-1/2} B_2^{n_k}, L^q(S^d) \cap \mathcal{T}_{N_k, N_{k+1}}\right) + \sum_{k=M+1}^{\infty} 2 N_k^{-\gamma} n_k^{1/p-1/q} \\
&\quad \leq \sum_{k=0}^{M} N_k^{-\gamma} n_k^{1/p-1/2} d_{m_k}\left(B_2^{n_k}, L^q(S^d) \cap \mathcal{T}_{N_k, N_{k+1}}\right) + \sum_{k=M+1}^{\infty} 2 N_k^{-\gamma} n_k^{1/p-1/q}.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Vamos agora especificar as sequências $\{N_k\}_{k=0}^{\infty}$ e $\{m_k\}_{k=0}^{M}$. Fixamos $n \in \mathbb{N}$ e tomamos

$$
N_k = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ \left\lfloor 2^{k/(d\gamma)} n^{1/d} \right\rfloor, & k \geq 1, \end{cases} \quad m_k = \left\lfloor 2^{-\delta k} n \right\rfloor + 1, \quad M = \left\lfloor \log_2 n^{1/\delta} \right\rfloor,
$$

onde $\lfloor a \rfloor$ denota a parte inteira do número real a e δ é um número real positivo que satisfaz

$$\delta\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) \leq \frac{1}{d}-\frac{1}{p\gamma}. \tag{3.17}$$

Notemos que

$$N_k \asymp 2^{k/(d\gamma)} n^{1/d}, \quad m_k \asymp 2^{-\delta k} n,$$

isto é, existem constantes positivas C_3, C_4 e C_5 tais que

$$\begin{array}{cc} C_3 2^{k/(d\gamma)} n^{1/d} \leq N_k \leq C_4 2^{k/(d\gamma)} n^{1/d}, & k \in \mathbb{N}, \\ C_5 2^{-\delta k} n \leq m_k, & 0 \leq k \leq M. \end{array} \tag{3.18}$$

Além disso,

$$\sum_{k=0}^{M} m_k = \sum_{k=0}^{M}\left(\left\lfloor 2^{-\delta k} n\right\rfloor + 1\right) \leq M + \sum_{k=0}^{M} 2^{-\delta k} n \leq M + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\delta k} n \leq M + \frac{n}{1-2^{-\delta}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{M} m_k &\leq M + \frac{n}{1-2^{-\delta}} \leq \log_2 n^{1/\delta} + \frac{n}{1-2^{-\delta}} \leq \frac{\log_2 n}{\delta} + \frac{n}{1-2^{-\delta}} \\ &\leq \frac{n}{\delta} + \frac{n}{1-2^{-\delta}} \leq C_\delta n, \end{aligned}$$

onde C_δ é uma constante que depende apenas de δ. Seja K um inteiro positivo tal que $C_\delta n \leq Kn$. Então temos

$$\sum_{k=0}^{M} m_k \leq Kn,$$

o que implica, pela desigualdade (3.16),

$$\begin{aligned} & d_{Kn}\left(W_p^\gamma(S^d), L^q(S^d)\right) \\ & \quad \leq \sum_{k=0}^{M} N_k^{-\gamma} n_k^{1/p-1/2} d_{m_k}\left(B_2^{n_k}, L^q(S^d) \cap \mathcal{T}_{N_k,N_{k+1}}\right) + \sum_{k=M+1}^{\infty} 2 N_k^{-\gamma} n_k^{1/p-1/q}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Pelo Lema 2.3.14, existe uma constante positiva C_6 tal que

$$n_k = \dim \mathcal{T}_{N_k,N_{k+1}} = \dim\left(\bigoplus_{l=N_k+1}^{N_{k+1}} \mathcal{H}_l\right) \leq \dim\left(\bigoplus_{l=0}^{N_{k+1}} \mathcal{H}_l\right) = \dim \mathcal{T}_{N_{k+1}} \leq C_6 N_{k+1}^d. \tag{3.20}$$

Desta forma

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=M+1}^{\infty} 2N_k^{-\gamma} n_k^{1/p-1/q} &\leq \sum_{k=M+1}^{\infty} 2N_k^{-\gamma} \left(C_6 N_{k+1}^d\right)^{1/p-1/q} \leq \sum_{k=M+1}^{\infty} C_7 N_k^{-\gamma} N_{k+1}^{d(1/p-1/q)} \\
&\leq \sum_{k=M+1}^{\infty} C_7 \left(C_3 2^{k/(d\gamma)} n^{1/d}\right)^{-\gamma} \left(C_4 2^{(k+1)/(d\gamma)} n^{1/d}\right)^{d(1/p-1/q)} \\
&\leq \sum_{k=M+1}^{\infty} C_8 2^{-k/d} n^{-\gamma/d} 2^{k(1/p-1/q)/\gamma} n^{1/p-1/q} \\
&= \sum_{k=M+1}^{\infty} C_8 2^{-k/d+k(1/p-1/q)/\gamma} n^{-\gamma/d+(1/p-1/q)} \\
&= C_8 n^{-\gamma/d+(1/p-1/q)} \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k/d+k(1/p-1/q)/\gamma}. \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

A desigualdade $\gamma > d/p > d(1/p - 1/q)$ implica

$$
\frac{-1}{d} + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = \frac{-1}{\gamma}\left(\frac{\gamma}{d} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\right) < 0.
$$

Consequentemente, a função $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = 2^{-t/d+t(1/p-1/q)/\gamma}$ é contínua, decrescente e satisfaz

$$
h(l+1) \leq \int_l^{l+1} h(t)dt, \qquad \text{para todo } l \in \mathbb{N}.
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=l+1}^{u} h(k) &= h(l+1) + h(l+2) + \cdots + h(u-1) + h(u) \\
&\leq \int_l^{l+1} h(t)dt + \int_{l+1}^{l+2} h(t)dt + \cdots + \int_{u-1}^{u} h(t)dt \qquad (3.22) \\
&= \int_l^u h(t)dt.
\end{aligned}
$$

Pela desigualdade (3.22),

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k/d+k(1/p-1/q)/\gamma} &\leq \lim_{u\to\infty} \int_M^u 2^{-t/d+t(1/p-1/q)/\gamma} dt \\
&= \lim_{u\to\infty} \frac{2^{-u/d+u(1/p-1/q)/\gamma}}{(-1/d + (1/p-1/q)/\gamma)\ln 2} - \frac{2^{-M/d+M(1/p-1/q)/\gamma}}{(-1/d + (1/p-1/q)/\gamma)\ln 2} \\
&= \frac{2^{-M/d+M(1/p-1/q)/\gamma}}{(1/d - (1/p-1/q)/\gamma)\ln 2}.
\end{aligned}
$$

Mas

$$2^{-M/d+M(1/p-1/q)/\gamma} \leq 2^{(-1/d+(1/p-1/q)/\gamma)\left(\log_2 n^{1/\delta}-1\right)} = 2^{1/d-(1/p-1/q)/\gamma} n^{(-1/d+(1/p-1/q)/\gamma)/\delta},$$

e assim,

$$\begin{aligned} C_8 n^{-\gamma/d+(1/p-1/q)} \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k/d+k(1/p-1/q)/\gamma} &\leq C_9 n^{-\gamma/d+(1/p-1/q)} n^{(-1/d+(1/p-1/q)/\gamma)/\delta} \\ &= C_9 n^{-\gamma/d+(1/p-1/q)+(-1/d+(1/p-1/q)/\gamma)/\delta}. \end{aligned}$$

Da desigualdade (3.17),

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{q} \leq \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{p\gamma}\right) \leq \left(\frac{1}{d}-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\frac{1}{\gamma}\right)\frac{1}{\delta},$$

o que resulta

$$C_8 n^{-\gamma/d+(1/p-1/q)} \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k/d+k(1/p-1/q)/\gamma} \leq C_9 n^{-\gamma/d+(1/p-1/q)+(-1/d+(1/p-1/q)/\gamma)/\delta} \leq C_9 n^{-\gamma/d}.$$

Desta forma, pelas desigualdades (3.19), (3.21) e pela desigualdade precedente,

$$\begin{aligned} d_{Kn}\left(W_p^\gamma(S^d), L^q(S^d)\right) &\leq \sum_{k=0}^{M} N_k^{-\gamma} n_k^{1/p-1/2} d_{m_k}\left(B_2^{n_k}, L^q(S^d)\cap \mathcal{T}_{N_k,N_{k+1}}\right) + \sum_{k=M+1}^{\infty} 2N_k^{-\gamma} n_k^{1/p-1/q} \\ &\leq \sum_{k=0}^{M} N_k^{-\gamma} n_k^{1/p-1/2} d_{m_k}\left(B_2^{n_k}, L^q(S^d)\cap \mathcal{T}_{N_k,N_{k+1}}\right) + C_9 n^{-\gamma/d}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Se $0 \leq k \leq M$, então por (3.18) e (3.20) temos

$$n_k \leq C_4 N_{k+1}^d \leq C_4\left(C_2 2^{(k+1)/(d\gamma)} n^{1/d}\right)^d \leq C_4 C_2^d 2^{1/\gamma}\left(2^{M/\gamma}\right) n \leq C_{10} n^{1+1/(\delta\gamma)}$$

e portanto

$$(\ln n_k)^{1/2} \leq C_{11}(\ln n)^{1/2}, \quad 0 \leq k \leq M. \tag{3.24}$$

Pelas desigualdades (3.4), (3.18), (3.20) e (3.24),

$$\sum_{k=0}^{M} N_k^{-\gamma} n_k^{1/p-1/2} d_{m_k}\left(B_2^{n_k}, L^q(S^d)\cap \mathcal{T}_{N_k,N_{k+1}}\right)$$
$$\begin{aligned}
&\le C_2 \sum_{k=1}^{M} N_k^{-\gamma} n_k^{1/p-1/2}\left(\frac{n_k}{m_k}\right)^{1/2}\begin{cases} q^{1/2}, & 2\le q<\infty,\\ (\ln n_k)^{1/2}, & q=\infty,\end{cases}\\
&\le C_{12}\sum_{k=1}^{M} N_k^{-\gamma}\frac{n_k^{1/p}}{m_k^{1/2}}\begin{cases} 1, & 2\le q<\infty,\\ (\ln n)^{1/2}, & q=\infty,\end{cases}\\
&\le C_{12}\sum_{k=1}^{M}\left(C_3 2^{k/(d\gamma)} n^{1/d}\right)^{-\gamma}\frac{\left(C_6 N_{k+1}^d\right)^{1/p}}{\left(C_5 2^{-\delta k} n\right)^{1/2}}\begin{cases} 1, & 2\le q<\infty,\\ (\ln n)^{1/2}, & q=\infty,\end{cases}\\
&\le C_{13}\sum_{k=1}^{M} 2^{-k/d} n^{-\gamma/d} 2^{\delta k/2} n^{-1/2} N_{k+1}^{d/p}\begin{cases} 1, & 2\le q<\infty,\\ (\ln n)^{1/2}, & q=\infty,\end{cases}\\
&\le C_{13}\sum_{k=1}^{M} 2^{-k/d+\delta k/2} n^{-\gamma/d-1/2}\left(C_4 2^{(k+1)/(d\gamma)} n^{1/d}\right)^{d/p}\begin{cases} 1, & 2\le q<\infty,\\ (\ln n)^{1/2}, & q=\infty,\end{cases}\\
&\le C_{14}\sum_{k=1}^{M} 2^{-k/d+k/(p\gamma)+\delta k/2} n^{-\gamma/d+(1/p-1/2)}\begin{cases} 1, & 2\le q<\infty,\\ (\ln n)^{1/2}, & q=\infty,\end{cases}\\
&\le C_{14} n^{-\gamma/d+(1/p-1/2)}\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k/d+k/(p\gamma)+\delta k/2}\begin{cases} 1, & 2\le q<\infty,\\ (\ln n)^{1/2}, & q=\infty.\end{cases}
\end{aligned}$$

Como $\gamma > d/p$, então $-1/d + 1/(p\gamma) < 0$. Escolhemos $\delta > 0$ tal que $-1/d + 1/(p\gamma) + \delta/2 < 0$ e assim segue que

$$\frac{-k}{d}+\frac{k}{p\gamma}+\frac{\delta k}{2} = k\left(\frac{-1}{d}+\frac{1}{p\gamma}+\frac{\delta}{2}\right) < 0, \quad \text{para todo } k\in\mathbb{N},$$

o que implica a convergência da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k/d+k/(p\gamma)+\delta k/2}.$$

Logo,

$$\sum_{k=0}^{M} N_k^{-\gamma} n_k^{1/p-1/2} d_{m_k}\left(B_2^{n_k}, L^q(S^d)\cap \mathcal{T}_{N_k,N_{k+1}}\right)$$
$$\begin{aligned}
&\le C_{14} n^{-\gamma/d+(1/p-1/2)}\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j/d+j/(p\gamma)+\delta j/2}\begin{cases} 1, & 2\le q<\infty,\\ (\ln n)^{1/2}, & q=\infty,\end{cases}\\
&\le C_{15} n^{-\gamma/d+(1/p-1/2)}\begin{cases} 1, & 2\le q<\infty,\\ (\ln n)^{1/2}, & q=\infty.\end{cases}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Portanto, por (3.23) e (3.25),

$$
\begin{aligned}
d_{Kn}\left(W_p^\gamma(S^d), L^q(S^d)\right) &\leq C_{15} n^{-\gamma/d+(1/p-1/2)} \begin{cases} 1, & 2 \leq q < \infty, \\ (\ln n)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} + C_9 n^{-\gamma/d} \\
&\leq C_{16} n^{-\gamma/d+(1/p-1/2)} \begin{cases} 1, & 2 \leq q < \infty, \\ (\ln n)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

Dado $l \in \mathbb{N}$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $Kn_0 \leq l \leq K(n_0+1) \leq (K+1)n_0$. Pelo Teorema 3.1.5 e por (3.26),

$$
\begin{aligned}
d_l\left(W_p^\gamma(S^d), L^q(S^d)\right) \leq d_{Kn_0}\left(W_p^\gamma(S^d), L^q(S^d)\right) &\leq C_{16} n_0^{-\gamma/d+(1/p-1/2)} \begin{cases} 1, & 2 \leq q < \infty, \\ (\ln n_0)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\
&\leq C_{17} \left((K+1)n_0\right)^{-\gamma/d+(1/p-1/2)} \begin{cases} 1, & 2 \leq q < \infty, \\ (\ln n_0)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\
&\leq C_{17} l^{-\gamma/d+(1/p-1/2)} \begin{cases} 1, & 2 \leq q < \infty, \\ (\ln l)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

Finalmente, consideremos o caso $2 \leq p \leq q \leq \infty$ e $\gamma > d/2$. Seja $f \in W_p^\gamma(S^d)$ e seja $\varphi \in L^p(S^d)$ tal que $\|\varphi\|_p \leq 1$ e

$$f = c + \Lambda^\gamma(\varphi).$$

Pela Observação 2.1.13, $\|\varphi\|_2 \leq 1$. Com isso,

$$f = c + \Lambda^\gamma(\varphi) \in W_2^\gamma(S^d),$$

e portanto podemos concluir que $W_p^\gamma(S^d) \subset W_2^\gamma(S^d)$. Pelo item (c) do Teorema 3.1.5 e pela desigualdade (3.27), temos

$$
\begin{aligned}
d_n(W_p^\gamma(S^d), L^q(S^d)) &\leq d_n(W_2^\gamma(S^d), L^q(S^d)) \\
&\leq C_{17} n^{-\gamma/d+(1/2-1/2)} \begin{cases} 1, & 2 \leq q < \infty, \\ (\ln n)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\
&= C_{17} n^{-\gamma/d} \begin{cases} 1, & 2 \leq q < \infty, \\ (\ln n)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Concluímos assim a demonstração do teorema.

$\square$

3.3 Estimativas Inferiores

Teorema 3.3.1. (Ismagilov [6]) Seja K um espaço topológico compacto munido com uma medida positiva e normalizada ν definida sobre os conjuntos borelianos de K e seja $\phi : K \to H$ uma aplicação contínua de K em H, onde H é um espaço de Hilbert com produto interno $\langle , \rangle_H$. Sejam $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots$ os autovalores positivos do operador T definido por

$$Tf(x) = \int_K \langle \phi(x), \phi(y) \rangle_H \, f(y) d\mu(y), \quad f \in L^1(K, \nu),$$

e $X_1, X_2, ...$ os autoespaços de T associados aos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ respectivamente. Então

$$d_{\dim \mathcal{E}_n}(\phi(K), H) \geq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k \dim X_k \right)^{1/2},$$

onde $\mathcal{E}_n = \bigoplus_{j=1}^{n} X_j$.

Teorema 3.3.2. Para as classes de Sobolev em S^d temos,

$$d_n \left(W_p^\gamma(S^d), L^q(S^d) \right) \geq C \begin{cases} n^{-\gamma/d + (1/p - 1/q)}, & \text{se } \ 1 \leq p \leq q \leq 2 \ \text{ e } \ \gamma > d(1/p - 1/q), \\ n^{-\gamma/d + (1/p - 1/2)}, & \text{se } \ 1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty \ \text{ e } \ \gamma > d/p. \end{cases}$$

Demonstração. Fixemos $N \in \mathbb{N}$ e seja $n = \dim \mathcal{T}_N$. Denotaremos por $L^p(S^d) \cap \mathcal{T}_N$ o subespaço vetorial $\mathcal{T}_N$ de $L^p(S^d)$ quando munido da norma de $L^p(S^d)$. Seja $m \leq n$. Demonstraremos primeiramente o caso $1 \leq p \leq q \leq 2$ e $\gamma > d(1/p - 1/q)$. Sejam X_m um subespaço m-dimensional de $L^q(S^d)$, $y \in X_m$ e $z \in \mathcal{T}_N$. Seja ainda $\delta \in \mathbb{N}$ tal que $(d+1)/2 \leq \delta \leq d$. Observamos que

$$\frac{2d}{d + 2\delta + 1} = \frac{2d}{2d+1} < 1 \leq p.$$

Pelo Teorema 2.3.8 e pelo Lema 2.3.17,

$$\left\| S_N^\delta * (z - y) \right\|_q \leq \left\| S_N^\delta \right\|_1 \|z - y\|_q \leq C \|z - y\|_q \tag{3.28}$$

e

$$\left\| (S_N^\delta)^{(2)} * (z - y) \right\|_2 \leq \left\| S_N^\delta \right\|_{2q/(3q-2)} \left\| S_N^\delta * (z - y) \right\|_q \leq C N^{d(1/q - 1/2)} \left\| S_N^\delta * (z - y) \right\|_q, \tag{3.29}$$

onde C é uma constante absoluta e

$$\left(S_N^\delta \right)^{(k)} * \varphi = \underbrace{S_N^\delta * S_N^\delta * \cdots * S_N^\delta}_{k \text{ vezes}} * \varphi, \quad \varphi \in L^1(S^d).$$

Como $W_p^\gamma(S^d) \cap \mathcal{T}_N \subset W_p^\gamma(S^d)$, pela Definição 3.1.3, pelo item (c) do Teorema 3.1.5 e pelas desigualdades (3.28) e (3.29),

$$\begin{aligned}
d_m\left(W_p^\gamma(S^d), L^q(S^d)\right) &\geq d_m\left(W_p^\gamma(S^d)\cap\mathcal{T}_N, L^q(S^d)\right)\\
&= \inf_{X_m\subset L^q(S^d)} \sup_{z\in W_p^\gamma(S^d)\cap\mathcal{T}_N} \inf_{y\in X_m} \|z-y\|_q\\
&\geq \inf_{X_m\subset L^q(S^d)} \sup_{z\in W_p^\gamma(S^d)\cap\mathcal{T}_N} \inf_{y\in X_m} \frac{1}{C}\left\|S_N^\delta*(z-y)\right\|_q \qquad (3.30)\\
&\geq \inf_{X_m\subset L^q(S^d)} \sup_{z\in W_p^\gamma(S^d)\cap\mathcal{T}_N} \inf_{y\in X_m} \frac{1}{C^2}N^{-d(1/q-1/2)}\left\|\left(S_N^\delta\right)^{(2)}*(z-y)\right\|_2\\
&= \frac{1}{C^2}N^{-d(1/q-1/2)} \inf_{X_m\subset L^q(S^d)} \sup_{z\in W_p^\gamma(S^d)\cap\mathcal{T}_N} \inf_{y'\in\left(S_N^\delta\right)^{(2)}*X_m}\left\|\left(S_N^\delta\right)^{(2)}*z-y'\right\|_2,
\end{aligned}$$

onde $\left(S_N^\delta\right)^{(2)}*X_m = \left\{\left(S_N^\delta\right)^{(2)}*\varphi : \varphi\in X_m\right\}$. Como S_N^δ é uma combinação linear de $\tilde{Z}^{(k)}$, $0\leq k\leq N$, segue que $S_N^\delta*\varphi\in\mathcal{T}_N$ e também $\left(S_N^\delta\right)^{(2)}*\varphi = S_N^\delta*(S_N^\delta*\varphi)\in\mathcal{T}_N$ para qualquer $\varphi\in L^1(S^d)$. Logo, $\left(S_N^\delta\right)^{(2)}*X_m$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{T}_N$ com dimensão menor ou igual a m e assim por (3.30)

$$\begin{aligned}
d_m\left(W_p^\gamma(S^d), L^q(S^d)\right) &\geq \frac{1}{C^2}N^{-d(1/q-1/2)} \inf_{X_m\subset L^q(S^d)} \sup_{z\in W_p^\gamma(S^d)\cap\mathcal{T}_N} \inf_{y'\in\left(S_N^\delta\right)^{(2)}*X_m}\left\|\left(S_N^\delta\right)^{(2)}*z-y'\right\|_2\\
&\geq \frac{1}{C^2}N^{-d(1/q-1/2)} \inf_{V_m\subset L^2(S^d)\cap\mathcal{T}_N} \sup_{z'\in\left(S_N^\delta\right)^{(2)}*W_p^\gamma(S^d)} \inf_{y'\in V_m}\|z'-y'\|_2 \qquad (3.31)\\
&= \frac{1}{C^2}N^{-d(1/q-1/2)} d_m\left(\left(S_N^\delta\right)^{(2)}*W_p^\gamma(S^d), L^2(S^d)\cap\mathcal{T}_N\right),
\end{aligned}$$

onde os V_m são subespaços de dimensão m de $L^2(S^d)\cap\mathcal{T}_N$.

Sejam $\lambda_k = (k(k+d-1))^{-\gamma/2}$, $k\in\mathbb{N}$, e g_γ^N a função

$$g_\gamma^N(t) = \sum_{k=1}^N \lambda_k\tilde{Z}^{(k)}(t), \quad t\in[-1,1].$$

Dada uma função $h:[-1,1]\to\mathbb{C}$, denotaremos por $\overline{h}$ a função definida em $S^d\times S^d$ por $\overline{h}(x,y) = h(\langle x,y\rangle)$, $x,y\in S^d$. Temos que $\overline{S}_N^\delta(\cdot,y)$ e $\overline{g}_\gamma^N(\cdot,y)$ pertencem a $\mathcal{T}_N$ para qualquer $y\in S^d$. Pelo Lema 2.3.17, temos

$$\left\|\frac{1}{C}N^{-d(1-1/p)}S_N^\delta\right\|_p \leq \frac{1}{C}N^{-d(1-1/p)}CN^{d(1-1/p)} \leq 1,$$

e assim (ver Observação 2.3.10)

$$\left\|\frac{1}{C}N^{-d(1-1/p)}\overline{S}_N^\delta(\cdot,y)\right\|_p \leq 1.$$

Como $\overline{S}_N^\delta(\cdot,y)\in\mathcal{T}_N$, segue pela Definição 3.2.4 e pela Observação 2.3.10 que, para todo $y\in S^d$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{C}N^{-d(1-1/p)}\left(S_N^\delta*\overline{g}_\gamma^N(\cdot,y)\right)&=\frac{1}{C}N^{-d(1-1/p)}\left(g_\gamma^N*\overline{S}_N^\delta(\cdot,y)\right)\\&=\Lambda^\gamma\left(\frac{1}{C}N^{-d(1-1/p)}\overline{S}_N^\delta(\cdot,y)\right)\in W_p^\gamma(S^d)\cap\mathcal{T}_N.\end{aligned}$$

Seja

$$\varphi_N(\cdot,y)=\frac{1}{C}N^{-d(1-1/p)}\left(\left(S_N^\delta\right)^{(3)}*\overline{g}_\gamma^N(\cdot,y)\right).$$

Então

$$\begin{aligned}\varphi_N(\cdot,y)&=\frac{1}{C}N^{-d(1-1/p)}\left(\left(S_N^\delta\right)^{(3)}*\overline{g}_\gamma^N(\cdot,y)\right)\\&=\left(S_N^\delta\right)^{(2)}*\left(\frac{1}{C}N^{-d(1-1/p)}\left(S_N^\delta*\overline{g}_\gamma^N(\cdot,y)\right)\right)\in(S_N^\delta)^{(2)}*W_p^\gamma(S^d).\end{aligned}\tag{3.32}$$

Por outro lado, pelas Observações 2.3.10 e 2.3.11,

$$\left(S_N^\delta\right)^{(2)}(x,y)=\left(\sum_{k=0}^N\frac{C_{N-k}^\delta}{C_N^\delta}\tilde{Z}^{(k)}\right)*\left(\sum_{l=0}^N\frac{C_{N-l}^\delta}{C_N^\delta}Z_y^{(l)}\right)(x)=\sum_{k=0}^N\left(\frac{C_{N-k}^\delta}{C_N^\delta}\right)^2Z_y^{(k)}(x)$$

e, de maneira análoga,

$$\left(S_N^\delta\right)^{(3)}(x,y)=\sum_{k=0}^N\left(\frac{C_{N-k}^\delta}{C_N^\delta}\right)^3Z_y^{(k)}(x).$$

Logo

$$\left(S_N^\delta\right)^{(3)}*\overline{g}_\gamma^N(x,y)=\left(\sum_{k=1}^N\lambda_k\tilde{Z}^{(k)}\right)*\left(\sum_{l=0}^N\left(\frac{C_{N-l}^\delta}{C_N^\delta}\right)^3Z_y^{(l)}\right)(x)=\sum_{k=1}^N\left(\frac{C_{N-k}^\delta}{C_N^\delta}\right)^3\lambda_kZ_y^{(k)}(x).$$

Desta forma, pela Definição 2.3.7 e Teorema 2.3.5,

$$\begin{aligned}\varphi_N(x,y)&=\frac{1}{C}N^{-d(1-1/p)}\sum_{k=1}^N\left(\frac{C_{N-k}^\delta}{C_N^\delta}\right)^3\lambda_kZ_y^{(k)}(x)\\&=\frac{1}{C}N^{-d(1-1/p)}\sum_{k=1}^N\left(\frac{C_{N-k}^\delta}{C_N^\delta}\right)^3\lambda_k\tilde{Z}^{(k)}(\langle x,y\rangle).\end{aligned}\tag{3.33}$$

Para $\eta,\psi\in S^d$, seja $k(\eta,\psi)$ definida por

$$k(\eta,\psi)=\int_{S^d}\varphi_N(x,\eta)\varphi_N(x,\psi)d\mu(x)=(\varphi_N(\cdot,\eta),\varphi_N(\cdot,\psi)).$$

Se $g \in SO(d+1)$ é tal que $g\eta = e$ e denotando $gx = y$, então pela invariância da medida de Lebesgue por rotações (Proposição 2.1.14) e pela Observação 2.3.11,

$$\begin{aligned}\int_{S^d} \tilde{Z}^{(l)}\left(\langle x, \eta\rangle\right) \tilde{Z}^{(k)}\left(\langle x, \psi\rangle\right) d\mu(x) &= \int_{S^d} \tilde{Z}^{(l)}\left(\langle gx, g\eta\rangle\right) \tilde{Z}^{(k)}\left(\langle x, \psi\rangle\right) d\mu(x) \\ &= \int_{S^d} \tilde{Z}^{(l)}\left(\langle y, e\rangle\right) \tilde{Z}^{(k)}\left(\langle g^{-1}y, \psi\rangle\right) d\mu(y) \\ &= \int_{S^d} Z_e^{(l)}(y) \tilde{Z}^{(k)}\left(\langle y, g\psi\rangle\right) d\mu(y) \\ &= \tilde{Z}^{(k)} * Z_e^{(l)}(g\psi) \\ &= \begin{cases} Z_e^{(l)}(g\psi), & k = l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases}\end{aligned}$$

No entanto,

$$Z_e^{(l)}(g\psi) = \tilde{Z}^{(l)}\left(\langle g\psi, e\rangle\right) = \tilde{Z}^{(l)}\left(\langle \psi, g^{-1}e\rangle\right) = \tilde{Z}^{(l)}\left(\langle \psi, \eta\rangle\right).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}k(\eta, \psi) &= \int_{S^d} \varphi_N(x, \eta)\varphi_N(x, \psi) d\mu(x) \\ &= \int_{S^d} \frac{1}{C^2} N^{-2d(1-1/p)} \left(\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{C_{N-k}^{\delta}}{C_N^{\delta}}\right)^3 \lambda_k \tilde{Z}^{(k)}\left(\langle x, \eta\rangle\right)\right) \left(\sum_{l=1}^{N} \left(\frac{C_{N-l}^{\delta}}{C_N^{\delta}}\right)^3 \lambda_l \tilde{Z}^{(l)}\left(\langle x, \psi\rangle\right)\right) d\mu(x) \\ &= \frac{1}{C^2} N^{-2d(1-1/p)} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{C_{N-k}^{\delta}}{C_N^{\delta}}\right)^6 \lambda_k^2 \tilde{Z}^{(k)}\left(\langle \psi, \eta\rangle\right).\end{aligned}$$

Sejam $K = S^d$, $H = L^2(S^d) \cap \mathcal{T}_N$ e seja $(\cdot, \cdot)$ o produto interno de $L^2(S^d)$. Definimos $\phi : S^d \to L^2(S^d) \cap \mathcal{T}_N$ por $\phi(\eta)(x) = \varphi_N(x, \eta)$. Por (3.32),

$$\phi(S^d) = \left\{\phi(\eta) = \varphi_N(\cdot, \eta) : \eta \in S^d\right\} \subset (S_N^{\delta})^{(2)} * W_p^{\gamma}\left(S^d\right). \tag{3.34}$$

Seja T o operador linear sobre $L^2(S^d) \cap \mathcal{T}_N$ definido para $f \in \mathcal{T}_N$ por

$$Tf(\psi) = \int_{S^d} k(\eta, \psi) f(\eta) d\mu(\eta) = \int_{S^d} (\phi(\eta), \phi(\psi)) f(\eta) d\mu(\eta).$$

Temos para $f \in \mathcal{T}_N$,

$$\begin{aligned}Tf(\psi) &= \int_{S^d} \left(\frac{1}{C^2} N^{-2d(1-1/p)} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{C_{N-k}^{\delta}}{C_N^{\delta}}\right)^6 \lambda_k^2 \tilde{Z}^{(k)}\left(\langle \psi, \eta\rangle\right)\right) f(\eta) d\mu(\eta) \\ &= \frac{1}{C^2} N^{-2d(1-1/p)} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{C_{N-k}^{\delta}}{C_N^{\delta}}\right)^6 \lambda_k^2 \int_{S^d} \tilde{Z}^{(k)}\left(\langle \psi, \eta\rangle\right) f(\eta) d\mu(\eta) \\ &= \frac{1}{C^2} N^{-2d(1-1/p)} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{C_{N-k}^{\delta}}{C_N^{\delta}}\right)^6 \lambda_k^2\ \tilde{Z}^{(k)} * f(\psi).\end{aligned} \tag{3.35}$$

Se $f \in \mathcal{H}_l$, $1 \le l \le N$, então

$$Tf(\psi) = \frac{1}{C^2} N^{-2d(1-1/p)} \left(\frac{C^\delta_{N-l}}{C^\delta_N} \right)^6 \lambda_l^2 f(\psi),$$

ou seja, $Tf = \xi_l f$, onde

$$\xi_l = \frac{1}{C^2} N^{-2d(1-1/p)} \left(\frac{C^\delta_{N-l}}{C^\delta_N} \right)^6 \lambda_l^2.$$

Podemos então concluir que $\xi_1, \dots, \xi_N$ são os autovalores de T e que $\mathcal{H}_k$ é o autoespaço associado ao autovalor ξ_k, $1 \le k \le N$. Seja $r \in \mathbb{N}$, $r < N$. Pelo Teorema 3.3.1,

$$d_{\dim \mathcal{T}_r} \left(\phi(S^d), L^2(S^d) \cap \mathcal{T}_N \right) \ge \left(\sum_{k=r+1}^{N} \xi_k \dim \mathcal{H}_k \right)^{1/2}. \tag{3.36}$$

Pela Observação 2.3.16 e pela definição da sequência λ_k, existe uma constante positiva M tal que

$$\lambda_k^2 \ge M k^{-2\gamma}, \quad 2^\delta N^\delta \ge C^\delta_N \ge \frac{N^\delta}{\delta!}.$$

Com essas estimativas, segue que existe uma constante absoluta $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \xi_l &= \frac{1}{C^2} N^{-2d(1-1/p)} \left(\frac{C^\delta_{N-l}}{C^\delta_N} \right)^6 \lambda_l^2 \\ &\ge C_1 N^{-2d(1-1/p)} l^{-2\gamma} \left(\frac{(N-l)^\delta}{N^\delta} \right)^6 \\ &\ge C_1 N^{-2d(1-1/p)} l^{-2\gamma} \left(1 - \frac{l}{N} \right)^{6\delta}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Pelo Lema 2.3.14, pela inclusão (3.34) e pelas desigualdades (3.36) e (3.37),

$$\begin{aligned} d_{\dim \mathcal{T}_r} \left(\left(S^\delta_N \right)^{(2)} * W^\gamma_p(S^d), L^2(S^d) \cap \mathcal{T}_N \right) &\ge d_{\dim \mathcal{T}_r} (\phi(S^d), L^2(S^d) \cap \mathcal{T}_N) \\ &\ge \left(\sum_{k=r+1}^{N} \xi_k \dim \mathcal{H}_k \right)^{1/2} \\ &\ge C_2 \left(\sum_{k=r+1}^{N} N^{-2d(1-1/p)} k^{-2\gamma} \left(1 - \frac{k}{N} \right)^{6\delta} k^{d-1} \right)^{1/2} \\ &\ge C_2 N^{-d(1-1/p)} \left(\sum_{k=r+1}^{N} \left(1 - \frac{k}{N} \right)^{6\delta} k^{d-2\gamma-1} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

onde $\left(S^\delta_N \right)^{(2)} * W^\gamma_p(S^d) = \left\{ (S^\delta_N)^{(2)} * f : f \in W^\gamma_p(S^d) \right\}$.

Consideremos agora $N = 2r$. Se $k \leq 3r/2$, então $1 - k/(2r) \geq 1/4$. Logo,

$$\begin{aligned}
&d_{\dim \mathcal{T}_r}\left(\left(S_N^\delta\right)^{(2)} * W_p^\gamma(S^d), L^2(S^d) \cap \mathcal{T}_N\right) \\
&\geq C_2(2r)^{-d(1-1/p)}\left(\sum_{k=r+1}^{2r}\left(1 - \frac{k}{2r}\right)^{6\delta} k^{d-2\gamma-1}\right)^{1/2} \\
&\geq C_2(2r)^{-d(1-1/p)}\left(\sum_{k=r+1}^{\lfloor 3r/2 \rfloor}\left(1 - \frac{k}{2r}\right)^{6\delta} k^{d-2\gamma-1}\right)^{1/2} \\
&\geq C_3(2r)^{-d(1-1/p)}\left(\frac{1}{4}\right)^{3\delta}\left(\frac{3r}{2} - r\right)^{1/2}\left(\min\left\{(r+1)^{d-2\gamma-1}, \left(\frac{3r}{2}\right)^{d-2\gamma-1}\right\}\right)^{1/2} \\
&\geq C_4 r^{-\gamma+d(1/p-1/2)}.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Desta forma, pelas desigualdades (3.31) e (3.38),

$$\begin{aligned}
d_{\dim \mathcal{T}_r}(W_p^\gamma(S^d), L^q(S^d)) &\geq \frac{1}{C^2}(2r)^{-d(1/q-1/2)} d_{\dim \mathcal{T}_r}\left(\left(S_N^\delta\right)^{(2)} * W_p^\gamma(S^d), L^2(S^d) \cap \mathcal{T}_N\right) \\
&\geq \frac{1}{C^2}(2r)^{-d(1/q-1/2)} C_4 r^{-\gamma+d(1/p-1/2)} \\
&\geq C_5 r^{-\gamma+d(1/p-1/q)}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Dado $l \in \mathbb{N}$, seja $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dim \mathcal{T}_{r_0} \leq l < \dim \mathcal{T}_{r_0+1}$. Pelo item (d) do Teorema 3.1.5 e por (3.39),

$$d_l(W_p^\gamma(S^d), L^q(S^d)) \geq d_{\dim \mathcal{T}_{r_0+1}}(W_p^\gamma(S^d), L^q(S^d)) \geq C_6 r_0^{-\gamma+d(1/p-1/q)}.$$

Pelo Lema 2.3.14, existe uma constante $M > 0$ tal que $M r_0^d \leq \dim \mathcal{T}_{r_0} \leq l$. Como $\gamma > d(1/p - 1/q)$, segue que $-\gamma + d(1/p - 1/q) < 0$, o que implica

$$r_0^{-\gamma+d(1/p-1/q)} \geq M' \left(l^{1/d}\right)^{-\gamma+d(1/p-1/q)}.$$

Concluímos assim que,

$$d_l(W_p^\gamma(S^d), L^q(S^d)) \geq C_6 r_0^{-\gamma+d(1/p-1/q)} \geq C_7 \left(l^{1/d}\right)^{-\gamma+d(1/p-1/q)} = C_7 l^{-\gamma/d+(1/p-1/q)}.$$

Consideremos agora o caso $1 \leq p \leq 2 \leq q$ e $\gamma > d/p$. Como $d/p > d(1/p - 1/2)$, podemos usar o resultado obtido no estudo do primeiro caso para afirmar que

$$d_m(W_p^\gamma(S^d), L^2(S^d)) \geq C_7 m^{-\gamma/d+(1/p-1/2)}.$$

Se X_m é um subespaço m-dimensional de $L^q(S^d)$ e $y \in W_p^\gamma(S^d)$, então pelo Lema 1.2.5

$$\inf_{x \in X_m} \|y - x\|_2 \leq \inf_{x \in X_m} \|y - x\|_q.$$

Logo,

$$\sup_{y \in W_p^\gamma(S^d)} \inf_{x \in X_m} \|y-x\|_2 \leq \sup_{y \in W_p^\gamma(S^d)} \inf_{x \in X_m} \|y-x\|_q .$$

Novamente pelo Lema 1.2.5, segue que todo subespaço X_m de $L^q(S^d)$ é também subespaço de $L^2(S^d)$. Portanto,

$$\begin{aligned} d_m(W_p^\gamma(S^d), L^q(S^d)) &= \inf_{X_m \subset L^q(S^d)} \sup_{y \in W_p^\gamma(S^d)} \inf_{x \in X_m} \|y-x\|_q \\ &\geq \inf_{X_m \subset L^q(S^d)} \sup_{y \in W_p^\gamma(S^d)} \inf_{x \in X_m} \|y-x\|_2 \\ &\geq \inf_{X_m \subset L^2(S^d)} \sup_{y \in W_p^\gamma(S^d)} \inf_{x \in X_m} \|y-x\|_2 \\ &= d_m(W_p^\gamma(S^d), L^2(S^d)) \geq C_7 m^{-\gamma/d+(1/p-1/2)}. \end{aligned}$$

□

O resultado seguinte segue como consequência imediata dos Teoremas 3.2.13 e 3.3.2.

Corolário 3.3.3. Para as classes de Sobolev em S^d temos, para $1 \leq p \leq 2 \leq q < \infty$ e $\gamma > d/p$,

$$d_n\left(W_p^\gamma(S^d), L^q(S^d)\right) \asymp n^{-\gamma/d+(1/p-1/2)}.$$

Referências Bibliográficas

[1] Bordin, B., Kushpel, A., Levesley, J., Tozoni, S., Estimates of n-widths of Sobolev's classes on compact globally symmetric spaces of rank one, *J. Funct. Anal.* **202** (2003), 307-326.

[2] Bordin, B., Kushpel, A., Levesley, J., Tozoni, S., n-Widths of multiplier operators on two-point homogeneous spaces. Em: *Approximation Theory IX*, Vol. 1, Theoretical Aspects, C. Chui, L. L. Schumaker (eds.), Vanderbilt University Press, Nashville, TN, 1998, pp. 23-30.

[3] Cohn, D. L., *Measure Theory.* Birkhäuser, Boston, 1980.

[4] Folland, G. B., *Real Analysis.* John Wiley and Sons, New York, 1984.

[5] Gluskin, E. D., A certain problem concerning diameters, *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* **219** (1974), 527-530.

[6] Ismagilov, R. S., Diameters of sets in normed linear spaces and the approximation of functions by trigonometric polynomials, *Uspehi Mat. Nauk* **29** (1974), 161-178.

[7] Kashin, B. S., Diameters of some finite-dimensional sets and classes of smooth functions, *Math. USSR Izv.* **11** (1997), 317-333.

[8] Kashin, B. S., On Kolmogorov diameters of octahedra, *Soviet. Math. Dokl.* **15** (1974), 304-307.

[9] Kolmogorov, A., Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse, *The Ann. of Math.* **37** (1936), 107-110.

[10] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications.* John Wiley and Sons, New York, 1978.

[11] Kushpel, A., Tozoni, S. A., Entropy and widths of multiplier operators on two-point homogeneous space, *Constr. Approx.* **35** (2012), 137-180.

[12] Kushpel, A., n-Widths of Sobolev's classes on compact globally symmetric spaces of rank 1. Em: *Trends in Approximation Theory*, K. Kopotun, T. Lyche, M. Neamtu (eds.), Vanderbilt University Press, Nashville, TN, 2001, pp. 201-210.

[13] Kushpel, A., Optimal approximation on S^d, *J. of Complexity* **16** (2000), 424-458.

[14] Kwapień, S., Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients, *Studia Math.* **44** (1972), 583-595.

[15] Maiorov, V. E., Discretization of the problem of diameters, *Uspehi Mat. Nauk* **30** (1975), 179-180.

[16] Makovoz, Ju. I., Diameters of Sobolev classes and splines deviating least from zero, *Mat. Zametki* **26** (1979), 805-812.

[17] Oliveira, F. M., *Análise Harmônica na Esfera Unitária d-Dimensional Real*. Dissertação de Mestrado, IMECC/UNICAMP, 2005.

[18] Pajor, A., Tomczak-Jaegermann, N., Subespaces of small codimension of finite-dimensional Banach space, *Proc. Amer. Math. Soc.* **97** (1986), 637-642.

[19] Pietsch, A., *Operator Ideals*. North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1980.

[20] Pinkus, A., *n-Widths in Approximation Theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[21] Rudin, W., L^2-approximation by partial sums of orthogonal developments, *Duke Math. J.* **19** (1952), 1-4.

[22] Scholz, R., Durchmesserähschatzungen für die einheitskugel des Sobolev-raumes $W_q^r(U)$ in $L_p(U)$, *Applicable Anal.* **5** (1976), 257-264.

[23] Stábile, R. L. B., *n-Larguras de Conjuntos de Funções Suaves sobre a Esfera S^d*. Dissertação de Mestrado, IMECC/UNICAMP, 2009.

[24] Stechkin, S. R., The best approximation of given classes of functions, *Uspehi Mat. Nauk* **9** (1954), 133-134.