DISTRIBUIÇÕES DE PRODUTOS DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS NORMAIS INDEPENDENTES

ODIVAL FACCENDA

Orientador:
Prof. Dr. José Antônio Cordeiro

Dissertação apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Estatística.

Julho/1982

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Cordeiro pela orientação segura e paciente.

Aos professores e colegas da Pós-Graduação pelo incentivo durante este período.

Em particular ao Professor Rathie, pelo apoio e compreensão.

Ao Nelson, Helena, Osvaldo e Barille, por serem além de tudo, grandes amigos.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos a transformada de Mellin foi usada , com sucesso, em áreas como Física, Estatística e nesta, em problemas de determinação de distribuições exatas de produtos e quocientes de variáveis aleatórias independentes, bem como de testes de hipóteses.

Pelo que se sabe, Nair (1938) foi o primeiro a utilizar a transformada de Mellin em Estatística na determinação de distribuições exatas para testes de hipóteses de igualdade de variâncias de k populações normais e de igualdade de matrizes de covariâncias de k populações normais bi-variadas e distribuições exatas para o teste de independência entre a média aritmética e a razão da média geométrica pela aritmética de amostras de uma população com distribuição gama.

Epstein (1948) utilizou a transformada de Mellin para a determinação do produto de duas variáveis aleatórias independentes. Neste trabalho de grande importância, Epstein desenvolvou um método natural para a aplicação da transformada de Mellin em distribuições contínuas de variáveis aleatórias que assumem valores reais negativos e positivos.

Levy (1959) destacou a necessidade de uma teoria geral para a multiplicação de variáveis aleatórias e Zalotarev (1962) baseado nas distribuições infinitamente divisíveis iniciou a construção de uma tal teoria, dando uma série de teoremas que mostram semelhanças e diferenças entre esta e a teoria para adição dessas variávies.

Springer e Thompson (1966) generalizaram o método de Epstein para o produto de n variáveis aleatórias independentes de valores reais positivos e negativos obtendo distribuições de produtos de n variáveis aleatórias independentes de valores reais positivos e negativos e de n, com $n \leq 7$, variáveis aleatórias independentes normais padronizadas. Epstein havia conseguido este último resultado apenas para n=2.

Rathie e Kaufmann (1977) dão uma ampla bibliografia sobre distribuições de produtos e quocientes de variáveis aleatórias independentes.

Cordeiro e Rathie (1979) motivados por um problema de previsão de safra, determinaram com o uso das técnicas de Epstein, a distribuição do produto de duas variávies aleatórias independentes normais com quaisquer médias e quaisquer variâncias, resultado este que coincidiu com o de Craig (1936), que utilizando a transformada de Laplace e os semi-invariantes apresentou-a como uma série de funções de Bessel modificadas de segundo tipo.

Neste trabalho, é determinada a distribuição exata do produto de n variáveis aleatórias independentes normais com quaisquer médias e quaisquer variâncias, utilizando as técnicas desenvolvidas por Epstein e generalizadas por Springer e Thompson.

Na secção 1 são dadas fórmulas para determinar a função densidade de probabilidade do produto e quociente de variáveis aleatórias positivas, em termos da transformada de Mellin e uma extensão da técnica de transformar variáveis aleatórias, as quais podem ser positivas e negativas. Usando esta técnica, na secção 2, é apresentada como função G-de Meijer a distribuição do produto de n variáveis aleatórias independentes normais com quaisquer médias e quaisquer variâncias $h_n(v)$. É apresentado também o caso particular para n=2 dado em termos de funções especiais mais simples.

Na secção 3 é apresentado o desenvolvimento para determinar a função densidade de V numa forma computável sendo que o resultado aparece em forma de um teorema.

Na secção 4 é dada a função distribuição acumulada de V para o cálculo dos pontos percentuais.

1 - A REGRA DA TRANSFORMADA DE MELLIN E CONVOLUÇÃO NA DERIVAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DO PRODUTO

Por definição, a transformada de Mellin $M(f(x)/s)$ correspondente a uma função $f(x)$, definida para $x \geq 0$ é

$$(1.1) \qquad M(f(x)/s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x)\,dx$$

Sob certas restrições em $f(x)$, $M(f(x)/s)$ considerada função da variável complexa s, é uma função do tipo exponencial e analítica numa faixa paralela ao eixo imaginário. A largura da faixa é determinada pela ordem de magnitude de $f(x)$ numa vizinhança da origem e para valores grandes de x. Em particular, se $f(x)$ decai exponencialmente, quando $x \to \infty$, $M(f(x)/s)$ é analítica em um semiplano. Há uma fórmula de inversão possibilitando passar da transformada $M(f(x)/s)$ para a função $f(x)$:

$$(1.2) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s}\, M(f(x)/s)\,ds \ ,$$

para todo x, com $f(x)$ contínua e onde o contorno de integração é qualquer reta dentro da faixa de analiticidade de $M(f(x)/s)$, paralela ao eixo imaginário e orientada.

A existência da transformada inversa de Mellin é garantida pelo teorema 28 em Titchmarsh (1948), pg. 46, e as afirmações no parágrafo logo abaixo de (1.1) decorrem do teorema 31 em Titchmarsh (1948), pg. 47.

Sejam $f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)$ funções densidade de probabilidade das variáveis aleatórias independentes positivas $X_1, X_2, \ldots, X_n$ respectivamente.

Seja $h_2(z)$ a densidade de $Z = X_1.X_2$, e $M(f_1(x_1)/s), M(f_2(x_2)/s), \ldots, M(f_n(x_n)/s)$ as transformadas de Mellin de $f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)$, respectivamente.

Por métodos diretos de transformação de variáveis, sabe-se que

$$(1.3) \qquad h_2(z) = \int_0^\infty \frac{1}{x_2} f_1(\frac{z}{x_2}) f_2(x_2)dx_2 = \int_0^\infty \frac{1}{x_1} f_2(\frac{z}{x_1}) f_1(x_1)dx_1 .$$

Vale também, (vide Titchmarsh (1948), pg. 52) a relação

$$(1.4) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M(f_1(x_1)/s)M(f_2(x_2)/s)z^{-s}ds = \int_0^\infty \frac{1}{x_2} f_1(\frac{z}{x_2}) f_2(x_2)dx_2.$$

Esta propriedade é a que permite o uso da transformada de Mellin para a determinação de distribuições de produtos de variáveis aleatórias independentes e é chamada convolução de Mellin.

Então, por (1.3) e (1.4) tem-se que

$$h_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} z^{-s} M(f_1(x_1)/s)M(f_2(x_2)/s)ds$$

e por (1.1)

$$M(h_2(z)/s) = \int_0^\infty z^{s-1} h_2(z)dz$$

mas, por (1.2)

$$h_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} z^{-s} M(h_2(z)/s)ds$$

de onde obtém-se a seguinte relação

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} z^{-s} M(h_2(z)/s)ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} z^{-s} M(f_1(x_1)/s)M(f_2(x_2)/s)ds .$$

Portanto,

$$(1.5) \qquad M(h_2(z)/s) = M(f_1(x_1)/s)M(f_2(x_2)/s) .$$

Novamente, por (1.3), a função densidade de Probabilidade do produto $V=X_1.X_2.X_3$ é

$$(1.6) \qquad h_3(v) = \int_0^\infty \frac{1}{z} f_3(\frac{v}{z}) h_2(z)dz$$

a qual em combinação com (1.5) produz

(1.7) $M(h_3(v)/s) = M(f_1(x_1)/s)\ M(f_2(x_2)/s)\ M(f_3(x_3)/s)$.

Então, por n-1 sucessivas aplicações de (1.4) e (1.5) para variáveis aleatórias independentes positivas chega-se ao resultado geral:

(1.8) $$h_n(v) = \int_0^{\infty} \frac{1}{z} f_n\left(\frac{v}{z}\right) h_{n-1}(z)\ dz$$

e

(1.9) $$M(h_n(v)/s) = \prod_{i=1}^{n} M(f_i(x_i)/s) .$$

Logo, $h_n(v)$ pode ser obtido diretamente de $M(f_i(x_i)/s)$, usando

(1.10) $$h_n(v) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} v^{-s} \prod_{i=1}^{n} M(f_i(x_i)/s))ds .$$

Esta é a utilidade da transformada de Mellin na derivação do produto de variáveis aleatórias independentes positivas.

Nota: O problema da unicidade da transformada de Mellin no conjunto das funções densidade de probabilidade contínuas com suporte $(0,\infty)$, foi provado por Cordeiro (1980), A.5.

Para tratar o problema mais geral do produto de variáveis aleatórias independentes que podem assumir valores positivos e negativos Springer e Thompson (1966) extenderam para o caso de n variáveis um procedimento desenvolvido por Epstein (1948) para o caso de duas variáveis. Esta extensão consiste em decompor uma função $f_i(x_i)$, $-\infty<x_i<\infty$, $i=1,...,n$, em duas componentes:

$$f_i(x_i)=f_i^-(x_i)+f_i^+(x_i)$$

onde

$$f_i^-(x_i)=0 \text{ se } x_i>0, \quad f_i^-(x_i)=f_i(x_i) \text{ se } x_i<0$$

e

$$f_i^+(x_i)=0 \text{ se } x_i<0, \quad f_i^+(x_i)=f_i(x_i) \text{ se } x_i \geq 0 .$$

Seja $Z=X_1.X_2$. Sua função densidade de probabilidade é dada por

$$(1.11) \quad h_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x_i|} f_2(\frac{z}{x_1}) f_1(x_1)dx_1 .$$

Por substituição direta segue que

$$(1.12) \quad h_2(z)=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x_1|} \{f_2^+(\frac{z}{x_1})+f_2^-(\frac{z}{x_1})\}\{f_1^+(x_1)+f_1^-(x_1)\}dx_1 ,$$

ou

$$h_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x_1|}\{f_2^+(\frac{z}{x_1})f_1^+(x_1)+f_2^+(\frac{z}{x_1})f_1^-(x_1)+f_2^-(\frac{z}{x_1})f_1^+(x_1)+f_2^-(\frac{z}{x_1})f_1^-(x_1)\}dx_1$$

ou ainda

$$h_2(z) = \int_0^{\infty}\frac{1}{x_1}f_2^+(\frac{z}{x_1})f_1^+(x_1)dx_1 + \int_0^{\infty}\frac{1}{x_1}f_2^+(\frac{z}{-x_1})f_1^-(-x_1)dx_1 +$$
$$+ \int_0^{\infty}\frac{1}{x_1}f_2^-(\frac{z}{x_1})f_1^+(x_1)dx_1 + \int_0^{\infty}\frac{1}{x_1}f_2^-(\frac{z}{-x_1})f_1^-(-x_1)dx_1 .$$

Definindo; $h_2(z)=h_2^-(z)+h_2^+(z)$, onde:

$$h_2^-(z) = \begin{cases} h_2(z) & \text{se } -\infty<z<0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

e

$$h_2^+(z) = \begin{cases} h_2(z) & \text{se } 0\leq z<\infty \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Então para $0\leq z<\infty$

$$h_2^-(-z) = \int_0^{\infty}\frac{1}{x_1} f_2^+ (\frac{-z}{-x_1}) f_1^-(-x_1)dx_1 + \int_0^{\infty}\frac{1}{x_1} f_2^- (-\frac{z}{x_1}) f_1^+(x_1)dx_1$$

(1.13)

$$h_2^+(z) = \int_0^\infty \frac{1}{x_1} f_2^+\left(\frac{z}{x_1}\right) f_1^+(x_1)\,dx_1 + \int_0^\infty \frac{1}{x_1} f_2^-\left(\frac{z}{-x_1}\right) f_1^-(-x_1)\,dx_1 \ .$$

Portanto, $h_2^+(z)$ e $h_2^-(-z)$ estão expressadas em termos de convolução de pares de funções definidas sobre o intervalo $(0,\infty)$ cuja transformada de Mellin está bem definida por (1.1) e

(1.14)

$$M(h_2^-(-z)/s) = M(f_2^+(x_2)/s)M(f_1^-(-x_1)/s) + M(f_2^-(-x_2)/s)\ M(f_1^+(x_1)/s)$$

$$M(h_2^+(z)/s) = M(f_2^+(x_2)/s)M(f_1^+(x_1)/s) + M(f_2^-(-x_2)/s)\ M(f_1^-(-x_1)/s) \ .$$

Logo por (1.2) tem-se que:

$$h_2^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} z^{-s} M(h_2^-(-z)/s)\,ds$$

e

$$h_2^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} z^{-s} M(h_2^+(z)/s)\,ds$$

ou

$$h_2^-(-z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} z^{-s} M(f_2^+(x_2)/s)\ M(f_1^-(-x_1)/s)\,ds + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} z^{-s} M(f_2^-(-x_2)/s)\ M(f_1^+(x_1)/s)\,ds$$

(1.15)

$$h_2^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} z^{-s} M(f_2^+(x_2)/s) M(f_1^+(x_1)/s)\,ds + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} z^{-s} M(f_2^-(-x_2)/s)\ M(f_1^-(-x_1)/s)\,ds \ .$$

Então através de n-1 sucessivas aplicações desse procedimento chega-se a função densidade de probabilidade de $V = \prod_{i=1}^{n} X_i$:

$$h_n(v) = h_n^-(v) + h_n^+(v)$$

cujas componentes são definidas por inverter a transformada de Mellin, e

$$M(h_n^-(-v)/s) = M(f_n^+(x_n)/s)\ M(h_{n-1}^-(-z)/s) + M(f_n^-(-x_n)/s)M(h_{n-1}^+(z)/s)$$

(1.16)

$$M(h_n^+(v)/s) = M(f_n^+(x_n)/s)\ M(h_{n-1}^+(z)/s) + M(f_n^-(-x_n)/s)M(h_{n-1}^-(-z)/s)\ .$$

Os dois produtos no lado direito de (1.16), quando expandidos em termos envolvendo $f_i^+(x_i)$ e $f_i^-(-x_i)$, resultam em 2^{n-1} produtos como em (1.14).

Por exemplo, seja o caso n=3, i.é., $V=X_1X_2X_3$ ou $V=X_3Z$ onde $Z=X_1X_2$.

Usando o mesmo procedimento anterior tem-se:

$$(1.17)\qquad h_3(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|z|}\ f_3(\frac{v}{z})h_2(z)dz\ .$$

Por substituição direta segue que

$$(1.18)\qquad h_3(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|z|}\ \{f_3^+(\frac{v}{z}) + f_3^-(\frac{v}{z})\}\{h_2^+(z) + h_2^-(z)\}dz$$

ou

$$h_3(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|z|}\{f_3^+(\frac{v}{z})h_2^+(z) + f_3^+(\frac{v}{z})h_2^-(z) + f_3^-(\frac{v}{z})h_2^+(z) + f_3^-(\frac{v}{z})h_2^-(z)\}dz$$

ou ainda

$$h_3(v) = \int_0^{\infty} \frac{1}{z}f_3^+(\frac{v}{z})\ h_2^+(z)dz + \int_0^{\infty} \frac{1}{z}f_3^+(\frac{v}{-z})h_2^-(-z)dz + \int_0^{\infty} \frac{1}{z}f_3^-(\frac{v}{z})h_2^+(z)dz\ +$$
$$+ \int_0^{\infty} \frac{1}{z}f_3^-(\frac{v}{-z})h_2^-(-z)dz\ .$$

Definindo: $h_3(v) = h_3^-(v)+h_3^+(v)$, onde

$$h_3^-(v)=\begin{cases} h_3(v) & \text{se } -\infty<v<0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

e

$$h_3^+(v)=\begin{cases} h_3(v) & \text{se } 0\leq v<\infty \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

tem-se para $0\leq v<\infty$:

$$\text{(1.19)} \quad \begin{aligned} h_3^-(-v) &= \int_0^\infty \frac{1}{z}f_3^+\left(\frac{v}{z}\right)h_2^-(-z)\,dz+\int_0^\infty \frac{1}{z}f_3^-\left(-\frac{v}{z}\right)h_2^+(z)\,dz \\ h_3^+(v) &= \int_0^\infty \frac{1}{z}f_3^+\left(\frac{v}{z}\right)h_2^+(z)\,dz+\int_0^\infty \frac{1}{z}f_3^-\left(\frac{v}{-z}\right)h_2^-(-z)\,dz \;. \end{aligned}$$

Portanto $h_3^-(-v)$ e $h_3^+(v)$ estão expressadas em termos de con volução de pares de funções definidas sobre o intervalo $(0,\infty)$ cuja transformada de Mellin está bem definida por (1.1) e

$$\text{(1.20)} \quad \begin{aligned} M(h_3^-(-v)/s) &= M(f_3^+(x_3)/s)\; M(h_2^-(-z)/s)+M(f_3^-(-x_3)/s)M(h_2^+(z)/s) \\ M(h_3^+(v)/s) &= M(f_3^+(x_3)/s)\; M(h_2^+(z)/s)+M(f_3^-(-x_3)/s)M(h_2^-(-z)/s) \;. \end{aligned}$$

Por (1.2) tem-se:

$$h_3^-(-v) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} v^{-s}M(h_3^-(-v)/s)\,ds$$

(1.21) e

$$h_3^+(v) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} v^{-s}M(h_3^+(v)/s)\,ds$$

e usando (1.20) pode-se escrever

$$h_3^-(-v) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} v^{-s}[M(f_3^+(x_3)/s)\ M(h_2^-(-z)/s)+M(f_3^-(-x_3)/s)M(h_2^+(z)/s)]ds$$

(1.22)

$$h_3^+(v) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} v^{-s}[M(f_3^+(x_3)/s)\ M(h_2^+(z)/s)+M(f_3^-(-x_3)/s)M(h_2^-(-z)/s)]ds$$

onde tem-se recursivamente por (1.14), que

$$M(h_2^-(-z)/s) = M(f_2^+(x_2)/s)\ M(f_1^-(-x_1)/s)+M(f_2^-(-x_2)/s)\ M(f_1^+(x_1)/s)$$

e

$$M(h_2^+(z)/s) = M(f_2^+(x_2)/s)\ M(f_1^+(x_1)/s)+M(f_2^-(-x_2)/s)\ M(f_1^-(-x_1)/s)\ .$$

Substituindo em (1.22):

(1.23)
$$\begin{aligned} h_3^-(-v) = {} & \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} v^{-s}M(f_3^+(x_3)/s).M(f_2^+(x_2)/s\ M(f_1^-(-x_1)/s)ds\ + \\ & + \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} v^{-s}M(f_3^+(x_3)/s)M(f_2^-(-x_2)/s)\ M(f_1^+(x_1)/s)ds\ + \\ & + \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} v^{-s}M(f_3^-(-x_3)/s)M(f_2^+(x_2)/s)\ M(f_1^+(x_1)/s)ds\ + \\ & + \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} v^{-s}M(f_3^-(-x_3)/s)M(f_2^-(-x_2)/s)\ M(f_1^-(-x_1)/s)\,ds \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h_3^+(v) = {} & \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} v^{-s}M(f_3^+(x_3)/s)M(f_2^+(x_2)/s)\ M(f_1^+(x_1)/s)ds\ + \\ & + \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} v^{-s}M(f_3^+(x_3)/s)M(f_2^-(-x_2)/s)\ M(f_1^-(-x_1)/s)ds\ + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} v^{-s} M(f_3^-(-x_3)/s)\, M(f_2^+(x_2)/s)\ \ M(f_1^-(-x_1)/s)\,ds\ +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} v^{-s} M(f_3^-(-x_3)/s)\, M(f_2^-(-x_2)/s)\, M(f_1^+(x_1)/s)\,ds\ .$$

Vê-se claramente que este procedimento é recursivo e portanto fazendo n-1 sucessivas aplicações deste procedimento chega-se à função densidade de probabilidade de $V = \prod_{i=1}^{n} X_i$, isto é:

$$h_n(v) = h_n^-(-v) + h_n^+(v)$$

onde

$$h_n^-(-v) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} v^{-s}[M(f_n^+(x_n)/s)\ \ M(h_{n-1}^-(-z)/s) + M(f_n^-(-x_n)/s)M(h_{n-1}^+(z)/s)]ds$$

(1.24)

$$h_n^+(v) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} v^{-s}[M(f_n^+(x_n)/s)\ \ M(h_{n-1}^+(z)/s) + M(f_n^-(-x_n)/s)M(h_{n-1}^-(-z)/s)]ds\ .$$

2 - A DISTRIBUIÇÃO EXATA DO PRODUTO DE n VARIÁVEIS ALEATÓRIAS INDEPENDENTES NORMAIS $h_n(v)$ COMO FUNÇÃO G - DE MEIJER

Nesta secção será considerado o produto de n variáveis aleatórias normais independentes com quaisquer médias e quaisquer variâncias. O objetivo proposto é achar a função densidade de probabilidade $h_n(v)$ correspondente à variável aleatória V, onde

(2.1) $V=\prod_{j=1}^{n} x_j$ e x_j, $j=1,2,\dots,n$ tem a função densidade de probabilidade dada por

$$(2.2)\qquad f_j(x_j)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j}\,\frac{e^{-\frac{1}{2}(x_j-M_j)^2}}{\sigma_j^2},\quad -\infty<x_j<\infty \text{ e } \sigma_j\geq 0,\ j=1,\dots,n.$$

Por (1.1) tem-se que

$$(2.3)\qquad M(f_j^+(x_j)/s)=\int_0^{\infty} x_j^{s-1}f_j^+(x_j)\,dx_j$$

e

$$(2.4)\qquad M(f_j^-(-x_j)/s)=\int_0^{\infty} x_j^{s-1}f_j^-(-x_j)\,dx_j$$

onde

$$(2.5)\qquad f_j^+(x_j)=\frac{1}{\sigma_j\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2\sigma_j^2}(x_j-M_j)^2}\cdot I_{(0,\infty)}(x_j)$$

e

$$(2.6)\qquad f_j^-(-x_j)=\frac{1}{\sigma_j\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2\sigma_j^2}(-x_j-M_j)^2}\cdot I_{(0,\infty)}^{(x_j)}$$

Logo as respectivas transformadas de Mellin são:

$$(2.7)\qquad M(f_j^+(x_j)/s) = \int_0^\infty x^{s-1}\,\frac{1}{\sigma_j\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2\sigma_j^2}(x-M_j)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sigma_j\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty x^{s-1}\,e^{-\frac{1}{2\sigma_j^2}(x^2-2M_jx+M_j^2)}\,dx$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{M_j}{\sigma_j}\right)^2}}{\sigma_j\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_j}\right)^2}\,e^{\frac{M_jx}{\sigma_j^2}}\,dx.$$

Desenvolvendo $e^{\frac{M_jx}{\sigma_j^2}}$ em série de Taylor obtem-se :

$$(2.8)\qquad M(f_j^+(x_j)/s) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{M_j}{\sigma_j}\right)^2}}{\sigma_j\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_j}\right)}\sum_{a_j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{M_jx}{\sigma_j^2}\right)^{a_j}}{a_j!}\,dx$$

Pelo teorema de Fubini:

$$(2.9)\qquad M(f_j^+(x_j)/s) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{M_j}{\sigma_j}\right)^2}}{\sigma_j\sqrt{2\pi}}\sum_{a_j=0}^{\infty}\frac{M_j^{a_j}}{\sigma_j^{2a_j}a_j!}\int_0^\infty x^{s+a_j-1}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma_j^2}}\,dx$$

Seja, $y = \dfrac{x^2}{2\sigma_j^2} \implies |x| = \sigma_j\sqrt{2y}$. Então,

$$(2.10)\quad M(f_j^+(x_j)/s)=\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{M_j}{\sigma_j}\right)^2}}{\sigma_j\sqrt{2\pi}}\sum_{a_j=0}^{\infty}\frac{M_j^{a_j}}{a_j!\,\sigma_j^{2a_j}}\int_0^{\infty}\left(\sigma_j(2y)^{1/2}\right)^{s+a_j-1}\,.$$

$$.\ e^{-y}\,\frac{\sigma_j}{(2y)^{1/2}}\,dy.$$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{M_j}{\sigma_j}\right)^2}}{2\sqrt{\pi}}\sum_{a_j=0}^{\infty}\frac{M_j^{a_j}\sigma_j^{s-a_j-1}\,2^{\frac{s+a_j-1}{2}}}{a_j!}\int_0^{\infty}y^{\frac{s+a_j}{2}-1}\,e^{-y}\,dy$$

Logo

$$(2.11)\quad M(f_j^+(x_j)/s)=\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{M_j}{\sigma_j}\right)^2}}{\sigma_j\sqrt{8\pi}}\sum_{a_j=0}^{\infty}\frac{M_j^{a_j}\sigma_j^{s-a_j}\,2^{\frac{s+a_j}{2}}}{a_j!}\,\Gamma\left(\frac{s+a_j}{2}\right).$$

Também

$$(2.12)\quad M(f_j^-(-x_j)/s)=\int_0^{\infty}x^{s-1}\,\frac{1}{\sigma_j\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2\sigma_j^2}(-x-M_j)^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sigma_j\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}x^{s-1}e^{-\frac{1}{2\sigma_j^2}(x^2+2M_jx+M_j^2)}\,dx$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{M_j}{\sigma_j}\right)^2}}{\sigma_j\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^{s-1}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma_j^2}}\, e^{-\frac{M_j}{\sigma_j^2}}\, dx$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{M_j}{\sigma_j}\right)}}{\sigma_j\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_j}\right)^2} \sum_{a_j=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{M_j x}{\sigma_j^2}\right)^{a_j}}{a_j!}\, dx$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{M_j}{\sigma_j}\right)^2}}{\sigma_j\sqrt{2\pi}} \sum_{a_j=0}^{\infty} (-1)^{a_j} \frac{M_j^{a_j}}{a_j!\,\sigma_j^{2a_j}} \int_0^{\infty} x^{s+a_j-1}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_j}\right)^2}\, dx.$$

Seja, $y=\frac{x^2}{2\sigma_j^2} \Longrightarrow |x| = \sigma_j\sqrt{2y}$. Então,

$$(2.13)\quad M(f_j^-(-x_j)/s) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{M_j}{\sigma_j}\right)^2}}{\sigma_j\sqrt{2\pi}} \sum_{a_j=0}^{\infty} (-1)^{a_j} \frac{M_j^{a_j}}{a_j!\,\sigma_j^{2a_j}} \int_0^{\infty} [\sigma_j (2y)^{\frac{1}{2}}]^{s+a_j-1}\, e^{-y} \frac{\sigma_j}{(2y)^{1/2}}\, dy$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{M_j}{\sigma_j}\right)^2}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{a_j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{a_j} M_j^{a_j} \sigma_j^{s+a_j-1}\, 2^{\frac{s+a_j-1}{2}}}{a_j!} \int_0^{\infty} y^{\frac{s+a_j-1}{2}} . e^{-y}\, dy.$$

Assim

$$(2.14)\quad M(f_j^-(-x_j)/s) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{M_j}{\sigma_j}\right)^2}}{\sigma_j\sqrt{8\pi}} \sum_{a_j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{a_j} M_j^{a_j} \sigma_j^{s-a_j}\, 2^{\frac{s+a_j}{2}}}{a_j!}\, \Gamma\left(\frac{s+a_j}{2}\right).$$

Portanto, usando (2.11), (2.14) e (1.15) tem-se para o produto $X_1.X_2$:

$$h_2^-(-v) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{M_j}{\sigma_j}\right)^2}}{(8\pi)^{2/2}\prod_{j=1}^{2}\sigma_j} \sum_{a_1=0}^{\infty}\sum_{a_2=0}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{2}\frac{M_j^{a_j}\, 2^{\sum_{i=1}^{2}\frac{a_i}{2}}}{a_j!\,\sigma_j^{a_j}}\right][(-1)^{a_1} +$$

$$+ (-1)^{a_2}]\ \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\prod_{j=1}^{2}\sigma_j^{-1}\, 2^{-2/2} v\right)^{-s}\prod_{j=1}^{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{a_j}{2}\right)ds\ I_{(-\infty,0)}(v).$$

(2.15) e

$$h_2^+(v) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{M_j}{\sigma_j}\right)^2}}{(8\pi)^{2/2}\prod_{j=1}^{2}\sigma_j} \sum_{a_1=0}^{\infty}\sum_{a_2=0}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{2}\frac{M_j^{a_j}.2^{\sum_{i=1}^{2}\frac{a_i}{2}}}{a_j!\,\sigma_j^{a_j}}\right][1+(-1)^{a_1+a_2}] \ .$$

$$. \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\prod_{j=1}^{2}\sigma_j^{-1}\, 2^{-2/2} v\right)^{-s}\prod_{j=1}^{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{a_j}{2}\right)ds\ I_{(0,\infty)}(v) \ .$$

Usando (2.11), (2.14) e (1.23) tem-se, para o produto $X_1.X_2.X_3$:

$$h_3^-(-v) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{M_j}{\sigma_j}\right)^2}}{(8\pi)^{3/2}\prod_{j=1}^{3}\sigma_j} \sum_{a_1=0}^{\infty}\sum_{a_2=0}^{\infty}\sum_{a_3=0}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{3}\frac{M_j^{a_j}\, 2^{\sum_{i=1}^{3}\frac{a_i}{2}}}{a_j!\,\sigma_j^{a_j}}\right][(-1)^{a_1} +$$

$$+ (-1)^{a_2}+(-1)^{a_3}+(-1)^{a_1+a_2+a_3}]\ \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\prod_{j=1}^{3}\sigma_j^{-1}\, 2^{-3/2} v\right)^{-s}.$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{3} \Gamma(\frac{s}{2}+\frac{a_j}{2}) ds \; I_{(-\infty,0)}(v) \; .$$

(2.16) e

$$h_3^+(v) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}(\frac{M_j}{\sigma_j})^2}}{(8\pi)^{3/2}\prod_{j=1}^{3}\sigma_j} \sum_{a_1=0}^{\infty}\sum_{a_2=0}^{\infty}\sum_{a_3=0}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{3}\frac{M_j^{a_j}\, 2^{\sum_{i=1}^{3}\frac{a_i}{2}}}{a_j!\;\sigma_j^{a_j}}\right][1+(-1)^{a_1+a_2}+$$

$$+(-1)^{a_1+a_3}+(-1)^{a_2+a_3}] \; \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}(\prod_{j=1}^{3}\sigma_j^{-1}\,2^{-3/2}v)^{-s}\prod_{j=1}^{3}\Gamma(\frac{s}{2}+$$

$$+\frac{a_j}{2}) ds \; I_{(0,\infty)}(v) \; .$$

Do mesmo modo que em (2.15) e (2.16), pode-se escrever,

$$h_4^-(-v) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4}(\frac{M_j}{\sigma_j})^2}}{(8\pi)^{4/2}\prod_{j=1}^{4}\sigma_j} \sum_{a_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{a_4=0}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{4}\frac{M_j^{a_j}\, 2^{\sum_{i=1}^{4}\frac{a_i}{2}}}{a_j!\;\sigma_j^{a_j}}\right][(-1)^{a_1}+$$

$$+(-1)^{a_2}+(-1)^{a_3}+(-1)^{a_4}+(-1)^{a_1+a_2+a_3}+(-1)^{a_1+a_2+a_4}+$$

$$+(-1)^{a_1+a_3+a_4}+(-1)^{a_2+a_3+a_4}] \; .$$

$$\cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}(\prod_{j=1}^{4}\sigma_j^{-1}\,2^{-4/3}\;v)^{-s}\prod_{j=1}^{4}\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{a_j}{2}) ds \; I_{(-\infty,0)}(v)$$

(2.17) e

$$h_4^+(v) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4}\left(\frac{M_j}{\sigma_j}\right)^2}}{(8\pi)^{4/2}\prod_{j=1}^{4}\sigma_j} \sum_{a_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{a_4=0}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{4}\frac{M_j^{a_j}\, 2^{\sum_{i=1}^{4}\frac{a_i}{2}}}{a_j!\,\sigma_j^{a_j}}\right][1+$$

$$+(-1)^{a_1+a_2}+(-1)^{a_1+a_3}+(-1)^{a_2+a_3}+(-1)^{a_1+a_4}+(-1)^{a_2+a_4}+$$

$$+(-1)^{a_3+a_4}+(-1)^{a_1+a_2+a_3+a_4}] \;.$$

$$\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\prod_{j=1}^{4}\sigma_j^{-1}\,2^{-4/2}v\right)^{-s}\prod_{j=1}^{4}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{a_j}{2}\right)ds\; I_{(0,\infty)}(v).$$

e de modo geral:

Para n ímpar, n=2k+1, k=0,1,2,...

$$h_n^-(-v) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{M_j}{\sigma_j}\right)^2}}{(8\pi)^{n/2}\prod_{j=1}^{n}\sigma_j} \sum_{a_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{a_n=0}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{n}\frac{M_j^{a_j}.2^{\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2}}}{a_j!\,\sigma_j^{a_j}}\right][1+$$

$$\left[\sum_{j=0}^{k}\sum_{\substack{I_1,I_2,\ldots,I_{2j+1}=1\\ I_1<I_2<\ldots<I_{2j+1}}}^{n}(-1)^{a_{I_1}+a_{I_2}+\ldots+a_{I_{2j+1}}}\right].$$

$$\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}\,2^{-n/2}v\right)^{-s}\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{a_j}{2}\right)ds\; I_{(-\infty,0)}(v)$$

(2.18) e

$$h_n^+(v) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{M_j}{\sigma_j}\right)^2}}{(8\pi)^{n/2}\prod_{j=1}^{n}\sigma_j} \sum_{a_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{a_n=0}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{n} \frac{M_j^{a_j}\, 2^{\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2}}}{a_j!\,\sigma_j^{a_j}}\right]$$

$$\left[1+\sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{I_1,I_2,\ldots,I_{2j}=1 \\ I_1<I_2<\ldots<I_{2j}}}^{n} (-1)^{a_{I_1}+a_{I_2}+\ldots+a_{I_{2j}}}\right] \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}\, 2^{-n/2} v\right)^{-s} \prod_{j=1}^{n} \Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{a_j}{2}\right) ds\; I_{(0,\infty)}(v).$$

Para n par, $n=2k$, $k=1,2,\ldots$

$$h_n^-(-v) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{M_j}{\sigma_j}\right)^2}}{(8\pi)^{n/2}\prod_{j=1}^{n}\sigma_j} \sum_{a_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{a_n=0}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{n} \frac{M_j^{a_j}\, 2^{\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2}}}{a_j!\,\sigma_j^{a_j}}\right]$$

$$\left[\sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\substack{I_1,\ldots,I_{2j+1}=1 \\ I_1<I_2<\ldots<I_{2j+1}}}^{n} (-1)^{a_{I_1}+a_{I_2}+\ldots+a_{I_{2j+1}}}\right] \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{c-l\infty}^{c+i\infty} \left(\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}\, 2^{-n/2} v\right)^{-s} \prod_{j=1}^{n} \Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{a_j}{2}\right) ds\; I_{(-\infty,0)}(v)$$

(2.19) e

$$h_n^+(v) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{M_j}{\sigma_j}\right)^2}}{(8\pi)^{n/2}\prod_{j=1}^{n}\sigma_j} \sum_{a_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{a_n=0}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{n} \frac{M_j^{a_j}\, 2^{\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2}}}{a_j!\,\sigma_j^{a_j}}\right]$$

$$\left[1+\sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{I_1,I_2,\ldots,I_{2j}=1 \\ I_1<I_2<\ldots<I_{2j}}}^{n} (-1)^{a_{I_1}+a_{I_2}+\ldots+a_{I_{2j}}}\right] .$$

$$\cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}\, 2^{-n/2} v\right)^{-s} \prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{a_j}{2}\right) ds\, I_{(0,\infty)}(v)$$

Logo, a função densidade de V pode ser escrita:

Para n ímpar, $n=2k+1$, $k=0,1,2,\ldots$

$$(2.20) \qquad h_n(v) = U \sum_{a}\left[k\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}(cv)^{-s}\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{a_j}{2}\right)ds\, I_{(-\infty,0)}(v) + \right.$$

$$\left. + L\,\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}(cv)^{-s}\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{a_j}{2}\right)ds\, I_{(0,\infty)}(v)\right]$$

onde

$$(2.21) \qquad U = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{M_j}{\sigma_j}\right)^2}}{(8\pi)^{n/2}\prod_{j=1}^{n}\sigma_j} \quad ,$$

(2.22) $$\sum_{a} = \sum_{a_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{a_n=0}^{\infty} \quad ,$$

(2.23) $$K = K(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \frac{M_j^{a_j} \, 2^{\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2}}}{a_j! \, \sigma_j^{a_j}} \left[\sum_{j=0}^{k} \sum_{\substack{I_1, I_2, \ldots, I_{2j+1}=1 \\ I_1 < I_2 < \ldots < I_{2j+1}}}^{n} (-1)^{a_{I_1} + a_{I_2} + \ldots + a_{I_{2j+1}}} \right]$$

(2.24) $$L = L(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \frac{M_j^{a_j} \, a^{\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2}}}{a_j! \, \sigma_j^{a_j}} \left[1 + \sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{I_1, I_2, \ldots, I_{2j}=1 \\ I_1 < I_2 < \ldots < I_{2j}}}^{n} (-1)^{a_{I_1} + a_{I_2} + \ldots + a_{I_{2j}}} \right]$$

(2.25) $$C = \prod_{j=1}^{n} \sigma_j^{-1} \, 2^{-n/2} \quad .$$

Fazendo uma transformação de variável obtém-se:

(2.26) $$h_n(v) = U \sum_{a} \left[k \; 2 \; \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (c^2 v^2)^{-s} \prod_{j=1}^{n} \Gamma\left(s + \frac{a_j}{2}\right) ds \; I_{(-\infty,0)}(v) \; + \right.$$

$$\left. + \, L \; 2 \; \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (c^2 v^2)^{-s} \prod_{j=1}^{n} \Gamma\left(s + \frac{a_j}{2}\right) ds \; I_{(0,\infty)}(v) \right]$$

Esta integral converge, e pode portanto ser escrita em termos da função G-de Meijer, isto é

$$(2.27)\qquad h_n(v) = U \sum_a \left[K\ 2\ G^{n,0}_{0,n}\left((cv)^2 \Big| \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, \ldots, \frac{a_n}{2}\right) I_{(-\infty,0)}(v) + \right.$$

$$\left. + L\ 2\ G^{n,0}_{0,n}\left((cv)^2 \Big| \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, \ldots, \frac{a_n}{2}\right) I_{(0,\infty)}(v) \right].$$

Onde a função G-de Meijer é definida como em [Mathai e Saxena , (1973)]:

$$(2.28)\qquad G^{m,n}_{p,q}\left[z \,\Big|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j+s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1-a_j-s)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1-b_j-s) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j+s)}\, z^{-s} ds$$

onde

$i=\sqrt{-1}$, $z\neq 0$ e $z^s=\exp\{s(\log|z|+i \arg z)\}$.

Um produto vazio pode ser interpretado como unitário e m,n,p,q são inteiros com $0\le n\le p$, $0\le m\le q$. L é um contorno adequado, contendo os polos do integrando, e $a_j(j=1,\ldots,p)$, $b_j(j=1,\ldots,q)$ são números complexos tais que $a_j-b_h\neq 0,1,2,\ldots$ $(j=1,\ldots,n$ e $h=1,\ldots,m)$. Os parâmetros são tais que os pontos

$-s = (b_j+v)$ $(j=1,\ldots,m;\ v=0,1,\ldots)$

e

$-s = (a_j-v-1)$ $(j=1,\ldots,n;\ v=0,1,\ldots)$

são separados.

Há três contornos L de integração:

a) L vai de $-i\infty$ a $+i\infty$ de tal modo que todos os polos de $\Gamma(b_j+s)$,

$j=1,\ldots,m$, fiquem a direita e todos os polos de $\Gamma(1-a_k-s)$, $k=1,\ldots,n$ à esquerda, de L. A integral converge se $p+q<2(m+n)$ e $|\arg z|<(m+n-(1/2)p-(1/2)q)\pi$. Se $|\arg z|=(m+n-(1/2)p-(1/2)q)\pi$, a integral converge absolutamente quando $p=q$ se $Re(\nu)<-1$; e quando $p\neq q$, se com $s=\sigma+i\tau$, σ e τ reais, σ é escolhido de tal modo que para $\tau\to\pm\infty$, $(q-p)\sigma>Re(\nu)+1+(1/2)p-(1/2)q$, onde $\nu=\sum_{j=1}^{q}b_j-\sum_{j=1}^{p}a_j$.

b) L é um ciclo começando e terminando em $+\infty$, no sentido anti-horário, englobando todos os polos de $\Gamma(b_j+s)$, $j=1,\ldots,m$, mas nenhum dos polos de $\Gamma(1-a_k-s)$, $k=1,\ldots,n$. A integral converge se $q\geq 1$ e, ou $p<q$ ou $p=q$ e $|z|<1$.

c) L é um ciclo começando e terminando em $-\infty$, no sentido horário, englobando todos os polos de $\Gamma(1-a_k-s)$, $k=1,\ldots,n$, porém nem um de $\Gamma(b_j+s)$, $j=1,\ldots,m$. A integral converge se $p\geq 1$ e $p>q$ ou $p=q$ e $|z|>1$.

Da mesma forma pode ser escrita a função densidade de V para n par,

$n=2k \quad k=1,2,\ldots$

$$h_n(v)=U\sum_a\left[K\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}(cv)^{-s}\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{a_j}{2}\right)ds\, I_{(-\infty,0)}(v)+\right. \tag{2.29}$$

$$\left.+L\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}(cv)^{-s}\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{a_j}{2}\right)ds\, I_{(0,\infty)}(v)\right]$$

onde

$$U=\frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{M_j}{\sigma_j}\right)^2}}{(8\pi)^{n/2}\prod_{j=1}^{n}\sigma_j}, \tag{2.30}$$

$$(2.31)\qquad \sum_{a} = \sum_{a_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{a_n=0}^{\infty} \quad ,$$

$$(2.32)\qquad K = \prod_{j=1}^{n} \frac{M_j^{a_j}\, 2^{\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2}}}{a_j!\; \sigma_j^{a_j}} \left[\sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\substack{I_1, I_2, \ldots, I_{2j+1}=1 \\ I_1<I_2<\ldots<I_{2j+1}}}^{n} (-1)^{a_{I_1}+a_{I_2}+\ldots+a_{I_{2j+1}}} \right],$$

$$(2.33)\qquad L = \prod_{j=1}^{n} \frac{M_j^{a_j}\, a^{\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2}}}{a_j!\; \sigma_j^{a_j}} \left[1 + \sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{I_1, I_2, \ldots, I_{2j}=1 \\ I_1<I_2<\ldots<I_{2j}}}^{n} (-1)^{a_{I_1}+a_{I_2}+\ldots+a_{I_{2j}}} \right],$$

$$(2.34)\qquad C = \prod_{j=1}^{n} \sigma_j^{-1}\; 2^{-n/2}$$

Fazendo uma transformação de variável:

$$(2.35)\qquad h_n(v) = U \sum_{a} \left[K\; 2\; \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (c^2 v^2)^{-s} \prod_{j=1}^{n} \Gamma\left(s+\frac{a_j}{2}\right) ds\; I_{(-\infty,0)}(v) + \right.$$

$$\left. + L\; 2\; \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (c^2 v^2)^{-s} \prod_{j=1}^{n} \Gamma\left(s+\frac{a_j}{2}\right) ds\; I_{(0,\infty)}(v) \right]$$

Ainda pelo mesmo argumento anterior, em termos da função G-de Meijer pode ser escrito:

$$(2.36)\qquad h_n(v) = U \sum_{a} \left[K\; 2\; G_{0,n}^{n,0} \left((cv)^2 \middle| \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, \ldots, \frac{a_n}{2} \right) I_{(-\infty,0)}(v) \; + \right.$$

$$+ L\ 2\ G^{n,0}_{0,n}\ ((cv)^2 | \tfrac{a_1}{2}, \tfrac{a_2}{2}, \ldots, \tfrac{a_n}{2})\ I_{(0,\infty)}(v) \Big]$$

CASO ESPECIAL

Em geral a função G não pode ser escrita em termos de funções especiais mais simples, mas para alguns valores de n isto é possível. Por exemplo, para n=2 a função densidade de V se reduz a:

$$(2.37) \qquad h_2(v) = U \sum_a \Big[K\ 2G^{2,0}_{0,2}\ (c^2v^2 | \tfrac{a_1}{2}, \tfrac{a_2}{2})\ I_{(-\infty,0)}(v) + $$

$$+ L\ 2\ G^{2,0}_{0,2}(c^2v^2 | \tfrac{a_1}{2}, \tfrac{a_2}{2})\ I_{(0,\infty)}(v) \Big]$$

ou [vide Mathai/Saxena (1973), p. 64]

$$(2.38) \qquad h_2(v) = \frac{e^{-\frac{1}{2}[(\frac{M_1}{\sigma_1})^2 + (\frac{M_2}{\sigma_2})^2]}}{8\ \sigma_1\ \sigma_2\ \pi} \sum_{a_1=0}^{\infty} \sum_{a_2=0}^{\infty} \frac{M_1^{a_1}\ M_2^{a_2}}{a_1!\ a_2!\ \sigma_1^{a_1}\ \sigma_2^{a_2}} [(-1)^{a_1} +$$

$$+ (-1)^{a_2}]\ 4(|\frac{v}{\sigma_1\sigma_2}|)^{\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2}}\ K_{(\frac{a_1-a_2}{2})}(|\frac{v}{\sigma_1\sigma_2}|)\ I_{(-\infty,0)}(v) +$$

$$+ \frac{M_1^{a_1}\ M_2^{a_2}}{a_1!\ a_2!\ \sigma_1^{a_1}\ \sigma_2^{a_2}} [1+(-1)^{a_1+a_2}]\ 4(|\frac{v}{\sigma_1\sigma_2}|)^{\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2}}\ K_{(\frac{a_1-a_2}{2})}(|\frac{v}{\sigma_1\sigma_2}|)\ I_{(0,\infty)}(v)$$

onde $K_{(\frac{a_1-a_2}{2})}(|\frac{v}{\sigma_1\sigma_2}|)$ é a função de Bessel do segundo tipo.

Este resultado coincide com o de Cordeiro e Rathie (1979) e Craig (1936).

3 - A DISTRIBUIÇÃO DE V EM FORMA COMPUTÁVEL

A função densidade de V, como aparece em (2.27) ou (2.36), não se presta para o cálculo dos pontos percentuais de sua função distribuição. Para calcular a densidade de V numa forma computável, será usado o teorema dos resíduos no cálculo da integral

$$W = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (c^2v^2)^{-s} \prod_{j=1}^{n} \Gamma\left(s+\frac{a_j}{2}\right) ds \;. \tag{3.1}$$

Esta integral pode ser resolvida pelo teorema dos resíduos [Ahlfors (1966), pg. 149].

Para tanto, são considerados dois casos:

$$\begin{aligned} &1º)\quad \frac{a_j}{2} = m_j \;, \quad \text{para } a_j \text{ par} \\ &2º)\quad \frac{a_j}{2} = n_j+\frac{1}{2} \;, \quad \text{para } a_j \text{ ímpar.} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Então, podemos escrever

$$\prod_{j=1}^{n} \Gamma\left(\frac{a_j}{2}+s\right) = \prod_{j=1}^{p} \Gamma(m_j+s) \prod_{j=1}^{q} \Gamma\left(n_j+\frac{1}{2}+s\right) \quad ; \tag{3.3}$$

onde $p+q=n$.

Os polos dos produtos das funções gamas no lado direito de (3.3) não são coincidentes, logo os dois casos podem ser analisados separadamente.

Os polos são :

$$\begin{aligned} &s = -(m_j+u_j) \;, \quad \text{para } u_j=0,1,\ldots \\ &s = -\left(n_j+\frac{1}{2}+\ell_j\right) \;, \quad \text{para } \ell_j=0,1,\ldots \end{aligned} \tag{3.4}$$

1º Caso:

(3.5) Seja $\prod_{j=1}^{p} \Gamma(m_j+s)$, com $m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_p$.

Então:

Os polos de ordem 1, são dados pela equação
$s = -(m_1+u_1)$, para $u_1=0,1,\ldots,m_2-m_1-1$.

Os de ordem 2, pela equação:
$s = -(m_2+u_2)$, para $u_2=0,1,\ldots,m_3-m_2-1$.

Os de ordem 3, pela equação:

(3.6) $s = -(m_3+u_3)$, para $u_3=0,1,\ldots,m_4-m_3-1$.

Os de ordem genérica k ($k=1,2,\ldots,p-1$), pela equação
$s = -(m_k+u_k)$, para $u_k=0,1,\ldots,m_{k+1}-m_{k-1}$.

Os de ordem p, pela equação
$s = -(m_p+u_p)$, para $u_p=0,1,\ldots$.

2º Caso:

(3.7) Seja $\prod_{j=1}^{q} \Gamma(n_j+\frac{1}{2}+s)$, com $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \ldots \leq n_q$.

Então os polos de ordem 1, são dados pela equação:
$s = -(n_1+\frac{1}{2}+\ell_1)$, para $\ell_1=0,1,\ldots n_2-n_1-1$.

Os de ordem dois, por

(3.8) $s = -(n_2+\frac{1}{2}+\ell_2)$, para $\ell_2=0,1,\ldots,n_3-n_2-1$.

Os de ordem genérica k ($k=0,1,\ldots,q-1$), por
$s = -(n_k+\frac{1}{2}+\ell_k)$, para $\ell_k=0,1,2,\ldots,n_{k+1}-n_k-1$.

E os de ordem q, por
$s = -(n_q+\frac{1}{2}+\ell_q)$, para $\ell_q=0,1,2,\ldots$.

Usando (3.1) e (3.3), pode-se escrever

$$(3.9)\qquad W = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (c^2v^2)^{-s} \prod_{j=1}^{p} \Gamma(m_j+s) \prod_{j=1}^{q} \Gamma(n_j+\tfrac{1}{2}+s)\,ds\ ,$$

o que, pelo teorema dos resíduos, fornece

$$(3.10)\qquad W = \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{u_j=0}^{m_{j+1}-m_j-1} R_{1j}^{(u_j)} + \sum_{u_p=0}^{\infty} R_{1p}^{(u_p)} + \sum_{j=1}^{q-1} \sum_{\ell_j=0}^{n_{j+1}-n_j-1} R_{2j}^{(\ell_j)} + \sum_{\ell_q=0}^{\infty} R_{2q}^{(\ell_q)}$$

onde $R_{1j}^{(u_j)}$ é o resíduo do 1º caso, no polo $s=-(m_j+u_j)$ de ordem j, para $u_j=0,1,\ldots,m_{j+1}-m_j-1$, $j=0,1,\ldots,p-1$.

O cálculo do resíduo em um polo de ordem n pode ser efetuado como

$$(3.11)\qquad \mathrm{Res}(f,a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{s\to a} \frac{d^{n-1}}{d_s^{n-1}} \{(s-a)^n f(s)\}\ ,$$

e para os polos de primeira ordem

$$(3.12)\qquad \mathrm{Res}(f,a) = \lim_{s\to a} \{(s-a)f(s)\}\ .$$

Assim,

$$(3.13)\qquad R_{1j}^{(u_j)} = \frac{1}{(j-1)!} \lim_{s\to-(m_j+u_j)} \frac{d^{j-1}}{d_s^{j-1}} [s+m_j+u_j)^j \prod_{i=1}^{j} \Gamma(s+m_i) g(s)]\ ,$$

onde

$$(3.14)\qquad g(s) = \prod_{i=1}^{q} \Gamma(s+n_i+\tfrac{1}{2})(c^2v^2)^{-s}$$

do que, com aplicação reinterada da propriedade

(3.15) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, para $n \neq 0,-1,-2,\ldots$,

obtém-se :

$$(3.16)\quad R_{1j}^{(u_j)} = \frac{1}{(j-1)!} \lim_{s\to-(m_j+u_j)} \frac{d^{j-1}}{d_s^{j-1}} \left[\frac{\Gamma^j(s+m_j+u_j+1)\ g(s)}{\prod_{t=0}^{u_j-1} (s+m_j+t)^j \prod_{k=0}^{j-2} \prod_{t=0}^{m_{k+2}-m_{k+1}-1} (s+m_{k+1}+t)^{k+1}} \right]$$

pois,

$$(3.17)\quad \prod_{i=1}^{j} \Gamma(s+m_i) = \Gamma^j(s+m_j+u_j+1) / \prod_{t=0}^{u_j-1} (s+m_j+t)^j \prod_{k=0}^{j-2} \prod_{t=0}^{m_{k+2}-m_{k+1}-1} (s+m_{k+1}+t)^{k+1} ,$$

ou ainda,

$$(3.18)\quad R_{1j}^{(u_j)} = \frac{1}{(j-1)!} \lim_{s\to-(m_j+u_j)} \frac{d^{j-1}}{d_s^{j-1}} [f(s)z^{-s}] ,$$

onde,

(3.19) $z = c^2v^2$, com c definido como em (2.25)

e

$$(3.20)\quad f(s) = \frac{\Gamma^j(s+m_j+u_j+1) \prod_{i=1}^{q} \Gamma(s+n_i+\frac{1}{2})}{\prod_{t=0}^{u_j-1} (s+m_j+t)^j \prod_{k=0}^{j-2} \prod_{t=0}^{m_{k+2}-m_{k+1}-1} (s+m_{k+1}+t)^{k+1}} .$$

Usando

$$(3.21)\quad \frac{d^{j-1}}{d_s^{j-1}} (z^{-s}f(s)) = z^{-s}\left(\frac{d}{ds}+(-\log z)\right)^{j-1} f(s) ,$$

pelo teorema binomial

$$(3.22)\qquad \left(\frac{d}{ds}+(-\log z)\right)^{j-1} f(s) = \sum_{r=0}^{j-1} \binom{j-1}{r} (-\log z)^{j-1-r} \frac{d^{j-1-r}}{d_s^{j-1-r}} f(s)$$

tem-se

$$(3.23)\qquad R_{1j}^{(u_j)} = \frac{1}{(j-1)!} \lim_{s\to-(m_j+u_j)} z^{-s}\left(\sum_{r=0}^{j-1} \binom{j-1}{r} (-\log z)^{j-1-r} \frac{d^{j-1-r}}{d_s^{j-1-r}} f(s) \right).$$

Seja,

$$(3.24)\qquad R_{1j}^{(u_j)} = \frac{1}{(j-1)!} \lim_{s\to-(m_j+u_j)} z^{-s} \sum_{r=0}^{j-1}\left[\binom{j-1}{r} (-\log z)^{j-1-r} A_j^{(j-1-r)} \right]$$

onde

$$(3.25)\qquad \begin{cases} A_j = f(s) \\ A_j^{(k)} = \dfrac{d^k}{d_s^k} A_j \end{cases} .$$

Denotando

$$(3.26)\qquad C_j = \frac{d}{ds} \ln (A_j)$$

tem-se

$$(3.26)\qquad \frac{d}{ds} A_j = A_j . C_j = A_j^{(1)}$$

e

$$(3.27)\qquad A_j^{(k)} = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} A_j^{(k-1-r)} . C_j^{(r)}$$

onde $C_j^{(r)}$ indica a r-ésima derivada de C_j.

Fazendo $A_{0j}^{(k)} = \lim_{s\to-(m_j+u_j)} A_j^{(k)}$ e $C_{0j}^{(r)} = \lim_{s\to-(m_j+u_j)} C_j^{(r)}$, o resíduo em (3,24) fica

$$(3.28)\qquad R_{1,j}^{(u_j)} = \frac{1}{(j-1)!} z^{m_j+u_j} \sum_{r=0}^{j-1} \{\binom{j-1}{r} (-\log z)^{j-1-r} [\sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} A_{0j}^{(k-1-r)} C_{0j}^{(r)}]\}$$

Portanto, $R_{1,j}^{(u_j)}$ fica completamente determinado se forem determinados os valores de A_{0j}, C_{0j}, $C_{0j}^{(r)}$.

Se

$$A_j = \Gamma^j(s+m_j+u_j+1) \prod_{i=1}^{q} \Gamma(s+n_i+\tfrac{1}{2}) / \prod_{t=0}^{u_j-1} (s+m_j+t)^j \prod_{k=0}^{j-2} \prod_{t=0}^{m_{k+2}-m_{k+1}-1} (s+m_{k+1}+t)^{k+1},$$

então

$$(3.29)\qquad A_{0j} = \frac{\Gamma^j_{(1)} \prod_{i=1}^{n-p} \Gamma(-m_j-u_j+n_i+\frac{1}{2})}{\prod_{t=0}^{u_j-1} (t-u_j) \prod_{k=0}^{j-2} \prod_{t=0}^{m_{k+2}-m_{k+1}-1} (m_{k+1}+t-m_j-u_j)^{k+1}} .$$

No cálculo de C_j, utilizando a função psi definida como em [Erdely (1953)]:

$$(3.30)\qquad \psi(z) = \frac{d}{d_z} \ln \Gamma(z) = -\gamma + (z-1) \sum_{s=0}^{\infty} \{(s+1).(z+s\}^{-1} \quad ,$$

$z\neq 0,-1,-2,\dots$ e $\gamma \equiv 0,5772156\dots$ (constante de Euler).

de (3.26) obtém-se:

$$(3.31)\qquad C_j = \frac{d}{ds}[j\ \ln\ \Gamma(s+m_j+u_j+1) + \sum_{i=1}^{q} \ln\ \Gamma(s+n_i+\tfrac{1}{2}) - \sum_{t=0}^{u_j-1} \ln(s+m_j+t)^j -$$

$$- \sum_{k=0}^{j-2} \sum_{t=0}^{m_{k+2}-m_{k+1}-1} \ln(s+m_{k+1}+t)^{k+1}] = j\ \psi(s+m_j+u_j+1) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{q} \psi(s+n_i+\tfrac{1}{2}) - \sum_{t=0}^{u_j-1} \frac{j}{(s+m_j+t)} - \sum_{k=0}^{j-2} \sum_{t=0}^{m_{k+2}-m_{k+1}-1} \frac{k+1}{(s+m_{k+1}+t)}$$

donde, passando ao limite,

$$(3.22)\qquad C_{0j}=j\psi(1)+\sum_{i=1}^{q}\psi(-m_j-u_j+n_i+\tfrac{1}{2})-\sum_{t=0}^{u_j-1}\frac{j}{(t-u_j)}-\sum_{k=0}^{j-2}\sum_{t=0}^{m_{k+2}-m_{k+1}-1}\frac{k+1}{(m_{k+1}+t-m_j-u_j)}\ .$$

Para $a+s\neq -n$, $n=0,1,2,\ldots$, vale o resultado:

$$(3.33)\qquad \frac{d^k}{d_s^k}\ \ln\ \Gamma(a+s) = \psi(a+s)\ \text{ para } k=1$$
$$= (-1)^k(k-1)!\ \zeta(k,a+s)\ \text{ para } k\geq 2\ ,$$

onde $\zeta(d,s) = \sum_{r=0}^{\infty} (d+r)^{-s}$, $R(s)>0$ $d\neq 0,-1,-2,\ldots$.

Tem-se, portanto, para as derivadas superiores de C_j:

$$(3.34)\qquad C_j^{(r)} = (-1)^{r+1}(r)!\ \Big[j\zeta(r+1;s+m_j+u_j+1) + \sum_{i=1}^{q}\zeta(r+1;s+n_i+\tfrac{1}{2}) +$$

$$+ \sum_{t=0}^{u_j-1}\frac{j}{(s+m_j+t)^{r+1}} + \sum_{k=0}^{j-2}\sum_{t=0}^{m_{k+2}-m_{k+1}-1}\frac{k+1}{(s+m_{k+1}+t)^{r+1}}\Big]$$

que, passando ao limite fica:

$$(3.35)\qquad C_{0j}^{(r)} = (-1)^{r+1}(r)!\left[j\zeta(r+1;1) + \sum_{i=1}^{q}\zeta(r+1;-m_j-u_j+n_i+\tfrac{1}{2}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{t=0}^{u_j-1}\frac{j}{(t-u_j)^{r+1}} + \sum_{k=0}^{j-2}\sum_{t=0}^{m_{k+2}-m_{k+1}-1}\frac{k+1}{(m_{k+1}+t-m_j-u_j)^{r+1}}\right]$$

Como os elementos A_j, C_j, $C_j^{(r)}$, A_{0j}, C_{0j}, $C_{0j}^{(r)}$ já foram determinados, pode-se calcular por recorrência, com (3.27), os elementos $A_j^{(r)}$ e $A_{0j}^{(r)}$ que são necessários para $R_{1j}^{(u_j)}$.

Analogamente encontra-se o valor de $R_{1p}^{(u_p)}$, bastando substituir nas expressões de (3.11) a (3.35) o índice j pelo índice p.

O resíduo $R_{2j}^{(\ell_j)}$ do 2º tipo da função W no polo $s=-(n_j+\frac{1}{2}+\ell_j)$, de ordem j, para $\ell_j=0,1,\ldots,n_{j+1}-n_j-1$, $j=1,2,\ldots,q-1$, é calculado como segue:

De (3.11) tem-se

$$(3.36)\qquad R_{2j}^{(\ell_j)} = \frac{1}{(j-1)!}\lim_{s\to-(n_j+\frac{1}{2}+\ell_j)}\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}\left[(s+n_j+\tfrac{1}{2}+\ell_j)^j\prod_{i=1}^{j}\Gamma(s+n_i+\tfrac{1}{2})H(s)\right]$$

onde

$$(3.37)\qquad H(s) = \prod_{i=1}^{p}\Gamma(s+m_i)(C^2v^2)^{-s}$$ e C está definida por (2.25)

do que, com aplicação reiterada da propriedade (3.15), tem-se:

$$(3.38)\qquad R_{2j}^{(\ell_j)} = \frac{1}{(j-1)!}\lim_{s\to-(n_j+\frac{1}{2}+\ell_j)}\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}\left[\frac{\Gamma^j(s+n_j+\frac{1}{2}+\ell_j+1)H(s)}{\prod\limits_{t=0}^{\ell_j-1}(s+n_j+\frac{1}{2}+t)^j\prod\limits_{k=0}^{j-2}\prod\limits_{t=0}^{n_{k+2}-n_{k+1}-1}(s+n_{k+1}+\frac{1}{2}+1)^{k+1}}\right]$$

pois,

$$(3.39) \qquad \prod_{i=1}^{j} \Gamma(s+n_i+\tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma^j(s+n_j+\frac{1}{2}+\ell_j+1)}{\prod_{t=0}^{\ell_j-1} (s+n_j+\frac{1}{2}+t)^j \prod_{k=0}^{j-2} \prod_{t=0}^{n_{k+2}-n_{k+1}-1} (s+n_{k+1}+\frac{1}{2}+t)^{k+1}}$$

ou ainda

$$(3.40) \qquad R_{2j}^{(\ell_j)} = \frac{1}{(j-1)!} \lim_{s\to-(n_j+\frac{1}{2}+\ell_j)} \frac{d^{j-1}}{d_s^{j-1}} [X(s) z^{-s}] ,$$

onde z, está definido em (3.19)

e

$$(3.42) \qquad X(s) = \frac{\Gamma^j(s+n_j+\frac{1}{2}+\ell_j+1) \prod_{i=1}^{p} \Gamma(s+m_i)}{\prod_{t=0}^{\ell_j-1} (s+n_j+\frac{1}{2}+t)^j \prod_{t=0}^{n_{k+2}-n_{k+1}-1} (s+n_{k+1}+\frac{1}{2}+t)^{k+1}}$$

do que, por (3.21) e (3.22) tem-se:

$$(3.43) \qquad R_{2j}^{(\ell_j)} = \frac{1}{(j-1)!} \lim_{s\to-(n_j+\frac{1}{2}+\ell_j)} z^{-s} \left[\sum_{r=0}^{j-1} \binom{j-1}{r} (-\log z)^{j-1-r} \frac{d^{j-1-r}}{d_s^{j-1-r}} X(s) \right].$$

Procedendo como anteriormente o resíduo fica,

$$(3.44) \qquad R_{2j}^{(\ell_j)} = \frac{1}{(j-1)!} \lim_{s\to-(n_j+\frac{1}{2}+\ell_j)} z^{-s} \sum_{r=0}^{j-1} [\binom{j-1}{r} (-\log z)^{j-1-r} B_j^{(j-1-r)}] ,$$

ou ainda

$$(3.45)\qquad R_{2j}^{(\ell_j)} = \frac{1}{(j-1)!}\, z^{n_j+\frac{1}{2}+\ell_j} \sum_{r=0}^{j-1} \{ \binom{j-1}{r} (-\log z)^{j-1-r} [\sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} B_{0j}^{(k-1-r)} D_{0j}^{(r)}]\}.$$

Derivando os coeficientes B_j, D_j e passando ao limite, obtêm-se:

$$(3.46)\qquad B_j = \frac{\Gamma^j(s+n_j+\frac{1}{2}+\ell_j+1) \prod_{i=1}^{p} \Gamma(s+m_i)}{\prod_{t=0}^{\ell_j-1} (s+n_j+\frac{1}{2}+t)^j \prod_{k=0}^{j-2} \prod_{t=0}^{n_{k+2}-n_{k+1}-1} (s+n_{k+1}+\frac{1}{2}+t)^{k+1}} ,$$

e

$$(3.47)\qquad B_{0j} = \frac{\Gamma^j(1) \prod_{i=1}^{p} (-n_j-\frac{1}{2}-\ell_j+m_i)}{\prod_{t=0}^{\ell_j-1} (t-\ell_j)^j \prod_{k=0}^{j-2} \prod_{t=0}^{n_{k+2}-n_{k+1}-1} (n_{k+1}-n_j-\ell_j)^{k+1}} .$$

$$(3.48)\qquad D_j = \frac{d}{ds} [j \ln(s+n_j+\frac{1}{2}+\ell_j+1) + \sum_{i=1}^{p} \ln \Gamma(s+m_i) - \sum_{t=0}^{\ell_j-1} \ln(s+n_j+\frac{1}{2}+t)^j -$$

$$- \sum_{k=0}^{j-2} \sum_{t=0}^{n_{k+2}-n_{k+1}-1} \ln(s+n_{k+1}+\frac{1}{2}+t)^{k+1}] = j\psi(s+n_j+\frac{1}{2}+\ell_j+1) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} \psi(s+m_i) - \sum_{t=0}^{\ell_j-1} \frac{j}{(s+n_j+\frac{1}{2}+t)} - \sum_{k=0}^{j-2} \sum_{t=0}^{n_{k+2}-n_{k+1}-1} \frac{k+1}{(s+n_{k+1}+t+\frac{1}{2})}$$

e

$$(3.49)\qquad D_{0j} = j\psi(1) + \sum_{i=1}^{p} \psi(-n_j-\frac{1}{2}-\ell_j+m_i) - \sum_{t=0}^{\ell_j-1} \frac{j}{(t-\ell_j)} -$$

$$-\sum_{k=0}^{j-2}\sum_{t=0}^{n_{k+2}-n_{k+1}-1}\frac{k+1}{(n_{k+1}+t-n_j-\ell_j)},$$

e por (3.33),

$$D_j^{(r)} = (-1)^{r+1}(r)!\left[j\zeta(r+1;s+n_j+\tfrac{1}{2}+\ell_j+1) + \sum_{i=1}^{p}\zeta(r+1;s+m_i) + \right.$$

$$\left. + \sum_{t=0}^{\ell_j-1}\frac{j}{(s+n_j+\frac{1}{2}+t)^{r+1}} + \sum_{k=0}^{j-2}\sum_{t=0}^{n_{k+2}-n_{k+1}-1}\frac{k+1}{(s+n_{k+1}+\frac{1}{2}+t)^{r+1}}\right] \tag{3.50}$$

e

$$D_{0j}^{(r)} = (-1)^{r+1}(r)!\left[j\zeta(r+1;1) + \sum_{i=1}^{q}\zeta(r+1;-n_j-\tfrac{1}{2}-\ell_j+m_i) + \right.$$

$$\left. + \sum_{t=0}^{\ell_j-1}\frac{j}{(t-\ell_j)^{r+1}} + \sum_{k=0}^{j-2}\sum_{t=0}^{n_{k+2}-n_{k+1}-1}\frac{k+1}{(n_{k+1}+t-n_j-\ell_j)^{r+1}}\right] \tag{3.51}$$

A fórmula de recorrência (3.36) dá os elementos $B_j^{(r)}$ e $B_{0j}^{(r)}$.

Analogamente é encontrado o valor de $R_{2q}^{(\ell_q)}$, bastando trocar o índice j pelo índice q.

Agora está-se em condições de apresentar a função densidade de probabilidade do produto de n variáveis aleatórias independentes normais com quaisquer médias e quaisquer variâncias, numa forma computável.

Para n ímpar, n=2k+1, k=0,1,2,...

$$(3.52)\qquad h_n(v)=\frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{M_j}{\sigma_j}\right)^2}}{(8\pi)^{n/2}\prod_{j=1}^{n}\sigma_j}\sum_{a_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{a_n=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}\frac{M_j^{a_j}\,2^{\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2}}}{a_j!\,\sigma_j^{a_j}}\ \times$$

$$\times\left[2\left[\sum_{j=0}^{k}\ \sum_{\substack{I_1,I_2,\ldots,I_{2j+1}=1\\ I_1<I_2<\ldots<I_{2j+1}}}^{n}(-1)^{a_{I_1}+a_{I_2}+\ldots+a_{I_{2j+1}}}\right]\times\right.$$

$$\times\left[\sum_{j=1}^{p-1}\ \sum_{u_j=0}^{m_{j+1}-m_j-1}\frac{1}{(j-1)!}\left[\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}\ 2^{-\frac{n}{2}}v)^2\right]^{m_j+u_j}\right.$$

$$\sum_{r=0}^{j-1}\left\{\binom{j-1}{r}\left[-\log\left(\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}\ 2^{-\frac{n}{2}}v\right)^2\right]^{j-1-r}\left[\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k-1}{r}A_{0j}^{(k-1-r)}C_{0j}^{(r)}\right]\right\}\ +$$

$$+\sum_{u_p=0}^{\infty}\frac{1}{(p-1)!}\left[\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}\ 2^{-\frac{n}{2}}v)^2\right]^{m_p+u_p}\sum_{r=0}^{p-1}\left\{\binom{p-1}{r}\ \times\right.$$

$$\times\left[-\log\left(\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}\ 2^{-\frac{n}{2}}v\right)^2\right]^{p-1-r}\left[\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k-1}{r}A_{0p}^{(k-1-r)}C_{0p}^{(r)}\right]\Big\}\ +$$

$$+\sum_{j=0}^{q}\ \sum_{\ell_j=0}^{n_{j+1}-n_j-1}\frac{1}{(j-1)!}\left[\left(\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}\ 2^{-\frac{n}{2}}v\right)^2\right]^{n_j+\frac{1}{2}+\ell_j}\ \times$$

$$\times\sum_{r=0}^{j-1}\left\{\binom{j-1}{r}\left[-\log\left(\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}\ 2^{-\frac{n}{2}}v\right)^2\right]^{j-1-r}\left[\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k-1}{r}B_{0j}^{(k-1-r)}D_{0j}^{(r)}\right]\right\}\ +$$

$$+\sum_{\ell_q=0}^{\infty}\frac{1}{(q-1)!}\left[\left(\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}\ 2^{-\frac{n}{2}}v\right)^2\right]^{n_q+\frac{1}{2}+\ell_q}\times$$

$$\times \sum_{r=0}^{q-1} \{\binom{q-1}{r} [-\log(\prod_{j=1}^{n} \sigma_j^{-1}\ 2^{-\frac{n}{2}} v)^2]^{q-1-r} [\sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} B_{0q}^{(k-1-r)} D_{0q}^{(r)}]\}\Bigg] I_{(-\infty,0)}(v) +$$

$$+ 2\left[1 + \sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{I_1,I_2,\dots,I_{2j}=1 \\ I_1<I_2<\dots<I_{2j}}}^{n} (-1)^{a_{I_1}+a_{I_2}+\dots+a_{I_{2j}}}\right] \times$$

$$\times \left[\sum_{j=1}^{p-1} \sum_{u_j=0}^{m_{j+1}-m_j-1} \frac{1}{(j-1)!} [(\prod_{j=1}^{n} \sigma_j^{-1}\ 2^{-\frac{n}{2}} v)^2]^{m_j+u_j} \times\right.$$

$$\times \sum_{r=0}^{j-1} \{\binom{j-1}{r} [-\log(\prod_{j=1}^{n} \sigma_j^{-1}\ 2^{-\frac{n}{2}} v)^2]^{j-1-r} [\sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} A_{0j}^{(k-1-r)} C_{0j}^{(r)}]\} +$$

$$+ \sum_{u_p=0}^{\infty} \frac{1}{(p-1)!} [(\prod_{j=1}^{n} \sigma_j^{-1}\ 2^{-\frac{n}{2}} v)^2]^{m_p+u_p} \sum_{r=0}^{p-1} \{\binom{p-1}{r} [-\log(\prod_{j=1}^{n} \sigma_j^{-1} 2^{-\frac{n}{2}} v)^2]^{p-1-r} \times$$

$$\times [\sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} A_{0p}^{(k-1-r)} C_{0p}^{(r)}]\} + \sum_{j=1}^{q} \sum_{\ell_j=0}^{n_{j+1}-n_j-1} \frac{1}{(j-1)!} \times$$

$$\times [(\prod_{j=1}^{n} \sigma_j^{-1}\ 2^{-\frac{n}{2}} v)^2]^{n_j+\frac{1}{2}+\ell_j} \sum_{r=0}^{j-1} \{\binom{j-1}{r} [-\log(\prod_{j=1}^{n} \sigma_j^{-1}\ 2^{-\frac{n}{2}} v)^2]^{j-1-r} \times$$

$$\times [\sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} B_{0j}^{(k-1-r)} D_{0j}^{(r)}]\} + \sum_{\ell_q=0}^{\infty} \frac{1}{(q-1)!} [(\prod_{j=1}^{n} \sigma_j^{-1}\ 2^{-\frac{n}{2}} v)^2]^{n_q+\frac{1}{2}+\ell_q} \times$$

$$\left.\times \sum_{r=0}^{q-1} \{\binom{q-1}{r} [-\log(\prod_{j=1}^{n} \sigma_j^{-1}\ 2^{-\frac{n}{2}} v)^2]^{q-1-r} [\sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} B_{0q}^{(k-1-r)} D_{0q}^{(r)}]\}\right] I_{(0,\infty)}(v)\Bigg]$$

onde $A_{0j}^{(k-1-r)}$ e $C_{0j}^{(r)}$ são calculados por (3.27) com as expressões (3.29) a (3.35) e $B_{0j}^{(k-1-r)}$ e $D_{0j}^{(r)}$ são calculados por (3.27) com as expressões (3.34) a (3.51).

Para n par, n=2k, k=1,2,...

$$(3.53)\quad h_n(v)=\frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{M_j}{\sigma_j}\right)^2}}{(8\pi)^{n/2}\prod_{j=1}^{n}\sigma_j}\sum_{a_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{a_n=0}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{n}\frac{M_j^{a_j}\cdot 2^{\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2}}}{a_j!\,\sigma_j^{a_j}}\right]\times$$

$$\times\left[\left[\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{\substack{I_1,\ldots,I_{2j+1}=1\\ I_1<I_2<\ldots<I_{2j+1}}}^{n}(-1)^{a_{I_1}+a_{I_2}+\ldots+a_{I_{2j+1}}}\right]\times\right.$$

$$\times 2\left[\sum_{j=1}^{p-1}\sum_{u_j=0}^{m_{j+1}-m_j-1}\frac{1}{(j-1)!}\left[\left(\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}\,2^{-\frac{n}{2}}v\right)^2\right]^{m_j+u_j}\sum_{r=0}^{j-1}\left\{\binom{j-1}{r}\times\right.\right.$$

$$\times\left[-\log\left(\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}\,2^{-\frac{n}{2}}v\right)^2\right]^{j-1-r}\left[\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k-1}{r}A_{0j}^{(k-1-r)}\,C_{0j}^{(r)}\right]\Big\}+$$

$$+\sum_{u_p=0}^{\infty}\frac{1}{(p-1)!}\left[\left(\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}\,2^{-\frac{n}{2}}v\right)^2\right]^{m_p+u_p}\sum_{r=0}^{p-1}\left\{\binom{p-1}{r}\left[-\log\left(\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}2^{-\frac{n}{2}}v\right)^2\right]^{p-1-r}\times\right.$$

$$\times\left[\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k-1}{r}A_{0p}^{(k-1-r)}C_{0p}^{(r)}\right]\Big\}+\sum_{j=1}^{q}\sum_{\ell_j=0}^{n_{j+1}-n_j-1}\frac{1}{(j-1)!}\times$$

$$\times\left[\left(\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}\,2^{-\frac{n}{2}}v\right)^2\right]^{n_j+\frac{1}{2}+\ell_j}\sum_{r=0}^{j-1}\left\{\binom{j-1}{r}\left[-\log\left(\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}\,2^{-\frac{n}{2}}v\right)^2\right]^{j-1-r}\times\right.$$

$$\times\left[\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k-1}{r}B_{0j}^{(k-1-r)}D_{0j}^{(r)}\right]\Big\}+\sum_{\ell_q=0}^{\infty}\frac{1}{(q-1)!}\left[\left(\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}\,2^{-\frac{n}{2}}v\right)^2\right]^{n_q+\frac{1}{2}+\ell_q}\times$$

$$\left.\times\sum_{r=0}^{q-1}\left\{\binom{q-1}{r}\left[-\log\left(\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}\,2^{-\frac{n}{2}}v\right)^2\right]^{q-1-r}\left[\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k-1}{r}B_{0q}^{(k-1-r)}D_{0q}^{(r)}\right]\right\}\right]I_{(-\infty,0)}(v)+$$

$$+2\left[1+\sum_{j=1}^{k}\sum_{\substack{I_1,I_2,\dots,I_{2j}=1\\ I_1<I_2<\dots<I_{2j}}}^{n}(-1)^{a_{I_1}+a_{I_2}+\dots+a_{I_{2j}}}\right]\times$$

$$\times\left[\sum_{j=1}^{p-1}\sum_{u_j=0}^{m_{j+1}-m_j-1}\frac{1}{(j-1)!}\left[\left(\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}\,2^{-\frac{n}{2}}v\right)^2\right]^{m_j+u_j}\times\right.$$

$$\times\sum_{r=0}^{j-1}\left\{\binom{j-1}{r}\left[-\log\left(\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}\,2^{-\frac{n}{2}}v\right)^2\right]^{j-1-r}\left[\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k-1}{r}A_{0j}^{(k-1-r)}C_{0j}^{(r)}\right]\right\}+$$

$$+\sum_{u_p=0}^{\infty}\frac{1}{(p-1)!}\left[\left(\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}\,2^{-\frac{n}{2}}v\right)^2\right]^{m_p+u_p}\sum_{r=0}^{p-1}\left\{\binom{p-1}{r}\left[-\log\left(\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}2^{-\frac{n}{2}}v\right)^2\right]^{p-1-r}\times\right.$$

$$\times\left[\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k-1}{r}A_{0p}^{(k-1-r)}C_{0p}^{(r)}\right]\Bigg\}+\sum_{j=0}^{q}\sum_{\ell_j=0}^{n_{j+1}-n_j-1}\frac{1}{(j-1)!}\left[\left(\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}2^{-\frac{n}{2}}v\right)^2\right]^{n_j+\frac{1}{2}+\ell_j}\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{j-1}\left\{\binom{j-1}{r}\left[-\log\left(\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}\,2^{-\frac{n}{2}}v\right)^2\right]^{j-1-r}\left[\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k-1}{r}B_{0j}^{(k-1-r)}D_{0j}^{(r)}\right]\right\}+$$

$$+\sum_{\ell_q=0}^{\infty}\frac{1}{(q-1)!}\left[\left(\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}\,2^{-\frac{n}{2}}v\right)^2\right]^{n_q+\frac{1}{2}+\ell_q}\times$$

$$\left.\times\sum_{r=0}^{q-1}\left\{\binom{q-1}{r}\left[-\log\left(\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}2^{-\frac{n}{2}}v\right)^2\right]^{q-1-r}\left[\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k-1}{r}B_{0q}^{(k-1-r)}D_{0q}^{(r)}\right]\right\}\right]I_{(0,\infty)}(v)$$

onde $A_{0j}^{(k-1-r)}$ e $C_{0j}^{(r)}$ são calculados por (3.27) com as expressões (3.29) a (3.35) e $B_{0j}^{(k-1-r)}$, $D_{0j}^{(r)}$ são calculados por (3.27) com as expressões (3.34) a (3.51).

(3.54) TEOREMA: A Função densidade de probabilidade de V é dada por (3.52) se n for ímpar ou (3.53) se n for par, com $-\infty<v<\infty$.

4 - FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA

Por definição, a função distribuição acumulada $H(x)$ é obtida integrando a densidade $h_n(v)$ de $-\infty$ a x. Isto é

$$(4.1) \qquad H(x) = \int_{-\infty}^{x} h_n(v)\,dv \;, \quad -\infty<x<\infty$$

Então a função distribuição acumulada para n ímpar é dada por

$$(4.2) \qquad H(x) = \int_{-\infty}^{x} U \sum_a \Big[K\, 2\, \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Big[\Big(\frac{v}{C}\Big)^2\Big]^{-s} \prod_{j=1}^{n} \Gamma\Big(s+\frac{a_j}{2}\Big)\,ds\; I_{(-\infty,0)}(v)$$

$$+ L\, 2\, \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Big[\Big(\frac{v}{C}\Big)^2\Big]^{-s} \prod_{j=1}^{n} \Gamma\Big(s+\frac{a_j}{2}\Big)\,ds\; I_{(0,\infty)}(v)\Big]\,dv$$

onde U, $\sum_a$, K, L, C, estão definidas, respectivamente, por (2.21), (2.22), (2.23), (2.24) e (2.25)

ou

$$(4.3) \qquad H(x) = U \sum_a K\, 2 \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Big[\Big(\frac{v}{C}\Big)^2\Big]^{-s} \prod_{j=1}^{n} \Gamma\Big(s+\frac{a_j}{2}\Big)\,ds\,dv \;+$$

$$+ U \sum_a L\, 2 \int_{0}^{x} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Big[\Big(\frac{v}{C}\Big)^2\Big]^{-s} \prod_{j=1}^{n} \Gamma\Big(s+\frac{a_j}{2}\Big)\,ds\,dv \;,$$

para $x>0$, e

$$(4.4) \qquad H(x) = U \sum_a K\, 2 \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Big[\Big(\frac{v}{C}\Big)^2\Big]^{-s} \prod_{j=1}^{n} \Gamma\Big(s+\frac{a_j}{2}\Big)\,ds\,dv$$

para $x<0$, do que podemos escrever ainda

$$(4.5)\qquad H(x) = U\sum_a K\, 2\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[\left(\frac{v}{C}\right)^2\right]^{-s}\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(s+\frac{a_j}{2}\right)ds\, dv\ +$$

$$+\,U\sum_a L\, 2\,\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(s+\frac{a_j}{2}\right)\int_{x}^{0}\left[\left(\frac{v}{C}\right)\right]^{-s} dv\, ds\ ,$$

para $x>0$, e

$$(4.6)\qquad H(x) = U\sum_a K\, 2\int_{0}^{x}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[\left(\frac{v}{C}\right)^2\right]^{-s}\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(s+\frac{a_j}{2}\right)ds\, dv\ ,$$

para $x<0$, onde

$$\int_0^x\left(\frac{C}{v}\right)^{2s}dv = \frac{\left(-\frac{1}{x}\right)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(s+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{x}{C}\right)^{-2s}$$

Logo

$$(4.7)\qquad U\sum_a L\, 2\,\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\int_0^x\left[\left(\frac{v}{C}\right)^2\right]^{-s}\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(s+\frac{a_j}{2}\right)dv\, ds\ =$$

$$= U\sum_a L\,\frac{2}{2}\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[\left(\frac{x}{C}\right)^2\right]^{-s}\frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(s+\frac{a_j}{2}\right)ds}{\Gamma\left(s+\frac{3}{2}\right)}$$

$$= U\sum_a L\left(-\frac{1}{x}\right)G^{n+1,0}_{1,n+1}\left[\left(\frac{x}{C}\right)^2\,\middle|\,\begin{matrix}3/2\\ 1/2,\ a_1/2,\ a_2/2,\dots,a_n/2\end{matrix}\right].$$

e como $h_n(v)$ é uma função par, temos que:

$$(4.8)\qquad I = \int_{-\infty}^{0}U\sum_a K\, 2\,\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[\left(\frac{v}{C}\right)^2\right]^{-s}\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(s+\frac{a_j}{2}\right)ds\, dv\ =$$

$$= \int_0^{\infty} U \sum_a K\, 2 \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} [(\frac{v}{C})^2]^{-s} \prod_{j=1}^{n} \Gamma(s+\frac{a_j}{2})\, ds\, dv \quad .$$

Seja $v^2=t \Rightarrow dv=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$. Logo

$$(4.9) \qquad I = U \sum_a K \frac{2}{2} \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (\frac{t}{C^2})^{-s} \prod_{j=1}^{n} \Gamma(s+\frac{a_j}{2})\, ds\, dt$$

$$= U \sum_a K \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1} G^{n,0}_{0,n} (\frac{t}{C^2} | \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, \ldots, \frac{a_n}{2})\, dt$$

que, [vide Luke (1969) pg. 157, Caso 2]

$$(4.10) \qquad I = U \sum_a K\, C \prod_{j=1}^{n} \Gamma(s+\frac{a_j}{2}) \quad .$$

Portanto,

$$(4.11) \qquad H(x) = U \sum_a K\, C \prod_{j=1}^{n} \Gamma(s+\frac{a_j}{2}) + U \sum_a L(-\frac{1}{x}) G^{n+1,0}_{1,n+1}\left[(\frac{x}{C})^2 \middle| \begin{matrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, \ldots, \frac{a_n}{2} \end{matrix} \right]$$

para $x>0$, e

$$(4.12) \qquad H(x) = U \sum_a K\, C \prod_{j=1}^{n} \Gamma(s+\frac{a_j}{2}) - U \sum_a K(-\frac{1}{x}) G^{n+1,0}_{1,n+1}\left[(\frac{x}{C})^2 \middle| \begin{matrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, \ldots, \frac{a_n}{2} \end{matrix} \right]$$

para $x<0$.

A função distribuição acumulada para n par, é a mesma com K e L definidos como em (2.32) e (2.33).

REFERÊNCIAS

1. Alfors, L.W. (1966) - Complex Analysis; McGraw-Hill, NY.

2. Cramer, H. (1937) - Random Variables and Probability Distributions; Cambridge Tracts in Mathematics, nº 36, Cambridge.

3. Cramer, H. (1946) - Mathematical Methods of Statistics; Princeton University Press.

4. Curtiss, T.H. (1941) - On the distribution of the quotient of two chance variables.

5. Cordeiro, J.A. (1980) - Distribuições exatas de testes de hipóteses multivariados; Tese de doutorado, UNICAMP, Campinas-SP.

6. Cordeiro, J.A. e Rathie, P.N. (1979) - The Exact Distribution of the product of two normal variates; The IMS Bull., 8; nº 6; 334 Statist., 7; 1-15.

7. Craig, C.C. (1936) - On the Frequency Function of X.Y; Ann. Math. Stat., vol. 7, pp. 1-15.

8. Epstein, B. (1948) - Some Applications of Mellin Transform in Statistics; Ann. Math. Statist., 19; 370-379.

9. Erdely, A.; Magnus, W. Oberhettinger, F. e Tricomi, G.F. (1951)- Higher Transcendental Functions, vol. I, McGraw-Hill.

10. Huntington, E.V. (1939) - Frequency distribution of product and sum; Annals of Math. Stat., vol. 10. pp. 195-198.

11. Luke, Y.L. (1969) - The Special Functions and their Approximations; Academic Press, NY.

12. Mathai, A.M. e Rathie, P.N. (1971) - The Exact Distribution of Wilk's Criterion; Ann. Math. Statist., 42, 1010-1019.

13. Mathai, A.M. e Saxena, R.K. (1973) - Generalized Hypergeometric Functions with Applications in Statistics and Physical Sciences; Springer Verlag, NY.

14. Meijer, C.S. (1941) - On the G-function; Nederl Akad. wetensch. Proc. 44; 1062-1070.

15. Mellin, H. (1896) - Acta Societatis Scientiarum Fennicae, Tom. 21.

16. Rathie, P.N. e Kaufmann, H. (1977) - On the Distributions of Products and Quotients of Random Variables; Metron, 35; 133-148.

17. Springer, M.D. e Thompson, W.E. (1966) - The Distribution of Products of Independent Random Variables; SIAM J. Appl. Math., 14; 511-526.

18. Titchmarsh, E.C. (1948) - Introduction to the Theory of Fourier Integrals; Oxford Univ. Press, London.

19. Whittaker, E.T. e Watson, G.N. (1969) - A Course of Modern Analysis; Cambridge Univ. Press, London.

20. Zalotarev, V.M. (1962) - On a General Theory of Multiplication of Random Variables; Dokl. Akad. Nauk., SSSR, 142; 778-791.