UNICAMP – UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Tese de Doutorado

CONES E SEMIGRUPOS

João Ribeiro Gonçalves Filho

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin

Campinas, março de 2001

CONES E SEMIGRUPOS

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por João Ribeiro Gonçalves Filho e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 9 de março de 2001.

Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin
Orientador

Banca Examinadora:
1 Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin (orient.)
2 Prof. Dr. Caio José Coletti Negreiros
3 Prof. Dr. Marcelo Firer
4 Prof. Dr. Victor Alberto José Ayala Bravo
5 Prof. Dr. Washington Luiz Marar

Tese apresentada ao **Instituto de Matemática, Estatística e Computação – Científica, UNICAMP,** como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Gonçalves Filho, João Ribeiro

G586c Cones e semigrupos / João Ribeiro Gonçalves Filho -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2001.

Orientador : Luiz Antonio Barrera San Martin

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Semigrupos. I. San Martin, Luiz Antonio Barrera. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida em 09 de março de 2001

e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

Prof (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLETTI NEGREIROS

Prof (a). Dr (a). MARCELO FIRER

Prof (a). Dr (a). VICTOR ALBERTO JOSÉ AYALA BRAVO

Prof (a). Dr (a). WASHINGTON LUIZ MARAR

Dedico este trabalho às minhas filhas

Mariana e Fernanda

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. Luiz A. B. San Martin pela orientação.

Agradeço à UNICAMP, UEM e CAPES pelo suporte financeiro.

Agradeço também aos amigos que fiz neste período e que tornaram minha permanência em Campinas muito mais suave. Não poderia nominar todos sob pena de cometer alguma injustiça. Devo no entanto um agrdecimento especial aos amigos Luiz San Martin, Osmar, Sergio e Ligia que estiveram comigo durante todo este tempo.

Resumo

O que pretendemos com este trabalho é avançar o entendimento dos semigrupos maximais de interior não vazio no grupo linear especial $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$. Uma das classes de semigrupos maximais no grupo $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ é formada pelos semigrupos de compressão de cones convexos, pontuais e geradores em $\mathbb{R}^n$.

Tomamos um cone convexo W, pontual e gerador e formamos o semigrupo de compressão $S(W)$ formado pelas matrizes reais g com determinante positivo tais que gW esteja contido em W. Mostramos que $S(W)$ é conexo. Concluimos daí que $S(W)$ é formado pelo semigrupo de compressão de matrizes com determinante um também é conexo. Mostramos também que existe g em $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ tal que gW está contido em $-W$. Concluimos que $S(W)$ não é um semigrupo maximal, no entanto é um semigrupo maximal entre os conexos. Estas informações nos permitem determinar completamente os semigrupos maximais conexos de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ para $n = 2, 3$.

Estudamos o cone infinitesimal $L(S(W))$ associado ao semigrupo de compressão $S(W)$. Damos uma representação de $L(S(W))$ usando a aplicação momento de uma representação de uma álgebra de Lie. Para isto introduzimos uma órbita nilpotente da ação de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ no produto tensorial de um espaço vetorial V pelo seu dual. Identificamos este produto tensorial com a álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ das transformações lineares de V.

Tratamos também de cones auto-duais e mostramos alguns resultados interessantes.

Além disso, definimos vários outros cones no espaço das matrizes, associados a um cone W de $\mathbb{R}^n$. Nosso objetivo foi desenvolver novas ferramentas que ajudassem a entender o semigrupo $S(W)$. Discutimos algumas propriedades destes cones e estabelecemos relações entre eles.

Abstract

The purpose of this work is to advanced the understanding about the maximal semigroups with nonempty interior in the special linear group $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$.

The compression semigroup of a convex pointed and generating cone form one of the classes of maximal semigroups in the group $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$.

Let $W \subset \mathbb{R}^n$ be a pointed and generating cone and form the compression semigroup $S(W)$ of the real matrices with positive determinant leaving W invariant. We prove that $S(W)$ is path connected. $S_W = \{g \in \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R}) : gW \subset W\}$ is

connected too.

Also we prove the existence of g in $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ such that $gW \subset -W$. So that S_W is not a maximal semigroup. However we get that S_W is a maximal connected semigroup. This informations leave us determinate completely the connected maximal semigroups in $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ to $n = 2, 3$.

We study the infinitesimal cone $L(S(W))$ associated to the compression semigroup $S(W)$.

We give a representation of $L(S(W))$ using the moment map of the representation of a Lie algebra. To do this we introduce a nilpotent orbit of the action of $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ on the tensorial product of the vetorial space V by its dual. We identify this tensorial product with the Lie algebra $\mathrm{gl}\,(V)$ of the linear transformations of V.

We also treat the self dual cones and prove some interesting results.

Furthermore, we define some other cones in the matrix space, associated to the cone W. Our objetive is introduce new results to help the understanding of the semigroup $S(W)$. We discuss some properties and relations between of these cones.

Sumário

Introdução

O que pretendemos com este trabalho é avançar o entendimento dos semigrupos maximais de interior não vazio no grupo linear especial $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$. De acordo com a teoria geral de semigrupos em grupos semi-simples, desenvolvida em [11], uma das classes de semigrupos maximais no grupo $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ é formada pelos semigrupos de compressão de cones em $\mathbb{R}^n$, isto é, por semigrupos do tipo

$$S_W = \{g \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}) : gW \subset W\}$$

onde W é um cone convexo, pontual e gerador em $\mathbb{R}^n$. Essa classe de semigrupos maximais está naturalmente associada a uma das fronteiras de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, o espaço projetivo $\mathbb{P}^{n-1}$. O objetivo deste trabalho é estudar as propriedades desses semigrupos.

No Capítulo 1 fazemos um catálogo dos principais conceitos e resultados que serão usados ao longo da tese. Colocamos a definição de um cone em um espaço vetorial topológico e suas especificidades. Importante ressaltar, além de todas as definições abordadas. o teorema da invariança de um cone W gerador sob a ação de um campo vetorial localmente Lipschitziano.

Damos também, com relação a semigrupos, uma série de definições e resultados. Definimos conjunto de controle e conjunto de controle invariante que são conceitos importantes nas técnicas abordadas neste trabalho. Fazemos ainda uma discussão sobre variedades Grassmannianas $\mathrm{Gr}_k(n)$, dos subespaços de dimensão k de $\mathbb{R}^n$, que são variedades compactas de dimensão $k(n-k)$ com uma ação transitiva de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$. Fechando o capítulo, citamos dois resultados sobre a existência de conjunto de controle invariante em variedades homogêneas compactas.

No Capítulo 2 tomamos W um cone convexo, pontual e gerador, formamos seu semigrupo de compressão

$$S(W) = \{g \in \mathrm{Gl}^+(n,\mathbb{R}) : gW \subset W\}$$

onde $\mathrm{Gl}^+(n,\mathbb{R})$ representa o grupo de matrizes reais com determinantes positivos. Nosso propósito neste capítulo foi provar que os semigrupos $S(W)$ e S_W são conexos. Mostramos também que existe $g \in \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ tal que $gW \subset -W$ de onde concluímos que S_W não é um semigrupo maximal. Entretanto, podemos concluir que S_W é um semigrupo maximal conexo, no sentido que se $S_W \subset T$ com T um semigrupo conexo de $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$, então ou $T = S_W$ ou $T = \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$.

Também do fato que S_W é conexo concluímos que se C representa a classe de semigrupos $S \subset \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ com $\mathrm{int}S \neq \emptyset$, maximais conexos do tipo $\mathbb{P}^{n-1}$, então

$$C = \{S_W : W \subset \mathbb{R}^n \text{ é um cone pontual e gerador}\}$$

Isto permite determinar completamente os semigrupos maximais conexos de $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ para $n = 2, 3$.

A partir do capítulo 3 estudamos o cone infinitesimal $L(S_W)$ associado ao semigrupo de compressão S_W. Neste capítulo damos uma caracterização de $L(S_W)$ usando a aplicação momento de uma representação de uma álgebra de Lie. Para isto introduzimos uma órbita nilpotente da ação de $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ em $V \otimes V^*$ onde V é um espaço vetorial e o produto tensorial $V \otimes V^*$ é identificado com álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ das transformações lineares de V. Mais especificamente, a órbita nilpotente é dada por

$$\varphi = \{v \otimes \phi \in V \otimes V^* : \phi(v) = 0\}.$$

Definimos também um subconjunto de φ por

$$Q(W) = \{v \otimes \phi \in V \otimes V^* : v \in W, \phi \in W^*, \phi(v) = 0\}.$$

Sabendo que $\mathrm{tr}(v \otimes \phi) = \phi(v)$ e como $\phi(v) = 0$, temos que $Q(W)$ pode ser visto como um subconjunto de $\mathfrak{sl}(V)$. Concluímos na proposição 3.1 que $L(S_W)$ é o cone dual de $Q(W)$ em relação à forma traço.

Uma pergunta que surge naturalmente é a de saber que subconjuntos da órbita φ são $Q(W)$ para algum W.

Depois de dar uma série de condições necessárias para que isto aconteça, enunciamos e demonstramos dois resultados nesta direção.

Tratamos ainda neste capítulo de cones auto-duais e mostramos alguns resultados interessantes. Entre eles mostramos que se $S_W = S_{W^*}$, então $W = W^*$.

No Capítulo 4 definimos vários outros cones no espaço das matrizes, associados a um cone W de $\mathbb{R}^n$. Nosso objetivo foi desenvolver novas ferramentas que ajudassem entender o semigrupo $S(W)$. Discutimos algumas propriedades destes cones e estabelecemos relações entre eles.

Entre estes cones definimos $K(S(W))$ o cone-semigrupo associado a $S(W)$ por

$$K(S(W)) = \mathrm{fe}(\mathrm{co}(S(W)))$$

e

$$W \otimes W^* = \{v \otimes \alpha : v \in W, \alpha \in W^*\}.$$

Mostramos que $K(S(W))$ é o conjunto das transformações lineares que deixam W invariante e que $K(S(W))$ é o cone dual de $W \otimes W^*$ em relação à forma traço.

Mostramos que se K é um cone-subálgebra na álgebra das matrizes, então $K = K(S(W))$ para algum W. Além disso, estabelecemos condições para que um conjunto de matrizes de posto um seja igual a $W \otimes W^*$ para algum W.

Outros resultados estão relacionados com a descrição do cone de Lie $L(S_W)$ de S_W, a partir de W, em termos da aplicação momento da representação canônica de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^n$.

Estudamos também os duais dos cones de Lie dos semigrupos. Nesse sentido foram provados alguns teoremas que caracterizam os subconjuntos da órbita adjunta das matrizes nilpotentes de posto um, que são imagens, pela aplicação momento da representação canônica, de cones convexos e pontuais. Essas caracterizações aparecem como condições necessárias e suficientes para tais conjuntos. Além do mais estudamos os cones convexos nos espaços das transformações lineares, gerados pelos semigrupos. Provamos que todo cone convexo fechado por produtos associativos deixa invariante um cone pontual em $\mathbb{R}^n$, estabelecendo uma relação estreita entre os cones semigrupos na álgebra das matrizes com os cones no espaço euclideano. Relacionamos também o cone de Lie do semigrupo de compressão de um cone em $\mathbb{R}^n$ com o correspondente cone de matrizes, no caso de cones poliedrais.

Esses resultados fornecem informações valiosas e originais sobre a estrutura dos semigrupos no grupo das matrizes unimodulares e certamente deverão ser aplicados no estudo de semigrupos em grupos de Lie.

Capítulo 1

Cones,semigrupos e conjuntos de controle

Este capítulo se destina a introduzir algumas definições e resultados que serão necessários no desenvolvimento do trabalho. Para mais detalhes ver [3]

1.1 Cones

Definição 1.1 *Um subconjunto W de um espaço vetorial topológico L é chamado um* **cone** *se ele satisfaz as seguintes condições:*

1. $W + W \subset W$;
2. $R^{+}.W \subset W$ e
3. $\text{fe}W = W$.

Dois espaços vetoriais topológicos L e $\widehat{L}$ estão em **dualidade** se existe uma função bilinear contínua

$$(x, w) \longmapsto \langle w, x\rangle : L \times \widehat{L} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $\langle w, x\rangle = 0$ para todo $x \in L$ implica $w = 0$ e $\langle w, x\rangle = 0$ para todo $w \in \widehat{L}$ implica $x = 0$.

O subconjunto $H(W) = W \cap -W$, o maior subespaço vetorial contido em W, é chamado a **aresta** do cone e W será chamado **pontual** se a aresta for singular. Um cone será chamado **gerador** se $L = W - W$.

Definição 1.2 *Se L e $\widehat{L}$ são espaços vetoriais topológicos sobre $\mathbb{R}$, em dualidade, então chamaremos* **cone dual de W** *em relação a esta dualidade ao conjunto*

$$W^* = \left\{ w \in \widehat{L} : \langle w, x \rangle \geq 0, \text{ para todo } x \in W \right\}.$$

Chamaremos **anulador de W** *em relação à esta dualidade a*

$$W^\perp = \left\{ w \in \widehat{L} : \langle w, x \rangle = 0, \text{ para todo } x \in W \right\}.$$

Definição 1.3 *(i) Para qualquer subconjunto M de L definimos*

$$\mathrm{op}_W(M) = \mathrm{op}(M) = M^\perp \cap W^*$$

e chamamos este conjunto de **cone oposto de M** *em relação a W.*

Observação: Se $M = \{x\}$, escrevemos $\mathrm{op}x$ ao invés de $\mathrm{op}_W\{x\}$. □

Definição 1.4 *Se W é um subconjunto de um espaço vetorial L que é fechado sob adição e multiplicação por escalar não negativo, então um subconjunto F de W é chamado uma* **face de W** *se ele tem as mesmas duas propriedades de W e se além disso as relações $x + y \in F$ e $x, y \in W$ implica $x, y \in F$.*

Proposição 1.5 *Para um subconjunto M de um cone W as seguintes afirmações valem:*

1. $\mathrm{op}(M) = W^* \cap -M^*$.

2. *Se W é fracamente fechado, então $L_M(W) = \mathrm{cl}(W - M^{**})$.*

Observação: Se $x \in W$, $L_x = \text{cl}\ (W - \mathbb{R}^+.x)$ e $L_x^* = x^\perp \cap W^\perp$. □

Para se ter uma boa intuição geométrica para estes conceitos consideremos L um espaço vetorial real de dimensão finita e $\langle .,. \rangle$ um produto escalar que faz de L um espaço de Hilbert. Por exemplo $L = \mathbb{R}^n$ e $\langle x, y\rangle = \sum x_i y_j$.

Assim $\widehat{L}$ pode ser identificado com L associando com $x \in L$ o funcional $y \to \langle x, y\rangle$.

Desta forma W^* de um cone $W \subset L$ também pode ser visto como um subconjunto de L.

$W^* = \{y \in L : \langle x, y\rangle \geq 0 \text{ para todo } x \in W\}$

Por exemplo se W é o primeiro quadrante de $\mathbb{R}^2$, então $W^* = W$.

Definição 1.6 *Se L é um espaço vetorial e W um subconjunto convexo, então escrevemos*

$$\text{intal}W = \{x \in W : (\forall\ y \in W - W)(\exists t > 0) \text{ tal que } x + t.y \in W\}$$

e chamaremos este conjunto o **interior algébrico de** W.

Um resultado importante no nosso contexto é o seguinte:

Proposição 1.7 *Seja L um espaço vetorial topológico de dimensão finita e W um cone gerador. Então,*

$$\text{intal}W = \text{int}W$$

Outro resultado que nos interessa é este que damos agora.

Proposição 1.8 *Se L é de dimensão finita, um cone W é pontual se, e somente se, seu dual W^* é gerador e vice-versa.*

Definição 1.9 *Seja W um cone pontual em um espaço vetorial topológico L em dualidade com $\widehat{L}$. Suponha que $w \in$ intal $g\ W^*$. Seja A o hiperplano afim $w^{-1}(1)$. Então $B = W \cap A$ é um subconjunto convexo fechado de W tal que $W = \mathbb{R}^+ \cdot B$. Um conjunto deste tipo é chamado de* **base projetiva** *de W.*

Observação: Se $C \subset w^{-1}(1)$ é compacto, então o cone gerado por C é pontual e vice-versa. □

Definição 1.10 *Seja M um subconjunto aberto de um espaço vetorial de dimensão finita L e S um subconjunto fechado de L contido em M. Seja X um campo vetorial localmente Lipschitziano sobre M. Diremos que S é* **invariante sob** X *se S é invariante sob qualquer fluxo local sobre M gerado por X, isto é, se as órbitas de elementos em S permanecem em S por todo tempo.*

Teorema 1.11 *(Teorema de invariança) Seja W um cone gerador em um espaço vetorial de dimensão finita L e um campo vetorial localmente Lipschitziano $X : L \to L$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *W é invariante sob X.*

2. *$X(w) \in \mathrm{cl}(W - \mathbb{R}^+ \cdot w)$ para todo $w \in W$.*

1.2 Semigrupos

Seja S um subsemigrupo de um grupo de Lie G e M uma variedade munida com uma G-ação transitiva. Assim, M é vista como um espaço homogêneo de G onde S age como um semigrupo de difeomorfismos.

Assumiremos que S tem interior não-vazio em G.

Definição 1.12 *Um* **conjunto de controle** *para a ação de S sobre M é um subconjunto $D \subset M$ que satisfaz:*

(i) int $D \neq \emptyset$,
(ii) $D \subset \mathrm{cl}(S_x)$, para todo $x \in D$, e
(iii) D é maximal com as propriedades i) e ii).

A condição ii) está relacionada à transitividade de S em D no sentido que para quaisquer dois pontos $x, y \in D$, existe $g \in S$ com $gx = y$.

Vamos agora dar algumas propriedades de conjuntos de controle:

Proposição 1.13 *Seja D um conjunto de controle para S e seja*

$$\begin{aligned} D_0 &= \{x \in D : \exists g \in \mathrm{int}S \quad \textit{com } gx = x\} \\ &= \{x \in D : x \in (\mathrm{int}S)x\}. \end{aligned}$$

Então:

1. $D_0 = (\mathrm{int}S)\, D \cap D$
2. $D \subset (\mathrm{int}S)^{-1}x, \forall x \in D_0$,*se* $D_0 \neq \emptyset$
3. $D_0 = (\mathrm{int}S)x \cap (\mathrm{int}S)^{-1}x$, $\forall x \in D_0$ *se* $D_0 \neq \emptyset$.
4. *Para qualquer* $x, y \in D_0$, *existe* $g \in \mathrm{int}S$ *com* $gx = y$.
5. D_0 *é denso em* D *se* $D_0 \neq \emptyset$.
6. D_0 *é* S*-invariante em* D *no sentido que* $hx \in D_0$ *se* $h \in S, x \in D_0$ *e* $hx \in D$.
7. $D_0 \neq \emptyset$ *se* $SD \subset D$ *ou* $S^{-1}D \subset D$. *No último caso* $D_0 = D$.

Aqueles conjuntos de controle para os quais $D_0 \neq \emptyset$ são chamados **conjuntos de controle efetivo.**

Note que por 1. na proposição, todo conjunto de controle é efetivo no caso em que $\mathrm{int}S$ é denso em S.

Definição 1.14 *Um* **conjunto controle de invariante ou um S -i.c.s** *para a S - ação sobre M é um subconjunto $C \subset M$, $C \neq \emptyset$ satisfazendo:*
(i) $\mathrm{fe}\, C = \mathrm{fe}\,(S_x)$, *para todo* $x \in C$, e
(ii) C *é maximal com a propriedade (i).*

Recordemos alguns fatos que aparecem em [11] e [10] com detalhes:

1. Se C é fechado, então ele é um S-i.c.s desde que (i) esteja satisfeita.
2. Dois S-i.c.s C_1 e C_2 são ou disjuntos ou idênticos.

3. S é dito ser **acessível a partir de** $x \in M$ se int$Sx \neq \emptyset$ e S é **acessível** se satisfaz esta propriedade para todo $x \in M$.

   Se S é acessível então todo S-i.c.s é fechado. Seja C um destes conjuntos, então int $C \neq \emptyset$ e fe(int$C$) $= C$.

4. Se $C = \bigcap_{x \in M} \text{fe}Sx$ não é vazio, então C é o único possível S-i.c.s fechado.

5. Se N é um subconjunto compacto invariante sob S. então para todo $x \in N$, fe (Sx) contém um S-i.c.s fechado.

Além disso, no caso em que S é acessível, o número de S-i.c.s dentro de N é finito.

Vamos estabelecer a notação $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ para o conjunto de todas as matrizes de ordem n com entradas reais. Também em $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ definimos a forma traço $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ por $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB)$.

Exemplo: Seja $G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes com determinante igual a um e tome $S \subset G$ o semigrupo das matrizes cujas entradas são não negativas. É fácil verificar que S é um subsemigrupo com interior diferente do vazio em $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$. Fazemos $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ agir sobre $\mathbb{P}^{n-1}$ por $g[v] = [gv]$, $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $g \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ onde $[v]$ representa o subespaço gerado por v. O conjunto

$$C = \left\{ [(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \in \mathbb{P}^{n-1} : x_i \geq 0 \right\}$$

é um conjunto de controle invariante para S. Para ver isto, primeiro tome $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ com x_i e y_i estritamente positivos. Então, colocando $g = \delta \mathrm{diag}(y_i/x_i,\ i = 1, ..., n)$ com $\delta = x_1 \cdot .x_2 \cdots x_n / y_1 . y_2 ... y_n$, temos que $g \in S$ e $g[x] = [y]$. Segue que, para $[x]$ em int$C$, fe$S[x] = C$. Como, para todo $[x] \in C$, existe $g \in S$ tal que $g[x] \in$ int$C$, temos que fe$S[x] = C$, para todo $[x] \in C$ e C é de fato um S-i.c.s pois C é fechado. Segue da propriedade 4 enunciada acima que C é o único conjunto de controle invariante para S sobre $\mathbb{P}^{n-1}$. □

Vamos fazer agora uma breve discussão sobre variedades Grassmannianas.

Seja $G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, S um subsemigrupo de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ com interior não vazio e $\mathrm{Gr}_k(n)$ a variedade Grassmaniana de subespaços de dimensão k de $\mathbb{R}^n$. No que segue usamos uma maneira canônica de representar os elementos de $\mathrm{Gr}_k(n)$.

Tomando uma base β de $\mathbb{R}^n$, um conjunto de k vetores linearmente independentes é dado por uma matriz $n \times k$ cujas colunas são coordenadas dos vetores em relação a β. Desta maneira, um subespaço k dimensional será descrito por uma matriz $n \times k$ de posto k. Denotamos o conjunto destas $n \times k$ matrizes por $B_k(n)$.

Dois elementos p, q de $B_k(n)$ representam o mesmo subespaço de dimensão k se, e sómente se, as colunas de p são combinações lineares das colunas de q e isto, por sua vez, é equivalente à existência de uma matriz inversível a, $k \times k$ tal que $p = qa$. Isto define uma relação de equivalência em $B_k(n)$ cujo conjunto de classes de equivalência está em correspondência um a um com $\mathrm{Gr}_k(n)$.

Esta correspondência permite uma descrição algébrica das Grassmannianas.

Desde que a imagem de um subespaço k dimensional sob uma aplicação linear inversível é um subespaço de mesma dimensão, existe uma ação natural de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ sobre $\mathrm{Gr}_k(n)$ para qualquer $1 \leq k \leq n-1$.

Em termos da descrição dos subespaços de dimensão k como classes de equivalência em $B_k(n)$, esta ação é meramente multiplicação de matrizes $n \times n$ por matrizes $n \times k$.

Imediatamente vemos, do fato que qualquer matriz $n \times k$ de posto k pode ser complementada a uma matriz $n \times n$ com determinante um, que a ação de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ sobre $\mathrm{Gr}_k(n)$ é transitiva, isto é, quaisquer dois subespaços de mesma dimensão são levados um no outro por um elemento de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$.

Isto faz de $\mathrm{Gr}_k(n)$ um espaço homogêneo de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$.

A restrição da ação de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ ao subgrupo $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ das matrizes ortogonais de determinante um é também transitiva sobre $\mathrm{Gr}_k(n)$. A isotropia desta ação é o subgrupo das matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix},$$

que é isomorfo a $\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)/\{\pm 1\}$.

Portanto, $\mathrm{Gr}_k(n)$ é uma variedade compacta de dimensão $k(n-k)$. Assim, os seguintes resultados são de suma importância:

Proposição 1.15 *Suponha que M é compacta e homogênea.. Então, para todo $x \in M$, existe um conjunto controle invariante em* $\mathrm{cl}(Sx)$.

Proposição 1.16 *Seja M variedade homogênea.. S admite exatamente um conjunto controle invariante sobre M se, e somente se*

$$C = \bigcap_{x \in M} \mathrm{cl}(Sx)$$

é não-vazio. Neste caso C é o conjunto controle invariante.

Casos particulares de variedade homogênea são as Grassmannianas. discutidas acima. Para essas variedades temos o seguinte resultado demonstrado em [10].

Proposição 1.17 *Seja $S \subset \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ um semigrupo de interior não vazio. Então existe um único conjunto de controle invariante para a ação de S em $\mathrm{Gr}_k(n)$.*

1.3 Tipo parabólico de um semigrupo

Nos capítulos posteriores, faremos uso da definição do tipo de S, esse conceito é central no estudo dos semigrupos. Para mais detalhes ver [17].

1.3.1 Semigrupo do tipo Θ

Considere o flag maximal $\mathbb{B} = \mathbb{B}_\emptyset$. Em [11], proposição 4.1, foi mostrado que para cada $w \in W$, existe um conjunto controlável $D(w)$ tal que $x \in D(w)_0$ se, e somente se, x é um ponto fixo do tipo w por h, onde h é um elemento regular real em int$S$. Ainda mais, foi mostrado que qualquer conjunto controlável D é da forma $D(w)$ para algum $w \in W$.

A bijeção $w \to D(w)$ permite-nos distinguir os semigrupos S através de subconjuntos $\Theta \subset \Sigma$, onde Σ é o sistema simples de raízes associado a $\mathfrak{a}^+$, ou através da variedade homogênea $\mathbb{B}_\Theta$. No caso de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, um subconjunto do sistema simples de raízes é dado por um conjunto de multi-índices que podem ser definidos pelas raízes Θ do espaço homogêneo em questão.

Podemos ainda dizer que, os semigrupos em G podem ser diferenciados de acordo com a geometria dos seus conjuntos controláveis invariantes.

Ainda no artigo [11], encontra-se a demonstração que

$$W(S) = \{w \in W : D(w) = D(1)\}$$

é um subgrupo de W gerado pelas reflexões com respeito às raízes em $\Theta(S) \subset \Sigma$. Observando que $D(1)$ é o conjunto de controle invariante para S, vemos que faz sentido usar S na notação do subgrupo $W(S)$.

Neste mesmo artigo, foi mostrado também que $W(S)$ deixa invariante um cone em $\mathfrak{a}$, se S é próprio.. Como $W(S)$ é finito temos que existe $H \in \mathrm{fe}(\mathfrak{a}^+)$, *onde* $\mathfrak{a}^+$ *é uma câmara em* $\mathfrak{a}$, tal que H é fixo pontualmente por $W(S)$, isto é, $wH = H$, para todo $w \in W(S)$. Sabemos de [18], teorema 1.1.2.8, que o grupo que deixa H fixo pontualmente é da forma W_Θ, onde $\Theta \subset \Sigma$ e W_Θ é gerado por reflexões definidas por elementos em Θ. Assim podemos enunciar o seguinte teorema, cuja demonstração encontra-se em [11], teorema 4.3.

Teorema 1.18 *Seja A^+ a câmara de Weyl que intercepta* $\mathrm{int}(S)$ *e seja Σ o sistema simples de raízes definido por A^+. Então $W(S) = W_\Theta$ para algum $\Theta \subset \Sigma$. E mais, seja P_Θ o subgrupo parabólico associado a Θ, $\pi : G/P \to G/P_\Theta$ a projeção canônica e C o conjunto de controle invariante por S em G/P. Então $C = \pi^{-1}(\pi(C))$.*

Existe um Θ maximal satisfazendo esta propriedade, isto é, existe um Θ maximal tal que $\pi^{-1}(C_\Theta) \subset \mathbb{B}$ é o conjunto controlável invariante em $\mathbb{B}$. De fato, a existência é encontrada em [11], teorema 4.3. Para mostrar a unicidade, suponhamos que existem Θ_1 e Θ_2 satisfazendo a propriedade acima, então temos que $W_{\Theta_1} = W(S)$ e $W_{\Theta_2} = W(S)$ pelo mesmo teorema citado acima, assim temos que $W_{\Theta_1} = W_{\Theta_2}$. Como esses dois subgrupos são parabólicos, temos que o conjunto das reflexões definidas por Θ_1 e o conjunto das reflexões definidas por Θ_2 são iguais, pois existe uma correspondência um a um entre os conjuntos de reflexões definidas por Θ e W_Θ (ver [5] seção 1.2, para mais detalhes). Daí, $\Theta_1 = \Theta_2$.

Assim, podemos mostrar a equivalência entre as definições do tipo de S usadas em [14], [15] e [16].

Proposição 1.19 *Existe $\Theta \in \Sigma$ tal que $\pi_\Theta^{-1}(C_\Theta) \subset G/P$ é o conjunto de controle invariante para S e tal que C_Θ está contido na variedade estável para algum elemento regular real, se e somente se, esse Θ é o subconjunto maximal tal que $\pi_\Theta^{-1}(C_\Theta) \subset G/P$ é o conjunto de controle invariante para S.*

Demonstração: Primeiro suponhamos que Θ é o maximal, então pela proposição 6.8 em [11] temos que $W(S) = W_\Theta$, daí usando a proposição 4.8 em [11] concluimos que C_Θ está contido na variedade estável acima. Agora supondo que existe Θ_1 contendo Θ tal que $\pi_{\Theta_1}^{-1}(C_{\Theta_1})$ é o conjunto de controle invariante para S no flag maximal, chegaremos à seguinte contradição: C_Θ não pode estar contido numa variedade estável. De fato, se o conjunto de controle invariante para S no flag maximal é $\pi_{\Theta_1}^{-1}(C_{\Theta_1})$ então o conjunto de controle invariante para S no flag $\mathbb{B}_\Theta$ é $C_\Theta = \pi_\Theta(\pi_{\Theta_1}^{-1}(C_{\Theta_1}))$. Como $\Theta \subset \Theta_1$, segue que $C_\Theta = (\pi_{\Theta_1}^{\Theta})^{-1}(C_{\Theta_1})$, onde $\pi_{\Theta_1}^{\Theta} : \mathbb{B}_\Theta \to \mathbb{B}_{\Theta_1}$ é a projeção. Mas a imagem inversa de uma projeção dessas não pode estar contida numa variedade estável. Isso mostra que Θ é maximal. E no comentário logo acima foi mostrado que este maximal é único. □

Definição 1.20 *Nós denotamos tal Θ por $\Theta(S)$ e dizemos que ele é o tipo parabólico de S. Lembramos que qualquer semigrupo próprio com interior não vazio é do tipo parabólico Θ para algum Θ, (ver [11]).*

Esse último teorema pode também ser escrito de maneira mais completa,

Teorema 1.21 *Seja $S \subset G$ um semigrupo próprio com* int$S \neq \emptyset$. *Então existe um subconjunto $\Theta(S) \subset \Sigma$ tal que o conjunto controlável invariante para S, $C_{\Theta(S)} \subset \mathbb{B}_{\Theta(S)}$ é admissível, isto é, está contido na célula de Bruhat, $\sigma(h)$, para algum h regular real em* int$S$. *E mais, se*

$\Theta \subset \Theta(S)$ e $\pi : \mathbb{B}_\Theta \to \mathbb{B}(S)$ é a fibração canônica então $\pi^{-1}(C_{\Theta(S)})$ é o conjunto controlável invariante para S em $\mathbb{B}_\Theta$.

Faz sentido também, denotar o tipo parabólico de S pela correspondente variedade flag $\mathbb{B}(S) = \mathbb{B}_{\Theta(S)}$, e é claro que da mesma forma garante-se a existência e unicidade de $\mathbb{B}_{\Theta(S)}$.

Observação: Qualquer semigrupo do tipo parabólico Θ está contido propriamente em um semigrupo do tipo $\Theta' \supset \Theta$ se $\Theta \neq \Theta'$. □

Exemplo: $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$

No caso particular de semigrupos com interior não vazio em $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, a classificação deste pode também ser feita usando multi-índices, como veremos.

Considere $G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ e tome $\mathfrak{a}$ a álgebra das matrizes diagonais com traço zero.

As raízes são $\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$, onde $\lambda_i(H) = a_i$ se $H = \mathrm{diag}\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Um sistema simples de raízes é dado por

$$\Sigma = \{\alpha_{i,i+1} : i = 1, \ldots, n-1\}$$

e o grupo de Weyl é o grupo das permutações em n elementos. Ele age em $\mathfrak{a}$ permutando as entradas das matrizes diagonais.

Qualquer $\Theta \in \Sigma$ pode ser descrito como

$$\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \ldots \cup \Pi(i_k, j_k),$$

com $j_l + 1 < i_{l+1}$ para todo $l = 1, \ldots, k-1$, onde $\Pi(i,j) = \{\alpha_{r,r+1} : i \leq r \leq j\}$. Desta forma, W_Θ pode ser dado como o produto direto dos grupos de permutação dos subconjuntos $\{i_l, \ldots, j_l + 1\}$, $l = 1, \ldots, k$.

Também G/P_Θ é realizado como

$$\mathbb{F}^n(1, \ldots, i_1 - 1, j_1 + 1, \ldots, i_k - 1, j_k + 1, j_k + 2, \ldots, n)$$

que representa a variedade dos flags

$$b = (V_1 \subset \cdots \subset V_{i_1 - 1} \subset V_{j_1+1} \subset \cdots \subset V_{i_k - 1} \subset V_{j_k+1} \subset \cdots \subset V_n)$$

com $V_l \subset \mathbb{R}^n$ sendo um subespaço de dimensão l. Denotando

$$r(S) = (i_1, 1, 1, \ldots, j_1, i_2, 1, 1, \ldots, j_2, \ldots, i_k, 1, 1, \ldots, j_k)$$

o multi-índice devido ao subconjunto $\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \cdots \cup \Pi(i_k, j_k) \subset \Sigma$ e lembrando que

$$W_\Theta = W(S) = \Pi\,[1, i_1]\,\Pi\,[j_1 + 1, i_1 + j_1 + 1] \cdots \Pi\,[j_k + 1, n]\,,$$

aqui $\Pi\,[a, b]$ representa o grupo de permutações dos elementos do intervalo $[a, b] = \{a, a+1, \ldots, b\}$, dizemos que o semigrupo é do tipo $r = \{r_1, \ldots, r_l\}$ se $r(S) = r$.

Assim, temos que, as definições de tipo r, tipo parabólico Θ e tipo parabólico $\mathbb{B}_\Theta$ são equivalentes para este exemplo e de acordo com o teorema 1.21 temos equivalentemente que um semigrupo é do tipo r se seu conjunto controlável invariante em $\mathrm{Gr}_r(n)$ está contido na célula aberta de Bruhat associado ao elemento regular em seu interior. □

Capítulo 2

Semigrupo de compressão de um cone

Usaremos este capítulo para demonstrar que o semigrupo de compressão de um cone $W \subset \mathbb{R}^n$ é conexo no caso em que W é pontual e gerador. Além de demonstrar esse resultado, obteremos algumas de suas consequências para o estudo dos semigrupos do grupo $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$.

2.1 S_W é conexo

Seja $W \subset \mathbb{R}^n$ um cone conexo, pontual e gerador. Recordamos que W é um cone pontual se $\pm v \in W$ implica que $v = 0$. Também, W é gerador se $\mathbb{R}^n = W + (-W)$, ou equivalentemente, se $\mathrm{int} W \neq \emptyset$ na topologia usual do $\mathbb{R}^n$. Nosso objetivo é mostrar que o semigrupo de compressão de W,

$$S(W) = \left\{g \in \mathrm{Gl}^+(n, \mathbb{R}) : gW \subset W\right\}$$

é conexo no grupo $\mathrm{Gl}^+(n, \mathbb{R})$, das matrizes com determinante positivo.

Observemos que a matriz identidade 1 bem como as matrizes escalares $\lambda \cdot 1, \lambda > 0$, estão em $S(W)$. Analogamente, uma matriz $g \in S(W)$ se, e somente se, $(\det g)^{\frac{1}{n}} g \in S(W)$. Portanto, se consideramos apenas o seguinte semigrupo de compressão

$$S_W = S(W) \cap \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}) : gW \subset W\},$$

segue que $S(W) = \mathbb{R}^+ \cdot S_W$. Além do mais, S_W é a imagem de $S(W)$ sob a aplicação contínua $\mathrm{Gl}^+(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ definida por $g \mapsto (\det g)^{-\frac{1}{n}} g$. Portanto, se um dos semigrupos $S(W)$ ou S_W é conexo, o mesmo acontece com o outro. No que segue mostraremos que S_W é conexo.

Em primeiro lugar observamos que o semigrupo S_W é fechado de $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$. De fato, seja (g_i) uma sequência em S_W, convergindo para g. Tomemos $x \in W$. Temos que $g_i x \in W$ e como W é fechado $(g_i x)$ converge em W. Daí, tendo que $(g_i x)$ converge para gx. concluimos que $gx \in W$. Como x foi escolhido genericamente, segue que $gW \subset W$. Assim $g \in S_W$ mostrando que S_W é fechado.

O cone de Lie associado a S_W é definido por

$$L(S_W) = \{X \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) : \forall t \geq 0, \exp(tX) \in S_W\}.$$

Antes de abordar a questão principal deste capítulo, a da conexidade de S_W, vamos enunciar e demonstrar alguns resultados preliminares que serão utilizados na demonstração.

Proposição 2.1 *Sejam $V \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço de codimensão um com $V \cap W = \{0\}$ e $\beta = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ tal que $f_1 \in W$ e $\{f_2, ..., f_n\} \subset V$. Tome uma matriz diagonal*

$$H = \mathrm{diag}\{n-1, -1, -1, ..., -1\}$$

em relação à base β. Então, para todo $t \geq 0$, $\exp(tH) \in S_W$. Além disso, se $f_1 \in \mathrm{int}W$ então, $\exp(tH) \in \mathrm{int}S_W$, para todo $t > 0$ e $H \in \mathrm{int}L(S_W)$.

Demonstração: Tomemos $x \in W$, $x \neq 0$. Como $\mathrm{codim}V = 1$ temos que o conjunto $(f_1 + V) \cap W$ forma uma base projetiva de W.

Temos que $x = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n$ com $\alpha_1 \neq 0$ pois $V \cap W = \{0\}$ e $\alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n \in V$. Além do mais como $f_1 \in W$, temos que $\alpha_1 > 0$. Dai,

$$\frac{1}{\alpha_1} x = f_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} f_2 + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} f_n \in W.$$

Logo, a menos de um múltiplo positivo, x pode ser tomado na forma

$$x = f_1 + a_2 f_2 + ... + a_n f_n.$$

Usando o fato que $Hf_1 = (n-1)f_1$ e $Hf_i = -f_i$, para $i = 2, 3, \ldots, n$, temos que

$$Hx = (n-1)f_1 - a_2 f_2 - \ldots - a_n f_n = nf_1 - x.$$

Assim, pelo teorema da invariança 1.11, $\exp tH \in S_W$, para todo $t \geq 0$.

Agora, se $f_1 \in \text{int}W$, então existe um aberto $U \subset W$ contendo f_1. A base projetiva determinada por V e f_1 é dada por

$$B = \{x \in W : x = f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_n f_n\}.$$

Essa base é compacta pois W é pontual.

Definamos

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (A, x) & \longmapsto & \frac{x + Ax}{n} \end{array}$$

Temos $\varphi(H, x) = f_1$. Da continuidade de φ, temos que existem vizinhanças A_x contendo H e C_x contendo x tal que para todo $y \in C_x$ e para todo $A \in A_x$ temos $y + Ay \in U \subset W$.

Temos que $B \subset \bigcup\{C_x, x \in B\}$ e como B é compacto existe uma quantidade finita C_{x_i}, $i = 1, 2, \ldots, m$ tal que $B \subset \bigcup C_{x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Além disso, $H \in A_{x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Tomando $D = \bigcap A_{x_i}$, temos que $H \in D$ e $x + Ax \in U, \forall\, x \in B$ e para todo $A \in D$.

Como $U \subset W$, o teorema da invariança 1.11 garante que $D \subset L(S_W)$. Dessa forma,

$H \in \text{int}L(S_W)$ e $\exp tH \in \text{int}S_W$ para todo $t > 0$. □

Antes de prosseguir vamos ressaltar as seguintes consequências da proposição acima. Com as notações do enunciado da proposição, supondo $f_1 \in \text{int}W$, temos

1. int $S_W \neq \emptyset$, o que é óbvio pois $\exp tH \in \text{int}S_W$, para todo $t > 0$.

2. fe(intS_W) = fe(S_W) = S_W. De fato, como S_W é fechado, temos que fe(intS_W) $\subset S_W$. Mostremos que $S_W \subset$ fe(intS_W). Como $f_1 \in \text{int}W$, temos que $\exp tH \in \text{int}S_W$, para todo $t > 0$. Daí que $1 \in$ fe(intS_W). Seja, então, $g \in S_W$ e U um aberto qualquer contendo g. Existe V aberto contendo 1 tal que $gV \subset U$. Mas $V' = V \cap \text{int } S_W \neq \emptyset$ pois $1 \in$ fe(intS_W) e $gV' \subset U$. De $gV' \subset U$ e $gV' \subset \text{int}S_W$ temos que $U \cap \text{int } S_W \neq \emptyset$ donde $g \in$ fe(intS_W). Logo $S_W \subset$ fe(intS_W) e assim intS_W é denso em S_W.

Damos agora um lema que vale para um semigrupo arbitrário $S \subset \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ com interior não vazio.

Lema 2.2 *Dado $g \in \mathrm{int}S$, seja $V \subset \mathbb{R}^n$ um g-subespaço invariante com $\dim V \geq 2$ e tal que $|\mu|$ é constante onde μ varia entre os autovalores da restrição de g a V. Então, S é transitivo sobre os raios de V. Mais precisamente, seja P_V o subgrupo*

$$P_V = \{h \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}) : hV = V\}$$

Então $\Gamma = S \cap P_V$ é um semigrupo com interior não vazio em P_V e para dois raios r_1 e r_2 em V, começando na origem, existe $h' \in \Gamma$ tal que $h'r_1 = r_2$.

Demonstração: Se $V = \mathbb{R}^n$, então $P_V = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ que é transitivo e não há nada a se fazer.

Se V é um subespaço próprio de $\mathbb{R}^n$, então, como toda transformação linear inversível de V se estende a um elemento de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$. a restrição de P_V a V é todo o grupo $\mathrm{Gl}(V)$.

$\mathrm{Gl}(V)$ tem duas componentes conexas a saber

$$\mathrm{Gl}(V)^+ = \{h \in \mathrm{Gl}(V) \text{ tal que } \det h > 0\}$$

e $\mathrm{Gl}(V)^- = \{h \in \mathrm{Gl}(V) \text{ tal que } \det h < 0\}$.

Claramente, $g \in \mathrm{int}S$ e $g \in P_V$. Logo $g \in \Gamma$ e assim Γ é um semigrupo com interior não vazio, na topologia de $\mathrm{Gl}(V)$.

Denotando também por Γ sua restrição a V, temos que $\Gamma^+ = \Gamma \cap \mathrm{Gl}(V)^+$ também é de interior não vazio, pois se $P \in \mathrm{Gl}(V)$, então $P^2 \in \mathrm{Gl}(V)^+$. Isto é, se $P \in \mathrm{int}\Gamma, PP \in (\mathrm{int}\Gamma)(\mathrm{int}\Gamma) \subset \mathrm{int}\Gamma$ o que implica que $P^2 \in \mathrm{int}\Gamma$.

Consideremos agora o homomorfismo sobrejetor

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & \mathrm{Gl}(V)^+ & \longrightarrow & \mathrm{Sl}(V) \\ & P & \longmapsto & (\det P)^{-\frac{1}{k}} P \end{array}, k = \dim V.$$

A imagem $\Gamma_1 = \Psi(\Gamma^+)$ é semigrupo de interior não vazio em $\mathrm{Sl}(V)$ pois Ψ é aplicação aberta.

Seja agora g' a restrição de g a V. Temos que $g' \in \mathrm{int}\Gamma$ e além disso, os auto-valores dessa restrição são

$$e^a(\cos\theta_1\pi + \mathrm{sen}\theta_1\pi), \ldots, e^a(\cos\theta_s\pi + \mathrm{sen}\theta_s\pi)$$

para algum s, pois todos eles tem o mesmo módulo.

Como $g' \in \mathrm{int}\Gamma$, existe uma matriz no $\mathrm{int}\Gamma$ com a mesma estrutura de blocos que g' de tal forma que os argumentos de seus auto-valores são racionais. Se os argumentos dos auto-valores são racionais então alguma potência da matriz tem auto-valores reais positivos. Assim, existe

$$g'' = \begin{bmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{bmatrix} \in \mathrm{int}\Gamma$$

com $\lambda > 0$.

O valor de Ψ em g'' é

$$\Psi(g'') = \begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

e $\Psi(g'') \in \mathrm{int}\Gamma_1$ onde $\Gamma_1 = \Psi(\Gamma^+)$.

No entanto, uma matriz como $\Psi(g'')$ é da forma $\exp X$ com X triangular superior com zeros na diagonal

$$X = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

mas essa matriz é nilpotente e em alguma base ela se escreve como

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Como $\exp X \in \mathrm{int}\Gamma$, existe ε suficientemente pequeno de tal forma que a matriz

$$Q_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\varepsilon & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -\varepsilon & 0 \end{bmatrix}$$

satisfaça $\exp Q_\varepsilon \in \mathrm{int}\Gamma$.

Mas, os auto-valores de Q_ε são puramente imaginários. De fato, considere a matriz

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

com $\dfrac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} = \sqrt{\xi}$. Então,

$$B = PQ_\varepsilon P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\varepsilon} & 0 & \cdots & 0 \\ -\sqrt{\varepsilon} & 0 & & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & 0 & \sqrt{\varepsilon} \\ 0 & \cdots & 0 & -\sqrt{\varepsilon} & 0 \end{bmatrix}$$

que é uma matriz anti-simétrica e assim tem somente auto-valores puramente imaginários. Como B é semelhante a Q_ε seus auto-valores também são puramente imaginários. Tomando $\exp(tQ_\varepsilon)$, verificamos que existe em $\mathrm{int}\Gamma_1$ uma matriz com blocos de Jordan do tipo

$$\begin{bmatrix} \cos tb & -\mathrm{sen} tb \\ \mathrm{sen} tb & \cos tb \end{bmatrix}$$

para todo $t > 0$. Isso nos permite concluir que

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{int}\Gamma_1.$$

Mas, $\mathrm{Sl}\,(V)$ é conexo, daí que $\Gamma_1 = \mathrm{Sl}(V)$.

Agora, basta observar que a ação de Γ^+ nos raios de V coincide com a de Γ_1, pois o que distingue os elementos desses semigrupos é apenas a multiplicação por números positivos.

Como $\Gamma_1 = \mathrm{Sl}(V)$, ele é transitivo nos raios de V caso $\dim V \geq 2$. Assim Γ^+ também é transitivo o que conclui a demonstração. □

Da proposição acima segue o seguinte

Corolário 2.3 *Consideremos $W \subset \mathbb{R}^n$ um cone pontual e gerador. Seja $g \in \mathrm{int}S_W$ e seja $V \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço g-invariante tal que $|\mu|$ é constante ao variar μ entre os auto-valores da restrição de g a V. Suponha que $V \cap W \neq \{0\}$. Então,* $\dim V = 1$.

Demonstração: Se $\dim V \geq 2$, o lema garante que S_W é transitivo nos raios de V. Tomando um raio em $V \cap W$ e considerando que W é invariante por S_W, vemos que para todo v em V, existe w no raio tomado e g em S_W tal que $gw = v$. Dai concluimos que $v \in W$ e assim temos que V esta contido em W o que é uma contradição com o fato que W é pontual. □

Lema 2.4 *Se $g \in \mathrm{int}S_W$ então $gW \subset \mathrm{int}W \cup \{0\}$.*

Demonstração: Seja $U \subset \mathrm{int}S_W$ uma vizinhança de g. Então Ux é um conjunto aberto contido em W para todo $x \in W$. Portanto $gx \in \mathrm{int}W$ para todo $x \in W$. □

Proposição 2.5 *Seja $g \in \mathrm{int}S_W$. Então, existe uma base $\{f_1, ..., f_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ com $f_1 \in \mathrm{int}W$ e tal que*

$$\mathrm{ger}\,\{f_2, \ldots, f_n\} \cap W = \{0\}$$

de tal forma que a matriz de g nessa base se escreve em blocos 1×1 e $(n-1) \times (n-1)$ como

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix}$$

com $\lambda > 0$, $\det h > 0$ e tal que os módulos dos autovalores de h são todos estritamente menores que λ.

Em outras palavras, g tem um auto-valor dominante real e de multiplicidade um. O auto-vetor correspondente está no interior de W e a soma dos outros auto-espaços tem interseção nula com W.

Demonstração: Sejam $\rho = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ é autovalor de } g\}$ e V^+ a soma direta dos auto-espaços generalizados $V_\lambda = \ker(g-\lambda)^n$, associados aos auto-valores λ tal que $|\lambda| = \rho$.

Também, seja V^- a soma direta dos auto-espaços generalizados restantes.

Afirmamos que $V^+ \cap W \neq \{0\}$.

Para ver isto, escreva para $u \in \mathbb{R}^n, u = u^+ + u^-$ onde $u^+ \in V^+$ e $u^- \in V^-$. Então,quando $k \to +\infty$, $(\frac{1}{\rho})^k g^k u^-$ converge para zero. Além disso, o fato que os autovalores de g em V^+ tem módulo constante ρ, implica que existe uma subsequência k_l tal que $(\frac{1}{\rho})^{k_l} g^{k_l} u^+$ converge para $v \neq 0$ se $u^+ \neq 0$.Neste caso $(\frac{1}{\rho})^{k_l} g^{k_l} u$ converge para $v \in V^+$. Em particular, tome $u \in W$. Como W é gerador, podemos escolher u tal que $u^+ \neq 0$. Então $0 \neq v \in V^+ \cap W$, pois $(\frac{1}{\rho})^{k_l} g^{k_l} u \in W$ e W é fechado, mostrando a afirmação.

Pelo corolário 2.3, segue que $\dim V^+ = 1$, de modo que existe somente um autovalor, digamos $\lambda_{\max}$, com $|\lambda_{\max}| = \rho$, o qual obrigatoriamente é real.

Além disso, o auto-espaço V^+ está contido em $W \cup (-W)$ e como $gW \subset W$, segue que $\lambda_{\max} > 0$.

Tomemos um autovetor $f_1 \in V^+ \cap W$. Então $\lambda_{\max} f_1 = g f_1$ pertence a $\text{int} W$ pelo lema anterior. Portanto, $f_1 \in \text{int} W$.

A proposição fica portanto demonstrada, se mostrarmos que $V^- \cap W = \{0\}$.

Primeiro, notemos que $V^- \cap \text{int} W = \{0\}$, pois caso contrário W deveria interceptar ambos semi-espaços determinados por V^-, um subespaço de codimensão um.

Mas, isto contradiz o fato que W é um cone pontual. De fato, para v_1 e v_2 em diferentes lados de V^-, o raio definido por $g^k v_1$ se aproxima, digamos, do raio gerado por f_1 quando $k \to +\infty$, enquanto o raio gerado por $g^k v_2$ se aproxima do raio gerado por $-f_1$.

Como $g^k v, v \in W$, não deixa W, deveríamos ter $\pm f_1 \in W$.

Finalmente,

$$g(V^- \cap W) = gV^- \cap gW \subset V^- \cap (\mathrm{int}W \cup \{0\}),$$

pois $gW \subset \mathrm{int}W \cup \{0\}$ pelo lema2.4. Portanto, $g(V^- \cap W) = \{0\}$, de modo que $V^- \cap W = \{0\}$ o que conclui a demonstração. □

Uma vez superados esses preliminares podemos enunciar e demonstrar o resultado principal deste capítulo.

Teorema 2.6 .*Se W é um cone pontual e gerador, então S_W é conexo.*

Demonstração: Para mostrar que S_W é conexo, basta mostrar que $\mathrm{int}S_W$ é conexo, já que $S_W = \mathrm{fe}(\mathrm{int}S_W)$.

Seja $S_{\mathrm{inf}} = \langle \exp L(S_W) \rangle$ o semigrupo gerado por $L(S_W)$. Esse semigrupo é conexo por caminhos, pois é infinitesimalmente gerado. Para mostrar que $\mathrm{int}S_W$ é conexo, é suficiente ligar qualquer $g \in \mathrm{int}S_W$ a S_{inf} por um caminho contido em $\mathrm{int}S_W$. Com isso se mostra que $\mathrm{int}S_W$ é conexo por caminhos.

Fixemos $g \in \mathrm{int}S_W$ e uma base de $\mathbb{R}^n$ como garantido na proposição 2.5. Seja $P \subset \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ o subgrupo cujas matrizes nessa base se escrevem como

$$\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

com $\mu > 0$ e $Q \in \mathrm{Gl}^+(n-1, \mathbb{R})$. Por construção $g \in (\mathrm{int}S_W) \cap P$. Mais ainda, seja

$$H = \mathrm{diag}\{n-1, -1, ..., -1\}$$

nessa base.

Pela proposição 2.1, $H \in \mathrm{int}L(S_W)$ e, portanto,

$$\exp(tH) \in (\mathrm{int}S_{\mathrm{inf}}) \cap P$$

para todo $t > 0$. Portanto, $\Gamma = (\mathrm{int}S_{\mathrm{inf}}) \cap P$ é um semigrupo de interior não vazio de P. Seja agora $\Phi : P \to \mathrm{Sl}(n-1, \mathbb{R})$ a aplicação definida por:

$$\Phi \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} = (\det Q)^{-\frac{1}{n-1}} Q = \mu^{\frac{1}{n-1}} Q$$

Essa aplicação é um homomorfismo sobrejetor. Portanto Φ é uma aplicação aberta e dai que $\Phi(\Gamma)$ é um semigrupo de interior não-vazio em $\mathrm{Sl}(n-1,\mathbb{R})$.

No entanto, $\exp(tH) \in \Gamma$ para todo $t > 0$ e

$$\exp(tH) = \operatorname{diag}\left\{e^{t(n-1)}, e^{-t}, ..., e^{-t}\right\}$$

de onde se conclui que $\Phi\left(\exp(tH)\right) = 1$. Daí que $1 \in \Phi(\Gamma)$ e como $\mathrm{Sl}(n-1,\mathbb{R})$ é conexo, isso mostra que $\Phi(\Gamma) = \mathrm{Sl}(n-1,\mathbb{R})$.

A partir da expressão de Φ, essa última afirmação tem o seguinte significado: para toda $h' \in \mathrm{Sl}(n-1,\mathbb{R})$, existe $a > 0$ tal que

$$g' = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-\frac{1}{n-1}}h' \end{bmatrix} \in \Gamma = (\mathrm{int}S_{\mathrm{inf}}) \cap P \subset \mathrm{int}S_{\mathrm{inf}}$$

Voltando ao elemento $g \in \mathrm{int}S_W$ fixado previamente, ele pode ser reescrito como

$$g = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & (\det h)^{\frac{1}{n-1}}h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-\frac{1}{n-1}}h' \end{bmatrix}$$

com $h' = (\det h)^{-\frac{1}{n-1}}h \in \mathrm{Sl}(n-1,\mathbb{R})$.

Para esse h', existe a tal que a expressão de g' acima vale. Agora, *existem duas possibilidades:*

1. $\lambda \leq a$. Então $e^{(n-1)T}\lambda = a$ para algum $T \geq 0$. Portanto, se H é a matriz diagonal dada acima, então

   $$\exp(TH)g = \begin{bmatrix} e^{(n-1)T}\lambda & 0 \\ 0 & (e^{(n-1)T}\lambda)^{-\frac{1}{n-1}}h' \end{bmatrix} = g' \in S_{\mathrm{inf}}$$

   pois essa é exatamente a expressão que aparece acima.

   Mas $\exp(tH)g \in \mathrm{int}S_W$ para todo $t \geq 0$ o que define um caminho entre g e $g' \in S_{\mathrm{inf}}$ sem sair do $\mathrm{int}S_W$.

2. $\lambda > a$. Então, da mesma forma, existe $T > 0$ tal que $(\exp TH)g' = g$ e o caminho $(\exp tH)g'$, $t \geq 0$ liga g' a g sem sair de $\mathrm{int}S_W$.

Em qualquer um dos dois casos, construímos um caminho ligando g a S_{inf}. Como $g \in S_W$ é arbitrário isso conclui a demonstração do teorema. □

2.2 Semigrupos maximais

Nesta seção usamos a propriedade de conexão de S_W para discutir alguns aspectos dos semigrupos maximais em $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$. Começamos com a seguinte proposição.

Proposição 2.7 *Seja $S \subset \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$, S maximal do tipo 1 entre os conexos e com* $\mathrm{int}S \neq \emptyset$. *Então, existe W tal que $S = S_W$.*

Demonstração: Seja $C \subset \mathbb{P}^{n-1}$ o conjunto controle invariante de S. Assim $C = \mathrm{fe}(Sx)$, para todo $x \in C$ e podemos concluir que C é conexo, compacto e está contido em um semi-espaço.

Temos que $S \subset S_C = \{g \in \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R}) : gC \subset C\}$ pois $C = \mathrm{fe}(Sx)$, para todo $x \in C$.

Seja $\Pi : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{P}^{n-1}$ a projeção canônica que associa a cada vetor não nulo de $\mathbb{R}^n$ o subespaço gerado por ele.

Seja $D = \Pi^{-1}(C) = D^+ \cup D^-$, com D^+ e D^- suas componentes conexas.

Seja W o cone convexo gerado por D^+, logo $W^- = -W$ é o cone convexo gerado por D^-.

W e W^- são cones pontuais, pois C é compacto contido em semi-espaço.

Se $gD^+ \subset D^+$, então $gW \subset W$ e se $gD^+ \subset D^-$ então $gW \subset W^-$. Mas, como S é conexo, não existe $g \in S$ tal que $gW \subset W^-$, pois $g^2W \subset W$. Logo, se $g \in S$ temos que $gW \subset W$ e $gW^- \subset W^-$.

Assim, $S \subset S_W$. Mas S é maximal e S_W é conexo,portanto $S_W \subset S$.

De tudo, podemos concluir que $S_W = S$ que é o que queríamos demonstrar. □

Para ver a ligação entre S_W e semigrupos maximais em $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ seja $[W]$ o subconjunto de retas em $\mathbb{R}^n$ contidas em $W \cup -W$ o qual é um subconjunto do espaço projetivo $\mathbb{P}^{n-1}$. Coloque

$$S[W] = \{g \in \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R}) : g[W] \subset [W]\}$$

Foi provado em [11], que $S[W]$ é um semigrupo maximal de $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$. Claramente $g \in S[W]$ se, e somente se, $g \in S_W$ ou $gW \subset -W$. O lema abaixo nos fornece mais alguma informação.

Lema 2.8 *Seja $W \subset \mathbb{R}^n$ um cone pontual e gerador e $W^- = -W$. Então, existe $g \in \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ tal que $gW \subset W^-$.*

Demonstração: A demonstração consiste de duas partes. Em primeiro lugar deve ser encontrado $h_1 \in \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ tal que $h_1 W \subset \mathbb{R}^+ U$, onde $U \subset W$ é um aberto suficientemente pequeno e posteriormente encontrar $h_2 \in \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ tal que $h_2 U \subset W^-$.

Para encontrar $h_1 \in U$, tome $x \in \mathrm{int}W$ de tal modo que $x^\perp \cap W = \{0\}$, onde $x^\perp$ denota o hiperplano ortogonal a x (que existe, pois W é gerador e pontual e $\mathrm{fe}(\mathrm{int}W) = W$).

Escolha uma base $\{v_2, \ldots, v_n\}$ de $x^\perp$. Então $\beta = \{x, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$. Considere a transformação linear H cuja matriz na base β é $H = \mathrm{diag}\{n-1, -1, \ldots, -1\}$.

É claro que $\mathrm{tr}H = 0$ e portanto $\exp(tH) \in \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Além do mais x é auto-vetor principal de $\exp(tH)$, $t > 0$ (o auto-valor correspondente tem módulo maior que os demais). Isso implica que se $y \in \mathbb{R}^n - x^\perp$ está no mesmo semi-espaço que x, determinado por $x^\perp$, então $\exp(tH)y$ se aproxima da semi-reta $\mathbb{R}^+ \cdot x$ determinada por x quando $t \to +\infty$. Mais que isso, considere o hiperplano afim $x + x^\perp$. Como $x \in \mathrm{int}W$ e W é um cone pontual , a interseção $(x + x^\perp) \cap W$ é um conjunto compacto em $x + x^\perp$ e como x é auto-vetor principal de $\exp(tH), t > 0$, dada uma vizinhança U tal que $x \in U$, existe $t_0 > 0$ tal que $\exp(tH)W \subset \mathbb{R}^+ U$ para todo $t \geq t_0$. Com $h_1 = \exp(tH)$ para algum $t \geq t_0$, a primeira parte fica concluída..

A segunda parte se inicia com a observação de que existe $h_2 x \in \mathrm{int}W^-$ pois $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ é transitiva em $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Como h_2 é uma aplicação contínua, $h_2^{-1}(\mathrm{int}W^-)$ é um cone aberto que contém x em seu interior. Tomando U uma vizinhança de x em $h_2^{-1}(\mathrm{int}W^-)$ e t_0 como na primeira parte, se vê que $g = h_2 h_1$ satisfaz o que se pede, isto é, $gW \subset \mathrm{int}W^-$. □

Deste lema concluimos que S_W não é um semigrupo maximal. Entretanto temos que S_W é um semigrupo maximal conexo no sentido que $S_W \subset T$ com T um semigrupo conexo de $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ então $T = S_W$ ou $T = \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ como mostra o corolário abaixo.

Corolário 2.9 *S_W é maximal conexo em $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$.*

Demonstração: Seja T um semigrupo conexo com interior não vazio contendo propriamente S_W. Note primeiramente que T não está contido em $S[W]$. Para ver isto suponha ao contrário que $T \subset S[W]$. Então $Tx \subset W \cup -W$ para todo $x \in W$. Entretanto, T é conexo de modo que se $0 \neq x \in W$ então Tx está contido em uma componente conexa de $(W \cup -W) - \{0\}$, a qual é forçosamente W pois Tx é conexo e contém x,pois $1 \in T$. Portanto, teríamos $T \subset S_W$ contrariando nossa hipótese sobre T.

Pela proposição 2.1 acima, qualquer reta no interior de $[W]$ é gerada por um autovetor de algum $h \in \text{int}S_W$. Isto implica que $[W]$ e $\mathbb{P}^{n-1} - [W]$ são os dois *conjuntos de controle* de S_W em $\mathbb{P}^{n-1}$. Logo S_W é transitivo em $\text{int}[W]$ bem como em $\mathbb{P}^{n-1} - [W]$. Como T não está contido em $S[W]$, existe $g \in T$ tal que $gx \in \mathbb{P}^{n-1} - [W]$ para algum $x \in \text{int}[W]$. Também para qualquer $y \in \mathbb{P}^{n-1}$ existe $g_1 \in S_W$ com $g_1 y \in \text{int}[W]$ (pois $[W]$ é o conjunto de controle invariante de S_W em $\mathbb{P}^{n-1}$). Segue que T age transitivamente em $\mathbb{P}^{n-1}$. Assim $T = \text{Sl}(n, \mathbb{R})$.
□

Existe uma recíproca para este corolário, mostrando que um semigrupo em uma certa classe de subsemigrupos maximais conexos de $\text{Sl}(n, \mathbb{R})$ devem ser S_W para algum cone pontual e gerador W. Esta é a classe de semigrupos que são do tipo espaço projetivo $\mathbb{P}^{n-1}$. Nos referimos a [13] e [14] para a definição do tipo de um semigrupo e em particular do tipo de S_W e [12] para uma discussão especifica sobre semigrupos em $\text{Sl}(n, \mathbb{R})$. Foi observado em [13] que se um semigrupo é conexo e do tipo $\mathbb{P}^{n-1}$ então ele está contido em S_W para algum cone pontual e gerador $W \subset \mathbb{R}^n$. Portanto tiramos do fato que S_W é conexo a seguinte caracterização dos semigrupos maximais conexos do tipo espaço projetivo:

Corolário 2.10 *Seja $\mathcal{C}$ a classe dos semigrupos $S \subset \text{Sl}(n, \mathbb{R})$, com $\text{int}S \neq \emptyset$, que são maximais conexos do tipo $\mathbb{P}^{n-1}$. Então,*

$$\mathcal{C} = \{S_W : W \subset \mathbb{R}^n \text{ é um cone pontual e gerador }\}.$$

Por definição $S[W] = S_W \cup S_W^{-1}$, onde

$$S''_W = \{g \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}) : gW \subset -W\}$$

Claramente, existe a inclusão $S_W S''_W \subset S''_W$ e $(S''_W)^2 \subset S_W$. Isto mostra, em particular, que S''_W tem interior não vazio. No caso em que n é par, $-1 \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, portanto, $-1 \in S''_W$ para qualquer W. Realmente, -1 leva W exatamente sobre $-W$. Portanto a proposição a seguir implica que em dimensões pares, $S''_W = -S_W$.

Proposição 2.11 *Suponha que exista $k \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ satisfazendo $kW = -W$. Então $S''_W = kS_W = S_W k$.*

Demonstração: Claramente, kS_W e $S_W k$ estão contidos em S''_W. Para a inclusão contrária note que $k^{-1}W = -W$. Tome $g \in S''_W$. Então $gW \subset -W$, de modo que $gk^{-1}W \subset W$ e $k^{-1}gW \subset W$, isto é, gk^{-1} e $k^{-1}g$ estão em S_W. □

Sob as hipóteses desta proposição segue que S''_W é conexo. A seguir provamos que isto vale em geral.

Proposição 2.12 *S''_W é conexo. Portanto S_W e S''_W são as componentes conexas de $S[W]$.*

Demonstração: Tome $g, h \in S''_W$. Ambos, gW e hW são cones pontuais e geradores contidos em $-W$. Tome H e β como na proposição 2.1 com o primeiro elemento f_1 de β em $\mathrm{int}(hW)$. Como na proposição $H \in L(S_W)$ e para t_0 suficientemente grande, $\exp(t_0 H)(-W) \subset hW$. Em particular, $\exp(t_0 H)(gW) \subset hW$.

Portanto $h^{-1}\exp(t_0 H)g \in S_W$, isto é, $\exp(t_0 H)g \in hS_W$. Desde que S_W é conexo por caminhos, isto implica a existência de um caminho em $S[W]$ ligando $\exp(t_0 H)g$ a h. Entretanto, $H \in L(S_W)$, de modo que $\exp(t_0 H)g$ e g estão na mesma componente conexa de S''_W, concluindo a prova de que S''_W é conexo. □

Finalmente, observamos que o corolário 2.10 determina completamente os semigrupos maximais conexos de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ para $n = 2, 3$. De fato, para $n = 2$, qualquer semigrupo é do tipo espaço projetivo e assim qualquer semigrupo maximal conexo é S_W para algum cone pontual e gerador $W \subset \mathbb{R}^2$. Para $n = 3$, existem dois tipos de semigrupos maximais, a saber os do tipo espaço projetivo $\mathbb{P}^2$ e os do tipo $\mathrm{Gr}_2(3)$ as Grassmannianas de subespaços de dimensão dois de $\mathbb{R}^3$. Entretanto, se um semigrupo S é do tipo $\mathrm{Gr}_2(3)$ então seu inverso S^{-1} é do tipo projetivo. Portanto, existe a seguinte caracterização de semigrupos maximais conexos em $\mathrm{Sl}(3, \mathbb{R})$:

Proposição 2.13 *Um semigrupo $S \subset \mathrm{Sl}(3, \mathbb{R})$, com $\mathrm{int} S \neq \emptyset$, é maximal conexo se, e somente se, existe um cone pontual e gerador $W \subset \mathbb{R}^3$ tal que ou $S = S_W$ ou $S = S_W^{-1}$.*

Capítulo 3

Cones Infinitesimais

Neste capítulo damos uma caracterização do cone de Lie $L(S_W)$, associado a S_W, usando a aplicação momento da representação canônica de $\mathrm{Sl}\,(n,\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^n$. Concluímos que $L(S_W)$ é o cone dual, em relação à forma traço, de um subconjunto $Q\,(W)$ do conjunto

$$\varphi = \{(v,\phi) \in V \otimes V^* : \phi(v) = 0\},$$

das matrizes de posto um. O subconjunto $Q\,(W)$ é obtido a partir de W via a aplicação momento. Obtemos também dois resultados que estabelecem condições para que um subconjunto de φ seja $Q(W)$ para algum cone pontual e gerador W. Além disso introduzimos uma seção com alguns resultados sobre cones auto-duais.

3.1 Caracterização de $L(S_W)$

Seja $W \subset V = \mathbb{R}^n$ um cone pontual e gerador e

$$S_W = \{g \in \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R}) : gW \subset W\}.$$

Denotemos por $L(S_W)$ o cone na álgebra de Lie $\mathfrak{sl}\,(n,\mathbb{R})$ associado a S_W:

$$L(S_W) = \{X \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) : \exp(tX) \in S_W, \forall t \geq 0\}.$$

Como acontece com todo cone infinitesimal de um semigrupo, $L(S_W)$ é um cone de Lie no sentido em que

$$\exp\,(X)\, L\,(S_W) \subset L\,(S_W)$$

para todo $X \in L(S_W) \cap -L(S_W)$.

Lembremos que se W é pontual e gerador, então $L(S_W)$ tem interior não vazio em $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, isto é, é gerador.

O semigrupo S_W contém o grupo dos automorfismos G_W de W, que é definido por

$$G_W = \{g \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}) : gW = W\}$$

É fácil ver que G_W é um subgrupo fechado, portanto, ele é um grupo de Lie.

Seja V^* o dual de $V = \mathbb{R}^n$. Dado um elemento $g \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ denote por g^* a transformação linear de V^* induzida por g:

$$g^*\lambda = \lambda \circ g^{-1}$$

O cone dual W^* é definido por

$$W^* = \{\alpha \in V^* : \alpha(v) \geq 0, \text{ para todo } v \in W\}.$$

Sejam $g \in S_W$, $v \in W$ e $\alpha \in W^*$. Então $\alpha(gv) \geq 0$ pois $gv \in W$. Isso significa que $(g^{-1})^*\alpha(v) \geq 0$.

Como v e α são arbitrários, temos que

$$S_{W^*} = (S_W^{-1})^* = \{(g^{-1})^* : g \in S_W\}.$$

Uma vez colocadas essas notações preliminares, passaremos a buscar uma caracterização dos cones de matrizes que são cones de Lie de semigrupos S_W. Para isso é necessário discutir a aplicação momento de uma representação. O que será feito na próxima subseção.

3.1.1 Aplicação momento

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples real que se representa no espaço vetorial V. A ação de $\mathfrak{g}$ em V é denotada por Xv, $X \in \mathfrak{g}$ e $v \in V$.

A forma de Cartan- Killing de $\mathfrak{g}$ é denotada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Se a representação é fiel $\mathfrak{g}$ é vista como uma subálgebra de $\mathfrak{sl}(V)$. Neste caso a forma de Cartan- Killing é um múltiplo da forma traço

$$(X, Y) \longmapsto \mathrm{tr}(XY)$$

onde tr indica o traço de uma transformação linear de V. Como as formas são múltiplas uma da outra, elas serão denotadas por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indistintamente.

A álgebra $\mathfrak{g}$ se representa também em V^* por $X\lambda = -\lambda \circ X$, $X \in \mathfrak{g}$, $\lambda \in V^*$. A definição da representação em V^* diz apenas que os elementos de $\mathfrak{g}$ são anti-simétricos em relação à dualidade canônica entre V e V^*, $(v, \lambda) = \lambda(v)$, isto é, $(Xv, \lambda) = -(v, X\lambda)$.

A álgebra se representa em $V \times V^*$ por

$$X(v, \lambda) = (Xv, X\lambda).$$

A aplicação momento da representação de $\mathfrak{g}$ em V é a aplicação $\mu : V \times V^* \to \mathfrak{g}^*$ que assume valores no dual $\mathfrak{g}^*$de $\mathfrak{g}$. Ela é definida por

$$\mu(v, \lambda)(X) = \lambda(Xv), v \in V, \lambda \in V^*, X \in \mathfrak{g}.$$

Como $\mathfrak{g}$ é semi-simples, pode-se definir a aplicação momento a valores em $\mathfrak{g}$, usando alguma forma não degenerada. Tomando $\langle \cdot, \cdot \rangle$ como sendo a forma traço da representação em V, use a mesma notação μ para a aplicação $\mu : V \times V^* \to g$ definida de forma que $\mu(v, \lambda)$ seja o único elemento de $\mathfrak{g}$ tal que

$$\langle \mu(v, \lambda), Z \rangle = \lambda(Zv) \tag{3.1}$$

para todo $Z \in \mathfrak{g}$. Isto define corretamente uma aplicação a valores em $\mathfrak{g}$, porque a forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é não degenerada.

A interpretação geométrica de μ é a seguinte: assumindo que $\mathfrak{g}$ é subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$, a forma traço é não degenerada e é um múltiplo da forma de Cartan-Killing. A forma traço pode ser definida em todo $\mathfrak{gl}(V)$ e como ela é não degenerada em $\mathfrak{g}$, o ortogonal $\mathfrak{g}^\perp$ satisfaz $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}^\perp = 0$ e portanto $\mathfrak{gl}(V) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^\perp$ definindo uma projeção π sobre $\mathfrak{g}$. Se $A \in \mathfrak{gl}(V)$ e $A = X + Y$ com $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{g}^\perp$, então $\pi(A) = X$. Em termos da forma traço, essa projeção é descrita pela fórmula

$$\langle A, Z \rangle = \langle \pi(A), Z \rangle \tag{3.2}$$

que vale para todo $Z \in \mathfrak{g}$. Como a forma traço é não degenerada, essa igualdade define $\pi(A)$ sem ambiguidade.

Por outro lado, $\mathfrak{gl}(V)$ se identifica com $V \otimes V^*$ por

$$v \otimes \lambda : u \longmapsto \lambda(u)v. \tag{3.3}$$

Em virtude de (3.2), a projeção $\pi(v \otimes \lambda)$ é o único elemento de $\mathfrak{g}$ que satisfaz

$$\langle \pi(v \otimes \lambda), Z \rangle = \langle v \otimes \lambda, Z \rangle$$

para todo $Z \in \mathfrak{g}$. Observe que o segundo membro dessa igualdade é calculado da seguinte maneira: tome $u \in V$. Então a composta das transformações lineares $(v \otimes \lambda)$ e Z é dada por

$$((v \otimes \lambda) \circ Z)u = \lambda(Zu)v.$$

Portanto, $(v \otimes \lambda)Z = v \otimes (\lambda \circ Z)$. Como para qualquer $u \otimes \phi$,

$$\mathrm{tr}(u \otimes \phi) = \phi(u) \tag{3.4}$$

a forma traço avaliada em $v \otimes \lambda$ e Z é

$$\langle v \otimes \lambda, Z \rangle = \lambda(Zv) \tag{3.5}$$

Juntando isso com a expressão dada para a projeção π em (3.2) e para a aplicação momento μ em (3.1), se chega a

$$\mu(v, \lambda) = \pi(v \otimes \lambda)$$

que é a interpretação geométrica da μ que se procurava. Isto é, μ é a projeção ortogonal (em relação à forma traço) sobre $\mathfrak{g}$ de $v \otimes \lambda$ visto como um elemento de $\mathfrak{gl}(V)$.

3.2 Descrição de $L(S_W)$

Voltando ao cone $W \subset V = \mathbb{R}^n$, seja W^* o cone dual (contido no dual de V^*). O teorema da invariança para cones afirma que uma transformação linear X deixa W invariante se, e só se, $\phi(Xv) \geq 0$ para todo par $(v, \phi) \in W \times W^* \subset V \times V^*$, tal que $\phi(v) = 0$ (veja [3]). Em outras palavras, o cone $L\,(S_W)$ está contido no cone dual, em relação à forma traço, do conjunto

$$\{\mu\,(v, \phi) : v \in W, \phi \in W^*, \phi(v) = 0\}$$

onde μ é a aplicação momento da representação canónica. No que segue denotaremos este conjunto por $Q(W)$, isto é,

$$Q(W) = \{v \otimes \phi \in V \otimes V^* : v \in W, \phi \in W^*, \phi(v) = 0\}.$$

Identificando $V \otimes V^*$ com $\mathfrak{gl}(V)$ e sabendo que $\mathrm{tr}(v \otimes \phi) = \phi(v)$, a condição $\phi(v) = 0$ garante que $Q(W)$ é um subconjunto de $\mathfrak{sl}(V)$. Por (3.5),

$$\phi(Xv) = \mathrm{tr}((v \otimes \phi)X) = \langle v \otimes \phi, X\rangle.$$

Portanto, $X \in L(S_W)$ se , e só se, $\langle \varepsilon, X\rangle \geq 0$, para todo $\varepsilon \in Q(W)$. Dito de outra maneira,

Proposição 3.1 *$L(S_W)$ é o cone dual de $Q(W)$ em relação à forma traço:*

$$L(S_W) = Q(W)^*.$$

O cone dual $L(S_W)^*$ de $L(S_W)$ é o cone gerado por $Q(W)$.

Se W é pontual e gerador, então $L(S_W)$ é gerador. Portanto $L(S_W)^*$ é pontual, isto é, o cone gerado por $Q(W)$ não contém subespaços. Por outro lado, um cone é pontual se, e somente se, o seu dual é gerador. Dessa forma, $L(S_W)$ contém subespaços se, e só se, $Q(W)$ está contido num subespaço de $\mathfrak{sl}(V)$. Em outras palavras, o subespaço $H = L(S_W) \cap -L(S_W)$ é não nulo se, e só se, o subespaço gerado por $Q(W)$ em $\mathfrak{sl}(V)$ é próprio.

O subespaço H é uma subálgebra, a álgebra de Lie do grupo dos automorfismos de W. Portanto,

Proposição 3.2 $\dim G_W = 0$ *se, e só se, $Q(W)$ gera $\mathfrak{sl}(V)$.*

Uma observação relevante é que a proposição 3.1 mostra de uma maneira bastante indireta o seguinte fato: dado um cone $\{0\} \neq W \neq V$, existem $v \in W$ e $\phi \in W^*$ não nulos tais que $\phi(v) = 0$. Em outras palavras, para algum $0 \neq v \in W$, $\mathrm{op}v \neq \{0\}$. De fato, se $W \neq V$, então $L(S_W) \neq \mathfrak{sl}(V)$, pois $\{0\}$ e V são os únicos cones invariantes por $\mathfrak{sl}(V)$. Dai que $Q \neq \{0\}$. Esse fato é bem conhecido na teoria de cones.

O que acontece é que se v está na fronteira do cone, então op$v \neq \{0\}$ pois op (op$v$) é a face que contém v.

Como os elementos de S_W são transformações lineares, $S_{-W} = S_W$. Isso se reflete na caracterização de $L(S_W)$: o cone dual de $-W$ é $-W^*$, portanto $Q(-W) = Q(W)$ e $Q(-W)^* = L(S_W)$.

3.2.1 Órbita Nilpotente

O conjunto

$$\varphi = \{(v, \phi) \in V \times V^* : \phi(v) = 0\}$$

é uma órbita da ação de $\mathrm{Sl}(V)$ em $V \times V^*$. De fato, esse conjunto é invariante pois

$$(g\phi)(gv) = \phi \circ g^{-1}(gv) = \phi(v).$$

Por outro lado, dado $v \in V$, o grupo de isotropia $G_v = \{g : gv = v\}$ é transitivo no conjunto $\{\phi : \phi(v) = 0\}$ pois G_v contém $\mathrm{Sl}(n-1, \mathbb{R})$, $n = \dim V$, e o conjunto dos funcionais que anulam v é de dimensão $n-1$. Isso garante que a ação de $\mathrm{Sl}(V)$ é transitiva em φ.

Por essa razão, o conjunto

$$\varphi = \{v \otimes \phi \in \mathfrak{sl}(V) : \phi(v) = 0\}$$

(a notação é a mesma, pois os dois conjuntos se identificam) é uma órbita da representação adjunta de $\mathrm{Sl}(V)$. Aliás, esse conjunto é a órbita de $e_1 \otimes \varepsilon_2$ onde $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ é uma base de V e $\{\varepsilon_i\}_{i=1,\ldots,n}$ é sua base dual em V^*. Essa transformação linear de V é a transformação nilpotente cuja matriz tem entrada 1 na posição $1,2$ e zero nas demais. Se $X \in \varphi$, então $X^2 = 0$ e toda transformação linear de $\mathfrak{sl}(V)$ cujo quadrado é zero pertence a φ .

Em termos dessa órbita, a proposição 3.1 pode ser reescrita como

Proposição 3.3 *$L(S_W)$ é o dual da imagem por μ de $W \times W^* \cap \varphi$.*

3.3 Estudo de $Q(W)$

Como já foi definido anteriormente,

$$Q(W) = \{v \otimes \alpha : v \in W, \alpha \in W^*, \alpha(v) = 0\}.$$

Uma pergunta natural é: quais subconjuntos da órbita φ são $Q(W)$ para algum W? A seguir apresentaremos algumas condições necessárias para que isto aconteça. Antes de dar essas condições faremos algumas observações e daremos algumas definições.

A forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ é dada por $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(AB)$.

Definição 3.4 *Um conjunto $P \subset \varphi$ é dito* **auto-dual**, *em relação à forma de Cartan-Killing, se*

1. *para $X,Y \in P$, então $\langle X,Y\rangle \geq 0$ e*
2. *se $X \in \varphi$ é tal que $\langle X,Y\rangle \geq 0$ para todo $Y \in P$, então $X \in P$.*

Serão usadas as fórmulas:

- A composta de $v \otimes \alpha$ por $w \otimes \beta$, vistas como transformações lineares, é dada por

$$(v \otimes \alpha)(w \otimes \beta) = \alpha(w) v \otimes \beta.$$

De fato, por definição, se $u \in \mathbb{R}^n$, então $v \otimes \alpha(u) = \alpha(u)v$. Assim,

$$(v\otimes\alpha)(w\otimes\beta)(u) = \beta(u)(v\otimes\alpha)(w) = \alpha(w)\beta(u)v = \alpha(w)(v\otimes\beta)(u).$$

- Como consequência,

$$\langle v \otimes \alpha, w \otimes \beta\rangle = \mathrm{tr}((v \otimes \alpha)(w \otimes \beta)) = \alpha(w)\beta(v),$$

como segue diretamente do produto anterior.

- De forma mais geral, se $A \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ então $\langle A, v \otimes \alpha\rangle = \alpha(Av)$.
- Se $A \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ e $\langle A, X\rangle \geq 0$ para todo $X \in Q(W)$, então $\exp(tA)W \subset W$, $t \geq 0$.

Proposição 3.5 *Suponha que W seja um cone. Então,*

Proposição 3.6 1. *Se $X,Y \in Q(W)$, então $\langle X,Y\rangle \geq 0$.*

2. *Tome $X = v \otimes \alpha \in \varphi$ tal que $\langle X,Y\rangle \geq 0$, para todo $Y \in Q(W)$. Então,*

(a) *Se W é gerador , então $v \in W$ ou $-v \in W$.*

(b) *Se W é pontual, então $\alpha \in W^*$ ou $-\alpha \in W^*$.*

3. *Se W é pontual e gerador, então $Q(W)$ é auto-dual em relação à forma de Cartan-Killing.*

Demonstração:

1. Tome $v \otimes \alpha$ e $w \otimes \beta$ em $Q(W)$, escolhidos de modo que $\alpha, \beta \in W^*$ e $v, w \in W$. Pela segunda fórmula acima

$$\langle v \otimes \alpha, w \otimes \beta \rangle = \alpha(w)\beta(v) \geq 0$$

pois $v, w \in W$ e $\alpha, \beta \in W^*$ e portanto $\alpha(w) \geq 0$ e $\beta(v) \geq 0$.

2. Seja X como no enunciado do segundo ítem . Então $\exp(tX)W \subset W$ para $t \geq 0$. Mas $X^2 = 0$, portanto $\exp(tX) = 1 + tX$. Em outras palavras, se $w \in W$, então $w + t\alpha(w)v \in W$, para todo $t > 0$.Suponha agora que W é gerador. Então α não é identicamente nula em W. Trocando-se $-v$ por v e α por $-\alpha$, se for necessário. pode-se assumir que $\alpha(w) > 0$, para algum $w \in W$. Usando este w e a invariança de W por $\exp(tX)$, conclui-se que $w + xv \in W$ para todo $x \geq 0$. Dai que $\frac{1}{x}w + v \in W$ para todo $x > 0$. Fazendo $x \to \infty$ e usando o fato que W é fechado. chega-se a que $v \in W$ como queria-se demonstrar. Por outro lado. se W é pontual. então W^* é gerador e o resultado segue do ítem anterior por transposição.

3. Seja W pontual e gerador e tome $X = v \otimes \alpha \in \varphi$ tal que $\langle X, Y \rangle \geq 0$ para todo $Y \in Q(W)$. Assuma sem perda de generalidade que $v \in W$. Como foi mostrado no ítem anterior, $\alpha \in W^*$ ou $\alpha \in -W^*$. Pelo lema a seguir, existe $Y = w \otimes \beta \in Q(W)$ tal que $\langle X, Y \rangle \neq 0$. Mas então $0 < \langle v \otimes \alpha, w \otimes \beta \rangle = \beta(v)\alpha(w)$ e como $\beta(v) \geq 0$, segue que $\alpha(w) > 0$. Dai que $-\alpha \notin W^*$ e , portanto, $\alpha \in W^*$, que é o que deveria ser demonstrado.

□

Lema 3.7 *Seja W cone pontual e gerador. Tome $X \in \mathfrak{g}$ (X é não nulo). Então, existe $Y \in Q(W)$ tal que $\langle X, Y\rangle \neq 0$*

Demonstração: Suponha por absurdo que $\langle X, Y\rangle = 0$ para todo $Y \in Q(W)$. Então $\exp(tX)W \subset W$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pois $\langle X, Y\rangle \geq 0$ e $\langle -X, Y\rangle \geq 0$ para todo $Y \in Q(W)$. Como W é gerador, $\alpha(w) \neq 0$ para algum $w \in W$. Pode-se assumir $\alpha(w) > 0$. Argumentando como na demonstração da proposição anterior, conclui-se que $v \in W$. Mudando o sinal de X , conclui-se também que $-v \in W$ contradizendo o fato que W é pontual. □

Observação: Se o cone não é pontual ou não é gerador, o lema acima não vale. Se o cone não é gerador tome $X = v \otimes \alpha$, com $\alpha(W) = 0$, $\alpha \neq 0$. Se o cone não é pontual, então W^* não é gerador e, portanto, existe $X = v \otimes \alpha$ com $W^*(v) = 0$. Portanto, as condições de que P é auto-dual e não ortogonal a nenhum elemento de P, são necessárias para que $P = Q(W)$ para algum cone pontual W. Essas condições não são no entanto suficientes. O que pode acontecer é que mesmo que um conjunto seja auto-dual, o núcleo de algum de seus elementos pode separar as imagens de outros dois. □

Exemplo: Seja em $\mathbb{R}^3$ a base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ e os funcionais lineares $\alpha_1 = (0, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 0, -1)$ e $\alpha_3 = (1, -1, 0)$. Seja P o conjunto formado por $X_1 = e_1 \otimes \alpha_1$, $X_2 = e_2 \otimes \alpha_2$, $X_3 = e_3 \otimes \alpha_3$. A forma de Cartan-Killing em dois elementos de P é positiva. No entanto, α_3 separa e_1 de e_2 , e também α_2 separa e_1 de e_3.Portanto, esse conjunto não pode provir de um cone. Este exemplo não está completo porque o conjunto não contém todos os elementos que são positivos com P, mas não é difícil completar o conjunto para incluir também essa condição, garantindo que existe um conjunto auto-dual que não provém de um cone. □

De alguma forma temos que introduzir condições extras que garantam que $P = Q(W)$ para algum W.

Vamos trabalhar uma condição, que resolve o nosso problema pelo menos em um caso particular. Veremos que no caso geral ela não é ainda suficiente.

Considere a aplicação trilinear simétrica em $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ definida por

$$T(X, Y, Z) = \mathrm{tr}(XYZ) + \mathrm{tr}(XZY).$$

Lema 3.8 *Sejam $X = u \otimes \alpha$, $Y = v \otimes \beta$ e $Z = w \otimes \gamma$ em φ tais que $\langle X, Y\rangle$, $\langle X, Z\rangle$ e $\langle Y, Z\rangle$ sejam estritamente positivos. Suponha que as componentes dos produtos tensoriais sejam escolhidas de tal forma que $\beta(u) > 0$ e $\gamma(u) > 0$. Suponha também que $T(X, Y, Z) \geq 0$. Então $\gamma(v) > 0$ e $\beta(w) > 0$.*

Demonstração: Antes de mais nada $XYZ = \alpha(v)\beta(w)u \otimes \gamma$ e, portanto, $\mathrm{tr}(XYZ) = \alpha(v)\beta(w)\gamma(u)$. Da mesma forma $\mathrm{tr}(XZY) = \alpha(w)\gamma(v)\beta(u)$.

Daí que

$$T(X, Y, Z) = \alpha(v)\beta(w)\gamma(u) + \alpha(w)\gamma(v)\beta(u).$$

Por hipótese, $\beta(u) > 0$ e $\gamma(u) > 0$. Como $\langle X, Y\rangle > 0$ e $\langle X, Z\rangle > 0$, isso implica que $\alpha(v) > 0$ e $\alpha(w) > 0$.

Por outro lado, $\langle Y, Z\rangle > 0$ e, portanto, $\beta(w)$ e $\gamma(v)$ tem o mesmo sinal. Olhando a expressão de T acima, se vê que se esse sinal fosse negativo, então $T(X, Y, Z)$ seria negativo. Portanto $\beta(w)$ e $\gamma(v)$ são estritamente positivos. □

Observação: Se W é cone e $X, Y, Z \in Q(W)$, então $T(X, Y, Z) \geq 0$. Isto segue diretamente da fórmula de T. □

Lema 3.9 *Suponha que $P \subset \varphi$ seja auto-dual e não seja ortogonal a todo $Z \in \varphi$. Tome $X = u \otimes \alpha$ e considere o conjunto $P(\alpha) = \{v : v \otimes \alpha \in P\}$. Então $P(\alpha)$ é um cone (convexo) pontual em α^0 o núcleo de α.*

Demonstração: Denote por C o cone convexo gerado por $P(\alpha)$. Deve-se mostrar que $C = P(\alpha)$. É óbvio que $P(\alpha) \subset C$. Por outro lado, se $x \in C$, então $x \otimes \alpha \in \varphi$ pois, $\alpha(x) = 0$.

Como P é auto-dual, para mostrar que $x \in P(\alpha)$ basta mostrar que $\langle x \otimes \alpha, Z\rangle \geq 0$, para todo $Z \in P$.

Mas x é combinação convexa de elementos de $P(\alpha)$, isto é,

$$x = a_1 v_1 + \ldots + a_l v_l,$$

com $a_i \geq 0$ e $v_i \in P(\alpha)$. Como $v_i \in P(\alpha)$ segue que $\langle v_i \otimes \alpha, Z \rangle \geq 0$. Por outro lado

$$x \otimes \alpha = a_1 v_1 \otimes \alpha + \ldots + a_l v_l \otimes \alpha$$

o que garante que $\langle x \otimes \alpha, Z \rangle \geq 0$, mostrando que $C \subset P(\alpha)$.

Para ver que $P(\alpha)$ é pontual, suponha por absurdo que $\pm v \in P(\alpha)$. Então $\pm v \otimes \alpha \in P$, o que implica que $\pm\langle v \otimes \alpha, Z \rangle \geq 0$. para todo $Z \in P$, isto é, $\langle v \otimes \alpha, Z \rangle = 0$ para todo $Z \in P$, o que contradiz a hipótese de P ser não ortogonal a nenhum elemento de φ. □

Damos agora um resultado no qual impomos algumas condições adicionais a P para que exista W tal que $P = Q(W)$.

Proposição 3.10 *Seja $P \subset \varphi$ tal que as seguintes condições estejam satisfeitas:*

1. *P é auto-dual, isto é , $\langle X, Y \rangle \geq 0$, para todo $X, Y \in P$ e se $X \in \varphi$ é tal que $\langle X, Y \rangle \geq 0$, para todo $Y \in P$ então $X \in P$.*
2. *Não existe $X \in \varphi$ tal que $\langle X, Y \rangle = 0$, para todo $Y \in P$.*
3. *Para toda terna $X, Y, Z \in P$, $T(X, Y, Z) \geq 0$*
4. *Se $X = u \otimes \alpha \in P$ e $Y = v \otimes \beta \in P$ são tais que $\langle X, Y \rangle = 0$, então $v = au$ e $\beta = b\alpha$ com a e b não nulos de mesmo sinal.*

Então, $P = Q(W)$ para algum cone pontual e gerador W.

Demonstração: Fixemos um $X = u \otimes \alpha \in P$ e tomemos W = cone convexo gerado por

$$\{w : w \otimes \gamma \in P \text{ e } \alpha(w) \geq 0 \text{ , onde se } \alpha(w) = 0 \Rightarrow w = au, a > 0\}$$

Mostremos em primeiro lugar que $P \subset Q(W)$. Para isso, tomemos um elemento $Z = w \otimes \gamma \in P$ e mostremos que $Z \in Q(W)$.

Sempre podemos escolher uma representação de $Z = w \otimes \gamma$ de forma que $w \in W$. De fato:

1. Se $\alpha(w) \neq 0$, como $w \otimes \gamma = (-w) \otimes (-\gamma)$, se $\alpha(w) < 0$, escolhemos $(-w) \otimes (-\gamma)$.

2. Se $\alpha(w) = 0$, então $\langle X, Z\rangle = \langle u \otimes \alpha, w \otimes \gamma\rangle = \alpha(w)\gamma(u) = 0$ e pela condição 4 da hipótese, temos $w = au$ e $\gamma = b\alpha$ com a e b não nulos de mesmo sinal e assim $w \otimes \gamma = au \otimes b\alpha = (-au) \otimes (-b\alpha)$ e se $a < 0$ tomamos $-a > 0$.

Tomemos portanto $Z = w \otimes \gamma \in P$ de forma que $w \in W$. Temos que mostrar que para todo $Y = v \otimes \beta \in P$ tal que $v \in W$, então $\gamma(v) \geq 0$. Da mesma forma que para Z tomemos uma representação de Y de forma que $v \in W$.

Temos pela condição (1) que

$$\alpha(v)\beta(u) \geq 0 \qquad \alpha(w)\gamma(u) \geq 0 \qquad \beta(w)\gamma(v) \geq 0$$

e pela condição (3) que

$$T(X,Y,Z) = \alpha(v)\beta(w)\gamma(u) + \alpha(w)\gamma(v)\beta(u) \geq 0.$$

Se $\alpha(w) = 0$, temos pela escolha de w e pela condição (4) que $w = au$. $\gamma = b\alpha$ com $a > 0$ e $b > 0$ donde $\gamma(v) = b\alpha(v) \geq 0$.

Se $\gamma(u) = 0$, temos pela condição (4) que $w = au$ e $\gamma = b\alpha$, a e b não nulos, de mesmo sinal. Logo $\alpha(w) = \frac{1}{b}\gamma(w) = \frac{a}{b}\gamma(u) = 0$ e pela análise anterior, novamente $\gamma(v) \geq 0$.

Suponha por absurdo que $\gamma(v) < 0$.

Logo, pelo que foi desenvolvido acima, $\alpha(w) > 0$ e $\gamma(u) \neq 0$ e do fato que $\alpha(w)\gamma(u) \geq 0$, temos $\gamma(u) > 0$.

Se $\beta(w) = 0$, então $\langle Y, Z\rangle = 0$ e por (4) $\gamma = b\beta$, b não nulo e $\gamma(v) = b\beta(v) = 0$ o que contradiz a nossa hipótese de ser $\gamma(v) < 0$. Assim , do fato que $\beta(w)\gamma(v) \geq 0$ e $\gamma(v) < 0$ temos $\beta(w) < 0$.

De $\alpha(v)\beta(u) \geq 0$ temos que $\alpha(v)$ e $\beta(u)$ são ambos positivos, ambos negativos ou pela condição (4) são ambos nulos.

Como $\alpha(v) \geq 0$, não podem ser ambos negativos. Ambos positivos também não podem ser pois neste caso teríamos $T(X,Y,Z) = \alpha(v)\beta(w)\gamma(u) + \alpha(w)\gamma(v)\beta(u) < 0$ o que contradiz a condição (3) da hipótese.

Resta portanto analisar o caso quando ambos são nulos. Se são ambos nulos, $\alpha(v)\beta(u) = 0$ e pela condição (4) $v = au$ e $\beta = b\alpha$, a, b

não nulos. Pela escolha da representação de Y , $v \in W$ e $\alpha(v) = 0$ implica que $v = au$ com $a > 0$ e $\gamma(v) = a\gamma(u) > 0$ o que é uma contradição.

Assim temos $\gamma(v) \geq 0$ e $P \subset Q(W)$.

W é pontual e gerador. De fato, se W não é gerador tomamos $X = v \otimes \alpha \in \varphi$ tal que $\alpha(W) = 0$. Como $P \subset Q(W)$ e como P é auto-dual temos $X \in P$ o que é uma contradição com a condição (2) . Da mesma forma se W não é pontual então W^* não é gerador e portanto existe $X = v \otimes \alpha \in \varphi$ com $W^*(v) = 0$.

Mostremos agora que $Q(W) \subset P$.

Seja $X \in Q(W)$. Então temos, pela proposição 3.5, que para todo $Y \in Q(W)$, $\langle X, Y \rangle \geq 0$. Mas, $P \subset Q(W)$ e portanto $\forall Y \in P$, $\langle X, Y \rangle \geq 0$ e como P é auto-dual temos $X \in P$. Logo $Q(W) \subset P$. □

Damos agora um exemplo que mostra que somente as condições 1,2 e 3 da proposição anterior não são suficientes para garantir a existência de um cone W tal que $P = Q(W)$.

Exemplo: Seja em $\mathbb{R}^4$ a base canônica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e os funcionais lineares $\alpha_1 = (0, 1, 0, 0)$; $\alpha_2 = (1, 0, 0, 0)$; $\alpha_3 = (1, 1, 0, -1)$ e $\alpha_4 = (1, 1, -1, 0)$. Seja P o conjunto formado por $X_1 = e_1 \otimes \alpha_1$; $X_2 = e_2 \otimes \alpha_2$; $X_3 = e_3 \otimes \alpha_3$ e $X_4 = e_4 \otimes \alpha_4$. A forma de Cartan-Killing em dois elementos de P é positiva. Além disso $T(X_1, X_2, X_3) \geq 0$; $T(X_1, X_2, X_4) \geq 0$; $T(X_1, X_3, X_4) \geq 0$ e $T(X_2, X_3, X_4) \geq 0$. No entanto α_3 separa e_1 de e_4 e α_4 separa e_1 de e_3. Portanto esse conjunto não pode provir de um cone.

Novamente esse exemplo não está completo porque o conjunto não contém todos os elementos que são positivos com P, mas não é difícil completar o conjunto para incluir também essa condição, garantindo que existe um conjunto que satisfaz as três primeiras condições da proposição e não provém de um cone. □

Agora podemos enunciar o seguinte teorema de caracterização de $Q(W)$.

Teorema 3.11 *Seja $P \subset \varphi$ tal que*

1. *P é auto-dual, isto é, $\langle X, Y\rangle \geq 0$, $\forall X, Y \in P$ e se $X \in \varphi$ é tal que $\langle X, Y\rangle \geq 0$, $\forall Y \in P$, então $X \in P$.*

2. *Não existe $X \in \varphi$ tal que $\langle X, Y\rangle = 0$, $\forall Y \in P$.*

3. *$\forall X, Y, Z \in P$, $T(X, Y, Z) \geq 0$.*

4. *Existe $u \otimes \alpha \in P$ tal que $\dim\{v : v \otimes \beta \in P \text{ e } \alpha(v) = 0\} = 1$.*

5. *Seja $u \otimes \alpha$ como na condição 4. Então, $u \otimes \beta \in P$ para todo $v \otimes \beta \in P$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

   (a) $\beta(u) = 0$,

   (b) $\alpha(v) \geq 0$ e

   (c) se $\alpha(v) = 0$ então $v = au$ com $a > 0$.

Então, $P = Q(W)$ para algum cone pontual e gerador W.

Demonstração: Fixemos $X = u \otimes \alpha \in P$ satisfazendo a condição (4) da hipótese.

Para todo $v \otimes \beta \in P$, sempre podemos escolher uma representação tal que $\alpha(v) \geq 0$ e no caso de $\alpha(v) = 0$, uma tal que $v = au$, $a > 0$.

Assim, vamos escolher o nosso candidato a W. Seja W o cone gerado pelos conjuntos

$$\{v : v \otimes \beta \in P \text{ e } \alpha(v) > 0\}$$

e

$$\{v : v \otimes \beta \in P,\ \alpha(v) = 0 \text{ e } v = au, a > 0\}.$$

Temos que W é pontual e gerador. De fato:

- W é pontual, pois não contém subespaços ($\alpha(v) > 0$, exceto na semi-reta gerada por u).

- W é gerador , pois caso contrário, tomamos $Z = v \otimes \gamma \in \varphi$ tal que $\gamma(W) = 0$ e assim $\langle Z, Y\rangle = 0$, $\forall Y \in P$ o que contradiz a condição (2) da hipótese.

Para mostrar que $P = Q(W)$, mostremos em primeiro lugar que $P \subset Q(W)$.

Seja $Z = w \otimes \gamma \in P$, com representação escolhida de forma que $\alpha(w) > 0$ ou se $\alpha(w) = 0$ então $w = au$, $a > 0$. A definição de W garante que $w \in W$.

Temos que mostrar que, para todo $Y = v \otimes \beta \in P$ com $\alpha(v) > 0$ ou $\alpha(v) = 0$ e $v = au$, $a > 0$, vale a desigualdade $\gamma(v) \geq 0$, o que implica que $\gamma \in W^*$ e, portanto, $Z \in Q(W)$.

Suponha por absurdo, que $\gamma(v) < 0$.

As hipóteses do teorema implicam as seguintes desigualdades:

1. $\langle X, Y\rangle = \alpha(v)\beta(u) \geq 0$,

2. $\langle X, Z\rangle = \alpha(w)\gamma(u) \geq 0$,

3. $\langle Y, Z\rangle = \beta(w)\gamma(v) \geq 0$. e, portanto, $\beta(w) \leq 0$ e que

4. $T(X, Y, Z) = \alpha(v)\beta(w)\gamma(u) + \alpha(w)\gamma(v)\beta(u) \geq 0$.

Usando essas desigualdades, juntamente com a hipótese de absurdo $\gamma(v) < 0$, provaremos sucessivamente as seguintes relações (igualdades ou desigualdades):

1. $\beta(w) \leq 0$ como segue da terceira das desigualdades acima e da hipótese de absurdo.

2. $\alpha(v) > 0$. Sabemos que $\alpha(v) \geq 0$. Suponha que $\alpha(v) = 0$. Então $v = au$, $a > 0$, assim $\gamma(u) = \frac{1}{a}\gamma(v) < 0$. Disto e das desigualdades acima segue que $\alpha(w)\gamma(u) \geq 0$, o que implica que $\alpha(w) \leq 0$. Mas por escolha $\alpha(w) \geq 0$ e assim temos $\alpha(w) = 0$ o que acarreta, pela condição 4 das hipóteses do teorema que $w = bu$, $b > 0$, e $\gamma(u) = \frac{1}{b}\gamma(w) = 0$ o que é uma contradição. Logo $\alpha(v) > 0$.

3. $\beta(u) = 0$. Como $\alpha(v)\beta(u) \geq 0$, temos $\beta(u) \geq 0$.

   (a) Se $\beta(u) > 0$ e $\alpha(w) = 0$ então por (4) $w = au$, $a > 0$ e assim $\beta(w) > 0$. Mas, $\beta(w) \leq 0$ o que é uma contradição.

(b) Se $\beta(u) > 0$ e $\alpha(w) > 0$ então de

$$T(X,Y,Z) = \alpha(v)\beta(w)\gamma(u) + \alpha(w)\gamma(v)\beta(u) \geq 0$$

temos $\alpha(v)\beta(w)\gamma(u) > 0$ implica $\beta(w)\gamma(u) > 0$. Logo $\beta(w)$ e $\gamma(u)$ são não nulos e de mesmo sinal. Como $\beta(w) \leq 0$ temos que $\beta(w)$ e $\gamma(u)$ são negativos e isto está em contradição com o fato que $\alpha(w)\gamma(u) \geq 0$. Logo $\beta(u) = 0$.

4. $\gamma(u) > 0$. Se $\gamma(u) = 0$ temos, por (5) (já que $\beta(u) = 0$), que $u \otimes \gamma \in P$ e $u \otimes \beta \in P$. Por (2), existe $S = x \otimes \delta \in P$ com $\beta(x) > 0$ e $\delta(u) > 0$ e por (3)

$$T(S,Y,u\otimes\gamma) \geq 0 \Rightarrow \delta(v)\beta(u)\gamma(x)+\delta(u)\gamma(v)\beta(x) \geq 0 \Rightarrow \gamma(v) \geq 0.$$

Contradição. Assim $\gamma(u) \neq 0$. Suponha então que $\gamma(u) < 0$. De $\alpha(w) \geq 0$ e $\alpha(w)\gamma(u) \geq 0$, temos $\alpha(w) = 0$ e da hipótese que $w = au$, $a > 0$, e, portanto, que $\gamma(u) = 0$. Contradição. Logo $\gamma(u) > 0$.

5. $\beta(w) = 0$. Como $\beta(u) = 0$ temos então por (3) que

$$T(X,Y,Z) = \alpha(v)\beta(w)\gamma(u) + \alpha(w)\gamma(v)\beta(u) = \alpha(v)\beta(w)\gamma(u) \geq 0$$

implica que $\beta(w) \geq 0$. Mas, $\beta(w) \leq 0$ e assim $\beta(w) = 0$.

Por fim podemos concluir a demonstração. Como $\beta(u) = 0$ temos por (5) que $u \otimes \beta \in P$. Mas, por (2) que existe $S = x \otimes \delta \in P$ tal que $\beta(x) > 0$ e $\delta(u) > 0$. Assim de (3)

$$T(S,Z,u \otimes \beta) = \delta(w)\gamma(u)\beta(x) + \delta(u)\beta(w)\gamma(x) \geq 0$$

o que implica que $\delta(w) \geq 0$. Além do mais,

$$T(S,Y,Z) = \delta(v)\beta(w)\gamma(x) + \delta(w)\gamma(v)\beta(x) \geq 0$$

o que implica que $\delta(w) \leq 0$. Portanto, $\delta(w) = 0$.

Observamos que, para todo $S = x \otimes \delta \in P$ tal que $\beta(x) \neq 0$ temos obrigatoriamente que $\delta(w) = 0$.

Concluímos então que $w \otimes \beta \in \varphi$ e para todo $x \otimes \delta \in P$, vale

$$\langle w \otimes \beta, x \otimes \delta \rangle = \beta(x)\delta(w) = 0,$$

o que está em contradição com a hipótese (2).

Assim $\gamma(v) \geq 0$ e $P \subset Q(W)$.

Mostremos agora que $Q(W) \subset P$.

Já mostramos que W é pontual e gerador.

Seja $X \in Q(W)$. Então temos, pela proposição 3.5 que para todo $Y \in Q(W)$, $\langle X, Y \rangle \geq 0$. Mas $P \subset Q(W)$ e, portanto, para todo $Y \in P$, $\langle X, Y \rangle \geq 0$. Como P é auto-dual, temos $X \in P$. Logo $Q(W) \subset P$. Concluindo a demonstração. □

3.4 Cones auto-duais

Considere um produto interno $(\cdot, \cdot)$ em V. O produto interno identifica V com V^* e portanto W^* fica sendo um cone em V. Um cone é auto-dual se $W^* = W$. Denote a transposta, em relação a $(\cdot, \cdot)$, de uma transformação linear X por X^t. Da mesma forma para um conjunto A de transformações lineares, $A^t = \{X^t : X \in A\}$.

Proposição 3.12 *Se W é auto-dual, então $S_W^t = S_W$. Consequentemente $L(S_W)^t = L(S_W)$.*

Demonstração: Sejam $g \in S_W = S_{W^*}$, $v \in W$ e $w \in W^*$. Então $(gv, w) \geq 0$,isto é, $(v, g^t w) \geq 0$. Como v e w são arbitrários, isto mostra que $g^t \in S_{W^*} = S_W$. Portanto $S_W^t \subset S_W$. Da mesma forma se mostra a inclusão contrária. □

Uma vez tendo o produto interno em $\mathbb{R}^n$, a álgebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ se decompõe em $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ (decomposição de Cartan) onde $\mathfrak{k}$ é a subálgebra das matrizes anti-simétricas (em relação a $(\cdot, \cdot)$) e $\mathfrak{s}$ é o subespaço das matrizes simétricas. Denote por $\mathrm{pr}_{\mathfrak{s}}$ a projeção sobre $\mathfrak{s}$ em relação a esta decomposição.

Proposição 3.13 *No caso de um cone auto-dual vale a igualdade*

$$\mathrm{pr}_{\mathfrak{s}}(L(S_W)) = L(S_W) \cap \mathfrak{s}.$$

Demonstração: A igualdade é consequência de $L(S_{W^*})^t = L(S_W)$. Tome $X \in L(S_{W^*})$ e escreva $X = A + S$ com $A \in \mathfrak{t}$ e $S \in \mathfrak{s}$. Então $X^t = -A + S \in L(S_{W^*})$. Portanto $S = \frac{1}{2}(X + X^t) \in L(S_{W^*})$. Isso mostra que $\mathrm{pr}_{\mathfrak{s}}(L(S_{W^*})) \subset L(S_{W^*}) \cap \mathfrak{s}$. A inclusão contrária é imediata.
□

Proposição 3.14 *Seja W um cone pontual e gerador. Se $S_W = S_{W^*}$, então $W = W^*$.*

Demonstração: Suponha que $W \neq W^*$. Neste caso teremos também que $W \neq -W^*$. De fato: se existir $w \in W$ tal que $-w \in W^*$, então $(w, -w) = -(w, w) \geq 0$ e assim $(w, w) = 0$ e $w = 0$.

Mostremos agora que se $W_1 \neq \pm W_2$, então $S_{W_1} \neq S_{W_2}$. Se $W_1 \neq \pm W_2$, então podemos escolher W_1 e W_2 de tal maneira que, existe $f_1 \in W_2$ com $f_1 \notin W_1$ e $-f_1 \notin W_1$. Seja V um subespaço de codimensão 1 com $V \cap W = \{0\}$ e $\{f_1, \ldots, f_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$ com $\{f_2, \ldots, f_n\} \subset V$ e seja $H = \mathrm{diag}\{n-1, -1, \ldots, -1\}$ nessa base. Então, para todo $t \geq 0$, $e^{tH} \in S_{W_2}$(veja 2.1). Logo $(e^{tH})^m \in S_{W_2}$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Seja $x \in W_1$. Temos que $\frac{(e^{tH})^m}{(n-1)^m}x \longrightarrow \pm f_1$ e assim, para t suficientemente grande, $e^{tH}.x \notin W_1$. Logo $(e^{tH})^m \notin S_{W_1}$ implica $S_{W_1} \neq S_{W_2}$. □

Capítulo 4

Cones de matrizes

Já estudamos nos capítulos anteriores o cone infinitesimal $L(S(W))$ associado ao semigrupo de compressão de um cone W de $\mathbb{R}^n$.

Neste capítulo introduzimos vários outros cones no espaço das matrizes, também associados a um cone W de $\mathbb{R}^n$, além do cone $L(S(W))$. Nosso objetivo é comparar os diferentes cones e estudar suas propriedades procurando novos objetos para entender o semigrupo $S(W)$.

Como antes seja

$$S(W) = \{g \in \mathrm{Gl}^+(n, \mathbb{R}) : gW \subset W\}$$

Lembramos que $S(W) = \mathbb{R}_+ \cdot S_W$, onde

$$S_W = S(W) \cap \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}) : gW \subset W\}$$

pois as matrizes $\lambda \cdot 1, \lambda > 0$ estão em $S(W)$ e $g \in S(W)$ se, e só se, $(\det g)^{-\frac{1}{n}} g \in S(W)$.

4.1 Cones

Nesta seção reunimos alguns cones de matrizes já definidos em seções anteriores, e introduzimos a definição de novos cones, apresentando algumas de suas propriedades.

Definição 4.1 *Um conjunto de transformações lineares K é dito um cone-semigrupo ou cone semi-álgebra se*

1. *K é fechado na topologia usual das transformações lineares.*

2. *K é fechado por combinações cônicas: se $A_1, \ldots, A_r \in K$ e $a_1, \ldots, a_r \geq 0$ então*

$$a_1 A_1 + \cdots + a_r A_r \in K.$$

3. *K é fechado pelo produto associativo de matrizes: se $A, B \in K$ então $AB \in K$.*

As duas primeiras propriedades dizem apenas que K é um cone fechado no espaço das transformações lineares. A terceira propriedade diz, por sua vez, que K é um semigrupo multiplicativo o que explica a escolha dos nomes.

Seja agora $S \subset \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ um semigrupo e denotemos por $K(S)$ o fecho do cone convexo gerado por S no espaço de todas as matrizes:

$$K(S) = \mathrm{fe}(\mathrm{co}(S)),$$

onde o fecho é tomado no espaço de todas as matrizes e $\mathrm{co}(S)$ significa o conjunto de todas as combinações cônicas de S:

$$\mathrm{co}(S) = \{a_1 g_1 + \cdots + a_l g_l : a_i \geq 0, g_i \in S, l \geq 0\}.$$

Queremos mostrar que $K(S)$ é um cone-semigrupo. Para isto. observando que obviamente $K(S)$ é fechado, mostremos em primeiro lugar que $K(S)$ é fechado por combinações cônicas.

Proposição 4.2 *$K(S)$ é fechado por combinações cônicas.*

Demonstração: Seja $a_1 g_1 + \cdots + a_l g_l : a_i \geq 0, g_i \in K(S)$. $l \geq 0$. Existe $g_i^j \to g_i$, com $g_i^j \in \mathrm{co}(S)$. Assim $a_1 g_1^j + \cdots + a_l g_l^j \in \mathrm{co}(S)$ para cada j e do fato que $a_1 g_1^j + \cdots + a_l g_l^j \to a_1 g_1 + \cdots + a_l g_l$ concluímos a demonstração. □

Mostremos agora que $K(S)$ é fechado por produtos associativos, que é o que falta para mostrar que $K(S)$ é cone-semigrupo.

Proposição 4.3 *$K(S)$ é fechado por produtos (associativos de matrizes).*

Demonstração: Se $A, B \in \text{co}(S)$, então $AB \in \text{co}(S)$, como segue de imediato de que S é semigrupo e da definição de $\text{co}(S)$. Por outro lado, se $A, B \in K(S)$ então existem sequências $A_n \to A$, $B_n \to B$, com $A_n, B_n \in \text{co}(S)$. Então, $A_nB_n \in \text{co}(S)$ e $A_nB_n \to AB$, mostrando que $AB \in K(S)$.

Fechamos agora esta questão com o seguinte corolário. □

Corolário 4.4 *$K(S)$ é um cone-semigrupo, isto é, é fechado por combinações cônicas e pelo produto (associativo de matrizes). Além do mais, $K(S)$ é o menor cone semigrupo que contém S.*

Demonstração: Foi mostrado que $K(S)$ é um cone-semigrupo. É claro que $S \subset K(S)$ e é claro também que qualquer cone-semigrupo que contenha S deve conter $K(S)$. □

Importante observar que se dado o semigrupo $S \subset \text{Sl}(n, \mathbb{R})$ com $\text{int} S \neq \emptyset$, temos que $K(S)$ é um cone gerador, isto é, tem interior não vazio no espaço das matrizes. Isto vem de que $S \subset K(S)$ o que acarreta que $\mathbb{R}^+ \cdot S \subset K(S)$ e assim, como $\text{int}_{Gl^+}(\mathbb{R}^+ \cdot S) \neq \emptyset$ e Gl^+ é aberto em $\mathbb{R}^{n^2}$ então $\text{int} K(S) \neq \emptyset$.

Observação: Nada garante, em princípio, que $K(S)$ seja um cone-semigrupo próprio (e não uma subálgebra) mesmo que S seja um semigrupo próprio do grupo de matrizes.

Esta é uma questão muito importante na nossa teoria. Estamos interessados em vários tipos de cones de matrizes associados de uma maneira ou de outra a cones no $\mathbb{R}^n$. O exemplo a seguir nos dá uma indicação do possível comportamento de um dos tipos de cones que estudaremos. □

Exemplo: Consideramos $S = \text{Gl}_+(n, \mathbb{R})$ o conjunto das matrizes em $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$ com entradas não negativas. Nesse caso $K(S)$ é o conjunto de todas as matrizes com entradas ≥ 0 (inversíveis ou não). De forma mais geral, $K(S)$ pode ser descrito de maneira semelhante a $K(\text{Gl}_+)$. □

No caso em que $S = S_W$ existem outros cones associados a S. Dado $S(W)$, o semigrupo de compressão de W, consideremos o cone-semigrupo $K(S_W)$ gerado por ele.

Agora, considere o cone dual $W^* \subset (\mathbb{R}^n)^*$. Os elementos da forma $v \otimes \alpha$, $v \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (\mathbb{R}^n)^*$ podem ser vistos como transformações lineares $((v \otimes \alpha)(u) = \alpha(u)v)$. Em particular,

$$W \otimes W^* = \{v \otimes \alpha : v \in W, \alpha \in W^*\}$$

é um conjunto de transformações lineares. Considere também o conjunto $Q(W)$ que é definido por

$$Q(W) = \{v \otimes \alpha : v \in W, \alpha \in W^*, \alpha(v) = 0\}.$$

Seja $X = v \otimes \alpha \in Q(W)$. Se $u \in \mathbb{R}^n$ então $Xu = \alpha(u)v$. Isso implica que para $u \in W$, $Xu \in W$. Observe a diferença entre $W \otimes W^*$ e $Q(W)$. Nesse último os elementos $v \otimes \alpha$ devem satisfazer $\alpha(v) = 0$, ao contrário de $W \otimes W^*$. É claro que $Q(W) \subset W \otimes W^*$, e também que, em geral, essa inclusão é própria. Associados a esses conjuntos consideremos

1. o cone $\mathrm{co}(W \otimes W^*)$ o conjunto das combinações cônicas de $W \otimes W^*$ e

2. $C(W)$ o cone-semigrupo gerado por $Q(W)$.

Agora, partindo do semigrupo $S(W)$, seja $L(S(W))$ o seu gerador infinitesimal

$$L(S(W)) = \{A : \exp tA \in S(W), t \geq 0\}.$$

Denotemos por S_{inf} o semigrupo de $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ gerado por $\exp(L(S(W)))$.

Introduzimos ainda mais um cone-semigrupo que chamaremos

$$K_{\mathrm{inf}} = K(S_{\mathrm{inf}})$$

o cone-semigrupo gerado por S_{inf}.

4.2 Propriedades e Relações

Uma vez definidos estes vários cones acima, vamos agora estudar algumas de suas propriedades e relações de inclusão entre eles.

Mostraremos através do lema e proposição a seguir que $K(S_W)$ é o fecho topológico de $S(W)$ no espaço das matrizes.

Lema 4.5 *O fecho (topológico) de* $S(W)$ *no espaço das matrizes é*

$$\{A \in M_n(\mathbb{R}) : AW \subset W\}$$

onde $M_n(\mathbb{R})$ *é o conjunto das matrizes de ordem* n.

Demonstração: Denote por K o conjunto $\{A \in M_n(\mathbb{R}) : AW \subset W\}$ do enunciado. É claro que K é fechado. Por isso basta mostrar que se $A \in K$ então A pode ser aproximado por elementos de $S(W)$. Se A é inversível não há nada a demonstrar. Se A não é inversível então existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \varepsilon)$ $\det(A + \lambda \cdot 1) \neq 0$, pois o conjunto dos auto-valores de A é discreto. Isso garante que $A + \lambda \cdot 1$ é inversível. Mas se $AW \subset W$ e $\lambda \geq 0$ então $(A + \lambda \cdot 1)W$ também está contido em W. Daí que $A \in K$ pode ser aproximado por elementos de $S(W)$, mostrando que K é o fecho de $S(W)$. □

Proposição 4.6 $K(S(W))$ *é o conjunto das transformações lineares de* $M_n(\mathbb{R})$ *que deixam* W *invariante:*

$$K(S(W)) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AW \subset W\}.$$

Demonstração: Denote por K o conjunto $\{A \in M_n(\mathbb{R}) : AW \subset W\}$. Será mostrado que K é o menor cone-semigrupo que contém $S(W)$, o que garante a igualdade do enunciado.

Em primeiro lugar, K é um cone-semigrupo. De fato, se $A, B \in K$ então $A(BW) \subset AW \subset W$, portanto K é fechado por produto associativo. Além do mais, se a e b são reais positivos então $aA + bB \in K$. Para ver isso tome $u \in W$. Então, $(aA + bB)u = a(Au) + b(Bu)$. Como $Au, Bu \in W$ e W é um cone, segue que $(aA + bB)u \in W$ e daí que $aA + bB \in K$. Em outras palavras, K é fechado por combinações cônicas. Como K é evidentemente fechado isso completa a demonstração de que K é um cone-semigrupo.

Pelo lema anterior K é o fecho de $S(W)$. Portanto todo cone-semigrupo deve conter K, mostrando que $K(S(W)) = K$. □

Na proposição a seguir relacionamos $K(S(W))$ com o conjunto de transformações lineares $W \otimes W^*$.

Proposição 4.7 *$K(S(W))$ é o cone dual de $W \otimes W^*$ em relação à forma traço, isto é,*

$$K(S(W)) = \{A : \operatorname{tr}(A(v \otimes \alpha)) \geq 0 \text{ para todo } v \otimes \alpha \in W \otimes W^*\}. \tag{4.1}$$

Demonstração: Observe que $\operatorname{tr}(A(v \otimes \alpha)) = \alpha(Av)$. Portanto, A está no segundo membro de (4.1) se e só se $\alpha(Av) \geq 0$ para todo $v \in W$ e todo $\alpha \in W^*$. Mas essa é exatamente a condição para que $AW \subset W$ (isto é, Av pertence ao dual de W^* $(= W)$ para todo $v \in W$). Como foi demonstrado que

$$K(S(W)) = \{A : AW \subset W\}$$

vale a igualdade do enunciado. □

Agora, só para registrar enunciamos o seguinte corolário, que é obtido diretamente das proposições anteriores.

Corolário 4.8 *O fecho topológico de $S(W)$ é igual ao dual de $W \otimes W^*$ em relação à forma traço.*

Definição 4.9 *Denotemos por $C(W)$ o cone-semigrupo gerado pelo conjunto $Q(W)$.*

Lembrando a definição de K_{inf}, feita acima, uma pergunta que surge naturalmente é sobre a relação entre $C(W)$ e K_{inf}. A proposição a seguir responde a esta pergunta.

Proposição 4.10 $C(W) \subset K_{\text{inf}}$.

Demonstração: A inclusão $C(W) \subset K_{\text{inf}}$ é demonstrada facilmente: tome $X \in Q(W)$. Então, $X^2 = 0$ pois $X = v \otimes \alpha$ e $\alpha(v) = 0$. De $X^2 = 0$ segue que $\exp(tX) = 1 + tX$. Como X deixa W invariante, essa expressão garante que $\exp(tX) \in S(W)$ para todo $t \geq 0$, isto é, $X \in L(S(W))$ e $\exp(tX) = 1 + tX \in S_{\text{inf}}$.Seja $t > 0$. Então, por definição de K_{inf}, $\frac{1}{t}\exp(tX) = \frac{1}{t} + X$ está em K_{inf}. Tomando limite quando $t \to +\infty$, $X = \lim\left(\frac{1}{t} + X\right) \in K_{\text{inf}}$.Portanto, $Q(W) \subset K_{\text{inf}}$. Como K_{inf} é um cone-semigrupo e $C(W)$ é, por definição, o menor cone-semigrupo contendo $Q(W)$, segue que $C(W) \subset K_{\text{inf}}$. □

A proposição a seguir junta algumas informações que tínhamos anteriormente com a proposição acima estabelecendo mais uma relação entre $K(S(W))$ e $L(S(W))$ numa cadeia de inclusões bastante elucidativa.

Proposição 4.11 $Q(W) \subset C(W) \subset K_{\text{inf}} \subset K(S(W)) \subset L(S(W))$.

Demonstração: A primeira inclusão é só a definição, a segunda é a proposição anterior, a terceira segue também por definição, já a última inclusão pode ser vista de duas maneiras diferentes: em primeiro lugar, foi mostrado que $K(S(W)) = \{A : AW \subset W\}$. É claro que se $AW \subset W$ então $A^2W \subset W$, etc., as potências de A deixam W invariante. Isso implica que $\exp(tA)W \subset W$ se $t \geq 0$ pois $\exp(tA)$ é uma soma com coeficientes positivos de potências de A (e W é fechado). Outra demonstração é: denote por $(\cdot)^{*\text{tr}}$ o dual no espaço das matrizes em relação à forma traço. Sabe-se que $L(S(W)) = Q(W)^{*\text{tr}}$. Por outro lado, foi mostrado acima que $K(S(W)) = (W \otimes W^*)^{*\text{tr}}$. Mas, $Q(W) \subset W \otimes W^*$. Portanto,

$$L(S(W)) = Q(W)^{*\text{tr}} \supset (W \otimes W^*)^{*\text{tr}} = K(S(W)).$$

□

Vamos agora estudar algumas propriedades e algumas relações entre $K(S(W))$ e $\text{co}(W \otimes W^*)$.

Por definição $K(S(W))$ é um cone-semigrupo, em particular é um cone no espaço das matrizes. Esse cone satisfaz as propriedades:

Lema 4.12 *$W \otimes W^*$ é um subconjunto de $K(S(W))$.*

Demonstração: Tome $v \otimes \alpha \in W \otimes W^*$ e $u \in W$. Deve-se mostrar que $\alpha(u)v = (v \otimes \alpha)u$ pertence a W. Para isso tome $\beta \in W^*$. Então, $\beta(\alpha(u)v) = \alpha(u)\beta(v) \geq 0$, pois os funcionais estão em W^* e os vetores em W. Isso mostra que $\alpha(u)v \in W$, concluindo que $v \otimes \alpha \in K(S(W))$ □

Corolário 4.13 co$(W \otimes W^*)$ *é um subconjunto de $K(S(W))$.*

Lema 4.14 co$(W \otimes W^*)$ *é gerador.*

Demonstração: Isto vem do fato que $W \otimes W^*$ contém uma base de $\mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^n)^*$ já que tanto W quanto W^* são cones geradores. □

Proposição 4.15 *$K(S(W))$ é pontual e gerador.*

Demonstração: É pontual: suponha que $\pm A \in K(S(W))$. Se $A \neq 0$ então existe $v \in W$ tal que $Av \neq 0$ pois W é gerador e, portanto, não está contido no $\ker A$ (que é um hiperplano). Para esse v, $Av \in W$. pela caracterização de $K(S(W))$. Como $-A \in K(S(W))$, segue que $-Av \in W$. Daí que $\pm Av \in W$. Mas, W é pontual. Então $Av = 0$, o que é absurdo. Portanto, $A = 0$, mostrando que $K(S(W))$ é pontual. $K(S(W))$ é gerador pois contém co$(W \otimes W^*)$. □

Corolário 4.16 co$(W \otimes W^*)$ *é pontual e gerador.*

Demonstração: co$(W \otimes W^*)$ é o dual de $K(S(W))$ e, portanto, é pontual e gerador. □

Proposição 4.17 co$(W \otimes W^*)$ *é um cone-semigrupo.*

Demonstração: Basta verificar que é fechado por produtos associativos. Em primeiro lugar, tome $u \otimes \alpha, v \otimes \beta \in W \otimes W^*$. O seu produto é

$$(u \otimes \alpha)(v \otimes \beta) = \alpha(v)\, u \otimes \beta,$$

que está em $\mathrm{co}(W \otimes W^*)$ pois $u \in W$, $\beta \in W^*$ e $\alpha(v) \geq 0$. Em geral, um elemento de $\mathrm{co}(W \otimes W^*)$ é uma combinação linear com coeficientes positivos de $W \otimes W^*$. Pelo produto acima, o produto de duas dessas combinações também é uma combinação cônica de $W \otimes W^*$. □

4.3 Cones Poliedrais

Em geral $L(S(W))$ pode ser grande comparado com $K(S(W))$ (veja o exemplo abaixo). Para cones poliedrais existe, no entanto, uma relação simples entre esses dois cones de matrizes.

Proposição 4.18 *Suponha que W é um cone poliedral pontual e gerador. Então,*

$$L(S(W)) = K(S(W)) + \mathbb{R} \cdot 1.$$

Demonstração: Deve-se mostrar que dado $A \in L(S(W))$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que a matriz

$$B(\lambda) = A + \lambda \cdot 1$$

está em $K(S(W))$.

Como W é poliedral, pontual e gerador, o mesmo ocorre com W^*. Sejam $v_1, \ldots, v_k$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ geradores de W e W^*, respectivamente. A matriz $B(\lambda)$ pertence a $K(S(W))$ se, e somente se, $B(\lambda) v_i \in W$, $i = 1, \ldots, k$. Mas isso ocorre se, e só se, $\alpha_j(B(\lambda) v_i) \geq 0$ para $i = 1, \ldots, k$ e $j = 1, \ldots, p$. A escolha de λ é feita da seguinte forma: como $A \in L(S(W))$, $\alpha_j(Av_i) \geq 0$ se $\alpha_j(v_i) \neq 0$. Defina

$$m = \min\{\alpha_j(v_i) : \alpha_j(v_i) \neq 0\}.$$

Então, $m > 0$ pois se $\alpha_j(v_i) \neq 0$ então $\alpha_j(v_i) > 0$ (é aqui que entra a hipótese do cone ser poliedral; para cones não poliedrais esse mínimo pode se zero). Defina

$$l = \min\{\alpha_j(Av_i) : i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, p\}.$$

Tome λ tal que $\lambda > -\frac{l}{m}$. Então, se $\alpha_j(v_i) = 0$, $\alpha_j(B(\lambda)v_i) = \alpha_j(Av_i) \geq 0$. Por outro lado, se $\alpha_j(v_i) \neq 0$. então,

$$\alpha_j(B(\lambda)v_i) = \alpha_j(Av_i) + \lambda\alpha_j(v_i) \geq l + \lambda m \geq 0,$$

concluindo a demonstração. □

Observação: Como $\mathbb{R}_+ \cdot 1 \subset K(S(W))$. qualquer que seja W, a proposição anterior pode ser melhorada um pouco escrevendo $L(S(W)) = K(S(W)) + \mathbb{R}_- \cdot 1$ □

Como mencionado acima para cones não poliedrais essa proposição não vale, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo: Em $\mathbb{R}^3$ considere o cone não poliedral $\{x^2 + y^2 - z^2 \leq 0, z \geq 0\}$. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

está em $L(S(W))$. No entanto, nenhuma matriz $B(\lambda) = A + \lambda \cdot 1$ está em $K(S(W))$, isto é, deixa invariante W. Para ver isso tome por exemplo $v = (0,1,1) \in W$. Então $B(\lambda)v = (-1, \lambda, \lambda)$, que não está em W pois $1 + \lambda^2 - \lambda^2 = 1 > 0$. □

Proposição 4.19 *Se W é poliedral, então $W \otimes W^*$ é poliedral.*

Demonstração: *Suponha que W seja cone poliedral. Então W^* também é poliedral. Sejam $v_1, \ldots, v_p$ o conjunto dos pontos extremais de W e $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ os pontos extremais de W^*. Tome $v \otimes \alpha \in W \otimes W^*$. Então v é combinação cônica dos pontos extremais de W e α é combinação cônica dos pontos extremais de W^*. Decompondo v, segue que $v \otimes \alpha$ é combinação dos elementos $v_i \otimes \alpha_j$, o que pela decomposição de α e v segue que $v \otimes \alpha$ é combinação cônica dos elementos $v_i \otimes \alpha_j$. Em outras palavras, a quantidade finita de elementos $v_i \otimes \alpha_j$ gera $W \otimes W^*$ por combinações cônicas.* □

Considere o cone-semigrupo $C(W)$ gerado por $Q(W)$. Isto significa que $C(W)$ é o menor conjunto de transformações lineares que contém $Q(W)$ e é fechado por combinações cônicas e por produtos associativos.

Segue que $C(W)$ é o conjunto de todas as transformações lineares do tipo

$$b_1 B_1 + \cdots + b_r B_r$$

com $b_i \geq 0$ e $B_i = X_1 \cdots X_p$, $X_j \in Q(W)$.

Como cada $X \in Q(W)$ deixa W invariante, segue por essa caracterização que se $Z \in C(W)$ então $ZW \subset W$. Em particular. o conjunto das matrizes inversíveis em $C(W)$ está contido em $S(W)^{\pm}$. onde

$$S^{\pm}(W) = \{g \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) : gW \subset W\}.$$

Em outras palavras,

Proposição 4.20 $C(W) \cap \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \subset S^{\pm}(W)$.

4.4 Cones invariantes e cones-semigrupos

O objetivo desta seção é estabelecer condições para que um cone-semigrupo gerador e próprio no espaço das matrizes deixe invariante um cone em $\mathbb{R}^n$. Um dos resultados que serão demonstrados é o teorema enunciado a seguir que relaciona cones no espaço das matrizes com cones em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 4.21 *Seja $K \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ um cone-semigrupo de interior não vazio e próprio. Então, K deixa invariante um cone pontual e gerador $W \subset \mathbb{R}^n$.*

A demonstração deste teorema requer diversos lemas. Começamos observando que como K é cone próprio, existe um semi-espaço em $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ que o contém. Um semi-espaço é um conjunto do tipo $\{\gamma(\cdot) \geq 0\}$ com $\gamma : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ um funcional linear. Como a forma traço é não degenerada, existe $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\gamma(Y) = \mathrm{tr}(XY)$ para todo Y. Agora tomemos $v \in \mathbb{R}^n$. Então Kv é um cone em $\mathbb{R}^n$ e este cone é invariante por K pois K é um cone-semigrupo. Além do mais, se K tem interior não vazio então Kv é gerador, pois a aplicação $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to Av \in \mathbb{R}^n$ é uma aplicação aberta.

Nosso problema se resume então em encontrar $v \in \mathbb{R}^n$ tal que Kv seja pontual.

Lema 4.22 *Seja K como no teorema. Se $W \subset \mathbb{R}^n$ for um cone próprio invariante por K, então W é pontual.*

Demonstração: De fato, seja $H(W)$ o maior subespaço contido em W. Se $g \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ deixa W invariante então $gH(W) \subset H(W)$, pois tomando $v \in H(W)$, temos $g(\pm v) \in W$, isto é, $\pm gv \in W$. Isto mostra que $KH(W) \subset H(W)$. Como $\dim H(W) < n$ e K tem interior não vazio, isto só pode acontecer se $H(W) = \{0\}$. □

Tudo se reduz, portanto, em encontrar um $v \in \mathbb{R}^n$ tal que Kv seja próprio.

Lema 4.23 *Tome $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{tr}(XY) \geq 0$ para todo $Y \in K$. Suponha que exista em K um elemento da forma $v \otimes \alpha$ tal que*

$$\mathrm{tr}(X(v \otimes \alpha)) > 0.$$

Então, Kv é um cone próprio invariante por K.

Demonstração: Lembremos que $\mathrm{tr}(X(v \otimes \alpha)) = \alpha(Xv)$. Se $g \in K$ então $g(v \otimes \alpha)$ também está em K. Mas, $g(v \otimes \alpha) = (gv) \otimes \alpha$. Novamente pela hipótese sobre X temos que

$$\alpha(Xgv) = \mathrm{tr}(X((gv) \otimes \alpha)) \geq 0.$$

Defina $\beta = \alpha \circ X$. Então, temos que $\beta(gv) = \alpha(Xgv) \geq 0$. Como $g \in K$ é arbitrário, segue que o cone $W = Kv$ satisfaz $\beta(Kv) \geq 0$ e em particular Kv é um cone próprio. □

Deste lema concluímos de imediato o seguinte

Corolário 4.24 *Se o conjunto*

$$\{v \otimes \alpha : v \in \mathbb{R}^n, \alpha \in (\mathbb{R}^n)^*\} \cap K \tag{4.2}$$

não está contido em nenhum subespaço então K deixa invariante um cone W em $\mathbb{R}^n$, que é pontual e gerador.

Resta portanto mostrar que o conjunto dos elementos do tipo $v \otimes \alpha$ definido em (4.2) é suficientemente grande para conter elementos em que $\mathrm{tr}(X(v \otimes \alpha))$ é estritamente positivo. Isto é o que faremos agora.

Começamos afirmando que $(\mathrm{int}K) \cap \mathrm{Gl}^+(n,\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Pois se $g \in K$, $\det g \neq 0$, então $g^2 \in K \cap \mathrm{Gl}^+(n,\mathbb{R})$, já que $\det(g^2) = (\det g)^2$. Como K é gerador, existe $g \in \mathrm{int}K$ tal que $\det g \neq 0$. Daí que existe $g \in \mathrm{int}K$ com $\det g > 0$, isto é, $g \in \mathrm{Gl}^+(n,\mathbb{R})$. Como consequência, segue que $(\mathrm{int}K) \cap \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R}) \neq \emptyset$. De fato, tome $g \in (\mathrm{int}K) \cap \mathrm{Gl}^+(n,\mathbb{R})$. Então $h = \left(\sqrt[n]{\det g}\right) g$ está em $\mathrm{int}K$ pois K é um cone. Como $\det h = 1$, concluímos que $\mathrm{int}K$ intercepta $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$.

Seja então $S_K = K \cap \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$, que é um semigrupo de interior não vazio em $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ (na topologia intrínseca desse grupo). Para ver isto basta observar que a topologia intrínseca de $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ é aquela herdada do espaço das matrizes. Portanto um aberto de $\mathrm{Gl}^+(n,\mathbb{R})$ interceptado com $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ é um aberto desse grupo.

Considere a ação de S_K no espaço projetivo $\mathbb{P}^{n-1}$ das retas de $\mathbb{R}^n$. Em $\mathbb{P}^{n-1}$ existe um único conjunto de controle invariante (veja proposição 1.17). Vamos denotá-lo por C.

Definição 4.25 *Um vetor $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, é dito ser S_K-compatível com o funcional linear $\alpha \in (\mathbb{R}^n)^*$ se $\alpha(v) > 0$ e se existe uma matriz diagonalizável $h \in \mathrm{int}S_K$, com auto-valores $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$ tal que v é auto-vetor associado a λ_1 e os demais auto-vetores estão contidos no hiperplano* $\ker \alpha$.

Observação: A matriz diagonalizável que aparece nesta definição pode ser tomada de tal forma que os auto-valores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são todos positivos. De fato, se $h \in \mathrm{int}S_K$ então h^2 também está no interior de S_K e os auto-valores de h^2 são todos positivos, se os de h são reais e diferentes de zero. $\square$

Antes de discutir efetivamente a existência de elementos compatíveis, enunciamos o seguinte lema que, apesar de não ser essencial no que segue, é útil para fixar as idéias.

Lema 4.26 *Se v é S_K-compatível com algum α então o subespaço $[v] \in \mathbb{P}^{n-1}$ gerado por v está no interior do conjunto controlável invariante $C \subset \mathbb{P}^{n-1}$.*

Demonstração: Segue dos fatos: $h \in \mathrm{int} S_K$ e $h^k x \to [v]$, $k \to +\infty$, para x num conjunto aberto denso de $\mathbb{P}^{n-1}$. Isto é, v é o atrator de h em $\mathbb{P}^{n-1}$ e é um teorema geral que os atratores de elementos no $\mathrm{int} S_K$ estão no interior do conjunto controlável invariante. □

Lema 4.27 *Seja C_0 o conjunto de transitividade de C. Tome $[v] \in C_0$. Então o conjunto*

$$\mathcal{C}(S_K, v) = \left\{\alpha \in (\mathbb{R}^n)^* \ : \alpha \text{ é } S_K\text{-compatível com } v\right\}$$

tem interior não vazio em $(\mathbb{R}^n)^*$.

Demonstração: Como $[v] \in C_0$, um teorema geral sobre ações de grupos semi-simples em variedades flag garante que existe $h \in \mathrm{int} S_K$ diagonalizável com auto-valores $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > 0$ tal que v é auto-vetor associado a λ_1 (veja [10], Exemplo 4.5). Denote por $\mathcal{B} = \{v, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de auto-vetores de h.

Agora, tome um funcional α de tal forma que $\alpha(v) > 0$ e $\ker \alpha$ é gerado por $v_2, \ldots, v_n$ (por exemplo, tome α tal que sua matriz na base $\mathcal{B}$ é $(1, 0, \ldots, 0)$). Por definição α é S_K-compatível com v. (Em particular, $\mathcal{C}(S_K, v) \neq \emptyset$).

Para mostrar o interior não vazio, seja N o grupo das matrizes triangulares superiores em relação à base $\mathcal{B}$. Isto é, N é o grupo das transformações lineares n tais que

$$[n]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere a ação de N em $(\mathbb{R}^n)^*$ definida por $n \cdot \alpha = \alpha \circ n^{-1}$.

Valem os seguintes resultados:

1. Seja $U \subset N$ um aberto. Então,

$$U \cdot \alpha = \{n \cdot \alpha \in (\mathbb{R}^n)^* : n \in U\}$$

gera o cone $\mathbb{R}^+ (U \cdot \alpha)$ com interior não vazio em $(\mathbb{R}^n)^*$. De fato, pode-se escolher α de tal forma que sua matriz na base $\mathcal{B}$ é

$(1, 0, \ldots, 0)$. Dessa forma, a órbita $N \cdot \alpha$ se projeta sobre um conjunto aberto denso do espaço projetivo de $(\mathbb{R}^n)^*$. Além do mais, a aplicação $n \in N \mapsto n \cdot \alpha \in N \cdot \alpha$ é uma aplicação aberta. Portanto, o conjunto $U \cdot \alpha$ é um aberto de $N \cdot \alpha$, que se projeta num conjunto aberto do espaço projetivo de $(\mathbb{R}^n)^*$. Isso implica que o cone gerado por $U \cdot \alpha$ é gerador em $(\mathbb{R}^n)^*$.

2. Existe um aberto $U \subset N$, vizinhança da identidade, tal que $nhn^{-1} \in \text{int}S_K$ para todo $n \in U$. De fato, a aplicação

$$\phi : n \in N \mapsto nhn^{-1} \in \text{Sl}(n, \mathbb{R})$$

é contínua. Portanto, $\phi^{-1}(\text{int}S_K)$ é um aberto de N, que contém a identidade, já que $h \in \text{int}S_K$.

3. Se $nhn^{-1} \in \text{int}S_K$, com $n \in N$, então $n \cdot \alpha$ é S_K-compatível com v. De fato,

$$\ker(n \cdot \alpha) = n \ker(\alpha).$$

Daí que $\ker(n \cdot \alpha)$ é o subespaço gerado pelos auto-valores "secundários" de nhn^{-1}, já que $\ker(\alpha)$ é o subespaço correspondente para h.

Por fim, para todo $n \in N$, $nv = v$. Daí que cada elemento de $U \cdot \alpha$ é S_K-compatível com v, com a transformação linear que realiza a compatibilidade dada por nhn^{-1}. Portanto, $U \cdot \alpha \subset C(S_K, v)$, mostrando que $C(S_K, v)$ tem interior não vazio em $(\mathbb{R}^n)^*$. □

Corolário 4.28 *O conjunto dos pares (v, α) que são S_K-compatíveis tem interior não vazio em $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$.*

Demonstração: Em vista do lema anterior basta variar $[v]$ no conjunto aberto C_0, para obter um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$. □

Lema 4.29 *Suponha que v e α são S_K-compatíveis. Então $v \odot \alpha \in K(S_K)$.*

Demonstração: Tome $h \in \text{int}S_K$ com auto-valores $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$ com base $\mathcal{B} = \{v, v_2, \ldots, v_n\}$ com $[\alpha] = (1, 0, \ldots, 0)$ nessa base (tudo como acima). A matriz das coordenadas de v em relação à base $\mathcal{B}$, é evidentemente

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, a matriz de $v \otimes \alpha$ é a matriz diagonal

$$\text{diag}\{1, 0, \ldots, 0\} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado,

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{\lambda_1^k} h^k = \text{diag}\{1, 0, \ldots, 0\}$$

e esse limite está em $K(S_K)$ pois $\frac{1}{\lambda_1^k} h^k \in K(S_K)$ e $K(S_K)$ é fechado por definição. □

Lema 4.30 *Se $X \neq 0$ então existe um par (v, α) que é S_K-compatível tal que* $\text{tr}\,(X(v \otimes \alpha)) \neq 0$.

Demonstração: Considere o conjunto dos elementos decomponíveis

$$D = \{v \otimes \alpha : v \in \mathbb{R}^n, \alpha \in (\mathbb{R}^n)^*\}.$$

Este conjunto não está contido em nenhum subespaço próprio do espaço das matrizes. Portanto, $\text{tr}\,(XA)$ não é identicamente nulo em D. Agora, o conjunto dos pares S-compatíveis tem interior não vazio em $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$. Portanto, o conjunto

$$\mathcal{C}(S_K) = \{v \otimes \alpha : v \text{ e } \alpha \text{ são } S_K\text{-compatíveis}\}$$

tem interior não vazio em D. Isso garante que $\text{tr}\,(XA)$ não se anula identicamente em $\mathcal{C}(S_K)$. □

Corolário 4.31 *Seja $S \subset \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ um semigrupo de interior não vazio. Suponha que $K(S)$ é um cone próprio no espaço das matrizes. Então, S deixa invariante um cone pontual e gerador $W \subset \mathbb{R}^n$.*

Proposição 4.32 *Seja K um cone-subálgebra na álgebra associativa das matrizes $n \times n$. Suponha que K é próprio e gerador. Então $K = K(S_K)$ onde $S_K = K \cap \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$.*

Demonstração: Observamos, em primeiro lugar, que $S_K = K \cap \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ é um semigrupo de interior não vazio em $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ como visto anteriormente. Além disso $K \cap \mathrm{Gl}^+(n,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \cdot S_K$ pois $S_K \subset K$ e portanto $\mathbb{R}^+ \cdot S_K \subset K$. Como $\det g > 0$ para todo $g \in \mathbb{R}^+ \cdot S_K$, segue que $\mathbb{R}^+ \cdot S_K \subset K \cap \mathrm{Gl}^+(n,\mathbb{R})$. Reciprocamente, se $g \in K \cap \mathrm{Gl}^+(n,\mathbb{R})$ então $\left(\sqrt[n]{\det g}\right) g$ está em K e em $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ e, portanto, em S_K. Isso significa que $g \in \mathbb{R}^+ \cdot S_K$.

O teorema anterior implica que S_K deixa invariante um cone W pontual e gerador em $\mathbb{R}^n$ pois $S_K \subset K$ e K é um cone próprio. Como $K \cap \mathrm{Gl}^+(n,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \cdot S_K$ segue que $K \cap \mathrm{Gl}^+(n,\mathbb{R})$ também deixa invariante o cone W.

Se não existe $g \in K$ com $\det g < 0$ a demonstração acaba acima.

Suponha portanto que existe $g \in K$ com $\det g < 0$ e seja $\mathrm{Gl}^-(n,\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes com det < 0. Se $K \cap \mathrm{Gl}^-(n,\mathbb{R}) \neq \emptyset$ então $\mathrm{int}K \cap \mathrm{Gl}^-(n,\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Pois $\mathrm{Gl}^-(n,\mathbb{R})$ é aberto e $\mathrm{int}K$ é denso em K.

Nestas condições podemos garantir que dado $\varepsilon > 0$, existem $g, h \in K$ com $\det g > 0$, $\det h < 0$ e $|g - h| < \varepsilon$. De fato: tome $a, b \in K$ com $\det a < 0$ e $\det b > 0$. O segmento $ta + (1-t)b$, $0 \leq t \leq 1$, está contido em K e

$$p(t) = \det(ta + (1-t)b)$$

é um polinômio em t, que é positivo em $t = 0$ e negativo em $t = 1$ e, portanto, muda de sinal no intervalo $[0,1]$. O número de raízes do polinômio é finito, daí que existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $p(t)$ muda de sinal em t_0. Por continuidade de $t \mapsto ta + (1-t)b$, existem s_1, s_2 próximos de t_0 tais que $p(s_1) > 0$, $p(s_2) < 0$ e $|g - h| < \varepsilon$ onde $g = s_1 a + (1-s_1)b$ e $h = s_2 a + (1-s_2)b$.

Agora considere o cone pontual e gerador W invariante por S_K e tome uma base B do cone. Como W é pontual, B é compacto.

Assim temos também que dado $\varepsilon > 0$, existe $h \in K$ com $\det h < 0$ tal que para todo $x \in \mathcal{B}$,

$$\sup_{x \in \mathcal{B}} d\,(hx, \mathcal{B}) < \varepsilon$$

onde $d\,(hx, \mathcal{B}) = \inf_{y \in \mathcal{B}} |hx - y|$.

Para mostrar isto tome g e h como no item anterior com $|g - h| < \varepsilon_1$. Então para todo $x \in \mathcal{B}$,

$$|gx - hx| < \varepsilon_1 \,|x| \leq M\varepsilon_1$$

onde $M = \sup_{x \in \mathcal{B}} |x|$. Portanto, $d\,(hx, \mathcal{B}) \leq M\varepsilon_1$ para todo x.

Agora podemos concluir a demonstração da proposição. Para isto falta mostrar que W é invariante por $g \in K$ mesmo que $\det g < 0$. Fixando um tal g, suponha por absurdo que existe $x \in \mathcal{B}$ tal que $gx \notin W$. Então alguma vizinhança U de gx não intercepta W. Como W é cone pode-se supor que $\mathbb{R}_+ \cdot U = U$. Considere o aberto $A = g^{-1}U \cap W$. É claro que $\mathbb{R}_+ \cdot A = A$.

Tome $h \in K$ com $\sup_{x \in \mathcal{B}} d\,(hx, \mathcal{B}) < \varepsilon$ como garantido no corolário do item anterior, para um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Pela proposição 2.1 do capítulo 2 existe $g_1 \in S_K$ tal que $g_1\,(hW) \subset A$. Então, $gg_1hW \subset U$. Mas isso contradiz o fato de que W é invariante por $K \cap \mathrm{Gl}^+\,(n, \mathbb{R})$. De fato, $\det h < 0$, $\det g_1 > 0$ e $\det g < 0$ e esses três elementos estão em K. Portanto, $gg_1h \in K$ e $\det gg_1h > 0$, isto é, $gg_1h \in K \cap \mathrm{Gl}^+\,(n, \mathbb{R})$. □

Seja $S \subset \mathrm{Sl}\,(n, \mathbb{R})$ com $\mathrm{int} S \neq \emptyset$ e considere as ações de S no espaço projetivo $\mathbb{P}^{n-1}$ das retas de $\mathbb{R}^n$ e na esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ dos raios partindo da origem de $\mathbb{R}^n$.Seja $\pi : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}$ a aplicação canônica (recobrimento duplo), que identifica antipodas. Em $\mathbb{P}^{n-1}$ existe um único conjunto de controle invariante que será denotado por C. $\pi^{-1}\,(C) \subset \mathbb{S}^{n-1}$ é um conjunto invariante por S. Podem acontecer duas possibilidades:

1. $\pi^{-1}\,(C)$ é um conjunto de controle invariante de S em $\mathbb{S}^{n-1}$.
2. $\pi^{-1}\,(C) = C^+ \cup C^-$ com $C^\pm$ conjuntos de controle invariantes.

Corolário 4.33 *Suponha que $\pi^{-1}\,(C)$ é um conjunto de controle invariante. Então $K\,(S)$ é todo o espaço de matrizes.*

Demonstração: $K(S)$ é um cone. Para mostrar que é todo espaço basta verificar que ele não está contido num semi-espaço de $M_n(\mathbb{R})$. De forma equivalente, basta mostrar que se $\gamma : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é um funcional linear então γ muda de sinal em $K(S)$. Para mostrar isso é conveniente representar γ através da forma traço. Como $\operatorname{tr}(XY)$ é uma forma bilinear simétrica em $M_n(\mathbb{R})$ segue que existe $X \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $\gamma(Y) = \operatorname{tr}(XY)$ para todo Y.

Portanto, para mostrar o corolário basta mostrar que para toda matriz $X \neq 0$ existem $A, B \in \operatorname{co}(S)$ tal que $\operatorname{tr}(XA)\operatorname{tr}(XB)$ é estritamente menor que zero. Tome uma matriz $X \neq 0$ qualquer. Observe que $X(v \otimes \alpha)(u) = \alpha(u) X(v)$ e, portanto,

$$\operatorname{tr}(X(v \otimes \alpha)) = \alpha(X(v)).$$

Da mesma forma, se g é uma matriz qualquer,

$$\operatorname{tr}(X(g(v) \otimes \alpha)) = \alpha(X(g(v))).$$

Agora, basta escolher $v \otimes \alpha$ e $g(v) \otimes \alpha$ em $\operatorname{co}(S)$ de tal forma que apareçam sinais diferentes. Pelo lema 4.30, existe um par (v, α) que é S-compatível tal que $\operatorname{tr}(X(v \otimes \alpha)) \neq 0$. Pela hipótese do teorema, existe $g \in S$ tal que $g(v) = -v$. Pelo lema 4.29, $v \otimes \alpha \in \operatorname{co}(S)$. Como $g \in S$, o produto de matrizes $g \cdot (v \otimes \alpha)$ também está em $\operatorname{co}(S)$. Mas

$$g \cdot (v \otimes \alpha) = g(v) \otimes \alpha.$$

Como $g(v) = -v$, $\operatorname{tr}(X(v \otimes \alpha))$ e $\operatorname{tr}(X(g(v) \otimes \alpha))$ têm sinais diferentes (e são ambos não nulos), concluindo a demonstração. □

Referências bibliográficas

[1] A. Berman e R.J. Plemmons, *Nonnegative matrices in the mathematical sciences.* SIAM Classics in Appl. Math. 9 (1994).

[2] C.J. Braga Barros e L.A.B. San Martin, 'On the action of semigroups in fiber bundles', *Mat. Contemp.* 13 (1997), 1-19.

[3] J. Hilgert, K.H. Hofmann e J. Lawson, *Lie groups, convex cones and semigroups*, Oxford University Press (1989).

[4] J. Hilgert e K.-H. Neeb, *Lie semigroups and their applications*, Lecture Notes in Math. 1552 Springer, Berlin, (1993).

[5] J.D. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups.* Cambridge studies in Advanced Mathematics 29 (1990).

[6] V. Jurdjevic e H. Sussmann, 'Control systems on Lie groups', *J. Diff. Eq.*, 12 (1972), 313-329.

[7] K.-H. Neeb, 'On the foundations of Lie semigroups', *J. reine angew. Math.* 431 (1992), 165-189.

[8] J. Ribeiro G. e L.A.B. San Martin, 'The compression semigroup of a cone is connected'. *Relatório de Pesquisa Imecc*, 14/00, (2000).

[9] W.A.F. Ruppert, 'On open subsemigroups of connected groups', *Semigroup Forum* 39 (1989), 347-362.

[10] L.A.B. San Martin, 'Invariant control sets on flag manifolds', *Mathematics of Control, Signals, and Systems* 6 (1993), 41-61.

[11] L.A.B. San Martin and P.A. Tonelli, 'Semigroup actions on homogeneous spaces'. *Semigroup Forum* 50 (1995) 59-88.

[12] L.A.B. San Martin, 'On global controllability of discrete-time control systems', *Math. Control Signals Systems* 8 (1995), 279-297.

[13] L.A.B. San Martin, 'Control sets and semigroups in semisimple Lie groups', em *Semigroups in Algebra, Geometry and Analysis*, (K.H. Hofmann, J.D. Lawson, E.B. Vinberg, editors) de Gruyter Expositions in Mathematics 20 (1995), 275-291.

[14] L.A.B. San Martin, 'Maximal semigroups in semi-simple Lie groups'. *Relatório de Pesquisa Imecc*, 34/98 (1998).

[15] L.A.B. San Martin, 'Nonexistence of invariant semigroups in affine symmetric spaces'. Systems & Control Letters, Special Issue Lie Theory and Applications to Control (2001).

[16] L.A.B. San Martin e A.J. Santana, 'The homotopy type of Lie semigroups in semi-simple Lie groups'. *Relatório de Pesquisa Imecc*, 55/99 (1999).

[17] A.J. Santana, Homotopia de semigrupos. Tese, Unicamp (2000).

[18] G. Warner, *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups 1*. Springer-Verlag (1972).