

CORDAS CÓSMICAS E VÓRTICES EM
RELATIVIDADE GERAL: PERTURBAÇÕES
RADIAIS DE SOLUÇÕES ESTÁTICAS E
ESTACIONÁRIAS

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Paulo Renato Centeno Holvorcem e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 31 de Janeiro de 1994.



Prof. Dr. Patricio Anibal Letelier
Sotomayor

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em Ciências em Matemática Aplicada.

Para Christiane, com amor

Agradecimentos

Ao Prof. Patricio Letelier, por sua orientação, apoio e amizade.

Ao Prof. Samuel Rocha de Oliveira (Universidade de Brasília), pelas discussões úteis, pela indicação de referências sobre oscilações de modelos estelares e pela obtenção de permissão de uso dos computadores do laboratório de computação científica do Departamento de Física da UnB.

Ao Prof. Paul Shellard (Cambridge University) pelas discussões e pelo incentivo recebido durante o VIII Simpósio Latino-Americano de Relatividade e Gravitação (SILARG), realizado em Águas de Lindóia em julho de 1993.

Ao Prof. Richard Matzner (University of Texas at Austin) pelas discussões sobre perturbações de cordas cósmicas, durante o VIII SILARG.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo suporte financeiro recebido de março de 1991 a março de 1994.

Resumo

Apresentamos uma teoria linearizada para o estudo da dinâmica de pequenas perturbações de alguns sistemas com simetria cilíndrica em relatividade geral.

A primeira parte refere-se a cordas cósmicas estáticas retilíneas, de espessura finita na teoria de calibre $U(1)$ acoplada às equações de Einstein. Inicialmente, são desenvolvidos métodos numéricos específicos para a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias que descreve este tipo de corda, incorporando informações sobre o comportamento assintótico da solução e certas identidades integrais que esta deve satisfazer. Um método baseado em colocação com splines quínticas mostra-se bastante eficiente, permitindo refinar os valores publicados para o déficit angular e a densidade linear de energia da corda. As equações de campo são então linearizadas em torno da solução para uma corda estática, assumindo que as perturbações têm simetria cilíndrica. Empregando o método dos modos normais, o problema é reduzido a um sistema de equações diferenciais ordinárias para a estrutura espacial dos modos normais. Empregando algoritmos para a solução numérica de problemas generalizados de autovalores, encontra-se evidência de que a corda em questão é estável frente a perturbações radiais. Mostra-se que a corda admite um espectro contínuo de modos neutros em que as perturbações da métrica e dos campos que compõe a corda comportam-se como ondas estacionárias. O espectro pode ser dividido em regiões de frequência alta, intermediária e baixa; o número de modos normais independentes por frequência (degenerescência) é diferente em cada região. Soluções numéricas para os modos neutros são obtidas pelo método de Runge-Kutta, empregando as soluções estáticas previamente obtidas em termos de splines para a computação dos coeficientes nas equações para as perturbações. Argumenta-se que os conceitos de modos quase-normais e de modos complexos que se propagam para o exterior, comumente usados na literatura sobre modelos estelares, não são particularmente úteis na descrição das perturbações de cordas $U(1)$.

Na segunda parte do trabalho, é introduzida uma nova classe de soluções estacionárias das equações de Einstein, representando vórtices auto-gravitantes compostos por um gás ideal relativístico com temperatura uniforme e uma distribuição arbitrária de velocidades angulares em torno do eixo de simetria. Exemplos deste tipo de soluções são determinadas numericamente

por um método de *shooting*. Com a suposição de temperatura uniforme, é possível deduzir uma expressão integral para a densidade linear do vórtice, onde as contribuições devidas à rotação aparecem explicitamente; além disso, mostra-se que o problema de valores de contorno não-linear que define o vórtice é invariante sob certas mudanças de escala das coordenadas e campos. No estudo de perturbações radiais destes sistemas, restringe-se a atenção ao caso mais simples de um politropo sem rotação. Com o auxílio da metodologia já empregada para as cordas $U(1)$, obtém-se evidência de que o politropo estático é estável frente às perturbações consideradas. A estrutura do espectro de modos neutros é bem mais simples do que no caso da corda $U(1)$, com apenas um modo por frequência; cada modo é composto por ondas gravitacionais e acústicas estacionárias acopladas. Curvas de amplitude e fase assintóticas da componente gravitacional do modo normal normalizado em função da frequência mostram características normalmente associadas à presença de um espectro discreto de modos complexos que se propagam para o exterior; entretanto, argumenta-se que não existem modos em que tanto as perturbações gravitacionais quanto as acústicas se propagam para o exterior. Uma limitação da teoria linearizada desenvolvida neste trabalho é sua inabilidade para descrever a evolução final de uma perturbação que se propaga para o exterior; esta limitação é explicada pela formação de ondas de choque (um fenômeno não-linear) nas camadas mais rarefeitas do politropo.

Abstract

A linearized theory of the dynamics of small perturbations of certain cylindrically symmetric systems in general relativity is presented.

Firstly, we deal with straight, static cosmic strings of finite thickness in the $U(1)$ gauge theory coupled to the Einstein equations. Taking into account the asymptotic behavior of the solution and certain integral identities, we develop specific numerical methods to solve the system of ordinary differential equations which describes this type of string. A method based on quintic spline collocation turns out to be very effective, allowing us to refine the published values for the string angular deficit and linear energy density. Assuming that the perturbations have cylindrical symmetry, the field equations are then linearized about the static string solution. Using the method of normal modes, the problem is reduced to a system of ordinary differential equations for the spatial structure of the normal modes. Algorithms for the numerical solution of generalized eigenvalue problems provide evidence that the string is stable against radial perturbations. We show that the string has a continuous spectrum of neutral modes, in which the perturbations of the metric and the fields which make up the string behave as stationary waves. The spectrum may be divided in regions of high, intermediate and low frequencies; the number of independent normal modes per frequency is different in each region. Employing the static solutions previously obtained in terms of splines for the computation of the coefficients in the perturbation equations, we obtain numerical solutions for the neutral modes by the Runge-Kutta method. It is argued that the concepts of quasi-normal modes and complex outgoing modes, commonly used in the literature on stellar models, are not particularly useful in the description of the perturbations of $U(1)$ strings.

In the second part of this work, we introduce a new class of stationary solutions of the Einstein equations, which represent self-gravitating vortices in an ideal relativistic gas with an uniform temperature distribution and an arbitrary distribution of angular velocities about the axis of symmetry. Examples of such solutions are determined numerically by a shooting method. With the assumption of uniform temperature, it is possible to derive an integral expression for the the linear density of the vortex, wherein the rotation contributions appear explicitly. Furthermore, we show that the non-linear boundary-value problem which defines the vortex is invariant under a cer-

tain scaling of the coordinates and fields. In the study of radial perturbations of these systems, we restrict our attention to the simplest case, namely a non-rotating polytrope. Performing an analysis which is analogous to the one for $U(1)$ strings, we find numerical evidence that the static polytrope is stable with respect to radial perturbations. The structure of the spectrum of neutral modes is much simpler than that of the $U(1)$ string, consisting of a single mode per frequency; each mode exhibits coupled stationary gravitational and acoustic waves. The curves of asymptotic amplitude and phase of the gravitational component of the normalized normal mode as a function of frequency display characteristics which are normally associated with the existence of a discrete spectrum of complex outgoing modes; however, it is argued that there are no modes in which both the acoustic and the gravitational perturbations are outgoing. A limitation of the present linearized theory is its inability to describe the final evolution of a perturbation which propagates outwards; this limitation is explained by the formation of shock waves (a non-linear phenomenon) in the outer, rarefied layers of the polytrope.

Conteúdo

1	INTRODUÇÃO	10
2	CORDAS ESTÁTICAS U(1) COM CAMPO GRAVITACIONAL	16
2.1	Introdução	16
2.2	Equações de campo	18
2.3	Comportamento das soluções quando $r \rightarrow \infty$	21
2.4	Redução a um problema de valores de contorno	25
2.5	Identidades integrais	28
2.6	Comportamento da solução perto de $r = 0$	29
2.7	Um método de diferenças finitas	30
2.8	Refinamento da solução em diferenças finitas	33
2.9	Colocação com splines	36
3	PERTURBAÇÕES RADIAIS DE CORDAS U(1)	40
3.1	Introdução	40
3.2	Perturbações com simetria cilíndrica	43
3.3	Equações para a estrutura radial dos modos normais	44
3.4	Condições de contorno assintóticas para os modos normais	49
3.5	Comportamento dos modos normais para r pequeno	59

3.5.1	Considerações de estabilidade <i>a priori</i>	60
3.6	Estudo numérico dos modos normais	66
3.6.1	Modos instáveis e amortecidos	66
3.6.2	Modos neutros	69
4	VÓRTICES POLITRÓPICOS CILÍNDRICOS	76
4.1	Introdução	76
4.2	Equações de campo para um vórtice cilíndrico	77
4.3	Condições de contorno para um vórtice isolado	83
4.3.1	Condições sobre o eixo- z	83
4.3.2	Condições assintóticas	84
4.3.3	Propriedades de similaridade	87
4.4	Expressões para a densidade linear do vórtice	88
4.5	Soluções numéricas	93
4.5.1	Politropos estáticos	93
4.5.2	Vórtices politrópicos	94
5	PERTURBAÇÕES RADIAIS DE POLITROPOS CILÍNDRICOS ESTÁTICOS	98
5.1	Introdução	98
5.2	Perturbações com simetria cilíndrica	99
5.3	Equações de estrutura radial das perturbações	100
5.4	Condições de contorno assintóticas	104
5.5	Comportamento dos modos normais para r pequeno	110
5.6	Propriedades de similaridade	111
5.7	Estudo numérico dos modos normais	112
5.7.1	Modos instáveis e amortecidos	112
5.7.2	Modos neutros	113

	9
6 COMENTÁRIOS FINAIS	115
A FIGURAS	126
B PROGRAMAS PARA A DETERMINAÇÃO DE SOLUÇÕES ESTÁTICAS E MODOS NORMAIS	157

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

O uso de Teorias de Calibre para descrever transições de fase no Universo primitivo tem motivado, nos últimos anos, um grande número de estudos sobre estruturas de vácuo (texturas, monopolos, paredes e cordas cósmicas), cuja formação ocorreria por quebra espontânea de simetria. Em particular, as cordas cósmicas têm sido consideradas como possíveis agentes geradores das perturbações de densidade que eventualmente evoluíram para as galáxias atuais [1]; além disso, as cordas podem agir como lentes gravitacionais [2].

Inicialmente, soluções representando cordas estáticas retilíneas na teoria de calibre $U(1)$ foram determinadas numericamente [3], assumindo um espaço-tempo de Minkowski. Estas soluções têm simetria cilíndrica, e o tensor de energia-momentum apresenta tensões anisotrópicas; a tensão ao longo do eixo da corda é igual à densidade de energia, enquanto que as tensões nas demais direções são de menor intensidade. Posteriormente, Vilenkin [2] procurou incluir os efeitos gravitacionais da corda assumindo que a métrica difere pouco da métrica de Minkowski (aproximação de campo fraco) e que o tensor de energia-momentum pode ser descrito por uma função delta de Dirac com suporte no eixo da corda (aproximação de espessura zero); admi-

tindo ainda que as tensões nas direções radial e azimutal se anulam, Vilenkin concluiu que o campo gravitacional da corda é descrito pela “métrica de Minkowski com déficit angular”,

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + dr^2 + \left(1 - \frac{\Delta\theta}{2\pi}\right)^2 r^2 d\theta^2,$$

onde (r, θ, z, t) são coordenadas cilíndricas e a constante $\Delta\theta$ é o déficit angular da métrica. Com estas aproximações, o déficit angular é proporcional à densidade linear de energia (μ) da corda:

$$\Delta\theta = 8\pi\mu.$$

Assim, à diferença das soluções anteriormente obtidas no contexto da relatividade especial, a solução de Vilenkin [2] não provém de nenhuma teoria de campo específica; o tensor de energia-momentum é simplesmente prescrito *a priori*, e a métrica é determinada pela solução das equações de Einstein.

Ainda que a aproximação de espessura zero possa ser justificada nas aplicações de cordas em astrofísica [4] (onde apenas interessam os efeitos da corda a distâncias muito maiores do que o seu diâmetro), há processos (como a interação entre duas cordas [5]) onde é importante considerar a espessura finita da corda. Além disso, outra limitação da aproximação de espessura zero é a dificuldade de empregar distribuições em uma teoria não-linear como a relatividade geral [4]. Estes argumentos motivaram alguns autores a considerar o problema não-linear completo, em que as equações de Einstein são acopladas a um tensor de energia-momentum derivado de uma teoria de campo definida. Garfinkle [6] formulou o problema de valores de contorno correspondente a uma corda estática retilínea na teoria U(1), adotando um potencial para o campo escalar em forma de “sombbrero”. Como no caso de uma corda U(1) em um espaço-tempo sem curvatura, a corda de

espessura finita em relatividade geral apresenta tensões em geral não-nulas nas direções radial e azimutal, e tensão na direção axial igual à densidade de energia. Garfinkle mostrou que o espaço-tempo da corda aproxima-se assintoticamente da métrica de Minkowski com déficit angular dado por

$$\Delta\theta = 8\pi\mu(1 + \delta),$$

onde δ é um termo de correção que pode ser expresso como uma integral envolvendo os coeficientes métricos. Para cordas de interesse astrofísico ($\mu \sim 10^{-6}$), soluções numéricas [7] indicam que $\delta \ll 1$, de modo que a expressão inicial de Vilenkin é aproximadamente válida. A energias extremamente altas, ocorre uma transição na forma assintótica do espaço-tempo, que muda da forma minkowskiana para uma análoga ao espaço-tempo de Kasner quando $\Delta\theta = 2\pi$ [8].

A relação entre estas soluções auto-consistentes para cordas cósmicas e as soluções aproximadas obtidas inicialmente por Vilenkin foi investigada em detalhe por Futamase e Garfinkle [4]. Usando as propriedades de invariância das soluções auto-consistentes por transformações de escala das coordenadas e campos, estes autores mostraram que é possível considerar o limite de cordas de espessura zero, mantendo-se fixos os valores da escala de energia de quebra de simetria e da razão entre as massas dos campos escalar e de calibre. Observando que as quantidades μ , $\Delta\theta$ e δ ficam invariantes em tal processo de limite, concluiu-se que a expressão obtida por Vilenkin para o déficit angular da corda não corresponde ao limite de espessura zero da teoria não-linear completa. Esta discrepância ocorre porque as tensões radiais e azimutais (que são desprezadas no modelo de Vilenkin) permanecem no limite de espessura zero [4].

Apesar do grande número de trabalhos que discutem as propriedades

de cordas retilíneas estáticas, o estudo de perturbações das configurações estáticas tem recebido pouca atenção. Bogomol'nyi e Vainshtein [3] argumentaram que as cordas $U(1)$ de circulação unitária em um espaço-tempo sem curvatura são estáveis, considerando que a configuração estática minimiza a energia em relação a perturbações independentes do tempo; entretanto, uma teoria de perturbações dependentes do tempo parece não ter sido desenvolvida. Neste trabalho, apresentaremos um primeiro passo em direção a uma teoria de perturbações das cordas $U(1)$ de espessura finita com campo gravitacional, em que apenas perturbações com simetria cilíndrica são consideradas. Uma vez que os procedimentos empregados na obtenção das soluções estáticas publicadas [7] não foram discutidos em detalhe, iniciamos por desenvolver independentemente métodos numéricos independentes para determinar as configurações estáticas (Cap. 2). Dentre estes, o método mais preciso é baseado no uso de colocação com splines quínticas, o qual incorpora informações detalhadas sobre o comportamento assintótico da solução e identidades integrais exatas que esta satisfaz (por exemplo, a expressão para o déficit angular mencionada anteriormente). Este método permitiu confirmar, e em alguns casos refinar os valores publicados para a densidade linear e o déficit angular da corda. A seguir, as equações de campo foram linearizadas em torno da solução representando uma corda estática (Cap. 3), e o caráter das perturbações (instáveis, assintoticamente estáveis ou neutras) foi estudado através do método dos modos normais [9, 10]. Neste estudo, adotou-se o ponto de vista da teoria da estabilidade hidrodinâmica, onde se exige que as funções que descrevem a estrutura espacial dos modos normais sejam limitadas; modos quase-normais, em uso na literatura sobre modelos estelares em relatividade geral [11, 12, 13], não foram enfatizados por não permitirem a descrição de perturbações arbitrárias [12]. Métodos numéricos

distintos foram empregados na determinação de modos com frequências reais e não-reais: no primeiro caso, o espectro de perturbações é contínuo, e as equações diferenciais que descrevem a estrutura radial dos modos normais podem ser integradas por métodos de Runge-Kutta, enquanto que no segundo caso o espectro deve ser discreto, e métodos globais foram utilizados para determinar simultaneamente diversas autofunções. Os resultados destas análises indicaram que, como esperado, a corda $U(1)$ é estável frente a perturbações com simetria cilíndrica, e permitiram uma descrição razoavelmente detalhada das oscilações neutras.

A fim de comparar as oscilações radiais de uma corda $U(1)$ (cuja densidade newtoniana equivalente é nula) com as oscilações de uma distribuição de massa com geometria semelhante, consideramos na segunda parte do trabalho modelos relativísticos de vórtices cilíndricos compostos por gases ideais com temperatura uniforme (Cap. 4). Devido a esta última suposição, tais modelos de vórtices diferem dos modelos estelares usuais pela ausência de uma “superfície” definida (onde a pressão se anula); assim, nos modelos aqui considerados não é preciso considerar condições de junção entre a região contendo matéria e o vácuo exterior. Além disso, os vórtices com temperatura uniforme possuem propriedades interessantes de invariância por mudanças de escala das coordenadas e campos. Uma expressão exata em forma integral foi derivada para a densidade linear do vórtice, na qual os efeitos da rotação aparecem como correções ao valor da densidade correspondente a um cilindro de gás ideal sem rotação. Esta expressão foi incorporada a um método numérico para a determinação da solução correspondente a um vórtice com perfil de velocidade angular arbitrário.

Por simplicidade, o estudo de perturbações das soluções obtidas no Cap. 4 restringiu-se ao caso de um politropo isotérmico sem rotação (Cap. 5). O

problema relacionado das perturbações radiais de politropos sem rotação e com perfil de densidade adiabático foi analisado recentemente por Scheel *et al.* [14]. A metodologia utilizada anteriormente para a análise das perturbações de cordas $U(1)$ indicou neste caso que os politropos são também estáveis frente a perturbações radiais. Finalmente, o Cap. 6 apresenta as conclusões e possíveis extensões deste trabalho.

Capítulo 2

CORDAS ESTÁTICAS U(1) COM CAMPO GRAVITACIONAL

2.1 Introdução

Como discutido anteriormente, quando os efeitos gravitacionais das cordas são levados em conta, o espaço-tempo longe da corda aproxima-se de um “espaço de Minkowski com déficit angular”, cuja métrica é [7]

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + d\rho^2 + \left(1 - \frac{\Delta\theta}{2\pi}\right)^2 \rho^2 d\theta^2; \quad (2.1)$$

aqui ρ , θ e z são coordenadas cilíndricas e a constante $\Delta\theta$ representa o déficit angular do espaço-tempo.

A métrica (2.1) representa o espaço-tempo de uma corda retilínea na aproximação de espessura zero [2], cujo tensor de energia-momentum apresenta apenas densidade e tensão paralela à corda. Quando se usa ainda a aproximação de campo fraco, o déficit angular resultante é proporcional à densidade linear μ da corda: $\Delta\theta = 8\pi\mu$ (em unidades onde $c = G = 1$).

Para uma corda de espessura finita, a métrica (2.1) é válida somente no limite $\rho \rightarrow \infty$; perto da corda, existem também tensões nas direções radial e azimutal. Além disso, a relação entre $\Delta\theta$ e μ é não-linear [6, 15, 4].

Como um primeiro passo para o estudo da estabilidade de cordas $U(1)$ com campo gravitacional, desenvolvemos métodos numéricos para a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias que descreve este tipo de corda. Como no caso de uma corda $U(1)$ em um espaço-tempo de Minkowski [3], condições de contorno são impostas sobre os campos escalar e de calibre, no eixo da corda e a grandes distâncias da mesma. Entretanto, sobre as componentes da métrica somente são impostas condições no eixo da corda. Este problema misto de valores iniciais e de contorno foi resolvido numericamente por Laguna-Castillo e Matzner [7] empregando algoritmos separados para as equações de Einstein (resolvidas por um método de Runge-Kutta) e para as equações que governam os campos escalar e de calibre (resolvidas por um método de diferenças finitas); os dois algoritmos trocavam informações iterativamente.

Nos métodos aqui apresentados, o comportamento assintótico da solução longe do eixo da corda é empregado para efetivamente converter o problema misto em um problema de valores de contorno, que pode então ser resolvido por métodos similares aos empregados no caso de uma corda sem campo gravitacional. Esta transformação é realizada à custa da introdução de certos parâmetros assintóticos da solução, os quais não são conhecidos *a priori*. Isto por sua vez requer a introdução de equações adicionais no sistema de equações discretizadas que representa o problema de valores de contorno. As equações escolhidas para completar o sistema discretizado são certas equações integrais satisfeitas pela solução procurada, as quais podem ser deduzidas de uma identidade demonstrada por Garfinkle [6].

Inicialmente, desenvolveu-se um código de diferenças finitas para a solução do problema de valores de contorno, com o qual verificou-se parte dos resultados numéricos de Laguna-Castillo e Matzner [7]; entretanto, a fim de verificar a correção de todos os dígitos significativos apresentados em [7], seria necessário empregar uma grade numérica com mais de $O(10^3)$ pontos. A fim de evitar o uso de grades excessivamente grandes, procurou-se então refinar a solução em diferenças finitas, empregando-se o método de “correção iterada de defeitos” [16]. Este método envolve a interpolação da solução em diferenças finitas por uma função polinomial por partes, seguida de um dos seguintes procedimentos: (a) resolução de um sistema de equações diferenciais para o erro de discretização ou (b) resolução por diferenças finitas do sistema de equações original, perturbado por um termo que envolve a solução interpolada. Após algumas experiências insatisfatórias com esta metodologia, na qual a função interpoladora era tomada como uma spline de ordem superior (graus 5 e 7), resolveu-se abandonar os métodos de refinamento da solução em diferenças finitas em favor de métodos de colocação com splines (veja, por exemplo, [17, 18]). O método aqui discutido emprega colocação com splines quárticas, e permitiu na maioria dos casos ultrapassar o número de dígitos significativos apresentados nos resultados de [7] (algumas correções à Tabela I desta referência foram detectadas). Nestes cálculos, empregou-se em todos os casos grades computacionais com menos de 100 pontos.

2.2 Equações de campo

Considera-se aqui o modelo de corda auto-gravitante apresentado por Laguna-Castillo e Matzner [7], que consiste de um campo escalar complexo

ó acoplado a um campo de calibre $U(1)$ A_μ ; o lagrangiano do modelo é

$$L = L_G + L_M, \quad (2.2)$$

onde

$$\begin{aligned} L_G &= \frac{1}{16\pi} R, \\ L_M &= -\frac{1}{2} D_\mu \phi (D^\mu \phi)^* - V(|\phi|) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

R é o escalar de Ricci (que representa o campo gravitacional), $D_\mu = \nabla_\mu + ieA_\mu$ (e é a carga do campo A_μ), $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$, e V é o potencial efetivo, dado por

$$V(|\phi|) = \frac{1}{8} \lambda (|\phi|^2 - \eta^2)^2$$

(η é a escala de energia de quebra de simetria).

As equações de campo derivadas do lagrangiano acima são

$$D_\mu D^\mu \phi - 2 \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla^\nu F_{\mu\nu} + (ie/2)[\phi(D_\mu \phi)^* - \phi^*(D_\mu \phi)] = 0, \quad (2.4)$$

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

onde o tensor de energia-momentum é dado por

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [(D_\mu \phi)^* D_\nu \phi + (D_\nu \phi)^* D_\mu \phi] + F_{\mu\tau} F_\nu{}^\tau + L_M g_{\mu\nu}.$$

Para uma corda estática retilínea, infinitamente longa, com simetria cilíndrica, a métrica do espaço-tempo tem a forma (em coordenadas cilíndricas $x^\mu = (\rho, \theta, z, t)$)

$$ds^2 = -e^A (dt^2 - dz^2) + e^C d\theta^2 + d\rho^2, \quad (2.6)$$

onde A e C dependem apenas de ρ . Os campos escalar e de calibre têm a forma particular

$$\phi = Qe^{i\theta}, \quad (2.7)$$

$$A_\mu = (1/e)(U-1)\nabla_\mu\theta, \quad (2.8)$$

onde Q e U dependem apenas de ρ .

Introduzindo a coordenada radial $r = \sqrt{\lambda}\eta\rho$, as equações de campo reduzem-se ao sistema de equações diferenciais ordinárias

$$(KX')' = X\left[\frac{1}{2}K(X^2-1) + \frac{e^{2A}U^2}{K}\right], \quad (2.9)$$

$$\left(\frac{e^{2A}U'}{K}\right)' = \frac{\alpha e^{2A}X^2U}{K}, \quad (2.10)$$

$$(KA')' = -4\pi\eta^2\left[\frac{1}{2}K(X^2-1)^2 - \frac{2e^{2A}(U')^2}{\alpha K}\right], \quad (2.11)$$

$$K'' = -4\pi\eta^2\left[\frac{3}{4}K(X^2-1)^2 + \frac{e^{2A}}{K}(2X^2U^2 - \frac{(U')^2}{\alpha})\right], \quad (2.12)$$

onde $X = Q/\eta$, $K = \sqrt{\lambda}\eta e^{A+C/2}$, $\alpha = e^2/\lambda$ e $e' = d/dr$.

O tensor de energia-momentum associado aos campos (2.7) e (2.8) e à métrica (2.6) é dado na base ortonormal $(\hat{t}, \hat{z}, \hat{\rho}, \hat{\theta})$ por

$$T_{\mu\nu} = \lambda\eta^4 \text{diag}(\sigma, -\sigma, P_\rho, P_\theta),$$

onde

$$\sigma = \frac{1}{2}[(X')^2 + \frac{1}{4}(X^2-1)^2 + \frac{e^{2A}}{K^2}(X^2U^2 + \frac{(U')^2}{\alpha})], \quad (2.13)$$

$$P_\rho = \frac{1}{2}[(X')^2 - \frac{1}{4}(X^2-1)^2 - \frac{e^{2A}}{K^2}(X^2U^2 - \frac{(U')^2}{\alpha})], \quad (2.14)$$

$$P_\theta = -\frac{1}{2}[(X')^2 + \frac{1}{4}(X^2-1)^2 - \frac{e^{2A}}{K^2}(X^2U^2 + \frac{(U')^2}{\alpha})]. \quad (2.15)$$

Para uma corda isolada, os campos escalar e de calibre satisfazem as condições de contorno [6]

$$X(0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} X(r) = 1, \quad (2.16)$$

$$U(0) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = 0 \quad (2.17)$$

e a métrica satisfaz as condições iniciais

$$K(0) = 0, \quad K'(0) = 1, \quad (2.18)$$

$$A(0) = 0, \quad A'(0) = 0. \quad (2.19)$$

2.3 Comportamento das soluções quando $r \rightarrow \infty$

Uma vez que esperamos que o espaço-tempo da corda seja assintoticamente o espaço de Minkowski com déficit angular, devemos ter para r grande

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = a_0, \quad K \sim kr, \quad (2.20)$$

onde a_0 e k são constantes.

A fim de determinar o comportamento assintótico das soluções de (2.9)-(2.12), é conveniente começar pela segunda equação do sistema; com o auxílio de (2.16), esta equação pode ser escrita aproximadamente para r grande como

$$U'' - \frac{1}{r}U' - \alpha U = 0.$$

A solução desta equação que tende a zero quando $r \rightarrow \infty$ é ¹

$$U \sim \tilde{p}_0 r K_1(\sqrt{\alpha}r) \sim p_0 r^{1/2} e^{-\sqrt{\alpha}r},$$

¹ Note-se que o fator $r^{1/2}$ foi omitido na expressão correspondente em [7].

onde K_1 denota uma função de Bessel modificada de ordem 1 [19]. Introduzindo a nova variável $Y = 1 - X$, a forma aproximada de (2.9) para r grande torna-se

$$Y'' + \frac{1}{r}Y' - Y = -\frac{e^{2\alpha_0}p_0^2}{k^2} \frac{e^{-2\sqrt{\alpha}r}}{r}. \quad (2.21)$$

A solução da equação homogênea associada com (2.21) que tende a zero quando $r \rightarrow \infty$ é $K_0(r)$, que é $O(r^{-1/2}e^{-r})$ para r grande; o termo no lado direito de (2.21) introduzirá uma solução particular que pode ser tomada $O(e^{-2\sqrt{\alpha}r}/r)$. Portanto, se $\alpha > \frac{1}{4}$, a solução particular será desprezível em comparação com a solução da equação homogênea,

$$Y \sim c_0 r^{-1/2} e^{-r},$$

enquanto que o oposto ocorrerá se $\alpha < \frac{1}{4}$:

$$Y \sim c'_0 \frac{e^{-2\sqrt{\alpha}r}}{r}; \quad (2.22)$$

neste último caso, substituindo-se (2.22) em (2.21) obtém-se o valor de c'_0 :

$$c'_0 = \frac{e^{2\alpha_0}p_0^2}{(1 - 4\alpha)k^2}.$$

Finalmente, para $\alpha = \frac{1}{4}$ é fácil ver que Y deve comportar-se como

$$Y \sim c''_0 e^{-2\sqrt{\alpha}r};$$

substituindo-se esta forma assintótica em (2.21), resulta que

$$c''_0 = \frac{e^{2\alpha_0}p_0^2}{k^2}.$$

Observamos que a expressão assintótica dada em [7],

$$X \sim 1 - ce^{-r},$$

somente será válida no caso particular em que $\alpha = \frac{1}{4}$.

Em vista dos resultados acima, as equações de Einstein (2.11) e (2.12) podem ser escritas aproximadamente para r grande como

$$A'' + \frac{1}{r}A' = -8\pi\eta^2\left(Y^2 - \frac{e^{2a_0}p_0^2}{k^2} \frac{e^{-2\sqrt{\alpha}r}}{r}\right), \quad (2.23)$$

$$K'' = -4\pi\eta^2\left(3krY^2 + \frac{e^{2a_0}p_0^2}{k} e^{-2\sqrt{\alpha}r}\right). \quad (2.24)$$

Se $\alpha > 1$, os termos proporcionais a $e^{-2\sqrt{\alpha}r}$ no lado direito das equações acima são desprezíveis em comparação com os termos em Y^2 ; (2.23) e (2.24) podem então ser simplificadas como

$$A'' + \frac{1}{r}A' = -8\pi\eta^2 c_0^2 \frac{e^{-2r}}{r},$$

$$K'' = -12\pi\eta^2 k c_0^2 e^{-2r}.$$

As soluções destas equações que são compatíveis com (2.20) tem o comportamento assintótico

$$A \sim a_0 - 2\pi\eta^2 c_0^2 \frac{e^{-2r}}{r},$$

$$K \sim kr + k_0 - 3\pi\eta^2 k c_0^2 e^{-2r}.$$

Para $\alpha < 1$, os resultados sobre o comportamento de $Y(r)$ indicam que os termos em $e^{-2\sqrt{\alpha}r}$ são dominantes no lado direito de (2.23) e (2.24); prosseguindo como no caso anterior, obtemos neste caso

$$A \sim a_0 + \frac{2\pi\eta^2 e^{2a_0} p_0^2}{\alpha k^2} \frac{e^{-2\sqrt{\alpha}r}}{r},$$

$$K \sim kr + k_0 - \frac{\pi\eta^2 e^{2a_0} p_0^2}{\alpha k} e^{-2\sqrt{\alpha}r}.$$

No caso $\alpha = 1$, é conhecido que a solução para a corda apresenta $A \equiv 0$ [7]. De fato, a análise anterior mostra que a diferença $A - a_0$ é assintoticamente

positiva para $\alpha < 1$ e negativa para $\alpha > 1$; isto sugere que $A \equiv a_0$ para $\alpha = 1$. Substituindo $A \equiv 0$ no sistema (2.9)-(2.12), obtém-se

$$(KX')' = X[\frac{1}{2}K(X^2 - 1) + \frac{U^2}{K}], \quad (2.25)$$

$$\left(\frac{U'}{K}\right)' = \frac{X^2U}{K}, \quad (2.26)$$

$$\frac{2(U')^2}{K} = \frac{1}{2}K(X^2 - 1)^2, \quad (2.27)$$

$$K'' = -4\pi\eta^2\left[\frac{3}{4}K(X^2 - 1)^2 + \frac{2X^2U^2 - (U')^2}{K}\right]. \quad (2.28)$$

Para mostrar a consistência do sistema acima, começamos por reescrever (2.27) como

$$U' = \frac{1}{2}K(X^2 - 1);$$

substituição em (2.26) fornece então

$$KX' = XU. \quad (2.29)$$

As duas últimas equações permitem reescrever (2.25) como

$$(XU)' = X\left[U' + \frac{U^2}{K}\right],$$

que é claramente equivalente a (2.29). Finalmente, (2.28) reduz-se a

$$\begin{aligned} K'' &= -4\pi\eta^2\left[\frac{2X^2U^2}{K} + \frac{1}{2}K(X^2 - 1)^2\right] \\ &= -4\pi\eta^2[2UXX' + (X^2 - 1)U'] \\ &= -4\pi\eta^2[(X^2 - 1)U]'. \end{aligned}$$

Integrando esta relação e usando as condições (2.16)-(2.18), obtém-se

$$K' = 1 - 4\pi\eta^2[1 + U(X^2 - 1)]. \quad (2.30)$$

No limite $r \rightarrow \infty$, temos $K \sim kr$, $X \rightarrow 1$, $U \rightarrow 0$; portanto, a equação acima implica que para $\alpha = 1$ temos

$$k = \lim_{r \rightarrow \infty} K'(r) = 1 - 4\pi\eta^2.$$

O comportamento assintótico de X e U já foi determinado no caso geral,

$$\begin{aligned} X &\sim 1 - c_0 r^{-1/2} e^{-r} \\ U &\sim p_0 r^{1/2} e^{-r}. \end{aligned}$$

Portanto, a forma assintótica das soluções de (2.30) é

$$K \sim (1 - 4\pi\eta^2)r + k_0 - 4\pi\eta^2 p_0 c_0 e^{-2r}.$$

De (2.29), obtemos ainda a relação

$$K = \frac{XU}{X'} \sim \frac{p_0}{c_0} r,$$

que implica que

$$p_0/c_0 = k = 1 - 4\pi\eta^2.$$

2.4 Redução a um problema de valores de contorno

No processo de obtenção de soluções numéricas, será conveniente reescrever as equações em termos dos desvios entre as variáveis originais e seus limites assintóticos determinados acima. Este procedimento permite obter soluções numéricas que reproduzem mais fielmente o comportamento assintótico da solução exata para r grande. Por exemplo, vimos na seção anterior que $Y = 1 - X$ tende a zero monotonicamente para r grande. Experimentos numéricos com modelos de cordas sem campo gravitacional mostraram que a solução numérica exibe este comportamento se as equações são

escritas em termos de Y ; entretanto, empregando a variável original X , que tende a 1, erros de discretização podem produzir valores de X maiores e menores do que 1 para r suficientemente grande. Claramente, este comportamento está associado à perda de precisão no cálculo da diferença $1 - X$ para r grande, usando um número finito de dígitos significativos.

A análise assintótica anterior indica que podemos escolher as variáveis

$$Y = 1 - X, \quad U, \quad \hat{A} = a_0 - A, \quad \hat{K} = kr + k_0 - K.$$

Claramente, os parâmetros a_0 , k e k_0 que aparecem nesta transformação não são conhecidos *a priori*² e devem ser determinados durante a solução numérica do problema.

Em termos das novas variáveis, o sistema (2.9)-(2.12) pode ser escrito como

$$Y'' + \frac{(k - \hat{K}')}{K} Y' + (1 - Y) \left[\frac{e^{2A} U^2}{K^2} - \frac{1}{2} Y(2 - Y) \right] = 0, \quad (2.31)$$

$$U'' - \left[\frac{(k - \hat{K}')}{K} + 2\hat{A}' \right] U' - \alpha(1 - Y)^2 U = 0, \quad (2.32)$$

$$\hat{A}'' + \frac{(k - \hat{K}')}{K} \hat{A}' - 4\pi\eta^2 \left[\frac{1}{2} Y^2(2 - Y)^2 - \frac{2e^{2A} (U')^2}{\alpha K^2} \right] = 0, \quad (2.33)$$

$$\hat{K}'' - 4\pi\eta^2 \left[\frac{3}{4} K Y^2(2 - Y)^2 + \frac{e^{2A}}{K} (2(1 - Y)^2 U^2 - \frac{(U')^2}{\alpha}) \right] = 0, \quad (2.34)$$

onde $K = kr + k_0 - \hat{K}$ e $A = a_0 - \hat{A}$. As condições em $r = 0$ tornam-se

$$\begin{aligned} Y(0) &= U(0) = 1, \quad \hat{A}(0) = a_0, \quad \hat{K}(0) = k_0, \\ \hat{A}'(0) &= 0, \quad \hat{K}'(0) = k - 1. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Veremos mais adiante (Sec. 2.6) que a condição $\hat{A}'(0) = 0$ não é independente, podendo ser deduzida de $A(0) = 0$ e da regularidade de A quando $r \rightarrow 0$.

²No caso especial $\alpha = 1$, k e a_0 são conhecidos de antemão.

Os resultados assintóticos mostram que Y , U , \hat{A} e \hat{K} tendem a zero exponencialmente com $r \rightarrow \infty$. Entretanto, no processo de solução numérica adotaremos condições de contorno assintóticas em um raio $r = r_{\max}$ suficientemente grande [20]. Em vista dos resultados da seção anterior, as condições assintóticas são

$$Y' \sim \begin{cases} -Y & \alpha > \frac{1}{4} \\ -2\sqrt{\alpha}Y & \alpha \leq \frac{1}{4} \end{cases} \quad (2.36)$$

$$U' \sim -\sqrt{\alpha}U \quad (2.37)$$

$$\hat{A}' \sim \begin{cases} -2\hat{A} & \alpha > 1 \\ -2\sqrt{\alpha}\hat{A} & \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (2.38)$$

$$\hat{K}' \sim \begin{cases} -2\hat{K} & \alpha > 1 \\ -2\sqrt{\alpha}\hat{K} & \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (2.39)$$

Em conclusão, o problema original, que incluía condições iniciais e de contorno, foi efetivamente reduzido a um problema de valores de contorno. Entretanto, a introdução dos parâmetros k , k_0 e a_0 causa certas dificuldades para o uso de um método simples de diferenças finitas. De fato, consideremos que o problema é discretizado em uma grade de tamanho $N + 1$, com espaçamento h : $r_i = ih, 0 \leq i \leq N$. Empregando as condições de contorno independentes em (2.35) e (2.36)-(2.39), podemos reduzir as incógnitas do sistema de equações discretizadas ao conjunto de $4N - 2$ variáveis

$$Y_i = Y(ih), U_i = U(ih), \hat{A}_i = \hat{A}(ih), \quad (1 \leq i \leq N - 1)$$

$$\hat{K}_i = \hat{K}(ih), \quad (2 \leq i \leq N - 1), \quad k, k_0, a_0$$

(a variável \hat{K}_1 pode ser expressa em termos de k e k_0 pela condição $\hat{K}'(0) = k - 1$). Por outro lado, escrevendo em forma discreta as equações (2.31)-(2.34) em $r = r_i, 1 \leq i \leq N - 1$, obtemos apenas $4N - 4$ equações. Duas equações adicionais devem portanto ser acrescentadas ao sistema que representará o

problema de valores de contorno. Uma escolha possível para estas duas equações é apresentada na próxima seção.

2.5 Identidades integrais

Garfinkle [6] mostrou que a solução do problema em consideração satisfaz a identidade

$$A'(K' - \frac{3}{4}KA') = 8\pi\eta^2 K P_\rho, \quad (2.40)$$

onde P_ρ é a pressão na direção radial definida em (2.14).³ Com o auxílio desta identidade, Garfinkle obteve uma expressão para o déficit angular da corda,

$$\Delta\theta = 8\pi\mu + \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-A} K (A')^2 dr, \quad (2.41)$$

onde μ , a densidade linear de energia da corda, é dada por

$$\mu = 2\pi\eta^2 \int_0^\infty e^{-A} K \sigma dr.$$

Por outro lado, é fácil ver que o déficit angular é dado em termos dos parâmetros assintóticos da métrica por

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= 2\pi[1 - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{d}{dr}(e^{-A}K)] \\ &= 2\pi[1 - \lim_{r \rightarrow \infty} e^{-A}(K' - KA')] \\ &= 2\pi(1 - e^{-a_0}k). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Uma forma mais conveniente para (2.41) é obtida integrando por partes e usando a equação de campo (2.11):

$$\Delta\theta = 8\pi\mu - \frac{\pi}{2} \int_0^\infty K A'(e^{-A})' dr$$

³ Pode-se mostrar facilmente que esta identidade corresponde à componente $G^{rr} - 8\pi T^{rr} = 0$ das equações de Einstein. O método empregado por Garfinkle em sua dedução é consideravelmente mais complicado, empregando as identidades de Bianchi (conservação de energia-momentum) e as condições de contorno sobre o eixo- z .

$$\begin{aligned}
 &= 8\pi\mu - \frac{\pi}{2} [KA'e^{-A}]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-A}(KA')'dr \\
 &= 16\pi^2\eta^2 \int_0^\infty e^{-A}K\sigma dr - 2\pi^2\eta^2 \int_0^\infty e^{-A}[\frac{1}{2}K(X^2 - 1)^2 - \frac{2e^{2A}(U')^2}{\alpha K}]dr.
 \end{aligned}$$

Empregando (2.42) e (2.13) na expressão acima, obtemos a identidade

$$\begin{aligned}
 1 - e^{-a_0}k &= 2\pi\eta^2 \int_0^\infty \{2Ke^{-A}[(X')^2 + \frac{1}{8}(X^2 - 1)^2] \\
 &\quad + \frac{e^A}{K}[2X^2U^2 + \frac{3}{\alpha}(U')^2]\}dr, \tag{2.43}
 \end{aligned}$$

que pode ser incluída no processo de solução numérica.

Uma segunda identidade, independente de (2.43), pode ser deduzida integrando (2.40) diretamente, e usando (2.11) e (2.12):

$$\begin{aligned}
 &8\pi\eta^2 \int_0^\infty KP_\rho dr \\
 &= \int_0^\infty A'(K' - \frac{3}{4}KA')dr \\
 &= A(K' - \frac{3}{4}KA')|_0^\infty - \int_0^\infty A[K'' - \frac{3}{4}(KA')']dr \\
 &= a_0k + 4\pi\eta^2 \int_0^\infty A[\frac{3}{8}K(X^2 - 1)^2 + \frac{e^{2A}}{K}(2X^2U^2 + \frac{(U')^2}{2\alpha})]dr.
 \end{aligned}$$

Inserindo a expressão (2.14) para P_ρ , obtém-se a identidade procurada:

$$\begin{aligned}
 a_0k &= 4\pi\eta^2 \int_0^\infty \{K[(X')^2 - \frac{1}{8}(2 + 3A)(X^2 - 1)^2] + \\
 &\quad \frac{e^{2A}}{K}[\frac{(2 - A)}{2\alpha}(U')^2 - (1 + 2A)X^2U^2]\}dr. \tag{2.44}
 \end{aligned}$$

2.6 Comportamento da solução perto de $r = 0$

Com o auxílio de um programa de computação algébrica, mostra-se por substituição direta que as séries de Maclaurin de X e K contêm apenas

potências ímpares de r , enquanto que as séries de U e A contêm apenas potências pares:

$$\begin{aligned} X &= c_1 r + c_3 r^3 + \dots \\ U &= 1 + p_2 r^2 + p_4 r^4 + \dots \\ A &= a_2 r^2 + a_4 r^4 + \dots \\ K &= r + d_3 r^3 + d_5 r^5 + \dots \end{aligned}$$

Nas expansões acima, apenas c_1 e p_2 são independentes; as demais constantes são funções não-lineares de c_1 e p_2 (e também de α e η).

2.7 Um método de diferenças finitas

Com a inclusão de (2.43) e (2.44), o problema a ser discretizado assume a forma

$$y^{j''} = f^j(r, y^k, y^{k'}; \beta_s), \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (2.45)$$

$$\xi_a(\beta_s) = \int_0^\infty \phi_a(r, y^j, y^{j'}; \beta_s) dr, \quad a = 1, 2 \quad (2.46)$$

$$y^j(0) = \gamma_0^j(\beta_s), \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (2.47)$$

$$y^{4'}(0) = \beta_1 - 1 \quad (2.48)$$

$$y^{j'} \sim -c_j y^j, \quad r \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (2.49)$$

onde $y^j = (Y, U, \hat{A}, \hat{K})$, $\beta_s = (k, k_0, a_0)$ e as funções f^j , ξ_a , ϕ_a e γ_0^j são determinadas por (2.31)-(2.34), (2.35), (2.43) e (2.44).

O método mais simples de discretização de (2.45)-(2.49) em uma grade $r_i = ih$, $0 \leq i \leq N$, consiste em:

- Escrever as equações diferenciais em $r = r_i$, $1 \leq i \leq N-1$, substituindo $y^{k'}(r_i)$ por $(y_{i+1}^k - y_{i-1}^k)/2h$ e $y^{k''}(r_i)$ por $(y_{i+1}^k - 2y_i^k + y_{i-1}^k)/h^2$, onde $y_i^k = y^k(r_i)$.

- Os valores de y_0^k e y_N^k são eliminados das equações aplicando as condições em $r = 0$ e as condições assintóticas em $r = r_N = Nh$:

$$y_0^k = \gamma_0^k(\beta_s), \quad y_N^k \sim (1 - c_k h)y_{N-1}^k$$

(assume-se que $h \ll 1/c_k$); a condição (2.48) é empregada para eliminar y_1^A :

$$y_1^A \simeq \beta_2 + (\beta_1 - 1)h.$$

- As identidades integrais são discretizadas utilizando a aproximação anterior para as derivadas $y^{k'}(r_i)$, e aplicando uma regra de quadratura composta do tipo Newton-Cotes no intervalo $0 \leq r \leq r_{N-1}$,

$$\xi_a(\beta_s) = h \sum_{i=1}^{N-1} w_i \phi_a(r_i, y^j, \frac{y_{i+1}^j - y_{i-1}^j}{2h}; \beta_s), \quad (2.50)$$

onde w_i são os pesos associados com a regra escolhida. O termo $i = 0$ foi omitido na somatória acima, uma vez que o comportamento das funções incógnitas para r pequeno implica que os integrandos de (2.43) e (2.44) devem se anular em $r = 0$. A contribuição do intervalo $r \geq r_{N-1}$ às integrais foi também omitida; na prática, tomando-se $r_N = Nh$ suficientemente grande, sempre foi possível tornar esta contribuição desprezível em comparação com outras fontes de erro.

Como mencionado na Sec. 4.1.3, obtém-se do algoritmo acima um conjunto de $4N - 2$ equações não-lineares em $4N - 2$ incógnitas. Devido à complexidade destas equações, decidiu-se efetuar a solução numérica do sistema através de um método quase-Newton, que dispensa o fornecimento de expressões para o jacobiano. Com esta finalidade, a rotina **C05NBF** da biblioteca NAG [21] foi empregada.

Após a determinação da solução numérica para as funções incógnitas nos pontos de grade (y_i^k) e os parâmetros β_s , pode-se determinar a densidade linear de energia da corda através de regras de quadratura numérica, como descrito acima. As constantes arbitrárias que aparecem nas formas assintóticas das funções incógnitas (como p_0 e c_0) podem ser estimadas a partir dos valores de y_N^k ; por exemplo,

$$p_0 \approx \frac{U_N}{r_N^{1/2} e^{-\sqrt{\alpha} r_N}}.$$

Foram realizados experimentos numéricos com o método acima descrito, procurando reproduzir os resultados de Laguna-Castillo e Matzner [7] para o intervalo de parâmetros $10^{-3} \leq \eta \leq 10^{-1}$, $\frac{1}{64} \leq \alpha \leq 64$. Os valores de N variaram entre 25 e 200 e os de r_N entre 7 e 30. Três regras de quadratura, em ordem crescente de precisão, foram testadas para o cálculo de (2.50) [22]:

Regra trapezoidal: $w_i \equiv 1$

Regra de Simpson: $w_i = \begin{cases} \frac{4}{3} & i \text{ ímpar} \\ \frac{2}{3} & i \text{ par} \end{cases}$

Regra de Boole: $w_i = \begin{cases} \frac{64}{45} & i \text{ ímpar} \\ \frac{24}{45} & i \equiv 2 \pmod{4} \\ \frac{28}{45} & i \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}$

Os resultados obtidos com cada uma das regras acima são bastante próximos dos de [7] (diferenças geralmente menores que 0,5%), e como esperado são insensíveis ao valor preciso de r_N , contanto que este seja suficientemente grande. Verificou-se que na maioria dos casos o uso das regras de maior precisão aumentava significativamente a rapidez de convergência. Entretanto, para $N \leq 200$, o algoritmo desta seção geralmente não permitiu reproduzir mais de 3 dígitos significativos dos resultados de [7]. Por exemplo, os valores de $\Delta\theta$ determinados para a corda com $\eta = 10^{-1}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ quando se usa a regra de Boole, $r_N = 10$ e $N = 50, 100$ e 200 foram respectivamente

52,504°, 52,577° e 52,598°; o valor publicado é 52,61°.

2.8 Refinamento da solução em diferenças finitas

A fim de evitar o uso de grades excessivamente finas, com o correspondente aumento de uso de memória e tempo de processamento, resolveu-se tentar implementar métodos de refinamento da solução em diferenças finitas. O método de refinamento mais simples é a extrapolação de Richardson [23], no qual a solução numérica é recalculada em uma grade mais fina do que a original (normalmente com um múltiplo inteiro do número de pontos usado inicialmente); entretanto, a solução refinada é obtida apenas para a grade original. Assumindo (como esperado) que o erro de discretização do método da seção anterior é $O(h^2)$, a extrapolação de Richardson produz resultados razoavelmente satisfatórios. Como um exemplo, consideremos novamente a corda com $\eta = 10^{-1}$, $\alpha = \frac{1}{2}$. Aplicando a extrapolação aos resultados obtidos com $N = 50$ e 100, obtemos a estimativa refinada $(\Delta\theta)_{\text{Rich.}} = 52.602^\circ$; os resultados com $N = 100$ e 200 produzem $(\Delta\theta)_{\text{Rich.}} = 52,605^\circ$.

Um método de refinamento mais complexo, e que não recorre ao uso de uma grade mais fina do que a original, é a “correção iterada de defeitos” [16]. Em uma das versões do método, a solução numérica é interpolada com uma função polinomial por partes; esta função é usada para construir “pequenas perturbações” às equações e condições de contorno originais, de tal forma que a função interpoladora se torne a solução exata do problema perturbado. Este último problema é então resolvido numericamente pelo mesmo método e com a mesma grade usados para o problema original. A diferença entre as soluções numéricas dos problemas original e perturbado é então tomada

como uma estimativa do erro de discretização da solução numérica original. Escolhendo a função interpoladora adequadamente, o processo pode ser iterado, produzindo estimativas melhores para o erro de discretização (v. [16] para detalhes).

Se denotarmos por $\bar{y}^k(r)$ a função que interpola a solução em diferenças finitas do problema (2.45)-(2.49), e por $\bar{\beta}_s$ os valores obtidos numericamente para β_s , podemos escrever o problema perturbado na forma

$$y^{j''} = f^j(r, y^k, y^{k'}; \beta_s) + \bar{y}^{j''} - f^j(r, \bar{y}^k, \bar{y}^{k'}; \bar{\beta}_s), \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \xi_a(\beta_s) &= \int_0^\infty \phi_a(r, y^j, y^{j'}; \beta_s) dr + \xi_a(\bar{\beta}_s) \\ &- \int_0^\infty \phi_a(r, \bar{y}^j, \bar{y}^{j'}; \bar{\beta}_s) dr, \end{aligned} \quad (2.52)$$

com expressões análogas para as condições de contorno. Note-se que se \bar{y}^k está próximo da solução exata, espera-se que os termos perturbadores na equação acima sejam "pequenos".

Em outra versão do método, o erro de discretização é determinado através da solução numérica de certas equações diferenciais. No caso do problema (2.45)-(2.49), escrevendo

$$y^k = \bar{y}^k + \delta y^k, \quad \beta_s = \bar{\beta}_s + \delta \beta_s,$$

onde δy^k e $\delta \beta_s$ são os erros de discretização, obtém-se por substituição nas equações originais as seguintes equações para os erros:

$$\delta y^{j''} = f^j(r, \bar{y}^k + \delta y^k, \bar{y}^{k'} + \delta y^{k'}; \bar{\beta}_s + \delta \beta_s) - \bar{y}^{j''}, \quad (2.53)$$

$$\xi_a(\bar{\beta}_s + \delta \beta_s) = \int_0^\infty \phi_a(r, \bar{y}^j + \delta y^j, \bar{y}^{j'} + \delta y^{j'}; \bar{\beta}_s + \delta \beta_s) dr; \quad (2.54)$$

condições de contorno para δy^k podem também ser deduzidas. Frank [16] sugere que se linearize as equações para δy^j , $\delta \beta_s$, uma vez que se espera

que os erros na solução original sejam pequenos. No caso em consideração, entretanto, esta estratégia não é possível devido à presença da singularidade nas equações em $r = 0$.

Ambas as versões (2.51)-(2.52) e (2.53)-(2.54) foram implementadas numericamente, utilizando splines polinomiais como funções interpoladoras. Frank [16] argumenta que o uso de splines cúbicas não produz um refinamento significativo da solução, e recomenda o uso de splines de ordem superior. Adotou-se então a interpolação com splines de grau $l \geq 5$ [24],

$$\bar{y}^j(r) = \sum_{i=1}^{N+l} c_i^j N^{l+1}\left(\frac{r}{h} - i + l + 1\right), \quad 0 \leq r \leq Nh, \quad (2.55)$$

onde N^{l+1} é a B -spline

$$N^{l+1}(\xi) = \frac{1}{l!} \sum_{i=0}^{l+1} (-1)^i \binom{l+1}{i} (\xi - i)_+^l$$

e

$$\xi_+^l = \begin{cases} \xi^l & \xi \geq 0 \\ 0 & \xi < 0. \end{cases}$$

Os coeficientes c_i^j são determinados por um sistema de equações lineares que inclui as condições de interpolação e certas condições de contorno impostas em $r = 0$ e $r = Nh$.

Os resultados fornecidos pelas duas versões do método de correção iterada de defeitos para uma mesma função interpoladora foram geralmente muito próximos. Entretanto, certas correções (particularmente $\delta\beta_2$, $\delta\beta_3$, δy^3 e δy^4) eram bastante sensíveis à escolha do grau l da spline interpoladora. Desta forma, os resultados "refinados" não eram suficientemente confiáveis, e este método de refinamento foi abandonado.

2.9 Colocação com splines

O método de colocação com splines (v., por exemplo, [17, 18]), no qual a solução aproximada é procurada como uma combinação linear de B -splines, tem a propriedade conveniente de permitir a aproximação da função incógnita e de algumas de suas derivadas sobre todo o intervalo de integração, e não apenas nos pontos de grade. Além disso, a precisão do método de colocação aumenta com o grau da spline [25], o que permite construir de maneira uniforme uma hierarquia de métodos de precisão crescente. Por outro lado, não existe um processo geral simples para a produção de esquemas de diferenças finitas de ordem superior (v., por exemplo, [26, 27]).

Um método de colocação com splines de grau $l = 5$ foi implementado para o problema (2.45)-(2.49): procuramos combinações lineares (2.55) (com $l = 5$) e constantes β_s , que satisfaçam o sistema aproximadamente em algum sentido. O problema discretizado terá portanto as $4N + 23$ incógnitas c_i^j , $1 \leq j \leq 4$, $1 \leq i \leq N + 5$, β_s , $s = 1, 2, 3$. Substituindo (2.55) nas equações diferenciais (2.45), e exigindo que estas sejam satisfeitas em $r = h, 2h, \dots, Nh$, obtém-se $4N$ equações para o sistema discretizado. As condições de contorno em $r = 0$ e $r = Nh$ fornecem 9 equações; a inclusão das duas identidades integrais (2.40) e (2.41) (calculadas pela regra de Boole em uma grade com passo menor que h , para maior precisão) fornece até agora um conjunto de $4N + 11$ equações. Uma possível escolha para as 12 equações que restam consiste em:

- Impor as condições seguintes sobre as derivadas das funções incógnitas em $r = 0$, em conformidade com os resultados da Sec. 4.1.5:

$$Y'''(0) = U'(0) = \hat{A}'(0) = \hat{K}''(0) = Y^{(iv)}(0) =$$

$$U'''(0) = \hat{A}'''(0) = \hat{K}^{(iv)}(0) = 0;$$

- Impor as condições assintóticas $y^{j'} \sim -c_j y^j$ também em $r = (N - 1)h$.

Experimentos numéricos com este método de colocação (onde o sistema de equações não-lineares é resolvido pela rotina quase-Newton **C05NBF** da biblioteca NAG [21]) mostraram que sua convergência é muito mais rápida do que a do método de diferenças finitas apresentado anteriormente. Além disso, o método de colocação fornece resultados de boa qualidade mesmo com grades muito grosseiras: para a corda com $\eta = 10^{-1}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ considerada previamente, uma grade com $N = 5$ e $r_N = 7$ fornece $\Delta\theta = 52,623^\circ$, que está mais próximo do resultado de Laguna-Castillo e Matzner [7] ($52,61^\circ$) do que a solução em diferenças finitas com $N = 100$, $r_N = 10$ ($52,577^\circ$). Uma ilustração mais completa da rápida convergência do método de colocação é apresentada na Tabela 2.1, onde são comparados alguns resultados para a corda considerada acima, obtidos com $(N = 30, r_N = 10)$ e $(N = 90, r_N = 15)$.

Em alguns casos testados, o método de colocação permitiu detectar algumas pequenas correções que devem ser aplicadas à Tabela I de [7], e em outros casos refinar os valores ali apresentados. Por exemplo, a Tabela 2.2 mostra os os déficits angulares e densidades lineares de energia calculados para a corda com $\eta = 10^{-1}$, $\alpha = \frac{1}{32}$ usando várias discretizações. Para comparação, a Tabela I de [7] fornece $\Delta\theta = 97,56^\circ$, $\mu/\pi\eta^2 = 2,1470$, que diferem ligeiramente (da ordem de 0,1%) dos resultados da Tabela 2.2. Para a corda com $\eta = 10^{-1}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, os resultados obtidos pelo método de colocação (Tabela 2.3) contêm um ou dois dígitos significativos além dos apresentados em [7].⁴

⁴Note que o valor apresentado em [7] para a densidade linear de energia (1,1163) contém

Tabela 2.1:

	$N = 30, r_N = 10$	$N = 90, r_N = 15$
$\Delta\theta(\text{graus})$	52,60462	52,60486
$\mu/\pi\eta^2$	1,162727	1,162730
k	0,8451220	0,8451217
k_0	0,220726	0,220642
a_0	-0,01030481	-0,01030465
c_0	3,527	3,509
p_0	1,478	1,477
$X(r = \frac{3}{2})$	0,6605203	0,6605191
$U(r = \frac{3}{2})$	0,7280599	0,7280548
$A(r = \frac{3}{2})$	-0,00549321	-0,00549492
$K(r = \frac{3}{2})$	1,442667	1,442654
$\sigma(r = \frac{3}{2})$	0,1779573	0,1779572
$P_\rho(r = \frac{3}{2})$	-0,01138705	-0,01138730
$P_\theta(r = \frac{3}{2})$	0,00836406	0,00836531

Tabela 2.2:

N	r_N	$\Delta\theta(\text{graus})$	$\mu/\pi\eta^2$
40	30	97,358	2,14478
55	25	97,372	2,14502
55	35	97,363	2,14490
74	37	97,365	2,14496

Algumas soluções numéricas para cordas com $\eta = 10^{-1}$, obtidas por colocação com splines quárticas, são apresentadas na Fig. 2.1.

provavelmente um erro de impressão; analogamente, para $\eta = 10^{-3}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, a densidade linear dada em [7] (1,1157) deve ser corrigida para 1,157.

Tabela 2.3:

N	r_N	$\Delta\theta(\text{graus})$	$\mu/\pi\eta^2$
30	10	52,60462	1,162727
40	10	52,60472	1,162727
50	10	52,60475	1,162728
50	15	52,60477	1,162730
90	15	52,60486	1,162730

Capítulo 3

PERTURBAÇÕES RADIAIS DE CORDAS $U(1)$

3.1 Introdução

Uma teoria linearizada foi desenvolvida para o estudo de pequenas perturbações da corda estática retilínea $U(1)$ com campo gravitacional, estudada no capítulo anterior. A análise segue o espírito da teoria de estabilidade hidrodinâmica [9], e se baseia na determinação de modos normais, os quais apresentam dependência temporal da forma $e^{i\omega t}$, onde a frequência ω pode ser complexa. Em geral, se algum modo tem $\text{Im } \omega < 0$, o sistema é instável; se todos os modos tem $\text{Im } \omega \geq 0$, o sistema é estável na aproximação linear, ainda que possa ser instável no regime não-linear (Um exemplo deste tipo de comportamento foi observado recentemente por Zhou e Straumann [28]).

As perturbações mais simples que podem ser consideradas para a corda retilínea tem simetria cilíndrica. Os modos normais correspondentes são descritos pela frequência ω e pela estrutura radial das perturbações da métrica e dos campos escalar e de calibre. O sistema de equações diferenciais ordinárias que determina a estrutura radial dos modos com simetria cilíndrica divide-se

em dois subsistemas desacoplados. O primeiro (que denominaremos Subsistema I) descreve oscilações da componente $g_{\theta z}$ da métrica e da componente z do campo de calibre, enquanto o segundo (que denominaremos Subsistema II) descreve oscilações das componentes diagonais da métrica e da componente g_{tr} , da componente θ do campo de calibre e do campo escalar. As equações que compõem o Subsistema II não são todas independentes; foram determinadas certas relações entre as equações, semelhantes às relações que se pode deduzir entre as equações de Einstein exatas pelo uso das identidades de Bianchi. Uma vez reduzido a um conjunto de equações independentes, o Subsistema II não fica totalmente determinado (há mais incógnitas do que equações); esta liberdade reflete a possibilidade de efetuar mudanças de coordenadas envolvendo somente as coordenadas temporal e radial. Neste estudo, esta liberdade foi eliminada escolhendo sistemas de coordenadas que são em certo sentido mais “naturais” para a observação dos modos normais.

As condições de contorno para os modos normais foram deduzidas assumindo que (a) todas as componentes das perturbações são funções regulares em $r = 0$, (b) a métrica perturbada não apresenta singularidades cônicas em $r = 0$, e (c) as componentes físicas [29] das perturbações tendem a zero quando $r \rightarrow \infty$. Os comportamentos assintóticos dos modos normais quando $\text{Im } \omega = 0$ e $\text{Im } \omega \neq 0$ são bastante diferentes. No primeiro caso, a estrutura radial das perturbações é oscilatória, com amplitudes que geralmente decrescem como $r^{-1/2}$; no segundo caso, as perturbações devem decair exponencialmente com r . Para frequências reais, as condições de contorno no infinito são geralmente satisfeitas em um subespaço não-trivial de soluções das equações de estrutura radial, que inclui soluções regulares em $r = 0$. Assim, os modos neutros (ω real) formam um espectro contínuo. Para $\text{Im } \omega \neq 0$ (modos instáveis ou amortecidos), as equações que governam as perturbações

admitirão soluções que crescem exponencialmente quando $r \rightarrow \infty$. Por analogia com outros problemas de estabilidade hidrodinâmica, espera-se que neste caso os modos instáveis e amortecidos formem (se existirem) um espectro discreto.

Para o Subsistema I, é possível mostrar usando identidades integrais que qualquer modo instável ou amortecido terá necessariamente $\text{Re } \omega = 0$. Uma dedução similar para o Subsistema II não permite obter informações a priori sobre as frequências dos modos normais. Um estudo numérico foi então realizado para verificar a possível existência de modos instáveis ou amortecidos. Neste estudo, as equações de estrutura radial foram discretizadas empregando colocação com splines cúbicas, e o problema diferencial de autovalores foi convertido em um problema algébrico generalizado de autovalores [30]. Este último problema pode ser resolvido pelo algoritmo QZ [31], produzindo aproximações para um subconjunto finito dos autovalores e autofunções. Os modos neutros são excluídos deste estudo numérico devido às condições de contorno diferentes que satisfazem no infinito (*cf.* parágrafo anterior). Não foram encontrados modos instáveis ou amortecidos para os valores típicos dos parâmetros que definem a corda estática, considerados no capítulo anterior.

Passou-se então a um estudo dos modos neutros, que podem ser determinados para cada frequência real ω integrando numericamente as equações de estrutura radial a partir de $r = 0$ com condições iniciais diferentes para cada modo normal. Uma vez que as equações diferenciais envolvidas são singulares em $r = 0$, é preciso começar a integração em um raio “pequeno” $r = r_{\text{inic}}$, onde as condições iniciais podem ser obtidas de uma expansão de Maclaurin truncada do modo normal. Analisando a forma desta expansão, e o comportamento das soluções quando $r \rightarrow \infty$, determinou-se o número de modos normais por frequência em cada subsistema. O estudo numérico

incluiu também a determinação da amplitude e fase dos modos normais em função da frequência ω .

3.2 Perturbações com simetria cilíndrica

As perturbações mais simples que podem ser superpostas à corda estática discutida acima têm simetria cilíndrica. Podemos escrever os campos perturbados como

$$\begin{aligned} (\phi/\eta)e^{-i\theta} &= X = X_0(r) + X_1(r, t), \\ A_\mu &= (1/e)[U_0(r) - 1]\nabla_\mu\theta + A_\mu^{(1)}(r, t), \\ g_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu}^{(0)}(r) + g_{\mu\nu}^{(1)}(r, t), \end{aligned}$$

onde X_0 , U_0 , $g_{\mu\nu}^{(0)}$ referem-se à corda estática (*v.* equações (2.6)-(2.8)) e X_1 , $A_\mu^{(1)}$, $g_{\mu\nu}^{(1)}$ referem-se às perturbações. Se considerarmos apenas perturbações com a forma particular

$$A_\mu^{(1)} = (0, 0, A_\theta^{(1)}, A_z^{(1)}), \quad (3.1)$$

$$g_{\mu\nu}^{(1)} = \begin{pmatrix} g_{tt}^{(1)} & g_{tr}^{(1)} & 0 & 0 \\ g_{tr}^{(1)} & g_{rr}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\theta\theta}^{(1)} & g_{\theta z}^{(1)} \\ 0 & 0 & g_{\theta z}^{(1)} & g_{zz}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

então $G_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$ terão as mesmas componentes não-nulas que $g_{\mu\nu}$.

Será conveniente para a análise seguinte definir uma notação alternativa para as perturbações da métrica e do campo de calibre:

$$\begin{aligned} A_\theta^{(1)} &= (1/e)U_1(r, t), \\ A_z^{(1)} &= (1/e)W_1(r, t), \\ g_{tt}^{(1)} &= -2e^A\gamma_1(r, t)/\lambda\eta^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{tr}^{(1)} &= e^A \beta_1(r, t) / \lambda \eta^2, \\
g_{rr}^{(1)} &= 2P_1(r, t) / \lambda \eta^2, \\
g_{\theta\theta}^{(1)} &= 2K^2 e^{-2A} Q_1(r, t) / \lambda \eta^2, \\
g_{\theta z}^{(1)} &= e^A \Omega_1(r, t) / \lambda \eta^2, \\
g_{zz}^{(1)} &= 2e^A Z_1(r, t) / \lambda \eta^2,
\end{aligned}$$

onde $K(r)$ e $A(r)$ definem a métrica da corda estática. A parametrização de $g_{\theta\theta}^{(1)}$ requer alguma explicação. Uma vez que $K \sim r$ e $A \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$, teremos $g_{\theta\theta}^{(1)} = O(r^2)$ se $Q_1 \rightarrow \text{const.}$ quando $r \rightarrow 0$; esta é uma condição necessária para a regularidade do espaço-tempo no eixo da corda. Assim, assumiremos que as funções γ_1 , β_1 , etc. são regulares em $r = 0$.

3.3 Equações para a estrutura radial dos modos normais

Modos normais da corda U(1) discutida no capítulo anterior são soluções das equações de campo linearizadas em torno da solução estática, com dependência temporal $e^{i\omega t}$. Há vários tipos de modos normais em uso na literatura sobre oscilações de estrelas e buracos negros, os quais diferem pelas condições de contorno em $r \rightarrow \infty$. Nesta seção, apresentamos as equações diferenciais que descrevem a estrutura radial dos modos normais; a discussão de condições de contorno é deixada para as duas seções seguintes.

Assumindo que as perturbações têm uma dependência temporal da forma

$$(X_1, U_1, W_1, \gamma_1, \beta_1, P_1, Q_1, \Omega_1, Z_1) = e^{i\omega t} (\hat{X}_1, \hat{U}_1, \hat{W}_1, \hat{\gamma}_1, \frac{i}{\omega} \hat{\beta}_1, \hat{P}_1, \hat{Q}_1, \hat{\Omega}_1, \hat{Z}_1),$$

onde \hat{X}_1 , \hat{U}_1 , etc. dependem apenas de r , e linearizando as equações de campo (2.3)-(2.5) em torno da solução estática, obtém-se o seguinte conjunto

de equações para a estrutura radial das perturbações: ¹

1. *Equação para o campo escalar:*

$$\begin{aligned}
 S_X^{(1)} \equiv & \hat{X}_1'' + \frac{K'}{K} \hat{X}_1' + X_0'(\hat{\mu}'_1 + \hat{Z}'_1 + \hat{Q}'_1 - \hat{P}'_1) \\
 & + [\omega^2 e^{-A} + \frac{1}{2}(1 - 3X_0^2) - \frac{e^{2A}U_0^2}{K^2}] \hat{X}_1 - \frac{2e^{2A}X_0U_0}{K^2} \hat{U}_1 \\
 & + \frac{2e^{2A}X_0U_0^2}{K^2} \hat{Q}_1 - X_0[(X_0^2 - 1) + \frac{2e^{2A}U_0^2}{K^2}] \hat{P}_1 = 0 \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

2. *Equações para o campo de calibre:* ²

$$\begin{aligned}
 S_U^{(1)} \equiv & \hat{U}_1'' + (2A' - \frac{K'}{K}) \hat{U}_1' + U_0'(\hat{\mu}'_1 + \hat{Z}'_1 - \hat{Q}'_1 - \hat{P}'_1) \\
 & - 2\alpha X_0 U_0 \hat{X}_1 + (\omega^2 e^{-A} - \alpha X_0^2) \hat{U}_1 - 2\alpha X_0^2 U_0 \hat{P}_1 = 0, \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

$$S_W^{(1)} \equiv \hat{W}_1'' + (\frac{K'}{K} - A') \hat{W}_1' - \frac{e^{3A}U_0'}{K^2} \hat{U}_1' + (\omega^2 e^{-A} - \alpha X_0^2) \hat{W}_1 = 0 \quad (3.5)$$

3. *Equações de Einstein:* ³

$$\begin{aligned}
 S_{(1)}^{tt} \equiv & \hat{Z}_1'' + \hat{Q}_1'' + 8\pi\eta^2(X_0' \hat{X}_1' + \frac{e^{2A}U_0'}{\alpha K^2} \hat{U}_1') + \frac{K'}{K} \hat{Z}_1' + (\frac{1}{2}A' - \frac{K'}{K}) \hat{P}_1' \\
 & + (\frac{2K'}{K} - \frac{3}{2}A') \hat{Q}_1' + 4\pi\eta^2 X_0 [(X_0^2 - 1) + \frac{2e^{2A}U_0^2}{K^2}] \hat{X}_1 \\
 & + 8\pi\eta^2 \frac{e^{2A}X_0^2 U_0}{K^2} \hat{U}_1 + [8\pi\eta^2 (\frac{e^{2A}(U_0')^2}{\alpha K^2} + (X_0')^2) \\
 & + \frac{1}{2}A'(3A' - \frac{4K'}{K})] \hat{P}_1 - 8\pi\eta^2 \frac{e^{2A}}{K^2} (\frac{(U_0')^2}{\alpha} + X_0^2 U_0^2) \hat{Q}_1 = 0, \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

$$S_{(1)}^{tr} \equiv \hat{Z}_1' + \hat{Q}_1' + 8\pi\eta^2(X_0' \hat{X}_1 + \frac{e^{2A}U_0'}{\alpha K^2} \hat{U}_1) + (\frac{1}{2}A' - \frac{K'}{K}) \hat{P}_1$$

¹ As equações apresentadas foram obtidas através de computação simbólica, e foram simplificadas eliminando as segundas derivadas de X_0 , U_0 , A e K com o auxílio de (2.9)-(2.12). Alguma simplificação adicional foi conseguida empregando (2.40) para eliminar o fator $(X_0^2 - 1)^2$.

² $S_U^{(1)}$ e $S_W^{(1)}$ são proporcionais às versões linearizadas das componentes θ e z de (2.4).

³ Para cada μ, ν fixos, $S_{(1)}^{\mu\nu}$ é proporcional à perturbação de primeira ordem da expressão $G^{\mu\nu} - 8\pi T^{\mu\nu}$.

$$+(\frac{K'}{K} - \frac{3}{2}A')\hat{Q}_1 = 0 \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} S_{(1)}^{\tau\tau} \equiv & -8\pi\eta^2(X'_0\hat{X}'_1 + \frac{e^{2A}U'_0}{\alpha K^2}\hat{U}'_1) + (\frac{K'}{K} - \frac{1}{2}A')(\hat{\mu}'_1 + \hat{Z}'_1) + A'\hat{Q}'_1 \\ & + 4\pi\eta^2 X_0[(X_0^2 - 1) + \frac{2e^{2A}U_0^2}{K^2}]\hat{X}_1 + 8\pi\eta^2 \frac{e^{2A}X_0^2 U_0}{K^2}\hat{U}_1 \\ & + \omega^2 e^{-A}\hat{Z}_1 + [8\pi\eta^2(\frac{e^{2A}(U'_0)^2}{\alpha K^2} + (X'_0)^2) + \frac{1}{2}A'(3A' - \frac{4K'}{K})]\hat{P}_1 \\ & + [8\pi\eta^2 \frac{e^{2A}}{K^2}(\frac{(U'_0)^2}{\alpha} - X_0^2 U_0^2) + \omega^2 e^{-A}]\hat{Q}_1 = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} S_{(1)}^{\theta\theta} \equiv & \hat{\mu}''_1 + \hat{Z}''_1 + 8\pi\eta^2(X'_0\hat{X}'_1 - \frac{e^{2A}U'_0}{\alpha K^2}\hat{U}'_1) + A'[\frac{3}{2}(\hat{\mu}'_1 + \hat{Z}'_1) - \hat{P}'_1] \\ & + 4\pi\eta^2 X_0[(X_0^2 - 1) - \frac{2e^{2A}U_0^2}{K^2}]\hat{X}_1 - 8\pi\eta^2 \frac{e^{2A}X_0^2 U_0}{K^2}\hat{U}_1 \\ & + \omega^2 e^{-A}\hat{Z}_1 + 8\pi\eta^2 \frac{e^{2A}}{K^2}(\frac{(U'_0)^2}{\alpha} + X_0^2 U_0^2)\hat{Q}_1 \\ & + [8\pi\eta^2 \frac{e^{2A}}{K^2}(\frac{(U'_0)^2}{\alpha} - 2X_0^2 U_0^2) + 8\pi\eta^2(X'_0)^2 \\ & + \frac{1}{2}A'(3A' - \frac{4K'}{K}) + \omega^2 e^{-A}]\hat{P}_1 = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} S_{(1)}^{\theta z} \equiv & \hat{\Omega}''_1 + (3A' - \frac{K'}{K})\hat{\Omega}'_1 + 16\pi\eta^2 e^{-A}(\frac{U'_0}{\alpha}\hat{W}'_1 + X_0^2 U_0 \hat{W}_1) \\ & + \omega^2 e^{-A}\hat{\Omega}_1 = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} S_{(1)}^{zz} \equiv & \hat{\mu}''_1 + \hat{Q}''_1 + 8\pi\eta^2(X'_0\hat{X}'_1 + \frac{e^{2A}U'_0}{\alpha K^2}\hat{U}'_1) + \frac{K'}{K}\hat{\mu}'_1 + (\frac{1}{2}A' - \frac{K'}{K})\hat{P}'_1 \\ & + \frac{1}{2}(\frac{4K'}{K} - 3A')\hat{Q}'_1 + 4\pi\eta^2 X_0[(X_0^2 - 1) + \frac{2e^{2A}U_0^2}{K^2}]\hat{X}_1 \\ & + 8\pi\eta^2 \frac{e^{2A}X_0^2 U_0}{K^2}\hat{U}_1 + [8\pi\eta^2(\frac{e^{2A}(U'_0)^2}{\alpha K^2} + (X'_0)^2) \\ & + \frac{1}{2}A'(3A' - \frac{4K'}{K}) + \omega^2 e^{-A}]\hat{P}_1 + [\omega^2 e^{-A} \\ & - 8\pi\eta^2 \frac{e^{2A}}{K^2}(\frac{(U'_0)^2}{\alpha} + X_0^2 U_0^2)]\hat{Q}_1 = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Nas equações acima introduzimos a quantidade

$$\hat{\mu}_1 = \hat{\gamma}_1 - \hat{\xi}_1, \quad (3.12)$$

onde $\hat{\xi}_1$ é uma função tal que

$$\hat{\beta}_1 = \hat{\xi}'_1. \quad (3.13)$$

As equações de estrutura radial (3.3)-(3.11) podem ser divididas em dois grupos não-acoplados:

- Subsistema I: composto por (3.5) e (3.10), que envolvem apenas perturbações em A_z e $g_{\theta z}$;
- Subsistema II: composto pelas demais equações de estrutura radial, que envolvem perturbações em ϕ , A_θ , g_{tt} , g_{tr} , g_{rr} , $g_{\theta\theta}$ e g_{zz} .

Os dois subsistemas descrevem modos normais independentes admitidos pela corda estática.

O Subsistema II pode ser consideravelmente simplificado. Inicialmente, observamos que (3.11) pode ser substituída pela equação mais simples

$$\tilde{S}_{(1)}^{zz} = S_{(1)}^{tt} - S_{(1)}^{zz} = \hat{Z}'_1 - \hat{\mu}'_1 + \frac{K'}{K}(\hat{Z}'_1 - \hat{\mu}'_1) - \omega^2 e^{-A}(\hat{P}_1 + \hat{Q}_1) = 0. \quad (3.14)$$

Além disso, nem todas as equações do Subsistema II são independentes; as seguintes relações podem ser verificadas empregando (3.3), (3.4), (3.6)-(3.9) e (3.14) e eliminando as segundas derivadas de X_0 , U_0 , A e K com o auxílio de (2.9)-(2.12):

$$S_{(1)}^{tt} = \frac{d}{dr} S_{(1)}^{tr} + \frac{K'}{K} S_{(1)}^{tr}, \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} S_{(1)}^{rr} + \frac{K'}{K} S_{(1)}^{rr} - A' S_{(1)}^{tt} - \omega^2 e^{-A} S_{(1)}^{tr} + (A' - \frac{K'}{K}) S_{(1)}^{\theta\theta} \\ + \frac{1}{2} A' \tilde{S}_{(1)}^{zz} + 8\pi\eta^2 (X'_0 S_X^{(1)} + \frac{e^{2A} U'_0}{\alpha K^2} S_U^{(1)}) = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Portanto, podemos eliminar (3.6) e uma dentre as equações (3.3), (3.4), (3.9), (3.14) do Subsistema II (Devido à presença dos termos $(d/dr)S_{(1)}^{tr}$ e $(d/dr)S_{(1)}^{rr}$ em (3.15) e (3.16), as equações (3.7) e (3.8) não podem ser eliminadas do sistema sem a consideração de condições de contorno). Por simplicidade, escolhemos manter as equações (3.3), (3.4), (3.7), (3.8), (3.14) no Subsistema II. A independência destas últimas equações pode ser evidenciada pela análise do comportamento assintótico de suas soluções, apresentada na próxima seção.

Em conclusão, o Subsistema II consiste de 5 equações diferenciais nas 7 incógnitas $\hat{X}_1, \hat{U}_1, \hat{\gamma}_1, \hat{\beta}_1, \hat{P}_1, \hat{Q}_1, \hat{Z}_1$. Duas das incógnitas podem portanto ser prescritas arbitrariamente. Esta liberdade expressa o fato geométrico de que uma mudança de coordenadas envolvendo apenas t e r pode sempre ser efetuada de modo que as componentes g_{tt} , g_{tr} , g_{rr} satisfaçam duas relações prescritas [32]. Em outras palavras, a análise anterior ainda não determinou completamente o sistema de coordenadas em que as perturbações da corda estática são observadas. Uma vez que esta escolha de sistema de coordenadas não é única, e claramente o conceito de “modos normais” não é invariante sob mudanças de coordenadas envolvendo a coordenada temporal, é necessário adotar um sistema de coordenadas “convencional” para a descrição dos modos normais. As escolhas mais naturais correspondem a sistemas que são em algum sentido “semelhantes” àquele empregado na descrição da corda estática, como por exemplo um sistema onde

$$g_{tr} = 0, \quad g_{rr} = 1/(\lambda\eta^2). \quad (3.17)$$

Em termos das perturbações, este sistema corresponde a tomar $\hat{\beta}_1 = \hat{P}_1 = 0$.

3.4 Condições de contorno assintóticas para os modos normais

Nesta seção, discutimos as condições de contorno a serem satisfeitas pelos modos normais longe do eixo da corda. Antes de analisar o comportamento assintótico das soluções das equações de estrutura radial da seção anterior, é conveniente revisar os tipos de modos normais usualmente empregados em relatividade geral e teoria da estabilidade hidrodinâmica. A maioria dos estudos de perturbações em relatividade geral refere-se a sistemas com simetria esférica, como estrelas e buracos negros. A fim de facilitar a comparação dos resultados deste trabalho com os de tais estudos de perturbações, apresentamos a seguir uma pequena revisão da terminologia empregada na descrição de modos normais.

Na literatura sobre oscilações não-radiais de modelos estelares e buracos negros [11, 12, 13, 33, 34], aparecem três tipos de modos, introduzidos por Thorne [13]:

1. *Modos de onda estacionária.* Estes modos têm freqüências reais, e geralmente formam um espectro contínuo. As perturbações têm a forma

$$\psi(r, t) = \hat{\psi}_\omega(r) e^{i\omega t}, \quad (3.18)$$

onde $\hat{\psi}_\omega(r)$ pode ser tomado real para todo r ; tipicamente, esta função comporta-se assintoticamente como

$$\hat{\psi}_\omega(r) \sim \frac{A_\omega}{r^n} \cos[\omega R(r) + \delta_\omega],$$

onde A_ω não depende de r , n é uma constante positiva, $R(r) \sim r$ para r grande e δ_ω é a fase do modo normal. O fator r^{-n} está associado ao decaimento da amplitude de uma onda esférica com a distância da fonte.

Os modos desta categoria representam uma superposição de uma onda gravitacional gerada em $r = \infty$ com uma onda de igual amplitude que se propaga para longe da estrela, resultando em um padrão de onda estacionária. No estudo de pulsações não-radiais de estrelas, o interesse geralmente se concentra no estudo da evolução de perturbações iniciadas no interior da estrela, e que emitem ondas gravitacionais. Ainda que um modo de onda estacionária tomado isoladamente não possa descrever este tipo de perturbação, superposições destes modos (através de integrais de Fourier) podem ser empregadas para construir perturbações mais realistas.

2. *Modos complexos que se propagam para o exterior.* Os modos desta categoria têm frequências complexas $\omega = \sigma + i/\tau$, com $\tau > 0$, correspondendo perturbações que decaem exponencialmente no tempo, de maneira oscilatória, para r fixado. As perturbações têm a forma (3.18), com $\hat{\psi}_-(r)$ complexo (de fato, com argumento não-constante), e assintoticamente correspondem a perturbações que se propagam para o exterior:

$$\psi(r, t) \sim \frac{A_\omega}{r^n} \exp\{i\omega[t - R(r)]\},$$

onde A_ω é uma constante complexa, $n > 0$ é uma constante e $R(r) \sim r$ para r grande. A exigência de que as perturbações se propaguem para o exterior, que define esta categoria de modos, restringe os valores de ω a certos valores complexos discretos $\omega = \omega_k$, $k = 1, 2, \dots$. Uma vez que $\tau > 0$, vê-se da expressão acima que a amplitude das oscilações cresce exponencialmente quando $r \rightarrow \infty$ com t fixo. Por esta razão, ainda que apresentem perturbações que se propagam para o exterior (o que se espera de perturbações iniciadas no interior da estrela após um tempo

suficientemente longo), os modos deste tipo não podem representar pulsações realísticas de um modelo estelar.

3. *Modos quase-normais.* Estes não são modos normais no sentido próprio (uma vez que não têm dependência temporal da forma $e^{i\omega t}$), sendo construídos como superposição dos modos de onda estacionária, com um espectro que é dominado por um pico estreito em torno da frequência $\omega = \sigma_k$ correspondente a um dos modos complexos que se propagam para o exterior. Por exemplo, a superposição mais simples com o comportamento desejado tem a forma [11]

$$\psi(r, t) = \text{Re} \int_0^\infty \frac{\hat{\psi}_\omega(r) e^{i\omega t} d\omega}{(\omega - \sigma_k)^2 + (1/\tau_k)^2}.$$

(A forma do espectro na integral de Fourier acima não é única; outras possibilidades, que diferem nos detalhes do pacote de onda e na presença ou ausência de descontinuidades na frente de onda são discutidas por Price e Thorne [12]). A evolução temporal das perturbações descritas por um modo quase-normal pode ser descrita qualitativamente da seguinte maneira (*cf.* a Fig. 1 em [12]): um pacote de ondas gravitacionais incide sobre a estrela, a qual começa a oscilar e finalmente emite um pacote de ondas idêntico; este pacote de ondas tem uma frente de onda nítida, que se propaga para o exterior com a velocidade da luz; atrás da frente de onda, as perturbações são descritas aproximadamente pelo modo complexo com $\omega = \omega_k$, enquanto que adiante da frente de onda o espaço-tempo permanece essencialmente não-perturbado. Desta forma, através da construção de pacotes de onda de forma conveniente é possível interpretar fisicamente os modos complexos que se propagam para o exterior, evitando a ocorrência de perturbações exponencialmente grandes para $r \rightarrow \infty$. Os modos quase-normais representam

assim um tipo bastante particular de perturbações, que podem ser usados como modelos de pulsações estelares realistas.

Em teoria da estabilidade hidrodinâmica [9, 10], a ênfase reside em detectar a existência de modos instáveis (para os quais $\text{Im } \omega < 0$), assintoticamente estáveis (ou amortecidos, para os quais $\text{Im } \omega > 0$) e neutros (modos com frequência real, que correspondem aos modos de onda estacionária discutidos acima). A fim de que possa representar uma perturbação inicial fisicamente realizável, um modo instável ou amortecido deve ter estrutura espacial descrita por funções limitadas (ou mais precisamente, tais que as componentes físicas [29] das perturbações dos campos sejam limitadas). Em sistemas relativísticos, a existência de modos instáveis ou amortecidos não está necessariamente ligada à existência de modos complexos que se propagam para o exterior (*cf.* parágrafo anterior). Como uma ilustração, consideremos o recente diagnóstico de instabilidade da solução de Bartnik-McKinnon [35] das equações de Einstein-Yang-Mills com simetria esférica, realizado por Straumann e Zhou [36]. Nesta análise, que considerou apenas perturbações com simetria esférica, foi encontrado pelo menos um modo instável, de frequência imaginária pura, cuja função de estrutura radial é limitada em toda parte e decai exponencialmente quando $r \rightarrow \infty$.

No presente estudo, adotaremos o ponto de vista da teoria da estabilidade hidrodinâmica, tanto no estudo de modos neutros quanto no diagnóstico de possíveis instabilidades das cordas estáticas $U(1)$. O mesmo ponto de vista será empregado no Cap. 5 no estudo das perturbações de politropos cilíndricos. O ponto de vista dos modos quase-normais não será enfatizado, uma vez que (a) estes constituem perturbações bastante particulares, construídas a partir dos modos de onda estacionária, e (b) veremos mais adiante que, no estudo de perturbações radiais de cordas $U(1)$, o conceito de modos

quase-normais parece não ser de grande utilidade.

Passemos agora à determinação das condições de contorno assintóticas para os modos normais de oscilação radial de uma corda estática U(1). Quando $r \rightarrow \infty$, o comportamento assintótico da solução estática (descrito no capítulo anterior) permite aproximar as equações que compõem os Sub-sistemas I e II como ⁴

$$\hat{X}_1'' + \frac{K'}{K} \hat{X}_1' + (\omega^2 e^{-a_0} - 1) \hat{X}_1 = \epsilon_1, \quad (3.19)$$

$$\hat{U}_1'' - \frac{K'}{K} \hat{U}_1' + (\omega^2 e^{-a_0} - \alpha) \hat{U}_1 = \epsilon_2, \quad (3.20)$$

$$\hat{W}_1'' + \frac{K'}{K} \hat{W}_1' + (\omega^2 e^{-a_0} - \alpha) \hat{W}_1 = \epsilon_3, \quad (3.21)$$

$$\hat{Z}_1' + \hat{Q}_1' + \frac{K'}{K} \hat{Q}_1 = \epsilon_4, \quad (3.22)$$

$$\frac{K'}{K} (\hat{\gamma}_1' + \hat{Z}_1') + \omega^2 e^{-a_0} (\hat{Z}_1 + \hat{Q}_1) = \epsilon_5, \quad (3.23)$$

$$\hat{Z}_1'' - \hat{\gamma}_1'' + \frac{K'}{K} (\hat{Z}_1' - \hat{\gamma}_1') - \omega^2 e^{-a_0} \hat{Q}_1 = \epsilon_6, \quad (3.24)$$

$$\hat{\Omega}_1'' - \frac{K'}{K} \hat{\Omega}_1' + \omega^2 e^{-a_0} \hat{\Omega}_1 = \epsilon_7, \quad (3.25)$$

onde as funções ϵ_j são combinações lineares das perturbações com coeficientes que decaem exponencialmente quando $r \rightarrow \infty$, e $a_0 = \lim_{r \rightarrow \infty} A(r)$. Como $K(r) \sim kr + k_0 +$ termos exponencialmente pequenos, podemos aproximar o coeficiente K'/K que aparece nas equações acima pela série assintótica

$$\frac{K'}{K} \sim \frac{1}{r} \left[1 - \frac{k_0}{kr} + \left(\frac{k_0}{kr} \right)^2 - \dots \right]. \quad (3.26)$$

As equações (3.19), (3.20), (3.21) e (3.25) são essencialmente equações de Bessel; suas soluções podem portanto ser escritas como

$$\hat{X}_1 \sim h_1 r^{-1/2} e^{i\kappa_\phi r} + h_2 r^{-1/2} e^{-i\kappa_\phi r} + \hat{X}_1^{(P)}, \quad (3.27)$$

⁴ Usamos aqui o sistema de coordenadas onde (3.17) é válida; note que neste caso teremos $\hat{\beta}_1 = \hat{P}_1 = 0$, $\hat{\mu}_1 = \hat{\gamma}_1$.

$$\hat{U}_1 \sim h_3 r^{1/2} e^{i\kappa_A r} + h_4 r^{1/2} e^{-i\kappa_A r} + \hat{U}_1^{(P)}, \quad (3.28)$$

$$\hat{W}_1 \sim h_5 r^{-1/2} e^{i\kappa_A r} + h_6 r^{-1/2} e^{-i\kappa_A r} + \hat{W}_1^{(P)}, \quad (3.29)$$

$$\hat{\Omega}_1 \sim h_7 r^{1/2} e^{i\kappa_g r} + h_8 r^{1/2} e^{-i\kappa_g r} + \hat{\Omega}_1^{(P)}, \quad (3.30)$$

onde os h_j são constantes,

$$\kappa_\phi = \sqrt{\omega^2 e^{-a_0} - 1}, \quad (3.31)$$

$$\kappa_A = \sqrt{\omega^2 e^{-a_0} - \alpha}, \quad (3.32)$$

$$\kappa_g = \omega e^{-a_0/2}, \quad (3.33)$$

e $\hat{X}_1^{(P)}$, $\hat{U}_1^{(P)}$, $\hat{W}_1^{(P)}$, $\hat{\Omega}_1^{(P)}$ são soluções particulares de (3.19), (3.20), (3.21) e (3.25).

Consideremos inicialmente o Subsistema II no caso em que

$$\text{Im } \omega = 0, \quad |\omega| > e^{a_0/2} \max\{1, \sqrt{\alpha}\}, \quad (3.34)$$

para o qual κ_ϕ , κ_A são ambos reais. Adotemos provisoriamente a hipótese (a ser justificada mais adiante) de que em uma solução genérica de (3.19)-(3.24) todas as perturbações são $O(r^n)$ para algum n . Em conseqüência, as funções ϵ_j serão exponencialmente pequenas quando $r \rightarrow \infty$; podemos tomar $\hat{X}_1^{(P)}$ e $\hat{U}_1^{(P)}$ exponencialmente pequenas para r grande. Assim, \hat{X}_1 e \hat{U}_1 têm comportamento oscilatório quando $r \rightarrow \infty$.⁵

A determinação do comportamento assintótico das perturbações da métrica requer um pouco mais de análise. Inicialmente, vamos deduzir uma única equação para \hat{Z}_1 , desprezando termos exponencialmente pequenos e os

⁵ A amplitude das oscilações de \hat{U}_1 cresce com $r^{1/2}$ quando $r \rightarrow \infty$, o que parece contradizer a hipótese de "pequenas perturbações." Entretanto, este efeito é um artefato do sistema de coordenadas cilíndricas: a componente física [29] do campo de calibre correspondente a \hat{U}_1 é $A_\theta^{(1)}/\sqrt{g_{\theta\theta}^{(0)}} = O(\hat{U}_1/r) = O(r^{-1/2})$, que tende a zero com $r \rightarrow \infty$.

termos de ordem superior em (3.26). Diferenciando (3.23), obtemos

$$\frac{1}{r}(\hat{\gamma}_1'' + \hat{Z}_1'') - \frac{1}{r^2}(\hat{\gamma}_1' + \hat{Z}_1') + \omega^2 e^{-a_0}(\hat{Z}_1' + \hat{Q}_1') = 0;$$

com o auxílio de (3.22), esta expressão torna-se

$$(\hat{\gamma}_1'' + \hat{Z}_1'') - \frac{1}{r}(\hat{\gamma}_1' + \hat{Z}_1') - \omega^2 e^{-a_0} \hat{Q}_1 = 0.$$

Adicionando (3.24) à expressão anterior, obtém-se

$$2\hat{Z}_1'' - \frac{2}{r}\hat{\gamma}_1' - 2\omega^2 e^{-a_0} \hat{Q}_1 = 0.$$

Finalmente, usando (3.23), obtém-se uma equação de Bessel para \hat{Z}_1 :

$$\hat{Z}_1'' + \frac{1}{r}\hat{Z}_1' + \kappa_g^2 \hat{Z}_1 = 0.$$

Portanto, \hat{Z}_1 terá um comportamento oscilatório para r grande. Mais rigorosamente, podemos determinar o comportamento assintótico de \hat{Z}_1 , \hat{Q}_1 e $\hat{\gamma}_1$ substituindo as expansões ⁶

$$\hat{Z}_1 \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{r^{j+1/2}} [a_j \sin(\kappa_g r) + b_j \cos(\kappa_g r)], \quad (3.35)$$

$$\hat{\gamma}_1 \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{r^{j+1/2}} [c_j \sin(\kappa_g r) + d_j \cos(\kappa_g r)], \quad (3.36)$$

$$\hat{Q}_1 \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{r^{j+1/2}} [e_j \sin(\kappa_g r) + f_j \cos(\kappa_g r)], \quad (3.37)$$

em (3.22)-(3.24) e desprezando apenas os termos exponencialmente pequenos. Após alguma álgebra, mostra-se que os primeiros termos nestas expansões são

$$\hat{Z}_1 \sim \frac{1}{r^{1/2}} [a_0 \sin(\kappa_g r) + b_0 \cos(\kappa_g r)] + \dots, \quad (3.38)$$

$$\hat{\gamma}_1 \sim \frac{1}{\kappa_g r^{3/2}} [b_0 \sin(\kappa_g r) - a_0 \cos(\kappa_g r)] + \dots, \quad (3.39)$$

$$\hat{Q}_1 \sim -\frac{1}{r^{1/2}} [a_0 \sin(\kappa_g r) + b_0 \cos(\kappa_g r)] + \dots, \quad (3.40)$$

⁶ Não confundir o coeficiente a_0 que aparece nestas expansões com a constante $a_0 = \lim_{r \rightarrow \infty} A(r)$.

onde agora apenas a_0 e b_0 são constantes arbitrárias. As expressões acima não descrevem todos os comportamentos assintóticos possíveis das perturbações da métrica. Usando o fato de que K'' é exponencialmente pequeno quando $r \rightarrow \infty$ (*cf.* capítulo anterior), verifica-se que as expressões

$$\hat{Z}_1 = 0, \quad \hat{\gamma}_1 = m_1 r + m_0, \quad \hat{Q}_1 = -\frac{m_1 K'}{\kappa_g^2 K} \quad (3.41)$$

satisfazem (3.22)-(3.24) assintoticamente. Assim, determinamos expressões assintóticas dependendo de 8 parâmetros $(h_1, \dots, h_4, a_0, b_0, m_0, m_1)$ para as soluções do Subsistema II. Como este subsistema é composto por três equações de segunda ordem e duas equações de primeira ordem, claramente as expressões obtidas correspondem à solução geral do sistema. Além disso, nenhuma perturbação cresce mais rapidamente do que r quando $r \rightarrow \infty$, em acordo com a hipótese adotada inicialmente.

Assim, quando ω satisfaz (3.34), somente a componente assintótica proporcional a m_1 terá perturbações cujas componentes físicas podem divergir quando $r \rightarrow \infty$. Portanto, esta componente deverá estar ausente em um modo normal neutro. A presença da constante arbitrária m_0 em (3.41) corresponde ao fato de as equações diferenciais para as perturbações serem independentes de $\hat{\gamma}_1$. Esta componente não corresponde a perturbações físicas, podendo ser removida por uma transformação de escala infinitesimal da coordenada temporal. Em um modo normal, assumiremos sem perda de generalidade que $m_0 = 0$.

Quando ω não satisfaz (3.34), é mais difícil obter informações sobre a solução geral, devido à existência de soluções que divergem exponencialmente para r grande. Vamos portanto nos restringir ao estudo do comportamento de soluções para as quais todas as componentes físicas das perturbações são limitadas quando $r \rightarrow \infty$; estas soluções claramente incluem os modos nor-

mais quando estes existirem. Consideremos os seguintes casos:

1. $\alpha < 1$, $\text{Im } \omega = 0$, $e^{a_0/2}\sqrt{\alpha} < |\omega| < e^{a_0/2}$. Neste caso, κ_ϕ é imaginário puro; uma das soluções da versão homogênea de (3.19) cresce exponencialmente, enquanto a outra decresce. Uma vez que estamos considerando somente soluções em que todas as componentes físicas das perturbações são limitadas para r grande, o termo ϵ_1 será exponencialmente pequeno; podemos tomar $\hat{X}_1^{(P)}$ também exponencialmente pequeno. Para que a solução seja aceitável, o coeficiente da solução que cresce exponencialmente deve portanto ser zero. Assim, \hat{X}_1 será decairá exponencialmente quando $r \rightarrow \infty$. Os argumentos apresentados anteriormente sobre o comportamento das perturbações da componente θ do campo de calibre e da métrica ainda são válidos neste caso; estas perturbações serão oscilatórias.
2. $\alpha > 1$, $\text{Im } \omega = 0$, $e^{a_0/2} < |\omega| < e^{a_0/2}\sqrt{\alpha}$. Este caso é semelhante ao anterior; pode-se mostrar facilmente que \hat{U}_1 será exponencialmente pequeno para r grande, enquanto as demais perturbações seguem o comportamento oscilatório descrito anteriormente.
3. $\text{Im } \omega = 0$, $|\omega| < e^{a_0/2} \min\{1, \sqrt{\alpha}\}$. Neste caso κ_ϕ e κ_A são ambos imaginários puros; o argumento dos itens anteriores pode ser modificado para mostrar que as perturbações em ϕ e A_θ serão exponencialmente pequenas para r grande, enquanto as perturbações da métrica terão o comportamento descrito nos itens anteriores.
4. $\text{Im } \omega \neq 0$. Neste caso, κ_ϕ , κ_A e κ_g são todos complexos; como nos casos acima, uma das soluções das versões homogêneas de (3.19) e (3.20) cresce exponencialmente, enquanto a outra decai exponencialmente. A

única possibilidade para uma solução fisicamente aceitável é que \hat{X}_1 e \hat{U}_1 tendam a zero exponencialmente para r grande. A análise das três equações de Einstein (3.22)-(3.24) pode ser modificada para mostrar que as perturbações da métrica também serão exponencialmente pequenas quando $r \rightarrow \infty$.

A análise do comportamento assintótico do Subsistema I é consideravelmente mais simples, e pode ser efetuada por métodos análogos aos empregados para o Subsistema II. Os resultados são:

1. Para $\text{Im } \omega = 0$, $|\omega| > e^{a_0/2} \sqrt{\alpha}$, a solução genérica tem comportamento oscilatório, dado por (3.29) e (3.30) ⁷ (as soluções particulares que aparecem nestas expressões podem ser tomadas exponencialmente pequenas).
2. Para $\text{Im } \omega = 0$, $|\omega| < e^{a_0/2} \sqrt{\alpha}$, as soluções em que as componentes físicas das perturbações são limitadas para r grande têm \hat{W}_1 exponencialmente pequeno e $\hat{\Omega}_1$ com comportamento oscilatório, dado por (3.30).
3. Para $\text{Im } \omega \neq 0$, as soluções em que as componentes físicas das perturbações são limitadas para $r \rightarrow \infty$ têm \hat{W}_1 , $\hat{\Omega}_1$ exponencialmente pequenos.

⁷ A amplitude das oscilações de $\hat{\Omega}_1$ cresce com $r^{1/2}$; entretanto, a componente física associada a $\hat{\Omega}_1$ é $g_{\theta z}^{(1)} / \sqrt{g_{\theta\theta}^{(0)} g_{zz}^{(0)}} = O(\hat{\Omega}_1/r) = O(r^{-1/2})$, que tende a zero quando $r \rightarrow \infty$.

3.5 Comportamento dos modos normais para r pequeno

Uma vez que as equações de estrutura radial tornam-se singulares em $r = 0$, é necessário estudar o comportamento para r pequeno das soluções regulares (as únicas em que estamos interessados). Este estudo fornecerá condições de contorno para a determinação dos modos normais. Substituindo séries de Maclaurin para cada uma das perturbações nos Subsistemas I e II, e expandindo os coeficientes das perturbações com o auxílio dos resultados (*cf.* Sec. 2.6)

$$\begin{aligned} X_0 &= c_1 r + c_3 r^3 + \dots, \\ U_0 &= 1 + p_2 r^2 + p_4 r^4 + \dots, \\ A &= a_2 r^2 + a_4 r^4 + \dots, \\ K &= r + d_3 r^3 + \dots. \end{aligned}$$

pode-se mostrar que para r pequeno as perturbações comportam-se como ⁸

$$\hat{X}_1 = x_1 r + x_3 r^3 + O(r^5), \quad (3.42)$$

$$\hat{U}_1 = u_2 r^2 + u_4 r^4 + O(r^6), \quad (3.43)$$

$$\hat{W}_1 = w_0 + w_2 r^2 + w_4 r^4 + O(r^6), \quad (3.44)$$

$$\hat{\Gamma}_1 = \hat{Z}_1 + \hat{\gamma}_1 = g_0 + g_2 r^2 + g_4 r^4 + O(r^6), \quad (3.45)$$

$$\hat{\Lambda}_1 = \hat{Z}_1 - \hat{\gamma}_1 = l_0 + \frac{1}{16} \omega^2 q_2 r^4 + O(r^6), \quad (3.46)$$

$$\hat{Q}_1 = q_2 r^2 + q_4 r^4 + O(r^6), \quad (3.47)$$

$$\hat{\Omega}_1 = \varpi_2 r^2 + \varpi_4 r^4 + O(r^6). \quad (3.48)$$

⁸ Estes resultados foram obtidos através de computação simbólica, adotando a condição (3.17), ou seja, $\hat{\beta}_1 = \hat{P}_1 = 0$. Expressões para alguns coeficientes de ordem superior foram determinadas para posterior uso no estudo numérico dos modos normais (Seção 3.7).

As únicas constantes arbitrárias nas expansões acima são x_1, u_2, g_0, l_0, w_0 e ϖ_2 . Os coeficientes nas expansões das variáveis do Subsistema I são funções lineares de w_0 e ϖ_2 , enquanto que os coeficientes nas expansões das variáveis do Subsistema II são funções de x_1, u_2, g_0, l_0 . Os coeficientes nas expansões acima dependem ainda de ω e dos coeficientes nas séries de Maclaurin de X_0, U_0, A e K . As expressões para estes coeficientes são bastante extensas, e serão por esta razão omitidas. Com vistas a aplicações numéricas, notamos aqui que na computação de x_3, u_4 , etc. todas as derivadas de ordem superior de X_0, U_0, A e K em $r = 0$ podem ser expressas em função de $c_1 = X'_0(0)$ e $p_2 = \frac{1}{2}U''_0(0)$ (omitimos as expressões por brevidade); estes últimos coeficientes podem ser obtidos com grande precisão a partir da solução numérica para X_0, U_0, A e K em termos de splines quínticas (*cf.* Cap. 2).

Os resultados acima mostram que o subespaço de soluções regulares em $r = 0$ tem dimensão 2 no caso do Subsistema I e 4 no caso do Subsistema II.

Além da regularidade das soluções em $r = 0$, devemos exigir que o espaço-tempo seja livre de singularidades cônicas sobre o eixo- z , o que é equivalente a exigir que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{g_{\theta\theta}}{r^2 g_{rr}} = 1.$$

Uma vez que estamos adotando a condição (3.17) e em vista de (3.47) temos $g_{\theta\theta}^{(1)} = 2K^2 e^{-2A} Q_1 = O(r^4)$ para $r \rightarrow 0$, a condição acima estará automaticamente satisfeita para qualquer solução regular do Subsistema II.

3.5.1 Considerações de estabilidade *a priori*

Mostramos nesta seção que a partir das equações de estrutura radial das perturbações é possível obter certas identidades integrais envolvendo a frequência ω , as quais fornecem alguma informação sobre a estabilidade

da corda estática frente às perturbações com simetria cilíndrica que temos considerado. Técnicas similares são comumente empregadas em análises de estabilidade hidrodinâmica [9].

Consideremos inicialmente o Subsistema I. É fácil verificar que as equações

$$(Ke^{-A}\hat{W}'_1)' - \frac{e^{2A}U'_0}{K}\hat{\Omega}'_1 + Ke^{-A}(\omega^2e^{-A} - \alpha X_0^2)\hat{W}_1 = 0 \quad (3.49)$$

$$\left(\frac{e^{3A}}{K}\hat{\Omega}'_1\right)' + 16\pi\eta^2\frac{e^{2A}}{K}\left(\frac{U'_0}{\alpha}\hat{W}'_1 + X_0^2U_0\hat{W}_1\right) + \frac{\omega^2e^{2A}}{K}\hat{\Omega}_1 = 0 \quad (3.50)$$

são equivalentes a (3.5) e (3.10). Multiplicando (3.49) por \hat{W}_1^* e integrando por partes sobre o eixo- r , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \{Ke^{-A}[|\hat{W}'_1|^2 + (\alpha X_0^2 - \omega^2e^{-A})|\hat{W}_1|^2] + \frac{e^{2A}U'_0}{K}\hat{\Omega}'_1\hat{W}_1^*\} dr \\ = Ke^{-A}\hat{W}_1^*\hat{W}'_1\Big|_0^\infty. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Para um modo instável ou amortecido ($\text{Im } \omega \neq 0$), a análise apresentada nas duas seções anteriores mostra que as perturbações devem tender a zero exponencialmente quando $r \rightarrow \infty$, enquanto que para $r \rightarrow 0$ teremos

$$Ke^{-A}\hat{W}_1^*\hat{W}'_1 = O(r^2).$$

Portanto, os termos de contorno na equação acima se anulam para um modo com $\text{Im } \omega \neq 0$.

Analogamente, multiplicando (3.50) por $\hat{\Omega}_1^*$ e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left[\frac{e^{3A}}{K}(|\hat{\Omega}'_1|^2 - \omega^2e^{-A}|\hat{\Omega}_1|^2) - 16\pi\eta^2\frac{e^{2A}}{K}\left(\frac{U'_0}{\alpha}\hat{W}'_1\hat{\Omega}_1^* + X_0^2U_0\hat{W}_1\hat{\Omega}_1^*\right) \right] dr \\ = \frac{e^{3A}}{K}\hat{\Omega}_1^*\hat{\Omega}'_1\Big|_0^\infty, \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde os termos de contorno se anulam para um modo instável ou amortecido. A equação acima pode ser simplificada integrando por partes e empregando (2.10); o resultado é

$$\int_0^\infty \left[\frac{e^{3A}}{K} (|\hat{\Omega}'_1|^2 - \omega^2 e^{-A} |\hat{\Omega}_1|^2) + \frac{e^{2A} U'_0}{\alpha K} \hat{W}_1 \hat{\Omega}'_1 \right] dr = \frac{e^{2A} U'_0}{\alpha K} \hat{W}_1 \hat{\Omega}'_1 \Big|_0^\infty, \quad (3.53)$$

onde os termos de contorno novamente se anulam. Finalmente, combinando (3.51) e (3.53), obtemos a identidade

$$\begin{aligned} \omega^2 \int_0^\infty (16\pi\eta^2 K e^{-2A} |\hat{W}_1|^2 + \frac{\alpha e^{2A}}{K} |\hat{\Omega}_1|^2) dr = \\ \int_0^\infty [16\pi\eta^2 K e^{-A} (|\hat{W}'_1|^2 + \alpha X_0^2 |\hat{W}_1|^2) + \frac{\alpha e^{3A}}{K} |\hat{\Omega}'_1|^2 \\ + 32\pi\eta^2 \frac{e^{2A} U'_0}{K} \operatorname{Re}\{\hat{W}'_1 \hat{\Omega}'_1\}] dr. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Portanto, qualquer modo com $\operatorname{Im} \omega \neq 0$ terá ω^2 real, i.e., sua frequência será imaginária pura. Note-se que a expressão no lado direito de (3.54) não é positiva definida, de modo que não se pode excluir *a priori* a possibilidade de modos instáveis ou amortecidos. Isto é consistente com a análise das duas seções anteriores: uma vez que há duas soluções regulares independentes para o Subsistema I em $r = 0$, e para ω complexo existem duas soluções que divergem quando $r \rightarrow \infty$ (cf. (3.29)-(3.30)), é em princípio possível que para valores discretos de ω existam soluções que são regulares em toda parte.

Devido à maior complexidade do Subsistema II, a dedução de uma identidade análoga a (3.54) para este sistema torna-se consideravelmente mais trabalhosa. Antes de tratar o problema completo, é conveniente considerar o caso mais simples em que os efeitos gravitacionais da corda são desprezados. Nesta aproximação, a métrica não-perturbada corresponde ao espaço de Minkowski ($A = 0$, $K = r$), e todas as perturbações da métrica se anulam; não é necessário satisfazer as equações de Einstein, de modo que o Subsistema

II reduz-se a (3.3) e (3.4). Um cálculo análogo ao apresentado acima para o Subsistema I fornece a identidade

$$\begin{aligned} \omega^2 \int_0^\infty (r|\hat{X}_1|^2 + \frac{|\hat{U}_1|^2}{\alpha r}) dr = \\ \int_0^\infty \{r|\hat{X}_1'|^2 + \frac{|\hat{U}_1'|^2}{\alpha r} + [\frac{1}{2}r(3X_0^2 - 1) + \frac{U_0^2}{r}]|\hat{X}_1|^2 + \frac{X_0^2}{r}|\hat{U}_1|^2 \\ + \frac{4X_0U_0}{r} \text{Re}\{\hat{X}_1^* \hat{U}_1\}\} dr, \end{aligned} \quad (3.55)$$

que será válida para modos com $\text{Im } \omega \neq 0$. À semelhança de (3.54), esta expressão diz apenas que modos instáveis ou amortecidos terão frequências imaginárias puras, não excluindo a possibilidade de sua existência.

Consideremos agora o Subsistema II propriamente dito, assumindo um sistema de coordenadas onde (3.17) é válida. Mostraremos mais abaixo que o Subsistema II pode ser escrito na forma

$$(\Xi \mathbf{y}')' + \mathbf{V}^{(1)} \mathbf{y}' + \mathbf{V}^{(2)} \mathbf{y} + \omega^2 \mathbf{D} \mathbf{y} = 0, \quad (3.56)$$

onde $\mathbf{y} = (\hat{X}_1, \hat{U}_1, \hat{Z}_1, \hat{\gamma}_1, \hat{Q}_1)^T$, e $\Xi(r)$, $\mathbf{V}^{(1)}(r)$, $\mathbf{V}^{(2)}(r)$ e $\mathbf{D}(r)$ são matrizes 5×5 que não dependem de ω , com Ξ e \mathbf{D} diagonais. Pode-se provar usando integração por partes que um sistema linear genérico da forma (3.56) satisfaz a identidade integral ⁹

$$\begin{aligned} \omega^2 \int_0^\infty \mathbf{y}^T \mathbf{D} \mathbf{y}^* dr = \int_0^\infty \mathbf{Y}^T \mathbf{S} \mathbf{Y}^* dr - \int_0^\infty \mathbf{Y}^T \mathbf{A} \mathbf{Y}^* dr \\ - [\mathbf{y}^T \Xi \mathbf{y}^* + \frac{1}{2} \mathbf{y}^T (\mathbf{S}^{(1)} - \mathbf{A}^{(1)}) \mathbf{y}^*]_0^\infty, \end{aligned} \quad (3.57)$$

onde $\mathbf{Y} = (y^1, \dots, y^5, y^{1'}, \dots, y^{5'})^T$, \mathbf{S} e \mathbf{A} são respectivamente as partes simétrica e anti-simétrica de

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{V}^{(1)'} - \mathbf{V}^{(2)} & -\frac{1}{2} \mathbf{V}^{(1)} \\ \frac{1}{2} \mathbf{V}^{(1)} & \Xi \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

⁹ A demonstração deste resultado será omitida por brevidade.

e $\mathbf{S}^{(1)}$ e $\mathbf{A}^{(1)}$ são as partes simétrica e anti-simétrica de $\mathbf{V}^{(1)}$. Claramente, a primeira integral à direita em (3.57) é real, enquanto que a segunda é imaginária pura. Basicamente, a identidade (3.57) pode ser empregada para decidir (a) se os modos normais terão ou não ω^2 real, e (b) se para um modo normal a parte real de ω^2 terá ou não um sinal definido *a priori*. Para responder a questão (a) afirmativamente, é preciso mostrar que o sistema de equações em estudo pode ser escrito na forma (3.56) de maneira que $\mathbf{A} = 0$ ou, equivalentemente, que $\mathbf{V}^{(1)}$ seja anti-simétrica e $\frac{1}{2}\mathbf{V}^{(1)'} - \mathbf{V}^{(2)}$ seja simétrica. A questão (b) terá uma resposta afirmativa se a primeira integral no lado direito for positiva definida. Pode-se mostrar que se os elementos da diagonal de \mathbf{D} forem todos positivos, então uma condição suficiente para isto é que a matriz \mathbf{S} seja positiva definida.

Verifica-se por cálculo direto que a forma (3.56) pode ser obtida reescrevendo o Subsistema II na forma equivalente

$$8\pi\eta^2 K S_X^{(1)} - K X'_0 S_{(1)}^{tr} = 0 \quad (3.59)$$

$$8\pi\eta^2 \frac{e^{2A}}{\alpha K} S_U^{(1)} = 0 \quad (3.60)$$

$$\frac{1}{2}K(\tilde{S}_{(1)}^{zz} + S_{(1)}^{\theta\theta} + S_{(1)}^{rr} - A' S_{(1)}^{tr}) = 0 \quad (3.61)$$

$$\frac{1}{2}K(\tilde{S}_{(1)}^{zz} + S_{(1)}^{rr} - S_{(1)}^{\theta\theta}) - (K' - \frac{1}{2}KA')S_{(1)}^{tr} = 0 \quad (3.62)$$

$$K[S_{(1)}^{zz} + \frac{1}{2}(\tilde{S}_{(1)}^{zz} + S_{(1)}^{rr} - S_{(1)}^{\theta\theta})] - (K' - KA')S_{(1)}^{tr} = 0. \quad (3.63)$$

Esta maneira de escrever o Subsistema II na forma (3.56) não é única. Além de multiplicar as equações por funções arbitrárias, pode-se adicionar a cada uma das equações múltiplos arbitrários de $S_{(1)}^{tr} = 0$ sem alterar a forma (3.56). Quando o Subsistema II é escrito como (3.59)-(3.63), os coeficientes em (3.56) são

$$\Xi = \text{diag}(8\pi\eta^2 K, 8\pi\eta^2 \frac{e^{2A}}{\alpha K}, K, -K, K)$$

$$\mathbf{D} = \text{diag}(8\pi\eta^2 K e^{-A}, 8\pi\eta^2 \frac{e^A}{\alpha K}, K e^{-A}, 0, K e^{-A})$$

$$\mathbf{V}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 8\pi\eta^2 K X'_0 & 0 \\ 0 & 0 & 8\pi\eta^2 \frac{e^{2A} U'_0}{\alpha K} & 8\pi\eta^2 \frac{e^{2A} U'_0}{\alpha K} & -8\pi\eta^2 \frac{e^{2A} U'_0}{\alpha K} \\ 0 & -8\pi\eta^2 \frac{e^{2A} U'_0}{\alpha K} & 0 & \frac{1}{2} K A' & 0 \\ -8\pi\eta^2 K X'_0 & 0 & -\frac{1}{2} K A' & K' - K A' & K A' - K' \\ 0 & 8\pi\eta^2 \frac{e^{2A} U'_0}{\alpha K} & 0 & K' - K A' & 0 \end{pmatrix}$$

(a expressão para $\mathbf{V}^{(2)}$ será omitida por brevidade). Ainda que a maioria dos elementos de $\mathbf{V}^{(1)}$ satisfaça $V_{ij}^{(1)} = -V_{ji}^{(1)}$, a matriz não é anti-simétrica; além disso, é fácil ver que os únicos elementos não-nulos de sua parte simétrica não podem ser eliminados utilizando a liberdade mencionada acima. Portanto, não é possível responder afirmativamente à questão (a) formulada anteriormente. A questão (b) não foi investigada em detalhe; entretanto, acreditamos que sua resposta seria negativa, uma vez que mesmo no caso mais simples em que os efeitos gravitacionais da corda são desprezados o sinal de $\text{Re } \omega^2$ não é definido *a priori*.

Outro argumento a favor da inexistência de modos instáveis ou amortecidos para o Subsistema II provém da análise das duas seções anteriores. O comportamento assintótico de uma solução arbitrária do Subsistema II para ω complexo (*cf.* Sec. 3.4) inclui 5 componentes que não devem estar presentes em um modo normal (três componentes que divergem exponencialmente, e as componentes proporcionais a m_0 e m_1); entretanto, há apenas 4 soluções regulares independentes em $r = 0$. Assim, provavelmente para nenhum valor de ω será possível satisfazer as condições de contorno correspondentes a um modo instável ou amortecido. Note-se que este argumento também mostra que não devem existir modos complexos em que todos os campos se propagam para o exterior.

3.6 Estudo numérico dos modos normais

3.6.1 Modos instáveis e amortecidos

Uma vez que as identidades integrais derivadas na seção anterior não resolveram definitivamente a questão da existência de modos instáveis ou amortecidos, realizamos um estudo numérico para determinar estes modos, caso existam. Para isto, é necessário resolver os problemas de autovalores associados aos Subsistemas I e II com condições de contorno de regularidade das perturbações em $r = 0$ e de decaimento exponencial das mesmas para $r \rightarrow \infty$. Os métodos para a solução numérica deste tipo de problema dividem-se em duas classes [30]: métodos de valor inicial (*shooting* e suas variantes) e métodos globais (nos quais o problema discretizado é considerado como um problema algébrico de autovalores, permitindo a determinação de várias autofunções simultaneamente). Neste estudo, empregamos um método de colocação com splines cúbicas (um método global), já que temos pouca informação *a priori* sobre o espectro de autovalores, especialmente no caso do Subsistema II.

Para maior flexibilidade, construímos um programa que é capaz de tratar problemas da forma geral

$$\epsilon \mathbf{y}'' + \mathbf{V}^{(1)} \mathbf{y}' + \mathbf{V}^{(2)} \mathbf{y} = E \mathbf{V}^{(3)} \mathbf{y}, \quad (3.64)$$

onde $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^q)^T$, ϵ , $\mathbf{V}^{(1)}$, $\mathbf{V}^{(2)}$, $\mathbf{V}^{(3)}$ são matrizes $q \times q$, com $\epsilon = \text{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_q)$, $\epsilon_i = 0$ ou 1 , e E é o autovalor (no caso em estudo $E = \omega^2$). O Subsistema I tem a forma (3.64) com $q = 2$, $\mathbf{y}^i = (\hat{W}_1, \hat{\Omega}_1)$ e $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$. Introduzindo as variáveis

$$\hat{\Gamma}_1 = \hat{Z}_1 + \hat{\gamma}_1, \quad \hat{\Lambda}_1 = \hat{Z}_1 - \hat{\gamma}_1,$$

e assumindo um sistema de coordenadas onde (3.17) é válida, o Subsistema II pode ser escrito na forma (3.64) com $q = 5$, $y^i = (\hat{X}_1, \hat{U}_1, \hat{\Lambda}_1, \hat{\Gamma}_1, \hat{Q}_1)$, $\epsilon_i = (1, 1, 1, 0, 0)$.

No método de colocação com splines cúbicas, as autofunções são aproximadas sobre um intervalo finito $0 \leq r \leq r_{\max} = Nh$ por uma combinação linear de B -splines cúbicas [24],

$$y^j(r) = \sum_{k=1}^{N+3} c_k^j N^4\left(\frac{r}{h} - k + 4\right),$$

$j = 1, \dots, q$, onde

$$N^4(\xi) = 4 \sum_{i=0}^{[\xi]} \frac{(-1)^i (\xi - i)^3}{i!(4 - i)!}$$

e $[\xi]$ denota a parte inteira de ξ . Exige-se que as soluções aproximadas satisfaçam as equações diferenciais (3.56) em $r = h, 2h, \dots, Nh$ (devido à singularidade das equações em $r = 0$, não exigimos que as equações sejam satisfeitas neste ponto), além de condições de contorno em $r = 0$ e $r = Nh$. A discretização das equações diferenciais fornece o conjunto de Nq equações

$$\begin{aligned} \epsilon_i h^{-2} \sum_{k=1}^3 D_k^2 c_{m+k}^i + \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^3 [V_{ij}^{(2)}(mh) D_k^0 - h^{-1} V_{ij}^{(1)}(mh) D_k^1] c_{m+k}^j \\ = \omega^2 \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^3 V_{ij}^{(3)}(mh) D_k^0 c_{m+k}^j, \end{aligned}$$

onde

$$D_k^j = \left. \frac{d^j N^4}{d\xi^j} \right|_{\xi=k}.$$

Uma vez que há $(N + 3)q$ incógnitas c_k^j , é necessário especificar $3q$ condições de contorno. O problema de valores de contorno pode ser então representado em forma discreta por um problema algébrico generalizado de autovalores,

$$\mathbf{Ac} = E\mathbf{Bc}, \tag{3.65}$$

onde $\mathbf{c} = (c_1^1, \dots, c_{N+3}^1, c_1^2, \dots, c_{N+3}^2, \dots, c_1^q, \dots, c_{N+3}^q)^T$ e \mathbf{A} , \mathbf{B} são matrizes $(N+3)q \times (N+3)q$. O problema (3.65) pode ser resolvido numericamente através do algoritmo QZ [31, 21].

Em geral, muitas das autofunções produzidas por um método numérico global não correspondem a autofunções do problema original [30], dando origem a modos espúrios que podem ser identificados resolvendo o problema (3.65) para duas grades com espaçamentos contrastantes. Os autovalores e autofunções espúrios são muito sensíveis às condições de discretização, enquanto os autovalores e autofunções verdadeiros devem convergir para limites definidos quando $h \rightarrow 0$.

No caso dos Subsistemas I e II, as condições de contorno foram escolhidas da seguinte maneira:

1. *Condições em $r = r_{\max} = Nh$.* Uma vez que é difícil obter informações detalhadas sobre as taxas de decaimento exponencial das perturbações em um modo normal com $\text{Im } \omega \neq 0$, foi necessário substituir as condições assintóticas empregadas anteriormente na determinação da solução estática pela condição mais grosseira $y^j(r_{\max}) = 0$, onde r_{\max} é tomado muito maior do que as escalas radiais características dos campos da corda estática.
2. *Condições em $r = 0$.* Estas condições são determinadas a partir das expansões de Maclaurin (3.42)-(3.48). Uma vez que as splines cúbicas são funções de classe C^2 , somente é possível utilizar condições de contorno envolvendo derivadas até a segunda ordem. Um conjunto de condições que pode ser empregado é

$$\begin{aligned} \hat{X}_1(0) &= \hat{X}_1''(0) = \hat{U}_1(0) = \hat{U}_1'(0) = \hat{W}_1'(0) = \hat{\Gamma}_1'(0) = \hat{\Lambda}_1'(0) \\ &= \hat{\Lambda}_1''(0) = \hat{Q}_1(0) = \hat{Q}_1'(0) = \hat{\Omega}_1(0) = \hat{\Omega}_1'(0) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\hat{W}_1''(0) &= w_2(\hat{W}_1(0), \frac{1}{2}\hat{\Omega}_1''(0)), \\ \frac{1}{2}\hat{\Gamma}_1''(0) &= g_2(\frac{1}{2}\hat{U}_1''(0), \hat{\Gamma}_1(0), \hat{\Lambda}_1(0)),\end{aligned}$$

onde as funções w_2 e g_2 foram definidas na Seção 3.5.

No estudo numérico, foram consideradas cordas estáticas com parâmetros nos intervalos $10^{-3} \leq \eta \leq 10^{-1}$, $\frac{1}{8} \leq \alpha \leq 8$; as soluções estáticas correspondentes podem ser obtidas pelos métodos descritos no capítulo anterior. Os coeficientes nas equações de estrutura radial das perturbações, que envolvem X_0 , U_0 , A , K e suas primeiras derivadas, podem então ser calculados para qualquer valor de r através de suas expressões em termos de splines quínticas. Para cada (η, α) fixos, o problema de autovalores discretizado (3.65) foi resolvido com várias combinações de h e $r_{\max} = Nh$. A análise dos resultados indicou que, como esperado, os Subsistemas I e II não possuem modos com $\text{Im } \omega \neq 0$. Assim, a corda estática é estável em relação a perturbações com simetria cilíndrica. Esta conclusão também é válida para o Subsistema II quando os efeitos gravitacionais são ignorados.

3.6.2 Modos neutros

Subsistema I. Consideremos inicialmente o caso em que $\text{Im } \omega = 0$, $|\omega| > e^{a_0/2}\sqrt{\alpha}$; vimos na seção 3.4 que as componentes físicas das perturbações tendem a zero quando $r \rightarrow \infty$ para qualquer solução do subsistema. Logo, qualquer solução que é regular em $r = 0$ será automaticamente um modo normal. Como a frequência ω é arbitrária, os modos neutros do Subsistema I formam um espectro contínuo. Além disso, como o subespaço formado pelas soluções regulares em $r = 0$ é bidimensional (*cf.* seção 3.5), há dois modos normais para cada frequência ω tal que $|\omega| > e^{a_0/2}\sqrt{\alpha}$.

Os dois modos neutros podem ser determinados numericamente integrando o Subsistema I (empregando um método de Runge-Kutta, por exemplo) a partir de $r = 0$ com duas condições de contorno linearmente independentes correspondentes a soluções regulares. Na prática, devido à singularidade das equações em $r = 0$, é preciso iniciar a integração em algum raio positivo pequeno $r = r_{\text{inic}}$ empregando condições iniciais derivadas das séries de Maclaurin truncadas (3.44) e (3.48). Os dois modos normais são normalizados pelos valores das constantes arbitrárias w_0 e ϖ_2 que aparecem nestas expansões:

$$\text{Modo 1: } w_0 = 1, \varpi_2 = 0$$

$$\text{Modo 2: } w_0 = 0, \varpi_2 = 1$$

A Fig. 3.1 mostra exemplos de soluções numéricas para estes dois modos para uma corda com $\eta = 10^{-1}$, $\alpha = \frac{1}{2}$.

No caso em que $\text{Im } \omega = 0$, $|\omega| < e^{a_0/2} \sqrt{\alpha}$, uma das soluções em (3.29) diverge exponencialmente. A fim de eliminar esta solução, sempre é possível tomar uma combinação linear conveniente das duas soluções regulares em $r = 0$. Assim, neste intervalo do espectro haverá apenas um modo neutro por frequência, que normalizaremos como o modo 1 acima. Este modo terá perturbações em A_z que decaem exponencialmente, sem oscilação, para r grande. Este modo normal pode ser determinado numericamente integrando o Subsistema I sobre um intervalo $r_{\text{inic}} \leq r \leq r_{\text{max}}$, com condições iniciais derivadas das séries de Maclaurin truncadas apresentadas na seção 3.5. O raio r_{max} é tomado suficientemente grande para que a componente exponencialmente pequena na perturbação \hat{W}_1 seja desprezível em relação à componente que cresce exponencialmente. O modo normal procurado é então aproximado por uma combinação linear das soluções regulares tal que $\hat{W}_1(r_{\text{max}}) = 0$, normalizada adequadamente. A Fig. 3.2 mostra um exemplo deste tipo de modo

neutro para a corda com $\eta = 10^{-1}$, $\alpha = \frac{1}{2}$.

Em vista de (3.29)-(3.30), o comportamento assintótico dos modos neutros na porção de “alta freqüência” do espectro ($|\omega| > e^{a_0/2}\sqrt{\alpha}$) é dado por

$$\hat{W}_1 \sim A_W r^{-1/2} \cos(\kappa_A r + \delta_W), \quad (3.66)$$

$$\hat{\Omega}_1 \sim A_\Omega r^{1/2} \cos(\kappa_g r + \delta_\Omega), \quad (3.67)$$

enquanto que na porção de “baixa freqüência” ($|\omega| < e^{a_0/2}\sqrt{\alpha}$), vimos que existe apenas um modo com o comportamento (3.66) e $g_{\theta z}$ exponencialmente pequeno. As figuras 3.3 e 3.4 mostram as amplitudes (A_W , A_Ω) e fases (δ_W , δ_Ω) dos modos normais nas duas regiões do espectro, para dois valores da razão entre as massas dos campos escalar e de calibre. Na região de alta freqüência, as amplitudes e fases variam monotonicamente com a freqüência; na região de baixa freqüência, a amplitude de $\hat{\Omega}_1$ para o único modo passa por um mínimo em uma certa freqüência ω_0 , na vizinhança da qual a fase varia rapidamente de 180° . Na teoria de oscilações de modelos estelares, estas duas características estão normalmente associadas à existência de um modo complexo que se propaga para o exterior, cuja freqüência está situada perto do eixo real [13]. No presente caso, provavelmente existirá uma freqüência complexa $\omega = \omega_0 + i/\tau_0$ ($\tau_0 > 0$) para a qual é possível construir uma solução regular em $r = 0$, com as seguintes propriedades: (1) as perturbações em $g_{\theta z}$ propagam-se para o exterior, e (2) as perturbações em A_z tendem a zero exponencialmente para r grande, propagando-se em direção ao eixo- z . Desta forma, não existe uma analogia completa desta solução com um modo que se propaga para o exterior em um modelo estelar.¹⁰

¹⁰Como discutido na Sec. 3.6, é possível em princípio que existam modos complexos nos quais as perturbações em $g_{\theta z}$ e A_z se propagam para o exterior; entretanto, não procurou-se encontrá-los numericamente.

Subsistema II. Adotando a condição (3.17), vimos na seção 3.5 que existem 4 soluções independentes que são regulares em $r = 0$. Em termos das constantes arbitrárias x_1, u_2, g_0, l_0 que aparecem em (3.42), (3.43), (3.45), (3.46) e (3.47), estas soluções podem ser escolhidas da seguinte forma:

$$\text{Solução 1: } x_1 = 1, u_2 = 0, g_0 = 0, l_0 = 0$$

$$\text{Solução 2: } x_1 = 0, u_2 = 0, g_0 = 1, l_0 = 1$$

$$\text{Solução 3: } x_1 = 0, u_2 = 0, g_0 = 1, l_0 = -1$$

$$\text{Solução 4: } x_1 = 0, u_2 = 1, g_0 = 0, l_0 = 0$$

Observamos inicialmente que a solução 3 corresponde à solução exata trivial em que $\hat{\gamma}_1 \equiv 1$ e todas as demais perturbações se anulam; esta é uma solução porque as equações do Subsistema II não dependem explicitamente de $\hat{\gamma}_1$.

Se $|\omega| > e^{a_0/2} \max\{1, \sqrt{\alpha}\}$, vimos na seção 3.4 que para uma solução genérica do Subsistema II a perturbação $\hat{\gamma}_1$ comporta-se como

$$\hat{\gamma}_1 \sim m_1 r + m_0 + \frac{m_2}{r^{3/2}} \sin \kappa_g r + \frac{m_3}{r^{3/2}} \cos \kappa_g r + \dots \quad (3.68)$$

quando $r \rightarrow \infty$, enquanto que as demais perturbações decaem com comportamento oscilatório. Portanto, a fim de construir um modo normal (i.e., uma solução regular tal que $\hat{\gamma}_1 \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$), podemos eliminar a componente assintótica $m_1 r + m_0$ de cada uma dentre as soluções 1 e 2 adicionando múltiplos adequados das soluções 3 e 4. Claramente, este procedimento permite construir dois modos normais independentes para cada frequência (temos novamente um espectro contínuo). A normalização adotada para os modos é

$$\text{Modo 1: } \hat{X}'_1(0) = 1$$

$$\text{Modo 2: } \hat{Z}_1(0) = 1.$$

Para determinar numericamente os modos neutros do Subsistema II,

começamos por reescrever o sistema na forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}, r), \quad (3.69)$$

onde $\mathbf{y} = (\hat{X}_1, \hat{U}_1, \hat{\Lambda}_1, \hat{\Gamma}_1, \hat{Q}_1, \hat{X}'_1, \hat{U}'_1, \hat{\Lambda}'_1)$. As primeiras três componentes de (3.69) são simplesmente

$$y^{1'} = y^6, \quad y^{2'} = y^7, \quad y^{3'} = y^8.$$

A equação para $y^{4'}$ pode ser obtida resolvendo $S_{(1)}^{rr} = 0$ para $\hat{\Gamma}'_1$; a equação para $y^{5'}$ pode ser obtida resolvendo $S_{(1)}^{tr} = 0$ para \hat{Q}'_1 e eliminando $\hat{\Gamma}'_1$ com o auxílio da equação para $y^{4'}$. Finalmente, as equações para $y^{6'}$, $y^{7'}$ e $y^{8'}$ provêm de $S_X^{(1)} = 0$, $S_U^{(1)} = 0$ e $\hat{S}_{(1)}^{zz} = 0$, respectivamente.

O sistema de primeira ordem (3.69) é então integrado numericamente sobre um intervalo $r_{\text{inic}} \leq r \leq r_{\text{max}}$, com condições iniciais derivadas das séries de Maclaurin truncadas apresentadas na seção 3.5; desta maneira, são produzidas aproximações numéricas para as soluções 1, 2 e 4 discutidas acima. O raio r_{max} é tomado suficientemente grande para que a perturbação $\hat{\gamma}_1$ siga com boa aproximação o comportamento assintótico (3.68) em algum intervalo $r_1 \leq r \leq r_{\text{max}}$ tal que $(r_{\text{max}} - r_1) \gg 2\pi/\kappa_\phi, 2\pi/\kappa_A, 2\pi/\kappa_g$ (em outras palavras, o intervalo $r_1 \leq r \leq r_{\text{max}}$ deve conter vários comprimentos de onda de cada perturbação). A seguir, os parâmetros assintóticos m_0 e m_1 são estimados para cada uma das soluções 1, 2 e 4 ajustando-se pelo método dos quadrados mínimos uma equação da forma (3.68) à solução numérica para $\hat{\gamma}_1$. Finalmente, os modos 1 e 2 são construídos como combinações lineares das soluções 1, 3, 4 e 2, 3, 4, respectivamente. A Fig. 3.5 mostra exemplos de soluções numéricas para os modos de “alta frequência” do Subsistema II para a corda com $\eta = 10^{-1}$, $\alpha = \frac{1}{2}$.

Consideremos agora os modos com frequências que não satisfazem (3.34):

1. Se

$$\alpha < 1, \quad e^{a_0/2} \sqrt{\alpha} < |\omega| < e^{a_0/2}, \quad (3.70)$$

existirá uma solução em que \hat{X}_1 diverge exponencialmente para r grande (cf. Sec. 3.4). Se esta componente for removida das soluções 1 e 2 combinando convenientemente cada uma destas soluções com a solução 4, então para cada uma das soluções 1 e 2 modificadas a função $\hat{\gamma}_1$ comportar-se-á como em (3.68). Combinando as soluções modificadas 1 e 2 com a solução 3, é então possível remover a componente assintótica $m_1 r + m_0$, obtendo-se assim um único modo normal por frequência, que terá perturbações exponencialmente pequenas em \hat{X}_1 (Este modo será normalizado como o modo 2 definido anteriormente.). Numericamente, pode-se utilizar um procedimento similar ao descrito para o Subsistema I na região de baixa frequência, seguido de um método de quadrados mínimos como descrito no caso anterior para o Subsistema II. Um exemplo de modo normal com frequência que satisfaz (3.70) é mostrado na Fig. 3.6.

2. Se

$$\alpha > 1, \quad e^{a_0/2} < |\omega| < e^{a_0/2} \sqrt{\alpha}, \quad (3.71)$$

a situação é completamente análoga ao caso anterior, com a diferença de que o modo normal terá \hat{U}_1 (e não \hat{X}_1) exponencialmente pequeno (Novamente, o modo será normalizado como o modo 2 acima.). Um exemplo de modo normal cuja frequência satisfaz (3.71) é mostrado na Fig. 3.7.

3. Se

$$|\omega| < e^{a_0/2} \min\{1, \sqrt{\alpha}\}, \quad (3.72)$$

então haverá duas componentes assintóticas que divergem exponencialmente (uma associada com \hat{X}_1 e outra com \hat{U}_1). Combinando convenientemente as soluções 1, 2, 3 e 4 é possível eliminar estas componentes, juntamente com a componente constante m_0 que aparece na perturbação $\hat{\gamma}_1$. Em geral, a combinação resultante ainda possuirá a componente linear indesejada $m_1 r$; entretanto, é possível que esta componente se anulasse para certos valores discretos de ω , que corresponderiam a modos neutros. Determinando m_1 numericamente para várias frequências no intervalo (3.72) com métodos similares aos empregados nos casos anteriores (Fig. 3.8), verifica-se que m_1 possui zeros reais em alguns casos (como a corda com $\alpha = 2, \eta = 0, 1$), mas não em outros (como a corda com $\alpha = \frac{1}{2}, \eta = 0, 1$).

As Figs. 3.9 e 3.10 mostram as amplitudes e fases assintóticas dos modos normais discutidos acima, para dois valores da razão entre as massas dos campos escalar e de calibre ($\alpha = \frac{1}{2}, 2$). As amplitudes e fases são definidas pelos comportamentos assintóticos

$$\hat{\gamma}_1 \sim A_\gamma r^{-3/2} \cos(\kappa_g r + \delta_\gamma), \quad (3.73)$$

$$\hat{X}_1 \sim A_X r^{-1/2} \cos(\kappa_\phi r + \delta_X), \quad (3.74)$$

$$\hat{U}_1 \sim A_U r^{1/2} \cos(\kappa_A r + \delta_U). \quad (3.75)$$

As amplitudes e fases dos modos variam de maneira geralmente monótona, não exibindo mínimos de amplitude nem variações bruscas de fase; isto sugere que, em concordância com a expectativa inicial, não existem para o Subsistema II soluções análogas aos modos complexos que se propagam para o exterior em modelos estelares.

Capítulo 4

VÓRTICES POLITRÓPICOS CILÍNDRICOS

4.1 Introdução

As cordas cósmicas discutidas nos capítulos anteriores tinham densidade newtoniana aproximadamente nula (devido à equação de estado $\sigma = -P_z$ e às desigualdades $|P_\theta|, |P_r| \ll |P_z|$), e o espaço-tempo correspondente aproximava-se assintoticamente do espaço de Minkowski com déficit angular. Neste capítulo, introduzimos uma nova classe de modelos estacionários com simetria cilíndrica, representando vórtices auto-gravitantes em um gás ideal relativístico com temperatura uniforme. A densidade newtoniana de um tal sistema é obviamente positiva, de modo que o limite assintótico da métrica corresponde à solução de Levi-Civita [14]. Na construção de um modelo de vórtice, há a liberdade de especificar uma função arbitrária que descreve o perfil de velocidades angulares do fluido em torno do eixo de simetria. A suposição de um perfil isotérmico implica que o modelo de vórtice terá algumas propriedades interessantes, como a ausência de uma superfície exterior onde é necessário considerar condições de junção para a métrica, a

possibilidade de obter novas soluções por transformações de escala das coordenadas e campos, e a existência de expressões simples para a densidade linear do vórtice, onde os efeitos da rotação aparecem claramente. No caso sem rotação (correspondente a uma coluna estática de gás ideal), estas propriedades permitem descrever completamente a variedade de modelos possíveis: no caso geral somente é possível estudar perfis particulares de velocidade angular. Os métodos numéricos mais convenientes para a determinação destas soluções baseiam-se na integração numérica das equações de Einstein a partir do eixo de simetria, escolhendo as condições iniciais de modo que a solução tenha o comportamento assintótico desejado para r grande (em outras palavras, são métodos de *shooting*). Uma vez que as soluções numéricas para vórtices tendem a ser bastante sensíveis às condições iniciais sobre o eixo de simetria, as expressões acima mencionadas para a densidade linear do vórtice são empregadas em um método de refinamento que é efetivo contanto que as velocidades tangenciais do fluido não sejam excessivamente próximas da velocidade da luz.

4.2 Equações de campo para um vórtice cilíndrico

Nesta seção, derivamos equações de campo que podem descrever um vórtice cilíndrico estacionário de fluido perfeito. Assumiremos que o vórtice é infinitamente longo, e estudaremos o caso particular em que o fluido é um gás ideal com temperatura uniforme.

A métrica de um espaço-tempo estacionário com simetria cilíndrica pode

ser escrita como

$$ds^2 = -e^{2A}dt^2 + dr^2 + K^2(e^{-4A} - K^2B^2)d\theta^2 + 2e^AK^2Bdt d\theta + e^{2(A+C)}dz^2, \quad (4.1)$$

onde (t, r, θ, z) são coordenadas cilíndricas e as funções A , B , C e K dependem apenas de r . Esta parametrização da métrica é escolhida de forma que o determinante da métrica tenha a forma particularmente simples

$$g = -K^2e^{2C}.$$

No limite $r \rightarrow 0$, assumiremos que a métrica tende à forma não-singular

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2d\theta^2 + dz^2 + 2B_c r^2 dt d\theta, \quad (4.2)$$

onde $B_c = B(0)$ é uma constante. Verifica-se por cálculo direto que os invariantes de curvatura desta métrica são finitos em $r = 0$; além disso, veremos mais adiante que a forma (4.2) é consistente com as equações de Einstein correspondentes à métrica (4.1) no limite $r \rightarrow 0$.

O tensor de energia-momentum de um gás ideal é [37]

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + p(u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu}), \quad (4.3)$$

onde

$$\rho = \rho_0 + np \quad (4.4)$$

é a densidade total de energia, ρ_0 é a densidade de repouso, p é a pressão, n é o índice adiabático¹ e u^μ é a quadrivelocidade, normalizada na forma usual

$$u_\mu u^\mu = -1. \quad (4.5)$$

¹O índice adiabático é uma função do parâmetro $\kappa = m_0/k_B T$, onde m_0 é a massa de repouso das moléculas do gás, k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura [38]. Para um gás ideal no limite clássico ($\kappa \gg 1$), $n \rightarrow 1/(\gamma - 1)$, onde $\gamma = c_p/c_v$ é a razão entre os calores específicos a pressão e a volume constante. No limite relativístico extremo ($\kappa \ll 1$), $n \rightarrow 3$.

A equação de estado de um gás ideal relativístico é [38]

$$p = \rho_0 RT,$$

onde T é a temperatura e $R = k_B/m_0$ é a constante do gás. Assumiremos aqui que o gás tem temperatura uniforme, de modo que

$$\rho_0 = \kappa p, \quad (4.6)$$

onde $\kappa = 1/RT$ é uma constante.

No caso de um vórtice cilíndrico estacionário, ρ_0 , p e u^μ dependem apenas de r , e é possível escolher o sistema de coordenadas de forma que a quadrivelocidade tenha somente as componentes u^t e u^θ . A condição de normalização (4.5) torna-se então

$$e^{2A}(u^t)^2 - 2e^A K^2 B u^t u^\theta - K^2(e^{-4A} - K^2 B^2)(u^\theta)^2 = 1.$$

A fim de simplificar as expressões envolvendo a quadrivelocidade, é conveniente parametrizar a solução geral da condição de normalização acima em termos de uma só função arbitrária. Uma parametrização relativamente simples é dada por

$$u^t = e^{-A} \sqrt{1+v^2} + e^A K B v, \quad u^\theta = \frac{e^{2A}}{K} v, \quad (4.7)$$

onde v é uma função arbitrária.

A métrica e os campos ρ_0 , p e u^μ devem satisfazer as equações de campo de Einstein

$$S^{\mu\nu} = G^{\mu\nu} + 8\pi T^{\mu\nu} = 0,$$

as equações de “conservação de energia-momentum”

$$F^\mu = T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

(que são uma conseqüência das equações de Einstein) e a equação de continuidade

$$(\rho_0 u^\mu)_{;\mu} = 0.$$

Para o vórtice em consideração, é fácil ver que esta última equação é automaticamente satisfeita. Por cálculo direto, verifica-se que as únicas equações de Einstein não-triviais são

$$S^{tt} = S^{t\theta} = S^{rr} = S^{\theta\theta} = S^{zz} = 0,$$

e que as equações de conservação têm somente a componente radial (equação hidrostática), que pode ser escrita como

$$p' = -(\eta + 1)p \left[A'(1 + 3v^2) - \frac{K'}{K}v^2 - \frac{e^{3A}}{K}(e^{-A}K^2B)'v\sqrt{1 + v^2} \right], \quad (4.8)$$

onde $' = d/dr$ e

$$\eta = \kappa + n. \quad (4.9)$$

Assumindo que (4.8) é válida, verifica-se através das identidades de Bianchi que as equações de Einstein satisfazem a relação

$$\frac{d}{dr}S^{rr} + \Gamma_{tt}^r S^{tt} + \Gamma_{\mu r}^\mu S^{rr} + 2\Gamma_{t\theta}^r S^{t\theta} + \Gamma_{\theta\theta}^r S^{\theta\theta} + \Gamma_{zz}^r S^{zz} = 0,$$

e portanto somente quatro das cinco equações serão independentes. A equação $S^{rr} = 0$ envolve apenas derivadas de primeira ordem da métrica; as demais equações de Einstein envolvem (linearmente) as derivadas A'' , B'' , C'' e K'' . Uma simplificação considerável é obtida resolvendo-se estas quatro equações para as derivadas segundas; omitindo os detalhes do cálculo, os resultados são

$$A'' + 3Q + \frac{1}{2}[3(A')^2 + 3A'C' - \frac{K'}{K}C']$$

$$= 4\pi p[(\eta + 2) + 2(\eta + 1)v^2] \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} B'' + QB + (4A' + C' + 3\frac{K'}{K})B' \\ + \frac{5}{2}[C'\frac{K'}{K} - A'(C' + 5A' - 6\frac{K'}{K})]B \\ = 4\pi p\{4(\eta + 1)\frac{e^{-2A}}{K}v\sqrt{1+v^2} - B[(\eta + 6) + 2(\eta + 1)v^2]\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$C'' - 4Q + C'(C' + \frac{K'}{K}) = -8\pi p(\eta + 1)(1 + v^2) \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} K'' + QK + \frac{3}{2}A'(3A' + C' - 2\frac{K'}{K})K - \frac{1}{2}K'C' \\ = 4\pi Kp[(\eta + 4) + 2(\eta + 1)v^2], \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde

$$Q = \frac{e^{6A}}{8K^2}[(e^{-A}K^2B)]^2.$$

Em termos da quantidade Q , a equação $S^{rr} = 0$ pode ser escrita como

$$Q = \frac{1}{2}A'(3A' + C' - 2\frac{K'}{K}) - \frac{C'K'}{2K} + 4\pi p. \quad (4.14)$$

Eliminando Q das equações (4.10)-(4.13) com o auxílio de (4.14), obtemos

$$\begin{aligned} A'' + 3A'(2A' + C' - \frac{K'}{K}) - 2C'\frac{K'}{K} \\ = 4\pi p[(\eta - 1) + 2(\eta + 1)v^2] \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} B'' + (4A' + C' + 3\frac{K'}{K})B' \\ + [2C'\frac{K'}{K} - A'(11A' + 2C' - 14\frac{K'}{K})]B \\ = 4\pi p\{4(\eta + 1)\frac{e^{-2A}}{K}v\sqrt{1+v^2} - B[(\eta + 7) + 2(\eta + 1)v^2]\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} C'' + C'(C' + 3\frac{K'}{K}) - 2A'(3A' + C' - 2\frac{K'}{K}) \\ = -8\pi p[(\eta - 1) + (\eta + 1)v^2] \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} K'' - C'K' + 2A'(3A' + C' - 2\frac{K'}{K})K \\ = 4\pi Kp[(\eta + 3) + 2(\eta + 1)v^2]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Em conclusão, temos cinco equações independentes e seis incógnitas A , B , C , K , p e v , de modo que uma das incógnitas pode ser prescrita arbitrariamente. Ao construir modelos de vórtices, parece-nos mais natural prescrever o perfil de "velocidade" $v(r)$. Entretanto, v é proporcional à $u^\theta = d\theta/ds$, de modo que no limite $v \rightarrow \infty$ o fluido move-se próximo à velocidade da luz. Uma medida mais conveniente para a velocidade tangencial do fluido é dada por

$$\Delta = \frac{d\theta/dt}{(d\theta/dt)_{\max}},$$

onde $d\theta/dt = u^\theta/u^t$ é uma medida da velocidade angular do fluido e

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{\max} = \frac{e^{3A}}{K(1 + e^{2A}KB)}$$

é a velocidade angular correspondente a uma partícula com velocidade tangencial igual à velocidade da luz.² Note-se que Δ varia entre 0 e 1. Com o auxílio de (4.7), obtemos

$$\Delta = \frac{(1 + e^{2A}KB)v}{\sqrt{1 + v^2 + e^{2A}KBv}}. \quad (4.19)$$

No estudo numérico dos modelos de vórtices (Sec. 3), a função $\Delta(r)$ será prescrita arbitrariamente; em vista de (4.19), v pode ser expresso em termos de Δ como

$$v = \frac{\Delta}{\{[1 + e^{2A}KB(1 - \Delta)]^2 - \Delta^2\}^{1/2}}. \quad (4.20)$$

²Note-se que $d\theta/dt$ é uma quantidade que depende da escolha do sistema de coordenadas.

4.3 Condições de contorno para um vórtice isolado

4.3.1 Condições sobre o eixo- z

Procuraremos construir vórtices em que a os campos de pressão, densidade e velocidade sejam regulares sobre o eixo- z . Devido à simetria cilíndrica do problema, a velocidade tangencial deve se anular em $r = 0$:

$$v(0) = 0. \quad (4.21)$$

Além disso, adotando a forma limite (4.2) para a métrica, não haverá singularidades cônicas sobre o eixo- z . Comparando (4.2) com (4.1), obtém-se as condições de contorno

$$A(0) = C(0) = A'(0) = C'(0) = K(0) = 0, \quad (4.22)$$

$$K'(0) = 1, \quad B(0) = B_c. \quad (4.23)$$

Note-se que os valores de B_c e da pressão central p_c não são conhecidos *a priori*.

Com o auxílio de um programa de computação simbólica, pode-se mostrar que o comportamento das soluções de (4.8) e (4.15)-(4.18) que satisfazem as condições de contorno acima para r pequeno é dado por

$$A = a_2 r^2 + a_4 r^4 + \dots$$

$$B = B_c + b_2 r^2 + b_3 r^3 + b_4 + \dots$$

$$C = c_2 r^2 + c_4 r^4 + \dots$$

$$K = r + k_3 r^3 + \dots$$

$$p = p_c + p_2 r^2 + \dots$$

onde assumimos que a função prescrita $\Delta(r)$ tem o comportamento

$$\Delta = \delta_1 r + \delta_2 r^2 + \dots$$

Nas expansões acima, somente os parâmetros p_c e B_c são arbitrários; os demais coeficientes podem ser expressos como funções não-lineares destes (as expressões são omitidas por brevidade).

4.3.2 Condições assintóticas

Esperamos que a densidade, a pressão e a velocidade decaiam rapidamente com a distância; assim, no limite $r \rightarrow \infty$ a métrica deverá aproximar-se da métrica de Levi-Civita [14], que representa uma distribuição de massa concentrada ao longo do eixo- z , com densidade linear constante k . Esta métrica é usualmente dada na forma

$$ds^2 = -(R/R_0)^{4k(1+2k)}(dt^2 - dR^2) + R_0^2(R/R_0)^{2+4k}d\theta^2 + (R/R_0)^{-4k}dz^2,$$

onde R_0 é um fator de escala. A relação entre a coordenada radial R e a coordenada r introduzida anteriormente é dada por

$$\frac{r}{r_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^\lambda,$$

onde

$$\lambda = 1 + 2k(1 + 2k) \quad (4.24)$$

e $r_0 = R_0/\lambda$. Em termos de r , a métrica de Levi-Civita pode ser reescrita como

$$ds^2 = -(r/r_0)^{4k(1+2k)/\lambda}dt^2 + dr^2 + \lambda^2 r_0^2 (r/r_0)^{(2+4k)/\lambda}d\theta^2 + (r/r_0)^{-4k/\lambda}dz^2. \quad (4.25)$$

As funções A , B , C e K correspondentes à métrica acima são

$$A = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \ln r + \ln c_0 \quad (4.26)$$

$$B = 0 \quad (4.27)$$

$$C = -\frac{4k(1+k)}{\lambda} \ln r + \ln c_1 \quad (4.28)$$

$$K = c_2 r^{(1+6k+8k^2)/\lambda}, \quad (4.29)$$

onde os c_j são constantes positivas.

A métrica de Levi-Civita (4.25) é uma solução exata de (4.15)-(4.18) com $\rho = 0$ e $p = 0$. Portanto, a métrica do vórtice somente poderá se aproximar de (4.25) se os campos de pressão, densidade e velocidade decaírem com suficiente rapidez quando $r \rightarrow \infty$. A seguir, determinamos algumas condições para as quais isto ocorre. Por simplicidade, assumiremos que o perfil prescrito de "velocidade" $\Delta(r)$ decai exponencialmente para r grande; em vista de (4.20), o mesmo ocorrerá com $v(r)$. Neste caso, se a função $A(r)$ tem a forma assintótica (4.26), a equação hidrostática (4.8) pode ser aproximada para r grande como

$$p' = -(\eta + 1) \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{p}{r},$$

que tem soluções da forma

$$p \sim \text{const.} \cdot r^{-q}, \quad (4.30)$$

onde

$$q = (\eta + 1) \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right). \quad (4.31)$$

Consideremos agora as equações (4.15), (4.17) e (4.18), nas quais a função B não aparece. Se a métrica do vórtice se aproxima assintoticamente da métrica de Levi-Civita, a razão entre o lado direito de cada uma destas equações e um termo qualquer no lado esquerdo será assintoticamente $O(r^2 p)$. Assim.

para que seja permissível desprezar os termos proporcionais a p em primeira aproximação é necessário que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 p(r) = 0. \quad (4.32)$$

Mostraremos mais adiante (secção 4.4) que no caso sem rotação ($v = B = 0$), k (e portanto q) é uma função do parâmetro η , tal que $q > 2$ para $\eta > 1$ (esta desigualdade é sempre satisfeita nos casos fisicamente relevantes, porque $\kappa > 0$ e $n > 1$ [37]). Assim, (4.32) será automaticamente satisfeita no caso sem rotação. Se $v, B \neq 0$, veremos que o valor de k deve ser modificado por correções que dependem do perfil de velocidade $v(r)$ e do coeficiente métrico g_{tr} . No limite clássico, estas correções são sempre positivas, o que contribui para o aumento do valor de q dado por (4.31). No caso relativístico, o sinal das correções não é conhecido *a priori*; nos exemplos numéricos que consideraremos (secção 4.5) as correções à densidade são sempre positivas, de modo que $q > 2$ e é consistente assumir que A, C, K e p aproximam-se assintoticamente de seus valores correspondentes à solução de Levi-Civita.

Resta ainda considerar o comportamento assintótico detalhado de $B(r)$ quando $r \rightarrow \infty$. Uma vez que o coeficiente de B no lado esquerdo de (4.16) é $O(r^{-2})$ para r grande, e o lado direito da equação é $O(pB) \ll B/r^2$, o lado direito pode ser desprezado em primeira aproximação. A equação reduz-se então a

$$B'' + (36k^2 + 22k + 3) \frac{B'}{\lambda r} + 20k(12k^3 + 16k^2 + 7k + 1) \frac{B}{\lambda^2 r^2} = 0,$$

que tem soluções da forma

$$B \sim ar^{-\alpha} + br^{-\beta}, \quad (4.33)$$

onde

$$\alpha = (10k/\lambda)(1 + 2k), \quad \beta = (2/\lambda)(1 + 2k)(1 + 3k). \quad (4.34)$$

Como α e β são ambos positivos, $B \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$. Isto completa a verificação de que a métrica pode se aproximar da solução de Levi-Civita para r grande.

4.3.3 Propriedades de similaridade

A solução do problema composto pelas equações (4.8), (4.14), (4.15)-(4.18) e pelas condições de contorno (4.22), (4.23) e

$$p(0) = p_c, \quad B(0) = B_c$$

possui a seguinte propriedade de mudança de escala: se $\tilde{A}(r)$, $\tilde{B}(r)$, $\tilde{C}(r)$, $\tilde{K}(r)$, $\tilde{p}(r)$ satisfazem as equações e condições anteriores com um perfil de “velocidade” prescrito $\tilde{\Delta}(r)$, então para qualquer $\epsilon > 0$ as funções

$$\begin{aligned} A(r) &= \tilde{A}(\epsilon r), & B(r) &= \epsilon \tilde{B}(\epsilon r), \\ C(r) &= \tilde{C}(\epsilon r), & K(r) &= \frac{1}{\epsilon} \tilde{K}(\epsilon r), \\ p(r) &= \epsilon^2 \tilde{p}(\epsilon r) \end{aligned}$$

satisfazem as mesmas equações diferenciais e condições de contorno, mas com os valores de p_c e B_c mudados para

$$\epsilon^2 p_c, \quad \epsilon B_c$$

e o perfil de velocidade mudado para

$$\Delta(r) = \tilde{\Delta}(\epsilon r).$$

Note-se que o parâmetro assintótico k (massa por unidade de comprimento) não muda pela transformação de escala acima.

Algumas conseqüências desta propriedade são as seguintes:

1. No caso sem rotação ($v = B = 0$), se conhecemos a solução do problema para um certo valor da pressão central p_c , podemos obter a solução para qualquer outra pressão central por uma simples mudança nas escalas das variáveis. O único parâmetro essencial do problema será a quantidade η definida em (4.9). Assim, por exemplo, a massa por unidade de comprimento k será uma função apenas de η , e não dependerá de p_c .
2. No caso geral do vórtice, se consideramos uma família de perfis de “velocidade” da forma

$$\Delta(r) = \Delta_0 f(r/l), \quad (4.35)$$

com parâmetros livres Δ_0 e l , é suficiente determinar os vórtices possíveis apenas para um valor fixo qualquer de l ; as soluções correspondentes a outros valores de l serão obtidas por mudanças de escala das variáveis. Assim, para perfis de “forma” fixa (especificada pela função f), os parâmetros essenciais do problema da determinação de modelos de vórtices são a “amplitude de velocidade” Δ_0 , a quantidade η e os valores de p e B sobre o eixo- z . Note-se que neste caso, fixando-se a função f e a escala l , a massa por unidade de comprimento k será uma função dos quatro parâmetros essenciais citados.³

4.4 Expressões para a densidade linear do vórtice

Empregando as equações de Einstein e o comportamento das soluções em $r = 0$ e no limite $r \rightarrow \infty$, é possível obter expressões para a massa por

³De fato, veremos mais adiante (Sec. 4.5.2) que B_c não é um parâmetro independente, podendo ser determinado a partir dos outros três.

unidade de comprimento k do vórtice cilíndrico. Por simplicidade, consideremos inicialmente o caso sem rotação ($v = B = 0$). Combinando (4.14) com cada uma das equações (4.15), (4.17) e (4.18), podemos reescrevê-las como

$$\begin{aligned} A'' + \left(C' + \frac{K'}{K}\right)A' &= 4\pi(\eta + 3)p \\ C'' + \left(C' + \frac{K'}{K}\right)C' &= -8\pi(\eta + 1)p \\ K'' + C'K' &= 4\pi(\eta + 7)Kp. \end{aligned}$$

Estas equações podem ainda ser colocadas na forma mais compacta

$$(e^C K A')' = 4\pi(\eta + 3)e^C K p \quad (4.36)$$

$$[K(e^C)']' = -8\pi(\eta + 1)e^C K p \quad (4.37)$$

$$(e^C K')' = 4\pi(\eta + 7)e^C K p. \quad (4.38)$$

Somando (4.37) e (4.38), obtemos ainda

$$(e^C K)'' = -4\pi(\eta - 5)e^C K p. \quad (4.39)$$

Integrando as equações (4.36), (4.38) e (4.39), e usando as condições (4.22)-(4.23) e a forma assintótica (4.26)-(4.29), encontramos

$$e^C K A' \Big|_0^\infty = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) c_1 c_2 = (\eta + 3)P \quad (4.40)$$

$$e^C K' \Big|_0^\infty = (1 + 6k + 8k^2) \frac{c_1 c_2}{\lambda} - 1 = (\eta + 7)P \quad (4.41)$$

$$(e^C K) \Big|_0^\infty = c_1 c_2 - 1 = -(\eta - 5)P, \quad (4.42)$$

onde

$$P = 4\pi \int_0^\infty e^C K p \, dr. \quad (4.43)$$

Subtraindo (4.41) de (4.42), resulta que

$$4k(1 + k) \frac{c_1 c_2}{\lambda} = 2(\eta + 1)P;$$

combinando esta expressão com (4.40), concluímos que

$$\frac{\lambda P}{c_1 c_2} = \frac{2k(1+k)}{\eta+1} = \frac{\lambda-1}{\eta+3}.$$

Finalmente, resolvendo a equação acima para a densidade linear k , obtemos o resultado simples

$$k = \frac{2}{\eta-1}. \quad (4.44)$$

Em vista de (4.31), a pressão decai como r^{-q} , onde

$$q = \frac{4(\eta+1)(\eta+3)}{(\eta+1)^2+12} > 2 \quad (4.45)$$

para $\eta > 1$ (v. Fig. 4.1). Note que no limite clássico ($\kappa = 1/RT \rightarrow \infty$) temos $k \sim 2/\kappa = O(T)$ e $q \rightarrow 4$; no limite relativístico extremo ($\kappa \rightarrow 0$) temos $\eta \sim n \rightarrow 3$, de modo que $k \rightarrow 1$ e $q \rightarrow \frac{24}{7}$.

O argumento acima pode ser facilmente modificado para tratar o caso geral de um vórtice: combinando como antes (4.14) com cada uma das equações (4.15), (4.17) e (4.18), obtemos

$$(e^C K A')' = 4\pi e^C K p [(\eta+3) + 2(\eta+1)v^2] - 4e^C K Q \quad (4.46)$$

$$[K(e^C)']' = -8\pi(\eta+1)e^C K p(1+v^2) + 4e^C K Q \quad (4.47)$$

$$(e^C K')' = 4\pi e^C K p [(\eta+7) + 2(\eta+1)v^2] - 4e^C K Q. \quad (4.48)$$

Somando (4.47) e (4.48), obtemos novamente (4.39), exatamente como no caso sem rotação. Subtraindo (4.46) de (4.48), resulta que

$$[e^C (K' - K A')] = 16\pi e^C K p; \quad (4.49)$$

note-se que esta equação também é válida no caso sem rotação. Integrando (4.39) e (4.49) como antes, obtemos as expressões

$$c_1 c_2 - 1 = -(\eta-5)P \quad (4.50)$$

$$[1 + 4k(1+k)] \frac{c_1 c_2}{\lambda} - 1 = 4P, \quad (4.51)$$

nas quais os efeitos da rotação não aparecem explicitamente. Estas equações podem ser resolvidas para $c_1 c_2$ e P , com o resultado

$$c_1 c_2 = \frac{\eta - 1}{4 \left[1 + \frac{1}{4}(\eta - 5) \left(1 + \frac{2k}{\lambda} \right) \right]} \quad (4.52)$$

$$P = \frac{k}{2\lambda \left[1 + \frac{1}{4}(\eta - 5) \left(1 + \frac{2k}{\lambda} \right) \right]}. \quad (4.53)$$

Integrando (4.46), obtemos

$$(e^C K A')' \Big|_0^\infty = \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) c_1 c_2 = (\eta + 3)P + 8\pi(\eta + 1)I_1 - \frac{1}{2}I_2, \quad (4.54)$$

onde

$$I_1 = \int_0^\infty e^C K p v^2 dr, \quad (4.55)$$

$$I_2 = 8 \int_0^\infty e^C K Q dr = \int_0^\infty \frac{e^{6A+C}}{K} [(e^{-A} K^2 B)']^2 dr. \quad (4.56)$$

Inserindo (4.52) e (4.53) em (4.54) e rearranjando a expressão resultante, mostra-se finalmente que

$$k = \frac{2}{(\eta - 1)} \left\{ 1 + \frac{I}{4} \left[\frac{2\lambda}{k} + (\eta - 5) \left(1 + \frac{\lambda}{2k} \right) \right] \right\}, \quad (4.57)$$

onde

$$I = 8\pi(\eta + 1)I_1 - \frac{1}{2}I_2. \quad (4.58)$$

Esta expressão pode ser resolvida para a densidade linear k ; o resultado é

$$k = \frac{1}{(\eta - 1)} \left\{ 1 + \frac{(\eta - 1)I}{2(1 - I)} + \left[\left(1 + \frac{(\eta - 1)I}{2(1 - I)} \right)^2 + \frac{(\eta - 1)^2 I}{4(1 - I)} \right]^{1/2} \right\}. \quad (4.59)$$

Manipulando as equações (4.52)-(4.54), pode-se também mostrar que

$$I = \frac{4k c_1 c_2}{\lambda} \left(k - \frac{2}{\eta - 1} \right). \quad (4.60)$$

Assim, o sinal de I indica se a rotação se traduz em aumento ou decréscimo de massa em relação ao caso sem rotação com o mesmo valor de η .

É interessante comparar as expressões relativísticas acima para a densidade linear do vórtice com as expressões correspondentes em mecânica newtoniana. Um vórtice com as características que temos considerado seria então descrito pela equação de Poisson

$$\frac{1}{r}(r\phi')' = 4\pi\rho = 4\pi\kappa p \quad (4.61)$$

e pela equação hidrostática

$$\phi' = -\frac{p'}{\rho} + \frac{v^2}{r} = -\frac{p'}{\kappa p} + \frac{v^2}{r} \quad (4.62)$$

onde ϕ é o potencial gravitacional. Podemos escolher ϕ de modo que $\phi(0) = \phi'(0) = 0$; para r grande, ϕ deve se aproximar do potencial de uma distribuição de massa concentrada no eixo- z , *i.e.*,

$$\phi \sim 2k \ln r.$$

Integrando (4.61), obtemos

$$r\phi'|_0^\infty = 2k = \kappa P_{\text{Newt.}}, \quad (4.63)$$

onde

$$P_{\text{Newt.}} = 4\pi \int_0^\infty r p \, dr.$$

Multiplicando a equação de Poisson por $r^2\phi'$, e usando a equação hidrostática (4.62), obtemos

$$\frac{1}{2}[(r\phi')^2]' = 4\pi\kappa r^2 p \phi' = -4\pi r^2 \left(p' - \kappa p \frac{v^2}{r} \right).$$

Integrando a expressão acima, resulta que

$$\frac{1}{2}(r\phi')^2 \Big|_0^\infty = 2k^2 = 2P_{\text{Newt.}} + \frac{1}{2}I_{\text{Newt.}} \quad (4.64)$$

onde

$$I_{\text{Newt.}} = 8\pi\kappa \int_0^\infty rpv^2 dr. \quad (4.65)$$

Combinando (4.63) e (4.64), obtemos finalmente o análogo newtoniano de (4.57),

$$k = \frac{2}{\kappa} + \frac{I_{\text{Newt.}}}{4k}. \quad (4.66)$$

Verifica-se imediatamente que (4.57) reduz-se a (4.66) no limite clássico em que $\eta \sim \kappa \gg 1$, $k \rightarrow 0$, $B, C \rightarrow 0$, $K \rightarrow r$. Note-se ainda de (4.62) que no caso sem rotação ($v = 0$) a pressão p decairá como $r^{-2k\kappa} = r^{-4}$; no limite $\eta \rightarrow \infty$, a expressão (4.45) mostra que q é de fato ligeiramente maior do que 4 (Fig. 4.1).

4.5 Soluções numéricas

4.5.1 Politropos estáticos

No caso sem rotação ($v = B = 0$), vimos na Sec. 4.3.3 que para cada η fixado é suficiente obter a solução para um valor fixado qualquer de p_c . Verifica-se por experimentação numérica com um método do tipo Runge-Kutta que para qualquer $\eta > 1$ a solução de (4.8), (4.15), (4.17) e (4.18) com as condições em $r = 0$ apresentadas na Sec. 4.3.1 estará definida para todo r , aproximando-se da solução de Levi-Civita quando $r \rightarrow \infty$. A variedade de modelos sem rotação é apresentada na Fig. 4.2 (todas as soluções são normalizadas por $p_c = 1$). As soluções numéricas obtidas verificam (4.44) e (4.45) com precisão satisfatória (da ordem de 0,05%).

4.5.2 Vórtices politrópicos

Mostramos na seção 4.3.3 que os possíveis vórtices com perfil de “velocidade” da forma (4.35) são caracterizados pelos parâmetros essenciais η , Δ_0 , p_c e B_c (A função arbitrária f que define a forma do perfil é mantida fixa.). Nesta seção, descreveremos alguns resultados numéricos obtidos para o perfil particular

$$\Delta(r) = \Delta_0 f(r) = \Delta_0 r e^{1-r}; \quad (4.67)$$

sem perda de generalidade, assumimos que a escala radial do perfil (l) é igual a 1. O perfil acima tem um máximo em $r = 1$, onde $\Delta(r) = \Delta_0$; assim, Δ_0 varia entre 0 e 1. Assumimos que $\Delta(r)$ decai exponencialmente para r grande a fim de que a análise assintótica simplificada da seção 4.3.2 seja válida. Acreditamos que o perfil adotado sirva para ilustrar as principais características qualitativas da classe de vórtices politrópicos em consideração.

Inicialmente, realizamos integrações de (4.8), (4.15)-(4.18) com η , Δ_0 e p_c fixados, e diversos valores de B_c (as integrações de fato são iniciadas em um raio “pequeno” r_{inic} , no qual as condições iniciais são derivadas das expansões de Maclaurin apresentadas na seção 4.3.1). Verificamos que para todos os valores de B_c testados, a solução do problema de valor inicial não está definida para todo r , tornando-se singular em um certo raio r_{max} ; fixados os demais parâmetros, este raio será uma função de B_c . O comportamento desta função (Fig. 4.3) indica que para um certo valor $B_c = B_c^*$ (o qual dependerá de η , Δ_0 e p_c), teremos $r_{\text{max}} = \infty$, *i.e.*, a solução estará definida para todo r . Esta solução será um modelo aceitável de vórtice se a métrica e as variáveis hidrodinâmicas tiverem o comportamento assintótico descrito na seção 4.3.2.

O método gráfico esboçado acima permite obter uma aproximação razoável para B_c^* : por exemplo, na Fig. 4.3 podemos estimar que $B_c^* =$

$-0,098254 \pm 0,000234$, o que representa um erro relativo de 0,24%. Entretanto, é difícil obter graficamente estimativas mais refinadas.⁴ A razão disto é o rápido aumento de r_{\max} à medida que nos aproximamos de B_c^* , o qual é acompanhado pela deterioração da precisão do valor estimado de r_{\max} . Esta dificuldade pode ser efetivamente contornada com o auxílio dos resultados da seção 4.4, que mostram que para um vórtice isolado a integral imprópria I_2 definida em (4.56) é convergente. Em geral, para um valor de B_c próximo de B_c^* , a integral

$$I_2(r) = \int_0^r \frac{e^{6A+C}}{K} [(e^{-A} K^2 B)']^2 dr$$

estabiliza-se rapidamente com o aumento de r , mas eventualmente começa a variar mais rapidamente, terminando por divergir quando $r \rightarrow r_{\max}$. O término da região de estabilização pode ser detectado por inspeção visual de uma tabela de valores numéricos da integral, e em geral ocorre em raios muito menores do que r_{\max} . Esta observação sugeriu o uso de um esquema de otimização para refinar o valor de B_c , no qual se procura maximizar a extensão da região de estabilização da integral $I_2(r)$. Ainda que um tal processo possa em princípio ser automatizado,⁵ preferimos realizá-lo “manualmente” empregando um processo de bissecção, estimando o intervalo inicial que contém B_c^* através do método gráfico anterior. Em cada passo, determina-se um intervalo $[B_{\min}, B_{\max}]$ que contém B_c^* ; o ponto médio do intervalo é tomado como a aproximação corrente de B_c^* . Um exemplo do uso deste algoritmo é mostrado na Tabela 4.1, onde a estimativa de B_c^* obtida da Fig. 4.3 é refinada

⁴Valores mais precisos para B_c^* são de fato necessários, uma vez que a solução numérica para o vórtice (e em particular a função $B(r)$) é bastante sensível ao valor de B_c .

⁵Note-se que o conceito de “extensão da região de estabilização” precisaria ser definido quantitativamente para que o processo pudesse ser realizado automaticamente. Uma possível definição poderia ser o valor de r onde o integrando de $I_2(r)$ atinge seu valor mínimo.

Tabela 4.1:

passo	B_{\min}	$(B_c^*)_{\text{aprox.}}$	B_{\max}
1	-0,098488	-0,098254	-0,098020
2	-0,098254	-0,098137	-0,098020
3	-0,098196	-0,098137	-0,098079
4	-0,098166	-0,098137	-0,098108
5	-0,098152	-0,098137	-0,098123
6	-0,098144	-0,098137	-0,098130

para $B_c^* = -0,098137 \pm 0,000007$, que tem um erro relativo de 0,007%.

A Fig. 4.4 mostra soluções para vórtices com $\eta = 10$, $p_c = 0,01$ e o perfil de "velocidade" (4.67), determinadas pela metodologia discutida acima. A dependência de B_c^* e da densidade linear k em relação à amplitude Δ_0 do perfil de "velocidade" é ilustrada na Fig. 4.5. O valor de $|B_c^*|$ aumenta rapidamente com Δ_0 ; o algoritmo para determinação de B_c^* falha para Δ_0 suficientemente grande, o que sugere que exista um valor crítico $(\Delta_0)_{\text{cr.}}$ além do qual não haja soluções para vórtices (B_c^* divergiria quando $\Delta_0 \rightarrow (\Delta_0)_{\text{cr.}}$).

A rotação se traduz em aumento na densidade linear k em relação ao caso sem rotação (Fig. 4.5b); além disso, k aumenta com Δ_0 . Note-se na Fig. 4.5b que, para os mesmos valores de η e Δ_0 , o acréscimo de massa é maior para $p_c = 0,01$ do que para $p_c = 1$. Isto pode ser explicado qualitativamente considerando que (a) as distribuições de densidade e pressão dos vórtices não diferem muito daquelas do caso sem rotação; ao menos para baixas velocidades de rotação, a densidade linear do vórtice é independente de p_c (depende apenas de η); (b) pela propriedade de similaridade no caso sem rotação (seção 4.3.3), o diâmetro efetivo do politropo é proporcional a $p_c^{-1/2}$; a Fig. 4.2a implica que no caso considerado na Fig. 4.5 ($\eta = 10$) os vórtices terão diâmetros efetivos de aproximadamente 0,1 ($p_c = 1$) e 1 ($p_c = 0,01$); (c) uma vez que a escala radial do perfil (4.67) é 1, claramente o vórtice com

$p_c = 0,01$ terá mais massa distribuída na região de maiores velocidades de rotação, e por conseguinte, o maior acréscimo de massa.

Capítulo 5

PERTURBAÇÕES RADIAIS DE POLITROPOS CILÍNDRICOS ESTÁTICOS

5.1 Introdução

Neste capítulo, apresentamos um estudo da dinâmica de pequenas perturbações radiais das soluções determinadas no capítulo anterior, no caso particular de um politropo sem rotação ($v = 0$). Ainda que este não seja o caso mais interessante (um vórtice poderia exibir instabilidades hidrodinâmicas, dependendo de seu perfil de velocidade angular [10]), resolvemos considerá-lo aqui por sua relativa simplicidade, deixando os casos mais gerais para um trabalho posterior. A metodologia empregada neste capítulo segue de perto aquela desenvolvida no cap. 3. Assim, estudando o comportamento das soluções das equações de estrutura radial em $r = 0$ e no limite $r \rightarrow \infty$, encontramos uma estrutura simples para o espectro de perturbações radiais, cujos modos normais são neutros e consistem de ondas gravitacionais e acústicas acopladas.

5.2 Perturbações com simetria cilíndrica

As perturbações da métrica que consideraremos neste capítulo são análogas às perturbações do Subsistema II discutido no cap. 3. Assim, a métrica perturbada terá a forma

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)}(r) + \delta g_{\mu\nu}(r, t), \quad (5.1)$$

onde $g_{\mu\nu}^{(0)}$ corresponde à solução para um politropo sem rotação discutida no capítulo anterior e as únicas componentes não-nulas de $\delta g_{\mu\nu}$ são δg_{tt} , δg_{tr} , δg_{rr} , $\delta g_{\theta\theta}$ e δg_{zz} . Como na análise do cap. 3, será conveniente empregar as componente físicas $\delta\tilde{g}_{\mu\nu}$ das perturbações da métrica, definidas por

$$\begin{aligned} \delta g_{tt} &= e^{2A} \delta\tilde{g}_{tt} \\ \delta g_{tr} &= e^A \delta\tilde{g}_{tr} \\ \delta g_{rr} &= \delta\tilde{g}_{rr} \\ \delta g_{\theta\theta} &= K^2 e^{-4A} \delta\tilde{g}_{\theta\theta} \\ \delta g_{zz} &= e^{2(A+C)} \delta\tilde{g}_{zz}, \end{aligned}$$

onde $A(r)$, $C(r)$ e $K(r)$ definem a métrica do politropo não-perturbado. Como no caso das perturbações da corda U(1) (sec. 3.2), a regularidade do espaço-tempo sobre o eixo- z requer que todas as funções $\delta\tilde{g}_{\mu\nu}$ sejam regulares em $r = 0$.

As variáveis hidrodinâmicas perturbadas podem ser escritas como

$$\begin{aligned} p &= \bar{p}(r) + \delta p(r, t) \\ \rho_0 &= \bar{\rho}_0(r) + \delta\rho_0(r, t) = \kappa\bar{p}(r) + \delta\rho_0(r, t) \\ u^\mu &= \bar{u}^\mu(r) + \delta u^\mu(r, t) = e^{-A} \delta_t^\mu + \delta u^\mu(r, t), \end{aligned}$$

onde as variáveis com uma barra correspondem à configuração não-perturbada. A fim de manter a simetria cilíndrica do problema, consideraremos apenas deslocamentos radiais das partículas de fluido:

$$\delta u^\mu = (\delta u^t, \delta u^r, 0, 0).$$

Será também conveniente introduzir as componentes físicas $\delta \tilde{u}^\mu$ das perturbações da velocidade,

$$\delta u^t = e^{-A} \delta \tilde{u}^t, \quad \delta u^r = \delta \tilde{u}^r.$$

Linearizando a condição de normalização $u^\mu u_\mu = -1$, resulta que

$$\delta \tilde{u}^t = \frac{1}{2} \delta \tilde{g}_{tt}, \tag{5.2}$$

de modo que em primeira ordem a perturbação em u^t é determinada apenas pelas perturbações da métrica.

5.3 Equações de estrutura radial das perturbações

Assumindo que as perturbações têm dependência temporal exponencial,

$$\begin{aligned} (\delta \tilde{g}_{tt}, \delta \tilde{g}_{tr}, \delta \tilde{g}_{rr}, \delta \tilde{g}_{\theta\theta}, \delta \tilde{g}_{zz}, \delta \tilde{u}^r, \delta p, \delta \rho_0) = \\ e^{i\omega t} (\delta \hat{g}_{tt}, i\omega \delta \hat{g}_{tr}, \delta \hat{g}_{rr}, \delta \hat{g}_{\theta\theta}, \delta \hat{g}_{zz}, i\omega \delta \hat{u}^r, \delta \hat{p}, \delta \hat{\rho}_0), \end{aligned}$$

onde $\delta \hat{g}_{tt}$, $\delta \hat{g}_{tr}$, etc. dependem apenas de r , e linearizando as equações de campo (seção 4.2) em torno da configuração estática, obtém-se as seguintes equações para a estrutura radial das perturbações:¹

¹Estas equações foram obtidas através de computação simbólica, empregando (4.8), (4.15), (4.17) e (4.18) para eliminar as derivadas de ordem mais alta da solução estática; (5.2) foi utilizada para eliminar as perturbações em u^t .

1. *Equação de continuidade:*

$$\begin{aligned} \delta m &\equiv \hat{u}' + [C' + L - (\eta + 1)A']\hat{u} \\ &+ e^{-A} \left[\frac{\delta \hat{\rho}_0}{\kappa \bar{p}} + \frac{1}{2}(\delta \hat{g}_{rr} + \delta \hat{g}_{\theta\theta} + \delta \hat{g}_{zz}) \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

2. *Equações de "conservação".²*

$$\begin{aligned} \delta F^t &\equiv \hat{u}' + (C' + L - \eta A')\hat{u} \\ &+ e^{-A} \left[\frac{1}{2}(\delta \hat{g}_{rr} + \delta \hat{g}_{\theta\theta} + \delta \hat{g}_{zz}) + \frac{\delta \hat{\rho}_0 + n\delta \hat{p}}{(\eta + 1)\bar{p}} \right] = 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \delta F^r &\equiv \delta \hat{p}' + A'[(n + 1)\delta \hat{p} + \delta \hat{\rho}_0] \\ &- (\eta + 1)\bar{p}[\frac{1}{2}\hat{\chi} + \omega^2 e^{-A}(\delta \hat{g}_{tr} + \hat{u})] = 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

3. *Equações de Einstein.³*

$$\begin{aligned} \delta S^{tt} &\equiv \delta \hat{g}''_{\theta\theta} + \delta \hat{g}''_{zz} + (A' - C' - L)\delta \hat{g}'_{rr} \\ &+ (C' + 2L - 3A')\delta \hat{g}'_{\theta\theta} + (2C' + L)\delta \hat{g}'_{zz} \\ &+ 16\pi(\eta \bar{p} \delta \hat{g}_{rr} + \delta \hat{\rho}_0 + n\delta \hat{p}) = 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \delta S^{tr} &\equiv \delta \hat{g}'_{\theta\theta} + \delta \hat{g}'_{zz} + (A' - C' - L)\delta \hat{g}_{rr} + (L - 3A')\delta \hat{g}_{\theta\theta} \\ &+ C'\delta \hat{g}_{zz} - 16\pi(\eta + 1)e^A \bar{p} \hat{u} = 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \delta S^{rr} &\equiv (2A' + C')\delta \hat{g}'_{\theta\theta} + (L - A')\delta \hat{g}'_{zz} + (A' - C' - L)\hat{\chi} \\ &- 16\pi(\bar{p} \delta \hat{g}_{rr} + \delta \hat{p}) + \omega^2 e^{-A}[2(A' - C' - L)\delta \hat{g}_{tr} \\ &+ e^{-A}(\delta \hat{g}_{\theta\theta} + \delta \hat{g}_{zz})] = 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \delta S^{\theta\theta} &\equiv \delta \hat{g}''_{zz} - \hat{\chi}' - (2A' + C')\delta \hat{g}'_{rr} + (3A' + 2C')\delta \hat{g}'_{zz} \\ &- (3A' + C')\hat{\chi} - 16\pi(\bar{p} \delta \hat{g}_{rr} + \delta \hat{p}) - \omega^2 e^{-A}[2\delta \hat{g}'_{tr} \end{aligned}$$

² δF^t e δF^r são proporcionais às perturbações de primeira ordem das expressões $T^{t\mu}_{;\mu}$ e $T^{r\mu}_{;\mu}$, respectivamente.

³Para cada μ, ν fixos, $\delta S^{\mu\nu}$ é proporcional à perturbação de primeira ordem da expressão $G^{\mu\nu} + 8\pi T^{\mu\nu}$.

$$+ 2(2A' + C')\delta\hat{g}_{tr} - e^{-A}(\delta\hat{g}_{rr} + \delta\hat{g}_{zz})] = 0, \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \delta S^{zz} &\equiv \delta\hat{g}_{\theta\theta}'' - \hat{\chi}' + (A' - L)\delta\hat{g}'_{rr} + (2L - 3A')\delta\hat{g}'_{\theta\theta} - L\hat{\chi} \\ &- 16\pi(\bar{p}\delta\hat{g}_{rr} + \delta\hat{p}) - \omega^2 e^{-A}[2\delta\hat{g}'_{tr} + 2(L - A')\delta\hat{g}_{tr} \\ &- e^{-A}(\delta\hat{g}_{rr} + \delta\hat{g}_{\theta\theta})] = 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Nas equações acima, introduzimos as notações

$$L = \frac{K'}{K}, \quad \hat{\chi} = \delta\hat{g}'_{tt}, \quad \hat{u} = \delta\hat{u}^r.$$

As equações de estrutura radial podem ser ligeiramente simplificadas introduzindo as combinações

$$\begin{aligned} \delta\tilde{F} &\equiv (\eta + 1)\bar{p}(\delta F^t - \delta m) \\ &= (\eta + 1)A'\bar{p}\hat{u} - e^{-A}\left(\frac{n+1}{\kappa}\delta\hat{\rho}_0 - n\delta\hat{p}\right) = 0, \end{aligned} \quad (5.11)$$

que no limite clássico se reduz à conservação da entropia das partículas do fluido, e

$$\begin{aligned} \delta\tilde{S} &\equiv \delta S^{zz} - \delta S^{\theta\theta} \\ &= \delta\hat{g}_{\theta\theta}'' - \delta\hat{g}_{zz}'' - (3A' + 2C')\delta\hat{g}'_{zz} + (2L - 3A')\delta\hat{g}'_{\theta\theta} \\ &+ (3A' + C' - L)(\delta\hat{g}'_{rr} + \hat{\chi} + 2\omega^2 e^{-A}\delta\hat{g}_{tr}) \\ &+ \omega^2 e^{-2A}(\delta\hat{g}_{\theta\theta} - \delta\hat{g}_{zz}) = 0, \end{aligned} \quad (5.12)$$

que depende apenas das perturbações da métrica.

Como no caso das perturbações da corda U(1) (seção 3.3), as equações de estrutura radial não são todas independentes: empregando (4.8), (4.15), (4.17) e (4.18) para eliminar as derivadas de ordem mais alta da solução estática, pode-se mostrar por cálculo direto que

$$\delta S^{tt} = (\delta S^{tr})' + (C' + L)\delta S^{tr} + 16\pi e^A[(\eta + 1)\bar{p}\delta m + \delta\tilde{F}]$$

$$\begin{aligned}
 (\delta S^{rr})' &= A'\delta S^{tt} + (C' + L)\delta S^{rr} + (2A' - L)\delta S^{\theta\theta} \\
 &- (A' + C')\delta S^{zz} - \omega^2 e^{-2A}\delta S^{tr} + 16\pi\delta F^r = 0.
 \end{aligned}$$

Assim, um conjunto de equações independentes é composto pelas 6 equações

$$\delta m = \delta \tilde{F} = \delta F^r = \delta S^{tr} = \delta S^{rr} = \delta \tilde{S} = 0, \quad (5.13)$$

que envolvem as 8 variáveis $\delta \hat{g}_{tr}, \delta \hat{g}_{rr}, \delta \hat{g}_{\theta\theta}, \delta \hat{g}_{zz}, \hat{\chi}, \hat{u}, \delta \hat{p}, \delta \hat{\rho}_0$. A indeterminação do sistema pode ser removida fixando-se um sistema de coordenadas onde (por exemplo)

$$\delta \hat{g}_{tr} = \delta \hat{g}_{rr} = 0.$$

Além disso, note-se que (5.8) e (5.11) definem $\hat{\chi}$ e $\delta \hat{\rho}_0$ como função das demais perturbações; este fato pode ser utilizado para eliminar estas duas variáveis das equações de estrutura radial. Obtém-se assim o seguinte sistema, que será empregado nas análises seguintes:

$$\begin{aligned}
 \hat{u}' &+ \left[C' + L - \frac{n(\eta + 1)}{n + 1} A' \right] \hat{u} \\
 &+ e^{-A} \left(\frac{1}{2} \hat{\Gamma} + \frac{n}{n + 1} \frac{\delta \hat{p}}{\bar{p}} \right) = 0,
 \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned}
 \delta \hat{p}' &+ \left[\left(n + 1 + \frac{n\kappa}{n + 1} \right) A' + \frac{8\pi(\eta + 1)\bar{p}}{(L + C' - A')} \right] \delta \hat{p} \\
 &+ \frac{\kappa(\eta + 1)}{n + 1} e^A (A')^2 \bar{p} \hat{u} - \frac{1}{4}(\eta + 1)\bar{p}(\phi_1 \hat{\Lambda}' + \phi_2 \hat{\Gamma}') \\
 &- \omega^2(\eta + 1)e^{-A}\bar{p} \left[\frac{e^{-A}\hat{\Gamma}}{2(L + C' - A')} + \hat{u} \right] = 0,
 \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\Gamma}' &+ \frac{1}{2}(L - 3A' + C')\hat{\Gamma} + \frac{1}{2}(L - 3A' - C')\hat{\Lambda} \\
 &- 16\pi(\eta + 1)e^A\bar{p}\hat{u} = 0,
 \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\hat{\Lambda}'' + \frac{1}{2}(\phi_3 \hat{\Lambda}' + \phi_4 \hat{\Gamma}') - 16\pi\phi_1\delta\hat{p} + \omega^2 e^{-2A}(\hat{\Lambda} + \phi_1 \hat{\Gamma}) = 0. \quad (5.17)$$

Nas equações anteriores introduzimos as notações

$$\hat{\Gamma} \equiv \delta\hat{g}_{\theta\theta} + \delta\hat{g}_{zz}, \quad (5.18)$$

$$\hat{\Lambda} \equiv \delta\hat{g}_{\theta\theta} - \delta\hat{g}_{zz}, \quad (5.19)$$

$$\phi_1(r) \equiv \frac{3A' + C' - L}{L + C' - A'}, \quad (5.20)$$

$$\phi_2(r) \equiv \frac{A' + C' + L}{L + C' - A'}, \quad (5.21)$$

$$\phi_3(r) \equiv \frac{3[3(A')^2 + (C')^2 + L^2] + 2[2A'(C' - 2L) + C'L]}{L + C' - A'}, \quad (5.22)$$

$$\phi_4(r) \equiv \frac{9(A')^2 - (C')^2 + L^2 - 6A'L}{L + C' - A'}. \quad (5.23)$$

5.4 Condições de contorno assintóticas

Nesta seção, analisaremos o comportamento assintótico das soluções de (5.14)-(5.17), e determinaremos condições de contorno para os modos normais longe do eixo- z . Como na análise correspondente para cordas $U(1)$ (seção 3.4), procuraremos soluções limitadas das equações de estrutura radial.

Os resultados da seção 4.3.2 sobre o comportamento assintótico da solução estática (A, C, K, \bar{p}) permitem aproximar (5.3)-(5.17) no limite $r \rightarrow \infty$ como

$$\begin{aligned} \hat{u}' + \left[1 - \frac{n(\eta+1)(\lambda-1)}{(n+1)\lambda} \right] \frac{\hat{u}}{r} + \frac{1}{c_0 r^{1-1/\lambda}} \left(\frac{n}{n+1} \hat{\omega} + \frac{1}{2} \hat{\Gamma} \right) &= 0, \\ \hat{\omega}' - \frac{\kappa(\lambda-1)}{(n+1)\lambda} \frac{\hat{\omega}}{r} + \frac{4\kappa c_0(\eta+1)k^2(1+2k)^2}{(n+1)\lambda^2} \frac{\hat{u}}{r^{1+1/\lambda}} \\ &- \frac{1}{4}(\eta+1)[(1+4k+8k^2)\hat{\Gamma}' - (1+4k)\hat{\Lambda}'] \\ &- \frac{\omega^2(\eta+1)}{c_0 r^{1-1/\lambda}} \left(\hat{u} + \frac{\lambda}{2c_0} r^{1/\lambda} \hat{\Gamma} \right) = 0, \\ \hat{\Gamma}' + \frac{1}{2\lambda r} [(1-4k-8k^2)\hat{\Gamma} + (1+4k)\hat{\Lambda}] - \frac{16\pi(\eta+1)c_0 p_\infty}{r^{\eta(1-1/\lambda)}} \hat{u} &= 0, \\ \hat{\Lambda}'' + \frac{1}{2\lambda r} [3(1+4k+8k^2)\hat{\Lambda}' + (1+4k)(1-4k-8k^2)\hat{\Gamma}'] & \end{aligned}$$

$$+ 16\pi(1+4k)p_\infty \frac{\hat{\omega}}{r^q} + \frac{\omega^2}{c_0^2 r^{2(1-1/\lambda)}} [\hat{\Lambda} - (1+4k)\hat{\Gamma}] = 0,$$

onde

$$\hat{\omega} = \frac{\delta \hat{p}}{\bar{p}}$$

e

$$p_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} r^q \bar{p}(r).$$

Uma forma mais conveniente para a análise assintótica das equações acima é obtida introduzindo a coordenada radial (*cf.* sec. 4.3.2) $R = r^{1/\lambda}$:

$$\frac{d\hat{u}}{dR} + \lambda \left[1 - \frac{n(\eta+1)}{n+1} \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) \right] \frac{\hat{u}}{R} + \frac{\lambda}{c_0} \left(\frac{n}{n+1} \hat{\omega} + \frac{1}{2} \hat{\Gamma} \right) = 0, \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\omega}}{dR} - \frac{2\kappa k(1+2k)}{n+1} \frac{\hat{\omega}}{R} + \frac{1}{4}(\eta+1)(1+4k)\hat{\Lambda} \\ - \frac{\lambda(\eta+1)\omega^2}{c_0} \left(\hat{u} + \frac{\lambda}{2c_0} R\hat{\Gamma} \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\Gamma}}{dR} + \frac{1}{2R} [(1-4k-8k^2)\hat{\Gamma} + (1+4k)\hat{\Lambda}] \\ - \frac{16\pi(\eta+1)\lambda c_0 p_\infty}{R^{4[1+4/(\eta-1)]}} \hat{u} = 0, \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{\Lambda}}{dR^2} + \frac{1}{2R} [(3+8k+16k^2) \frac{d\hat{\Lambda}}{dR} + (1+4k)(1-4k-8k^2) \frac{d\hat{\Gamma}}{dR}] \\ + \frac{16\pi(1+4k)\lambda^2 p_\infty}{R^{4[1+4/(\eta-1)]}} \hat{\omega} + \frac{\omega^2 \lambda^2}{c_0^2} [\hat{\Lambda} - (1+4k)\hat{\Gamma}] = 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Inicialmente, procuremos soluções em que as equações de Einstein (5.26)-(5.27) se desacoplam das equações hidrodinâmicas (5.24)-(5.25). O comportamento destas soluções pode ser determinado substituindo as expansões assintóticas

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda} &\sim \frac{1}{R^\alpha} \left(a_0 + \frac{a_1}{R} + \dots \right) \sin(\kappa_g R) + \frac{1}{R^\alpha} \left(b_0 + \frac{b_1}{R} + \dots \right) \cos(\kappa_g R), \\ \hat{\Gamma} &\sim \frac{1}{R^\alpha} \left(c_0 + \frac{c_1}{R} + \dots \right) \sin(\kappa_g R) + \frac{1}{R^\alpha} \left(d_0 + \frac{d_1}{R} + \dots \right) \cos(\kappa_g R) \end{aligned}$$

(onde α , κ_g , a_j , b_j , c_j , d_j são parâmetros a determinar⁴) em (5.26)-(5.27), e desprezando os termos proporcionais a $\hat{\omega}$ e \hat{u} . Após alguma álgebra, resulta que

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \kappa_g = \frac{\lambda\omega}{c_0}$$

e

$$\hat{\Lambda} \sim \frac{1}{R^{1/2}} [a_0 \sin(\kappa_g R) + b_0 \cos(\kappa_g R)] + O(R^{-3/2}) \quad (5.28)$$

$$\hat{\Gamma} \sim \frac{(1+4k)}{2\kappa_g R^{3/2}} [a_0 \cos(\kappa_g R) - b_0 \sin(\kappa_g R)] + O(R^{-5/2}), \quad (5.29)$$

onde a_0 e b_0 são constantes arbitrárias. A fim de justificar a suposição inicial de desacoplamento entre as equações, pode-se agora observar que (a) em vista dos resultados acima, as soluções de (5.24)-(5.25) para $\hat{\omega}$, \hat{u} correspondentes aos termos inhomogêneos em $\hat{\Lambda}$ e $\hat{\Gamma}$ podem ser tomadas $O(R^{-1/2} e^{\pm i\kappa_g R})$, e (b) por sua vez, os termos em $\hat{\omega}$, \hat{u} representam termos inhomogêneos $O(R^{-\nu} e^{\pm i\kappa_g R})$ em (5.26)-(5.27), onde $\nu = 4[1 + 4/(\eta - 1)] + \frac{1}{2} > \frac{9}{2}$; a solução para $\hat{\Lambda}$, $\hat{\Gamma}$ correspondente a estes termos inhomogêneos pode ser tomada $O(R^{-\nu} e^{\pm i\kappa_g R})$, que claramente pode ser desprezada em primeira aproximação em comparação com os termos retidos em (5.28)-(5.29).

A seguir, consideremos soluções onde as equações hidrodinâmicas se desacoplam assintoticamente das equações de Einstein (correspondentes a perturbações acústicas). Inserindo as expansões

$$\begin{aligned} \hat{u} &\sim \frac{1}{R^\beta} \left(u_0 + \frac{u_1}{R} + \dots \right) \cos(\kappa_s R) + \frac{1}{R^\beta} \left(v_0 + \frac{v_1}{R} + \dots \right) \sin(\kappa_s R), \\ \hat{\omega} &\sim \frac{1}{R^\beta} \left(p_0 + \frac{p_1}{R} + \dots \right) \cos(\kappa_s R) + \frac{1}{R^\beta} \left(q_0 + \frac{q_1}{R} + \dots \right) \sin(\kappa_s R), \end{aligned}$$

(onde β , κ_s , u_j , v_j , p_j , q_j são parâmetros a determinar) e desprezando os

⁴Não confundir a constante c_0 aqui introduzida com $c_0 = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{e^{\Lambda(r)}}{r^{1-1/\lambda}}$ (sec. 4.3.2).

termos proporcionais às perturbações da métrica, pode-se mostrar que

$$\beta = -\left(\frac{3}{2} + \frac{8}{\eta - 1}\right) < 0, \quad \kappa_s = \left(\frac{n(\eta + 1)}{n + 1}\right)^{1/2} \frac{\lambda\omega}{c_0},$$

e

$$\hat{u} \sim R^{|\beta|} [u_0 \cos(\kappa_s R) + v_0 \sin(\kappa_s R)], \quad (5.30)$$

$$\hat{\omega} \sim \omega \left(\frac{(n + 1)(\eta + 1)}{n}\right)^{1/2} R^{|\beta|} [u_0 \sin(\kappa_s R) - v_0 \cos(\kappa_s R)], \quad (5.31)$$

onde u_0 e v_0 são constantes arbitrárias. O desacoplamento assintótico entre as equações pode ser justificado por um argumento similar ao empregado anteriormente. Os termos em $\hat{\omega}$ e \hat{u} em (5.26)-(5.27) induzem perturbações $\hat{\Lambda}$, $\hat{\Gamma} = O(R^{-\mu} e^{\pm i\kappa_s R})$, onde $\mu = \frac{5}{2} + 8/(\eta - 1) > \frac{5}{2}$; por sua vez, estas perturbações da métrica induzem, através de (5.24)-(5.25), perturbações $\hat{\omega}$, $\hat{u} = O(R^{1-\mu} e^{\pm i\kappa_s R})$, que claramente podem ser desprezadas em comparação com os termos retidos em (5.30)-(5.31).

Os resultados acima indicam que a amplitude das oscilações acústicas em \hat{u} e $\hat{\omega} = \delta\hat{p}/\bar{p}$ cresce com R , ao invés de decrescer, como poder-se-ia esperar intuitivamente. Este comportamento da amplitude pode ser explicado qualitativamente considerando que a densidade (e portanto a inércia do meio) cai rapidamente com R . Assim, um pacote de ondas acústicas de energia finita é capaz de induzir acelerações e velocidades cada vez maiores no fluido à medida que se propaga para o exterior, mesmo levando-se em conta que a energia do pacote se distribui sobre superfícies cilíndricas cada vez maiores. Por outro lado, é evidente que o crescimento de \hat{u} e $\hat{\omega}$ eventualmente leva a uma situação onde a teoria linearizada aqui empregada não é mais aplicável: por exemplo, a teoria linear prevê que eventualmente teremos $\hat{\omega} = \delta\hat{p}/\bar{p} > 1$, o que corresponderia à presença de tensões em certas partes do gás; esperamos que na teoria não-linear (sem aproximação) existam mecanismos que

evitem o surgimento de pressões negativas (tensões). Assim, na presente teoria linearizada será necessário aceitar perturbações em \hat{u} e $\hat{\omega}$ cujas amplitudes crescem como $R^{|\beta|}$ quando $R \rightarrow \infty$; entretanto, será necessário ter em mente que a teoria linear é incapaz de prever a evolução final de uma perturbação que se propaga para o exterior.

Uma comparação entre as previsões das teorias linear e não-linear no limite clássico (com gravidade newtoniana) é ilustrada na Fig. 5.1. O perfil básico de pressão, densidade é dado por $\bar{p} = \bar{\rho}/\kappa = p_\infty r^{-4}$; a equação de equilíbrio hidrostático então implica que o potencial gravitacional não-perturbado satisfaz $\bar{\phi}' = -\bar{p}'/\bar{\rho} = (4/\kappa)r^{-1}$. Considerando apenas perturbações radiais de pressão, densidade e velocidade radial,⁵ podemos escrever as equações de continuidade, de momentum radial e a condição de que as perturbações sejam adiabáticas como

$$\delta\rho_{,t} + \frac{1}{r}(r\rho u)_{,r} = 0 \quad (5.32)$$

$$u_{,t} + uu_{,r} = -\frac{p_{,r}}{\rho} - \bar{\phi}' \quad (5.33)$$

$$\delta p_{,t} + up_{,r} - \frac{\gamma p}{\rho}(\delta\rho_{,t} + u\rho_{,r}) = 0, \quad (5.34)$$

onde γ é a razão entre os calores específicos do gás a pressão e volume constante. Com o auxílio de (5.32), podemos reescrever (5.34) como

$$\delta p_{,t} + up_{,r} + \frac{\gamma p}{r}(ru)_{,r} = 0. \quad (5.35)$$

A Fig. 5.1 mostra soluções numéricas (obtidas por um método simples de diferenças finitas) do sistema de equações de evolução (5.32), (5.33) e (5.35)

⁵A análise anterior mostra que as perturbações do campo gravitacional associadas com as perturbações acústicas decaem rapidamente com r , de modo que podem ser ignoradas em primeira aproximação.

e de sua versão linearizada

$$\delta\rho_{,t} + \frac{1}{r}(r\bar{\rho}u)_{,r} = 0 \quad (5.36)$$

$$u_{,t} + \frac{1}{\bar{\rho}}(\delta p_{,r} + \bar{\phi}'\delta\rho) = 0 \quad (5.37)$$

$$\delta p_{,t} + u\bar{p}' + \frac{\gamma\bar{p}}{r}(ru)_{,r} = 0, \quad (5.38)$$

com condições iniciais correspondentes a uma região de rarefação localizada. A solução das equações linearizada exibe o crescimento de amplitude em u e $\delta p/\bar{p}$ encontrado na análise assintótica anterior (Fig. 5.1a); o mesmo ocorre inicialmente para a solução das equações não-lineares (Fig. 5.1.b), mas eventualmente o pulso que se propaga para o exterior desenvolve descontinuidades de pressão, densidade e velocidade (*i.e.*, um choque). A partir deste estágio, efeitos dissipativos na superfície de descontinuidade (não descritos pelo modelo empregado) provavelmente impediriam a continuação do crescimento das perturbações de pressão, densidade e velocidade.

Voltando à análise do comportamento assintótico das soluções das equações de estrutura radial das perturbações no caso relativístico, obtivemos até agora soluções assintóticas que dependem de 4 constantes arbitrárias (a_0, b_0, u_0, v_0). já que o sistema em questão consiste de uma equação de segunda ordem e 3 equações de primeira ordem, resta ainda determinar o comportamento assintótico de uma solução independente das anteriores. Assumindo provisoriamente que para esta solução as equações de Einstein se desacoplam assintoticamente das equações hidrodinâmicas, e substituindo as expansões

$$\hat{\Gamma} \sim \frac{1}{R^\epsilon} \left(\Gamma_0 + \frac{\Gamma_1}{R} + \dots \right), \quad \hat{\Lambda} \sim \frac{1}{R^\epsilon} \left(\Lambda_0 + \frac{\Lambda_1}{R} + \dots \right)$$

em (5.26)-(5.27), obtém-se imediatamente que $\epsilon = \lambda$ e

$$\hat{\Gamma} \sim \frac{\Gamma_0}{R^\lambda} = \frac{\Gamma_0}{r}, \quad \hat{\Lambda} \sim (1 + 4k) \frac{\Gamma_0}{r}, \quad (5.39)$$

onde Γ_0 é uma constante arbitrária. A fim de justificar a suposição de desacoplamento, notamos que as perturbações da métrica que acabamos de obter induzem (através de (5.24)-(5.25)) perturbações com $\hat{u}, \hat{w} = O(R^{1-\lambda})$; estas por sua vez induzem, através de (5.26)-(5.27), perturbações da métrica com $\hat{\Gamma}, \hat{\Lambda} = O(R^{-\zeta})$, onde $\zeta = \lambda + 2 + 16/(\eta - 1) > \lambda + 2$, que são desprezíveis em comparação com os termos retidos em (5.39). A solução (5.39) é análoga à componente assintótica $\hat{\gamma}_1 \sim m_1 r$ presente nas soluções das equações de estrutura radial das perturbações da corda U(1) (seção 3.4). Estudando a forma assintótica de (5.8), pode-se mostrar que esta solução está associada a perturbações $O(r)$ no coeficiente métrico g_{tt} ; assim, a componente (5.39) deve ser removida das soluções representando modos normais.

5.5 Comportamento dos modos normais para r pequeno

Como mencionado na seção 5.2, as componentes físicas das perturbações da métrica (e também das variáveis hidrodinâmicas) devem ser funções regulares em $r = 0$. Além disso, é evidente que a velocidade radial deve se anular em $r = 0$. Por cálculo direto, pode-se então mostrar que a solução mais geral de (5.14)-(5.17) que satisfaz as condições de regularidade anteriores comporta-se como

$$\hat{\Gamma} = g_0 + g_2 r^2 + O(r^4) \quad (5.40)$$

$$\hat{\Lambda} = -g_0 + l_2 r^2 + O(r^4) \quad (5.41)$$

$$\delta \hat{p} = p_0 + p_2 r^2 + O(r^4) \quad (5.42)$$

$$\hat{u} = u_1 r + O(r^3) \quad (5.43)$$

para r pequeno.⁶ Nas expansões acima, há somente dois parâmetros livres, por exemplo p_0 e g_0 . Em vista da análise assintótica da seção anterior, isto implica que

1. Para frequências reais, a componente assintótica indesejável (5.39) pode ser eliminada combinando convenientemente as duas soluções que são regulares em $r = 0$. O resultado é um espectro contínuo, com um modo normal de onda estacionária por frequência.
2. Para frequências complexas ($\text{Im } \omega \neq 0$), além de (5.39) haverá duas componentes assintóticas que crescem exponencialmente com R (uma associada com perturbações da métrica e outra com perturbações das variáveis hidrodinâmicas); portanto, não deve ser possível remover todas as componentes indesejáveis de modo a obter uma solução regular para todo R . Assim, não devem existir modos instáveis ou estáveis de frequência complexa; também não devem existir modos em que todas as perturbações propagam-se para o exterior.

5.6 Propriedades de similaridade

O sistema de equações (5.14)-(5.17) possui uma propriedade de similaridade similar à discutida para a solução estática (seção 4.3.3). Suponha que $\delta\hat{g}_{\theta\theta}^{(0)}(r)$, $\delta\hat{g}_{zz}^{(0)}(r)$, $\delta\hat{p}^{(0)}(r)$, $\hat{u}^{(0)}(r)$ satisfazem o sistema com autovalor $\omega^{(0)}$, com a solução estática dada por $A^{(0)}(r)$, $C^{(0)}(r)$, $K^{(0)}(r)$, $\bar{p}^{(0)}(r)$. Então,

⁶Note-se que $\delta\hat{g}_{\theta\theta} = (1/2)(\hat{\Gamma} + \hat{\Lambda}) = O(r^2)$ de modo que não há singularidade cônica em $r = 0$.

para todo $\epsilon > 0$ as funções

$$\begin{aligned}\delta\hat{g}_{\theta\theta}(r) &= \delta\hat{g}_{\theta\theta}^{(0)}(\epsilon r), \\ \delta\hat{g}_{zz}(r) &= \delta\hat{g}_{zz}^{(0)}(\epsilon r), \\ \delta\hat{p}(r) &= \epsilon^2 \delta\hat{p}^{(0)}(\epsilon r), \\ \hat{u}(r) &= \frac{1}{\epsilon} \hat{u}^{(0)}(\epsilon r)\end{aligned}$$

satisfazem (5.14)-(5.17) com autovalor

$$\omega = \epsilon\omega^{(0)}$$

e com a solução estática transformada como indicado na seção 4.3.3 (Os parâmetros κ e n que aparecem nas equações de estrutura radial não são alterados na transformação).

As condições de contorno de regularidade em $r = 0$ e em $r \rightarrow \infty$ são preservadas pela transformação de similaridade acima. Assim, é suficiente estudar as perturbações de politropos com um valor fixado de p_c , com diferentes valores para κ e n .

5.7 Estudo numérico dos modos normais

5.7.1 Modos instáveis e amortecidos

Como mencionado na seção 5.5, espera-se a priori que todos os modos normais tenham frequências reais. Empregando a metodologia discutida na seção 3.7.1, obtivemos resultados numéricos que são consistentes com a inexistência de modos instáveis ou amortecidos.

5.7.2 Modos neutros

A determinação numérica do modo neutro correspondente a uma dada frequência ω pode ser realizada por um procedimento análogo ao discutido na seção 3.7.2. Inicialmente, um método de Runge-Kutta é empregado para produzir aproximações das duas soluções independentes de (5.14)-(5.17) que são regulares em $r = 0$. A fim de evitar a singularidade das equações em $r = 0$, as integrações começam em um raio "pequeno" r_{inic} , e se estendem até um raio r_{max} tal que $\hat{\Gamma}$ siga com boa aproximação o comportamento assintótico⁷

$$\hat{\Gamma} \sim \frac{\Gamma_0}{r} + \frac{\Gamma_1}{r^{3/2\lambda}} \cos(\kappa_g r^{1/\lambda}) + \frac{\Gamma_2}{r^{3/2\lambda}} \sin(\kappa_g r^{1/\lambda}) \quad (5.44)$$

em algum intervalo $r_1 \leq r \leq r_{\text{max}}$, com $(r_{\text{max}}^{1/\lambda} - r_1^{1/\lambda}) \gg 2\pi/\kappa_g$. A seguir, os parâmetros assintóticos Γ_j são determinados para cada uma das soluções regulares ajustando-se pelo método dos quadrados mínimos uma equação da forma (5.44) às soluções numéricas obtidas anteriormente. O modo normal é então construído como uma combinação linear das soluções regulares em $r = 0$, de modo a eliminar a componente $\hat{\Gamma} \sim \Gamma_0/r$; adotamos para os modos normais a normalização $\hat{\Gamma}(0) = 1$. Um exemplo de modo normal para o politropo com $n = 2$, $\kappa = 8$, $p_c = 0,01$ é mostrado na Fig. 5.2. Para o mesmo politropo, a Fig. 5.3 mostra a variação da fase e da amplitude assintóticas das perturbações que compõem o modo normal; estas são definidas por

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma} &\sim \frac{A_\Gamma}{R^{3/2}} \cos(\kappa_g R + \delta_\Gamma) \\ \hat{u} &\sim A_u R^{|\beta|} \cos(\kappa_s R + \delta_u). \end{aligned}$$

⁷Os termos correspondentes às perturbações da métrica induzidos por perturbações acústicas não precisam ser incluídos em primeira aproximação (cf. seção 5.4).

As curvas correspondentes às perturbações da métrica apresentam mínimos de amplitude a intervalos regulares de frequência; estes mínimos são acompanhados por variações bruscas da fase em 180° . Em modelos estelares com superfície externa definida, *i.e.*, tais que $p = 0$ para r suficientemente grande, estas características estão associadas à presença de modos complexos que se propagam para o exterior [11, 14]. No presente modelo, onde a matéria se estende por todo o espaço, a analogia com os modos complexos usuais não é completa, uma vez que as curvas de amplitude e fase das perturbações hidrodinâmicas não apresentam mínimos de amplitude nem variações bruscas de fase (Fig. 5.3).

Capítulo 6

COMENTÁRIOS FINAIS

Neste trabalho, iniciou-se o estudo da dinâmica de pequenas perturbações de alguns sistemas com simetria cilíndrica (cordas na teoria de calibre $U(1)$ com campo gravitacional e politropos compostos por um gás ideal com temperatura uniforme), através do método dos modos normais. Uma vez que as configurações estáticas são conhecidas apenas através de soluções numéricas, diversos métodos para sua determinação foram expostos em detalhe; sempre que possível, os métodos numéricos incorporaram resultados analíticos e assintóticos a respeito das soluções estáticas procuradas. No caso da corda $U(1)$, identidades integrais satisfeitas pela solução e uma análise detalhada do comportamento assintótico dos campos foram utilizadas na construção de um método numérico rapidamente convergente baseado em colocação com splines quínticas. Este método permitiu verificar com boa precisão (da ordem de 0,1%) as soluções numéricas previamente publicadas [7], refinando-as em vários casos e corrigindo alguns erros de impressão. O método de colocação é bastante versátil, podendo ser usado na determinação numérica de soluções de outros problemas de valores de contorno unidimensionais em relatividade e teorias de campo; por exemplo, o problema de valores de contorno relativo

a cordas na teoria de calibre $SU(2)$ em um espaço-tempo de Minkowski foi formulado e analisado assintoticamente [39], podendo ser resolvido numericamente por uma variante do método de colocação aqui apresentado. Em vista de considerações recentes de Vachaspati e Barriola [40], espera-se que cordas sejam bastante comuns em teorias de calibre com grupos de simetria maiores do que o grupo $U(1)$.

A obtenção de soluções representando um politropo estático composto de um gás ideal com temperatura uniforme (Cap. 4) é em geral muito mais simples do que o problema correspondente para cordas cósmicas, podendo ser resolvido como um problema de valores iniciais. No modelo com temperatura uniforme, o gás estende-se por todo o espaço, não sendo necessário considerar condições de junção em uma “superfície” onde a pressão se anula. Ainda que a presença de uma superfície definida em uma massa de gás seja pouco realista, tais modelos são freqüentemente utilizados no estudo de pulsações de estrelas [11] e em modelos de politropos cilíndricos com perfil básico isentrópico [14]. Outra característica interessante do modelo isotérmico aqui estudado é a existência de uma propriedade de similaridade, que permite descrever toda a variedade de possíveis soluções com apenas um parâmetro essencial. Uma expressão analítica simples foi deduzida para a densidade linear do politropo, empregando técnicas similares às usadas na dedução da expressão integral para o déficit angular de uma corda $U(1)$ [6]. Examinando o processo de dedução desta identidade, nota-se claramente que a obtenção de uma expressão para a densidade linear depende crucialmente da suposição de um perfil isotérmico ($\rho_0 = \kappa p$); em um modelo mais geral, uma expressão simples para a densidade linear provavelmente não existiria.

Considerou-se também uma nova classe de modelos de vórtices estacionários auto-gravitantes, que se reduzem aos politropos isotérmicos an-

teriormente estudados no limite de velocidade angular nula. Estes vórtices também possuem propriedades de similaridade, que reduzem o número de parâmetros necessários para descrever uma solução (o perfil de velocidade angular em torno do eixo é uma função arbitrária). Mostrou-se que os efeitos da rotação sobre a densidade linear do vórtice podem ser representados em forma integral, como no caso de um vórtice similar em gravitação newtoniana. Nesta última teoria, a rotação sempre implica em aumento de densidade linear em relação ao politropo correspondente sem rotação; claramente, isto se deve a efeitos centrífugos. No caso relativístico geral, as correções à densidade linear são dadas por uma expressão que não é positiva definida; entretanto, em todos os casos estudados numericamente, a correção foi positiva e uma função crescente das velocidades angulares presentes no vórtice. O processo numérico adotado para a determinação das soluções para vórtice segue o espírito dos métodos de *shooting*. Assim, as equações de Einstein são integradas a partir de $r = 0$ com diferentes condições iniciais, na tentativa de obter uma solução que tenha o comportamento desejado para $r \rightarrow \infty$. Métodos de colocação não foram aqui empregados porque o comportamento assintótico das soluções procuradas não era conhecido *a priori* com tanto detalhe quanto as soluções para cordas U(1). Devido à grande sensibilidade da solução para o vórtice em relação às condições iniciais sobre o eixo- z , foi necessário empregar a expressão integral para a densidade linear do vórtice em um processo iterativo de refinamento das condições iniciais.

Devido à grande complexidade das equações que governam pequenas perturbações arbitrárias dos sistemas estudados, restringiu-se a atenção a perturbações com simetria cilíndrica. Da mesma forma, somente considerou-se perturbações de politropos estáticos, deixando o caso geral com rotação para um trabalho posterior. A análise em termos de modos normais seguiu o pro-

cedimento usual da teoria da estabilidade hidrodinâmica, onde a estrutura espacial dos modos normais deve ser descrita por funções limitadas. A análise assintótica das equações que governam as perturbações mostrou que para a corda $U(1)$ é possível construir modos com esta propriedade, enquanto que para o politropo isotérmico é preciso aceitar perturbações das variáveis hidrodinâmicas cuja amplitude cresce como uma potência de r quando $r \rightarrow \infty$. Este comportamento foi identificado como uma indicação da inabilidade da teoria linear em descrever a evolução final de uma perturbação que se propaga em direção ao exterior, propagando-se através de camadas cada vez mais rarefeitas de gás.

A inexistência de modos com frequências não-reais (modos instáveis e assintoticamente estáveis) foi evidenciada com o auxílio de identidades integrais e métodos numéricos. Considerou-se então em detalhe os modos neutros, que formam um espectro contínuo de frequências reais. O politropo isotérmico apresenta um modo normal por frequência, que consiste de uma onda gravitacional estacionária acoplada a uma outra com perturbações acústicas. A estrutura do espectro de modos neutros é bem mais complexa no caso da corda $U(1)$; em uma classe de perturbações envolvendo as componentes diagonais da métrica, o campo escalar e a componente azimutal do campo de calibre, mostrou-se que há três intervalos espectrais distintos: no intervalo de alta frequência, há dois modos distintos compostos por ondas estacionárias, no intervalo de frequência intermediária há apenas um, no qual o campo escalar ou de calibre decai exponencialmente com r , e finalmente não há modos normais no intervalo de baixas frequências. Em ambos os modelos (corda e politropo), a ausência de uma superfície exterior nítida permite que os campos não-gravitacionais se propaguem para fora. Neste aspecto, os modos normais aqui considerados diferem daqueles usualmente considerados na

literatura para modelos estelares ou de politropos cilíndricos com fronteiras nítidas [11, 33, 14], onde apenas as perturbações da métrica podem se propagar indefinidamente para o exterior. Em tais modelos, grande ênfase é dada aos modos quase-normais, construídos como superposições dos modos de onda estacionária, e que servem como modelos bastante particulares de perturbações em que o sistema emite ondas gravitacionais. Nos modelos aqui estudados, devido à propagação de ondas não-gravitacionais para o exterior não é possível construir modos em que todas as perturbações propagam-se para o exterior. Assim, o conceito de modos quase-normais não é aqui tão relevante quanto nos modelos usualmente considerados na literatura. Apesar disto, encontrou-se evidência de que o politropo isotérmico admite um espectro discreto de frequências complexas para as quais as perturbações gravitacionais propagam-se para o exterior (enquanto que o mesmo não ocorre com as perturbações de pressão e velocidade).

Finalmente, entre as possíveis generalizações do presente trabalho poderíamos citar:

1. O estudo da dinâmica de perturbações mais gerais (dependentes de θ e z) da corda $U(1)$, verificando sua estabilidade;
2. O estudo de perturbações de cordas com circulações $n > 1$, que poderiam exibir instabilidades associadas a seu decaimento para n cordas de circulação unitária [3];
3. O estudo de perturbações dos vórtices politrópicos aqui estudados. No caso mais simples, seriam consideradas perturbações dependentes de (r, θ, t) , que podem exibir instabilidades de caráter predominantemente hidrodinâmico, modificadas pelos efeitos gravitacionais e pela estratificação do fluido. Uma vez que o problema relativístico é bastante

complexo, o problema correspondente em gravitação newtoniana poderia ser usado como um guia para o estudo do problema geral;

4. O estudo numérico da evolução de perturbações iniciais de amplitude finita de cordas e vórtices, empregando algoritmos de integração numérica das equações não-lineares completas; este estudo poderia incluir uma comparação entre as respostas linear e não-linear dos diferentes sistemas, particularmente em relação à evolução final das perturbações (instabilidades, ondas de choque, etc.).

Bibliografia

- [1] Vilenkin, A. *Phys. Rev. Lett.*, 46:1169, 1981.
- [2] Vilenkin, A. Gravitational field of vacuum domain walls and strings. *Phys. Rev. D*, 23:852, 1981.
- [3] Bogomol'nyi, E.B.; Vainshtein, A.I. Stability of strings in gauge Abelian theory. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 23:588-591, 1976.
- [4] Futamase, T.; Garfinkle, D. What is the relation between $\Delta\phi$ and μ for a cosmic string? *Phys. Rev. D*, 37:2086-2091, 1988.
- [5] Matzner, R. University of Texas Report, 1987.
- [6] Garfinkle, D. General relativistic strings. *Phys. Rev. D*, 32:1323-1329, 1985.
- [7] Laguna-Castillo, P.; Matzner, R.A. Coupled field solutions for U(1)-gauge cosmic strings. *Phys. Rev. D*, 36:3663-3673, 1987.
- [8] Laguna, P.; Garfinkle, D. Spacetime of supermassive U(1)-gauge cosmic strings. *Phys. Rev. D*, 40:1011-1016, 1989.
- [9] Chandrasekhar, S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Clarendon, Oxford, 1970.

- [10] Drazin, P.G.; Reid, W.H. *Hydrodynamic stability*. Cambridge Univ. Press, 1981. 526 p.
- [11] Thorne, K.S.; Campolattaro, A. Non-radial pulsation of general-relativistic stellar models. I. Analytic analysis for $l \geq 2$. *Ap. J.*, 149:591-611, 1967.
- [12] Price, R.; Thorne, K.S. Non-radial pulsation of general-relativistic stellar models. II. Properties of the gravitational waves. *Ap. J.*, 155:163-182, 1969.
- [13] Thorne, K.S. Nonradial pulsation of general-relativistic stellar models. III. Analytic and numerical results for neutron stars. *Ap. J.*, 158:1-16, 1969.
- [14] Scheel, M.A.; Shapiro, S.L.; Teukolsky, S.A. Equilibrium and stability of relativistic cylindrical polytropes. *Phys. Rev. D*, 48:592-606, 1993.
- [15] Garfinkle, D.; Laguna, P. Contribution of gravitational self-interaction to $\Delta\phi$ and μ for a cosmic string. *Phys. Rev. D*, 39:1552-1557, 1989.
- [16] Frank, R. The method of iterated defect-correction and its application to two-point boundary value problems. *Numer. Math.*, 25:409-419, 1976.
- [17] Usmani, R.A.; Warsi, S.A. Quintic spline solutions of boundary value problems. *Comp. Maths. Appls.*, 6:197-203, 1980.
- [18] Chawla, M.M.; Subramanian, R. A new fourth-order cubic spline method for second-order nonlinear two-point boundary-value problems. *J. Comput. Appl. Math.*, 23:1-10, 1988.

- [19] Abramowitz, M.; Stegun, I. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York, 1968. 1046 p.
- [20] Walsh, J.E. Implicit methods for boundary-value problems. In: *The Numerical Solution of Nonlinear Problems*. Baker, C.T.H.; Phillips, C., eds. Oxford, Clarendon Press, 1981. p. 137-147.
- [21] NAG (Numerical Algorithms Group). *Fortran Library Manual, Mark 9*. Oxford, 1982. 6 v.
- [22] Davis, P.J.; Rabinowitz, P. *Methods of Numerical Integration*. Academic Press, New York, 1975.
- [23] Collatz, L. *The Numerical Treatment of Differential Equations* Springer, New York, 1966.
- [24] Schumaker, L.L. *Spline Functions: Basic Theory*. Wiley, New York, 1981.
- [25] Müllenheim, G. Some new recursion relations for spline functions with applications to spline collocation. *J. Approx. Theory*, 58:201-212, 1989.
- [26] Chawla, M.M. A fourth-order tridiagonal finite difference method for general non-linear two-point boundary value problems with mixed boundary conditions. *J. Inst. Maths. Applics.*, 21:83-93, 1978.
- [27] Gregory, J.; Sarker, T; Zeman, M. Higher order discretization methods for $y'' = f(x, y, y')$. *J. Math. Anal. Appl.*, 136:141-156, 1988.
- [28] Zhou, Z.; Straumann, N. Nonlinear perturbations of Einstein-Yang-Mills solitons and non-abelian black holes. *Nucl. Phys.*, B360:180-196, 1991.

- [29] Sedov, L. *Mécanique des Milieux Continus*. Tome I. Mir, Moscou, 1975.
- [30] Gary, J.; Helgason, R. A matrix method for ordinary differential eigenvalue problems. *J. Comput. Phys.*, 5:169-187, 1970.
- [31] Moler, C.B.; Stewart, G.W. An algorithm for generalized matrix eigenproblems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 10:241-256, 1973.
- [32] Doubrovine B.; Novikov, S.; Fomenko, A. *Géométrie Contemporaine: Méthodes et Applications*. 1^{re} partie. Mir, Moscou. 1982.
- [33] Detweiler, S.L. A variational calculation of the fundamental frequencies of quadrupole pulsation of fluid spheres in general relativity. *Ap. J.*, 197:203-217, 1975.
- [34] Ferrari, V. Non-radial oscillations of stars in general relativity: a scattering problem. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 340:423-445, 1992.
- [35] Bartnik, R.; McKinnon, J. *Phys. Rev. Lett.*, 61:141, 1988.
- [36] Straumann, N.; Zhou, Z. Instability of a colored black hole solution. *Phys. Lett.*, B243:33-35, 1990.
- [37] Taub, A.H. Isentropic hydrodynamics in plane symmetric space-times. *Phys. Rev.*, 103:454-467, 1956.
- [38] Anderson, J.L. *Principles of Relativity Physics*. Academic, New York, 1967. 484 p.
- [39] Holvorcem, P.R.; Gal'tsov, D.; Letelier, P.S. SU(N) cosmic strings. Trabalho em andamento.

- [40] Vachaspati, T.; Barriola, M. A new class of defects. *Phys. Rev. Lett.*, 69:1867-1870, 1992.

Apêndice A

FIGURAS

Fig. 2.1 Exemplo de soluções estáticas para cordas $U(1)$ com $\eta = 0, 1$. (a) Campo escalar, (b) Componente azimutal do campo de calibre, (c)-(d) funções que definem a métrica, (e) densidade de energia, (f) pressão na direção radial, (g) pressão na direção azimutal.

Fig. 3.1 Exemplo de modos normais de alta frequência ($\omega = 5$) correspondentes ao Subsistema I para uma corda estática com $\alpha = \frac{1}{2}$, $\eta = 0, 1$. (a) modo 1, (b) modo 2.

Fig. 3.2 Exemplo de modo normal de baixa frequência ($\omega = 0, 4$) correspondente ao Subsistema I para uma corda estática com $\alpha = \frac{1}{2}$, $\eta = 0, 1$.

Fig. 3.3 Amplitudes e fases assintóticas dos modos normais correspondentes ao Subsistema I para uma corda estática com $\alpha = \frac{1}{2}$, $\eta = 0, 1$. As amplitudes e fases referentes às perturbações \hat{W}_1 e $\hat{\Omega}_1$ são indicadas por linhas cheias e tracejadas, respectivamente. A linha vertical em $\omega = 0, 7035$ marca a divisão entre as regiões de alta e baixa frequência do espectro. Para $\omega > 0, 7035$, as linhas finas correspondem ao modo 1 e as linhas grossas ao

modo 2.

Fig. 3.4 O mesmo que a Fig. 3.3, mas para uma corda estática com $\alpha = 2$, $\eta = 0,1$. A frequência $\omega = 1,4194$ separa as regiões de alta e baixa frequência.

Fig. 3.5 Exemplo de modos normais de alta frequência ($\omega = 5$) correspondentes ao Subsistema II para uma corda estática com $\alpha = \frac{1}{2}$, $\eta = 0,1$. (a)-(b) modo 1, (b)-(d) modo 2.

Fig. 3.6 Exemplo de modo normal de frequência intermediária ($\omega = 0,8$) correspondente ao Subsistema II para uma corda estática com $\alpha = \frac{1}{2}$, $\eta = 0,1$.

Fig. 3.7 Exemplo de modo normal de frequência intermediária ($\omega = 1,2$) correspondente ao Subsistema II para uma corda estática com $\alpha = 2$, $\eta = 0,1$.

Fig. 3.8 Parâmetro assintótico m_1 para a solução do Subsistema II que é regular em $r = 0$ e para a qual $\hat{X}_1, \hat{U}_1 \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$ (esta solução somente está definida na região de baixa frequência do espectro). A linha tracejada corresponde a $\alpha = \frac{1}{2}$, $\eta = 0,1$, e a linha cheia corresponde a $\alpha = 2$, $\eta = 0,1$. A linha cheia vertical em $\omega = 0,7035$ marca o limite superior da região de baixa frequência quando $\alpha = \frac{1}{2}$; para $\alpha = 2$, o limite superior é $\omega = 1,0037$. A linha pontilhada vertical marca uma singularidade de m_1 .

Fig. 3.9 Amplitudes e fases assintóticas dos modos normais correspondentes ao Subsistema II para uma corda estática com $\alpha = \frac{1}{2}$, $\eta = 0,1$. As

amplitudes e fases referentes às perturbações $\hat{\gamma}_1$, \hat{U}_1 e \hat{X}_1 são indicadas por linhas cheias, pontilhadas e tracejadas, respectivamente. As linhas verticais em $\omega = 0,7035$ e $\omega = 0,9949$ marcam as divisões entre as regiões de frequências baixas, intermediárias e altas do espectro. Para $\omega > 0,9949$, as linhas finas correspondem ao modo 1 e as linhas grossas ao modo 2.

Fig. 3.10 O mesmo que a Fig. 3.9, mas para uma corda estática com $\alpha = 2$, $\eta = 0,1$. As frequências $\omega = 1,0037$ e $\omega = 1,4194$ separam diferentes regiões do espectro.

Fig. 4.1 Parâmetro de massa de Levi-Civita (k) e expoente de decaimento da pressão(q) para o politropo sem rotação.

Fig. 4.2 Modelos para um politropo sem rotação, normalizados por $p_c = 1$. (a) $p(r)$, (b) $A(r)$, (c) $C(r)$, (d) $K(r)$. As soluções correspondem a $\eta = 1,1$ (linha cheia fina), 1,5 (linha pontilhada), 3 (linha com traços longos), 5 (linha com traços curtos), 10 (linha com pontos e traços) e 50 (linha cheia grossa).

Fig. 4.3 Determinação gráfica aproximada do valor de B_c correspondente a um modelo de vórtice com $p_c = 0,01$, $\Delta_0 = 0,1$, $\eta = 10$.

Fig. 4.4 Exemplos de modelos de vórtices politrópicos com $\eta = 10$, $p_c = 0,01$ e perfil de "velocidade" $\Delta(r) = \Delta_0 r e^{1-r}$. Este perfil tem um máximo em $r = 1$. As curvas mostradas correspondem a $\Delta_0 = 0$ (linha cheia), 0,1 (linha pontilhada), 0,3 (linha com traços longos) e 0,5 (linha com traços curtos). (a) $p(r)$, (b) $B(r)$, (c) $A(r)$, (d) $C(r)$, (e) $K(r)$.

Fig. 4.5 Dependência de B_c e do parâmetro de massa de Levi-Civita (k) em relação à amplitude do perfil de “velocidade” (Δ_0), que é tomado como na figura anterior. São mostrados os valores de k calculados pela expressão (4.57) (denotados por $k(I, \eta)$) e os determinados a partir do comportamento assintótico da solução numérica (denotados por $k_{\text{num.}}$).

Fig. 5.1 Comparação entre a evolução linear (a) e não-linear (b) de uma perturbação de amplitude finita em um modelo clássico simplificado do politropo tratado no texto. O perfil estático de pressão e densidade tem parâmetros $\gamma = 1,5$, $\kappa = 4$ e $p_\infty = 10^5$. As condições iniciais são $\delta p = -0,006e^{-(r-50)^2/25}$, $\delta \rho = -0,022e^{-(r-50)^2/25}$, $u = 0$ em $t = 0$ (linha cheia). Os estágios mostrados na figura correspondem a $t = 8$ (linha pontilhada), $t = 16$ (linha com traços longos), $t = 24$ (linha com traços curtos) e $t = 32$ (linha com pontos e traços). A solução não-linear para $t = 32$ é afetada por ruído numérico na região em que uma onda de choque está se formando.

Fig. 5.2 Exemplo de modo normal de um politropo sem rotação com $\kappa = 8$, $\gamma = 1,5$, $p_c = 0,01$. A frequência é $\omega = 5$.

Fig. 5.3 Amplitudes e fases assintóticas do modo normal do politropo sem rotação com $\kappa = 8$, $\gamma = 1,5$, $p_c = 0,01$. As linhas cheias e tracejadas correspondem às perturbações $\hat{\Gamma}$ e \hat{u} , respectivamente.

$$\eta = 10^{-1}$$

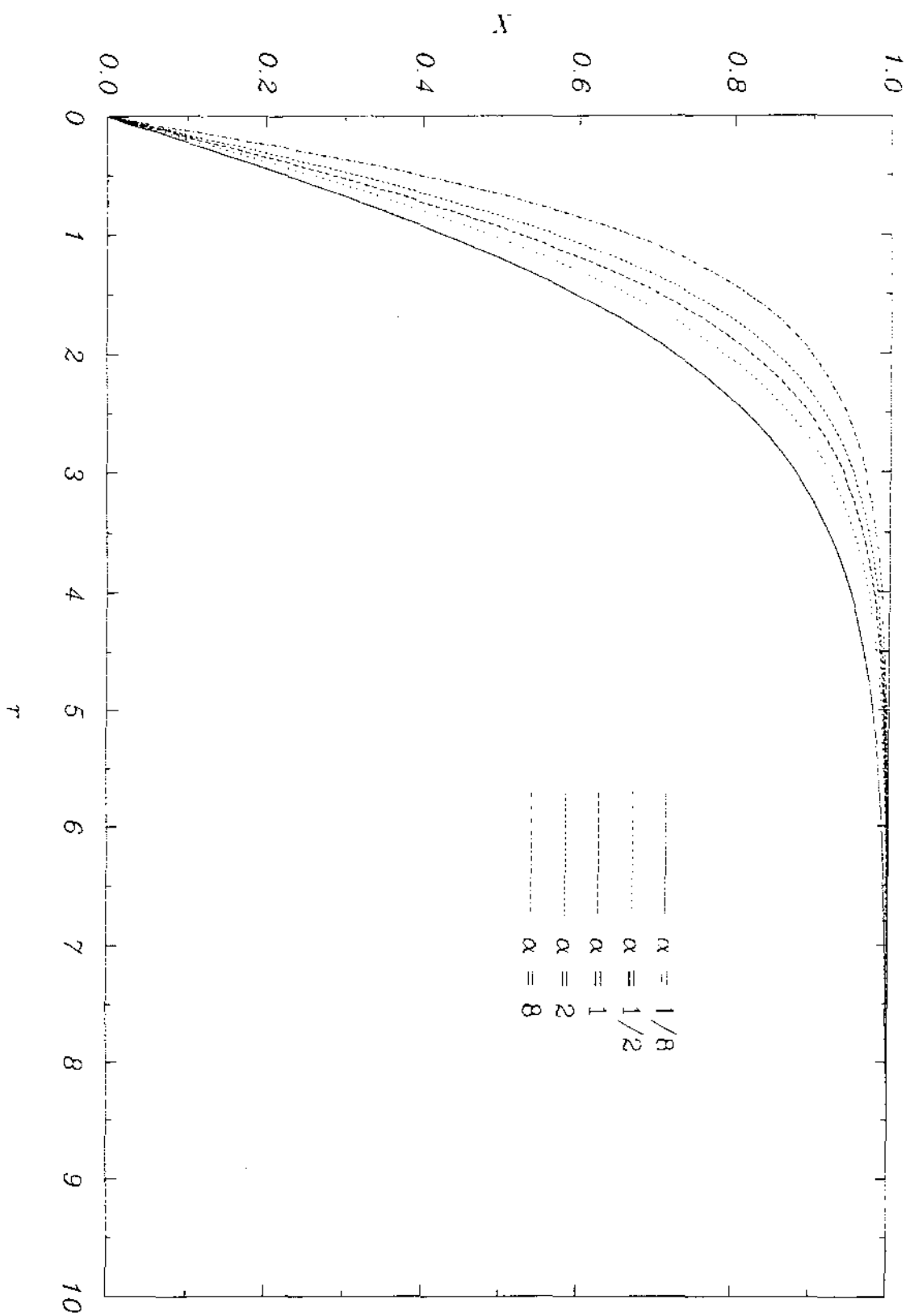


Fig. 2.1a

$$\eta = 10^{-1}$$

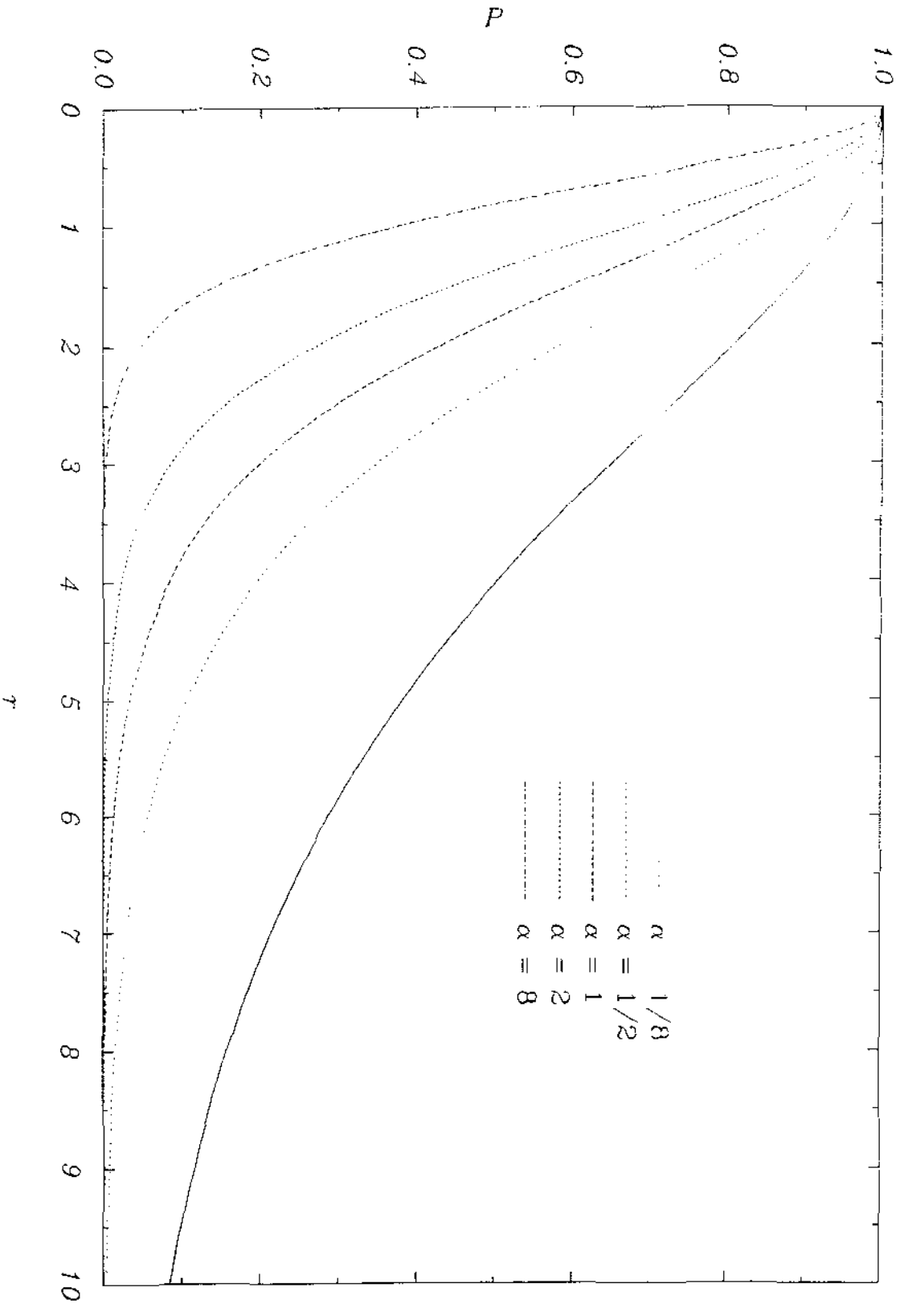


Fig. 2.1b

$$\eta = 10^{-1}$$

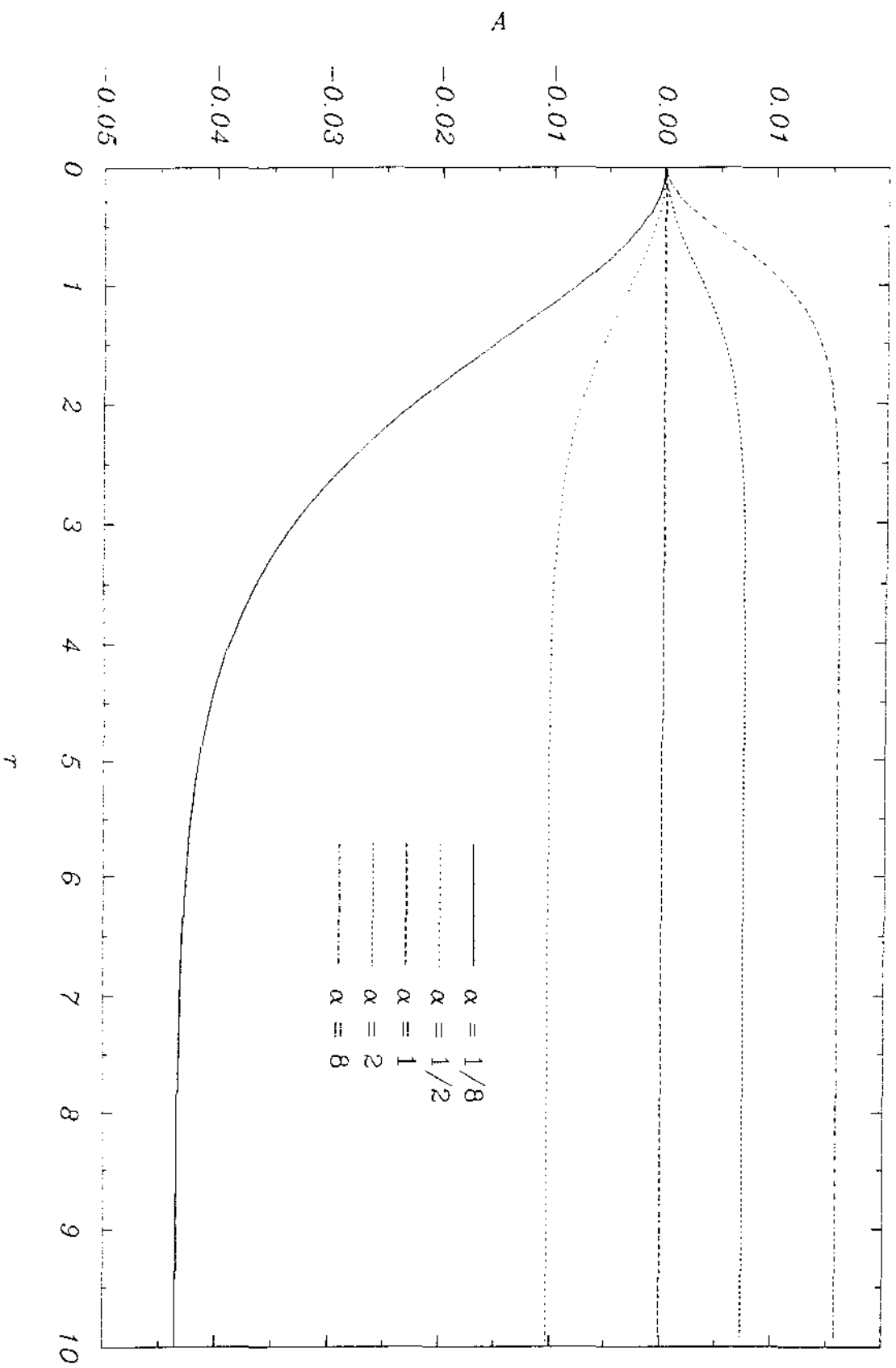


Fig.2.1c

$$\eta = 10^{-1}$$

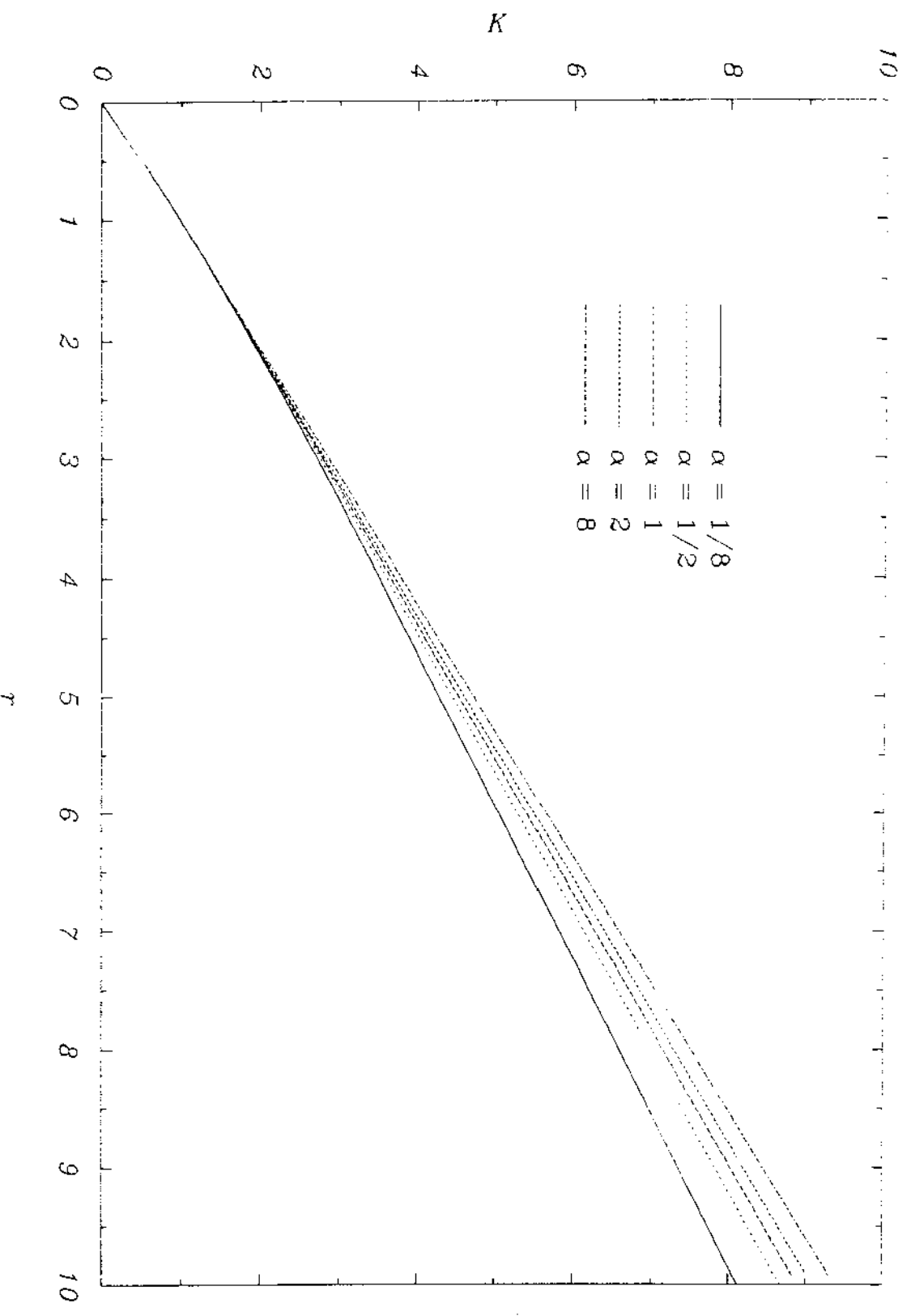


Fig2.1d

$$\eta = 10^{-1}$$

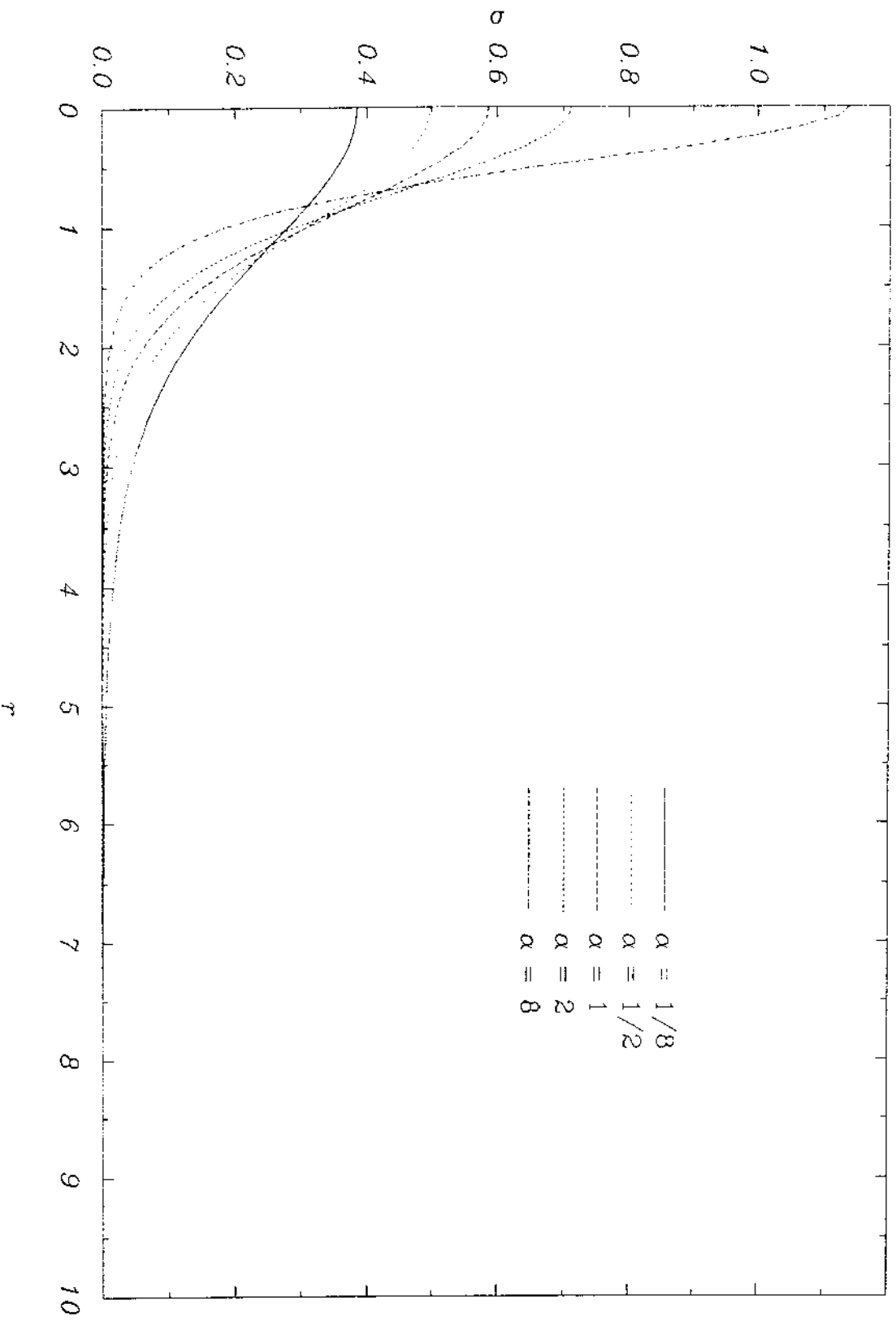


Fig. 2.1e

$$\eta = 10^{-1}$$

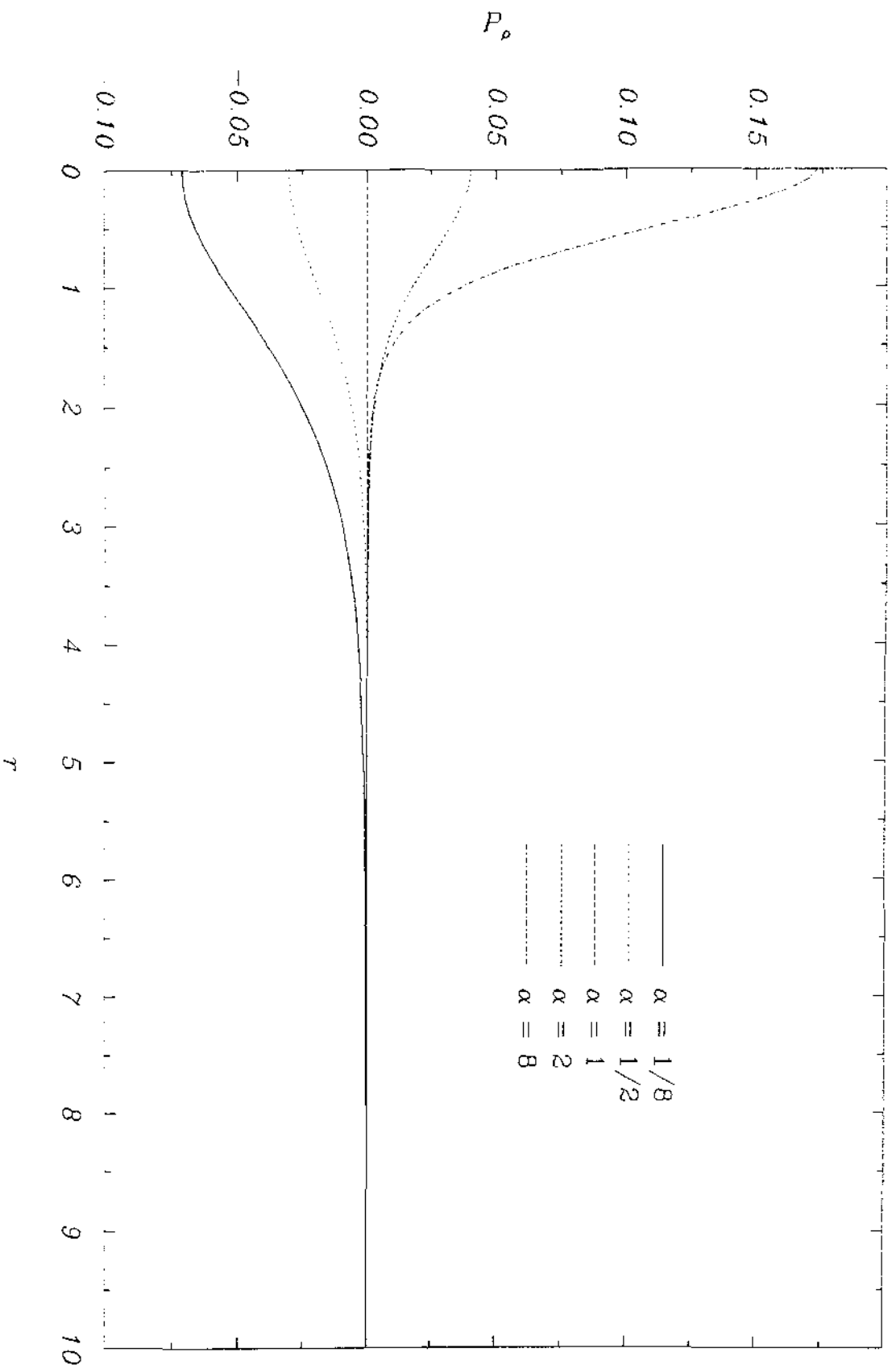


Fig. 2.1E

$$\eta = 10^{-1}$$

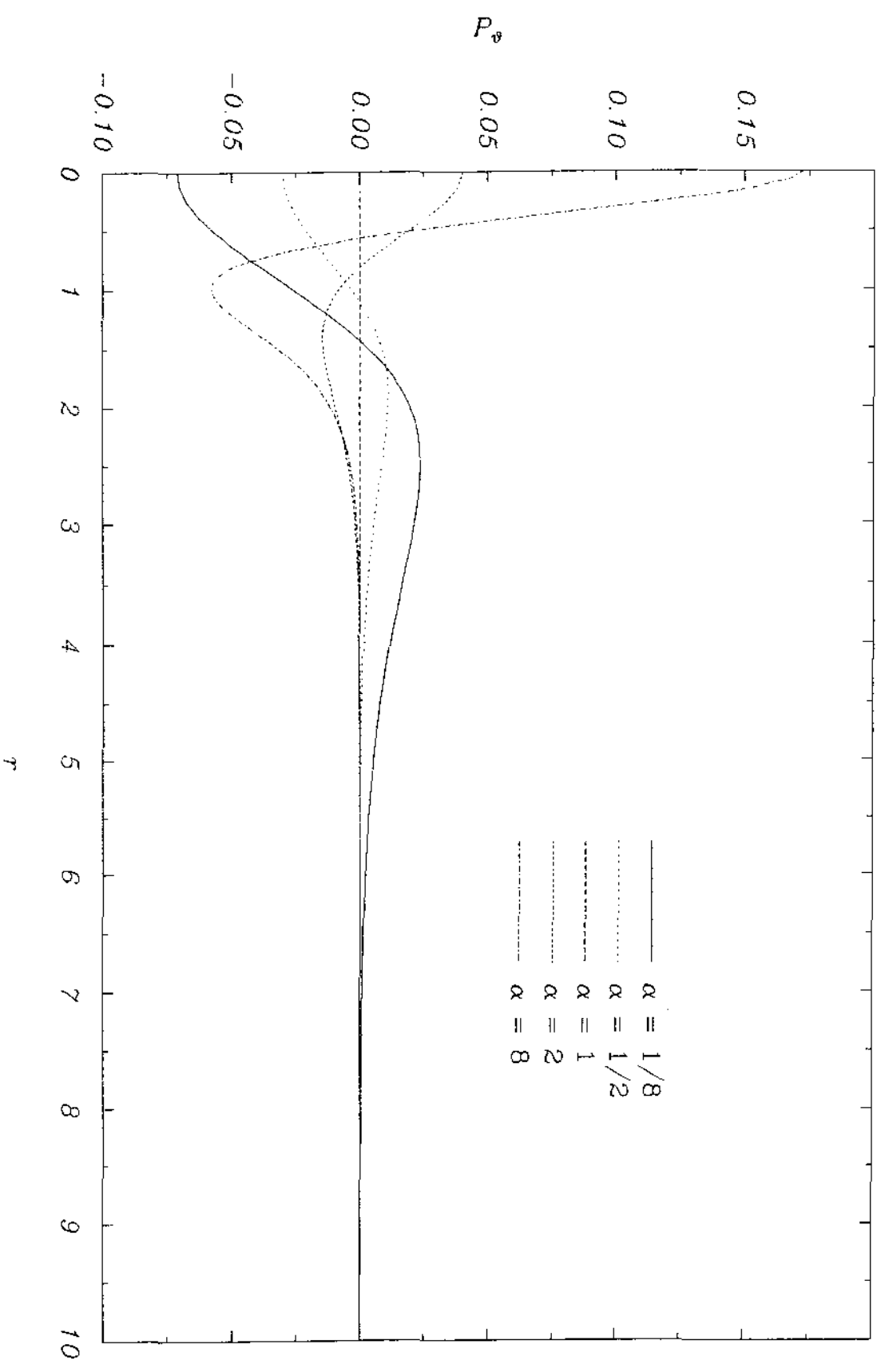


Fig. 2.19

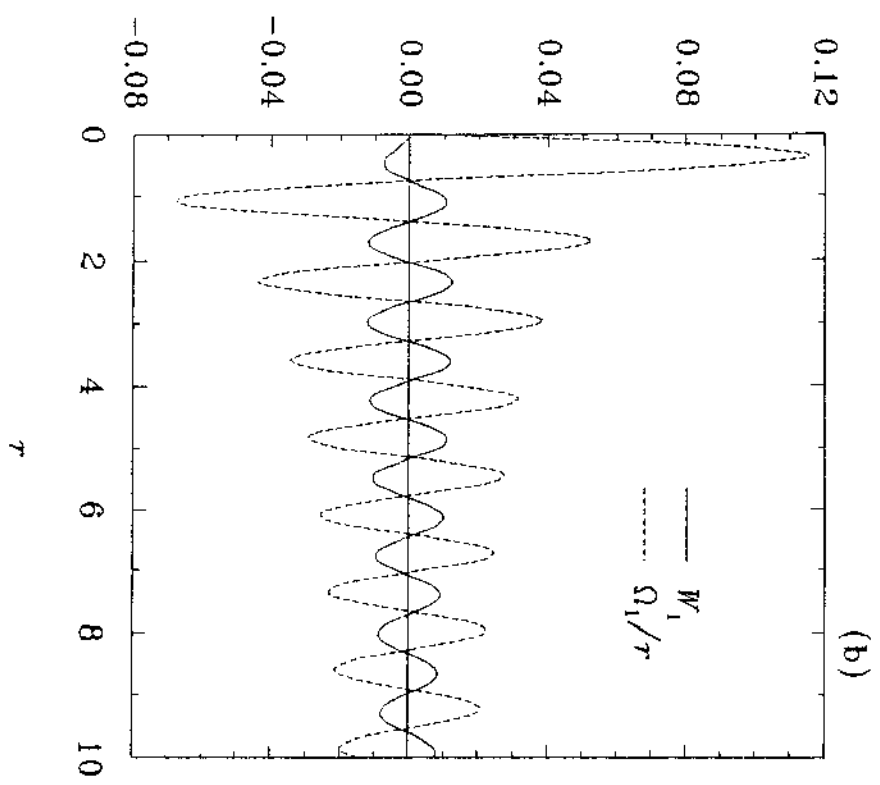
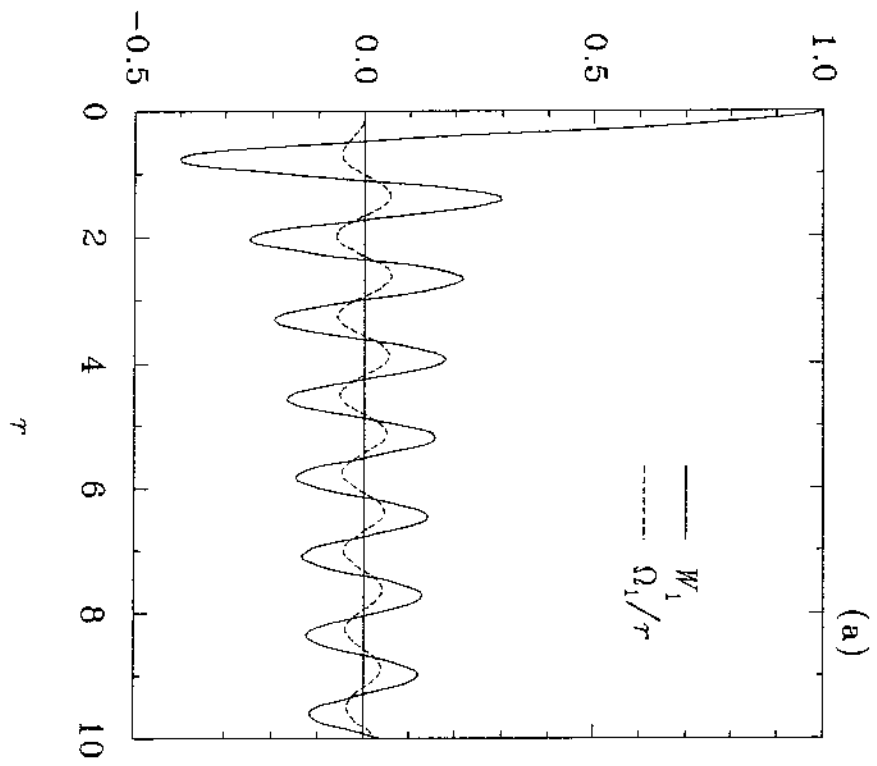


Fig. 3.1

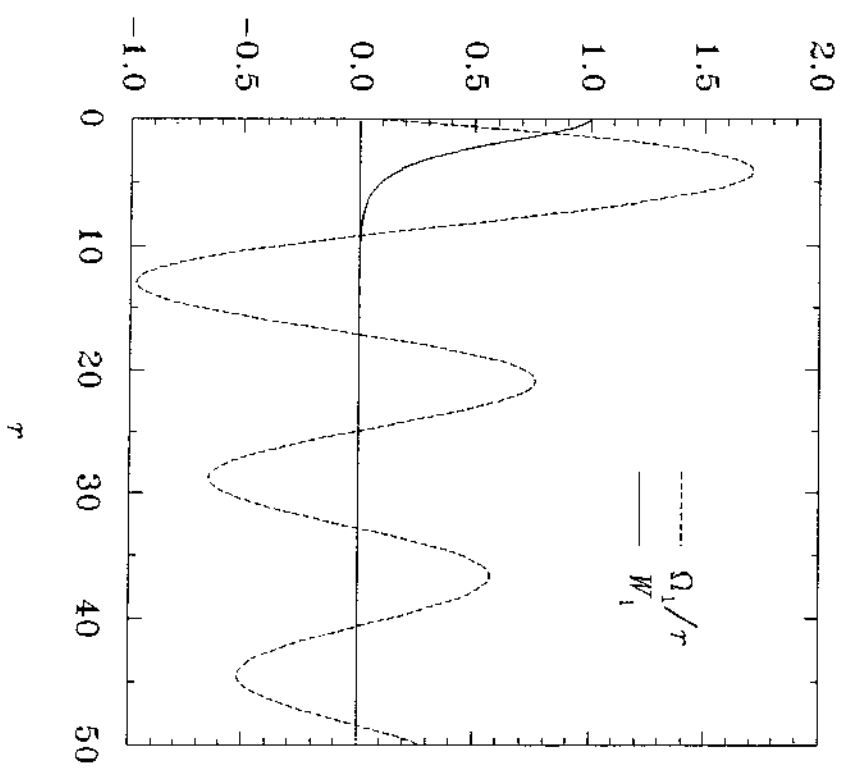


Fig. 3.2

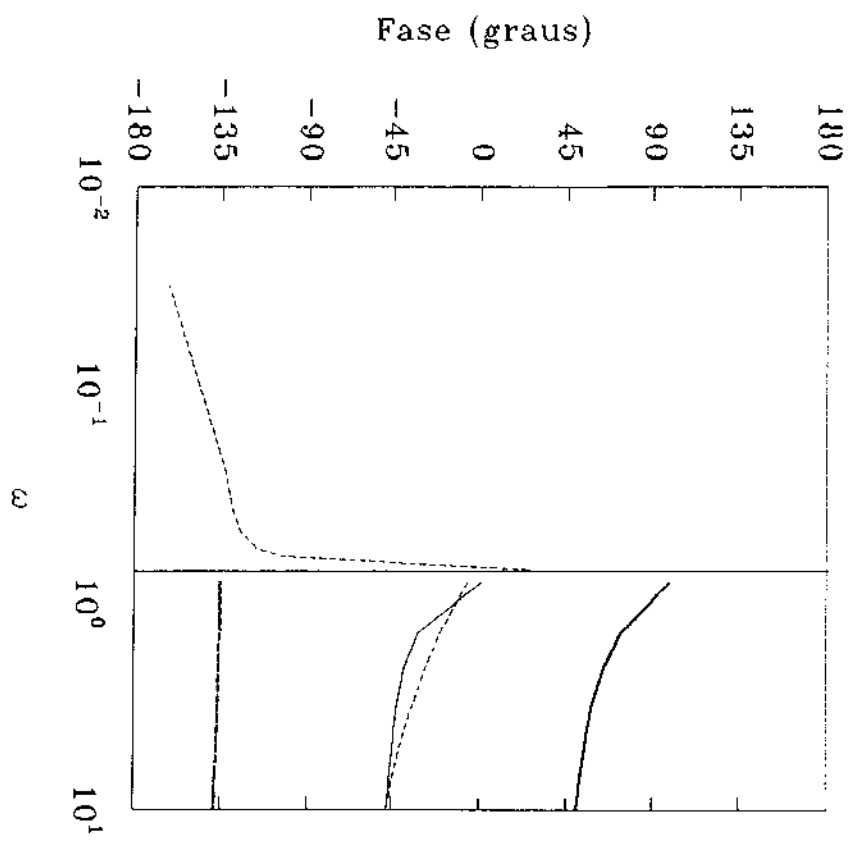
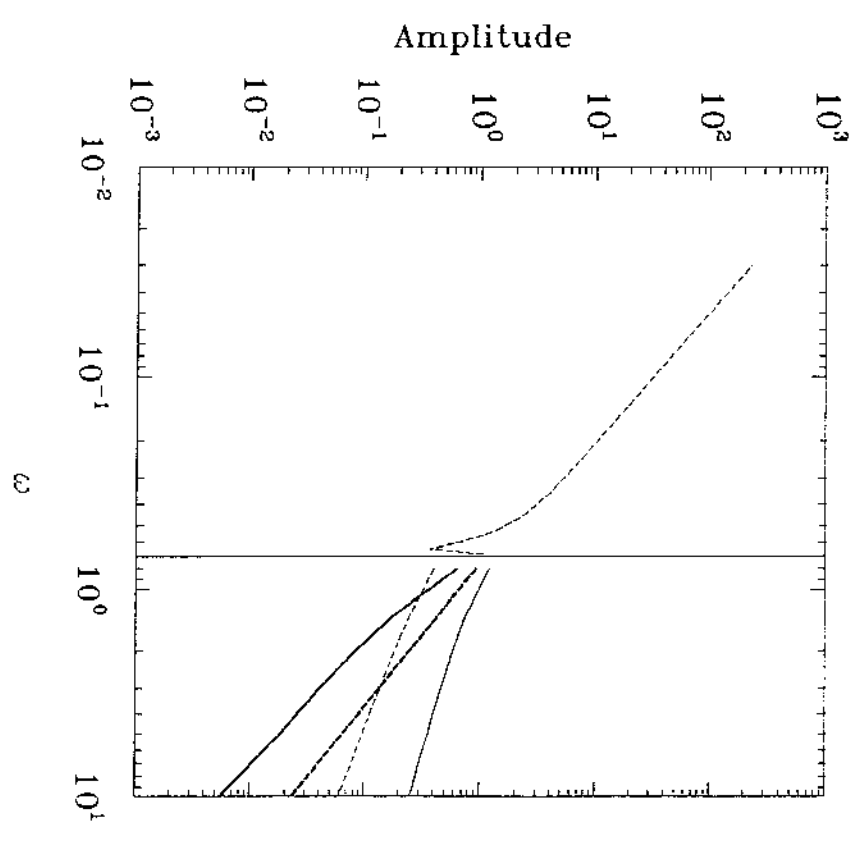


Fig. 3.3

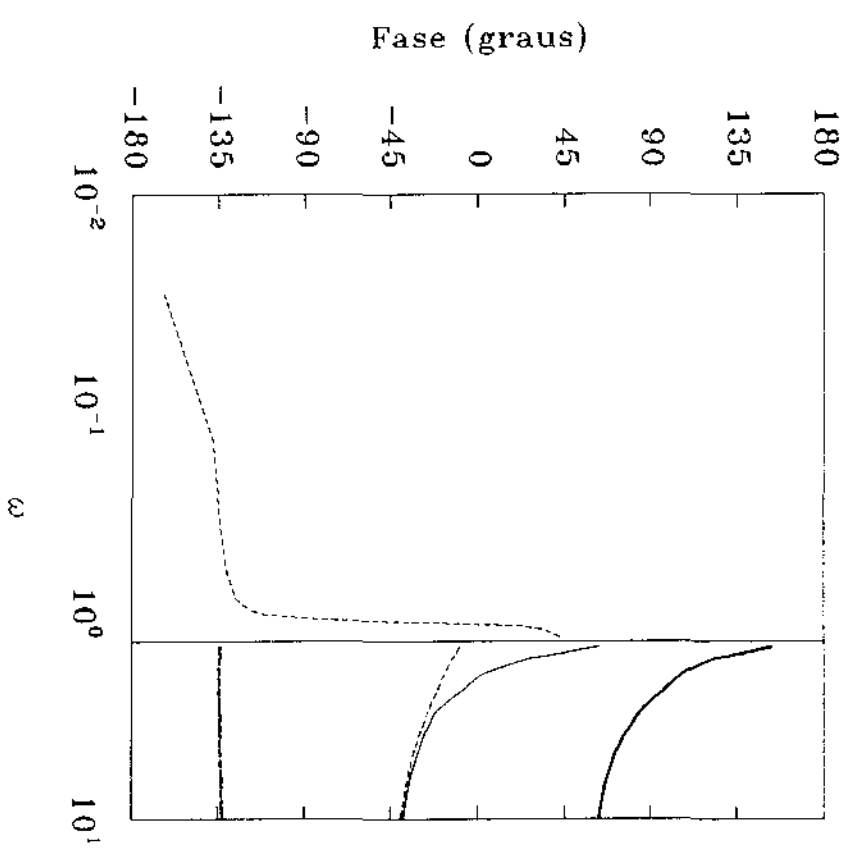
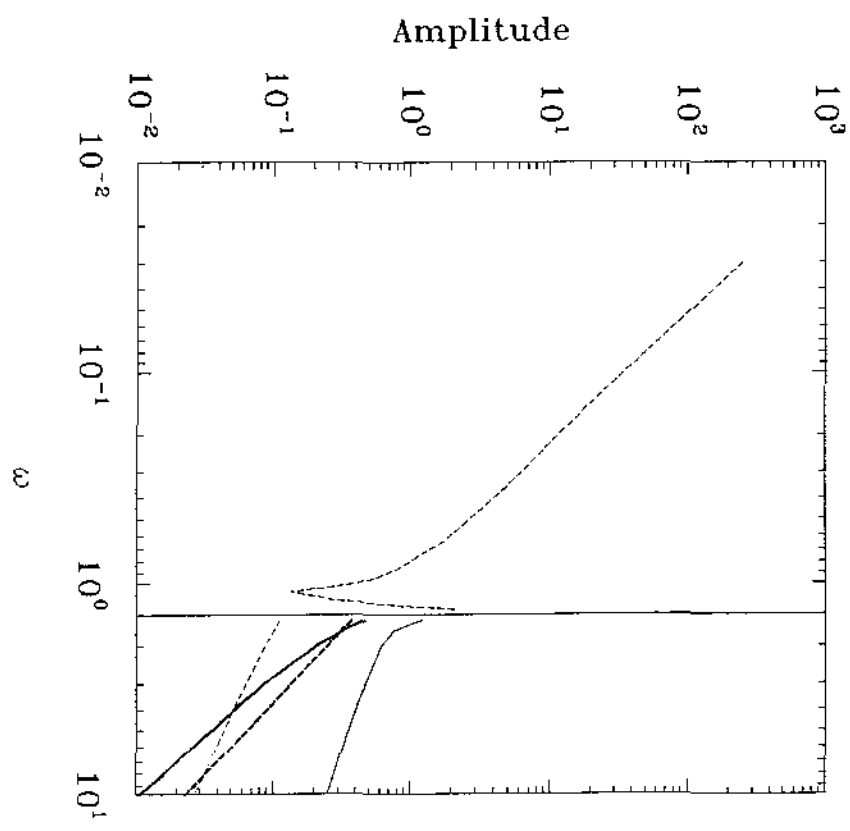


Fig. 3.4

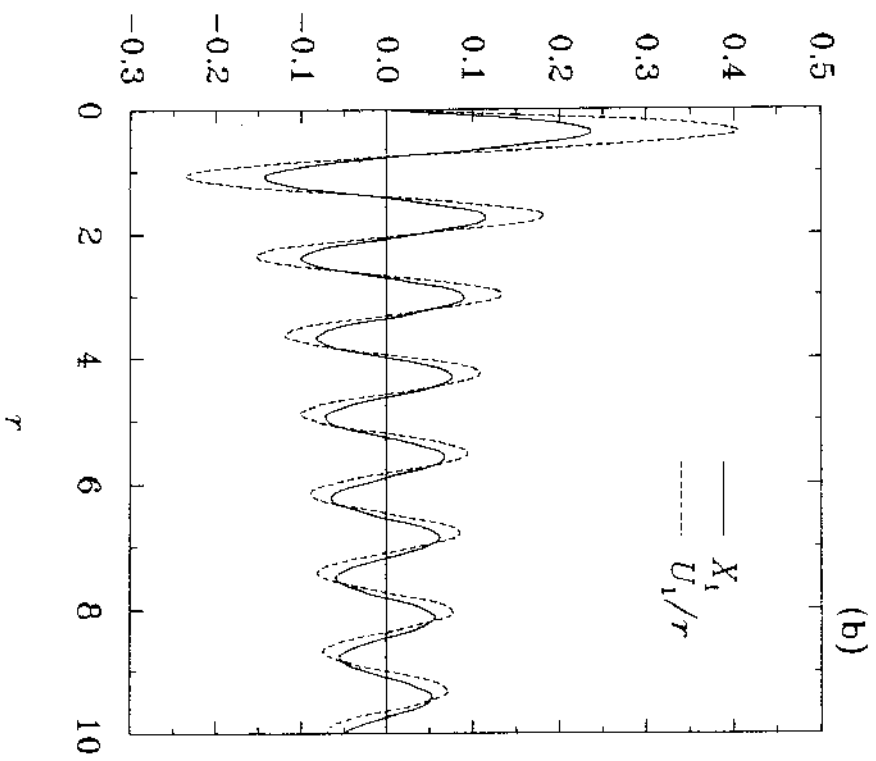
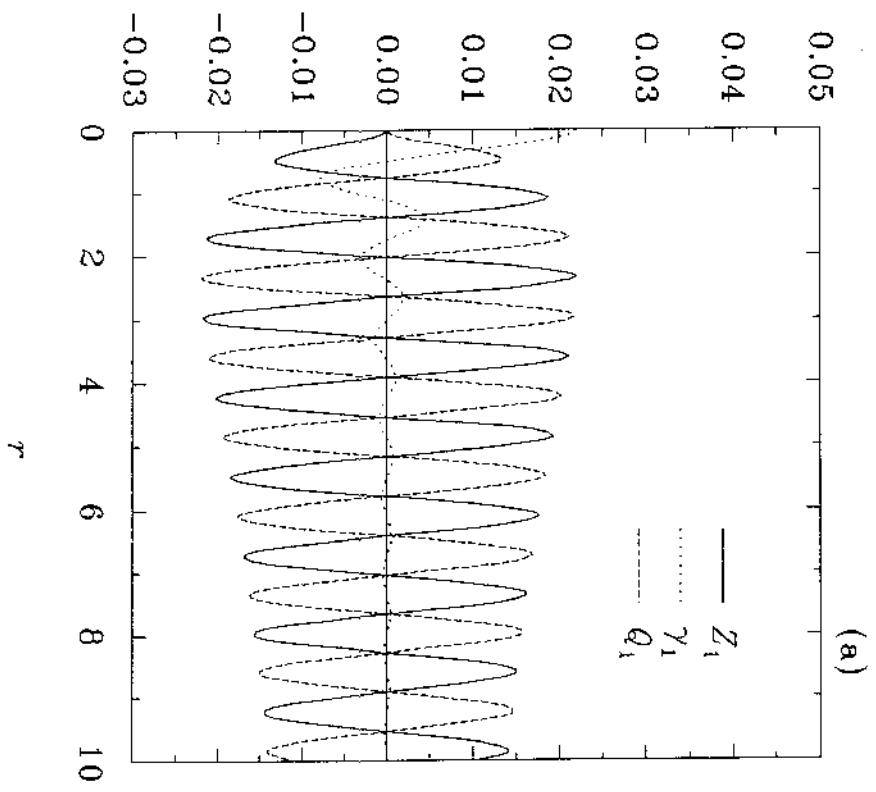


Fig. 3.5

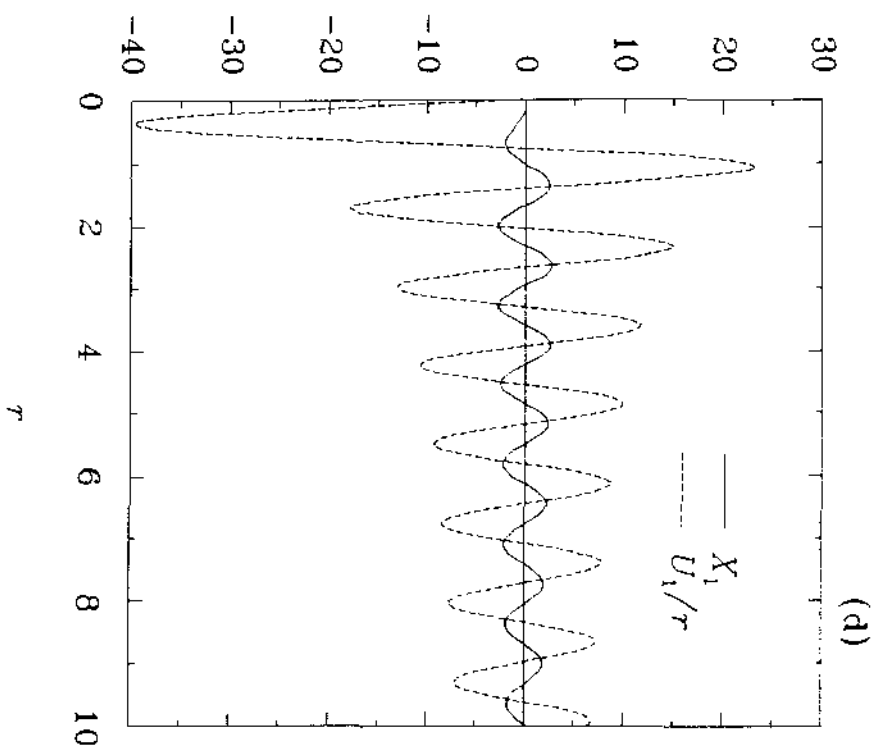
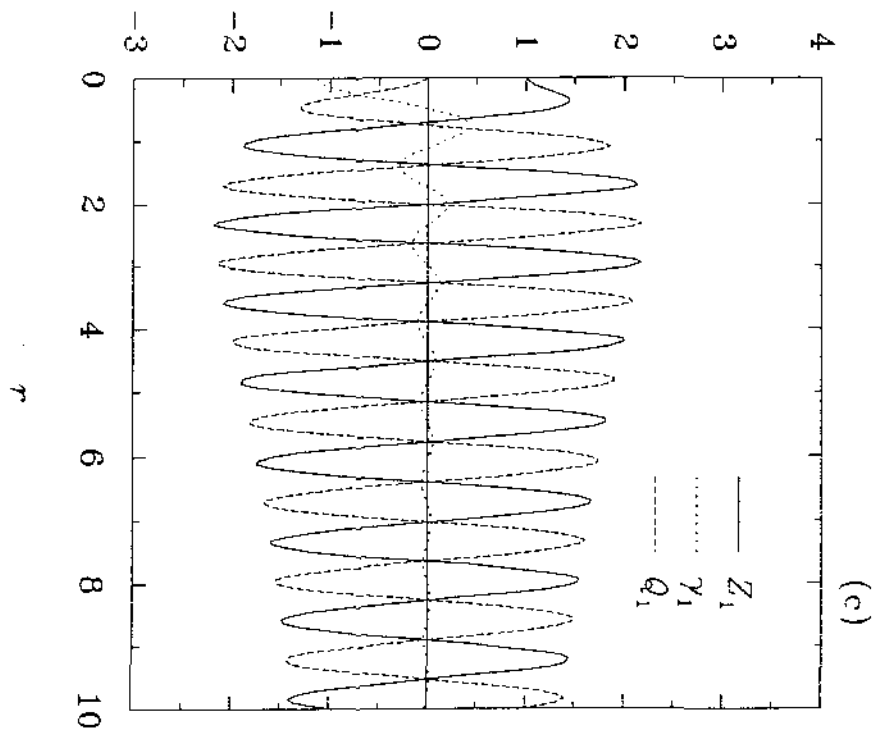


Fig. 3.5 (cont.)

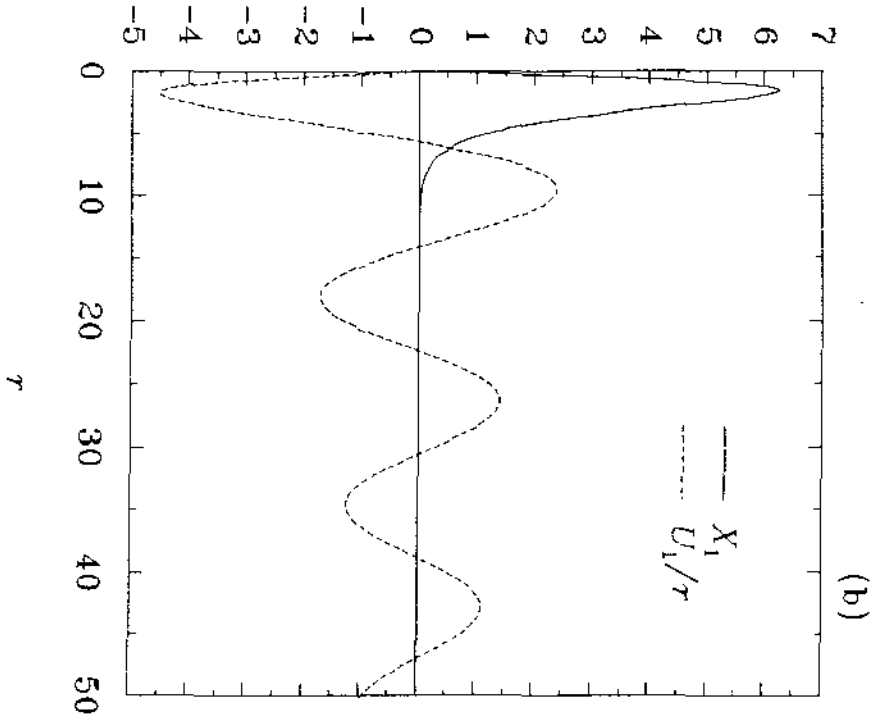
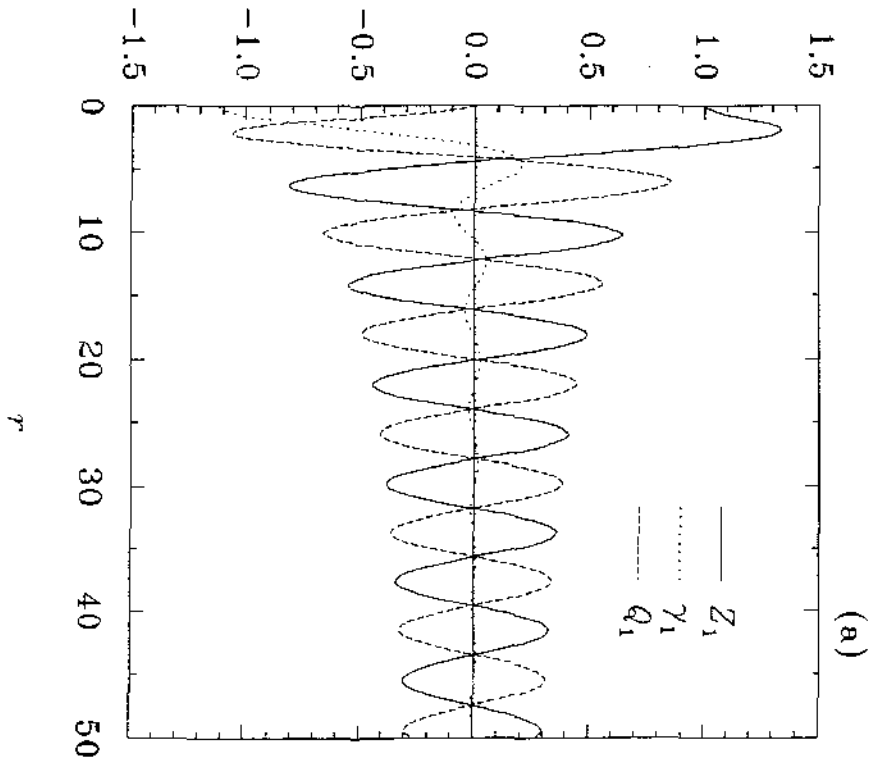


FIG. 3.6

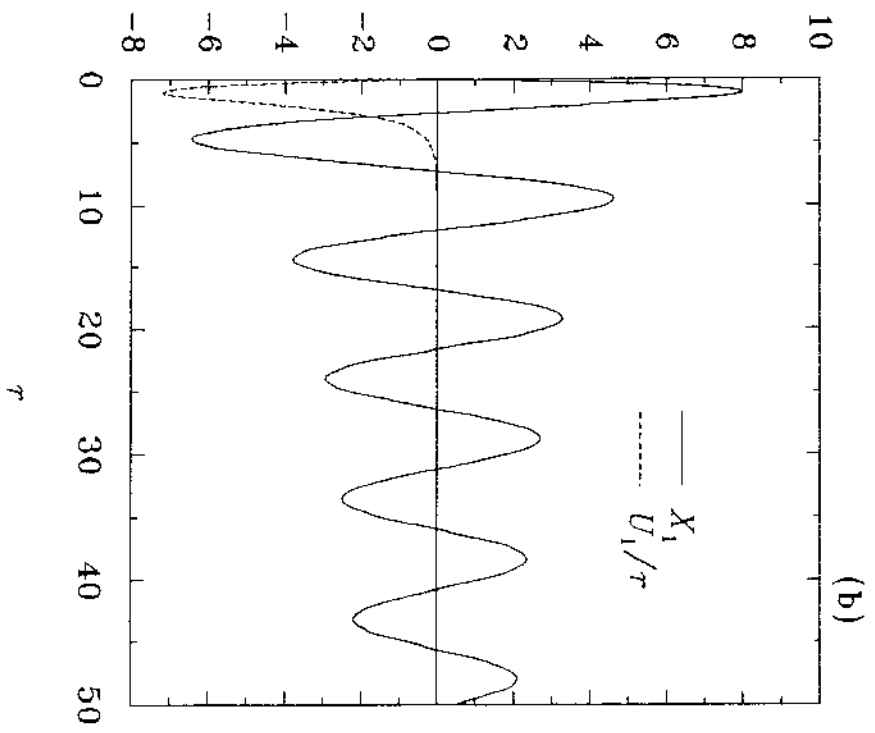
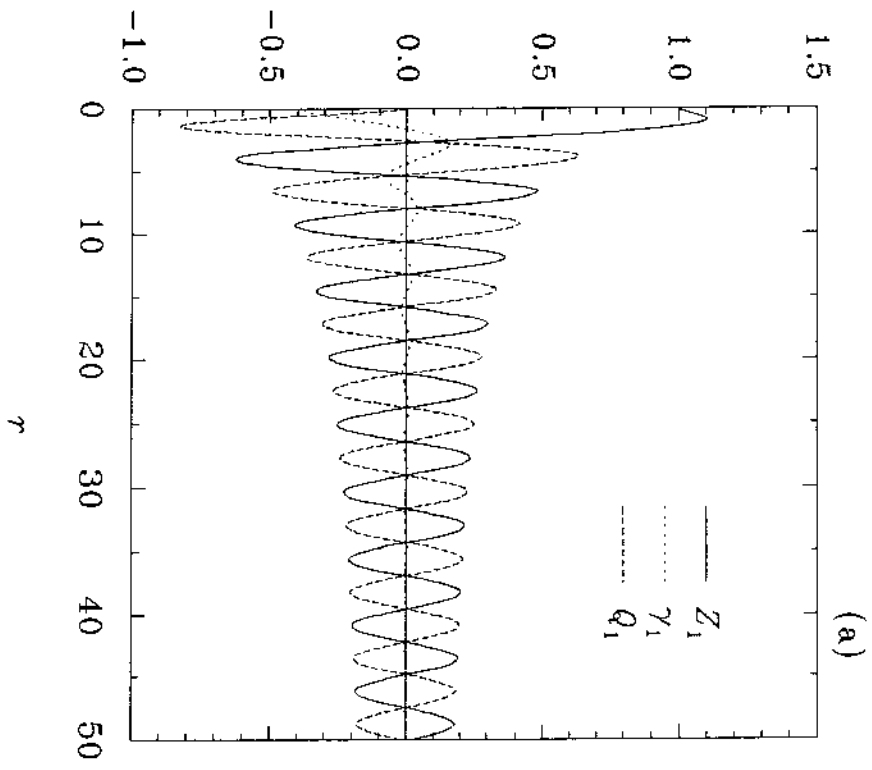


Fig. 3.7

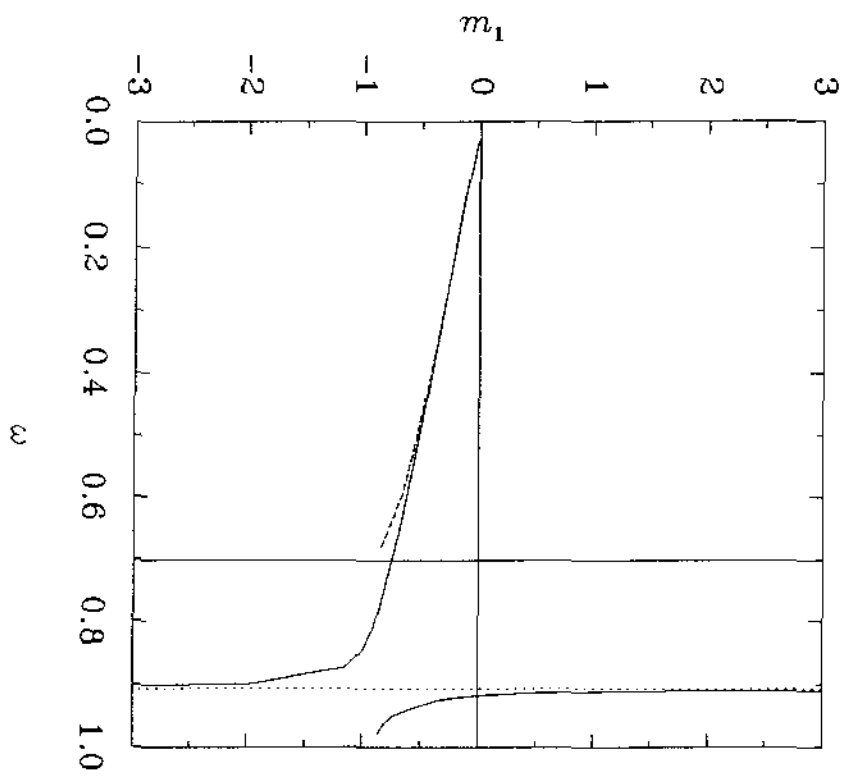


Fig. 3.8

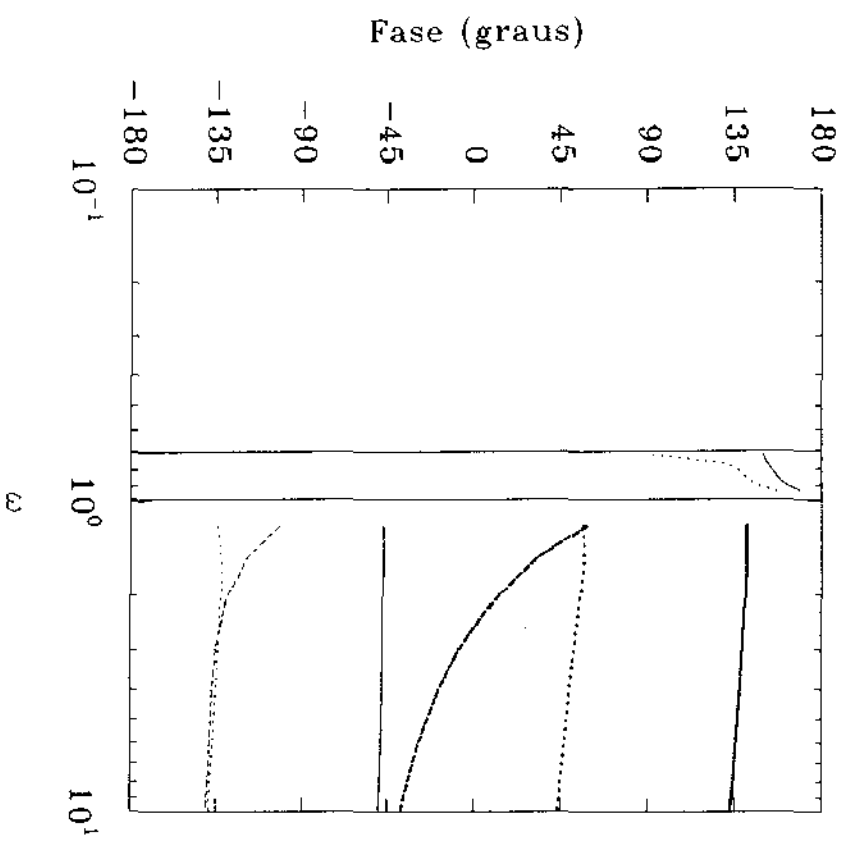
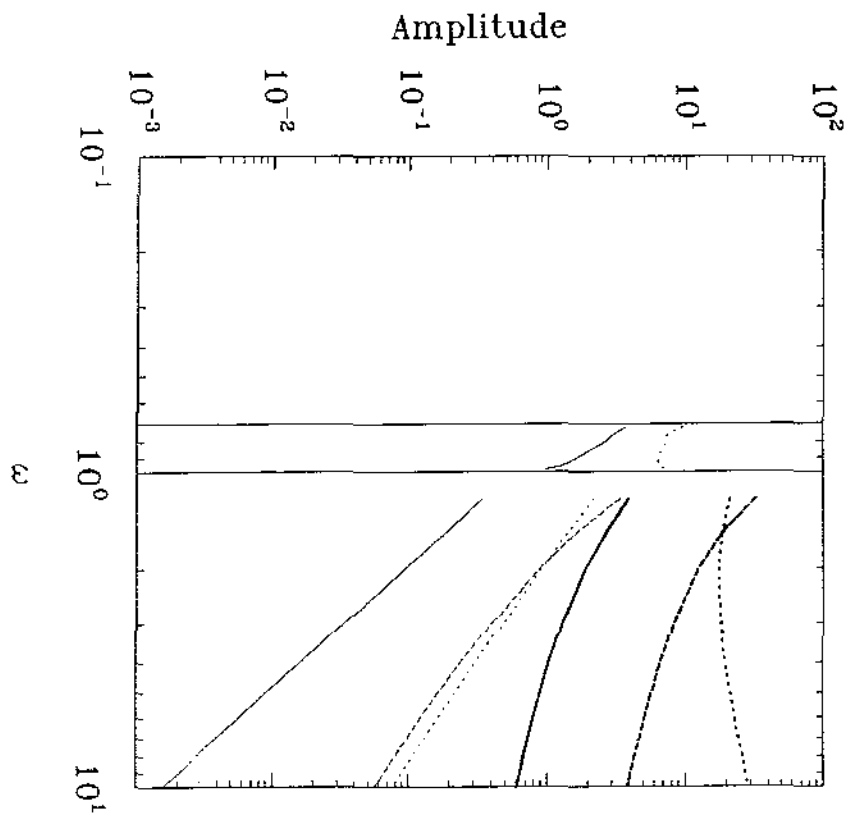


Fig. 3.9

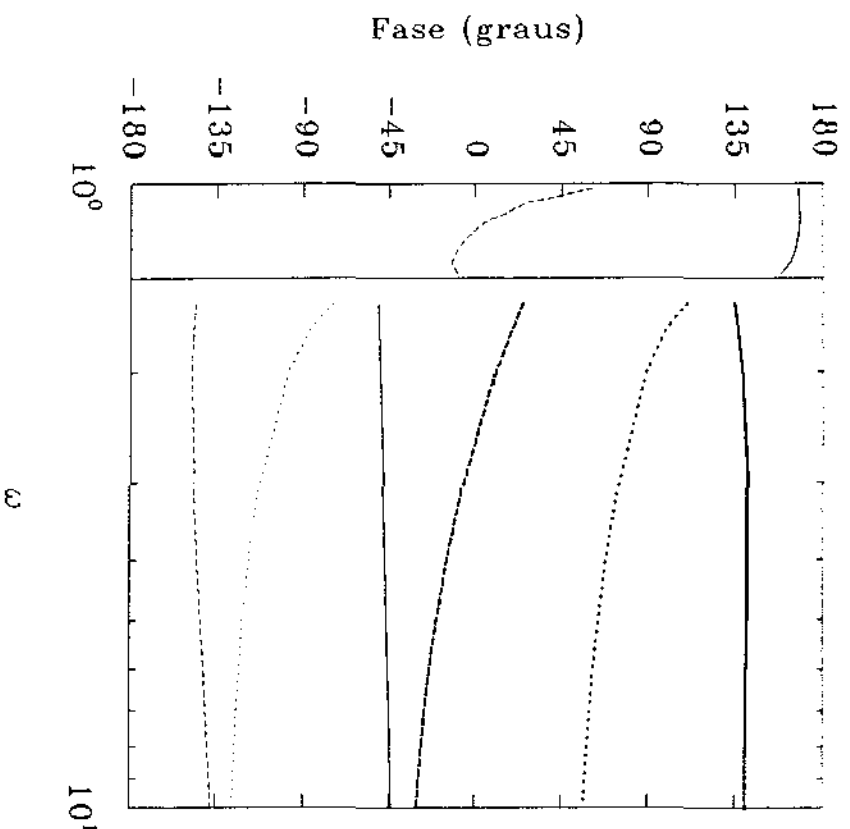
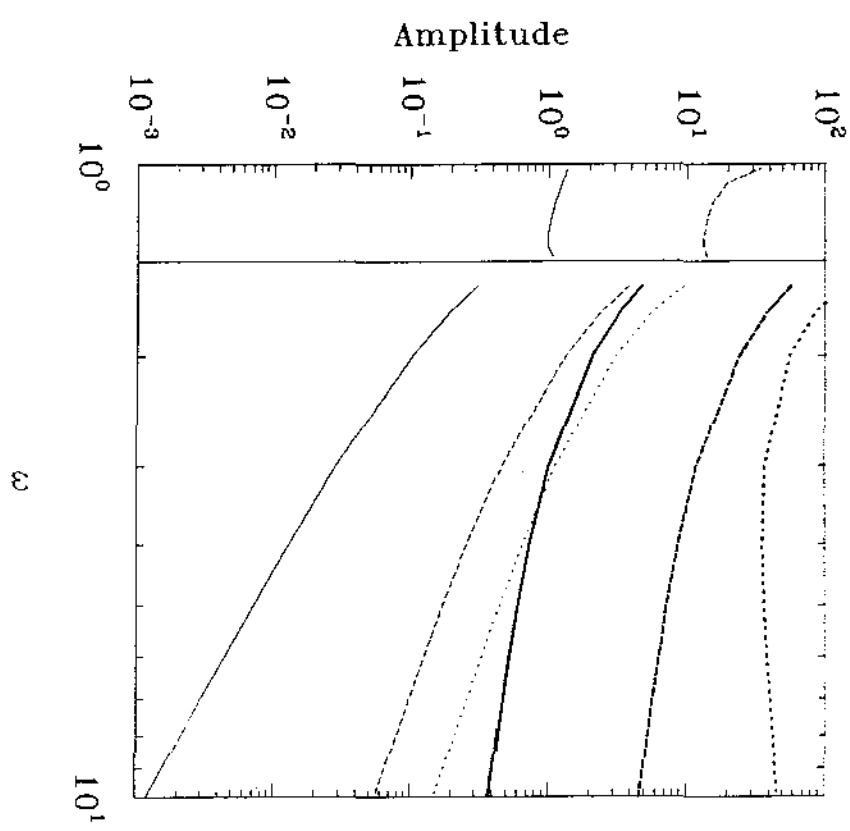


Fig. 3.10

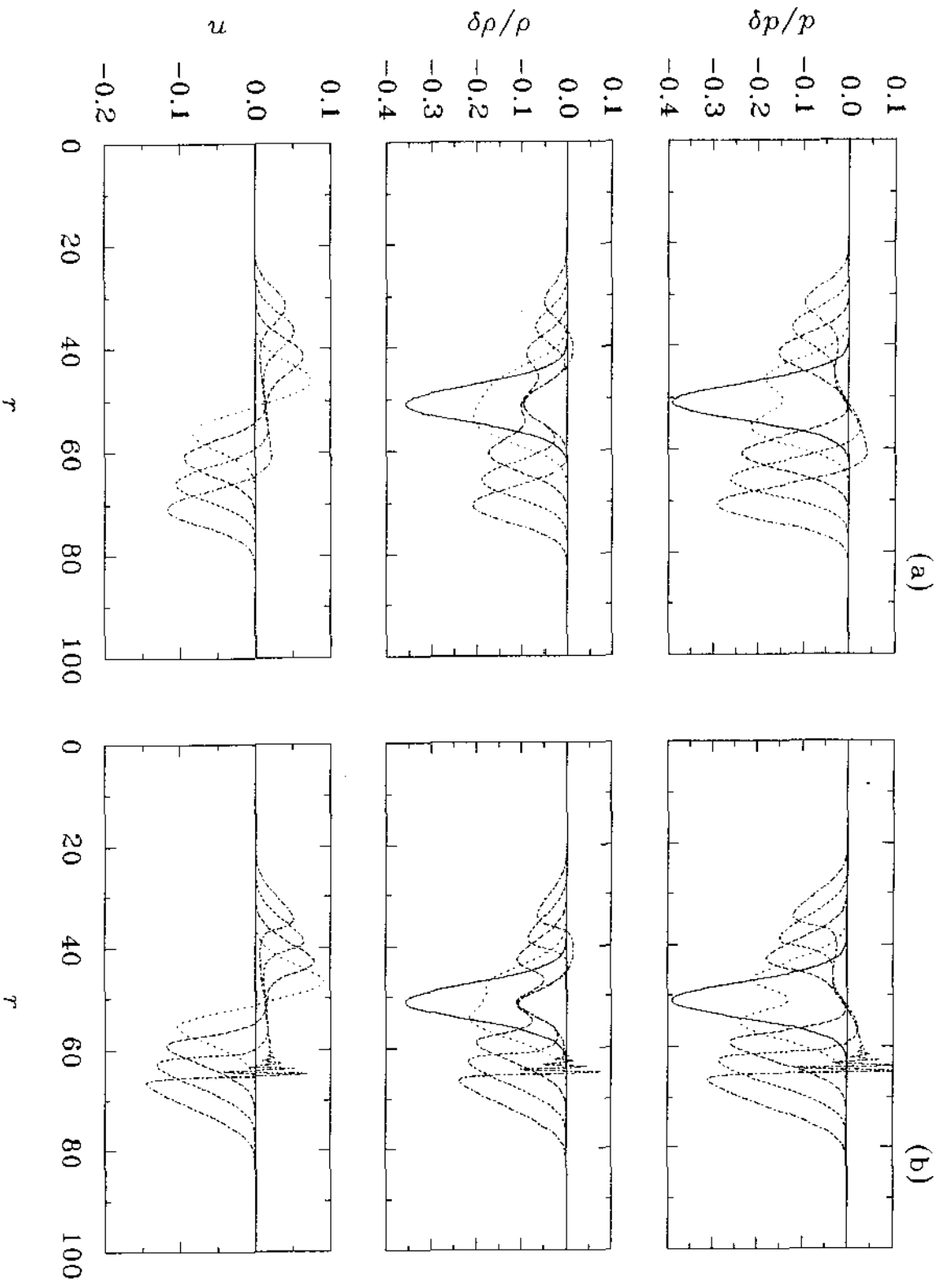
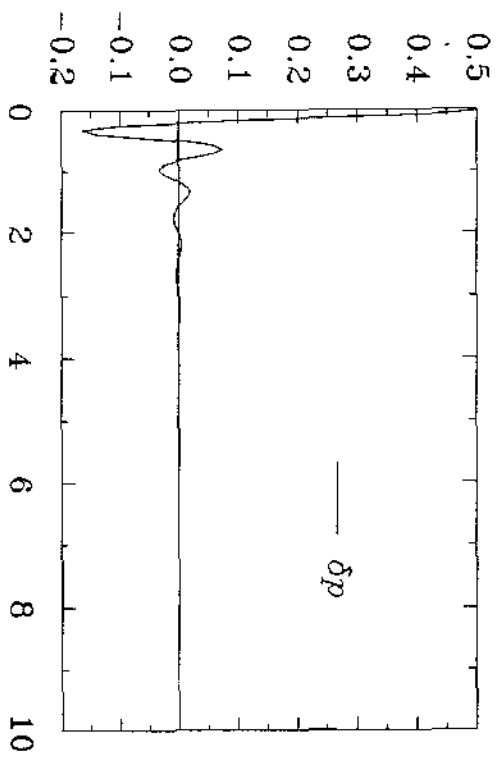
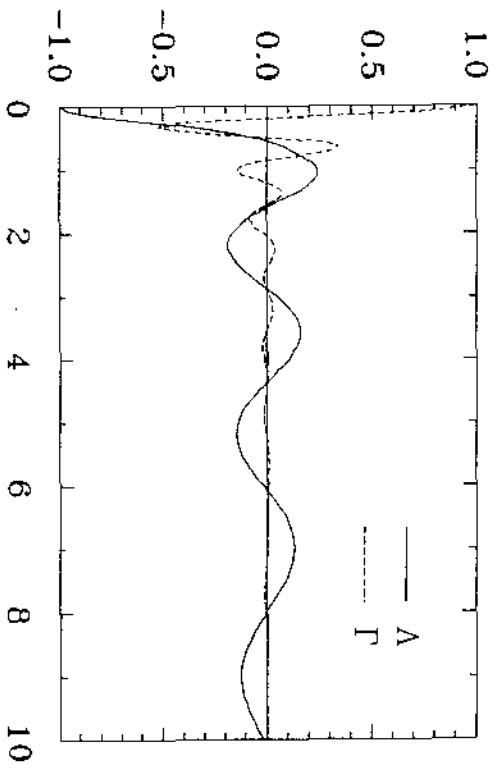
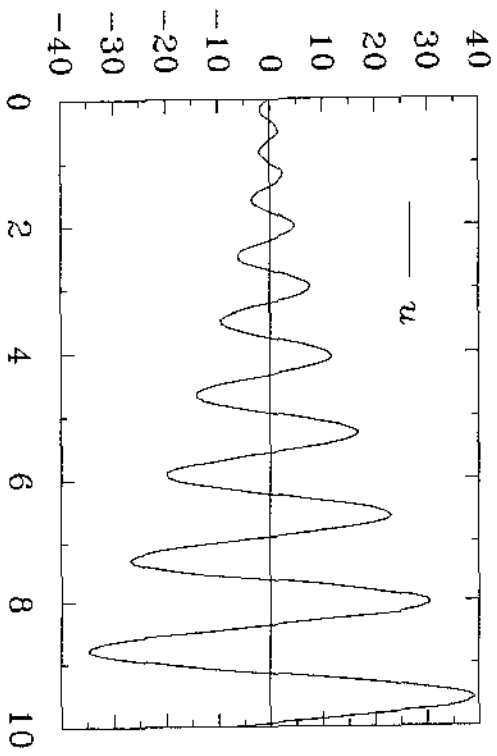


Fig. 5.1



R

R



R

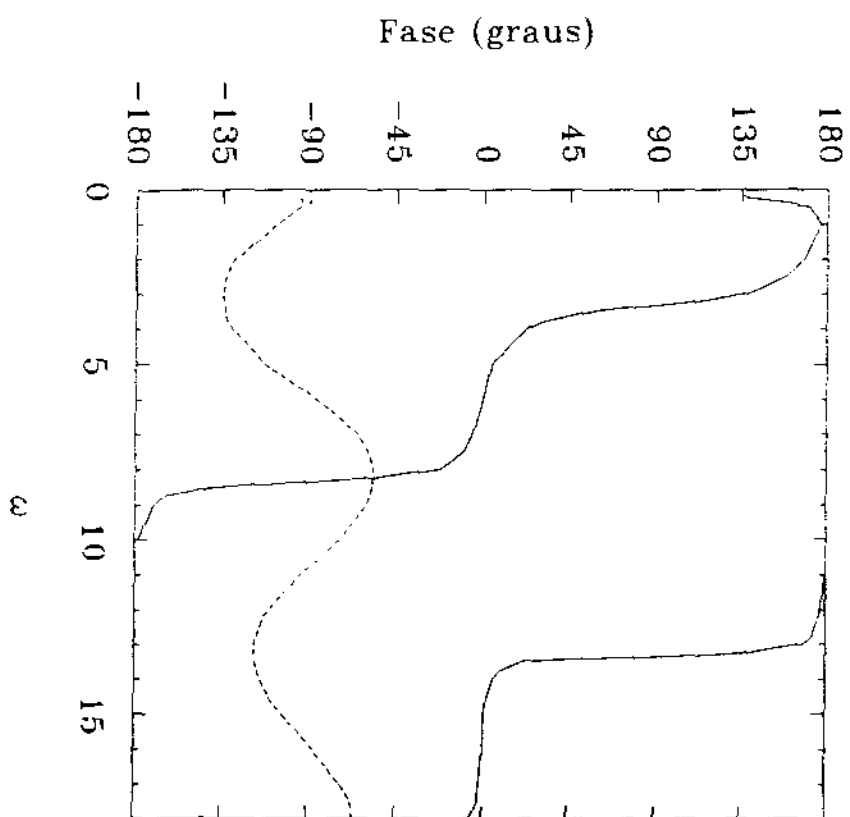
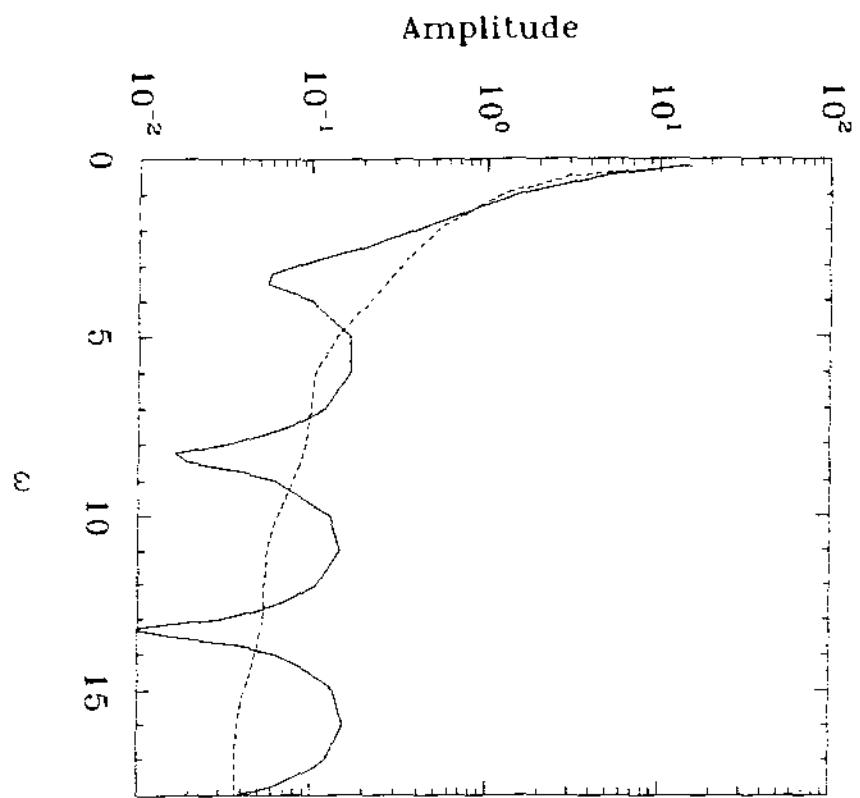


Fig. 5.3

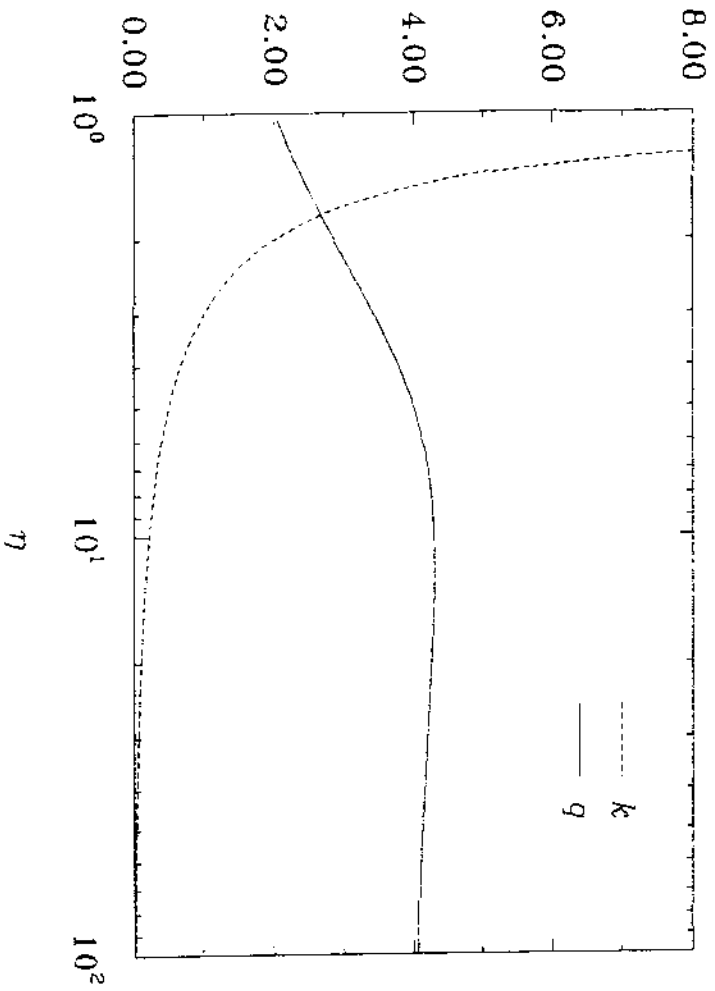


Fig. 4.1

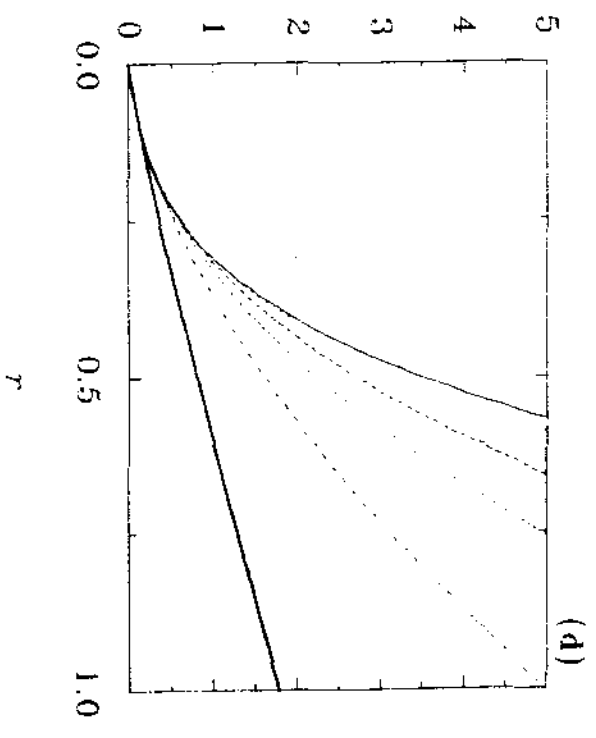
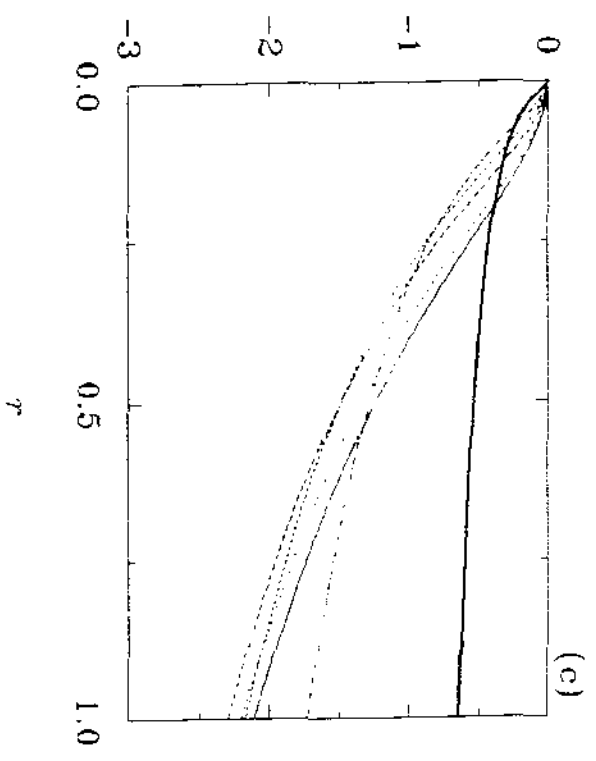
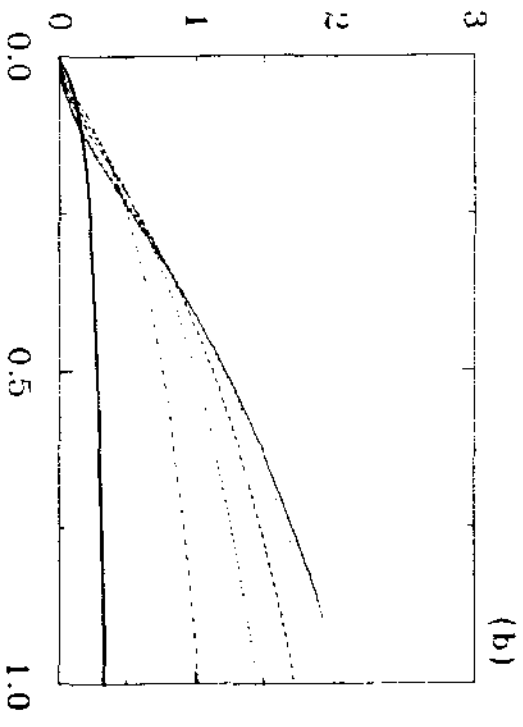
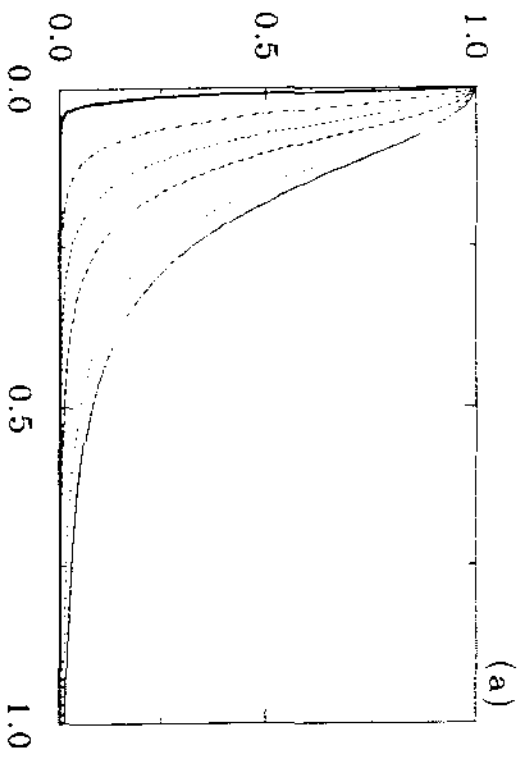


Fig. 4.2

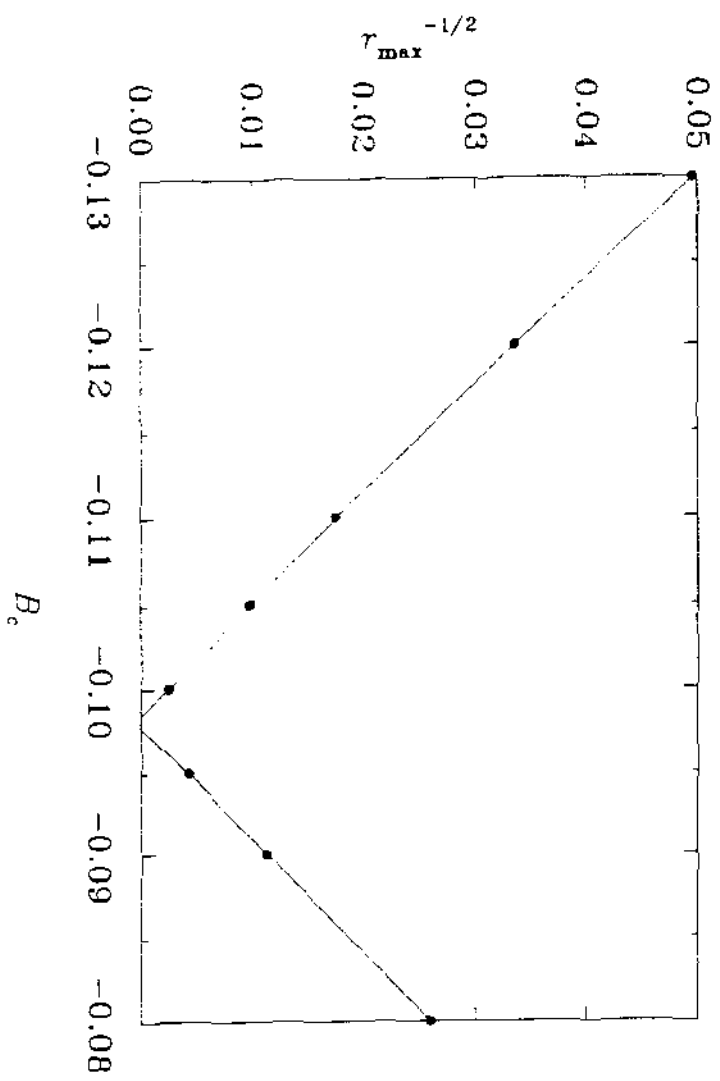


Fig. 4.3

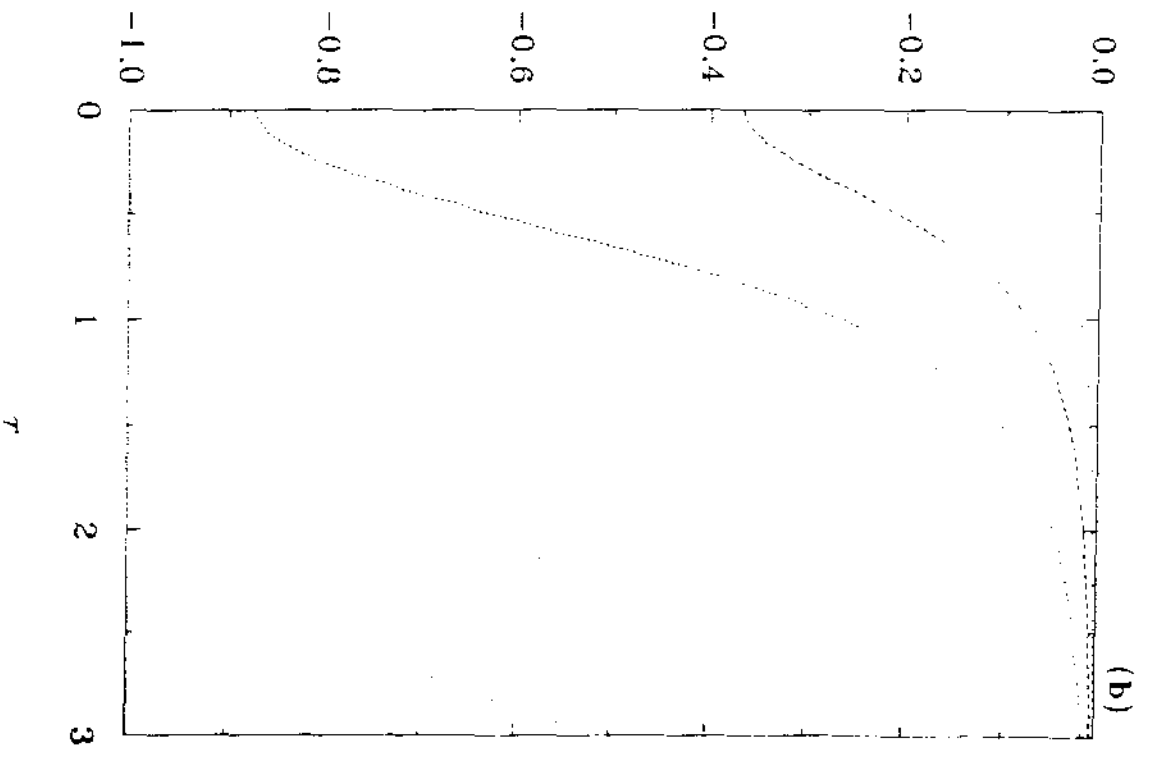
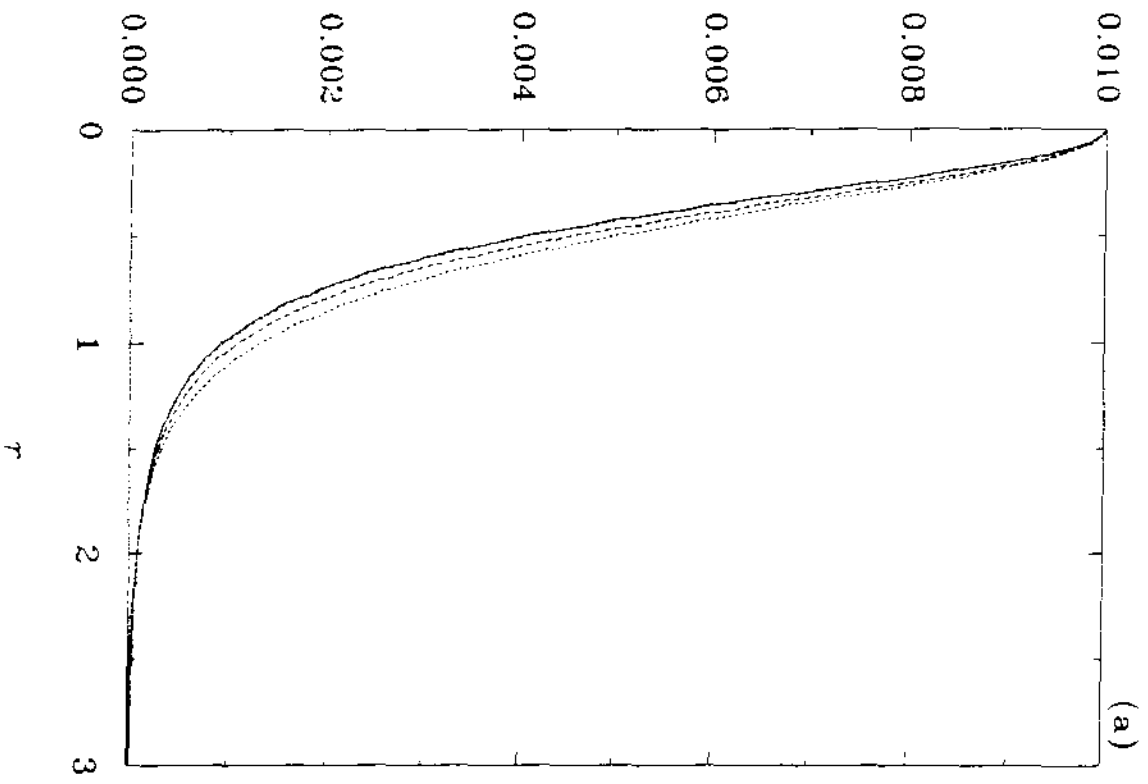


Fig. 4.4

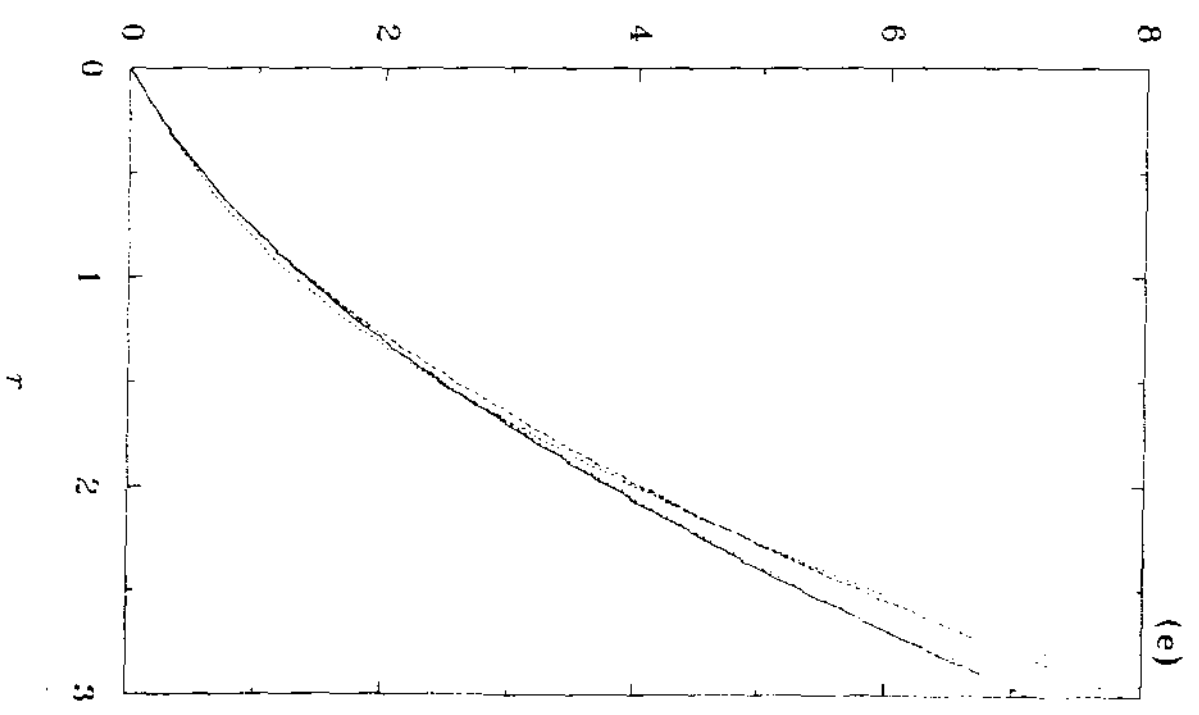
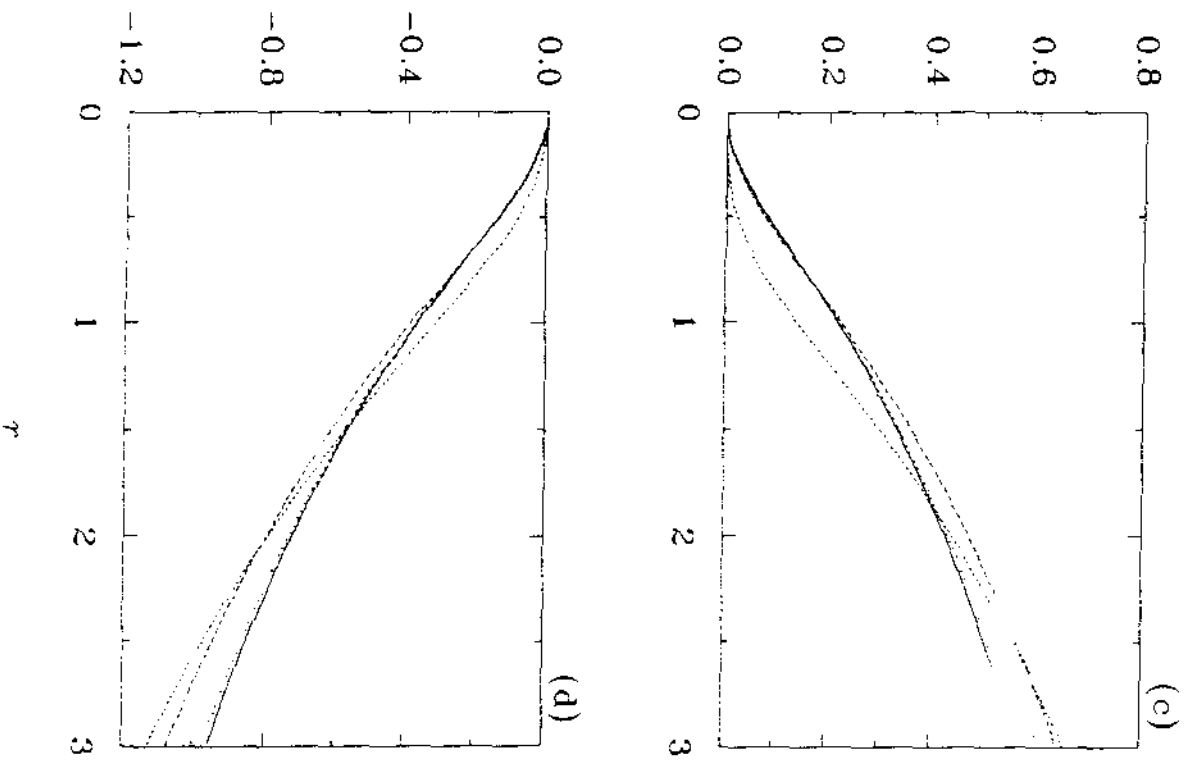


Fig. 4.4 (cont.)

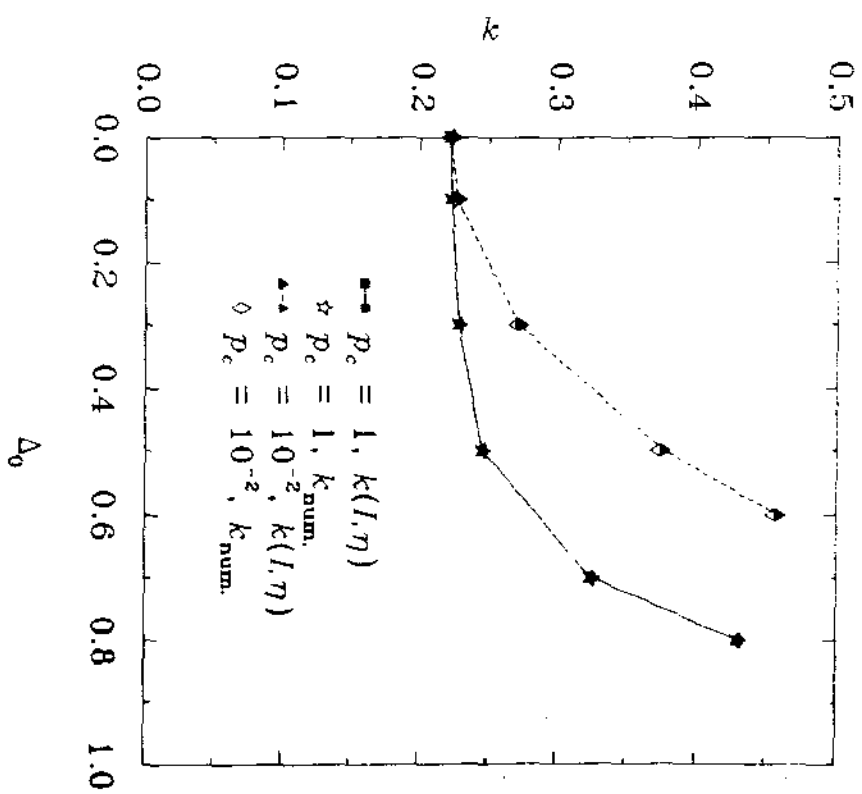
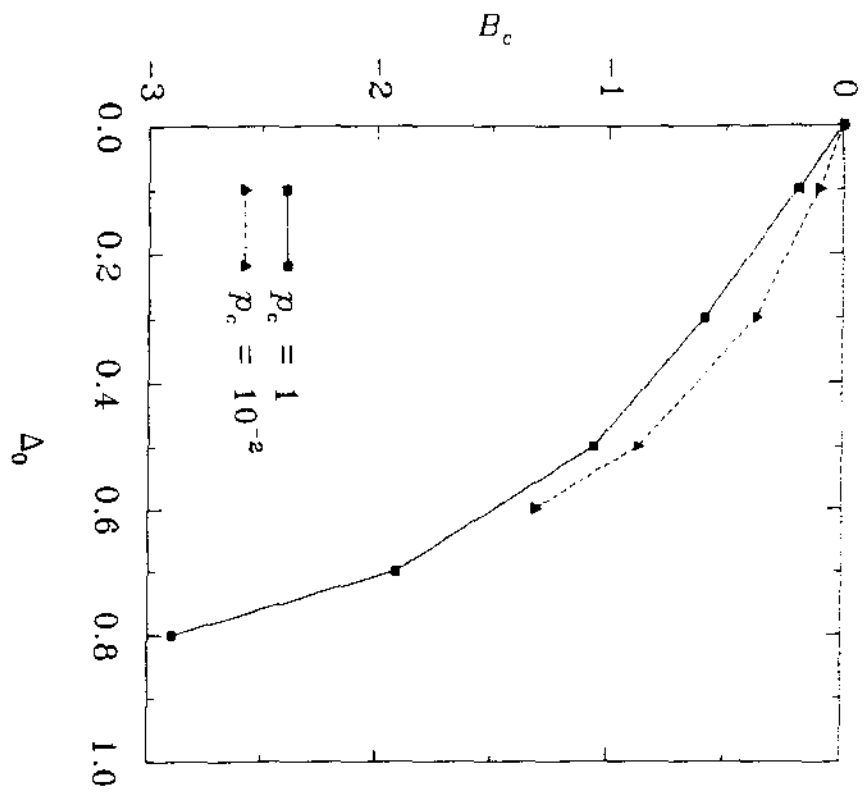


Fig. 4.5

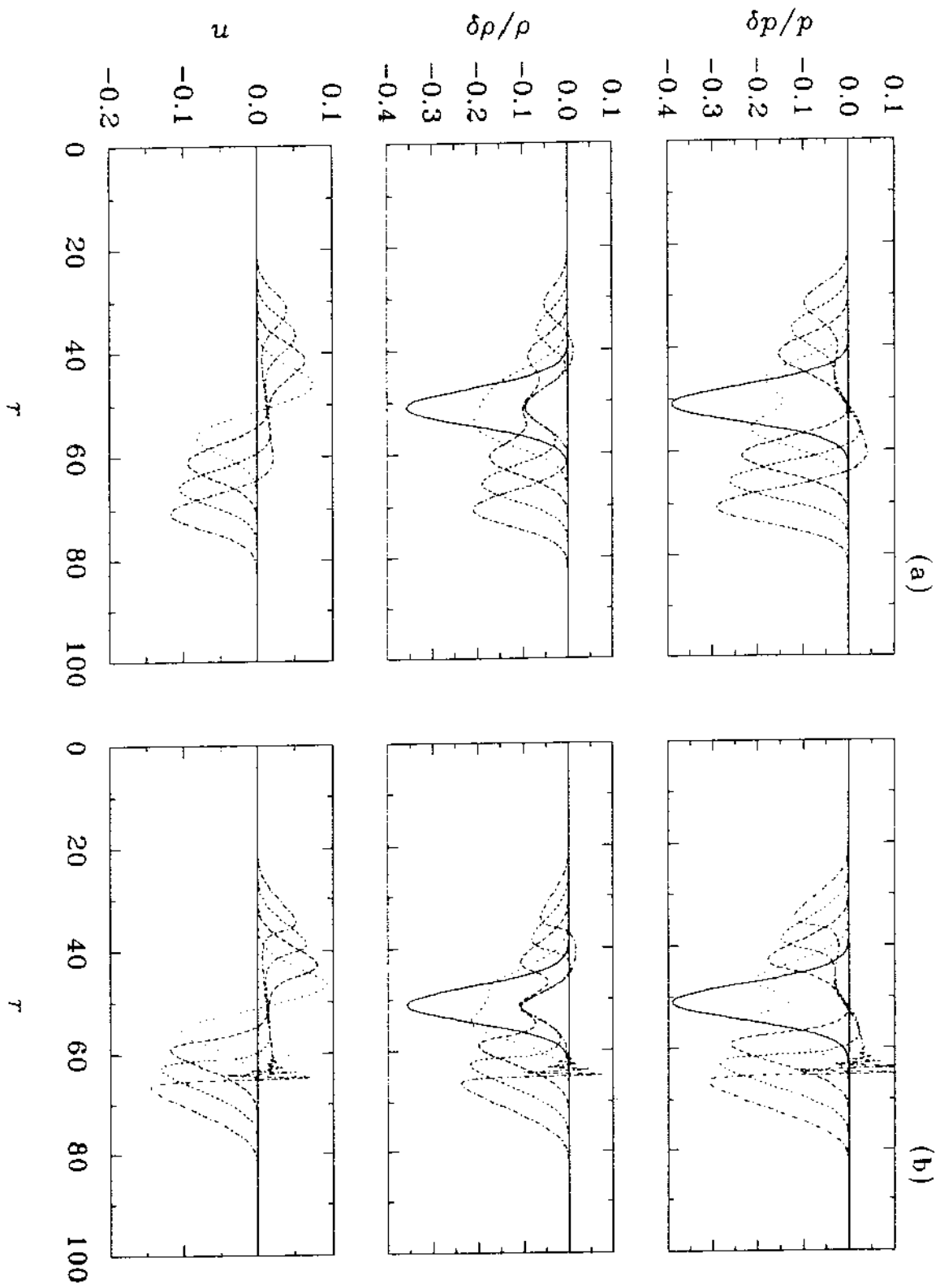


Fig. 5.1

Apêndice B

PROGRAMAS PARA A DETERMINAÇÃO DE SOLUÇÕES ESTÁTICAS E MODOS NORMAIS

Este apêndice reúne alguns programas em Fortran 77, que podem ser usados para determinar soluções estáticas para cordas e vórtices, e para calcular os modos normais neutros de cordas e politropos sem rotação.

U1Eins15 Este programa calcula a solução estática para uma corda $U(1)$ auto-gravitante, quando o parâmetro α (v. Cap. 2) está entre $1/4$ e 1 . Os coeficientes da expansão da solução estática em splines quínticas são armazenados no arquivo `coeff.dat`, e a solução propriamente dita pode ser impressa na tela ou redirecionada para um arquivo. Informações sobre os parâmetros assintóticos da solução e a densidade linear de energia são também produzidas. Este programa deve ser compilado juntamente com as rotinas `FCN`, `spline`, `dspline`, `dN6`, `interp` (incluídas com o programa principal), `x02aaf`, `c05nbf` e `f04atf` (pertencentes à biblioteca NAG [21]).

U1Eins16 Similar a U1Eins15, para o caso $\alpha > 1$. As rotinas auxiliares são as mesmas de U1Eins15, mas uma versão diferente de FCN (incluída com U1Eins16) deve ser usada.

U1Eins20 Similar a U1Eins15, para o caso $\alpha < 1/4$. As rotinas auxiliares são as mesmas de U1Eins15, mas uma versão diferente de FCN (incluída com U1Eins20) deve ser usada.

lambda6 Este programa calcula a estrutura radial dos dois modos neutros admitidos pela corda estática U(1) (Subsistema II) no caso em que $\omega > e^{a_0/2} \max\{1, \sqrt{\alpha}\}$ (v. Cap. 3). O programa lê os dados de entrada no arquivo `lambda6.ins`, que deve ser criado pelo usuário; é necessário especificar um arquivo contendo os coeficientes na expansão da solução estática em splines quínticas (este arquivo pode ser gerado por U1Eins15, U1Eins16 ou U1Eins20). A estrutura radial dos modos normais é escrita em dois arquivos diferentes; informações sobre a amplitude e fase assintóticas dos modos são armazenadas em um terceiro arquivo. Este programa deve ser compilado juntamente com as rotinas `argu`, `phi`, `phiX`, `F`, `spline5`, `dspline5`, `dN6` (incluídas com o programa principal), `dode` (documentada no livro *Computer Solution of Ordinary Differential Equations*, por L.F. Shampine e M.K. Gordon) e `f04atf` (pertencente à biblioteca NAG [21]).

lambda7 Análogo a `lambda6`, para o caso em que $\alpha < 1$, $\sqrt{\alpha} < \omega e^{-a_0/2} < 1$ (v. Cap. 3).

lambda8 Análogo a `lambda6`, para o caso em que $\alpha > 1$, $1 < \omega e^{-a_0/2} < \sqrt{\alpha}$ (v. Cap. 3).

lambda9 Este programa determina o parâmetro assintótico m_1 (v. seção 3.4) para a solução das equações de estrutura radial (Subsistema II) que é regular em $r = 0$ e tem $\hat{X}_1, \hat{U}_1 \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$, no caso em que $0 < \omega < e^{a_0/2} \min\{1, \sqrt{\alpha}\}$. São produzidos um arquivo contendo o valor de m_1 e outro contendo a solução regular. As rotinas auxiliares são as mesmas de **lambda6**.

lambda10 Este programa determina a estrutura radial dos dois modos neutros admitidos pela corda estática $U(1)$ (Subsistema I) no caso em que $\omega > e^{a_0/2} \sqrt{\alpha}$ (v. Cap. 3). Os procedimentos de entrada e saída são análogos aos de **lambda6**; as rotinas auxiliares são as mesmas, mas uma versão diferente de **F** (incluída com o programa principal) deve ser usada.

lambda11 Análogo a **lambda10**, para o caso em que $0 < \omega < e^{a_0/2} \sqrt{\alpha}$.

v8 Este programa resolve as equações de Einstein para um vórtice politrópico a partir de valores dados de p_c e B_c (v. cap. 4). Os dados de entrada são lidos em um arquivo chamado **v8.ins**, que deve ser criado pelo usuário. Dois arquivos de saída são produzidos, um contendo a solução numérica e outro contendo estimativas dos parâmetros assintóticos da solução e os valores da integral $\mathcal{I}_2(r)$ (v. seção 4.5.2). O programa deve ser compilado juntamente com as rotinas **F** (incluída com o programa principal) e **dode** (já discutida).

v6 Similar a **v8**, mas trata o caso particular de um politrópico sem rotação ($v = B = 0$). Os dados de entrada são lidos em um arquivo chamado **v6.ins**, que deve ser criado pelo usuário. A saída deste programa é um arquivo que é lido por **interp** (v. adiante).

interp Este programa calcula os coeficientes na expansão da solução numérica encontrada por `v6` em termos de splines quínticas. A solução estática deve estar em um arquivo chamado `stat.dat`, e a saída é armazenada no arquivo `coeff.dat`. O programa deve ser compilado juntamente com a rotina `Gauss` (incluída com o programa principal).

neutr Este programa calcula a estrutura radial de modos neutros de um politropo sem rotação (*v. cap. 5*). Os dados de entrada são lidos em um arquivo chamado `neutr.ins`, que deve ser criado pelo usuário. É necessário especificar o nome de um arquivo contendo os coeficientes da expansão da solução estática em termos de splines quínticas (este arquivo pode ser gerado por `interp`). Dois arquivos de saída são produzidos, um contendo a estrutura radial do modo normal e outro contendo a amplitude e fase assintóticas do modo. Este programa deve ser compilado juntamente com as rotinas `phi`, `phiu`, `F` (incluídas com o programa principal), `dode` (já discutida) e `f04atf` (pertencente à biblioteca NAG [21]).

1) Programa U1Eins15:

```

program U1Eins15
c solution of static Einstein-U(1) string equations for
c 1/4 < alpha < 1
c
c Integrals computed by composite Boole's rule
c
c The approximate solution is taken as a quintic spline
c
  implicit real*8 (a-h,o-z)
  integer D
  real*8 Kc
c number of nodes
  parameter(N=60, N5=N+5, N52=2*N5, N53=3*N5, N54=4*N5, NN=N54+3,
  •      Lva=NN*(3*NN+13)/2, N4=4*N, Nsub=10)
  dimension c(NN), fvec(NN), wa(Lva), Sig(0:N4),
  •      Prad(0:N4), Ptan(0:N4), rad(0:N4), c1(207), c2(207),
  •      c3(207), c4(207), D(5,0:4), den(0:4), Rgt(N5), AA(N5,
  •      N5), sks1(N5), sks2(N5), Amat(N5, N5), u(N4-2)
  common h, h2, alpha, ra, par1, par2, par3, par4
  external FCN

```

```

      data D /1,26,66,26,1,1,10,0,-10,-1,1,2,-6,2,1,1,-2,0,2,
      *      -1,1,-4,6,-4,1/,den /120.,24.,6.,2.,1./
c radial coordinate: iradius=1 -> r, iradius = 2 -> Kexp(-A)
      iradius=1
      ifail=0
      pi=4.d0*datan(1.d0)
c physical parameters
      alpha=0.5
      eta=1.d-2
      ra=dsqrt(alpha)
c step-size
      xmax=15.
      xsup=20.
      h=xmax/N
      h2=h*h
      Nmax=xsup/h
c common parameters
      par1=1.-h
      par2=1.-ra*h
      par3=1.-2.*ra*h
      par4=2.*pi*eta*eta
c starting values
      c(N54+1)=0.99
      c(N54+2)=1.d-3
      c(NN)=-1.d-4
      u(N4-4)=c(N54+1)
      u(N4-3)=c(N54+2)
      u(N4-2)=c(NN)
      do 1 k=1,N-1
          x=k*h
          ct1=dexp(-2*x/u(N4-3))
          u(k)=dexp(-x)
          u(N-1+k)=ra*x*s18adf(ra*x,ifail)
          u(2*(N-1)+k)=2.*ra*x*s18adf(2.*ra*x,ifail)*u(N4-2)
          if (k .eq. 1) then
              u(N-1+k)=(1.-u(N-1+k))/h2
              u(2*(N-1)+k)=(u(2*(N-1)+k)-u(N4-2))/h2
              goto 1
          endif
          u(3*(N-1)+k-1)=2.*(u(N4-4)*x+u(N4-3))*ct1/(1.+ct1)
      1 continue
      call interp(N4-2,u,N5,c1,c2,c3,c4,Amat,Rgt,AA,wks1,wks2)
      do 11 k=1,N5
          c(k)=c1(k)
c(N5+k)=c2(k)
c(N52+k)=c3(k)
      11 c(N53+k)=c4(k)
c tolerance
      tol=dsqrt(x02aaf(0.0))
      ifail=0
      call c05nbf(FCN,NN,c,fvec,tol,wa,Lwa,ifail)
c norm of the residuals
      fnorm=f05abf(fvec,NN)
c storage of spline coefficients
      do 15 k=1,N5

```

```

      c1(k)=c(k)
      c2(k)=c(N5+k)
      c3(k)=c(N52+k)
15   c4(k)=c(N53+k)
c determination of arbitrary constants
      ct1=dsqrt(xmax)
      c0=spline(xmax/h,N5,c1)*ct1/dexp(-xmax)
      p0=spline(xmax/h,N5,c2)/(ct1*dexp(-ra*xmax))
      ct2=pi*(dexp(c(N1))*eta*p0)**2/alpha
      b0=2.*ct2/c(N54+1)**2
      d0=ct2/c(N54+1)
c output of spline coefficients, etc.
      open(2,file='coeff.dat',status='new')
      write(2,*) N,h,c(N54+1),c(N54+2),c(N1)
      write(2,*) c0,p0,b0,d0
      do 3 k=1,N5
3     write(2,*) c1(k),c2(k),c3(k),c4(k)
      close(2)
c stress-energy components and linear energy density
      dY0=0.
      d2P0=0.
      do 5 j=1,5
          jj=6-j
          dY0=dY0+c1(j)*D(jj,1)/(den(1)*h)
5     d2P0=d2P0+c2(j)*D(jj,2)/(den(2)*h2)
      str1=d2P0*d2P0/(2.*alpha)
      Sig(0)=dY0*dY0+1./8.*str1
      Prad(0)=str1-1./8.
      Ptan(0)=Prad(0)
      rad(0)=0.
      do 6 k=1,N4
          xi=k/4.
          x=xi*h
          Xc=1.-spline(xi,N5,c1)
          Pc=spline(xi,N5,c2)
          ct1=dexp(c(N1))-spline(xi,N5,c3)/(c(N54+1)*x+c(N54+2)-
*      spline(xi,N5,c4))
          ct2=(Xc*Xc-1.)**2/4.
          ct3=dspline(xi,N5,c1)/h
          ct3=ct3*ct3
          ct4=(ct1*Xc*Pc)**2
          ct5=(ct1*dspline(xi,N5,c2)/h)**2/alpha
          if (iradius .eq. 1) then
              rad(k)=x
          else
              rad(k)=1./ct1
          endif
          Sig(k)=.5*(ct3*ct4+ct2+ct5)
          Prad(k)=.5*(ct3-ct4-ct2+ct5)
6     Ptan(k)=.5*(-ct3+ct4-ct2+ct5)
c composite Boole's rule
      emu=0.
      do 7 k=1,Nsub*N
          wht=32.
          if (mod(k,4) .eq. 2) wht=12.

```

```

      if (mod(k,4) .eq. 0) wht=14.
      xi=(k+0.)/Nsub
      x=xi*h
      Kc=1.-spline(xi,N5,c1)
      Ac=c(N5)-spline(xi,N5,c3)
      Pc=spline(xi,N5,c2)
      Kc=c(N54+1)*x+c(N54+2)-spline(xi,N5,c4)
      dXdr2=(dspline(xi,N5,c1)/h)**2
      dPdr2=(dspline(xi,N5,c2)/h)**2
      ct1=.5*(dXdr2+(Kc*Kc-1.))**2/4.+(dexp(Ac)/Kc)**2*((Kc*Pc)**2+
*      dPdr2/alpha)
7      emu=emu+2.*wht*dexp(-Ac)*Kc*ct1
      emu=2.*h*emu/(45.*Nsub)
c output of results
      do 10 k=0,N4
          xi=k/4.
          x=xi*h
10     print 100,rad(k),1.-spline(xi,N5,c1),spline(xi,N5,c2),c(N5)-
*       spline(xi,N5,c3),c(N54+1)*x+c(N54+2)-spline(xi,N5,c4),
*       Sig(k),Prad(k),Ptan(k)
      do 2 k=N4+1,4*Nmax
          x=k*h/4.
          if (iradius .eq. 1) then
              r=x
          else
              r=(c(N54+1)*x+c(N54+2))*dexp(-c(N5))
          endif
          ct1=dsqrt(x)
          ct2=dexp(-ra*x)
          ct3=ct2*ct2
          ct4=(p0/c(N54+1))**2*(dexp(2*c(N5))/x)*ct3
2       print 100,r,1.-c0*dexp(-x)/ct1,p0*ct1*ct2,c(N5)+b0*ct3/
*       x,c(N54+1)*x+c(N54+2)-d0*ct3,ct4,0.,ct4
          print 110,fnorm,ifail
          print 120,c0,p0,c(N54+1),c(N54+2),d0,c(N5),b0
          print 130,360.*(1.-dexp(-c(N5)))*c(N54+1),emu
100    format((F8.4,7E16.7))
110    format(//,' Norm of residuals = ',E15.5,/, ' Fail = ',I3)
120    format(//,' c0 = ',E16.7, ' p0 = ',E16.7, ' k2 = ',E16.7,
*       /, ' k0 = ',E16.7, ' d0 = ',E16.7, ' a0 = ',E16.7,
*       /, ' b0 = ',E16.7)
130    format(//,' angular deficit (degrees): ',E16.7,
*       /, ' linear energy density/pi eta**2 = ',E16.7)
      end

      subroutine FCN(N5,c,fvec,iflag)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      integer D
      real*8 Kc
      common h,h2,alpha,ra,par1,par2,par3,par4
      dimension c(N5),fvec(N5),c1(207),c2(207),c3(207),c4(207),
*       yb(4,0:2,0:300),D(5,0:4),den(0:4)
      data D /1,26,66,26,1,1,10,0,-10,-1,1,2,-6,2,1,1,-2,0,2,
*       -1,1,-4,6,-4,1/,den /120.,24.,6.,2.,1./
      Nsub=10

```

```

      N5=(NN-3)/4
      N52=2*N5
      N53=3*N5
      N54=4*N5
      N=N5-5
      N2=2*N
      N3=3*N
      N4=4*N
      fvec(N54+2)=0.
      fvec(NN)=0.
c splitting of coefficient array
      do 3 k=1,N5
c1(k)=c(k)
      c2(k)=c(N5+k)
      c3(k)=c(N52+k)
      3 c4(k)=c(N53+k)
c storage of function values and derivatives
      do 18 k=0,N
      do 19 i=1,4
      do 20 l=0,2
20      yb(i,1,k)=0.
19      continue
      do 21 j=k+1,k+5
      jj=k-j+6
      do 22 l=0,2
      cte=D(jj,1)/(den(1)*h**1)
      yb(1,1,k)=yb(1,1,k)+cte*c1(j)
      yb(2,1,k)=yb(2,1,k)+cte*c2(j)
      yb(3,1,k)=yb(3,1,k)+cte*c3(j)
      yb(4,1,k)=yb(4,1,k)+cte*c4(j)
22      continue
21      continue
18      continue
      do 4 i=1,4
      4 fvec(N4+9+i)=0.
      do 5 j=1,5
      jj=6-j
      cte=D(jj,3)/(den(3)*h**3)
      fvec(N4+11)=fvec(N4+11)+cte*c2(j)
      fvec(N4+12)=fvec(N4+12)+cte*c3(j)
      cte=D(jj,4)/(den(4)*h**4)
      fvec(N4+10)=fvec(N4+10)+cte*c1(j)
      5 fvec(N4+13)=fvec(N4+13)+cte*c4(j)
c differential equations at r=h,2h,...,Nh
      do 1 k=1,N
      Kc=c(N54+1)*k*h+c(N54+2)-yb(4,0,k)
      ct1=(c(N54+1)-yb(4,1,k))/Kc
      ct2=dexp(2.*(c(NN)-yb(3,0,k)))/Kc
      ct3=ct2/Kc
      ct4=yb(1,0,k)*(2.-yb(1,0,k))
      ct5=ct4*ct4
      ct6=yb(2,1,k)**2/alpha
      fvec(k)=yb(1,2,k)+ct1*yb(1,1,k)+(1.-yb(1,0,k))*(ct3*
*      yb(2,0,k)**2-ct4/2.)
      fvec(N+k)=yb(2,2,k)-(ct1+2.*yb(3,1,k))*yb(2,1,k)-alpha*
*      (1.-yb(1,0,k))**2*yb(2,0,k)

```

```

      fvec(N2+k)=yb(3,2,k)+ct1*yb(3,1,k)-2.*par4*(ct5/2.-2.*
*      ct3*ct6)
1  fvec(N3+k)=yb(4,2,k)-2.*par4*(3.*Kc*ct5/4.+ct2*(2.*(1.-
*      yb(1,0,k))*yb(2,0,k)**2-ct6))
c boundary/initial conditions at r=0
fvec(N4+1)=yb(1,0,0)-1.
fvec(N4+2)=yb(2,0,0)-1.
fvec(N4+3)=yb(3,0,0)-c(NN)
fvec(N4+4)=yb(4,0,0)-c(N54+2)
fvec(N4+5)=yb(1,2,0)
fvec(N4+6)=yb(2,1,0)
fvec(N4+7)=yb(3,1,0)
fvec(N4+8)=yb(4,1,0)-c(N54+1)+1.
fvec(N4+9)=yb(4,2,0)
c boundary conditions at r=(N-1)h,Nh
do 7 k=N-1,N
  fvec(N3+15+k)=yb(1,1,k)+yb(1,0,k)
  fvec(N3+17+k)=yb(2,1,k)+ra*yb(2,0,k)
  fvec(N3+19+k)=yb(3,1,k)+2.*ra*yb(3,0,k)
7  fvec(N3+21+k)=yb(4,1,k)+2.*ra*yb(4,0,k)
c composite Boole's rule
h1=h/Nsub
do 6 k=1,Nsub*N
  wht=32.
  if (mod(k,4) .eq. 2) wht=12.
  if (mod(k,4) .eq. 0) wht=14.
  xi=(k+0.)/Nsub
  x=xi*h
  Kc=c(N54+1)*x+c(N54+2)-spline(xi,N5,c4)
  Ac=c(NN)-spline(xi,N5,c3)
  Yc=spline(xi,N5,c1)
  dXdr2=(dspline(xi,N5,c1)/h)**2
  Pc=spline(xi,N5,c2)
  dPdr2=(dspline(xi,N5,c2)/h)**2
  ct1=dexp(Ac)/Kc
  ct2=((1.-Yc)*Pc)**2
  ct3=(Yc*(2.-Yc))**2
  fvec(N54+2)=fvec(N54+2)+wht*(Kc*(2.*dXdr2-.25*(2.+3.*Ac)*
*      ct3)+(dexp(2.*Ac)/Kc)*((2.-Ac)*dPdr2/alpha-2.*
*      (1.+2.*Ac)*ct2))
6  fvec(NN)=fvec(NN)+wht*((2./ct1)*(dXdr2+ct3/8.))+ct1*(2.*ct2+
*      3.*dPdr2/alpha)
fvec(N54+2)=c(NN)*c(N54+1)-2.*h1*par4*fvec(N54+2)/45.
fvec(NN)=dexp(-c(NN))*c(N54+1)-1.+2.*h1*par4*fvec(NN)/45.
return
end

real*8 function spline(xi,n,c)
c Algorithm 5.24 from L. Schumaker, Spline Functions: Basic Theory,
c Wiley, 1981.
implicit real*8 (a-h,o-z)
parameter(m=6,f=120)
dimension c(207),cx(m)
l=idint(xi+6.)
xdh=xi-l+m

```

```

do 1 j=1,m
1  cx(j)=c(j+1-m)
  do 2 j=2,m
    do 3 i=m,j,-1
3    cx(i)=(xdh+m-i)*cx(i)+(i-j+1-xdh)*cx(i-1)
2 continue
  spline=cx(m)/f
  return
end

real*8 function dspline(xi,n,c)
implicit real*8 (a-h,o-z)
dimension c(207)
l=idint(xi+6.)
dspline=0.
do 1 j=l-5,l
1  dspline=dspline+c(j)*d#6(xi-j+6)
  return
end

real*8 function d#6(xi)
implicit real*8 (a-h,o-z)
dimension a(0:6)
data a /1.,-6.,15.,-20.,15.,-6.,1./
j=idint(xi)
d#6=0.
do 1 k=0,j
1  d#6=d#6+a(k)*(xi-k)**4
  d#6=d#6/24.
  return
end

subroutine interp(N,u,N5,c1,c2,c3,c4,Amat,Rgt,AA,wks1,wks2)
implicit real*8 (a-h,o-z)
integer D
common h,h2,alpha,ra,par1,par2,par3,par4
dimension u(N),c1(207),c2(207),c3(207),c4(207),D(5,0:4),
*   Amat(N5,N5),Rgt(N5),wks1(N5),wks2(N5),AA(N5,N5)
data D /1,26,66,26,1,1,10,0,-10,-1,1,2,-6,2,1,1,-2,0,2,
*   -1,1,-4,6,-4,1/
ifail=0
N=N5-5
N1=N-1
N2=2*N1
N3=3*N1
N4=4*N1
do 4 i=1,N5
  do 5 j=1,N5
5    Amat(i,j)=0.
4 continue
do 6 k=0,N
  do 7 j=k+1,k+5
7    Amat(k+3,j)=D(k-j+6,0)/120.
6 continue
  Rgt(1)=0.

```



```

Rgt(2)=0.
Rgt(N+4)=0.
Rgt(N5)=0.
c interpolation of Y(r)
do 8 j=1,5
  Amat(1,j)=D(6-j,2)
8  Amat(2,j)=D(6-j,4)
do 9 j=N+1,N5
  jj=N-j+6
  Amat(N+4,j)=5.*D(jj,1)+h*D(jj,0)
9  Amat(N+5,j)=20.*D(jj,2)-h2*D(jj,0)
Rgt(3)=1.
do 10 k=1,N1
10 Rgt(k+3)=u(k)
Rgt(N+3)=par1*u(N1)
call FO4ATF(Amat,N5,Rgt,N5,c1,AA,N5,wks1,wks2,ifail)
c interpolation of P(r)
do 11 j=1,5
  Amat(1,j)=D(6-j,1)
11 Amat(2,j)=D(6-j,3)
do 12 j=N+1,N5
  jj=N-j+6
  Amat(N+4,j)=5.*D(jj,1)+h*ra*D(jj,0)
12 Amat(N+5,j)=20.*D(jj,2)-h2*alpha*D(jj,0)
Rgt(4)=1.-u(N)*h2
do 13 k=2,N1
13 Rgt(k+3)=u(N1+k)
Rgt(N+3)=par2*u(N2)
call FO4ATF(Amat,N5,Rgt,N5,c2,AA,N5,wks1,wks2,ifail)
c interpolation of Ah(r)
do 14 j=N+1,N5
  jj=N-j+6
  Amat(N+4,j)=5.*D(jj,1)+2.*h*ra*D(jj,0)
14 Amat(N+5,j)=20.*D(jj,2)-4.*h2*alpha*D(jj,0)
Rgt(3)=u(N5)
Rgt(4)=u(N5)+u(N2+1)*h2
do 15 k=2,N1
15 Rgt(k+3)=u(N2+k)
Rgt(N+3)=par3*u(N3)
call FO4ATF(Amat,N5,Rgt,N5,c3,AA,N5,wks1,wks2,ifail)
c interpolation of Kh(r)
do 16 j=1,5
16 Amat(2,j)=D(6-j,2)
Rgt(1)=24.*h*(u(N4)-1.)
Rgt(3)=u(N4+1)
Rgt(4)=u(N4+1)+(u(N4)-1.)*h
do 17 k=2,N1
17 Rgt(k+3)=u(N3+k-1)
Rgt(N+3)=par3*u(N4-1)
call FO4ATF(Amat,N5,Rgt,N5,c4,AA,N5,wks1,wks2,ifail)
return
end

```

2) Programa U1Eins16:

```

program U1Eins16
c solution of static Einstein-U(1) string equations for
c alpha > 1
c
c Integrals computed by composite Boole's rule
c
c The approximate solution is taken as a quintic spline
c
  implicit real*8 (a-h,o-z)
  integer D
  real*8 Ic
c number of nodes
  parameter(N=30,N5=N+5,N52=2*N5,N53=3*N5,N54=4*N5,N=N54+3,
*          Lwa=N*(3*N+13)/2,N4=4*N,Nsub=10)
  dimension c(N),fvec(N),wa(Lwa),Sig(0:N4),
*          Prad(0:N4),Ptan(0:N4),rad(0:N4),c1(207),c2(207),
*          c3(207),c4(207),D(5,0:4),den(0:4),Rgt(N5),AA(N5,
*          N5),wks1(N5),wks2(N5),Amat(N5,N5),u(N4-2)
  common h,h2,alpha,ra,par1,par2,par3,par4
  external FCN
  data D /1,26,66,26,1,1,10,0,-10,-1,1,2,-6,2,1,1,-2,0,2,
*        -1,1,-4,6,-4,1/,den /120.,24.,6.,2.,1./
c radial coordinate: iradius=1 -> r, iradius = 2 -> Kexp(-A)
  iradius=1
  ifail=0
  pi=4.d0*datan(1.d0)
c physical parameters
  alpha=4.
  eta=1.d-1
  ra=dsqrt(alpha)
c step-size
  xmax=10.
  xsup=11.
  h=xmax/N
  h2=h*h
  Nmax=xsup/h
c common parameters
  par1=1.-h
  par2=1.-ra*h
  par3=1.-2.*ra*h
  par4=2.*pi*eta*eta
c starting values
  c(N54+1)=0.9
  c(N54+2)=1.d-1
  c(N5)=1.d-2
  u(N4-4)=c(N54+1)
  u(N4-3)=c(N54+2)
  u(N4-2)=c(N5)
  do i k=1,N-1
    x=k*h
    ct1=dexp(-2*x/u(N4-3))
    u(k)=dexp(-x)
    u(N-1+k)=ra*x*s18adf(ra*x,ifail)
    u(2*(N-1)+k)=2.*ra*x*s18adf(2.*ra*x,ifail)*u(N4-2)

```

```

      if (k .eq. 1) then
        u(N-1+k)=(1.-u(N-1+k))/h2
        u(2*(N-1)+k)=(u(2*(N-1)+k)-u(N4-2))/h2
        goto 1
      endif
      u(3*(N-1)+k-1)=2.*(u(N4-4)*x+u(N4-3))*ct1/(1.+ct1)
1 continue
      call interp(N4-2,u,N5,c1,c2,c3,c4,Amat,Rgt,AA,uks1,uks2)
      do 11 k=1,N5
        c(k)=c1(k)
c(N5+k)=c2(k)
c(N52+k)=c3(k)
      11 c(N53+k)=c4(k)
c tolerance
      tol=dsqrt(x02aaf(0.0))
      ifail=0
      call c05nbf(FCN,NN,c,fvec,tol,wa,Lwa,ifail)
c norm of the residuals
      fnorm=f05abf(fvec,NN)
c storage of spline coefficients
      do 15 k=1,N5
        c1(k)=c(k)
        c2(k)=c(N5+k)
        c3(k)=c(N52+k)
      15 c4(k)=c(N53+k)
c determination of arbitrary constants
      ct1=dsqrt(xmax)
      c0=spline(xmax/h,N5,c1)*ct1/dexp(-xmax)
      p0=spline(xmax/h,N5,c2)/(ct1*dexp(-ra*xmax))
      b0=-par4*c0*c0
      d0=-1.5*b0*c(N54+1)
c output of spline coefficients, etc.
      open(2,file='coeffi.dat',status='new')
      write(2,*) N,h,c(N54+1),c(N54+2),c(NN)
      write(2,*) c0,p0,b0,d0
      do 3 k=1,N5
      3 write(2,*) c1(k),c2(k),c3(k),c4(k)
      close(2)
c stress-energy components and linear energy density
      dY0=0.
      d2P0=0.
      do 5 j=1,5
        jj=6-j
        dY0=dY0+c1(j)*D(jj,1)/(den(1)*h)
      5 d2P0=d2P0+c2(j)*D(jj,2)/(den(2)*h2)
      str1=d2P0+d2P0/(2.*alpha)
      Sig(0)=dY0*dY0+1./8.*str1
      Prad(0)=str1-1./8.
      Ptan(0)=Prad(0)
      rad(0)=0.
      do 6 k=1,N4
        xi=k/4.
        x=xi*h
        Xc=1.-spline(xi,N5,c1)
        Pc=spline(xi,N5,c2)

```

```

ct1=dexp(c(NN)-spline(xi,N5,c3))/(c(N54+1)*x+c(N54+2)-
* spline(xi,N5,c4))
ct2=(Xc*Xc-1.)**2/4.
ct3=dspline(xi,N5,c1)/h
ct3=ct3*ct3
ct4=(ct1*Xc+Pc)**2
ct5=(ct1*dspline(xi,N5,c2)/h)**2/alpha
if (iradius .eq. 1) then
  rad(k)=x
else
  rad(k)=1./ct1
endif
Sig(k)=.5*(ct3+ct4+ct2+ct5)
Prad(k)=.5*(ct3-ct4-ct2+ct5)
6 Ptan(k)=.5*(-ct3+ct4-ct2+ct5)
c composite Boole's rule
emu=0.
do 7 k=1,Nsub*N
  wht=32.
  if (mod(k,4) .eq. 2) wht=12.
  if (mod(k,4) .eq. 0) wht=14.
  xi=(k+0.)/Nsub
  x=xi*h
  Xc=1.-spline(xi,N5,c1)
  Ac=c(NN)-spline(xi,N5,c3)
  Pc=spline(xi,N5,c2)
  Kc=c(N54+1)*x+c(N54+2)-spline(xi,N5,c4)
  dXdr2=(dspline(xi,N5,c1)/h)**2
  dPdr2=(dspline(xi,N5,c2)/h)**2
  ct1=.5*(dXdr2+(Xc*Xc-1.)**2/4.+(dexp(Ac)/Kc)**2*(Xc*Pc)**2+
* dPdr2/alpha)
7 emu=emu+2.*wht*dexp(-Ac)*Kc*ct1
emu=2.*h*emu/(45.*Nsub)
c output of results
do 10 k=0,N4
  xi=k/4.
  x=xi*h
10 print 100,rad(k),1.-spline(xi,N5,c1),spline(xi,N5,c2),c(NN)-
* spline(xi,N5,c3),c(N54+1)*x+c(N54+2)-spline(xi,N5,c4),
* Sig(k),Prad(k),Ptan(k)
do 2 k=N4+1,4*Nmax
  x=k*h/4.
  if (iradius .eq. 1) then
    r=x
  else
    r=(c(N54+1)*x+c(N54+2))*dexp(-c(NN))
  endif
  ct1=dsqrt(x)
  ct2=dexp(-ra*x)
  ct3=dexp(-2.*x)
  ct4=c0*c0*ct3/x
2 print 100,r,i.-c0*dexp(-x)/ct1,p0*ct1*ct2,c(NN)+b0*ct3/
* x,c(N54+1)*x+c(N54+2)-d0*ct3,ct4,0.,-ct4
print 110,fnorm,ifail
print 120,c0,p0,c(N54+1),c(N54+2),d0,c(NN),b0

```

```

      print 130,360.*(1.-dexp(-c(NN))*c(N54+1)),emu
100 format((F8.4,7E20.11))
110 format(//,' Norm of residuals = ',E15.5,/, ' Fail = ',I3)
120 format(/,' c0 = ',E20.11, ' p0 = ',E20.11, ' k2 = ',E20.11,
*      /,' k0 = ',E20.11, ' d0 = ',E20.11, ' a0 = ',E20.11,
*      /,' b0 = ',E20.11)
130 format(/,' angular deficit (degrees): ',E20.11,
*      /,' linear energy density/pi eta**2 = ',E20.11)
      end

      subroutine FC(N,c,fvec,iflag)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      integer D
      real*8 Kc
      common h,h2,alpha,ra,par1,par2,par3,par4
      dimension c(N),fvec(N),c1(207),c2(207),c3(207),c4(207),
*      yb(4,0:2,0:300),D(5,0:4),den(0:4)
      data D /1,26,66,26,1,1,10,0,-10,-1,1,2,-6,2,1,1,-2,0,2,
*      -1,1,-4,6,-4,1/,den /120.,24.,6.,2.,1./
      Nsub=10
      N5=(N-3)/4
      N52=2*N5
      N53=3*N5
      N54=4*N5
      N=N5-5
      N2=2*N
      N3=3*N
      N4=4*N
      fvec(N54+2)=0.
      fvec(NN)=0.
c splitting of coefficient array
      do 3 k=1,N5
c1(k)=c(k)
      c2(k)=c(N5+k)
      c3(k)=c(N52+k)
      3 c4(k)=c(N53+k)
c storage of function values and derivatives
      do 18 k=0,N
      do 19 i=1,4
      do 20 l=0,2
20 yb(i,l,k)=0.
19 continue
      do 21 j=k+1,k+5
      jj=k-j+6
      do 22 l=0,2
      cte=D(jj,l)/(den(l)*h**1)
      yb(1,l,k)=yb(1,l,k)+cte*c1(j)
      yb(2,l,k)=yb(2,l,k)+cte*c2(j)
      yb(3,l,k)=yb(3,l,k)+cte*c3(j)
22 yb(4,l,k)=yb(4,l,k)+cte*c4(j)
21 continue
18 continue
      do 4 i=1,4
      4 fvec(N4+9+i)=0.
      do 5 j=1,5

```

```

    jj=6-j
    cte=D(jj,3)/(den(3)*h**3)
    fvec(N4+11)=fvec(N4+11)+cte*c2(j)
    fvec(N4+12)=fvec(N4+12)+cte*c3(j)
    cte=D(jj,4)/(den(4)*h**4)
    fvec(N4+10)=fvec(N4+10)+cte*c1(j)
5   fvec(N4+13)=fvec(N4+13)+cte*c4(j)
c differential equations at r=h,2h,...,Nh
do 1 k=1,N
    Kc=c(N54+1)*k*h+c(N54+2)-yb(4,0,k)
    ct1=(c(N54+1)-yb(4,1,k))/Kc
    ct2=dexp(2.*(c(N54)-yb(3,0,k)))/Kc
    ct3=ct2/Kc
    ct4=yb(1,0,k)*(2.-yb(1,0,k))
    ct5=ct4*ct4
    ct6=yb(2,1,k)**2/alpha
    fvec(k)=yb(1,2,k)+ct1*yb(1,1,k)+(1.-yb(1,0,k))*(ct3*
*   yb(2,0,k)**2-ct4/2.)
*   fvec(N+k)=yb(2,2,k)-(ct1+2.*yb(3,1,k))*yb(2,1,k)-alpha*
*   (1.-yb(1,0,k))**2*yb(2,0,k)
    fvec(N2+k)=yb(3,2,k)+ct1*yb(3,1,k)-2.*par4*(ct5/2.-2.*
*   ct3*ct6)
1   fvec(N3+k)=yb(4,2,k)-2.*par4*(3.*Kc*ct5/4.+ct2*(2.*(1.-
*   yb(1,0,k))*yb(2,0,k))**2-ct6))
c boundary/initial conditions at r=0
    fvec(N4+1)=yb(1,0,0)-1.
    fvec(N4+2)=yb(2,0,0)-1.
    fvec(N4+3)=yb(3,0,0)-c(N54)
    fvec(N4+4)=yb(4,0,0)-c(N54+2)
    fvec(N4+5)=yb(1,2,0)
    fvec(N4+6)=yb(2,1,0)
    fvec(N4+7)=yb(3,1,0)
    fvec(N4+8)=yb(4,1,0)-c(N54+1)+1.
    fvec(N4+9)=yb(4,2,0)
c boundary conditions at r=(N-1)h,Nh
do 7 k=N-1,N
    fvec(N3+15+k)=yb(1,1,k)+yb(1,0,k)
    fvec(N3+17+k)=yb(2,1,k)+ra*yb(2,0,k)
    fvec(N3+19+k)=yb(3,1,k)+2.*yb(3,0,k)
7   fvec(N3+21+k)=yb(4,1,k)+2.*yb(4,0,k)
c composite Boole's rule
    h1=h/Nsub
do 6 k=1,Nsub*N
    wht=32.
    if (mod(k,4) .eq. 2) wht=12.
    if (mod(k,4) .eq. 0) wht=14.
    xi=(k+0.)/Nsub
    x=xi*h
    Kc=c(N54+1)*x+c(N54+2)-spline(xi,N5,c4)
    Ac=c(N54)-spline(xi,N5,c3)
    Yc=spline(xi,N5,c1)
    dXdr2=(dspline(xi,N5,c1)/h)**2
    Pc=spline(xi,N5,c2)
    dPdr2=(dspline(xi,N5,c2)/h)**2
    cti=dexp(Ac)/Kc

```

```

ct2=((1.-Yc)*Pc)**2
ct3=(Yc*(2.-Yc))**2
fvec(N54+2)=fvec(N54+2)+wht*(Kc*(2.*dXdr2-.25*(2.+3.*Ac)*
*      ct3)+(dexp(2.*Ac)/Kc)*((2.-Ac)*dPdr2/alpha-2.*
*      (1.+2.*Ac)*ct2))
6 fvec(NN)=fvec(NN)+wht*((2./ct1)*(dXdr2+ct3/8.))+ct1*(2.*ct2+
*      3.*dPdr2/alpha)
fvec(N54+2)=c(NN)*c(N54+1)-2.*h1*par4*fvec(N54+2)/45.
fvec(NN)=dexp(-c(NN))*c(N54+1)-1.+2.*h1*par4*fvec(NN)/45.
return
end

```

3) Programa U1Eins20:

```

program U1Eins20
c solution of static Einstein-U(1) string equations for
c alpha < 1/4
c
c Integrals computed by composite Boole's rule,
c with tail corrections
c
c The approximate solution is taken as a quintic spline
c
  implicit real*8 (a-h,o-z)
  integer D
  real*8 Kc
c number of nodes
  parameter(N=75,N5=N+5,N52=2*N5,N53=3*N5,N54=4*N5,NN=N54+3,
*      Lwa=NN*(3*NN+13)/2,N4=4*N, Nsub=12)
  dimension c(NN),fvec(NN),wa(Lwa),Sig(0:N4),
*      Prad(0:N4),Ptan(0:N4),rad(0:N4),c1(207),c2(207),
*      c3(207),c4(207),D(5,0:4),den(0:4),Rgt(N5),AA(N5,
*      N5),wks1(N5),wks2(N5),Amat(N5,N5),u(N4-2)
  common h,h2,alpha,ra,par1,par2,par3,par4,xmax
  external FCN
  data D /1,26,66,26,1,1,10,0,-10,-1,1,2,-6,2,1,1,-2,0,2,
*      -1,1,-4,6,-4,1/,den /120.,24.,6.,2.,1./
c radial coordinate: iradius=1 -> r, iradius = 2 -> Kexp(-A)
  iradius=1
  ifail=0
  pi=4.d0*datan(1.d0)
c physical parameters
  alpha=1./32.
  eta=1.d-1
  ra=dsqrt(alpha)
c step-size
  xmax=35.
  xsup=36.
  h=xmax/N
  h2=h*h
  Nmax*xsup/h
c common parameters
  par1=1.-h
  par2=1.-ra*h
  par3=1.-2.*ra*h

```

```

par4=2.*pi*eta*eta
c starting values
c(N54+1)=0.66
c(N54+2)=0.944
c(NN)=-1.d-1
u(N4-4)=c(N54+1)
u(N4-3)=c(N54+2)
u(N4-2)=c(NN)
do 1 k=1,N-1
  x=k*h
  ct1=dexp(-2*x/u(N4-3))
  u(k)=dexp(-x)
  u(N-1+k)=ra*x*s18adf(ra*x,ifail)
  u(2*(N-1)+k)=2.*ra*x*s18adf(2.*ra*x,ifail)*u(N4-2)
  if (k .eq. 1) then
    u(N-1+k)=(1.-u(N-1+k))/h2
    u(2*(N-1)+k)=(u(2*(N-1)+k)-u(N4-2))/h2
    goto 1
  endif
  u(3*(N-1)+k-1)=2.*(u(N4-4)*x+u(N4-3))*ct1/(1.+ct1)
1 continue
call interp(N4-2,n,N5,c1,c2,c3,c4,Amat,Rgt,AA,wks1,wks2)
do 11 k=1,N5
  c(k)=c1(k)
c(N5+k)=c2(k)
c(N52+k)=c3(k)
11 c(N53+k)=c4(k)
c tolerance
tol=dsqrt(x02aaf(0.0))
ifail=0
call c05nbf(FCN,NN,c,fvec,tol,wa,Lwa,ifail)
c norm of the residuals
fnorm=f05abf(fvec,NN)
c storage of spline coefficients
do 15 k=1,N5
  c1(k)=c(k)
  c2(k)=c(N5+k)
  c3(k)=c(N52+k)
15 c4(k)=c(N53+k)
c determination of arbitrary constants
ct1=dsqrt(xmax)
p0=spline(xmax/h,N5,c2)/(ct1*dexp(-ra*xmax))
ct2=pi*(dexp(c(NN))*eta*p0)**2/alpha
c0=(dexp(c(NN))*p0/c(N54+1))**2/(1.-4.*alpha)
b0=2.*ct2/c(N54+1)**2
d0=ct2/c(N54+1)
c output of spline coefficients, etc.
open(2,file='coef.dat',status='new')
write(2,*) N,h,c(N54+1),c(N54+2),c(NN)
write(2,*) c0,p0,b0,d0
do 3 k=1,N5
3 write(2,*) c1(k),c2(k),c3(k),c4(k)
close(2)
c stress-energy components and linear energy density
dY0=0.

```



```

d2P0=0.
do 5 j=1,5
  jj=6-j
  dY0=dY0+c1(j)*D(jj,1)/(den(1)*h)
5  d2P0=d2P0+c2(j)*D(jj,2)/(den(2)*h2)
str1=d2P0*d2P0/(2.*alpha)
Sig(0)=dY0*dY0+1./8.*str1
Prad(0)=str1-1./8.
Ptan(0)=Prad(0)
rad(0)=0.
do 6 k=1,4
  xi=k/4.
  x=xi*h
  Xc=1.-spline(xi,5,c1)
  Pc=spline(xi,5,c2)
  ct1=dexp(c(5)-spline(xi,5,c3))/(c(54+1)*x+c(54+2)-
*   spline(xi,5,c4))
  ct2=(Xc*Xc-1.):**2/4.
  ct3=dspline(xi,5,c1)/h
  ct3=ct3*ct3
  ct4=(ct1*Xc*Pc)**2
  ct5=(ct1*dspline(xi,5,c2)/h)**2/alpha
  if (iradius .eq. 1) then
    rad(k)=x
  else
    rad(k)=1./ct1
  endif
  Sig(k)=.5*(ct3+ct4+ct2+ct5)
  Prad(k)=.5*(ct3-ct4-ct2+ct5)
6  Ptan(k)=.5*(-ct3+ct4-ct2+ct5)
c composite Boole's rule
emu=0.
Ndiv=Nsub*N
do 7 k=1,Ndiv
  wht=32.
  if (mod(k,4) .eq. 2) wht=12.
  if (mod(k,4) .eq. 0) wht=14.
  if (k .eq. Ndiv) wht=7.
  xi=(k+0.)/Nsub
  x=xi*h
  Xc=1.-spline(xi,5,c1)
  Ac=c(5)-spline(xi,5,c3)
  Pc=spline(xi,5,c2)
  Kc=c(54+1)*x+c(54+2)-spline(xi,5,c4)
  dXdr2=(dspline(xi,5,c1)/h)**2
  dPdr2=(dspline(xi,5,c2)/h)**2
  ct1=.5*(dXdr2+(Xc*Xc-1.):**2/4.+(dexp(Ac)/Kc)**2*((Xc*Pc)**2+
*   dPdr2/alpha))
7  emu=emu+2.*wht*dexp(-Ac)*Kc*ct1
  emu=2.*h*emu/(45.*Nsub)
c tail correction
emu=emu+dexp(c(5))-2.*ra*xmax)*p0*p0/(ra*c(54+1))
c output of results
do 10 k=0,4
  xi=k/4.

```

```

      x=xi*h
10  print 100,rad(k),1.-spline(xi,N5,c1),spline(xi,N5,c2),c(N5)-
*    spline(xi,N5,c3),c(N54+1)*x+c(N54+2)-spline(xi,N5,c4),
*    Sig(k),Prad(k),Ptan(k)
do 2 k=N4+1,4*Nmax
  x=k*h/4.
  if (iradius .eq. 1) then
    r=x
  else
    r=(c(N54+1)*x+c(N54+2))*dexp(-c(N5))
  endif
  ct1=dsqrt(x)
  ct2=dexp(-ra*x)
  ct3=ct2*ct2
  ct4=(p0/c(N54+1))*2*(dexp(2*c(N5))/x)*ct3
2  print 100,r,1.-c0*ct3/x,p0*ct1*ct2,c(N5)+b0*ct3/
*    x,c(N54+1)*x+c(N54+2)-d0*ct3,ct4,0.,ct4
  print 110,fnorm,ifail
  print 120,c0,p0,c(N54+1),c(N54+2),d0,c(N5),b0
  print 130,360.*(1.-dexp(-c(N5))*c(N54+1)),emu
100 format((F8.4,7E16.7))
110 format(//,' Norm of residuals = ',E15.5,/, ' Fail = ',I3)
120 format(/,' c0 = ',E16.7, ' p0 = ',E16.7, ' k2 = ',E16.7,
*    /,' k0 = ',E16.7, ' d0 = ',E16.7, ' a0 = ',E16.7,
*    /,' b0 = ',E16.7)
130 format(/,' angular deficit (degrees): ',E16.7,
*    /,' linear energy density/pi eta**2 = ',E16.7)
end

subroutine FCM(N5,c,fvec,iflag)
implicit real*8 (a-h,o-z)
integer D
real*8 Kc
common h,h2,alpha,ra,par1,par2,par3,par4,xmax
dimension c(N5),fvec(N5),c1(207),c2(207),c3(207),c4(207),
*    yb(4,0:2,0:300),D(5,0:4),den(0:4)
data D /1,26,66,26,1,1,10,0,-10,-1,1,2,-6,2,1,1,-2,0,2,
*    -1,1,-4,6,-4,1/,den /120.,24.,6.,2.,1./
Nsub=12
N5=(N5-3)/4
N52=2*N5
N53=3*N5
N54=4*N5
N=N5-5
N2=2*N
N3=3*N
N4=4*N
fvec(N54+2)=0.
fvec(N5)=0.
c splitting of coefficient array
do 3 k=1,N5
c1(k)=c(k)
  c2(k)=c(N5+k)
  c3(k)=c(N52+k)
3  c4(k)=c(N53+k)

```

```

c storage of function values and derivatives
do 18 k=0, N
  do 19 i=1, 4
    do 20 l=0, 2
      20   yb(i,l,k)=0.
    19   continue
    do 21 j=k+1, k+5
      jj=k-j+6
      do 22 l=0, 2
        cte=D(jj,l)/(den(l)*h**l)
        yb(1,l,k)=yb(1,l,k)+cte*c1(j)
        yb(2,l,k)=yb(2,l,k)+cte*c2(j)
        yb(3,l,k)=yb(3,l,k)+cte*c3(j)
      22   yb(4,l,k)=yb(4,l,k)+cte*c4(j)
    21   continue
  18   continue
  do 4 i=1, 4
    4   fvec(N4+9+i)=0.
    do 5 j=1, 5
      jj=6-j
      cte=D(jj,3)/(den(3)*h**3)
      fvec(N4+11)=fvec(N4+11)+cte*c2(j)
      fvec(N4+12)=fvec(N4+12)+cte*c3(j)
      cte=D(jj,4)/(den(4)*h**4)
      fvec(N4+10)=fvec(N4+10)+cte*c1(j)
    5   fvec(N4+13)=fvec(N4+13)+cte*c4(j)
c differential equations at r=h, 2h, ..., Nh
do 1 k=1, N
  Kc=c(N54+1)*k*h+c(N54+2)-yb(4,0,k)
  ct1=(c(N54+1)-yb(4,1,k))/Kc
  ct2=dexp(2.*(c(N54)-yb(3,0,k)))/Kc
  ct3=ct2/Kc
  ct4=yb(1,0,k)*(2.-yb(1,0,k))
  ct5=ct4*ct4
  ct6=yb(2,1,k)**2/alpha
  fvec(k)=yb(1,2,k)+ct1*yb(1,1,k)+(1.-yb(1,0,k))*(ct3*
*   yb(2,0,k)**2-ct4/2.)
  fvec(N+k)=yb(2,2,k)-(ct1+2.*yb(3,1,k))*yb(2,1,k)-alpha*
*   (1.-yb(1,0,k))**2*yb(2,0,k)
  fvec(N2+k)=yb(3,2,k)+ct1*yb(3,1,k)-2.*par4*(ct5/2.-2.*
*   ct3*ct6)
  1   fvec(N3+k)=yb(4,2,k)-2.*par4*(3.*Kc*ct5/4.+ct2*(2.*(1.-
*   yb(1,0,k))*yb(2,0,k))**2-ct6)
c boundary/initial conditions at r=0
fvec(N4+1)=yb(1,0,0)-1.
fvec(N4+2)=yb(2,0,0)-1.
fvec(N4+3)=yb(3,0,0)-c(N54)
fvec(N4+4)=yb(4,0,0)-c(N54+2)
fvec(N4+5)=yb(1,2,0)
fvec(N4+6)=yb(2,1,0)
fvec(N4+7)=yb(3,1,0)
fvec(N4+8)=yb(4,1,0)-c(N54+1)+1.
fvec(N4+9)=yb(4,2,0)
c boundary conditions at r=(N-1)h, Nh
do 7 k=N-1, N

```

```

      fvec(N3+15+k)=yb(1,1,k)+2.*ra*yb(1,0,k)
      fvec(N3+17+k)=yb(2,1,k)+ra*yb(2,0,k)
      fvec(N3+19+k)=yb(3,1,k)+2.*ra*yb(3,0,k)
7   fvec(N3+21+k)=yb(4,1,k)+2.*ra*yb(4,0,k)
c composite Boole's rule
  h1=h/Nsub
  Ndiv=Nsub*N
  do 6 k=1,Ndiv
    wht=32.
    if (mod(k,4) .eq. 2) wht=12.
    if (mod(k,4) .eq. 0) wht=14.
    if (k .eq. Ndiv) wht=7.
    xi=(k+0.)/Nsub
    x=xi*h
    Kc=c(N54+1)*x+c(N54+2)-spline(xi,N5,c4)
    Ac=c(N5)-spline(xi,N5,c3)
    Yc=spline(xi,N5,c1)
    dXdr2=(dspline(xi,N5,c1)/h)**2
    Pc=spline(xi,N5,c2)
    dPdr2=(dspline(xi,N5,c2)/h)**2
    ct1=dexp(Ac)/Kc
    ct2=((1.-Yc)*Pc)**2
    ct3=(Yc*(2.-Yc))**2
    fvec(N54+2)=fvec(N54+2)+wht*(Kc*(2.*dXdr2-.25*(2.+3.*Ac)*
*      ct3)+(dexp(2.*Ac)/Kc)*((2.-Ac)*dPdr2/alpha-2.*
*      (1.+2.*Ac)*ct2))
6   fvec(N5)=fvec(N5)+wht*((2./ct1)*(dXdr2+ct3/8.))+ct1*(2.*ct2+
*      3.*dPdr2/alpha)
    fvec(N54+2)=c(N5)*c(N54+1)-2.*h1*par4*fvec(N54+2)/45.
    fvec(N5)=dexp(-c(N5))*c(N54+1)-1.+2.*h1*par4*fvec(N5)/45.
c tail corrections
  p0=spline(xmax/h,N5,c2)/(dsqrt(xmax)*dexp(-ra*xmax))
  ct1=5.*p0*p0*dexp(c(N5)-2.*ra*xmax)/(2.*ra*c(N54+1))
  ct2=-c(N5)*dexp(c(N5))*ct1
  fvec(N54+2)=fvec(N54+2)-par4*ct2
  fvec(N5)=fvec(N5)+par4*ct1
  return
end

```

4) Programa lambda6:

```

program Lambda6
c Determination of neutral modes of the U(1) string.
c It is assumed that  $\omega > e^{-(a_0/2)*\max\{1,\sqrt{\alpha}\}}$ .
c The DODE routine is employed.
c Oscillations of the metric components gtt, gthh, gzz, scalar field
c and Atheta.
c COORDINATE CONDITIONS  $\pi_1=0$ ,  $\beta_{a1}=0$  ( $\mu_1 = \gamma_{a1}$ )
c Variables, X,U,Lambda,Gamma,Q. (AUG 19, 1993)
c Amplitudes and phases of normal modes are computed (Nov. 24, 1993).
  implicit real*8 (a-h,o-z)
  real*8 K0,k0a,ks,LO
  character*64 arq,arq1,arq2
  external F
c number of nodes and dependent variables

```

```

parameter(Neq=8,iv=100+21*Neq,Nf=6,rmin=2.d-3)
dimension cc1(207),cc2(207),cc3(207),cc4(207),A(Nf,Nf),
* AA(Nf,Nf),y(Neq),work(iv),iwork(5),sol(3,5,2000),Rgt(Nf),
* wks1(Nf),wks2(Nf),slope(3),pr(Nf),gain(3),gcos(3),
* arq1(2),scons(3),Amps(2,3),Ampc(2,3),ph(2,3),Amp(2,3)
common cc1,cc2,cc3,cc4,c1,v2,a2,d3,v4,c3,a4,hs,freq2,
* alpha,ra,par,k0s,ks,a0s,c0s,p0s,
* b0s,d0s,Ms
pi=4.D0*datan(1.D0)
c input data
open(4,file='lambda6.ins',status='old')
read(4,*) Ntask
do 75 itask=1,Ntask
write(*,*) '>>>>>>>>> TASK #',itask
read(4,*) alpha,eta,freq
read(4,*) rmax,N,rinit,rmr
read(4,*) relerr,abserr
read(4,'(A)') arq
do 20 k=1,2
20 read(4,'(A)') arq1(k)
read(4,'(A)') arq2
c physical parameters
ra=dsqrt(alpha)
par=8.*pi*eta*eta
freq2=freq*freq
c step-size
h=(rmax-rinit)/N
h2=h*h
c input of spline coefficients of the static solution
open(1,file=arq,status='old')
read(1,*) Ms,hs,ks,k0s,a0s
read(1,*) c0s,p0s,b0s,d0s
Ms=Ms+5
do 1 k=1,Ms
1 read(1,*) cc1(k),cc2(k),cc3(k),cc4(k)
close(1,status='keep')
write(*,*) 'Static solution read'
c initial conditions at 'r=0'
c=par/8.
alfa=alpha
v2=(cc2(1)+2.*cc2(2)-6.*cc2(3)+2.*cc2(4)+cc2(5))/(12.*hs*hs)
c1=-(cc1(5)+10.*cc1(4)-10.*cc1(2)-cc1(1))/(24.*hs)
a2=-0.5*(cc3(1)+2.*cc3(2)-6.*cc3(3)+2.*cc3(4)+cc3(5))/(6.*hs*hs)
d3=(1./6.)*(cc4(1)-2.*cc4(2)+2.*cc4(4)-cc4(5))/(2.*hs**3)
v4=(1./24.)*(cc2(1)-4.*cc2(2)+6.*cc2(3)-4.*cc2(4)+cc2(5))/hs**4
c3=(1./6.)*(cc1(1)-2.*cc1(2)+2.*cc1(4)-cc1(5))/(2.*hs**3)
a4=-(1./24.)*(cc3(1)-4.*cc3(2)+6.*cc3(3)-4.*cc3(4)+cc3(5))/hs**4
csq=c*c
c1sq=c1*c1
v2sq=v2*v2
v2cb=v2sq*v2
alfa2=alfa*alfa
alfa3=alfa2*alfa
alfa4=alfa2*alfa2
freq4=freq2*freq2

```

```

do 12 k=i,3
  write(*,*) 'Regular solution #',k
  x1=0.
  u2=0.
  GO=0.
  LO=0.
  if (k .eq. 1) then
c solution #4 in the report
    u2=1.
  elseif (k .eq. 2) then
c solution #1 in the report
    x1=1.
  else
c solution #2 in the report
    GO=1.
    LO=1.
  endif
  X3=(64.*C*C1*V2*U2+96.*C*X1*ALFA*C1SQ+6.*C*X1*ALFA+
. 32.*C*X1*V2SQ+12.*C1*ALFA*U2+C1*ALFA*GO*FREQ2+C1*
. ALFA*LO*FREQ2+12.*X1*V2*ALFA-6.*X1*ALFA*FREQ2-3.*X1
. *ALFA)/(48.*ALFA)
  U4=(-32.*C*C1*X1*V2*ALFA-16.*C*ALFA*U2*C1SQ+6.*C*
. ALFA*U2-480.*C*U2*V2SQ+6.*C1*X1*ALFA2+4.*V2*ALFA*GO
. *FREQ2+4.*V2*ALFA*LO*FREQ2-3.*ALFA*U2*FREQ2)/(24.*
. ALFA)
  G2=(64.*C*V2*U2-ALFA*GO*FREQ2-ALFA*LO*FREQ2)/(4.*
. ALFA)
  G4=(192.*C*C1*X1*V2*ALFA2+16.*C*C1*X1*FREQ2*ALFA2+
. 48.*C*C1*X1*ALFA2-128.*C*V2*ALFA*U2*FREQ2+192.*C*
. ALFA*GO*FREQ2*V2SQ+192.*C*ALFA*LO*FREQ2*V2SQ+96.*C*
. U2*C1SQ*ALFA2-8.*C*GO*FREQ2*C1SQ*ALFA2-8.*C*GO*
. FREQ2*ALFA2-8.*C*LO*FREQ2*C1SQ*ALFA2-8.*C*LO*FREQ2*
. ALFA2+512.*C1*X1*ALFA*CSQ*V2SQ-32.*C1*X1*CSQ*ALFA2+
. 512.*V2*ALFA*U2*CSQ*C1SQ+640.*V2*ALFA*U2*CSQ-14336.*
. V2*U2*CSQ*V2SQ+GO*FREQ4*ALFA2+LO*FREQ4*ALFA2)/(96.*
. ALFA2)
  Q2=(-32.*C*C1*X1*ALFA-128.*C*V2*U2+ALFA*GO*FREQ2+
. ALFA*LO*FREQ2)/(12.*ALFA)
  Q4=(-4608.*C*C1*X1*V2*ALFA2+288.*C*C1*X1*FREQ2*ALFA2
. +288.*C*C1*X1*ALFA2+1728.*C*V2*ALFA*U2*FREQ2-1472.*
. C*ALFA*GO*FREQ2*V2SQ-1472.*C*ALFA*LO*FREQ2*V2SQ-
. 2304.*C*U2*C1SQ*ALFA2+64.*C*GO*FREQ2*C1SQ*ALFA2+36.*
. C*GO*FREQ2*ALFA2+64.*C*LO*FREQ2*C1SQ*ALFA2+36.*C*LO
. *FREQ2*ALFA2-17408.*C1*X1*ALFA*CSQ*V2SQ-11264.*C1*
. X1*CSQ*C1SQ*ALFA2-576.*C1*X1*CSQ*ALFA2-17408.*V2*
. ALFA*U2*CSQ*C1SQ-5760.*V2*ALFA*U2*CSQ+133120.*V2*U2
. *CSQ*V2SQ-9.*GO*FREQ4*ALFA2-9.*LO*FREQ4*ALFA2)/(
. 1440.*ALFA2)
  r=rinit
  y(1)=x1*r+x3*r**3
  y(2)=u2*r+r+u4*r**4
  y(3)=LO+(freq2/16.)*q2*r**4
  y(4)=GO+G2*r+r+G4*r**4
  y(5)=q2*r+r+q4*r**4
  y(6)=x1+3.*x3*r*r

```

```

y(7)=2.*u2*r+4.*u4*r**3
y(8)=(freq2/4.)*q2*r**3
sol(k,1,0+1)=y(1)
sol(k,2,0+1)=y(2)/r
sol(k,3,0+1)=(y(3)+y(4))/2.
sol(k,4,0+1)=(y(4)-y(3))/2.
sol(k,5,0+1)=y(5)
iflag=1
c solution loop
do 3 m=1,N
  rout=rinit+m*h
  call dode(F,Eq,y,r,rout,relerr,abserr,iflag,work,iwork)
  if (iflag .ne. 2) stop
  sol(k,1,m+1)=y(1)
  sol(k,2,m+1)=y(2)/(rinit+m*h)
  sol(k,3,m+1)=(y(3)+y(4))/2.
  sol(k,4,m+1)=(y(4)-y(3))/2.
3  sol(k,5,m+1)=y(5)
  write(*,*) ' Solution loop completed'
c least squares fit for gamma(i)=sol(k,4,i+1).
mmin=rmr/h
wvn=freq*dexp(-a0s/2.)
do 2 i=1,Nf
  do 4 j=1,Nf
    A(i,j)=0.
    do 6 m=mmin,N
      r=rinit+m*h
6      A(i,j)=A(i,j)+phi(j,r,wvn)*phi(i,r,wvn)
4      continue
2      continue
do 8 i=1,Nf
  Rgt(i)=0.
  do 9 m=mmin,N
    r=rinit+m*h
9      Rgt(i)=Rgt(i)+phi(i,r,wvn)*sol(k,4,m+1)
8      continue
ifail=0
call F04ATF(A,Nf,Rgt,Nf,pr,AA,Nf,wks1,wks2,ifail)
write(*,*) ' Least squares fit completed (gamma)'
gsin(k)=pr(3)
gcos(k)=pr(4)
slope(k)=pr(1)
12 scon(k)=pr(2)
c removal of m0 component
do 23 k=1,3
  do 24 m=1,N+1
24  sol(k,4,m)=sol(k,4,m)-scon(k)
23  continue
  write(*,*) ' Constant component removed'
c construction of 2 regular modes
do 13 k=2,3
  write(*,*) ' Removal of linear trend: mode ',k-1
  gsin(k)=gsin(k)-slope(k)*gsin(1)/slope(1)
  gcos(k)=gcos(k)-slope(k)*gcos(1)/slope(1)
do 14 j=1,5

```

```

      do 15 m=1,N+1
15      sol(k,j,m)=sol(k,j,m)-slope(k)*sol(1,j,m)/slope(1)
14      continue
13      continue
      do 25 jj=1,2
      write(*,*) 'Calculating ampl. & phase of mode ',jj
c amplituda and phase of gammal
      Amps(jj,1)=gsin(jj+1)
      Ampc(jj,1)=gcos(jj+1)
      Amp(jj,1)=dsqrt(Amps(jj,1)**2+Ampc(jj,1)**2)
      ph(jj,1)=-argu(Ampc(jj,1),Amps(jj,1))
c least squares fit of U1/r
      wvn=dsqrt(freq2*dexp(-a0s)-alpha)
      do 26 i=1,Nf
      do 27 j=1,Nf
      A(i,j)=0.
      do 28 m=mmin,N
      r=rinit+m*h
28      A(i,j)=A(i,j)+phiX(j,r,wvn)*phiX(i,r,wvn)
27      continue
26      continue
      do 29 i=1,Nf
      Rgt(i)=0.
      do 30 m=mmin,N
      r=rinit+m*h
30      Rgt(i)=Rgt(i)+phiX(i,r,wvn)*sol(jj+1,2,m+1)
29      continue
      ifail=0
      call FO4ATF(A,Nf,Rgt,Nf,pr,AA,Nf,wks1,wks2,ifail)
      Amps(jj,2)=pr(1)
      Ampc(jj,2)=pr(2)
      Amp(jj,2)=dsqrt(Amps(jj,2)**2+Ampc(jj,2)**2)
      ph(jj,2)=-argu(Ampc(jj,2),Amps(jj,2))
c least squares fit of Xi
      wvn=dsqrt(freq2*dexp(-a0s)-1.)
      do 31 i=1,Nf
      do 32 j=1,Nf
      A(i,j)=0.
      do 33 m=mmin,N
      r=rinit+m*h
33      A(i,j)=A(i,j)+phiX(j,r,wvn)*phiX(i,r,wvn)
32      continue
31      continue
      do 34 i=1,Nf
      Rgt(i)=0.
      do 35 m=mmin,N
      r=rinit+m*h
35      Rgt(i)=Rgt(i)+phiX(i,r,wvn)*sol(jj+1,1,m+1)
34      continue
      ifail=0
      call FO4ATF(A,Nf,Rgt,Nf,pr,AA,Nf,wks1,wks2,ifail)
      Amps(jj,3)=pr(1)
      Ampc(jj,3)=pr(2)
      Amp(jj,3)=dsqrt(Amps(jj,3)**2+Ampc(jj,3)**2)
      ph(jj,3)=-argu(Ampc(jj,3),Amps(jj,3))

```



```

25 continue
c output of amplitudes and phases
  open(1,file=arq2,status='new')
  write(1,105) alpha,eta,frac
  write(1,110) Amp(1,1),Amp(2,1),Amp(1,2),Amp(2,2),Amp(1,3),Amp(2,3)
  write(1,110) ph(1,1),ph(2,1),ph(1,2),ph(2,2),ph(1,3),ph(2,3)
  close(1,status='keep')
105 format(3E12.5)
110 format(6E12.5)
c output of results
  do 21 k=1,2
  21  open(k,file=arq1(k),status='new')
c columns of output: r,X1,U1/r,Z1,gamma1,Q1
  do 16 k=2,3
  z=0.
  if (k .eq. 3) z=1.
  sco=-scons(k)+slope(k)*scons(1)/slope(1)
  write(k-1,100) 0.,0.,0.,z,sco,0.
  do 5 m=1,4
  5  write(k-1,100) m*h+rinit,sol(k,1,m+1),sol(k,2,m+1),
  *      sol(k,3,m+1),sol(k,4,m+1),sol(k,5,m+1)
16 continue
  do 17 k=1,2
17  close(k,status='keep')
75 continue
  close(4,status='keep')
100 format(F9.6,5E17.7)
  end

real*8 function argu(x,y)
implicit real*8 (a-h,o-z)
hpi=2.d0*datan(1.d0)
if (y .eq. 0.) then
  if (x .ge. 0.) then
    argu=0.
  else
    argu=2.*hpi
  endif
elseif (y .gt. 0.) then
  argu=hpi-datan(x/y)
else
  argu=-hpi-datan(x/y)
endif
return
end

real*8 function phi(k,r,wvn)
implicit real*8 (a-h,o-z)
s=dsin(wvn*r)/r**1.5
c=dcos(wvn*r)/r**1.5
if (k .eq. 1) then
  phi=r
elseif (k .eq. 2) then
  phi=1.d0
elseif (k .eq. 3) then

```

```

    phi=s
elseif (k .eq. 4) then
    phi=c
elseif (k .eq. 5) then
    phi=s/r
else
    phi=c/r
endif
return
end

real*8 function phiX(k,r,wvn)
implicit real*8 (a-h,o-z)
s=dsin(wvn*r)/dsqrt(r)
c=dcos(wvn*r)/dsqrt(r)
if (k .eq. 1) then
    phiX=s
elseif (k .eq. 2) then
    phiX=c
elseif (k .eq. 3) then
    phiX=s/r
elseif (k .eq. 4) then
    phiX=c/r
elseif (k .eq. 5) then
    phiX=s/(r*r)
else
    phiX=c/(r*r)
endif
return
end

subroutine F(t,y,yp)
implicit real*8 (a-h,o-z)
real*8 K0,k0s,ks,Lh
parameter(Meq=8,rmin=2.d-3)
dimension cci(207),cc2(207),cc3(207),cc4(207),y(Meq),yp(Meq)
common cc1,cc2,cc3,cc4,c1,v2,a2,d3,v4,c3,a4,hs,freq2,
*     alpha,ra,par,k0s,ks,a0s,c0s,p0s,
*     b0s,d0s,Ms
c computation of coefficients in perturbation equations
xi=t/hs
if (xi .gt. Ms) then
    ct1=dsqrt(t)
    ct2=dexp(-ra*t)
    ct3=ct2*ct2
    ct4=(p0s/ks)**2*(dexp(2.*a0s)/t)*ct3
    X0=1.-c0s*dexp(-t)/ct1
    dX0=c0s*dexp(-t)/ct1
    U0=p0s*ct1*ct2
    dU0=-ra*U0
    A0=a0s+b0s*ct3/t
    dA0=-2.*ra*b0s*ct3/t
    K0=ks*t+k0s-d0s*ct3
    dK0=ks+2.*ra*d0s*ct3
elseif (t .gt. rmin) then

```

```

X0=1.-spline5(xi,cc1)
dX0=-dspline5(xi,cc1)/hs
U0=spline5(xi,cc2)
dU0=dspline5(xi,cc2)/hs
A0=a0s-spline5(xi,cc3)
dA0=-dspline5(xi,cc3)/hs
K0=ks*t+k0s-spline5(xi,cc4)
dK0=ks-dspline5(xi,cc4)/hs
else
r=t
X0=r*(c1+c3*r*r)
dX0=c1+3.*c3*r*r
U0=1.+v2*r*r+v4*r**4
dU0=2.*v2*r+4.*v4*r**3
A0=a2*r*r+a4*r**4
dA0=2.*a2*r+4.*a4*r**3
K0=r+d3*r**3
dK0=1.+3.*d3*r*r
endif
ct1=dK0/K0
ct2=dA0/2.-ct1
ct3=dexp(-A0)
ct4=dexp(2.*A0)
ct5=ct4*(U0/K0)**2
ct6=ct4*X0*U0*U0/(K0*K0)
ct7=ct4*dU0/(alpha*K0*K0)
ct8=ct4*dU0*dU0/(alpha*K0*K0)
ct9=par/dA0
ct10=X0*((X0*X0-1.)+2.*ct5)
ct11=ct4*X0*X0*U0/(K0*K0)
ct12=ct4*(X0*U0/K0)**2
ct13=ct4*X0*U0/(K0*K0)
Xh=y(1)
Uh=y(2)
Lh=y(3)
Gh=y(4)
Qh=y(5)
dXh=y(6)
dUh=y(7)
dLh=y(8)
dGh=par*(dX0*dXh+ct7*dUh)+dA0*dLh/2.+par*(dA0*dX0-ct10/2.)*Xh+
*   par*(ct7*dA0-ct11)*Uh-freq2*ct3*(Lh+Gh)/2.+(dA0*(ct1-3.*
*   dA0/2.))+par*(ct12-ct8)-freq2*ct3)*Qh
dGh=dGh/(ct1-dA0)
dQh=-(dLh+dGh)/2.-par*(dX0*Xh+ct7*Uh)+(3.*dA0/2.-ct1)*Qh
yp(1)=dXh
yp(2)=dUh
yp(3)=dLh
yp(4)=dGh
yp(5)=dQh
yp(6)=-ct1*dXh-dX0*(dGh+dQh)-(freq2*ct3+(1.-3.*X0*X0)/
*   2.-ct5)*Xh+2.*ct13*Uh-2.*ct6*Qh
yp(7)=(ct1-2.*dA0)*dUh-dU0*(dGh-dQh)+2.*alpha*X0*U0*Xh-
*   (freq2*ct3-alpha*X0*X0)*Uh
yp(8)=-ct1*dLh+freq2*ct3*Qh

```

```

return
end

real*8 function spline5(xi,c)
c Algorithm 5.24 from L. Schumaker, Spline Functions: Basic Theory,
c Wiley, 1981.
implicit real*8 (a-h,o-z)
parameter(m=6,f=120)
dimension c(207),cx(m)
l=idint(xi+6.)
xdh=xi-l+m
do 1 j=1,m
1 cx(j)=c(j+l-m)
do 2 j=2,m
do 3 i=m,j,-1
3 cx(i)=(xdh+m-i)*cx(i)+(i-j+1-xdh)*cx(i-1)
2 continue
spline5=cx(m)/f
return
end

real*8 function dspline5(xi,c)
implicit real*8 (a-h,o-z)
dimension c(207)
l=idint(xi+6.)
dspline5=0.
do 1 j=l-5,l
1 dspline5=dspline5+c(j)*d#6(xi-j+6)
return
end

real*8 function d#6(xi)
implicit real*8 (a-h,o-z)
dimension a(7)
data a /1.,-6.,15.,-20.,15.,-6.,1./
j=idint(xi)
d#6=0.
do 1 k=0,j
1 d#6=d#6+a(k+1)*(xi-k)**4
d#6=d#6/24.
return
end

```

5) Programa lambda7:

```

program Lambda7
c Determination of neutral modes of the U(1) string.
c It is assumed that  $\alpha < 1$ ,  $e^{-(a_0/2)}\alpha^{1/2} < \omega < e^{-(a_0/2)}$ .
c The DODE routine is employed.
c Oscillations of the metric components gtt, gthh, gzz, scalar field
c and Atheta.
c COORDINATE CONDITIONS P1=0, beta1=0 (mu1 = gamma1)
c Variables, X,U,Lambda,Gamma,Q. (AUG 19, 1993)
c Amplitudes and phases of normal mode is computed (Nov. 25, 1993).
implicit real*8 (a-h,o-z)

```

```

real*8 KO,kOs,ks,LO
character*64 arq,arq1,arq2
external F
c number of nodes and dependent variables
parameter(Neq=8,iw=100+21*Neq,Nf=6,rmin=2.d-3)
dimension cc1(207),cc2(207),cc3(207),cc4(207),A(Nf,Nf),
* AA(Nf,Nf),y(Neq),work(iw),iwork(5),sol(3,5,2000),Rgt(Nf),
* wks1(Nf),wks2(Nf),slope(3),pr(Nf),gsin(3),gcos(3),
* scon(3),Amps(2,3),Ampc(2,3),ph(2,3),Amp(2,3)
common cc1,cc2,cc3,cc4,c1,v2,a2,d3,v4,c3,a4,hs,freq2,
* alpha,ra,par,kOs,ks,aOs,cOs,pOs,
* bOs,dOs,Ms
pi=4.D0*datan(1.D0)
c input data
open(4,file='lambda7.ins',status='old')
read(4,*) Ntask
do 75 itask=1,Ntask
write(*,*) '>>>>>>>>> TASK #',itask
read(4,*) alpha,eta,freq
read(4,*) rmax,N,rinit,rwr
read(4,*) relerr,abserr
read(4,'(A)') arq
read(4,'(A)') arq1
read(4,'(A)') arq2
c physical parameters
ra=dsqrt(alpha)
par=8.*pi*eta*eta
freq2=freq*freq
c step-size
h=(rmax-rinit)/N
h2=h*h
c input of spline coefficients of the static solution
open(1,file=arq,status='old')
read(1,*) Ms,hs,ks,kOs,aOs
read(1,*) cOs,pOs,bOs,dOs
N5s=Ms+5
do 1 k=1,N5s
1 read(1,*) cc1(k),cc2(k),cc3(k),cc4(k)
close(1,status='keep')
write(*,*) 'Static solution read'
c initial conditions at 'r=0'
c=par/8.
alfa=alpha
v2=(cc2(1)+2.*cc2(2)-6.*cc2(3)+2.*cc2(4)+cc2(5))/(12.*hs*hs)
c1=-(cc1(5)+10.*cc1(4)-10.*cc1(2)-cc1(1))/(24.*hs)
a2=-0.5*(cc3(1)+2.*cc3(2)-6.*cc3(3)+2.*cc3(4)+cc3(5))/(6.*hs*hs)
d3=(1./6.)*(cc4(1)-2.*cc4(2)+2.*cc4(4)-cc4(5))/(2.*hs**3)
v4=(1./24.)*(cc2(1)-4.*cc2(2)+6.*cc2(3)-4.*cc2(4)+cc2(5))/hs**4
c3=(1./6.)*(cc1(1)-2.*cc1(2)+2.*cc1(4)-cc1(5))/(2.*hs**3)
a4=-(1./24.)*(cc3(1)-4.*cc3(2)+6.*cc3(3)-4.*cc3(4)+cc3(5))/hs**4
csq=c*c
c1sq=c1*c1
v2sq=v2*v2
v2cb=v2sq*v2
alfa2=alfa*alfa

```

```

alfa3=alfa2*alfa
alfa4=alfa2*alfa2
freq4=freq2*freq2
do 12 k=1,3
  write(*,*) 'Regular solution #',k
  x1=0.
  u2=0.
  GO=0.
  LO=0.
  if (k .eq. 1) then
c solution #4 in the report
    u2=1.
  elseif (k .eq. 2) then
c solution #1 in the report
    x1=1.
  else
c solution #2 in the report
    GO=1.
    LO=1.
  endif
  X3=(64.*C*C1*V2*U2+96.*C*X1*ALFA*C1SQ+6.*C*X1*ALFA+
. 32.*C*X1*V2SQ+12.*C1*ALFA*U2+C1*ALFA*GO*FREQ2+C1*
. ALFA*LO*FREQ2+12.*X1*V2*ALFA-6.*X1*ALFA*FREQ2-3.*X1
. *ALFA)/(48.*ALFA)
  U4=(-32.*C*C1*X1*V2*ALFA-16.*C*ALFA*U2*C1SQ+6.*C*
. ALFA*U2-480.*C*U2*V2SQ+6.*C1*X1*ALFA2+4.*V2*ALFA*GO
. *FREQ2+4.*V2*ALFA*LO*FREQ2-3.*ALFA*U2*FREQ2)/(24.*
. ALFA)
  G2=(64.*C*V2*U2-ALFA*GO*FREQ2-ALFA*LO*FREQ2)/(4.*
. ALFA)
  G4=(192.*C*C1*X1*V2*ALFA2+16.*C*C1*X1*FREQ2*ALFA2+
. 48.*C*C1*X1*ALFA2-128.*C*V2*ALFA*U2*FREQ2+192.*C*
. ALFA*GO*FREQ2*V2SQ+192.*C*ALFA*LO*FREQ2*V2SQ+96.*C*
. U2*C1SQ*ALFA2-8.*C*GO*FREQ2*C1SQ*ALFA2-8.*C*GO*
. FREQ2*ALFA2-8.*C*LO*FREQ2*C1SQ*ALFA2-8.*C*LO*FREQ2*
. ALFA2+512.*C1*X1*ALFA*CSQ*V2SQ-32.*C1*X1*CSQ*ALFA2+
. 512.*V2*ALFA*U2*CSQ*C1SQ+640.*V2*ALFA*U2*CSQ-14336.*
. V2*U2*CSQ*V2SQ+GO*FREQ4*ALFA2+LO*FREQ4*ALFA2)/(96.*
. ALFA2)
  Q2=(-32.*C*C1*X1*ALFA-128.*C*V2*U2+ALFA*GO*FREQ2+
. ALFA*LO*FREQ2)/(12.*ALFA)
  Q4=(-4608.*C*C1*X1*V2*ALFA2+288.*C*C1*X1*FREQ2*ALFA2
. +288.*C*C1*X1*ALFA2+1728.*C*V2*ALFA*U2*FREQ2-1472.*
. C*ALFA*GO*FREQ2*V2SQ-1472.*C*ALFA*LO*FREQ2*V2SQ-
. 2304.*C*U2*C1SQ*ALFA2+64.*C*GO*FREQ2*C1SQ*ALFA2+36.*
. C*GO*FREQ2*ALFA2+64.*C*LO*FREQ2*C1SQ*ALFA2+36.*C*LO
. *FREQ2*ALFA2-17408.*C1*X1*ALFA*CSQ*V2SQ-11264.*C1*
. X1*CSQ*C1SQ*ALFA2-576.*C1*X1*CSQ*ALFA2-17408.*V2*
. ALFA*U2*CSQ*C1SQ-5760.*V2*ALFA*U2*CSQ+133120.*V2*U2
. *CSQ*V2SQ-9.*GO*FREQ4*ALFA2-9.*LO*FREQ4*ALFA2)/(
. 1440.*ALFA2)
  r=rinit
  y(1)=x1*r+x3*r**3
  y(2)=u2*r+r*u4*r**4
  y(3)=LO+(freq2/16.)*q2*r**4

```

```

y(4)=G0+G2*r*r+G4*r**4
y(5)=q2*r*r+q4*r**4
y(6)=x1+3.*x3*r*r
y(7)=2.*u2*r+4.*u4*r**3
y(8)=(freq2/4.)*q2*r**3
sol(k,1,0+1)=y(1)
sol(k,2,0+1)=y(2)/r
sol(k,3,0+1)=(y(3)+y(4))/2.
sol(k,4,0+1)=(y(4)-y(3))/2.
sol(k,5,0+1)=y(5)
iflag=1
c solution loop
do 3 m=1,N
  rout=rinit+m*h
  call dode(F,Neq,y,r,rout,relerr,abserr,iflag,work,iwork)
  if (iflag .ne. 2) stop
  sol(k,1,m+1)=y(1)
  sol(k,2,m+1)=y(2)/(rinit+m*h)
  sol(k,3,m+1)=(y(3)+y(4))/2.
  sol(k,4,m+1)=(y(4)-y(3))/2.
3  sol(k,5,m+1)=y(5)
  write(*,*) ' Solution loop completed'
12 continue
c removal of exponential divergence in X=sol(k,i,i+1)
do 39 k=2,3
  fctr=sol(k,1,N+1)/sol(1,1,N+1)
  do 40 j=1,5
    do 41 m=1,N+1
41      sol(k,j,m)=sol(k,j,m)-fctr*sol(1,j,m)
40    continue
39  continue
c least squares fit for gamma(i)=sol(x,4,i+1).
do 42 k=2,3
  mmin=rmr/h
  wvn=freq*dexp(-a0s/2.)
  do 2 i=1,Nf
    do 4 j=1,Nf
      A(i,j)=0.
      do 6 m=mmin,N
        r=rinit+m*h
6        A(i,j)=A(i,j)+phi(j,r,wvn)*phi(i,r,wvn)
4      continue
2    continue
    do 8 i=1,Nf
      Rgt(i)=0.
      do 9 m=mmin,N
        r=rinit+m*h
9        Rgt(i)=Rgt(i)+phi(i,r,wvn)*sol(k,4,m+1)
8    continue
  ifail=0
  call F04ATF(A,Nf,Rgt,Nf,pr,AA,Nf,wks1,wks2,ifail)
  write(*,*) ' Least squares fit completed (gamma)'
  gsin(k)=pr(3)
  gcos(k)=pr(4)
  slope(k)=pr(1)

```

```

42 scons(k)=pr(2)
c removal of m0 component
  do 23 k=2,3
    do 24 m=1,N+1
      24 sol(k,4,m)=sol(k,4,m)-scons(k)
    23 continue
    write(*,*) ' Constant component removed'
c construction of regular mode
  write(*,*) ' Removal of linear trend'
  fctr=slope(3)/slope(2)
  gsin(3)=gsin(3)-fctr*gsin(2)
  gcos(3)=gcos(3)-fctr*gcos(2)
  do 14 j=1,5
    do 15 m=1,N+1
      15 sol(3,j,m)=sol(3,j,m)-fctr*sol(2,j,m)
    14 continue
    write(*,*) 'Calculating ampl. & phase of mode '
c amplitude and phase of gammal
  jj=2
  Amps(jj,1)=gsin(jj+1)
  Ampc(jj,1)=gcos(jj+1)
  Amp(jj,1)=dsqrt(Amps(jj,1)**2+Ampc(jj,1)**2)
  ph(jj,1)=-argu(Ampc(jj,1),Amps(jj,1))
c least squares fit of U1/r
  wvn=dsqrt(freq2*dexp(-a0s)-alpha)
  do 26 i=1,Nf
    do 27 j=1,Nf
      A(i,j)=0.
    do 28 m=mmin,N
      r=rinit+m*h
      28 A(i,j)=A(i,j)+phiX(j,r,wvn)*phiX(i,r,wvn)
    27 continue
  26 continue
  do 29 i=1,Nf
    Rgt(i)=0.
    do 30 m=mmin,N
      r=rinit+m*h
      30 Rgt(i)=Rgt(i)+phiX(i,r,wvn)*sol(jj+1,2,m+1)
    29 continue
  ifail=0
  call FO4ATF(A,Nf,Rgt,Nf,pr,AA,Nf,wks1,wks2,ifail)
  Amps(jj,2)=pr(1)
  Ampc(jj,2)=pr(2)
  Amp(jj,2)=dsqrt(Amps(jj,2)**2+Ampc(jj,2)**2)
  ph(jj,2)=-argu(Ampc(jj,2),Amps(jj,2))
c output of amplitudes and phases
  open(1,file=arq2,status='new')
  write(1,105) alpha,eta,freq
  write(1,110) Amp(2,1),Amp(2,2)
  write(1,110) ph(2,1),ph(2,2)
  close(1,status='keep')
105 format(3E14.5)
110 format(2E14.5)
c output of results
  open(1,file=arq1,status='new')

```



```

c columns of output: r,X1,U1/r,Z1,gamma1,Q1
  do 5 m=0,N
    5  write(1,100) m+h+rinit,sol(3,1,m+1),sol(3,2,m+1),
      *      sol(3,3,m+1),sol(3,4,m+1),sol(3,5,m+1)
      close(1,status='keep')
  75 continue
      close(4,status='keep')
100 format(F9.6,5E17.7)
end

```

6) Programa lambda8:

```

program Lambda8
c Determination of neutral modes of the U(1) string.
c It is assumed that  $\alpha > 1$ ,  $e^{-(a_0/2)} < \omega < e^{-(a_0/2)\alpha^{1/2}}$ .
c The DODE routine is employed.
c Oscillations of the metric components gtt, gthh, gzz, scalar field
c and Atheta.
c COORDINATE CONDITIONS P1=0, beta1=0 (mu1 = gamma1)
c Variables, X,U,Lambda,Gamma,Q. (AUG 19, 1993)
c Amplitude and phase of normal mode is computed (Nov. 25, 1993).
  implicit real*8 (a-h,o-z)
  real*8 KO,kOs,ks,LO
  character*64 arq,arq1,arq2
  external F
c number of nodes and dependent variables
  parameter(Neq=8,iw=100+21*Neq,Nf=6,rmin=2.d-3)
  dimension cc1(207),cc2(207),cc3(207),cc4(207),A(Nf,Nf),
  * AA(Nf,Nf),y(Neq),work(iw),iwork(5),sol(3,5,2000),Rgt(Nf),
  * wks1(Nf),wks2(Nf),slope(3),pr(Nf),gsin(3),gcos(3),
  * scon(3),Amps(2,3),Ampc(2,3),ph(2,3),Amp(2,3)
  common cc1,cc2,cc3,cc4,c1,v2,a2,d3,v4,c3,a4,hs,freq2,
  * alpha,ra,par,kOs,ks,aOs,cOs,pOs,
  * bOs,dOs,Is
  pi=4.D0+datan(1.D0)
c input data
  open(4,file='lambda8.ins',status='old')
  read(4,*) Ntask
  do 75 itask=1,Ntask
    write(*,*) '>>>>>>>>> TASK #',itask
    read(4,*) alpha,eta,freq
    read(4,*) rmax,N,rinit,rnr
    read(4,*) relerr,abserr
    read(4, '(A)') arq
    read(4, '(A)') arq1
    read(4, '(A)') arq2
c physical parameters
    ra=dsqrt(alpha)
    par=8.*pi*eta*eta
    freq2=freq*freq
c step-size
    h=(rmax-rinit)/N
    h2=h*h
c input of spline coefficients of the static solution
    open(1,file=arq,status='old')

```

```

read(1,*) #s,hs,ks,kOs,aOs
read(1,*) cOs,pOs,bOs,dOs
#5s=#s+5
do 1 k=1,#5s
  i read(1,*) cc1(k),cc2(k),cc3(k),cc4(k)
  close(1,status='keep')
  write(*,*) 'Static solution read'
c initial conditions at 'r=0'
c=par/8.
alfa=alpha
v2=(cc2(1)+2.*cc2(2)-6.*cc2(3)+2.*cc2(4)+cc2(5))/(12.*hs*hs)
c1=(-(cc1(5)+10.*cc1(4)-10.*cc1(2)-cc1(1)))/(24.*hs)
a2=-0.5*(cc3(1)+2.*cc3(2)-6.*cc3(3)+2.*cc3(4)+cc3(5))/(6.*hs*hs)
d3=(1./6.)*(cc4(1)-2.*cc4(2)+2.*cc4(4)-cc4(5))/(2.*hs**3)
v4=(1./24.)*(cc2(1)-4.*cc2(2)+6.*cc2(3)-4.*cc2(4)+cc2(5))/hs**4
c3=(1./6.)*(cc1(1)-2.*cc1(2)+2.*cc1(4)-cc1(5))/(2.*hs**3)
a4=(-(1./24.)*(cc3(1)-4.*cc3(2)+6.*cc3(3)-4.*cc3(4)+cc3(5))/hs**4
csq=c*c
cisq=c1*c1
v2sq=v2*v2
v2cb=v2sq*v2
alfa2=alfa*alfa
alfa3=alfa2*alfa
alfa4=alfa2*alfa2
freq4=freq2*freq2
do 12 k=1,3
  write(*,*) 'Regular solution #',k
  x1=0.
  u2=0.
  GO=0.
  LO=0.
  if (k .eq. 1) then
c solution #4 in the report
    u2=1.
  elseif (k .eq. 2) then
c solution #1 in the report
    xi=1.
  else
c solution #2 in the report
    GO=1.
    LO=i.
  endif
  X3=(64.*C*C1*V2*U2+96.*C*X1*ALFA*C1SQ+6.*C*X1*ALFA+
. 32.*C*X1*V2SQ+12.*C1*ALFA*U2+C1*ALFA*GO*FREQ2+C1*
. ALFA*LO*FREQ2+12.*X1*V2*ALFA-6.*X1*ALFA*FREQ2-3.*X1
. *ALFA)/(48.*ALFA)
  U4=(-32.*C*C1*X1*V2*ALFA-16.*C*ALFA*U2*C1SQ+6.*C*
. ALFA*U2-480.*C*U2*V2SQ+6.*C1*X1*ALFA2+4.*V2*ALFA*GO
. *FREQ2+4.*V2*ALFA*LO*FREQ2-3.*ALFA*U2*FREQ2)/(24.*
. ALFA)
  G2=(64.*C*V2*U2-ALFA*GO*FREQ2-ALFA*LO*FREQ2)/(4.*
. ALFA)
  G4=(192.*C*C1*X1*V2*ALFA2+16.*C*C1*X1*FREQ2*ALFA2+
. 48.*C*C1*X1*ALFA2-128.*C*V2*ALFA*U2*FREQ2+192.*C*
. ALFA*GO*FREQ2*V2SQ+192.*C*ALFA*LO*FREQ2*V2SQ+96.*C*

```

```

. U2*C1SQ*ALFA2-8.*C*GO*FREQ2*C1SQ*ALFA2-8.*C*GO*
. FREQ2*ALFA2-8.*C*LO*FREQ2*C1SQ*ALFA2-8.*C*LO*FREQ2*
. ALFA2+512.*C1*X1*ALFA*CSQ*V2SQ-32.*C1*X1*CSQ*ALFA2+
. 512.*V2*ALFA*U2*CSQ*C1SQ+640.*V2*ALFA*U2*CSQ-14336.*
. V2*U2*CSQ*V2SQ+GO*FREQ4*ALFA2+LO*FREQ4*ALFA2)/(96.*
. ALFA2)
Q2=(-32.*C*C1*X1*ALFA-128.*C*V2*U2+ALFA*GO*FREQ2+
. ALFA*LO*FREQ2)/(12.*ALFA)
Q4=(-4608.*C*C1*X1*V2*ALFA2+288.*C*C1*X1*FREQ2*ALFA2
. +288.*C*C1*X1*ALFA2+1728.*C*V2*ALFA*U2*FREQ2-1472.*
. C*ALFA*GO*FREQ2*V2SQ-1472.*C*ALFA*LO*FREQ2*V2SQ-
. 2304.*C*U2*C1SQ*ALFA2+64.*C*GO*FREQ2*C1SQ*ALFA2+36.*
. C*GO*FREQ2*ALFA2+64.*C*LO*FREQ2*C1SQ*ALFA2+36.*C*LO
. *FREQ2*ALFA2-17408.*C1*X1*ALFA*CSQ*V2SQ-11264.*C1*
. X1*CSQ*C1SQ*ALFA2-576.*C1*X1*CSQ*ALFA2-17408.*V2*
. ALFA*U2*CSQ*C1SQ-5760.*V2*ALFA*U2*CSQ+133120.*V2*U2
. *CSQ*V2SQ-9.*GO*FREQ4*ALFA2-9.*LO*FREQ4*ALFA2)/(
. 1440.*ALFA2)
r=rinit
y(1)=x1*r+x3*r**3
y(2)=u2*r+r+u4*r**4
y(3)=LO+(freq2/16.)*q2*r**4
y(4)=GO+G2*r+r+G4*r**4
y(5)=q2*r+r+q4*r**4
y(6)=x1+3.*x3*r*r
y(7)=2.*u2*r+4.*u4*r**3
y(8)=(freq2/4.)*q2*r**3
sol(k,1,0+1)=y(1)
sol(k,2,0+1)=y(2)/r
sol(k,3,0+1)=(y(3)+y(4))/2.
sol(k,4,0+1)=(y(4)-y(3))/2.
sol(k,5,0+1)=y(5)
iflag=1
c solution loop
do 3 m=1,N
  rout=rinit+m*h
  call dode(F,Neq,y,r,rout,relerr,abserr,iflag,work,iwork)
  if (iflag .ne. 2) stop
  sol(k,1,m+1)=y(1)
  sol(k,2,m+1)=y(2)/(rinit+m*h)
  sol(k,3,m+1)=(y(3)+y(4))/2.
  sol(k,4,m+1)=(y(4)-y(3))/2.
  3   sol(k,5,m+1)=y(5)
  write(*,*) ' Solution loop completed'
12 continue
c removal of exponential divergence in U/r=sol(k,2,i+1)
do 39 k=2,3
  fctr=sol(k,2,N+1)/sol(1,2,N+1)
  do 40 j=1,5
    do 41 m=1,N+1
      41   sol(k,j,m)=sol(k,j,m)-fctr*sol(1,j,m)
  40   continue
  39   continue
c least squares fit for gamma(i)=sol(k,4,i+1).
do 42 k=2,3

```

```

      mmin=rnr/h
      wvn=freq*dexp(-a0s/2.)
      do 2 i=1,Nf
        do 4 j=1,Nf
          A(i,j)=0.
          do 6 m=mmin,N
            r=rinit+m*h
6           A(i,j)=A(i,j)+phi(j,r,wvn)*phi(i,r,wvn)
4          continue
2          continue
      do 8 i=1,Nf
        Rgt(i)=0.
        do 9 m=mmin,N
          r=rinit+m*h
9           Rgt(i)=Rgt(i)+phi(i,r,wvn)*sol(k,4,m+1)
8          continue
      ifail=0
      call FO4ATF(A,Nf,Rgt,Nf,pr,AA,Nf,wks1,wks2,ifail)
      write(*,*) ' Least squares fit completed (gamma)'
      gsin(k)=pr(3)
      gcos(k)=pr(4)
      slope(k)=pr(1)
42      scon(k)=pr(2)
c removal of m0 component
      do 23 k=2,3
        do 24 m=1,N+1
24         sol(k,4,m)=sol(k,4,m)-scon(k)
23        continue
        write(*,*) ' Constant component removed'
c construction of regular mode
      write(*,*) ' Removal of linear trend'
      fctr=slope(3)/slope(2)
      gsin(3)=gsin(3)-fctr*gsin(2)
      gcos(3)=gcos(3)-fctr*gcos(2)
      do 14 j=1,5
        do 15 m=1,N+1
15         sol(3,j,m)=sol(3,j,m)-fctr*sol(2,j,m)
14        continue
        write(*,*) 'Calculating ampl. & phase of mode '
c amplitude and phase of gamma1
      jj=2
      Amps(jj,1)=gsin(jj+1)
      Ampc(jj,1)=gcos(jj+1)
      Amp(jj,1)=dsqrt(Amps(jj,1)**2+Ampc(jj,1)**2)
      ph(jj,1)=-argu(Ampc(jj,1),Amps(jj,1))
c least squares fit of X
      wvn=dsqrt(freq2*dexp(-a0s)-1.)
      do 26 i=1,Nf
        do 27 j=1,Nf
          A(i,j)=0.
          do 28 m=mmin,N
            r=rinit+m*h
28         A(i,j)=A(i,j)+phiX(j,r,wvn)*phiX(i,r,wvn)
27        continue
26        continue

```

```

do 29 i=1,Nf
  Rgt(i)=0.
  do 30 m=1,min,N
    r=rinit+m*h
30    Rgt(i)=Rgt(i)+phiX(i,r,wvn)*sol(jj+1,1,m+1)
29  continue
  ifail=0
  call FO4ATF(A,Nf,Rgt,Wf,pr,AA,Wf,wks1,wks2,ifail)
  Amps(jj,3)=pr(1)
  Ampc(jj,3)=pr(2)
  Amp(jj,3)=dsqrt(Amps(jj,3)**2+Ampc(jj,3)**2)
  ph(jj,3)=-argu(Ampc(jj,3),Amps(jj,3))
c output of amplitudes and phases
  open(1,file=arq2,status='new')
  write(1,105) alpha,eta,freq
  write(1,110) Amp(2,1),Amp(2,3)
  write(1,110) ph(2,1),ph(2,3)
  close(1,status='keep')
105 format(3E14.5)
110 format(2E14.5)
c output of results
  open(1,file=arq1,status='new')
c columns of output: r,X1,U1/r,Z1,gamma1,Q1
  do 5 m=0,N
    5  write(1,100) m*h+rinit,sol(3,1,m+1),sol(3,2,m+1),
      *      sol(3,3,m+1),sol(3,4,m+1),sol(3,5,m+1)
      close(1,status='keep')
75  continue
      close(4,status='keep')
100 format(F9.6,5E17.7)
end

```

7) Programa lambda9:

```

program Lambda9
c Search for isolated neutral modes of the U(1) string.
c It is assumed that  $\omega < e^{-(a_0/2)} \min\{\alpha^{-(1/2)}, 1\}$ .
c The DODE routine is employed.
c Oscillations of the metric components gtt, gthh, gzz, scalar field
c and Atheta.
c COORDINATE CONDITIONS P1=0, beta1=0 (mu1 = gamma1)
c Variables, X,U,Lambda,Gamma,Q. (AUG 19, 1993)
c (Nov. 25, 1993).
  implicit real*8 (a-h,o-z)
  real*8 KO,kOs,ks,LO
  character*64 arq,arq1,arq2
  external F
c number of nodes and dependent variables
  parameter(Neq=8,iw=100+21*Neq,Nf=6,rmin=2.d-3)
  dimension cc1(207),cc2(207),cc3(207),cc4(207),A(Nf,Nf),
  * AA(Nf,Nf),y(Neq),work(iw),iwork(5),sol(3,5,2000),Rgt(Nf),
  * wks1(Nf),wks2(Nf),slope(3),pr(Nf),gsin(3),gcos(3),
  * scon(3),Amps(2,3),Ampc(2,3),ph(2,3),Amp(2,3)
  common cc1,cc2,cc3,cc4,c1,v2,a2,d3,v4,c3,a4,hs,freq2,
  * alpha,ra,par,kOs,ks,aOs,cOs,pOs,

```

```

*      b0s,d0s,ns
pi=4.DO*datan(1.DO)
c input data
  open(4,file='lambda9.ins',status='old')
  read(4,*) ntask
  do 75 itask=1,ntask
  write(*,*) '>>>>>>>>> TASK #',itask
  read(4,*) alpha,eta,freq
  read(4,*) rmax,n,rinit,rwr
  read(4,*) relerr,abserr
  read(4,'(A)') arq
  read(4,'(A)') arq1
  read(4,'(A)') arq2
c physical parameters
  ra=dsqrt(alpha)
  par=8.*pi*eta*eta
  freq2=freq*freq
c step-size
  h=(rmax-rinit)/n
  h2=h*h
c input of spline coefficients of the static solution
  open(1,file=arq,status='old')
  read(1,*) ns,hs,ks,k0s,a0s
  read(1,*) c0s,p0s,b0s,d0s
  ns=ns+5
  do 1 k=1,ns
  1  read(1,*) cc1(k),cc2(k),cc3(k),cc4(k)
  close(1,status='keep')
  write(*,*) 'Static solution read'
c initial conditions at 'r=0'
  c=par/8.
  alfa=alpha
  v2=(cc2(1)+2.*cc2(2)-6.*cc2(3)+2.*cc2(4)+cc2(5))/(12.*hs*hs)
  c1=(cc1(5)+10.*cc1(4)-10.*cc1(2)-cc1(1))/(24.*hs)
  a2=-0.5*(cc3(1)+2.*cc3(2)-6.*cc3(3)+2.*cc3(4)+cc3(5))/(6.*hs*hs)
  d3=(1./6.)*(cc4(1)-2.*cc4(2)+2.*cc4(4)-cc4(5))/(2.*hs**3)
  v4=(1./24.)*(cc2(1)-4.*cc2(2)+6.*cc2(3)-4.*cc2(4)+cc2(5))/hs**4
  c3=(1./6.)*(cc1(1)-2.*cc1(2)+2.*cc1(4)-cc1(5))/(2.*hs**3)
  a4=- (1./24.)*(cc3(1)-4.*cc3(2)+6.*cc3(3)-4.*cc3(4)+cc3(5))/hs**4
  csq=c*c
  c1sq=c1*c1
  v2sq=v2*v2
  v2cb=v2sq*v2
  alfa2=alfa*alfa
  alfa3=alfa2*alfa
  alfa4=alfa2*alfa2
  freq4=freq2*freq2
  do 12 k=1,3
  write(*,*) 'Regular solution #',k
  x1=0.
  u2=0.
  G0=0.
  L0=0.
  if (k .eq. 1) then
c solution #4 in the report

```

```

      u2=1.
      elseif (k .eq. 2) then
c solution #1 in the report
        x1=1.
      else
c solution #2 in the report
        GO=1.
        LO=1.
      endif
      X3=(64.*C*C1*V2*U2+96.*C*X1*ALFA+C1SQ+6.*C*X1*ALFA+
. 32.*C*X1*V2SQ+12.*C1*ALFA*U2+C1*ALFA*GO*FREQ2+C1*
. ALFA*LO*FREQ2+12.*X1*V2*ALFA-6.*X1*ALFA*FREQ2-3.*X1
. *ALFA)/(48.*ALFA)
      U4=(-32.*C*C1*X1*V2*ALFA-16.*C*ALFA*U2*C1SQ+6.*C*
. ALFA*U2-480.*C*U2*V2SQ+6.*C1*X1*ALFA2+4.*V2*ALFA*GO
. *FREQ2+4.*V2*ALFA*LO*FREQ2-3.*ALFA*U2*FREQ2)/(24.*
. ALFA)
      G2=(64.*C*V2*U2-ALFA*GO*FREQ2-ALFA*LO*FREQ2)/(4.*
. ALFA)
      G4=(192.*C*C1*X1*V2*ALFA2+16.*C*C1*X1*FREQ2*ALFA2+
. 48.*C*C1*X1*ALFA2-128.*C*V2*ALFA*U2*FREQ2+192.*C*
. ALFA*GO*FREQ2*V2SQ+192.*C*ALFA*LO*FREQ2*V2SQ+96.*C*
. U2*C1SQ*ALFA2-8.*C*GO*FREQ2*C1SQ*ALFA2-8.*C*GO*
. FREQ2*ALFA2-8.*C*LO*FREQ2*C1SQ*ALFA2-8.*C*LO*FREQ2*
. ALFA2+512.*C1*X1*ALFA*CSQ*V2SQ-32.*C1*X1*CSQ*ALFA2+
. 512.*V2*ALFA*U2*CSQ*C1SQ+640.*V2*ALFA*U2*CSQ-14336.*
. V2*U2*CSQ*V2SQ+GO*FREQ4*ALFA2+LO*FREQ4*ALFA2)/(96.*
. ALFA2)
      Q2=(-32.*C*C1*X1*ALFA-128.*C*V2*U2+ALFA*GO*FREQ2+
. ALFA*LO*FREQ2)/(12.*ALFA)
      Q4=(-4608.*C*C1*X1*V2*ALFA2+288.*C*C1*X1*FREQ2*ALFA2
. +288.*C*C1*X1*ALFA2+1728.*C*V2*ALFA*U2*FREQ2-1472.*
. C*ALFA*GO*FREQ2*V2SQ-1472.*C*ALFA*LO*FREQ2*V2SQ-
. 2304.*C*U2*C1SQ*ALFA2+64.*C*GO*FREQ2*C1SQ*ALFA2+36.*
. C*GO*FREQ2*ALFA2+64.*C*LO*FREQ2*C1SQ*ALFA2+36.*C*LO
. *FREQ2*ALFA2-17408.*C1*X1*ALFA*CSQ*V2SQ-11264.*C1*
. X1*CSQ*C1SQ*ALFA2-576.*C1*X1*CSQ*ALFA2-17408.*V2*
. ALFA*U2*CSQ*C1SQ-5760.*V2*ALFA*U2*CSQ+133120.*V2*U2
. *CSQ*V2SQ-9.*GO*FREQ4*ALFA2-9.*LO*FREQ4*ALFA2)/(
. 1440.*ALFA2)
      r=rinit
      y(1)=x1*r+x3*r**3
      y(2)=u2*r+r+u4*r**4
      y(3)=LO+(freq2/16.)*q2*r**4
      y(4)=GO+G2*r+r+G4*r**4
      y(5)=q2*r+r+q4*r**4
      y(6)=x1+3.*x3*r*r
      y(7)=2.*u2*r+4.*u4*r**3
      y(8)=(freq2/4.)*q2*r**3
      sol(k,1,0+1)=y(1)
      sol(k,2,0+1)=y(2)/r
      sol(k,3,0+1)=(y(3)+y(4))/2.
      sol(k,4,0+1)=(y(4)-y(3))/2.
      sol(k,5,0+1)=y(5)
      iflag=i

```

```

c solution loop
  do 3 m=1,N
    rout=rinit+m*h
    call dode(F,Req,y,r,rout,relerr,abserr,iflag,work,iwork)
    if (iflag .ne. 2) stop
    sol(k,1,m+1)=y(1)
    sol(k,2,m+1)=y(2)/(rinit+m*h)
    sol(k,3,m+1)=(y(3)+y(4))/2.
    sol(k,4,m+1)=(y(4)-y(3))/2.
  3   sol(k,5,m+1)=y(5)
    write(*,*) ' Solution loop completed'
  12 continue
c removal of exponential divergence in X=sol(k,1,i+1)
  do 39 k=2,3
    fctr=sol(k,1,N+1)/sol(1,1,N+1)
    do 40 j=1,5
      do 41 m=1,N+1
  41   sol(k,j,m)=sol(k,j,m)-fctr*sol(1,j,m)
  40   continue
  39   continue
c removal of exponential divergence in U/r=sol(k,2,i+1)
  k=3
  fctr=sol(k,2,N+1)/sol(2,2,N+1)
  do 42 j=1,5
    do 43 m=1,N+1
  43   sol(k,j,m)=sol(k,j,m)-fctr*sol(2,j,m)
  42   continue
c least squares fit for gamma(i)=sol(3,4,i+1).
  k=3
  mmin=rnr/h
  wvn=freq*dexp(-a0s/2.)
  do 2 i=1,Nf
    do 4 j=1,Nf
      A(i,j)=0.
      do 6 m=mmin,N
        r=rinit+m*h
  6   A(i,j)=A(i,j)+phi(j,r,wvn)*phi(i,r,wvn)
  4   continue
  2   continue
    do 8 i=1,Nf
      Rgt(i)=0.
      do 9 m=mmin,N
        r=rinit+m*h
  9   Rgt(i)=Rgt(i)+phi(i,r,wvn)*sol(k,4,m+1)
  8   continue
    ifail=0
    call FO4ATF(A,Nf,Rgt,Nf,pr,AA,Nf,wks1,wks2,ifail)
    write(*,*) ' Least squares fit completed (gamma)'
    gsin(k)=pr(3)
    gcos(k)=pr(4)
    slope(k)=pr(1)
    sconsk(k)=pr(2)
c removal of m0 component
  do 23 k=2,3
    do 24 m=1,N+1

```



```

24   sol(k,4,m)=sol(k,4,m)-scons(k)
23 continue
   write(*,*) ' Constant component removed'
c output of amplitudes and phases
   open(1,file=arq2,status='new')
   write(1,105) alpha,eta,freq
   write(1,110) slope(3)
   close(1,status='keep')
105 format(3E14.5)
110 format(E14.5)
c output of results
   open(1,file=arq1,status='new')
c columns of output: r,X1,U1/r,Z1,gamma1,Q1
   do 5 m=0,N
     5   write(1,100) m+h+rinit,sol(3,1,m+1),sol(3,2,m+1),
       *       sol(3,3,m+1),sol(3,4,m+1),sol(3,5,m+1)
       close(1,status='keep')
75 continue
   close(4,status='keep')
100 format(F9.6,5E17.7)
end

```

8) Programa lambda10:

```

program Lambda10
c Determination of neutral modes of the U(1) string.
c It is assumed that  $\omega > e^{-a_0/2} \alpha^{1/2}$ .
c The DDDE routine is employed.
c Oscillations of the Az, gthetaz block.
c Amplitudes and modes of normal modes are computed (Nov. 26, 1993)
   implicit real*8 (a-h,o-z)
   real*8 k0s,ks
   character*64 arq,arq1,arq2
   external F
c number of nodes and dependent variables
   parameter(Neq=4,iv=100+21*Neq,rmin=2.d-3,Nf=4)
   dimension cc1(207),cc2(207),cc3(207),cc4(207),arq1(2),A(Nf,Nf),
 * AA(Nf,Nf),y(Neq),work(iv),iwork(5),sol(2,2,3000),Rgt(Nf),
 * wks1(Nf),wks2(Nf),pr(Nf),Amps(2,2),Ampc(2,2),Amp(2,2),ph(2,2)
   common cc1,cc2,cc3,cc4,c1,v2,a2,d3,v4,c3,a4,
 *       hs,freq2,alpha,ra,par,k0s,ks,a0s,c0s,p0s,
 *       b0s,d0s,Ns
   pi=4.D0*datan(1.D0)
c input data
   open(4,file='lambda10.ins',status='old')
   read(4,*) Ntask
   do 75 itask=1,Ntask
     write(*,*) '>>>>>> TASK #',itask
     read(4,*) alpha,eta,freq
     read(4,*) rmax,N,rinit,rmr
     read(4,*) relerr,abserr
     read(4,'(A)') arq
     do 20 k=1,2
       read(4,'(A)') arq1(k)
       read(4,'(A)') arq2

```

```

c physical parameters
ra=dsqrt(alpha)
par=8.*pi*eta*eta
freq2=freq*freq
c step-size
h=(rmax-rinit)/N
h2=h*h
c input of spline coefficients of the static solution
open(1,file=arq,status='old')
read(1,*) Ns,hs,ks,kOs,aOs
read(1,*) cOs,pOs,bOs,dOs
Ns=Ns+5
do 1 k=1,Ns
  i read(1,*) cc1(k),cc2(k),cc3(k),cc4(k)
  close(1,status='keep')
c initial conditions at 'r=0'
c=par/8.
alfa=alpha
v2=(cc2(1)+2.*cc2(2)-6.*cc2(3)+2.*cc2(4)+cc2(5))/(12.*hs*hs)
c1=(-cc1(5)+10.*cc1(4)-10.*cc1(2)-cc1(1))/(24.*hs)
a2=-0.5*(cc3(1)+2.*cc3(2)-6.*cc3(3)+2.*cc3(4)+cc3(5))/(6.*hs*hs)
d3=(1./6.)*(cc4(1)-2.*cc4(2)+2.*cc4(4)-cc4(5))/(2.*hs**3)
v4=(1./24.)*(cc2(1)-4.*cc2(2)+6.*cc2(3)-4.*cc2(4)+cc2(5))/hs**4
c3=(1./6.)*(cc1(1)-2.*cc1(2)+2.*cc1(4)-cc1(5))/(2.*hs**3)
a4=(-(1./24.)*(cc3(1)-4.*cc3(2)+6.*cc3(3)-4.*cc3(4)+cc3(5))/hs**4
csq=c*c
c1sq=c1*c1
v2sq=v2*v2
v2cb=v2sq*v2
alfa2=alfa*alfa
alfa3=alfa2*alfa
alfa4=alfa2*alfa2
freq4=freq2*freq2
do 2 k=1,2
  write(*,*) 'Regular solution #',k
  iflag=1
  if (k .eq. 1) then
c mode with W(0) = 1
    w0=1.
    o2=0.
  else
c mode with Omega(0) = (1/2)r^-2 + ...
    w0=0.
    o2=0.5
  endif
  w2=(4.*v2*o2-w0*freq2)/4.
  w4=(-192.*c*v2*alfa*w0*c1sq+64.*c*v2*alfa*o2*c1sq+
. 48.*c*v2*alfa*o2-1280.*c*v2*o2*v2sq-16.*c*alfa*w0*
. freq2*c1sq-6.*c*alfa*w0*freq2+224.*c*w0*freq2*v2sq-
. 24.*v2*alfa*o2*freq2+3.*alfa*w0*freq2**2+12.*w0*c1sq
. *alfa2+12.*o2*c1sq*alfa2)/(192.*alfa)
  o4=(48.*c*v2*w0*freq2-48.*c*alfa*w0*c1sq-16.*c*alfa
. *o2*c1sq+12.*c*alfa*o2-448.*c*o2*v2sq-3.*alfa*o2*
. freq2)/(24.*alfa)
  r=rinit

```

```

y(1)=w0+w2*r+r+w4*r**4
y(2)=02*r+r+04*r**4
y(3)=2.*w2+r+4.*w4*r**3
y(4)=2.*02*r+4.*04*r**3
sol(k,1,1)=y(1)
sol(k,2,1)=y(2)/r
c solution loop
do 3 m=1,N
  rout=m*h+rinit
  call dode(F,Neq,y,r,rout,relerr,abserr,iflag,work,iwork)
  if (iflag .ne. 2) stop
  sol(k,1,m+1)=y(1)
3  sol(k,2,m+1)=y(2)/(m*h+rinit)
  write (*,*) ' Solution loop completed'
2 continue
do 25 jj=1,2
  write(*,*) 'Calculating ampl. & phase of mode ',jj
c least squares fit of W=sol(jj,1,m+1)
wvn=dsqrt(freq2*dexp(-a0s)-alpha)
do 26 i=1,Nf
  do 27 j=1,Nf
    A(i,j)=0.
    do 28 m=mmin,N
      r=rinit+m*h
28  A(i,j)=A(i,j)+phiX(j,r,wvn)*phiX(i,r,wvn)
27  continue
26  continue
do 29 i=1,Nf
  Rgt(i)=0.
  do 30 m=mmin,N
    r=rinit+m*h
30  Rgt(i)=Rgt(i)+phiX(i,r,wvn)*sol(jj,1,m+1)
29  continue
ifail=0
call F04ATF(A,Nf,Rgt,Nf,pr,AA,Nf,wks1,wks2,ifail)
Amps(jj,1)=pr(1)
Ampc(jj,1)=pr(2)
Amp(jj,1)=dsqrt(Amps(jj,1)**2+Ampc(jj,1)**2)
ph(jj,1)=-argu(Ampc(jj,1),Amps(jj,1))
c least squares fit of Omega/r=sol(jj,2,m+1)
wvn=freq*dexp(-a0s/2.)
do 31 i=1,Nf
  do 32 j=1,Nf
    A(i,j)=0.
    do 33 m=mmin,N
      r=rinit+m*h
33  A(i,j)=A(i,j)+phiX(j,r,wvn)*phiX(i,r,wvn)
32  continue
31  continue
do 34 i=1,Nf
  Rgt(i)=0.
  do 35 m=mmin,N
    r=rinit+m*h
35  Rgt(i)=Rgt(i)+phiX(i,r,wvn)*sol(jj,2,m+1)
34  continue

```

```

    ifail=0
    call F04ATF(A, Nf, Rgt, Nf, pr, AA, Nf, wks1, wks2, ifail)
    Amps(jj,2)=pr(1)
    Ampc(jj,2)=pr(2)
    Amp(jj,2)=dsqrt(Amps(jj,2)**2+Ampc(jj,2)**2)
    ph(jj,2)=-argu(Ampc(jj,2),Amps(jj,2))
25 continue
c output of amplitudes and phases
open(1,file=arq2,status='new')
write(1,i05) alpha, eta, freq
write(1,110) Amp(1,1), Amp(2,1), Amp(1,2), Amp(2,2)
write(1,110) ph(1,1), ph(2,1), ph(1,2), ph(2,2)
close(1,status='keep')
105 format(3E12.5)
110 format(4E12.5)
c output of results
do 21 k=1,2
21 open(k,file=arq1(k),status='new')
do 4 k=1,2
do 5 m=0, N
5 write(k,100) m+h+rinit,sol(k,1,m+1),sol(k,2,m+1)
4 continue
close(1,status='keep')
close(2,status='keep')
100 format(F9.6,2E17.7)
75 continue
close(4,status='keep')
end

subroutine F(t,y,yp)
implicit real*8 (a-h,o-z)
real*8 K0,k0s,ks
parameter(Neq=4,rmin=2.d-3)
dimension cc1(207),cc2(207),cc3(207),cc4(207),
* y(Neq),yp(Neq)
common cc1,cc2,cc3,cc4,c1,v2,a2,d3,v4,c3,a4,
* hs,freq2,alpha,ra,par,k0s,ks,a0s,c0s,p0s,
* b0s,d0s,Ns
c computation of coefficients in perturbation equations
xi=t/hs
if (xi .gt. Ns) then
ct1=dsqrt(t)
ct2=dexp(-ra*t)
ct3=ct2*ct2
ct4=(p0s/ks)**2*(dexp(2.*a0s)/t)*ct3
X0=1.-c0s*dexp(-t)/ct1
dX0=c0s*dexp(-t)/ct1
U0=p0s*ct1*ct2
dU0=-ra*U0
A0=a0s+b0s*ct3/t
dA0=-2.*ra*b0s*ct3/t
K0=ks*t+k0s-d0s*ct3
dK0=ks+2.*ra*d0s*ct3
elseif (t .gt. rmin) then
X0=1.-spline5(xi,cc1)

```

```

dKO=-dspline5(xi,cc1)/hs
UO=spline5(xi,cc2)
dUO=dspline5(xi,cc2)/hs
AO=a0s-spline5(xi,cc3)
dAO=-dspline5(xi,cc3)/hs
KO=ks*t+k0s-spline5(xi,cc4)
dKO=ks-dspline5(xi,cc4)/hs
else
r=t
XO=r*(c1+c3*r*r)
dXO=c1+3.*c3*r*r
UO=1.+v2*r*r+v4*r**4
dUO=2.*v2*r+4.*v4*r**3
AO=a2*r*r+a4*r**4
dAO=2.*a2*r+4.*a4*r**3
KO=r+d3*r**3
dKO=1.+3.*d3*r*r
endif
ct1=dKO/KO
ct2=dAO/2.-ct1
ct3=dexp(-AO)
ct4=dexp(2.*AO)
ct5=ct4*(UO/KO)**2
ct6=ct4*XO*UO*UO/(KO*KO)
ct7=dexp(3.*AO)*dUO/(KO*KO)
ct8=par+ct4*dUO*dUO/(alpha*KO*KO)
ct10=XO*((XO*XO-1.)+2.*ct5)
Wh=y(1)
Omh=y(2)
dWh=y(3)
dOmh=y(4)
yp(1)=dWh
yp(2)=dOmh
yp(3)=(dAO-ct1)*dWh+ct7*dOmh+alpha*XO*XO*Wh-
*   freq2*ct3*Wh
yp(4)=(ct1-3.*dAO)*dOmh-2.*par*ct3*(dUO*dWh/alpha+
*   XO**2*UO*Wh)-freq2*ct3*Omh
return
end

```

9) Programa lambda11:

```

program Lambda11
c Determination of neutral modes of the U(1) string.
c It is assumed that  $\omega < e^{-(a_0/2)} \alpha^{1/2}$ .
c The DDDE routine is employed.
c Oscillations of the Az, gthetaz block.
c Amplitude and phase of normal mode are computed (Nov. 26, 1993)
implicit real*8 (a-h,o-z)
real*8 k0s,ks
character*64 arq,arq1,arq2
external F
c number of nodes and dependent variables
parameter(Neq=4, iw=100+21*Neq, rmin=2.d-3, Nf=4)
dimension cc1(207),cc2(207),cc3(207),cc4(207),A(Nf,Nf),

```

```

* AA(Nf,Nf),y(Neq),work(iw),iwork(5),sol(2,2,3000),Rgt(Nf),
* wks1(Nf),wks2(Nf),pr(Nf),Amps(2,2),Ampc(2,2),Amp(2,2),ph(2,2)
common cc1,cc2,cc3,cc4,c1,v2,a2,d3,v4,c3,a4,
*   hs,freq2,alpha,ra,par,k0s,ks,a0s,c0s,p0s,
*   b0s,d0s,Ns
pi=4.D0*datan(1.D0)
c input data
open(4,file='lambdall.ins',status='old')
read(4,*) Ntask
do 75 itask=1,Ntask
write(*,*) '>>>>>> TASK #',itask
read(4,*) alpha,eta,freq
read(4,*) rmax,N,rinit,rmr
read(4,*) rolerr,abserr
read(4, '(A)') arq
read(4, '(A)') arq1
read(4, '(A)') arq2
c physical parameters
ra=dsqrt(alpha)
par=8.*pi*eta*eta
freq2=freq*freq
c step-size
h=(rmax-rinit)/N
h2=h*h
c input of spline coefficients of the static solution
open(1,file=arq,status='old')
read(1,*) Ns,hs,ks,k0s,a0s
read(1,*) c0s,p0s,b0s,d0s
N5s=Ns+5
do 1 k=1,N5s
1 read(1,*) cc1(k),cc2(k),cc3(k),cc4(k)
close(1,status='keep')
c initial conditions at 'r=0'
c=par/8.
alfa=alpha
v2=(cc2(1)+2.*cc2(2)-6.*cc2(3)+2.*cc2(4)+cc2(5))/(12.*hs*hs)
c1=-(cc1(5)+10.*cc1(4)-10.*cc1(2)-cc1(1))/(24.*hs)
a2=-0.5*(cc3(1)+2.*cc3(2)-6.*cc3(3)+2.*cc3(4)+cc3(5))/(6.*hs*hs)
d3=(1./6.)*(cc4(1)-2.*cc4(2)+2.*cc4(4)-cc4(5))/(2.*hs**3)
v4=(1./24.)*(cc2(1)-4.*cc2(2)+6.*cc2(3)-4.*cc2(4)+cc2(5))/hs**4
c3=(1./6.)*(cc1(1)-2.*cc1(2)+2.*cc1(4)-cc1(5))/(2.*hs**3)
a4=-(1./24.)*(cc3(1)-4.*cc3(2)+6.*cc3(3)-4.*cc3(4)+cc3(5))/hs**4
csq=c*c
c1sq=c1*c1
v2sq=v2*v2
v2cb=v2sq*v2
alfa2=alfa*alfa
alfa3=alfa2*alfa
alfa4=alfa2*alfa2
freq4=freq2*freq2
do 2 k=1,2
write(*,*) 'Regular solution #',k
iflag=1
if (k .eq. 1) then
c mode with W(0) = 1

```

```

w0=1.
02=0.
else
c mode with Omega(0) = r^2 + ...
w0=0.
02=0.5
endif
w2=(4.*V2+02-W0*FREQ2)/4.
w4=(-192.*C*V2*ALFA*W0*C1SQ+64.*C*V2*ALFA*02*C1SQ+
.48.*C*V2*ALFA*02-1280.*C*V2*02*V2SQ-16.*C*ALFA*W0*
.FREQ2*C1SQ-6.*C*ALFA*W0*FREQ2+224.*C*W0*FREQ2*V2SQ-
.24.*V2*ALFA*02*FREQ2+3.*ALFA*W0*FREQ2**2+12.*W0*C1SQ
.*ALFA2+12.*02*C1SQ*ALFA2)/(192.*ALFA)
04=(48.*C*V2*W0*FREQ2-48.*C*ALFA*W0*C1SQ-16.*C*ALFA
.*02*C1SQ+12.*C*ALFA*02-448.*C*02*V2SQ-3.*ALFA*02*
.FREQ2)/(24.*ALFA)
r=rinit
y(1)=w0+w2*r+r+w4*r**4
y(2)=02*r+r+04*r**4
y(3)=2.*w2*r+4.*w4*r**3
y(4)=2.*02*r+4.*04*r**3
sol(k,1,1)=y(1)
sol(k,2,1)=y(2)/r
c solution loop
do 3 m=1,N
  rout=m*h+rinit
  call dode(F,Neq,y,r,rout,relerr,abserr,iflag,work,iwork)
  if (iflag .ne. 2) stop
  sol(k,1,m+1)=y(1)
3  sol(k,2,m+1)=y(2)/(m*h+rinit)
  write (*,*) ' Solution loop completed'
2 continue
c removal of exponential divergence of W=sol(k,1,m+1)
fctr=sol(1,1,N+1)/sol(2,1,N+1)
do 40 j=1,2
  do 41 m=0,N
41  sol(1,j,m+1)=sol(1,j,m+1)-fctr*sol(2,j,m+1)
40 continue
  write(*,*) 'Calculating ampl. & phase of mode'
  jj=1
c least squares fit of Omega/r=sol(1,2,m+1)
wvn=freq*dexp(-a0s/2.)
do 31 i=1,Nf
  do 32 j=1,Nf
    A(i,j)=0.
    do 33 m=mmin,N
      r=rinit+m*h
33  A(i,j)=A(i,j)+phiX(j,r,wvn)*phiX(i,r,wvn)
32  continue
31  continue
do 34 i=1,Nf
  Rgt(i)=0.
  do 35 m=mmin,N
    r=rinit+m*h
35  Rgt(i)=Rgt(i)+phiX(i,r,wvn)*sol(jj,2,m+1)

```

```

34 continue
   ifail=0
   call FO4ATF(A, Wf, Rgt, Wf, pr, AA, Wf, wks1, wks2, ifail)
   Amps(jj,2)=pr(1)
   Ampc(jj,2)=pr(2)
   Amp(jj,2)=dsqrt(Amps(jj,2)**2+Ampc(jj,2)**2)
   ph(jj,2)=-argu(Ampc(jj,2),Amps(jj,2))
25 continue
c output of amplitudes and phases
  open(1,file=arq2,status='new')
  write(1,105) alpha,eta,freq
  write(1,110) Amp(1,2)
  write(1,110) ph(1,2)
  close(1,status='keep')
105 format(3E12.5)
110 format(E12.5)
c output of results
  open(1,file=arq1,status='new')
  k=1
  do 5 m=0, N
    5 write(k,100) m*h+rinit,sol(k,1,m+1),sol(k,2,m+1)
  4 continue
  close(1,status='keep')
  close(2,status='keep')
100 format(F9.6,2E17.7)
  75 continue
  close(4,status='keep')
end

```

10) Programa v8:

```

program v8
c solution of Einstein equations for cylindrical static vortex.
c Isothermal ideal gas with equation of state rho_rest = kappa p
c The velocity profile is prescribed in terms of Delta(r), which varies
c between 0 and 1. The integrals appearing in the mass formula are
c computed numerically by Boole's rule.
c
c The DODE routine is employed.
c
c Latest revision: Nov. 6, 1993
c
  implicit real*8 (a-h,o-z)
  real*8 k3,kappa
  character*64 arq,arq2
  external F
c number of nodes and dependent variables
  parameter(Neq=9,iw=100+21*Neq)
  dimension y(Neq),work(iw),iwork(5),sol(9,5000)
  common par,pi,gm,con,an,dta0,rv
  pi=4.00*datan(1.00)
  e=dexp(1.d0)
  par=8.*pi
c input data
  open(1,file='v8.ins',status='old')

```



```

read(1,*) gm,con,dta0,rv,p0,b0
read(1,*) rmax,¶,rinit
read(1,*) relerr,abserr
read(1,'(A)') arq
read(1,'(A)') arq2
close(1,status='keep')
c physical parameters
an=1./(gm-1.)
v1=e*dta0/rv
v2=-v1*(b0+1./rv)
c step-size
h=(rmax-rinit)/¶
h2=h*h
c initial conditions at 'r=0'
rhc=con*p0
rhr0=rhc
kappa=con
pisq=pi*pi
ansq=an*an
b0sq=b0*b0
p0sq=p0*p0
visq=v1*v1
rhcsq=rhr0*rhr0
a2=(3.+an)*pi*p0+pi*rhc-b0*b0/2.
b2=1.5*b0**3-pi*rhc*(3.*b0-2.*v1)-13.*pi*b0*p0-pi*an*p0*
* (3.*b0-2.*gm*v1)
b3=(16./15.)*pi*v2*(rhc+an*gm*p0)
c2=b0*b0/2.-2.*pi*rhc-2.*pi*gm*an*p0
k3=-b0*b0/2.+4.*pi*rhc/3.+4.*pi*(an+4.)*p0/3.
c b1:=0$ k2:=0$
c a2:=(3+n)*pi*p0+pi*rhr0-b0^2/2$
c c2:=b0^2/2-2*pi*rhr0-2*(1+n)*pi*p0$
c b2:=(3/2)*b0^3-pi*rhr0*(3*b0-2*v1)-13*pi*b0*p0-pi*n*p0*(3*b0-2*gm*v1)$
c rhr1:=0$ p1:=0$ c3:=0$ a3:=0$
c k4:=0$ b3:=(16/15)*pi*v2*(rhr0+n*gm*p0)$
c k3:=(4*pi/3)*((n+4)*p0+rhr0)-b0^2/2$
c The following coefficients assume that rhr = kappa * p
c rhr2=kappa*p2$
p2=( - 2*ansq*PI*p0sq - 8*an*PI*p0sq - 4*an*PI*P0*RHR0 +
* 2*an*GM*BO*P0*V1 + an*GM*P0*v1sq + an*b0sq*P0 - 6*PI*p0sq -
* 8*PI*P0*RHR0 - 2*PI*rhcsq + b0sq*P0 + b0sq*RHR0 +
* 2*BO*RHR0*V1 + RHR0*v1sq)/2.
a4= - 6*an**3*pisq*p0sq - 6*ansq*pisq*p0sq*KAPPA - 38*ansq*pisq*
* p0sq - 12*ansq*pisq*P0*RHR0 + 6*ansq*PI*GM*BO*P0*V1 + 3*ansq*
* PI*GM*P0*v1sq + 3*ansq*PI*b0sq*P0 - 24*an*pisq*p0sq*KAPPA
* - 98*an*pisq*p0sq - 12*an*pisq*P0*RHR0*KAPPA - 52*an*pisq*P0*
* RHR0 - 6*an*pisq*rhcsq + 6*an*PI*GM*BO*P0*V1*KAPPA - 6*an*PI*GM
* *BO*P0*V1 + 3*an*PI*GM*P0*v1sq*KAPPA + 21*an*PI*GM*P0*v1sq + 3*
* an*PI*b0sq*P0*KAPPA + 16*an*PI*b0sq*P0 + 3*an*PI*b0sq*RHR0
a4=(a4 + 6*an*PI*BO*RHR0*V1 + 3*an*PI*RHR0*v1sq -
* 18*pisq*p0sq*KAPPA - 114*pisq*p0sq - 24*pisq*P0*RHR0*KAPPA -
* 80*pisq*P0*RHR0 - 6*pisq*rhcsq*KAPPA - 14*pisq*rhcsq +
* 3*PI*b0sq*P0*KAPPA + 61*PI*b0sq*P0 + 3*PI*b0sq*RHR0*KAPPA +
* 13*PI*b0sq*RHR0 + 6*PI*BO*RHR0*V1*KAPPA - 6*PI*BO*RHR0*V1 +
* 3*PI*RHR0*v1sq*KAPPA + 21*PI*RHR0*v1sq - 6*BO**4)/24.

```

```

b4=- 48*an**3*piq*GM*pOsq*V1 + 42*an**3*piq*BO*pOsq - 640*ansq*
* pIsq*GM*pOsq*V1 - 96*ansq*piq*GM*PO*RHRO*V1 + 42*ansq*piq*
* BO*pOsq*KAPPA + 702*ansq*piq*BO*pOsq + 84*ansq*piq*BO
* *PO*RHRO - 48*ansq*piq*pOsq*V1*KAPPA + 48*ansq*PI*GM**2*BO*
* PO*vIsq + 24*ansq*PI*GM**2*PO*V1**3 - 18*ansq*PI*GM*bOsq*PO*
* V1 - 21*ansq*PI*GM*BO*PO*vIsq - 21*ansq*PI*BO**3*PO - 1936*an*
* pIsq*GM*pOsq*V1 - 640*an*piq*GM*PO*RHRO*V1
b4=b4 - 48*an*piq*GM*rhcsq*V1 + 168*an*piq*BO*pOsq*KAPPA +
* 4038*an*piq*BO*pOsq + 84*an*piq*BO*PO*RHRO*KAPPA +
* 1236*an*piq*BO*PO*RHRO + 42*an*piq*BO*rhcsq -
* 192*an*piq*pOsq*V1*KAPPA - 96*an*piq*PO*RHRO*V1*KAPPA -
* 448*an*piq*PO*RHRO*V1 - 42*an*PI*GM*bOsq*PO*V1*KAPPA +
* 186*an*PI*GM*bOsq*PO*V1 + 24*an*PI*GM*bOsq*RHRO*V1 +
* 27*an*PI*GM*BO*PO*vIsq*KAPPA - 195*an*PI*GM*BO*PO*vIsq
b4=b4 + 48*an*PI*GM*BO*RHRO*vIsq + 24*an*PI*GM*PO*V1**3*KAPPA +
* 24*an*PI*GM*PO*V1**3 + 24*an*PI*GM*RHRO*V1**3 -
* 21*an*PI*BO**3*PO*KAPPA - 516*an*PI*BO**3*PO -
* 21*an*PI*BO**3*RHRO + 24*an*PI*bOsq*PO*V1*KAPPA -
* 42*an*PI*bOsq*RHRO*V1 - 21*an*PI*BO*RHRO*vIsq + 126*piq*BO*
* pOsq*KAPPA + 7698*piq*BO*pOsq + 168*piq*BO*PO*RHRO*KAPPA
* + 3912*piq*BO*PO*RHRO + 42*piq*BO*rhcsq*KAPPA
b4=(b4 + 534*piq*BO*rhcsq - 144*piq*pOsq*V1*KAPPA -
* 192*piq*PO*RHRO*V1*KAPPA - 1792*piq*PO*RHRO*V1 -
* 48*piq*rhcsq*V1*KAPPA - 448*piq*rhcsq*V1 -
* 21*PI*BO**3*PO*KAPPA - 2007*PI*BO**3*PO - 21*PI*BO**3*RHRO*KAPPA
* - 495*PI*BO**3*RHRO + 24*PI*bOsq*PO*V1*KAPPA -
* 18*PI*bOsq*RHRO*V1*KAPPA + 162*PI*bOsq*RHRO*V1 + 27*
* PI*BO*RHRO*vIsq*KAPPA - 195*PI*BO*RHRO*vIsq + 24*PI*RHRO*V1**
* 3*KAPPA + 24*PI*RHRO*V1**3 + 135*BO**5)/72.
c4=6*an**3*piq*pOsq + 6*ansq*piq*pOsq*KAPPA + 26*ansq*piq*
* pOsq + 12*ansq*piq*PO*RHRO - 6*ansq*PI*GM*BO*PO*V1 - 3*ansq*
* PI*GM*PO*vIsq - 3*ansq*PI*bOsq*PO + 24*an*piq*pOsq*KAPPA +
* 58*an*piq*pOsq + 12*an*piq*PO*RHRO*KAPPA + 28*an*piq*PO*
* RHRO + 6*an*piq*rhcsq - 6*an*PI*GM*BO*PO*V1*KAPPA + 6*an*PI*GM
* *BO*PO*V1 - 3*an*PI*GM*PO*vIsq*KAPPA - 9*an*PI*GM*PO*vIsq
* - 3*an*PI*bOsq*PO*KAPPA - 8*an*PI*bOsq*PO - 3*an*PI*bOsq*RHRO
c4=(c4 - 6*an*PI*BO*RHRO*V1 - 3*an*PI*RHRO*vIsq +
* 18*piq*pOsq*KAPPA + 38*piq*pOsq + 24*piq*PO*RHRO*KAPPA +
* 40*piq*PO*RHRO + 6*piq*rhcsq*KAPPA + 2*piq*rhcsq -
* 3*PI*bOsq*PO*KAPPA - 29*PI*bOsq*PO - 3*PI*bOsq*RHRO*KAPPA -
* 5*PI*bOsq*RHRO - 6*PI*BO*RHRO*V1*KAPPA + 6*PI*BO*RHRO*V1 -
* 3*PI*RHRO*vIsq*KAPPA - 9*PI*RHRO*vIsq + 3*BO**4)/12.
r=rinit
y(1)=a2*r+r+a4*r**4
y(2)=b0+b2*r+r+b3*r**3+b4*r**4
y(3)=c2*r+r+c4*r**4
y(4)=r+k3*r**3
y(5)=p0+p2*r*r
y(6)=2.*a2*r+4.*a4*r**3
y(7)=2.*b2*r+3.*b3*r+r+4.*b4*r**3
y(8)=2.*c2*r+4.*c4*r**3
y(9)=1.+3.*k3*r*r
c sol(i,m+1); i=1: A, 2: B, 3: C, 4: K, 5: p, 6: Srr/(K'C'/2K),
c 7: g_thetatheta, 8, 9: integrals in mass formula
sol(1,0+i)=y(1)

```

```

sol(2,0+1)=y(2)
sol(3,0+1)=y(3)
sol(4,0+1)=y(4)
sol(5,0+1)=y(5)
sol(6,0+1)=(0.125*dexp(4.*y(1))*(y(4)*y(7)+2.*y(2)*y(9)-
*          y(4)*y(6)*y(2))**2-0.5*y(6)*(3.*y(6)+y(8)-
*          2.*y(9)/y(4))+y(9)*y(8)/(2.*y(4))-4.*pi*y(5))/
*          (y(9)*y(8)/(2.*y(4)))
sol(7,0+1)=y(4)*y(4)*(dexp(-4.*y(1))-y(4)*y(4)*y(2)*y(2))
sol(8,0+1)=0.
sol(9,0+1)=0.
iflag=1
c solution loop
do 3 m=1,11
  rout=m*h
  call dode(F,Eq,y,r,rout,relerr,abserr,iflag,work,iwork)
  if (iflag .ne. 2) goto 57
  sol(1,m+1)=y(1)
  sol(2,m+1)=y(2)
  sol(3,m+1)=y(3)
  sol(4,m+1)=y(4)
  sol(5,m+1)=y(5)
  sol(6,m+1)=(0.125*dexp(4.*y(1))*(y(4)*y(7)+2.*y(2)*y(9)-
*          y(4)*y(6)*y(2))**2-0.5*y(6)*(3.*y(6)+y(8)-
*          2.*y(9)/y(4))+y(9)*y(8)/(2.*y(4))-4.*pi*y(5))/
*          (y(9)*y(8)/(2.*y(4)))
  sol(7,m+1)=y(4)*y(4)*(dexp(-4.*y(1))-y(4)*y(4)*y(2)*y(2))
  dta=dta0*(r/rv)*dexp(1.-r/rv)
  v=dta/dsqrt((1.+y(4)*y(2)*dexp(2.*y(1))*(1.-dta))**2-dta*dta)
  wht=64./45.
  if (mod(m,4) .eq. 2) wht=24./45.
  if (mod(m,4) .eq. 0) wht=28./45.
  sol(8,m+1)=sol(8,m)+h*wht*v*y(5)*y(4)*dexp(y(3))
3  sol(9,m+1)=sol(9,m)+h*wht*y(4)*dexp(4.*y(1)+y(3))*(y(4)*y(7)+
*          2.*y(9)*y(2)-y(6)*y(4)*y(2))**2
c output of results
57 open(1,file=arq,status='new')
  write(1,100) rinit,(sol(i,1),i=1,7)
  do 5 m=1,11
    5  write(1,100) m*h,(sol(i,m+1),i=1,7)
  close(1,status='keep')
c asymptotic behavior of solution
open(2,file=arq2,status='new')
cte=-1./(kappa+gm*an)
do 6 m=0,11-1
  r=m*h
  al=dlog(1.+h/r)
c output: r, lim A/ln r, lim ln B/ln r, lim C/ln r, lim ln K/ln r,
c          -(kappa + n gamma)^(-1) lim ln p/ln r, int(v^2 p K e^C),
c          int(e^-(6A+C)[(e^(-A)K^2 B)^2 /K)
  ct1=0.
  ct2=0.
  ct3=0.
  if (sol(2,m+1)*sol(2,m+2) .gt. 0.) ct1=dlog(sol(2,m+2)/
*  sol(2,m+1))/al

```

```

      if (sol(5,m+1)*sol(5,m+2) .gt. 0.) ct2=cte*dlog(sol(5,m+2)/
*   sol(5,m+1))/al
      if (sol(4,m+1)*sol(4,m+2) .gt. 0.) ct3=dlog(sol(4,m+2)/
*   sol(4,m+1))/al
      ct4=(sol(1,m+2)-sol(1,m+1))/al
      ct5=(sol(3,m+2)-sol(3,m+1))/al
6   write(2,110) r,ct4,ct1,ct5,ct3,ct2,(sol(i,m+1),i=8,9)
      close(2,status='keep')
100 format(E14.5,7E16.6)
110 format(E14.5,6E16.6,E18.8)
      end

      subroutine F(r,y,yp)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      real*8 LK,Kc
      parameter(Neq=9)
      dimension y(Neq),yp(Neq)
      common par,pi,gm,con,an,dta0,rv
c velocity profile
      dta=dta0*(r/rv)*dexp(1.-r/rv)
      A=y(1)
      B=y(2)
      C=y(3)
      Kc=y(4)
      pp=y(5)
      v=dta/dsqrt((1.+Kc*B*dexp(2.*A)*(1.-dta))**2-dta*dta)
c isothermal ideal gas
      rh0=con*pp
      ct1=(rh0+gm*an*pp)*v*v
      dA=y(6)
      dB=y(7)
      dC=y(8)
      dK=y(9)
      LK=dK/Kc
      yp(1)=dA
      yp(2)=dB
      yp(3)=dC
      yp(4)=dK
c hydrostatic equation
      yp(5)=-((rh0+an*gm*pp)*(dA*(1.+3.*v*v)-
*   LK*v*v+Kc*dexp(2.*A)*v*dsqrt(1.+v*v)*(
*   B*dA-2.*LK*B-dB))
c second-order Einstein equations
      yp(6)=-3.*dA*(2.*dA+dC-LK)+2.*dC*LK+par*((rh0+
*   (an-1.)*pp)/2.+ct1)
      yp(7)=-dB*(4.*dA+dC+3.*LK)+B*dA*(11.*dA+2.*dC-
*   14.*LK)-2.*B*dC*LK+par*(2.*dexp(-2.*A)*
*   v*dsqrt(1.+v*v)*(rh0+gm*an*pp)/Kc-B*((rh0+(an+7.
*   )*pp)/2.+ct1))
      yp(8)=-dC*(dC+3.*LK)+2.*dA*(3.*dA+dC-2.*LK)-
*   par*(rh0+(an-1.)*pp+ct1)
      yp(9)=dK*dC-dA*(6.*Kc*dA+2.*Kc*dC-4.*dK)+par*Kc*(
*   (rh0+(an+3.)*pp)/2.+ct1)
      return
      end

```

11) Programa v6:

```

program v6
c solution of Einstein equations for cylindrical static polytrope.
c Isothermal ideal gas with equation of state rho_rest = kappa p
c
c This program generates a file to be used as input for interp.for
c
c The DODE routine is employed.
c
c Latest revision: Nov. 1, 1993
cc
  implicit real*8 (a-h,o-z)
  real*8 k3,kappa,lamb
  character*64 arq
  external F
c number of nodes and dependent variables
  parameter(Neq=9,iw=100+21*Neq)
  dimension y(Neq),work(iw),iwork(5),sol(6,400)
  common par,pi,gm,con,an,v1,rv
  pi=4.00*datan(1.00)
  par=8.*pi
c input data
  open(1,file='v6.ins',status='old')
  read(1,*) gm,con,p0
  read(1,*) rmax,II,rinit
  read(1,*) relerr,abserr
  read(1,'(A)') arq
  close(1,status='keep')
c physical parameters
  an=1./(gm-1.)
  eta=con+an
  lamb=1.+4.*(eta+3.)/(eta-1.):**2
  b0=0.
  rv=1.
  v1=0.
  v2=0.
c step-size
  h=rmax/II
  h2=h*h
c initial conditions at 'r=0'
  rhc=con*p0
  rhr0=rhc
  kappa=con
  plsq=pi*pi
  ansq=an*an
  b0sq=b0*b0
  p0sq=p0*p0
  v1sq=v1*v1
  rhcsq=rhr0*rhr0
  a2=(3.+an)*pi*p0+pi*rhc-b0*b0/2.
  b2=1.5*b0**3-pi*rhc*(3.*b0-2.*v1)-13.*pi*b0*p0-pi*an*p0
  * (3.*b0-2.*gm*v1)
  b3=(16./15.)*pi*v2*(rhc+an*gm*p0)
  c2=b0*b0/2.-2.*pi*rhc-2.*pi*gm*an*p0
  k3=-b0*b0/2.+4.*pi*rhc/3.+4.*pi*(an+4.)*p0/3.

```

```

c b1:=0$ k2:=0$
c a2:=(3+n)*pi*p0+pi*rhr0-b0^2/2$
c c2:=b0^2/2-2*pi*rhr0-2*(1+n)*pi*p0$
c b2:=(3/2)*b0^3-pi*rhr0*(3*b0-2*v1)-13*pi*b0*p0-pi*n*p0*(3*b0-2*gm*v1)$
c rhr1:=0$ p1:=0$ c3:=0$ a3:=0$
c k4:=0$ b3:=(16/15)*pi*v2*(rhr0+n*gm*p0)$
c k3:=(4*pi/3)*((n+4)*p0*rhr0)-b0^2/2$
c The following coefficients assume that rhr = kappa * p
c rhr2=kappa*p2$
  p2=(- 2*ansq*PI*p0sq - 8*an*PI*p0sq - 4*an*PI*PO*RHRO +
* 2*an*GM*BO*PO*V1 + an*GM*PO*visq + an*b0sq*PO - 6*PI*p0sq -
* 8*PI*PO*RHRO - 2*PI*rhcsq + b0sq*PO + b0sq*RHRO +
* 2*BO*RHRO*V1 + RHRO*visq)/2.
  a4=- 6*an**3*pisq*p0sq - 6*ansq*pisq*p0sq*KAPPA - 38*ansq*pisq*
* p0sq - 12*ansq*pisq*PO*RHRO + 6*ansq*PI*GM*BO*PO*V1 + 3*ansq*
* PI*GM*PO*visq + 3*ansq*PI*b0sq*PO - 24*an*pisq*p0sq*KAPPA
* - 98*an*pisq*p0sq - 12*an*pisq*PO*RHRO*KAPPA - 52*an*pisq*PO*
* RHRO - 6*an*pisq*rhcsq + 6*an*PI*GM*BO*PO*V1*KAPPA - 6*an*PI*GM
* *BO*PO*V1 + 3*an*PI*GM*PO*visq*KAPPA + 21*an*PI*GM*PO*visq + 3*
* an*PI*b0sq*PO*KAPPA + 16*an*PI*b0sq*PO + 3*an*PI*b0sq*RHRO
  a4=(a4 + 6*an*PI*BO*RHRO*V1 + 3*an*PI*RHRO*visq -
* 18*pisq*p0sq*KAPPA - 114*pisq*p0sq - 24*pisq*PO*RHRO*KAPPA -
* 80*pisq*PO*RHRO - 6*pisq*rhcsq*KAPPA - 14*pisq*rhcsq +
* 3*PI*b0sq*PO*KAPPA + 61*PI*b0sq*PO + 3*PI*b0sq*RHRO*KAPPA +
* 13*PI*b0sq*RHRO + 6*PI*BO*RHRO*V1*KAPPA - 6*PI*BO*RHRO*V1 +
* 3*PI*RHRO*visq*KAPPA + 21*PI*RHRO*visq - 6*BO**4)/24.
  b4=- 48*an**3*pisq*GM*p0sq*V1 + 42*an**3*pisq*BO*p0sq - 640*ansq*
* pisq*GM*p0sq*V1 - 96*ansq*pisq*GM*PO*RHRO*V1 + 42*ansq*pisq*
* BO*p0sq*KAPPA + 702*ansq*pisq*BO*p0sq + 84*ansq*pisq*BO
* *PO*RHRO - 48*ansq*pisq*p0sq*V1*KAPPA + 48*ansq*PI*GM**2*BO*
* PO*visq + 24*ansq*PI*GM**2*PO*V1**3 - 18*ansq*PI*GM*b0sq*PO*
* V1 - 21*ansq*PI*GM*BO*PO*visq - 21*ansq*PI*BO**3*PO - 1936*an*
* pisq*GM*p0sq*V1 - 640*an*pisq*GM*PO*RHRO*V1
  b4=b4 - 48*an*pisq*GM*rhcsq*V1 + 168*an*pisq*BO*p0sq*KAPPA +
* 4038*an*pisq*BO*p0sq + 84*an*pisq*BO*PO*RHRO*KAPPA +
* 1236*an*pisq*BO*PO*RHRO + 42*an*pisq*BO*rhcsq -
* 192*an*pisq*p0sq*V1*KAPPA - 96*an*pisq*PO*RHRO*V1*KAPPA -
* 448*an*pisq*PO*RHRO*V1 - 42*an*PI*GM*b0sq*PO*V1*KAPPA +
* 186*an*PI*GM*b0sq*PO*V1 + 24*an*PI*GM*b0sq*RHRO*V1 +
* 27*an*PI*GM*BO*PO*visq*KAPPA - 195*an*PI*GM*BO*PO*visq
  b4=b4 + 48*an*PI*GM*BO*RHRO*visq + 24*an*PI*GM*PO*V1**3*KAPPA +
* 24*an*PI*GM*PO*V1**3 + 24*an*PI*GM*RHRO*V1**3 -
* 21*an*PI*BO**3*PO*KAPPA - 516*an*PI*BO**3*PO -
* 21*an*PI*BO**3*RHRO + 24*an*PI*b0sq*PO*V1*KAPPA -
* 42*an*PI*b0sq*RHRO*V1 - 21*an*PI*BO*RHRO*visq + 126*pisq*BO*
* p0sq*KAPPA + 7698*pisq*BO*p0sq + 168*pisq*BO*PO*RHRO*KAPPA
* + 3912*pisq*BO*PO*RHRO + 42*pisq*BO*rhcsq*KAPPA
  b4=(b4 + 534*pisq*BO*rhcsq - 144*pisq*p0sq*V1*KAPPA -
* 192*pisq*PO*RHRO*V1*KAPPA - 1792*pisq*PO*RHRO*V1 -
* 48*pisq*rhcsq*V1*KAPPA - 448*pisq*rhcsq*V1 -
* 21*PI*BO**3*PO*KAPPA - 2007*PI*BO**3*PO -21*PI*BO**3*RHRO*KAPPA
* - 495*PI*BO**3*RHRO + 24*PI*b0sq*PO*V1*KAPPA -
* 18*PI*b0sq*RHRO*V1*KAPPA + 162*PI*b0sq*RHRO*V1 + 27*
* PI*BO*RHRO*visq*KAPPA - 195*PI*BO*RHRO*visq + 24*PI*RHRO*V1**
* 3*KAPPA + 24*PI*RHRO*V1**3 + 135*BO**5)/72.

```

```

c4=6*an**3*pisq*p0sq + 6*ansq*pisq*p0sq*KAPPA + 26*ansq*pisq*
* p0sq + 12*ansq*pisq*PO*RHRO - 6*ansq*PI*GM*BO*PO*V1 - 3*ansq*
* PI*GM*PO*visq - 3*ansq*PI*b0sq*PO + 24*an*pisq*p0sq*KAPPA +
* 58*an*pisq*p0sq + 12*an*pisq*PO*RHRO*KAPPA + 28*an*pisq*PO*
* RHRO + 6*an*pisq*rhcsq - 6*an*PI*GM*BO*PO*V1*KAPPA + 6*an*PI*GM
* *BO*PO*V1 - 3*an*PI*GM*PO*visq*KAPPA - 9*an*PI*GM*PO*visq
* - 3*an*PI*b0sq*PO*KAPPA - 8*an*PI*b0sq*PO - 3*an*PI*b0sq*RHRO
c4=(c4 - 6*an*PI*BO*RHRO*V1 - 3*an*PI*RHRO*visq +
* 18*pisq*p0sq*KAPPA + 38*pisq*p0sq + 24*pisq*PO*RHRO*KAPPA +
* 40*pisq*PO*RHRO + 6*pisq*rhcsq*KAPPA + 2*pisq*rhcsq -
* 3*PI*b0sq*PO*KAPPA - 29*PI*b0sq*PO - 3*PI*b0sq*RHRO*KAPPA -
* 5*PI*b0sq*RHRO - 6*PI*BO*RHRO*V1*KAPPA + 6*PI*BO*RHRO*V1 -
* 3*PI*RHRO*visq*KAPPA - 9*PI*RHRO*visq + 3*BO**4)/12.
r=rinit
y(1)=a2*r+r+a4*r**4
y(2)=b0+b2*r+r+b3*r**3+b4*r**4
y(3)=c2*r+r+c4*r**4
y(4)=r+k3*r**3
y(5)=p0+p2*r*r
y(6)=2.*a2*r+4.*a4*r**3
y(7)=2.*b2*r+3.*b3*r*r+4.*b4*r**3
y(8)=2.*c2*r+4.*c4*r**3
y(9)=1.+3.*k3*r*r
c sol(i,m+1); i=1: A', 2: C', 3: K', 4: A, 5: K, 6: p
sol(1,0+1)=0.
sol(2,0+1)=0.
sol(3,0+1)=1.
sol(4,0+1)=0.
sol(5,0+1)=0.
sol(6,0+1)=p0
iflag=i
c solution loop
do 3 m=1, N
  rout=m*h
  call dode(F,Req,y,r,rout,relerr,abserr,iflag,work,iwork)
  if (iflag .ne. 2) goto 57
  sol(1,m+1)=y(6)
  sol(2,m+1)=y(8)
  sol(3,m+1)=y(9)
  sol(4,m+1)=y(1)
  sol(5,m+1)=y(4)
  write(*,'(2E18.8)') r,dexp(y(i))/r**(1.-1./lamb)
3 sol(6,m+1)=y(5)
c output of results
57 open(1,file=arq,status='new')
write(1,*) N,h
do 5 m=0, N
5 write(1,100) m*h,sol(1,m+1),sol(2,m+1),sol(3,m+1),
* sol(4,m+1),sol(5,m+1),sol(6,m+1)
close(1,status='keep')
100 format(F12.6,6E17.7)
end

```

12) Programa interp:

```

program interp
c Quintic spline interpolation of static solution for the polytrope
c
  implicit real*8 (a-h,o-z)
  real*8 KK
  dimension D(5,5),p(220),dC(220),A(220),KK(220),cp(220),
* cA(220),cdC(220),cKK(220),
* Amat(220,220),Rgt(220)
  write(*,*) 'N='
  read(*,*) N
  N5=N+5
  N1=N-1
  N2=2*N1
  N3=3*N1
  N4=4*N1
  D(1,1)=1.d0
  D(2,1)=2.6d1
  D(3,1)=6.6d1
  D(4,1)=2.6d1
  D(5,1)=1.d0
  D(1,2)=1.d0
  D(2,2)=1.d1
  D(3,2)=0.d0
  D(4,2)=-1.d1
  D(5,2)=-1.d0
  D(1,3)=1.d0
  D(2,3)=2.d0
  D(3,3)=-6.d0
  D(4,3)=2.d0
  D(5,3)=1.d0
  D(1,4)=1.d0
  D(2,4)=-2.d0
  D(3,4)=0.d0
  D(4,4)=2.d0
  D(5,4)=-1.d0
  D(1,5)=1.d0
  D(2,5)=-4.d0
  D(3,5)=6.d0
  D(4,5)=-4.d0
  D(5,5)=1.d0
  pi=4.d0*datan(1.d0)
c physical parameters
  eta=10.
  pc=0.01
c input of static solution
  open(1,file='stat.dat',status='old')
  read(1,*) rfake,h
  h2=h*h
  do 1 k=1,N+1
1   read(1,*) rfake,dA,dC(k),dK,A(k),KK(k),p(k)
  close(1,status='keep')
  ifail=0
  do 4 i=1,N5
    do 5 j=1,N5

```



```

5   Amat(i,j)=0.
4   continue
   do 6 k=0,N
     do 7 j=k+1,k+5
7     Amat(k+3,j)=D(k-j+6,0+1)/120.
6   continue
c interpolation of p(r)
   Rgt(1)=0.
   Rgt(2)=0.
   Rgt(N+4)=0.
c   Rgt(N+4)=- (eta+1.) * p(N+1) * dA
   Rgt(N+5)=0.
   do 11 j=1,5
     Amat(1,j)=D(6-j,1+1)
11  Amat(2,j)=D(6-j,3+1)
     do 12 j=N+1,N+5
       jj=N-j+6
       Amat(N+4,j)=D(jj,1+1)/(24.*h)
12  Amat(N+5,j)=D(jj,2+1)
     do 13 k=0,N
13   Rgt(k+3)=p(k+1)
       call Gauss(N+5,Amat,Rgt,cp)
       write(*,*) ' Interp. of p(r) completed'
c interpolation of dC(r)
   do 34 i=1,N+5
     do 35 j=1,N+5
35   Amat(i,j)=0.
34  continue
     do 36 k=0,N
       do 37 j=k+1,k+5
37   Amat(k+3,j)=D(k-j+6,0+1)/120.
36  continue
   Rgt(1)=-4.*pi*(eta+1.) * pc
   Rgt(2)=0.
   Rgt(N+4)=-8.*pi*(eta+1.) * p(N+1) - dC(N+1) * (dC(N+1) + dK/KK(N+1))
   Rgt(N+5)=0.
   do 8 j=1,5
     Amat(1,j)=D(6-j,1+1)/(24.*h)
8   Amat(2,j)=D(6-j,2+1)/(6.*h2)
     do 9 j=N+1,N+5
       jj=N-j+6
       Amat(N+4,j)=D(jj,1+1)/(24.*h)
9   Amat(N+5,j)=D(jj,2+1)
     do 10 k=0,N
10  Rgt(k+3)=dC(k+1)
       call Gauss(N+5,Amat,Rgt,cdC)
       write(*,*) ' Interp. of dC/dr completed'
c interpolation of A(r)
   do 44 i=1,N+5
     do 45 j=1,N+5
45   Amat(i,j)=0.
44  continue
     do 46 k=0,N
       do 47 j=k+1,k+5
47   Amat(k+3,j)=D(k-j+6,0+1)/120.

```

```

46 continue
   Rgt(1)=0.
   Rgt(2)=0.
   Rgt(N+4)=dA
   Rgt(N5)=4.*pi*(eta+3.)*p(N+1)-dA*(dC(N+1)+dK/KK(N+1))
   do 21 j=1,5
     Amat(1,j)=D(6-j,1+1)
21   Amat(2,j)=D(6-j,3+1)
     do 14 j=N+1,N5
       jj=N-j+6
       Amat(N+4,j)=D(jj,1+1)/(24.*h)
14   Amat(N+5,j)=D(jj,2+1)/(6.*h2)
     do 15 k=0,N
15   Rgt(k+3)=A(k+1)
       call Gauss(N5,Amat,Rgt,cA)
       write(*,*) ' Interp. of A(r) completed'
c interpolation of K(r)
     do 54 i=1,N5
       do 55 j=1,N5
55   Amat(i,j)=0.
54 continue
     do 56 k=0,N
       do 57 j=k+1,k+5
57   Amat(k+3,j)=D(k-j+6,0+1)/120.
56 continue
   Rgt(1)=1.
   Rgt(2)=0.
   Rgt(N+4)=dK
   Rgt(N5)=4.*pi*(eta+7.)*KK(N+1)*p(N+1)-dC(N+1)*dK
   do 16 j=1,5
     Amat(1,j)=D(6-j,1+1)/(24.*h)
16   Amat(2,j)=D(6-j,2+1)
     do 17 k=0,N
17   Rgt(k+3)=KK(k+1)
       call Gauss(N5,Amat,Rgt,cKK)
       write(*,*) ' Interp. of K(r) completed'
c output of spline coefficients
   open(1,file='coeff.dat',status='new')
   write(1,*) N,h
   do 22 k=1,N5
22   write(1,100) cdC(k),cA(k),cKK(k),cp(k)
100 format(4E18.8)
   close(1,status='keep')
   end

   subroutine Gauss(N,D,X,T)
   implicit real*8 (a-h,o-z)
   integer P,Q
   dimension D(220,220),P(220),Q(220),T(220),
*       X(220)
   do 10 i=1,N
     P(i)=0
10   Q(i)=0
   do 1 m=1,N
     write(*,*) ' Linha no. ',m,' de ',N

```

```

r=0.
do 2 i=1,N
  if (P(i) .eq. 1) goto 2
  do 3 j=1,N
    if (Q(j) .eq. 1) goto 3
    if (dabs(D(i,j)) .gt. r) then
      i1=i
      j1=j
      r=dabs(D(i,j))
    endif
  3 continue
2 continue
P(i1)=1
Q(j1)=1
s=D(i1,j1)
do 4 j=1,N
4 D(i1,j)=D(i1,j)/s
X(i1)=X(i1)/s
do 5 i=1,N
  if (i .eq. i1) goto 5
  s=D(i,j1)
  do 6 j=1,N
6 D(i,j)=D(i,j)-s*D(i1,j)
X(i)=X(i)-s*X(i1)
5 continue
1 continue
do 7 i=1,N
  do 8 j=1,N
    if (dabs(D(i,j)) .gt. .5) T(j)=X(i)
8 continue
7 continue
return
end

```

13) Programa neutr:

```

program neutr
c Determination of neutral modes of the static polytrope
c The DODE routine is employed.
c Oscillations of the metric components gthth, gzz, pressure and radial
c velocity
c
c COORDINATE CONDITION dgtr=dtgrr=0. Variables, dtp,dtur,Gamma,Lambda.
c The radial variable in the output is R = r^(1/lambda)
c The pressure variable in the output is \varpi = (delta p)/p.
c
c Latest revision: Nov. 29, 1993.
  implicit real*8 (a-h,o-z)
  real*8 kappa,LO,L2,lamb
  character*64 arq,arq1,arq2
  external F
c number of nodes and dependent variables
  parameter(Neq=5, iw=100+21*Neq, Nf=3, Nfu=2)
  dimension cdC(300), cA(300), cKK(300), cp(300), A(Nf, Nf),
  * y(Neq), work(iw), iwork(5), sol(2,4,310), Rgt(Nf), pr(Nf),

```

```

*      wks1(Nf),wks2(Nf),slope(2),AA(Nf,Nf),gsin(2),gcos(2),
*      Au(Nfu,Nfu),Rgtu(Nfu),pru(Nfu),wksiu(Nfu),wks2u(Nfu),
*      AAu(Nfu,Nfu)
common cdC,cA,cKK,cp,hs,freq2,par,gm,an,kappa,eta,ns
pi=4.DO*datan(1.DO)
c input data
open(4,file='neutr.ins',status='old')
read(4,*) Ntask
do 75 itask=1,Ntask
write(*,*) '>>>>>> TASK #',itask
read(4,*) gm,kappa,pc,c0,freq
read(4,*) rmax,r,rinit,rnr
read(4,*) relerr,abserr
read(4,'(A)') arq
read(4,'(A)') arq1
read(4,'(A)') arq2
c physical parameters
an=1./(gm-1.)
eta=kappa+an
lamb=1.+4.*(eta+3.)/(eta-1.)**2
par=5.*pi
freq2=freq*freq
c step-size
h=(rmax-rinit)/N
h2=k*h
c input of spline coefficients of the static solution
open(1,file=arq,status='old')
read(1,*) Ns,hs
N5s=Ns+5
do 1 k=1,N5s
1 read(1,*) cdC(k),cA(k),cKK(k),cp(k)
close(1,status='keep')
write(*,*) 'Static solution read'
c initial conditions at 'r=0'
do 12 k=1,2
write(*,*) 'Regular solution #',k
dtgzz0=0.
dtpc=0.
if (k .eq. 1) then
dtpc=1.
else
dtgzz0=1.
endif
G0=dtgzz0
G2=-(par*(5.*eta+5.-gm)*dtpc+freq2*gm*dtgzz0)/(12.*gm)
L0=-dtgzz0
L2=-(par*(5.*gm-eta-1.)*dtpc-5.*freq2*gm*dtgzz0)/(12.*gm)
p2=-dtpc*(4.*pi*pc*(2.*kappa*(eta+1.)+an*gm*gm*(6.*kappa+2.*an)+
* kappa*(an+3.*gm+3.))+freq2*(eta+1.))/(4.*gm)
u1=-dtgzz0/4.-dtpc/(2.*gm*pc)
r=rinit
c y(1)=Lambda, y(2)=Gamma, y(3)=dtp, y(4)=dtur, y(5)=Lambda'
y(1)=L0+L2*r*r
y(2)=G0+G2*r*r
y(3)=dtpc+p2*r*r

```

```

y(4)=u1*r
y(5)=2.*L2*r
sol(k,1,0+1)=y(1)
sol(k,2,0+1)=y(2)
sol(k,3,0+1)=y(3)
sol(k,4,0+1)=y(4)
iflag=1
c solution loop
do 3 m=1,N
  rout=rinit+m*h
  call dode(F,Neq,y,r,rout,relerr,abserr,iflag,work,iwork)
  if (iflag .ne. 2) then
    write(*,*) 'Problems with dode: iflag=',iflag,'rout=',rout
    stop
  endif
  sol(k,1,m+1)=y(1)
  sol(k,2,m+1)=y(2)
  sol(k,3,m+1)=y(3)
3  sol(k,4,m+1)=y(4)
  write(*,*) ' Solution loop completed'
c least squares fit for Gamma(i)=sol(k,2,i+1).
mmin=rnr/h
wvn=lamb*freq/c0
do 2 i=1,Nf
  do 4 j=1,Nf
    A(i,j)=0.
    do 6 m=mmin,N
      r=rinit+m*h
6      A(i,j)=A(i,j)+phi(j,r,wvn,lamb)*phi(i,r,wvn,lamb)
4    continue
2  continue
  do 8 i=1,Nf
    Rgt(i)=0.
    do 9 m=mmin,N
      r=rinit+m*h
9      Rgt(i)=Rgt(i)+phi(i,r,wvn,lamb)*sol(k,2,m+1)
8  continue
  ifail=0
  call F04ATF(A,Nf,Rgt,Nf,pr,AA,Nf,wks1,wks2,ifail)
  gsin(k)=pr(2)
  gcos(k)=pr(3)
12  slope(k)=pr(1)
c construction of regular mode
fctr=slope(2)/slope(1)
gsin(2)=gsin(2)-fctr*gsin(1)
gcos(2)=gcos(2)-fctr*gcos(1)
do 14 j=1,4
  do 15 m=1,N+1
15  sol(2,j,m)=sol(2,j,m)-fctr*sol(1,j,m)
14  continue
c amplit. & phase of Gamma
AmpG=dsqrt(gsin(2)**2+gcos(2)**2)
phG=-argu(gcos(2),gsin(2))
c least squares fit of acoustic wave (dtur=sol(2,4,m+1))
wvn=lamb*freq*dsqrt((eta+1.)/gm)/c0

```

```

xpo=(lamb+an-(lamb-1.)*(kappa+eta*an))/(2.*(an+1.))
mmin=rmr/h
do 42 i=1, Nfu
  do 44 j=1, Nfu
    Au(i,j)=0.
    do 46 m=mmin, N
      r=rinit+m*h
46      Au(i,j)=Au(i,j)+phiu(j,r,wvn,lamb,xpo)*phiu(i,r,wvn,
*          lamb,xpo)
44      continue
42      continue
    do 48 i=1, Nfu
      Rgtu(i)=0.
      do 49 m=mmin, N
        r=rinit+m*h
49      Rgtu(i)=Rgtu(i)+phiu(i,r,wvn,lamb,xpo)*sol(2,4,m+1)
48      continue
ifail=0
call FO4ATF(Au,Nfu,Rgtu,Nfu,pru,AAu,Nfu,wks1u,wks2u,ifail)
write(*,*) ' Least squares fit completed (dtur)'
Ampu=dsqrt(pr(1)**2+pr(2)**2)
phu=-argu(pr(2),pr(1))
c output of amplit. & phase
open(1,file=arq2,status='new')
write(1,105) gm,eta,pc,freq
write(1,110) ampG,ampu
write(1,110) phG,phu
105 format(4E14.5)
110 format(2E14.5)
close(1,status='keep')
c output of results
open(1,file=arq1,status='new')
k=2
do 5 m=0, N
  r=m*h+rinit
  xi=r/hs
  p=spline5(xi,cp)
  RR=r**(1./lamb)
5  write(1,100) RR,sol(k,1,m+1),sol(k,2,m+1),
*      sol(k,3,m+1)/p,sol(k,4,m+1)
  close(1,status='keep')
100 format(F9.6,4E17.7)
75 continue
close(4,status='keep')
end

real*8 function phi(k,r,wvn,lamb)
implicit real*8 (a-h,o-z)
real*8 lamb
RR=r**(1./lamb)
s=dsin(wvn*RR)/RR**1.5
c=dcos(wvn*RR)/RR**1.5
if (k .eq. 1) then
  phi=1./r
elseif (k .eq. 2) then

```

```

    phi=s
  elseif (k .eq. 3) then
    phi=c
  elseif (k .eq. 4) then
    phi=1./(r*RR)
  elseif (k .eq. 5) then
    phi=s/RR
  else
    phi=c/RR
  endif
  return
end

```

```

real*8 function phiu(k,r,wvn,lamb,xpo)
implicit real*8 (a-h,o-z)
real*8 lamb
RR=r**(1./lamb)
s=dsin(wvn*RR)/RR**xpo
c=dcos(wvn*RR)/RR**xpo
if (k .eq. 1) then
  phiu=s
elseif (k .eq. 2) then
  phiu=c
elseif (k .eq. 3) then
  phiu=s/RR
else
  phiu=c/RR
endif
return
end

```

```

subroutine F(r,y,yp)
implicit real*8 (a-h,o-z)
real*8 KK,L,LK,kappa
parameter(Neq=5)
dimension cdC(300),cA(300),cKK(300),cp(300),y(Neq),yp(Neq)
common cdC,cA,cKK,cp,hs,freq2,par,gm,an,kappa,eta,Ns
c computation of coefficients in perturbation equations
xi=r/hs
if (xi .gt. Ns) then
  stop
else
  dC=spline5(xi,cdC)
  A=spline5(xi,cA)
  dA=dspline5(xi,cA)/hs
  KK=spline5(xi,cKK)
  dKK=dspline5(xi,cKK)/hs
  p=spline5(xi,cp)
endif
LK=dKK/KK
ct1=LK+dC-dA
phi1=(3.*(3.*dA*dA+dC*dC+LK*LK)+2.*(2.*dA*dC-4.*dA*LK+dC*LK))/ct1
phi2=(9*dA*dA-dC*dC+LK*LK-6.*dA*LK)/ct1
phi3=(3.*dA+dC-LK)/ct1
phi4=(dA+dC+LK)/ct1

```

```

L=y(1)
G=y(2)
dtp=y(3)
dtur=y(4)
dL=y(5)
yp(1)=dL
yp(2)=-0.5*(LK+dC-3.*dA)*G-0.5*(LK-3.*dA-dC)*L+2.*par*
*   dexp(A)*(eta+1.)*p*dtur
yp(3)=- (an+1.+kappa/gm)*dA*dtp-kappa*(eta+1.)*dexp(A)*dA*dA*p*dtur
*   /(an+1.)+0.25*(eta+1.)*p*(phi3*dL+phi4*yp(2))-par*(eta+1.)*p*
*   dtp/ct1+freq2*(eta+1.)*p*dexp(-A)*(0.5*dexp(-A)*G/ct1+dtur)
yp(4)=- (dC+LK-an*(eta+1.)*dA/(an+1.))*dtur-dexp(-A)*dtp/(gm*p)-
*   0.5*dexp(-A)*G
yp(5)=-0.5*phi1*y(5)-0.5*phi2*yp(2)+2.*par*phi3*dtp-freq2*
*   dexp(-2*A)*(phi3*G+L)
return
end

```