

Jeferson Wilian de Godoy Stênico

Estimação da Probabilidade de Perda e um Esquema de Controle de Admissão para Tráfego Multifractal de Redes

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Telecomunicações e Telemática.

Banca Examinadora:

Dr. Firmiano Ramos Perlingueiro - PETROBRAS

Prof. Dr. Lee Luan Ling - UNICAMP

Prof. Dr. Paulo Cardieri - UNICAMP

Campinas, SP
2009

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

St42e Stênico, Jeferson Wilian de Godoy
Estimação da probabilidade de perda e um esquema de controle de admissão para tráfego multifractal de redes / Jeferson Wilian de Godoy Stênico. – Campinas, SP: [s.n.], 2009.

Orientadores: Lee Luan Ling, Flávio Henrique Teles Vieira.

Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Fractais. 2. Telecomunicações - Tráfego. 3. Vias de comunicação. 4. Probabilidade. I. Lee, Luan Ling. II. Vieira, Flávio Henrique Teles. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

Título em Inglês: Estimation of loss probability and an admission control scheme for multifractal network traffic
Palavras-chave em Inglês: Fractals, Telecommunication traffic, Mass communication, Probability
Área de concentração: Telecomunicações e Telemática
Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica
Banca Examinadora: Firmiano Ramos Perlingeiro, Paulo Cardieri
Data da defesa: 05/10/2009
Programa de Pós Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

Candidato: Jeferson William de Godoy Stênico

Data da Defesa: 5 de outubro de 2009

Título da Tese: "Estimação da Probabilidade de Perda e um Esquema de Controle de Admissão para Tráfego Multifractal de Redes"

Prof. Dr. Lee Luan Ling (Presidente):



Dr. Firmiano Ramos Perlingeiro:

Prof. Dr. Paulo Cardieri:



Resumo

O presente trabalho, propõe uma expressão analítica para estimar a probabilidade de perda de bytes em um único servidor de fila com chegadas de tráfego multifractal. Inicialmente, apresentamos a teoria necessária referente a processos multifractais, destacando o conceito de expoente de Hölder. Em seguida, focalizamos nossa atenção na estimação dos momentos de segunda ordem para processos multifractais. Mais especificamente, assumimos que um modelo exponencial é adequado para representar a variância do processo sob diferentes escala de agregação. Dessa forma comparamos o desempenho da abordagem proposta com algumas outras abordagens (por exemplo, métodos baseados em monofractal, MSQ (*Multi-Scale Queue*) e CDTSQ (*Critical Dyadic Time-Scale Queue*)) usando traços de tráfegos reais. Além disso, com base nos resultados da análise acima, propusemos uma nova estratégia de controle de admissão que leva em conta as características multifractais do tráfego. Comparamos a estratégia de controle de admissão proposta com outros métodos de controle de admissão amplamente utilizado na literatura (por exemplo, MVA, Perda Virtual e Capacidade Equivalente). Os resultados das simulações mostram que a proposta de estimação de probabilidade de perda é simples e precisa, e a estratégia de controle de admissão proposta é robusta e eficiente.

Palavras-chave: Processos Multifractais, Modelagem de Tráfego, Tráfego de Redes, Probabilidade de Perda e Controle de Admissão.

Abstract

The present work proposes an analytical expression for estimating the byte loss probability at a single server queue with multifractal traffic arrivals. Initially we address the theory concerning multifractal processes, especially the Hölder exponents of the multifractal traffic traces. Next, we focus our attention on the second order statistics for multifractal traffic processes. More specifically, we assume that an exponential model is adequate for representing the variance of the traffic process under different time scale aggregation. Then, we compare the performance of the proposed approach with some other relevant approaches (e.g., monofractal based methods, MSQ (multi-scale queue) and CDTSQ (Critical dyadic time-scale queue)) using real traffic traces. In addition, based on the results of the analysis we proposed a new admission control strategy that takes into account the multifractal traffic characteristics. We compare the proposed admission control strategy with some other widely used admission control methods (e.g., MVA, Virtual Loss and Equivalent Capacity). The simulation results show that the proposed loss probability estimation method is simple and accurate, and the proposed admission control strategy is robust and efficient.

Keywords: Multifractal Processes, Traffic Modeling, Network Traffic, Loss Probability and Control Admission.

Agradecimentos

A Deus acima de tudo, pois só Ele é digno de Louvor.

Aos meus pais Jose Carlos Stênico e Maria de Lourdes Franco de Godoy Stênico e minhas irmãs Joselaine Andreia de Godoy Stênico e Jaqueline Andreza de Godoy Stênico, por todo incentivo e carinho para que pudesse chegar até aqui.

Ao Prof. Lee Luan Ling, pelo apoio, incentivo, sempre acompanhando de forma prestativa o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Flávio Henrique Teles Vieira, mesmo longe por um período, pela co-orientação pelo apoio e esforços dispensados durante a execução deste trabalho.

Ao Prof. Henrique Lazari, pelo incentivo e dedicação, mesmo antes desta etapa acontecer e por ter apoiado o meu ingresso à Unicamp.

Aos membros da banca pelas sugestões apresentadas.

Aos colegas e amigos do laboratório LRPRC e da FEEC: Maria Leopoldina Martins Neves Seixas Gonçalves, Ana Glória Mamani Chipana, Michele Nazareth da Costa, Carmem Lucia Lessa, Debora Meyhofer Ferreira, Renata Mataveli Viti, Maíce d'Utra da Costa, Yulios Zavala Huaman, Diego Alonso Fernandez Merjildo, Fabio Vieira Teixeira, Daniel Felix Brito, Jânio Coutinho Canuto, Flávio Calmon, José Maranhão Neto, Rafael Rocha, Marco Cazarotto, Francisco Augusto da Costa Garcia.

À CAPES pelo apoio financeiro.

*Aos meus pais Jose Carlos Stênico e
Maria de Lourdes Franco de Godoy Stênico*

Sumário

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
Glossário	xv
Lista de Símbolos	xv
Trabalhos Publicados Pelo Autor	xvii
1 Introdução	1
2 Modelagem Multifractal de Tráfego de Redes	5
2.1 Introdução	5
2.2 Processos Monofractais e Multifractais	7
2.2.1 Primeira Definição de Multifractais	7
2.2.2 Segunda Definição de Multifractais	9
2.2.3 Espectro Multifractal	9
2.3 Estimação da Característica Multifractal	11
2.3.1 Estimação da Função de Partição	11
2.3.2 Estimação do Espectro Multifractal	12
2.4 O Expoente de Hölder e o Tráfego de Redes	16
2.5 Modelagem de Tráfego Multifractal	17
2.5.1 Modelo Wavelet Multifractal	17
2.5.2 Modelo Multifractal Adaptativo baseado em Wavelets	18
2.5.3 Modelo Multiplicador Gaussiano de Variância Variável	18
2.5.4 Movimento Browniano Multifracionário	20
2.6 Considerações Finais	20
3 Estimação de Probabilidade de Perda de Dados	21
3.1 Introdução	21
3.2 Conceitos Básicos	22
3.3 Processos com Longa-dependência	23
3.4 Probabilidade de Perda para Tráfego Multifractal	24
3.5 Proposta de Probabilidade de Perda para o Tráfego Multifractal	27

3.5.1	Aproximação Geral	30
3.5.2	Aproximação Exponencial	33
3.6	Características das Séries de Tráfego	35
3.6.1	A série <i>lbl-pkt-5</i>	35
3.6.2	A série <i>lbl-pkt-5-10</i>	36
3.6.3	A série <i>dec-pkt-1-40</i>	37
3.6.4	A série <i>dec-pkt-2-10</i>	38
3.6.5	A série <i>BC-pAug89-400</i>	39
3.7	Resultados Obtidos nas Simulações	40
3.8	Considerações Finais	43
4	Critério de Controle de Admissão para Tráfego Multifractal	45
4.1	Introdução	45
4.2	Mecanismos de Controle de Admissão de Conexão	46
4.2.1	Baseado em Taxa Média e/ou Taxa de Pico	49
4.2.2	Baseado em Probabilidade de Perda Virtual	49
4.2.3	Baseado na Máxima Variância	50
4.2.4	Baseado na Capacidade Equivalente	51
4.3	Método de Controle de Admissão Proposto	53
4.4	Caracterização dos Surto ou Rajadas	53
4.5	Características das Séries de Tráfego	54
4.5.1	A Série <i>dec-pkt-2-10</i>	54
4.5.2	Várias Séries	55
4.5.3	A Série Sintética - Multifractal	57
4.5.4	A Série Sintética - fBm	58
4.5.5	As Séries de Vídeos	59
4.6	Resultados Obtidos nas Simulações	60
4.7	Considerações Finais	65
5	Conclusões	67
	Referências bibliográficas	69
A	Mínimos Quadrados	75
A.1	Mínimos quadrados lineares	75
A.2	Mínimos quadrados não lineares	79
A.3	Formulação Geral	81
B	Método de Simpson	83
C	Probabilidade de Perda	87
C.1	Probabilidade de Perda Absoluta	87
C.2	Probabilidade de Perda Oportuna	88
D	Propriedades da Distribuição Lognormal	89

Lista de Figuras

2.1	A curva de Von Koch é um fractal obtido no limite de um número infinito de subdivisões.	5
2.2	Estimação das funções $\tau(q)$ e $c(q)$	12
2.3	(a) Soma partição da série representativa do tamanho em bytes dos quadros de video codificado MPEG-4 do filme <i>Silence of the Lambs</i> . (b) Função partição $\tau(q)$ obtida para a sequência de vídeo codificado MPEG-4 considerada.	13
2.4	Convergência entre o espectro de Legendre e espectro de grandes desvios em diferentes resoluções.	15
2.5	Regularidade local do traço de tráfego DIAL 3 representada em diferentes tons de cinza: (escuros) Expoentes de Hölder pequenos, (claros) Expoentes de Hölder grandes.	16
2.6	Processo de construção do MWM.	18
2.7	Processo de construção da cascata multiplicativa ($r=2/3$)	19
3.1	Probabilidade de Perda versus Tempo	33
3.2	Variância versus Tempo	33
3.3	Aproximação exponencial a variância.	34
3.4	Probabilidade de Perda versus Tempo	35
3.5	Curva da Variância	36
3.6	Aproximação Exponencial	36
3.7	Curva da Variância	37
3.8	Aproximação Exponencial	37
3.9	Curva da Variância	38
3.10	Aproximação Exponencial	38
3.11	Curva da Variância	39
3.12	Aproximação Exponencial	39
3.13	Curva da Variância	40
3.14	Aproximação Exponencial	40
3.15	Varição do <i>Buffer lbl-pkt-5</i>	41
3.16	Varição da Capacidade <i>lbl-pkt-5</i>	41
3.17	Varição do <i>Buffer lbl-pkt-5-10</i>	42
3.18	Varição da Capacidade <i>lbl-pkt-5-10</i>	42
3.19	Varição do <i>Buffer dec-pkt-1-40</i>	42
3.20	Varição da Capacidade <i>dec-pkt-1-40</i>	42
3.21	Varição do <i>Buffer dec-pkt-2-10</i>	43
3.22	Varição da Capacidade <i>dec-pkt-2-10</i>	43

3.23	Varição do <i>Buffer BC-pAug89-400</i>	43
3.24	Varição da Capacidade <i>BC-pAug89-400</i>	43
4.1	Nº de Séries de Tráfego versus Probabilidade de Perda para um Traço de Tráfego TCP/IP (<i>dec-pkt-2-10</i>)	61
4.2	Nº de Séries de Tráfego versus Probabilidade de Perda TCP/IP Traço de Tráfego (Várias séries)	61
4.3	Nº de Séries de Tráfego versus Probabilidade de Perda para um Traço de Tráfego Sintético Multifractal	62
4.4	Nº de Séries de Tráfego versus Probabilidade de Perda para um Traço de Tráfego Sintético fBm	62
4.5	Nº de Séries de Tráfego versus Probabilidade de Perda para Traço de Tráfego de Vídeo	63
A.1	Distribuição gaussiana (normal) para uma variável x , com média m e desvio padrão s	76

Lista de Tabelas

3.1	Características Estatísticas <i>dec-pkt-3</i>	32
3.2	Configuração do Sistema para <i>dec-pkt-3</i>	32
3.3	Parâmetros de <i>dec-pkt-3</i>	32
3.4	Características Estatísticas <i>lbl-pkt-5</i>	36
3.5	Parâmetros de <i>lbl-pkt-5</i>	36
3.6	Características Estatísticas <i>lbl-pkt-5-10</i>	36
3.7	Parâmetros de <i>lbl-pkt-5-10</i>	37
3.8	Características Estatísticas <i>dec-pkt-1-40</i>	37
3.9	Parâmetros de <i>dec-pkt-1-40</i>	38
3.10	Características Estatísticas <i>dec-pkt-2-10</i>	38
3.11	Parâmetros de <i>dec-pkt-2-10</i>	39
3.12	Características Estatísticas <i>BC-pAug89-400</i>	39
3.13	Parâmetros de <i>BC-pAug89-400</i>	40
3.14	Configurações do Sistema.	40
3.15	Probabilidade de Perda Estimada.	41
4.1	Características Estatísticas da Multiplexação - <i>dec-pkt-2-10</i>	55
4.2	Parâmetros de <i>dec-pkt-2-10</i>	55
4.3	Características Estatísticas da Multiplexação - Várias Séries.	56
4.4	Parâmetros das Várias Séries.	56
4.5	Características Estatísticas da Multiplexação - Sintética Multifractal.	57
4.6	Parâmetros de Sintético - Multifractal.	57
4.7	Características Estatísticas da Multiplexação - Sintética fBm.	58
4.8	Parâmetros de Sintético - fBm.	58
4.9	Características Estatísticas da Multiplexação - Vídeos.	59
4.10	Parâmetros Vídeos.	59
4.11	Configurações do Sistema.	60
4.12	Quantidade de Tráfegos Aceitos - <i>dec-pkt-2-10</i>	63
4.13	Quantidade de Tráfegos Aceitos - Várias Séries.	64
4.14	Quantidade de Tráfegos Aceitos - Sintético Multifractal	64
4.15	Quantidade de Tráfegos Aceitos - Sintético fBm	64
4.16	Quantidade de Tráfegos Aceitos - Vídeos.	65

Lista de Símbolos

ATM - Asynchronous Transfer Mode

CAC - Connection Admission Control

CDTS - Critical Dyadic Time-Scale

CDTSQ - Critical Dyadic Time-Scale Queue

CSQ - Square Coeficient of Variation

CTS - Critical Time-Scale

CTSQ - Critical Time-Scale Queue

DEC - Digital Equipment Corporation

Diffserv - Differentiated Services

fBm - Fractional Brownian Motion

FDDI - Fiber Distributed Data Interface

fGn - Fractional Gaussian Noise

fBt - Fractional Brownian Traffic

H - Parâmetro de Hurst

IDC - Index of Dispersion of Counts

Intserv - Integrated Services

IP - Internet Protocol

LAN - Local Area Network

LBL - Lawrence Berkeley Laboratory

LRD - Long Range Dependence

MBAC - Measurement Based Admission Control

mBm - Multifractal Brownian Motion

MPEG - Moving Picture Experts Group

MSQ - Multiscale Queue

MWM - Multifractal Wavelet Model

PRM - Peak to Mean Ratio

QoS - Quality of Service

RMSE - Root Mean Squared Error

TCP - Transmission Control Protocol

VBR - Variable Bit Rate

VVGMM - Variable Variance Gaussian Multiplier Model

WAN - Wide Area Network

WWW - World Wide Web

Trabalhos Publicados Pelo Autor

1. Vieira F.H.T, Lee L.L., Jorge C., Stênico J.W.G. "Um Algoritmo Adaptativo para Predição da Regularidade Local de Tráfego de Redes" Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - 2008, Rio de Janeiro, Brasil.
2. Stênico J.W.G, Vieira F.H.T, Lee L.L. "An Approach for Evaluating the Buffer Queueing Behavior of Multifractal Network Traffic Flows". International Workshop Telecommunications, 2009, São Paulo, Brasil.
3. Stênico J.W.G, Vieira F.H.T, Lee L.L. "Esquema de Controle de Admissão de Fluxos Multifractais de Tráfego de Redes através de Estimação de Probabilidade de Perda". Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, 2009, Blumenau, Santa Catarina, Brasil.
4. Stênico J.W.G, Lee L.L. "A Multi-Scaling Based Admission Control Approach for Network Traffic Flows". International Conference on Information, Communications and Signal Processing - ICICS 2009 Macau, China.

Capítulo 1

Introdução

As redes de comunicação de dados vêm experimentando um crescimento fenomenal, em termos de volume de tráfego, largura de banda, topologias, protocolos, meios de comunicação e suportando aplicações de diferentes tipos. Algumas das redes, exigem rígidas características de desempenho em termos de vazão, perda, atraso e variação do atraso, sendo necessário modelos matemáticos de tráfegos flexíveis e eficientes para descrevê-los (Balakrishnan R., 2000).

Tradicionalmente, os modelos de tráfego de redes de comunicação de dados baseavam-se quase que exclusivamente em modelos Poissonianos ou, mais genericamente, modelos Markovianos. Porém, após a divulgação do trabalho de Leland et al. (Leland, W. E.; Taqqu, M. S.; Willinger, W. & Wilson, D. V., 1994), iniciou-se uma nova abordagem de modelagem de tráfego denominada modelagem fractal. Leland et al. constataram experimentalmente que o tráfego LAN Ethernet coletado no *Bellcore Morristown Research and Engineering Center* possuía comportamento auto-similar, apresentando alternância de períodos de surtos de tráfego em diversas escalas de tempo. Estudos posteriores mostraram que este comportamento em escala era impossível de ser reproduzido pelos clássicos modelos estocásticos markovianos utilizados até então, não apenas restrito às redes LAN Ethernet (Willinger, W.; Taqqu, M.S.; & Erramilli, A., 1996) e que influenciava fortemente o desempenho das redes (Park, K. & Willinger, W., 2000).

Processos auto-similares ou, mais genericamente, processos monofractais, mostram regularidade e comportamento invariante em escala de tempo, e normalmente dependem apenas de um único parâmetro, parâmetro de Hurst. Devido principalmente a sua relativa simplicidade, o movimento Browniano fracionário (*fractional Brownian motion - fBm*), e seu processo de incrementos denominado ruído Browniano fracionário (*fractional Gaussian noise - fGn*), tornaram-se os mais amplamente utilizados modelos para tráfegos de redes com características fractais (Bianchi G. R. & Lee L.L., 2005).

Pesquisas realizadas por Riedi et al. (Riedi, R. H. & Lévy Véhel, J, 1997), seguidos por Feldmann

et al. (Feldmann, A.; Gilbert, A.; Willinger, W. & Kurtz, T. G., 1998) possibilitaram uma descrição mais completa do comportamento do tráfego de redes WAN. Mostrou-se que existem basicamente dois tipos de comportamento em escala de tempo para tráfego de redes WAN. Em grandes escalas de tempo (da ordem de centenas de milissegundos e maior) o comportamento de tráfego é caracterizado pelo fenômeno da auto-similaridade, enquanto que, em pequenas escalas de tempo (da ordem de centenas de milissegundos e menor), o tráfego WAN é mais bem descrito através da análise multifractal.

Os processos multifractais permitem que tais características em escala variem no tempo, portanto, possibilitando maior flexibilidade em descrever fenômenos irregulares locais no tempo. A análise multifractal objetiva especialmente o estudo de características diferentes das encontradas quando se assume o comportamento auto-similar observado no tráfego de redes.

Modelos estatísticos derivados de processos multifractais são capazes de representar de forma mais completa e precisa o real comportamento do tráfego de redes. Embora a pesquisa sobre multifractais não seja tão recente, poucos modelos multifractais foram desenvolvidos até então. Dentre os modelos multifractais existentes, destaque deve ser dado ao *Multifractal Wavelet Model (MWM)* proposto por (Riedi, R. H.; Crouse, M. S.; Ribeiro, V.J. & Baraniuk, R.G., 1999), ao Modelo Adaptativo Multifractal baseado em *Wavelet (AMW)* proposto por (Vieira, F.H.T & Lee L.L., 2009a), ao *Variable Variance Gaussian Multiplier Model (VVGMM)* proposto por (Krishna, P. M.; Gadre, V. M. & Desai, U. B., 2003), e ao movimento Browniano multifracionário (*multifractional Brownian motion, mBm*) (Peltier, R. & Véhel, J. L., 1995). Este último generaliza a definição do movimento Browniano fracionário com expoente H , para o caso onde H não é mais uma constante, mas sim uma função dependente do tempo (Bianchi G. R. & Lee L.L., 2005).

Os modelos multifractais englobam várias propriedades de modelos anteriores e descrevem portanto, de forma mais precisa e abrangente, o comportamento do tráfego de redes. Com caracterização do tráfego mais detalhada, espera-se obter melhores estimativas para, por exemplo, a probabilidade de perda de pacotes para fluxos de tráfego. A estimação da probabilidade de perda é frequentemente considerada como o primeiro passo para se dimensionar o tamanho dos buffers nos roteadores a fim de garantir os requisitos de QoS. Dimensionamento dos buffers dos roteadores e controle de admissão são exemplos típicos de ações cujos resultados dependem fortemente de uma precisa caracterização do comportamento de fila dos dados de tráfego.

Neste trabalho, obtém-se uma expressão analítica para a estimação de probabilidade de perda em um enlace com um servidor e buffer finito cujo tráfego de entrada possui características multifractais. Ou seja, considerando que um processo multifractal possua distribuição lognormal e aproximando a variância de tal processo por um modelo exponencial, é possível estimar a probabilidade de perda sem a necessidade de efetuar simulações explícitas que requerem todo conjunto de dados de tráfego. E através da estimação da probabilidade de perda, o trabalho finda com um novo esquema de controle

de admissão.

A tese está organizada da seguinte maneira:

- O Capítulo 2 expõe os conceitos relacionados à modelagem multifractal. Inicialmente é feita uma descrição de processos auto-similares e de suas propriedades. Em seguida, o conceito de processo multifractal é definido. São exibidas ferramentas para análise multifractal, como por exemplo o espectro multifractal e o expoente de Hölder, que quantificam a característica irregular dos processos multifractais e seus correspondentes métodos de estimação. Ao final do capítulo são apresentados os principais modelos estatísticos multifractais existentes.
- O Capítulo 3 propõe uma equação para o cálculo de probabilidade de perda considerando as características multifractais do tráfego. Utilizamos um modelo de regressão não linear, mais precisamente, um modelo exponencial para modelar a relação variância por tempo do processo de chegadas de *bytes*/pacote. São apresentados alguns modelos que foram utilizados na validação do modelo proposto. E, finalizando o capítulo, apresentaremos os resultados que comprovam a eficiência da equação proposta.
- O Capítulo 4 inicialmente expõe conceitos relacionados aos mecanismos de controle de admissão de fluxos de dados. São apresentados vários modelos existentes na literatura considerando as principais características de cada modelo. Em seguida propomos, através da derivação da equação de probabilidade de perda descrita no Capítulo 3, um esquema de controle de admissão. E, finalmente, validamos a proposta, comparando o método com alguns dos métodos citados no capítulo, e comprovando novamente a eficiência da proposta.
- O Capítulo 5 finalmente apresenta as conclusões obtidas e possíveis extensões a este trabalho.

Capítulo 2

Modelagem Multifractal de Tráfego de Redes

2.1 Introdução

Com origem no Latim *fractus*, significando irregular ou quebrado, a palavra fractal foi originalmente utilizada por Beinoit Mandelbrot (Mandelbrot, 1977) para descrever objetos que eram muito irregulares para se adequarem à geometria euclidiana tradicional. Em um sentido determinístico, uma forma geométrica é fractal ou autosimilar, caso preserve a mesma aparência quando observada sobre todas as escalas no espaço ou no tempo. A curva de Von Koch é um exemplo típico de conjunto fractal. A Figura 2.1 ilustra o processo de construção da curva inventado pelo matemático sueco Helge Von Koch em 1906.

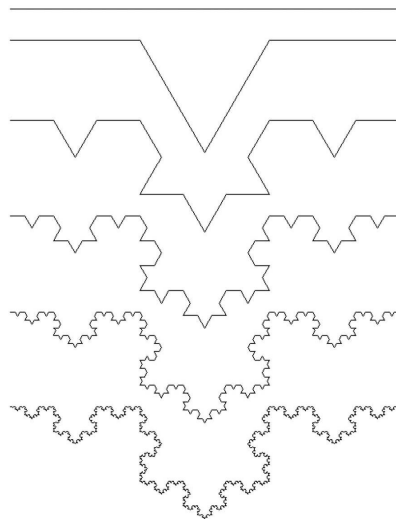


Fig. 2.1: A curva de Von Koch é um fractal obtido no limite de um número infinito de subdivisões.

Recentemente, os fractais eram objetos matemáticos pouco merecedores de estudo, pois não eram suficientemente regulares. Posteriormente, notou-se que trabalhos que mostraram diversos objetos naturais tais como, superfície das nuvens, superfícies topográficas, turbulência em fluidos, dentre outros (Mandelbrot, 1977), são mais bem descritos quando vistos como fractais, provendo representações melhoradas desses diversos fenômenos. Nesse sentido, a geometria dos conjuntos fractais tornou-se ferramenta de grande importância por parte da comunidade científica. A partir de estudos dessa geometria fractal, ela permite um sistema geral para o estudo de conjuntos irregulares.

As pesquisas sobre fractais nos tráfegos de redes iniciou-se a partir da publicação do trabalho de Leland et al. (Leland, W. E.; Taqqu, M. S.; Willinger, W. & Wilson, D. V., 1994). Leland et al constataram experimentalmente que o tráfego coletado na rede *Ethernet do Bellcore Morristown Research and Engineering Center* exibia propriedades fractais tais com auto-similaridade e dependência de longa duração. Após ter sido evidenciada por Leland et al, estudos posteriores mostraram a presença de propriedades fractais também no tráfego gerado por transmissão de vídeo a taxa variável (Beran, J.; Sherman, R.; Taqqu, M. & Willinger, W., 1995), (Garret M. W. & Willinger, W., 1994), tráfego em redes *Wide Area Networks*, tráfego *World Wide Web* (Paxson V. & Floyd S., 1995) (Crovella, M. E. & Bestavros, 1996), dentre outros. Foi comprovado que tais propriedades, com destaque para a dependência de longa duração, influenciam fortemente no desempenho das redes (Norros, I., 1994), não sendo adequadamente modeladas por processos estocásticos markovianos (Paxson V. & Floyd S., 1995).

Muitos estudos abordaram a medida e a modelagem da característica de dependência de longo prazo existente nos dados. Constatou-se que a dependência de longo prazo é uma importante característica do tráfego, possuindo relevantes implicações em diversas áreas tais como teoria de filas e projeto de redes. A distribuição de cauda pesada (*heavy tail*) da duração ou tamanho das sessões ou conexões que originam o tráfego agregado é apontada como causa da característica auto-similar observada (Crovella, M. E. & Bestavros, 1996), (Park, K. & Willinger, W., 2000).

Diferentes modelos matemáticos foram propostos com o objetivo de representar a característica auto-similar constatada no tráfego de redes. Ao variar-se a escala temporal de observação de processos auto-similares, o comportamento observado é único e invariante no tempo, ou seja, tais processos apresentam um comportamento em escala monofractal. Identificado como o modelo que de maneira mais simples incorpora matematicamente as características auto-similares observadas no tráfego, o modelo tráfego Browniano fracionário (*fractional Brownian traffic, fBt*) tornou-se amplamente utilizado. Entretanto, observou-se que enquanto em escalas de tempo da ordem de centenas de milissegundos e maiores, o comportamento do tráfego era bem representado por modelos auto-similares, em escalas de tempo da ordem de centenas de milissegundos e menores, as características de tais modelos afastavam-se das apresentadas pelo tráfego real. Tal constatação motivou a busca por modelos de

tráfego mais abrangentes, que possibilitassem uma descrição mais completa do tráfego de redes.

Investigações envolvendo tráfego WAN TCP/IP (Feldmann, A.; Gilbert, A. & Willinger, 1998), (Riedi, R. H.; Crouse, M. S.; Ribeiro, V.J. & Baraniuk, R.G., 1999) constataram que as diferentes propriedades do tráfego observadas em pequenas escalas de tempo eram convenientemente descritas utilizando-se a análise multifractal. Tais propriedades, presentes em pequenas escalas de tempo, são oriundas da ação dos protocolos predominantes nas redes em questão, e dos mecanismos fim-a-fim de controle de congestionamento existentes na internet atual, que determinam o comportamento do fluxo de informações entre diferentes camadas na hierarquia de protocolos TCP/IP (Feldmann, A.; Gilbert, A.; Willinger, W. & Kurtz, T. G., 1998).

Processos multifractais são uma generalização dos processos monofractais, o que possibilita uma regularidade e leis de comportamento em escala variantes no tempo e, portanto, proporcionando uma melhor descrição de processos irregulares. No presente capítulo, são apresentadas as definições formais de processos monofractais e multifractais, seus parâmetros descritores e métodos de estimação. O capítulo 2 finda com a breve descrição de três modelos multifractais de destaque.

2.2 Processos Monofractais e Multifractais

Pontos singulares são pontos onde uma equação, curva, ou superfície, possuem transições bruscas ou tornam-se degeneradas. Singularidades não isoladas aparecem em sinais complexos tais como os sinais fractais.

Para caracterizar as estruturas singulares presentes em um sinal $f(t)$, é necessário quantificar precisamente a sua regularidade. O expoente de Lipschitz provê medidas uniformes de regularidade sobre intervalos de tempo, mas também em qualquer ponto isolado. Se $f(t)$ possui uma singularidade no ponto v , significa que esta função é não diferenciável em v , então o expoente de Lipschitz, também conhecido como expoente de Hölder, caracteriza este comportamento singular (Mallat, S., 1999).

Processos multifractais caracterizam-se por possuírem momentos que escalam de maneira não linear, e por possuírem regularidades locais α_t que dependem de t de uma maneira imprevisível, dando origem a duas definições distintas.

2.2.1 Primeira Definição de Multifractais

A primeira definição de multifractais aborda o comportamento em escala dos momentos do processo.

Tal definição é uma generalização da definição de processos monofractais.

Definição 2.2.1 Um processo $Z(t)$ é dito monofractal se sua característica multi-escala é descrita

pela seguinte relação:

$$Z(ct) \stackrel{d}{=} c^H Z(t), \quad (2.1)$$

onde $0 < H < 1$ e o símbolo $\stackrel{d}{=}$ representa igualdade em distribuição.

A teoria de multifractais generaliza a definição anterior e examina relações multi-escalas mais gerais dadas por:

$$Z(ct) \stackrel{d}{=} M(c)Z(t), \quad (2.2)$$

onde $Z(t)$ e $M(c)$ são processos estocásticos independentes. O fator de escalonamento $M(c)$ é uma variável aleatória cuja distribuição não depende de t . Percebe-se que para processos monofractais, tem-se $M(c) = c^H$. Por analogia, define-se o índice generalizado $H(c) = \log_c M(c)$, reescrevendo a Equação 2.2 como:

$$Z(ct) \stackrel{d}{=} c^{H(c)} Z(t). \quad (2.3)$$

Em contraste com processos monofractais, o índice $H(c)$ é agora uma função de c , além de ser uma variável aleatória, e não mais uma constante. Portanto, se comparados com processos monofractais, processos multifractais permitem uma maior variedade de comportamentos em escala.

O comportamento em escala descrito pela Equação 2.3 impõe restrições à distribuição do processo $Z(t)$, conduzindo à primeira definição de multifractais.

Definição 2.2.2 Um processo estocástico $Z(t)$ é dito multifractal se satisfaz:

$$E(|Z(t)|^q) = c(q)t^{\tau(q)+1}, \forall t \in T, q \in Q, \quad (2.4)$$

onde T e Q são intervalos de números reais, e $\tau(q)$ e $c(q)$ são funções com o domínio Q . Além disso, assume-se que T e Q possuem comprimentos não nulos, e que $0 \in T$, $[0, 1] \subseteq Q$. A função $\tau(q)$ é chamada de função de escalonamento de processo multifractal ou função de partição. Trata-se de uma função côncava com $\tau(0) = -1$ (Calvet, L.; Fisher, A. & Mandelbrot, B. B., 1997).

Um processo monofractal $X(t), t \geq 0$, com índice H , satisfaz $X(t) \stackrel{d}{=} t^H X(1)$, e portanto $E(|Z(t)|^q) = t^{Hq} E(|X(1)|^q)$. Assim, utilizando-se a Equação 2.4, para processos monofractais teremos:

$$\tau(q) = Hq - 1 \text{ e } c(q) = E(|X(1)|^q). \quad (2.5)$$

ou seja, para o caso especial de um processo monofractal, a função de escalonamento $\tau(q)$ é linear e

completamente determinada pelo índice H .

2.2.2 Segunda Definição de Multifractais

Na primeira definição, os multifractais são definidos através da propriedade de escalonamento dos momentos do processo sobre diferentes incrementos de tempo. Portanto, trata-se de uma definição global, sem atentar à heterogeneidade da variabilidade do processo no tempo. A segunda definição de multifractais é baseada no expoente de Hölder, com a atenção voltada às características multi-escalas locais de um processo em qualquer ponto t .

Definição 2.2.3 Seja uma função $Z(t)$. A função $Z(t)$ é dita pertencer ao conjunto C_x^a caso exista um polinômio P de grau menor que a e uma constante C tal que:

$$|Z(t) - P(t)| < C|t - x|^a, \quad (2.6)$$

Então, o expoente de Hölder local $\alpha(x)$ de $Z(t)$ em x é dado por:

$$\alpha(x) = \sup\{a : Z \in C_x^a\}. \quad (2.7)$$

Denominado apenas expoente de Hölder daqui por diante, o expoente de Hölder local determina o comportamento da função $Z(t)$ na vizinhança do ponto x . A partir de Definição 2.2.3 pode-se deduzir que caso a função $Z(t)$ seja limitada mas descontínua em x , então, esta função possui $\alpha(x)$ igual a 0 em x . Se o expoente de Hölder $\alpha(x) < 1$, então $Z(t)$ é não diferenciável em x , e $\alpha(x)$ caracteriza o tipo de singularidade.

2.2.3 Espectro Multifractal

O espectro multifractal, representado por $f(\alpha)$, é uma conveniente representação para a distribuição dos expoentes de Hölder em um processo.

Considerando as Equações 2.6 e 2.7, verifica-se que para uma realização fixa de um determinado processo $Z(t)$, suas variações infinitesimais nas proximidades de t são descritas por:

$$|Z(t + \Delta t) - Z(t)| \sim C_t(\Delta t)^{\alpha(t)}. \quad (2.8)$$

onde C_t é chamado de pré-fator (Mandelbrot, 1977). Percebe-se através da Equação 2.8 que $\alpha(t)$ pode ser visto como um fator de escalonamento local em t .

Manipulando-se a Equação 2.8 tem-se que o expoente de Hölder da realização de um processo

contínuo, em um instante t , é dado por:

$$\alpha(t) = \text{Sup} \left\{ \alpha : \alpha = \frac{\log|Z(t + \Delta t) - Z(t)|}{\log \Delta t} \text{ quando } \Delta t \rightarrow 0 \right\}. \quad (2.9)$$

A partir da Equação 2.9, na Definição 2.2.4 apresenta-se um estimador para o expoente de Hölder de um processo $Z(t)$.

Definição 2.2.4 Seja um processo $Z(t)$ com suporte no intervalo $[0, T]$. Subdivida iterativamente o intervalo $[0, T]$ em b^k partes de mesmo tamanho, onde k identifica o estágio na seqüência de subdivisões. Calculando-se o valor $|Z(t_i + b^{-k}T) - Z(t_i)|$ para cada b^k subdivisões, o expoente Hölder grosseiro (*coarse Hölder exponent*) é definido por:

$$\alpha_k(t_i) \equiv \frac{\log|Z(t_i + b^{-k}T) - Z(t_i)|}{\log b^{-k}}. \quad (2.10)$$

A Equação 2.10 conduz a um método para estimar a probabilidade de que um ponto aleatoriamente escolhido no intervalo $[0, T]$ tenha um dado expoente de Hölder. Para isso, é necessário dividir a faixa de α 's em pequenos intervalos não sobrepostos, $(\bar{\alpha}_j, \bar{\alpha}_j + \Delta\alpha]$, e faça $N_k(\bar{\alpha}_j)$ o número de expoentes Hölder grosseiros $\alpha_k(t_i)$ contidos em cada intervalo $(\bar{\alpha}_j, \bar{\alpha}_j + \Delta\alpha]$. Quando $k \rightarrow \infty$, a razão $N_k(\alpha)/b^k$ converge para a probabilidade de um ponto t aleatoriamente escolhido possua expoente Hölder igual a α (Calvet, L.; Fisher, A. & Mandelbrot, B. B., 1997).

Nos processos multifractais, embora exista um valor de expoente de Hölder α_0 mais frequente, outros valores de expoentes de Hölder também ocorrem. Expoentes de Hölder com valores diferentes de α_0 são bastante importantes, uma vez que a maior parte das variações em uma função multifractal encontra-se em instantes com expoentes Hölder diferentes de α_0 . A ocorrência de diferentes valores de expoentes de Hölder no processo permite discriminar multifractais de monofractais, dando origem à Definição 2.2.5.

Definição 2.2.5 Seja $N_k(\alpha)$ o número de expoentes de Hölder grosseiros iguais a α que ocorrem ao subdividir-se o processo $Z(t)$ em b^k partes de mesmo tamanho. Então, o espectro multifractal representado por $f(\alpha)$, é definido por:

$$f(\alpha) \equiv \lim \left\{ \frac{\log N_k(\alpha)}{\log b^k} \right\} \text{ para } k \rightarrow \infty \quad (2.11)$$

Caso o limite da Equação 2.11 exista e $f(\alpha)$ seja definido e positivo em um suporte maior que um único ponto, diz-se que $Z(t)$ é multifractal. Processos cujo espectro $f(\alpha)$ é definido para apenas um

ponto, apresentando um único valor de expoente de Hölder, são classificados como monofractais.

Para processos multifractais, o espectro apresenta uma forma parabólica côncava onde $f(\alpha) \leq \alpha(t)$, para todo $\alpha(t)$ e $f(\alpha) \leq f(\alpha_0)$ para todo $\alpha(t)$, onde $f(\alpha_0)$ é valor máximo de $f(\alpha)$ (Riedi, R. H. & Lévy Véhel, J, 1997).

2.3 Estimação da Característica Multifractal

Assim como as definições de multifractais apresentadas anteriormente, a estimação da característica multifractal apresenta também duas abordagens. A primeira abordagem é baseada na estimação da função de partição do processo, enquanto a segunda está ligada a estimação da regularidade do processo, ou seja, ao seu espectro multifractal.

2.3.1 Estimação da Função de Partição

A partir da Definição 2.2.2 percebe-se que a descrição de um processo multifractal envolve tanto o conhecimento da função de $c(q)$ quanto da função de escalonamento $\tau(q)$. A seguir, apresenta-se um método simples para testar a característica multi-escala do processo, assim como estimar as funções $c(q)$ e $\tau(q)$.

Considere os dados $(Z_i)_{i=1}^N$ com suporte no intervalo $[0, T]$, em uma escala $\delta = \frac{T}{N}$. Define-se a soma partição como:

$$S_m^Z(q) = \sum_{k=1}^{N/m} (\bar{Z}_k^{(m)})^q \quad (2.12)$$

onde

$$\bar{Z}_k^{(m)} = \sum_{l=1}^m Z_{(k-1)m+l} \quad (2.13)$$

é o processo original observado em uma escala de agregação $\delta = \frac{T \cdot m}{N}$

Para um valor fixo de q_i , variam-se os valores de m em uma faixa apropriada, obtendo-se um conjunto de pontos no plano $\log m \times \log S_m^Z(q_i)$. Caso $\log S_m^Z(q_i)$ seja aproximadamente linearmente dependente de $\log m$, diz-se que os dados apresentam escalonamento multifractal. O coeficiente angular da reta obtida através da aproximação por mínimos quadrados e denominado $\tau(q_i)$, sendo $c(q_i)$ igual ao ponto de interseção entre o eixo das ordenadas e a reta em questão. A Equação 2.14 e a Figura 2.2 ilustram melhor a forma de obtenção dos valores de $\tau(q_i)$ e $c(q_i)$.

$$\log S_m^Z(q_i) \cong \tau(q_i) \cdot \log m + \log c(q_i) \quad (2.14)$$

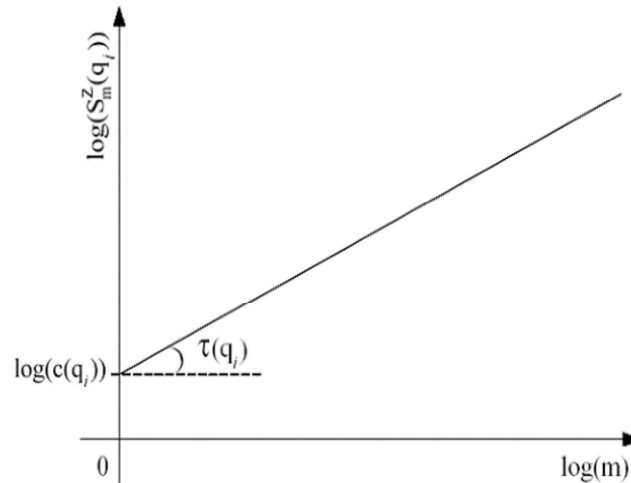


Fig. 2.2: Estimação das funções $\tau(q)$ e $c(q)$

Uma vez conhecidos $\tau(q_i)$ e $c(q_i)$ para diferentes valores de q_i , obtém-se então as funções $\tau(q)$ e $c(q)$. A Figura 2.3a mostra a curva da função soma partição obtida para a série representativa do número de bytes por quadro de vídeo codificado MPEG-4 do filme *Silence of the Lambs* (Fitzek, F. H. P. & Reisslein, M., 2000). Neste exemplo para a obtenção da função soma partição foram considerados valores de $q_i \in [-4; 4]$ e $m \in [1; 2048]$. A Figura 2.3b exibe a curva correspondente à função $\tau(q)$ obtida a partir dos diferentes valores de $\tau(q_i)$ para a soma partição da sequência de vídeo considerada.

Para processos multifractais a função $\tau(q)$ é não linear. Tipicamente, o valor da derivada da função $\tau(q)$ varia muito pouco, estando normalmente no intervalo $[1/2; 2]$, levando o gráfico de $\tau(q)$ parecer quase linear. Sendo assim, uma análise feita apenas através de inspeção visual da função $\tau(q)$ pode levar a falhas. Portanto, a análise feita através do espectro multifractal é geralmente mais informativa.

2.3.2 Estimação do Espectro Multifractal

A função $f(\alpha)$ tal como apresentada na Definição 2.2.5 e chamada de espectro de granularidade grosseira (*coarse graining spectrum*) ou também espectro de grandes desvios (*large deviation spectrum*). Além do espectro multifractal de grandes desvios, o espectro de Hausdorff e o espectro de Legendre também merecem destaque (Falconer, K. J., 1990).

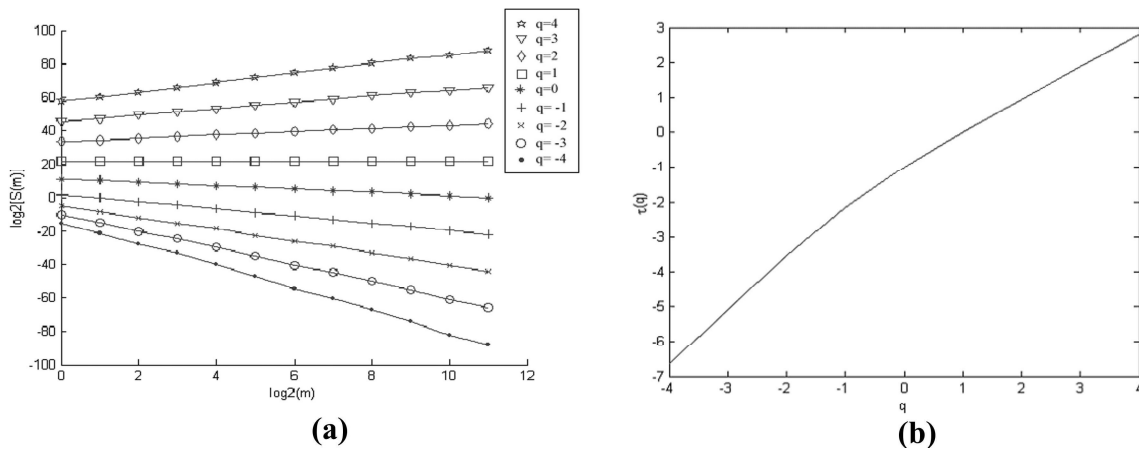


Fig. 2.3: (a) Soma partição da série representativa do tamanho em bytes dos quadros de vídeo codificado MPEG-4 do filme *Silence of the Lambs*. (b) Função partição $\tau(q)$ obtida para a sequência de vídeo codificado MPEG-4 considerada.

Basicamente, qualquer um dos três espectros provê informações sobre quais singularidades ocorrem em um sinal, e quais são as singularidades que predominam.

O espectro é uma curva unidimensional, normalmente com um perfil concavo, onde a abscissa representa os expoentes de Hölder que efetivamente existem no sinal, e a ordenada está relacionada com a quantidade de pontos onde uma dada singularidade será encontrada. Por exemplo, se um espectro multifractal $f(\alpha)$ de um dado sinal possui apenas um máximo em $\alpha = a$, com $f(\alpha) = 1$, então ao selecionarmos aleatoriamente um ponto deste sinal, este ponto possuirá quase certamente o expoente de Hölder com valor igual a . Por outro lado, caso $\alpha = b$ tal que $f(b) = 0$, então existira um conjunto muito esparsos de pontos para os quais teremos expoente Holder igual a b , ou seja, será pequena a probabilidade de ocorrência deste valor de expoente de Hölder no sinal. Para o caso onde $\alpha = c$ tal que $f(c) = -\infty$, não ocorrerão no sinal expoentes de Holder com valores iguais a c .

Uma breve descrição de espectro multifractal apresentada na seção 2.2.3 é apenas uma visão superficial do conceito de espectro multifractal. Na realidade, existem diferenças essenciais entre os três espectros, conforme as definições apresentadas a seguir.

Das mais variadas dimensões fractais em uso, a dimensão de Hausdorff é provavelmente a mais importante. A dimensão de Hausdorff tem a vantagem de ser definida para qualquer conjunto, e é matematicamente conveniente (Falconer, K. J., 1990).

Seja U_i uma coleção finita de conjuntos com diâmetro de no máximo δ , que cobre um subconjunto F em R^n . Neste caso, chamamos U_i de coleção de conjuntos de cobertura δ de F .

Definição 2.3.1 Seja $|U_i|$ o diâmetro do conjunto U_i . Define-se $H_\delta^s(F)$ para algum $\delta > 0$ como:

$$H_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ seja uma coleção de conjuntos de cobertura } \delta \text{ de } F \right\} \quad (2.15)$$

A medida de Hausdorff s -dimensional de \mathbf{F} é definida como limite de $H_\delta^s(F)$ quando δ tende a zero, ou seja,

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F) \quad (2.16)$$

O limite que define a medida de Hausdorff existe para qualquer subconjunto de \mathbf{F} em R^n , sendo seu o valor usualmente igual a 0 ou ∞ .

Definição 2.3.2 O valor crítico de s para o qual a medida Hausdorff s -dimensional $H^s(F)$ muda instantaneamente de ∞ para 0 é definido como dimensão de Hausdorff de \mathbf{F} .

Normalmente, o conjunto dos pontos com um mesmo grau de singularidade α constituem um conjunto fractal. Tal conjunto fractal possui sua geometria fractal precisamente descrita através de sua dimensão de Hausdorff. Assim, o espectro de Hausdorff provê a informação geométrica pertinente à dimensão fractal dos conjuntos de pontos que possuem um dado expoente de Hölder em um sinal.

Definição 2.3.3 Seja K_α o conjunto dos pontos de um sinal $Z(t)$ que apresentem valor de expoente de Hölder igual a α . Ou seja,

$$K_\alpha := \{x \in R^d : \alpha(x) := \alpha\} \quad (2.17)$$

O espectro de Hausdorff de $Z(t)$ é dado por:

$$f_H(\alpha) := \dim(K_\alpha), \quad (2.18)$$

onde $\dim(K_\alpha)$ é a dimensão de Hausdorff do conjunto K_α .

Do ponto de vista matemático, o espectro de Hausdorff é o espectro multifractal mais preciso, sendo também o mais difícil de ser estimado (Falconer, K. J., 1990).

Apresentado anteriormente na Definição 2.2.5, o espectro de grandes desvios provê informações estatísticas relacionadas à probabilidade de se encontrar em um sinal, um ponto com um dado expoente grosseiro de Hölder. A partir da Definição 2.2.5 observa-se que ao variar-se o valor de k , o espectro de grandes desvios nos permite obter informações relativas à probabilidade de se encontrar aleatoriamente um ponto com um expoente de Hölder específico, em diferentes escalas de resolução.

Ainda que o espectro de grandes desvios não seja exatamente a densidade de probabilidade correspondente aos α 's, mas sim uma dupla normalização logarítmica desta densidade, a estimação do espectro de grandes desvios exige a aplicação de ferramentas de estimação de densidade de probabilidade. Neste caso, para a estimação da densidade de probabilidade normalmente são empregadas ferramentas clássicas como o método de kernel duplo (Devroye, L., 1989).

O espectro de Legendre é uma aproximação côncava do espectro de grandes desvios. O espectro de Legendre é de grande interesse, pois, normalmente permite estimar o espectro multifractal de maneira mais simples e robustas, embora para alguns sinais específicos (Riedi, R. H. & Lévy Véhel, J, 1997), o espectro de Legendre omita algumas informações possíveis de serem obtidas através do espectro de grandes desvios. A mencionada simplicidade de estimação do espectro de Legendre decorre de sua definição.

Definição 2.3.4 Seja $\tau(q)$ a função partição de um sinal $Z(t)$. O espectro de Legendre de $Z(t)$ é dado por:

$$f_L(\alpha) := \tau^*(\alpha) \quad (2.19)$$

onde $\tau^*(\alpha)$ é a transformada de Legendre da função partição $\tau(q)$ dada por $\tau^*(\alpha) = \inf_q (q\alpha - \tau(q))$.

A Figura 2.4 ilustra a convergência entre o espectro multifractal de Legendre e o espectro multifractal de grandes desvios em diferentes resoluções m 's.

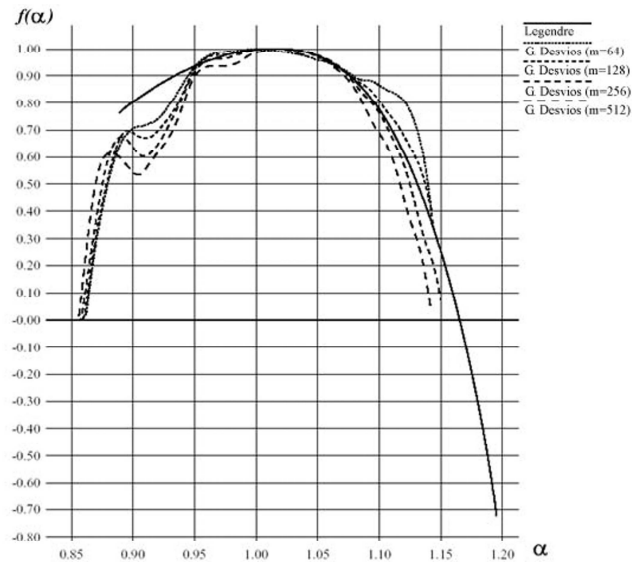


Fig. 2.4: Convergência entre o espectro de Legendre e espectro de grandes desvios em diferentes resoluções.

2.4 O Expoente de Hölder e o Tráfego de Redes

Apresentado na Definição 2.2.3, o expoente de Hölder de um sinal em um ponto particular no tempo t_0 está relacionado à regularidade do sinal neste ponto. No contexto de tráfego de redes, tais variações locais são quantificadas a partir do processo de taxa de tráfego, dado pelo número de bytes ou de pacotes em um intervalo $[t_0; t_0 + \Delta t]$ de tamanho Δt em t_0 .

Como mostrado na Equação 2.8, o expoente de Hölder α pode ser interpretado como um número real que controla o comportamento multi-escala local de um processo. O tráfego de rede possui comportamento multi-escala local com expoente de Hölder $\alpha(t_0)$ no tempo t_0 , se o processo taxa de tráfego comporta-se como $(\Delta t)^{\alpha(t_0)}$ quando $\Delta t \rightarrow 0$. Considerando-se o comportamento do tráfego, percebe-se que quando mais próximo de zero são os valores de $\alpha(t_0)$, maior é a intensidade dos surtos na região de t_0 . Por outro lado, valores de $\alpha(t_0)$ próximos ou superiores a 1, correspondem a instantes de baixa intensidade de tráfego ou pequenas variações locais.

A Figura 2.5 indica através de escala de tons de cinza, as magnitudes do expoente Hölder em diferentes pontos do traço de tráfego DIAL 3. O traço de tráfego DIAL 3 representa o número de pacotes que a cada 1 milissegundos atravessam um anel FDDI (*Fiber Distributed Data Interface*) de um dos laboratórios de pesquisas AT&T (Feldmann, A.; Gilbert, A.; Willinger, W. & Kurtz, T. G., 1998). Na Figura 2.5 quanto menor for o expoente de Hölder, ou equivalentemente, quanto mais intensos forem os surtos de tráfego, mais escuros serão os tons de cinza com ocorrência de surtos de baixa intensidade, ou seja, expoentes de Hölder com magnitudes mais elevadas.

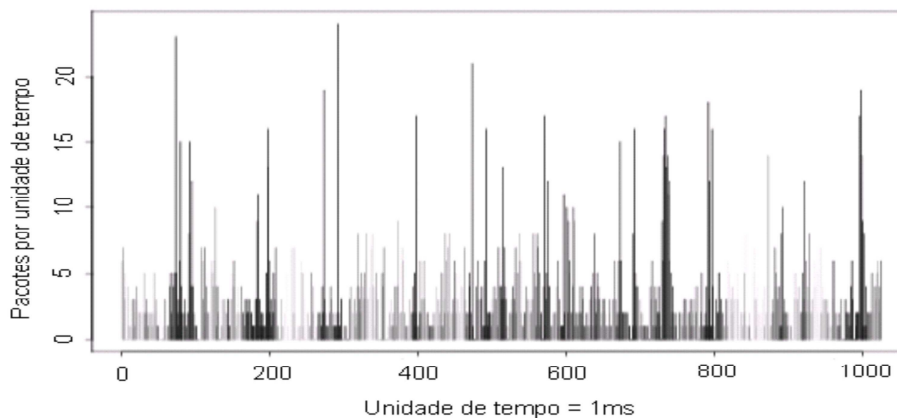


Fig. 2.5: Regularidade local do traço de tráfego DIAL 3 representada em diferentes tons de cinza: (escuros) Expoentes de Hölder pequenos, (claros) Expoentes de Hölder grandes.

2.5 Modelagem de Tráfego Multifractal

Um modelos de tráfego preciso captura importantes características do tráfego, melhorando sua compreensão e permitindo o estudo dos efeitos dos parâmetros do modelo no desempenho das redes. A constatação da presença da auto-similaridade no tráfego de rede (Leland, W. E.; Taqqu, M. S.; Willinger, W. & Wilson, D. V., 1994), inadequadamente descrita por modelos clássicos, tais como, modelos Markovianos e Poissonianos, foi seguida imediatamente pelo desenvolvimento de modelos fractais de tráfego.

O movimento Brawniano fracionário (fBm) e seu processo de incrementos, denominados ruído Gaussiano fracionário (fGn), tornaram-se os processos mais amplamente utilizados na modelagem do tráfego auto-similar. Entretanto, principalmente em escalas de tempo reduzidas, os sinais de tráfego exibem auto-similaridade e dependência de longa duração, mas também correlações de curta duração e comportamento multi-escala, que são fenômenos incoerentes com modelos monofractais. Neste sentido, foram propostos modelos mais completos, baseados na análise multifractal, dentre os quais podem ser destacados: o modelo wavelet multifractal (*Multifractal Wavelet Model, MWM*), o model multiplicador Gaussiano de variância variável (*Variable Variance Gaussian Multiplier Model, VVGMM*) e movimento Brawniano multifracionário (*multifractional Braownian motion, mBm*).

2.5.1 Modelo Wavelet Multifractal

O MWM é um modelo baseado na transformada *wavelet* (Mallat, S., 1999), desenvolvido por Riedi et al. (Riedi, R. H.; Crouse, M. S.; Ribeiro, V.J. & Baraniuk, R.G., 1999) para modelar dados positivos, estacionários e com dependência de longa duração. O MWM utiliza a *wavelet* Haar e garante que o sinal de saída seja positivo através da modelagem dos coeficientes *wavelets* dados por:

$$W_{j,k} = A_{j,k}U_{j,k}, j, k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

onde j indica a escala de análise, k é o índice de translação, $W_{j,k}$ é o coeficiente *wavelet*, $U_{j,k}$ é o coeficiente de escala e $A_{j,k}$ é uma variável aleatória independente com suporte no intervalo $[-1; 1]$.

Seja $X(t)$ o sinal a ser modelado. Na síntese do MWM, após a escolha apropriada do coeficiente de escala na escala primitiva $U_{0,0}$, e da variância dos multiplicadores $A_{j,k}$ em cada escala, a aproximação de $X(t)$ na resolução $2^{-(j+1)}$ dada por U_{j+1} , é obtida a partir de recursivas somas e diferença de $U_{j,k}$ e $W_{j,k}$ sujeitas as equações

$$\begin{cases} U_{j+1,2k} = 2^{-1/2}(U_{j,k} + W_{j,k}) \\ U_{j+1,2k+1} = 2^{-1/2}(U_{j,k} - W_{j,k}) \end{cases} \quad (2.21)$$

Este processo recursivo é repetido até que se atinja a resolução desejada ou equivalentemente, até que se obtenha o número desejado de amostras. A Figura 2.6 ilustra este processo.

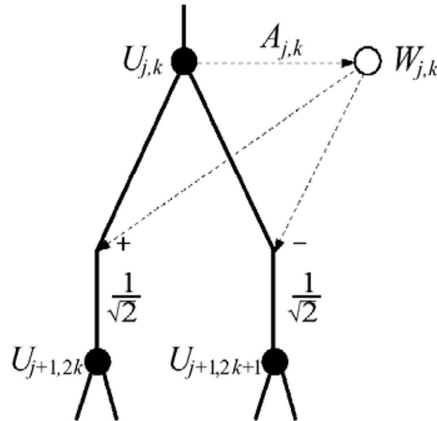


Fig. 2.6: Processo de construção do MWM.

Assim como os modelos baseados no fBm/fGn, o MWM pode precisamente modelar a dependência de longa duração de um conjunto de dados. Entretanto, o MWM proporciona ganhos de modelagem, pois diferentes dos modelos baseados no fBm/fGn, também é capaz de capturar características multiescalas mais ricas. Além disso, o custo computacional envolvido na síntese do MWM também é menor que custo da maioria dos métodos de síntese do fBm/fGn (Riedi, R. H.; Crouse, M. S.; Ribeiro, V.J. & Baraniuk, R.G., 1999).

2.5.2 Modelo Multifractal Adaptativo baseado em Wavelets

Os autores (Vieira, F.H.T & Lee L.L., 2009a) desenvolveram um modelo multifractal denominado de Modelo Multifractal Adaptativo baseado em Wavelets (AMW) tendo a vantagem de requer menos parâmetros do que o MWM e os quais podem ser atualizados em tempo real ("on-line").

Este modelo simplifica o processo de síntese do modelo MWM, ao incorporar o conhecimento dos parâmetros das funções de escala $\tau(q)$ e do fator de momento $c(q)$, definidos na seção 2.3.

2.5.3 Modelo Multiplicador Gaussiano de Variância Variável

Uma cascata é um processo em que um dado conjunto é dividido em porções sucessivamente menores obedecendo a uma regra geométrica, e ao mesmo tempo, a medida associada a este mesmo conjunto é dividida de acordo com uma outra regra aleatória. A Figura 2.7 ilustra as primeiras iterações para a criação de uma cascata.

Considere um conjunto inicial I com suporte no intervalo $[0; 1]$, cuja medida associada a este intervalo seja $\mu(I) = 1$. Este conjunto é dividido em dois novos conjuntos $I_0 \in [0; 1/2]$ e $I_1 \in [1/2; 1]$. Para $0 < r < 1$, estas medidas associadas a estes dois novos conjuntos são dadas por $\mu(I_0) = r\mu(I)$ e $\mu(I_1) = (1 - r)\mu(I)$, tal que a medida inicial é preservada. Na próxima iteração, este processo é repetido para ambos os conjuntos I_0 e I_1 , dando origem a quatro novos conjuntos $I_{00}, I_{01}, I_{10}, I_{11}$ tais que a soma total das medidas relativas a estes conjuntos seja preservada. Este processo se repete k vezes até que seja obtida a resolução desejada.

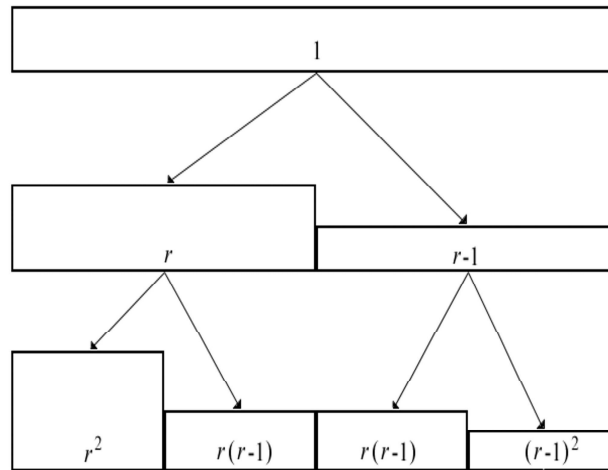


Fig. 2.7: Processo de construção da cascata multiplicativa ($r=2/3$)

Cascatas multiplicativas possuem natureza multifractal. O valor do multiplicador r determina a distribuição do processo dado pela medida dos conjuntos em uma dada resolução. O modelo multiplicador Gaussiano de variância proposto por Krishna et al. (Krishna, P. M.; Gadre, V. M. & Desai, U. B., 2003) é uma cascata multiplicativa multifractal, na qual os valores dos multiplicadores em cada estágio i são amostras de uma distribuição Gaussiana $f_i(r)$. A média da distribuição normal dos multiplicadores é 0.5, portanto, tanto r quanto $1 - r$ possuem distribuição de probabilidade $N(0.5; \sigma_i^2)$, onde σ_i^2 é a variância dos multiplicadores em cada estágio i , estimadas a partir do processo original a ser modelado.

Os experimentos realizados por Krishna et. al. (Krishna, M.; Gadre, V. & Desai, U., 2002) (Krishna, P. M.; Gadre, V. M. & Desai, U. B., 2003) evidenciam que os traços de tráfego sintetizados através do modelo multiplicadores Gaussiano de variância variável, apresentam distribuição do comprimento da fila, atraso, perda de pacotes e valor de banda efetiva, bastante próximos dos obtidos para o traço de tráfego original. A fácil estimação dos parâmetros do modelo VVGMM, ou seja, a estimação da variância dos multiplicadores em cada estágio i , apresentam-se como principal vantagem do modelo.

2.5.4 Movimento Browniano Multifracionário

O fBm é um processo auto-similar capaz de descrever convenientemente sinais irregulares que ocorrem em diversas situações, e sua regularidade é constante e igual ao parâmetro de Hurst em todos os pontos. Entretanto, alguns conjuntos de dados reais possuem regularidade variável e, para tais casos, um único parâmetro H pode não prover uma descrição adequada da regularidade do conjunto. Para superar as limitações existentes no fBm, Peltier e Véhel (Peltier, R. & Véhel, J. L., 1995) introduziram o movimento Browniano multifracionário (*multifractional Brownian motion*, mBm). Diferente do fBm, no mBm é permitido que a regularidade do processo varie ao longo da trajetória, sendo descrita por uma função no tempo $H(t)$ ao invés de um único número H . Tal característica é muito útil quando se faz necessário modelar processos em que a regularidade varie no tempo, tais como o tráfego Internet.

2.6 Considerações Finais

A evolução dos estudos de modelagem de tráfego das redes de comunicação foi apresentada no presente capítulo. Neste contexto, os modelos multifractais são apresentados como os que melhor representam o real comportamento do tráfego das modernas redes de comunicação. As diferentes definições apresentadas ao longo do capítulo demonstram como os processos multifractais podem ser vistos como uma generalização dos modelos monofractais. Embora sejam melhores descritores do comportamento do tráfego, os modelos de tráfego multifractais apresentam maior complexidade matemática se comparado com outras classes de modelos. Portanto, em ocasiões onde os ganhos com uma modelagem mais precisa sejam reduzidos, a maior complexidade matemática dos modelos multifractais torna pouco atrativa a utilização de tais modelos.

Capítulo 3

Estimação de Probabilidade de Perda de Dados

3.1 Introdução

A teoria de filas é o estudo de modelos matemáticos de sistemas de serviços, tais como centrais telefônicas, fluxos de tráfego, entre outros, sobre a base do que pode conceber sistemas reais e , para estabelecer um quadro geral de conceitos em que novos problemas podem ser instalados, e que os atuais problemas possam ser resolvidos. Correspondendo a estas duas utilizações, existem dois tipos de resultados: resultados específicos relativos a modelos especiais, e teoremas gerais, válidos para muitos modelos.

A maior parte da literatura atual de teoria de filas consiste em resultados específicos baseando-se em especiais pressupostos estatísticos sobre o tráfego no serviço de sistema em estudo. Poucos resultados em teoria de filas são conhecidos que não dependem especialmente em pressupostos estatísticos, como a distribuição exponencial negativa, ou variáveis aleatórias independentes.

No presente capítulo utilizaremos alguns resultados bem conhecidos em teoria de filas para propor um novo método de cálculo de probabilidade de perda considerando que o tráfego de rede possua características multifractais.

A probabilidade de perda e atraso de pacotes são duas medidas de desempenho fundamentais associadas à qualidade de serviço (QoS) em redes de computadores, como redes TCP-IP e ATM. Vários estudos têm sido realizados com o intuito de caracterizar o tamanho médio da fila e a distribuição do número de pacotes no *buffer* (Chang, C, 1994) (Cruz, R. L., 1991a) (Cruz, R. L., 1991b) (Dai, L., 1997). Para que, dessa forma, se consiga estabelecer limitantes para essas medidas de desempenho. O conhecimento destes limitantes permite garantir a qualidade de serviço requerida pelos fluxos de tráfego.

O objetivo deste capítulo é a análise de fila de um servidor alimentado por tráfego multifractal, principalmente sob a luz do conceito de probabilidade de perda.

O capítulo está organizado da seguinte forma. Na Seção 3.2, apresentamos alguns conceitos básicos sobre teoria de fila. A Seção 3.3 discute uma abordagem para processos com longa dependência (monofractal). Na Seção 3.4 mostramos um modelo multifractal existente. Já na Seção 3.5 apresentaremos uma proposta para o cálculo da probabilidade de perda baseada na teoria de Benes (Benes V., 1963) e aproximando a expressão da relação variância por tempo por uma curva exponencial. Na Seção 3.6 caracterizamos as séries de tráfegos utilizadas nos experimentos, juntamente com alguns parâmetros obtidos através da aproximação utilizada. Na Seção 3.7 apresentaremos os resultados obtidos nas simulações, comparando com o métodos abordados nas Seções 3.3 e 3.4. E finalmente na Seção 3.8 enfatiza as conclusões obtidas.

3.2 Conceitos Básicos

Nesta seção são apresentados alguns conceitos básicos da teoria de fila que servem como uma introdução às seções subsequentes.

Sejam $X(t)$ o processo de chegada de pacotes acumulados em um servidor no intervalo de tempo contínuo $[0; t)$ com incrementos estacionários, C a capacidade do servidor e $I(t)$, o processo de chegada de dados à entrada da rede para chegadas no intervalo de tempo $[0; t)$, dado por:

$$I(t) = X(t) - Ct. \quad (3.1)$$

O processo correspondente ao tamanho de fila $W(t)$ em tempo contínuo é representado pelas seguintes equações:

$$W(0) = 0 \text{ e } W(t) = \sup_{s \leq t} I(t) - I(s) \quad (3.2)$$

Para que a fila seja estável é preciso que $E[X(t) - Ct] < 0$. Dessa forma, a distribuição em regime permanente do processo de tamanho de fila Q pode ser expressa como uma generalização da Equação (Vieira, F.H.T & Lee L.L., 2009c):

$$Q \stackrel{d}{=} \sup_{t \geq 0} X(t) - Ct, \quad (3.3)$$

onde $\stackrel{d}{=}$ denota igualdade em distribuição.

As próximas seções tratam de alguns resultados de estimação de probabilidade de perda citados

na literatura baseados em diferentes teorias e em modelos de tráfego que assumem distribuição com variância finita. Outros resultados de fila para modelos com variância infinita também foram reportados na literatura, porém não serão abordados nesta dissertação (Karasaridis, A. & Hatzinakos, D., 2001).

3.3 Processos com Longa-dependência

Várias questões de engenharia de tráfego, como dimensionamento de *buffer* e controle de fluxo, estão relacionadas ao comportamento de fila do tráfego nas redes. A característica de longa dependência do tráfego tem um impacto significativo em seu comportamento de fila, principalmente com relação à probabilidade de perda (Grossglauser, M. & Bolot, J. C., 1999). Norros (Norros, I., 1994) e Duffield e O'Connell (Duffield, N. G. & O'Connell, N., 1993) apresentaram limitantes inferiores para a probabilidade de perda $P(Q > b)$ (probabilidade do tamanho de fila Q exceder o tamanho do *buffer* b) para processos auto-similares. Entretanto, em muitos casos, esta aproximação subestima o valor real de $P(Q > b)$. O limitante inferior para $P(Q > b)$ decai assintoticamente (para *buffer* muito grande) de acordo com uma função de Weibull (Norros, I., 1994) (Duffield, N. G. & O'Connell, N., 1993). A distribuição de cauda da ocupação do *buffer* (a densidade de probabilidade do tamanho da fila para b grande) é mais 'pesada', ou seja, possui decaimento mais lento do que a distribuição exponencial predita por modelos de tráfego tradicionais de curta-dependência. A distribuição do tamanho da fila ou a probabilidade de perda para processos que têm parâmetro de Hurst $H \in (0.5; 1)$ pode ser dada, segundo (Duffield, N. G. & O'Connell, N., 1993), por:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} b^{-2(1-H)} \ln P(Q > b) = -a^{-2(1-H)}(a + C^2)/2, \quad (3.4)$$

onde $a = C/H - C$.

A fórmula acima pode ser usada para estimar $P(Q > b)$ da seguinte forma aproximadamente:

$$P(Q > b) \approx e^{-\gamma b^{2(1-H)}}, \quad (3.5)$$

onde $\gamma = a^{-2(1-H)(a+C)^2/2}$. Esta aproximação é precisa para *buffer* b muito grande, mas pode não valer para outros valores de b , o que de fato resulta em uma subestimação de $P(Q > b)$ (Kim, H. S. & Shroff, N. B., 2001). Pode-se demonstrar que a distribuição de probabilidade de transbordo do *buffer* para tráfego com curta-dependência como processos Markovianos e de Poisson apresentam um decaimento exponencial relativo ao tamanho do *buffer*. Em contraste, tem-se uma distribuição de Weibull para processos com longa-dependência como o processo fBm (*fractional Brownian motion*) e um decaimento hiperbólico para processos alfa-estáveis (Karasaridis, A. & Hatzinakos, D., 2001).

As discrepâncias nas distribuições de probabilidade de perda se tornam ainda mais acentuadas para tráfego não-gaussiano (Norros, I., 1994). Vários autores afirmam que o tempo entre chegadas de pacotes age como um fenômeno multiplicativo, ao invés de aditivo. Isto implica que a distribuição dos tempos de chegada para um fluxo de tráfego tende a ser lognormal, que é uma distribuição de cauda pesada (Riedi, R. H.; Crouse, M. S.; Ribeiro, V.J. & Baraniuk, R.G., 1999). Estas constatações tanto para a distribuição dos dados de tráfego como para a probabilidade de perda incentivam a combinação de métodos para a estimação da probabilidade de perda. Desta forma neste trabalho, considerando as variações das características do tráfego, propomos uma expressão para a modelagem de forma mais precisa para o cálculo da probabilidade de perda.

3.4 Probabilidade de Perda para Tráfego Multifractal

A cauda da distribuição do tamanho da fila, ou seja, a estimação assintótica da probabilidade de perda em um sistema de fila com *buffer* infinito, tem sido bastante estudada, (Chang, C., 1994) (Glynn, P. W. & Whitt, W., 1994) (Addie, R. G. & Zukerman, M., 1994). Porém, há um número reduzido de trabalhos que tratam diretamente da probabilidade de perda em sistemas com *buffer* finito (Likhanov, L. & Mazumdar, R. R., 1998) (Baiocchi, A.; Melazzi, N.; Listani, M.; Roveri, A. & Winkler, R., 1991) (Shroff, N. & Schwatz, M., 1998) (Vieira, F.H.T & Lee L.L., 2009c).

Na literatura, a taxa de perda de pacote (probabilidade de perda) $P_l(x)$ é freqüentemente aproximada pela probabilidade de cauda (probabilidade de transbordo) $P(Q > x)$, que de fato, fornece um limitante superior para a probabilidade de perda, (Krunz, M. & Ramasamy, A. M., 2000) (Gyorgy, A. & Borsos, T., 2001). Estudos realizados comprovam que tanto para vários modelos de tráfego, como para séries de tráfego reais, esta estimativa é realmente um limitante superior bastante aproximado (Duffield, N. G.; Lewis, J. T.; O Connell, N.; Russel, R. & Tomey, F., 1995) (Kelly, F. P., 1991) (Vieira, F.H.T & Lee L.L., 2009c).

Seja um servidor com taxa constante C , um fluido de entrada com taxa λ_n , ou seja, a média de tráfegos que entra no servidor, e os processos Q_n e \hat{Q}_n denotando tamanho da fila para *buffer* finito e infinito no instante de tempo n , respectivamente. Supõe-se que λ_n seja estacionário e ergódico e que $E(\lambda_n) < C$. No cálculo de probabilidade de perda, considera-se que Q_n e \hat{Q}_n sejam estacionários e ergódicos. A probabilidade de perda $P_l(x)$ para um *buffer* de tamanho x é definida como a razão entre a quantia de fluido de tráfego perdido pela quantia de fluido de entrada como (Kim, H. S. & Shroff, N. B., 2001):

$$P_l(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^N \max(Q_{k-1} + \lambda_k - C - x, 0)}{\sum_{k=1}^N \lambda_k}. \quad (3.6)$$

Já a probabilidade de cauda é definida como o tempo gasto pelo fluído de tráfego no *buffer* de tamanho infinito, acima de um nível x , dividido pelo tempo total de observação e pode ser expressa como (Kim, H. S. & Shroff, N. B., 2001):

$$P(Q > x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N I(Q_k > x), \quad (3.7)$$

onde se A é uma hipótese verdadeira, $I(A) = 1$; do contrário, $I(A) = 0$.

Para processos de chegada de tráfego sem memória em um sistema de fila, Kelly (Kelly, F., 1996) obteve uma expressão assintótica para a probabilidade de perda $P_l(x)$ para *buffer* grande, e em (Likhanov, L. & Mazumdar, R. R., 1998), eles obtiveram uma fórmula assintótica para a probabilidade de perda através da análise assintótica de muitas fontes. Este último resultado é válido para a maioria dos processos de tráfego e é mais preciso e robusto do que os obtidos através da Teoria de Grandes Desvios (Kesidis, G.; Walrand, J. & Chang, C. S., 1993). Com relação a tráfego multifractal de entrada, podemos citar os trabalhos de (Vieira, F.H.T & Lee L.L., 2009c) que desenvolveram uma proposta para cálculo assintótico de probabilidade de perda multifractal e Ribeiro et al. (Ribeiro, V. J.; Riedi, R. H.; Crouse, M. S. & Baraniuk, R. G., 2000), que desenvolveram uma análise de fila multiescala para modelos multifractais baseados em cascata via um método não-assintótico, válida para qualquer tamanho de *buffer*. Esta aproximação nomeada de Análise de Fila Multiescala (*Multiscale Queueing*) incorpora as distribuições dos dados de tráfego em múltiplas resoluções temporais (não apenas as estatísticas de segunda ordem) (Ribeiro, V. J.; Riedi, R. H.; Crouse, M. S. & Baraniuk, R. G., 2000). Considere o processo aleatório discreto L_i , $i \in Z$, representando a carga (volume) de tráfego que entra em um servidor com *buffer* infinito e capacidade de serviço constante C . Considere também que Q_i represente o tamanho da fila no instante de tempo i . Denotemos por K_r , o tráfego agregado que chega entre os instantes 0 a r , ou seja:

$$K_r := \sum_{i=0}^r L_i. \quad (3.8)$$

O processo K_r refere-se aos dados de tráfego na escala de tempo r . Seja $K_0 = 0$, usando as equações de Lindley (Lindley, D. V., 1952), temos que:

$$Q_0 = \max[Q_r + K_r - rC, K_{r-1} - (r-1)C, \dots, K_0], \quad (3.9)$$

Desde que $Q_r \geq 0$ para todo r , temos:

$$Q_0 \geq \sup_{r \in N} (K_r - rC), \quad (3.10)$$

Denotando $-t$ o ultimo instante que a fila estava vazia antes do instante de tempo igual a 0 ($-t = 0$ se $Q_0 = 0$) obtemos:

$$Q_0 = K_t - tC \leq \sup_{r \in \mathbb{N}} (K_r - rC), \quad (3.11)$$

Assim, se a fila estava vazia em algum momento no passado, então:

$$Q_0 = \sup_{r \in \mathbb{N}} (K_r - rC), \quad (3.12)$$

Dessa forma o estudo é exclusivo para Q_t com $t = 0$ e denotamos $Q := Q_0$ para facilitar a notação.

Note que a Equação 3.12 proporciona uma ligação direta entre o tamanho da fila Q e o processo de chegada de tráfego agregado K_r com múltiplas escalas de tempo r .

Este é o fato que modelos baseados em cascata provêm fórmulas explícitas e simples para K_r em escalas de tempo diádicas, ou seja, $r = 2^n$ ($n = 1, 2, \dots, \infty$). A Análise de Fila Multiescala mostra que a probabilidade de perda $P_l(x)$ pode ser estimada pela seguinte equação (Ribeiro, V. J.; Riedi, R. H.; Crouse, M. S. & Baraniuk, R. G., 2000):

$$MSQ(b) \approx P[Q > b] \approx 1 - \prod_{i=0}^n P[K_{2^{2n-i}} < b + C2^{n-i}]. \quad (3.13)$$

Porém existe uma restrição às escalas de tempo diádicas. Analisando quantitativamente o tamanho da fila Q_D , que é obtida através da restrição do supremo da Equação 3.12 para escalas de tempo que aparecem naturalmente em uma representação multi-escla, isto é, as escalas de tempo diádicas:

$$Q_D := \sup_{m \in \{0, 1, \dots, n\}} (K_{2^m} - C2^m), \quad (3.14)$$

A primeira aproximação para essa análise é dada por:

$$P[Q > b] \approx P[Q_D > b], \quad (3.15)$$

Claramente, $Q_D \leq Q$ e $P[Q > b] \geq P[Q_D > b]$ justificando a Equação 3.15, que nos diz que a escala de tempo diádica pode representar todas as escalas de tempo, usando a notação de escala de tempo crítico (CTS) (Ryu B. K. & Elwalid A., 1996), (Neidhardt A. L. & Wang J. L., 1998), (Grossglauser M. & Bolot J.C., 1996). A CTS é definida como:

$$r^* = \arg \sup_{r \in \mathbb{N}} P[K_r - Cr > b], \quad (3.16)$$

e a escala de tempo crítico de filas (CTSQ) definida como:

$$CTSQ(b) := P[K_{r^*} - Cr^* > b], \quad (3.17)$$

E com isso mostra-se que $CTSQ(b) \approx P[Q > b]$ (Ryu B. K. & Elwalid A., 1996), (Neidhardt A. L. & Wang J. L., 1998), (Grossglauser M. & Bolot J.C., 1996).

Similarmente, introduz-se a escala de tempo crítico de filas, como:

$$r_D^* = \arg \sup_{m \in \{0,1,\dots,n\}} P[K_{2^m} - C2^m > b], \quad (3.18)$$

E definimos a escala de tempo crítico diádicas de filas (CDTSQ) como:

$$CDTSQ(b) := P[K_{r_D^*} - Cr_D^* > b]. \quad (3.19)$$

E com isso temos que $CDTSQ(b) \leq P[Q_D > b] \leq P[Q > b]$. Sendo assim, a escala de tempo diádica para um pequeno subconjunto de N , nas Equações 3.12 e 3.14 deveriam ser muito diferentes, porém nos experimentos realizados a seguir mostram que de fato a escala diádica pode representar toda escala de tempo. As Equações 3.13 e 3.19 serão usadas na comparação da expressão proposta para o cálculo de probabilidade de perda e os algoritmos utilizando para a implementação de tais equação estão disponível no site [<http://www.dsp.rice.edu/>].

3.5 Proposta de Probabilidade de Perda para o Tráfego Multifractal

Esta seção faz uso de propriedades multifractais do tráfego (média, variância, expoente de Hölder) na derivação de uma expressão para a probabilidade de perda para tráfego de entrada em um servidor. Pode-se estimar a taxa de perda de *bytes* (probabilidade de perda de *bytes*) $P_l(x)$ em um *buffer* finito através da cauda da distribuição do tamanho de fila (probabilidade de cauda ou probabilidade de transbordo) $P(Q > X)$ para processos multifractais de entrada. Devido à estrutura multiplicativa dos processos multifractais, a distribuição não-gaussiana destes processos é aproximadamente do tipo lognormal. Este resultado pode ser constatado na prática principalmente para tráfego real em pequenas escalas de tempo (Erramilli, A.; Narayan, O.; & Willinger, W., 1996), (Feldmann, A.; Gilbert, A. & Willinger, 1998).

Considerando essas características dos tráfegos apresentamos uma proposta para o cálculo de probabilidade de perda em regime permanente. Sendo μ e σ^2 a média e a variância respectivamente

do processo $X(t)$, definimos o processo multifractal da seguinte forma:

Definição 3.5.1 Seja $T > 0$, um processo de tráfego acumulativo $X(t)$ é dito ser multifractal com escala de tempo T , se todas as condições seguintes forem satisfeitas:

- i.) $X(t)$ tem incremento estacionário com escala de tempo T .
- ii.) $X(T)$ tem distribuição lognormal $L(\omega, \theta^2)$

$$f_{x(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta x} \exp\left[-\frac{(\ln(x)-\omega)^2}{2\theta^2}\right]$$

onde os parâmetros ω e θ são encontrados através da média μ e da variância σ^2 do processo $X(t)$

- iii.) μ e σ^2 satisfaz as seguintes condições:

iii. a) $\mu = \lambda T$, onde λ é a taxa de entrada do tráfego;

iii. b) Existe $0 < \alpha(t) < 1$ e uma constante $\epsilon > 0$ tal que para qualquer $\tau \in \{\tau : T - \epsilon < \tau < T + \epsilon, \tau > 0\}$

$$\sigma^2 \sim \tau^{2\alpha(T)};$$

Com isso podemos escrever a média μ e a variância σ^2 da distribuição lognormal como:

$$\mu = \exp(\omega + \theta^2/2), \quad (3.20)$$

$$\sigma^2 = \exp(2\omega + \theta^2)[\exp(\theta^2) - 1], \quad (3.21)$$

Portanto

$$\omega = \ln\mu - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2}{\mu^2} + 1 \right), \quad (3.22)$$

$$\theta = \sqrt{\ln \left(\frac{\sigma^2}{\mu^2} + 1 \right)}, \quad (3.23)$$

As deduções dessa expressões encontram-se no Apêndice D.

Os processos com comportamento multifractal depende fortemente dos momentos de primeira e segunda ordem, dados por (iii.a) e (iii.b), respectivamente.

Nota-se pela Equação (iii.b) que a variância (momento de segunda ordem) de processos multifractais se relaciona com o expoente de Hölder $\alpha(T)$. Para simplificar os cálculos assume-se que o expoente de Hölder de um processo apresentam uma distribuição normal $N(\tilde{\alpha}, \tilde{\sigma}^2)$ em escala de

tempo T (Nelson X. Liu & John S. Baras., 2003), onde $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\sigma}^2$ são, respectivamente, a média e a variância do expoente de Hölder. Assim, obtemos a seguinte equação para a variância do processo $X(t)$ em relação a escala de tempo T :

$$\sigma^2 \sim \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}}} \exp\left[-\frac{(\alpha - \tilde{\alpha})}{2\tilde{\sigma}^2}\right] T^{2\alpha} .d\alpha \quad (3.24)$$

Fazendo que $z = T^{2\alpha}$, temos $\alpha = \ln(z)/(2\ln(T))$ e $d\alpha/dz = 1/(2\ln(T)z)$. Então a Equação 3.24 pode ser reescrita como:

$$\sigma^2 \sim \int_0^{\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}(2\ln(T)\tilde{\sigma})z} \exp\left[-\frac{(\ln(z) - (2\ln(T)\tilde{\alpha}))^2}{2(2\ln(T)\tilde{\sigma})^2}\right] dz. \quad (3.25)$$

A Equação 3.25 nada mais é o cálculo do valor médio para variável aleatória z com distribuição lognormal com parâmetros $2\ln(T)\tilde{\alpha}$ e $(2\ln(T)\tilde{\sigma})^2$ (Nelson X. Liu & John S. Baras., 2003).

Utilizando as Equações 3.20 e 3.21 da distribuição lognormal e considerando que $\omega = 2\ln(T)\tilde{\alpha}$ e $\theta = (2\ln(T)\tilde{\sigma})^2$ podemos escrever:

$$\sigma^2 \sim \exp[2\ln(T)\tilde{\alpha} + 2(\ln(T)\tilde{\sigma})^2] = \exp[2\ln(T)(\tilde{\alpha} + \ln(T)\tilde{\sigma}^2)] = T^{2\tilde{\alpha}}T^{2\tilde{\sigma}^2\ln(T)}. \quad (3.26)$$

Substituindo $\mu = \lambda T$ da Equação iii.a e 3.26 nas Equações 3.22 e 3.23 temos as seguintes expressões, respectivamente:

$$\omega = \ln\left(\frac{\lambda T}{\sqrt{\ln(k/\lambda^2)T^{-2(1-\tilde{\alpha})}T^{2\tilde{\sigma}^2\ln(T)} + 1}}\right), \quad (3.27)$$

$$\theta = \sqrt{\ln[(k/\lambda^2)T^{-2(1-\tilde{\alpha})}T^{2\tilde{\sigma}^2\ln(T)} + 1]}, \quad (3.28)$$

onde $k \cong e^2[e^{(2\ln(T)\tilde{\sigma})^2} - 1]$.

3.5.1 Aproximação Geral

Sejam: $Q(t)$ o comprimento da fila em um servidor no tempo t ; $V(t - t_0) = W(t) - W(t_0)$ a carga de tráfego acumulado no período (t_0, t) ; e $O(t - t_0)$ denotando a utilização do tráfego em (t_0, t) .

Em uma fila em equilíbrio temos:

$$Q(t_0) + V(t - t_0) = Q(t) + O(t - t_0), \quad (3.29)$$

Assumindo $V(t) = 0$ e $Q(t) = 0$ em $t = 0$ e $t_0 = 0$, podemos escrever o comprimento da fila $Q(t)$ como:

$$Q(t) = \max(V(t) - O(t), 0), \quad (3.30)$$

Seja C a taxa de serviço da fila e $S(t)$ o total de servidores inativos até o tempo t , com isso temos:

$$O(t) = C(t - S(t)), \quad (3.31)$$

Sendo $Y(t) = V(t) - Ct$ e substituindo em 3.31 em 3.30 temos:

$$Q(t) = \max(Y(t) + \Delta(t), 0), \quad (3.32)$$

onde $\Delta(t) = CS(t)$. Este resultado, aliado a lei de probabilidade, nos permite escrever a probabilidade de perda na fila da seguinte forma (Benes V., 1963):

$$P_{loss}(t) = P(Q(t) > q) = P(Y(t) + \Delta(t) > q, Y(t) > q) + P(Y(t) + \Delta(t) > q, Y(t) \leq q), \quad (3.33)$$

ou

$$P_{loss}(t) = P(Y(t) > q) + P(Y(t) \leq q < Y(t) + \Delta(t)). \quad (3.34)$$

O primeiro termo $P(Y(t) > q)$ de 3.34 é chamado de probabilidade de perda absoluta (P_{abs}) que converge para 0 quando o tempo tende ao infinito, e o segundo termo $P(Y(t) \leq q < Y(t) + \Delta(t))$ de probabilidade oportuna (P_{opp}), no qual um processo multifractal é governado. Alguns teoremas sobre (P_{abs}) e (P_{opp}) encontra-se no Apêndice C.

Assumindo $Q(t)$ estacionário, e seja $\rho = 1 - \eta = 1 - \lambda/C$, usando o resultado de Benes (Benes V., 1963) o segundo termo (P_{opp}) pode ser escrito como:

$$P_{opp}(t) = P(Y(t) \leq q < Y(t) + \Delta(t)) = \rho \int_0^t f_{X(t)}(x)|_{x=Cu+q} dt. \quad (3.35)$$

A probabilidade de perda absoluta P_{abs} é equivalente a:

$$P_{abs}(t) = P(Y(t) > q) = P(V(t) > Ct + q) \int_{Ct+q}^{\infty} f_{X(t)}(x) dt. \quad (3.36)$$

Então, o comportamento exato é dado por:

$$P_{loss}(t) = \int_{Ct+q}^{\infty} f_{X(t)}(x) dt + \rho \int_0^t f_{X(t)}(x)|_{x=Cu+q} dt. \quad (3.37)$$

A primeira integral da expressão a cima pode ser escrita utilizando a Equação ii da Definição 3.5.1 como:

$$P_{abs}(t) = \int_{Ct+q}^{\infty} f_{X(t)}(x) dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} erf \left[\frac{\ln(Ct + q) - \omega(t)}{\sqrt{2}\theta(t)} \right]. \quad (3.38)$$

Como $P_{abs} \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$ então, a probabilidade de perda em um regime permanente pode ser dada por:

$$P_{steady} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{loss}(t) = \rho \sup_{t>0} \left\{ \int_0^t f_{X(t)}(x)|_{x=Cu+q} dt \right\}. \quad (3.39)$$

Como um processo multifractal apresenta distribuição lognormal, a probabilidade de perda para processos multifractais em uma fila pode ser dada por:

$$P_{steady} = \left(1 - \frac{\lambda}{C}\right) \int_0^{\infty} \frac{1}{x\theta\sqrt{2\pi}} exp \left[\frac{-(\ln(x) - \omega)^2}{2\theta^2} \right]_{|x=Cu+q} dx. \quad (3.40)$$

Note que as variáveis ω e θ podem ser estimadas pelas Equações 3.27 e 3.28 para séries de tráfego multifractais reais. Assim, substituindo as Equações 3.27 e 3.28 em 3.40, obtem-se a seguinte equação (Nelson X. Liu & John S. Baras., 2003):

$$P_{steady} = \left(1 - \frac{\lambda}{C}\right) \int_0^{\infty} \frac{exp \left[\frac{-[\ln((Ct+q)\sqrt{(k/\lambda^2)t^{-2(1-\bar{\alpha})t^{2\bar{\sigma}^2\ln(t)+1}}) - \ln(\lambda t)]^2}{2\ln[(k/\lambda^2)t^{-2(1-\bar{\alpha})t^{2\bar{\sigma}^2\ln(t)+1}}]} \right]}{\sqrt{2\pi\ln[(k/\lambda^2)t^{-2(1-\bar{\alpha})t^{2\bar{\sigma}^2\ln(t)+1}}]}(Ct + q)} dt. \quad (3.41)$$

Devido a complexidade analítica da Equação 3.41, faremos uma análise numérica, utilizando o método de Simpson para a resolução da expressão. Para melhor entendimento deste método ver Apêndice B.

Para essa análise utilizamos a série de tráfego denominada *dec-pkt-3*¹. As tabelas 3.1, 3.2 e 3.3 mostram os dados estatísticos da série usada, a configuração do sistema utilizado e os parâmetros obtidos na aproximação usando o modelo exponencial, respectivamente. Sendo que $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\sigma}^2$ são a média e a variância do expoente de Hölder, respectivamente, a e b são os coeficientes obtidos da aproximação exponencial.

Série de Tráfego	Média (bytes)	Variância (bytes)	Desvio Padrão (bytes)	Número de Amostras
<i>dec-pkt-3</i>	9.2496e+004	7.0060e+008	2.6469e+004	7.031

Tab. 3.1: Características Estatísticas *dec-pkt-3*.

Série de Tráfego	Capacidade do Servidor (bits/s)	Tamanho do Buffer (bits)
<i>dec-pkt-3</i>	1e+005	3e+005

Tab. 3.2: Configuração do Sistema para *dec-pkt-3*.

Série de Tráfego	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\sigma}^2$	a	b	erro
<i>dec-pkt-3</i>	0.0376	0.0073	3.264	-1.19	0.002928

Tab. 3.3: Parâmetros de *dec-pkt-3*.

A Figura 3.1 mostra a comparação dos resultados expressos pela Equação 3.41 em relação a simulação real da probabilidade de perda.

Analisando a Figura 3.1 vemos que a Equação 3.41 possui alguns problemas, dentre eles: estabilização, precisão, e convergência, negando a afirmação de que o processo multifractal é governado pela probabilidade oportuna P_{opp} , [ver Apêndice C]. Dessa forma, para sanar esses problemas, propomos nesta dissertação uma alternativa eficiente para o cálculo da probabilidade de perda. Usando o método de regressão não linear, mais precisamente um modelo exponencial, para modelar a relação variância por tempo do processo $X(t)$, obtemos uma expressão mais simples e eficiente para fim de estimação de probabilidade de perda.

¹<http://ita.ee.lbl.gov/html/traces.html>

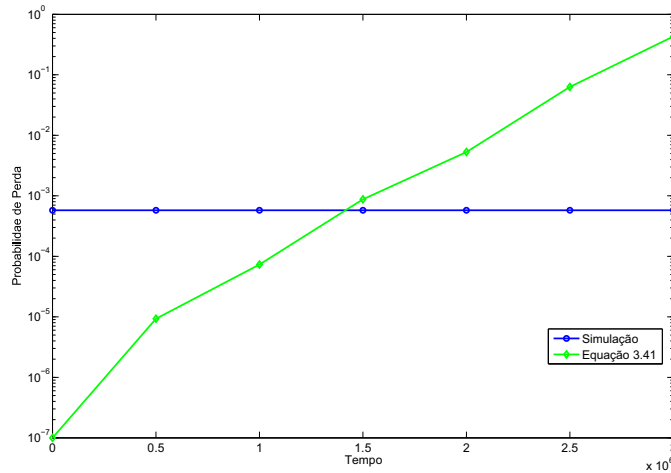


Fig. 3.1: Probabilidade de Perda versus Tempo

3.5.2 Aproximação Exponencial

A Figura 3.2 mostra a relação variância dada pela Equação 3.26 versus a escala de tempo T do processo $X(t)$ para uma série de tráfego multifractal Internet, denominada *dec-pkt-3*.

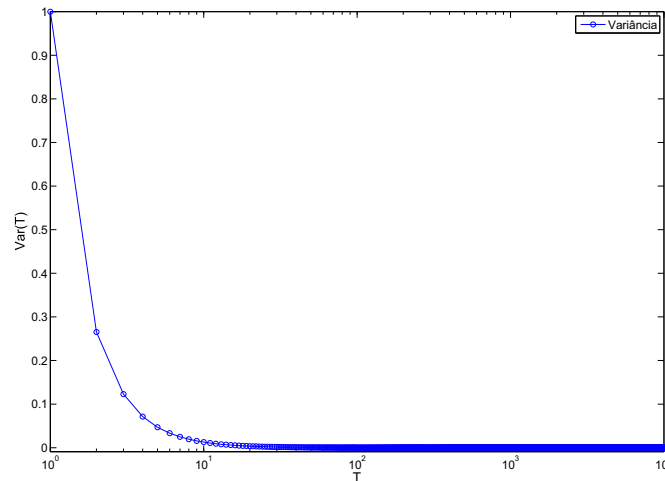


Fig. 3.2: Variância versus Tempo

O modelo adotado para a aproximação é da forma $aexp(bT) + \epsilon$, onde ϵ é o erro obtido. A Figura 3.3 mostra a relação variância dada pela Equação 3.26 versus a escala de tempo T do processo $X(t)$, assim como sua estimativa pelo modelo exponencial utilizado para a mesma série *dec-pkt-3*. Vemos pela Figura 3.3 que o modelo exponencial adotado consegue modelar a relação variância por tempo do processo $X(t)$, tendo um valor pequeno para a raiz do erro quadrático médio (RMSE)

igual a 0.002928 para a série de tráfego utilizada. Através desta modelagem exponencial podemos simplificar a derivação das expressões ω e θ , dadas pelas Equações 3.27 e 3.28, respectivamente, por:

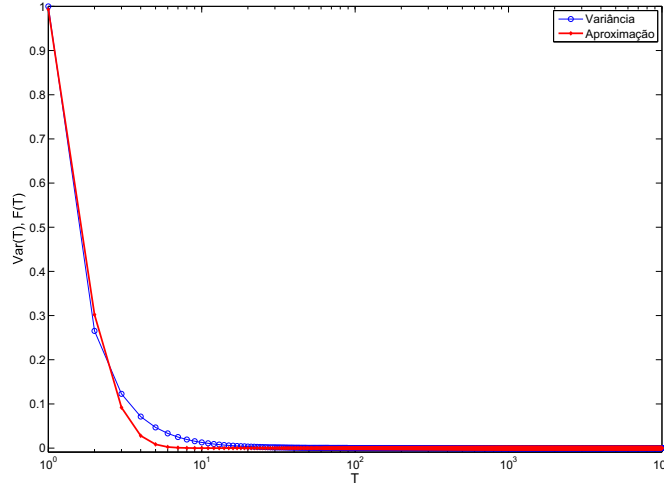


Fig. 3.3: Aproximação exponencial a variância.

$$\omega = \ln \left[\frac{\lambda T}{\sqrt{(k/\lambda^2) \exp(bt) + 1}} \right], \quad (3.42)$$

$$\theta = \sqrt{(k/\lambda^2) \exp(bt) + 1}, \quad (3.43)$$

onde $k \cong e^2[e^{2\ln(T)\bar{\sigma}} - 1] + \epsilon$.

A estimação dos parâmetros a e b do modelo exponencial é pelo método de mínimos quadrados. Para melhor compreensão deste método, consultar Apêndice A.

Dessa forma substituindo as Equações 3.42 e 3.43 em 3.40, obtemos a nova equação para o cálculo de probabilidade de perda através da aproximação exponencial a variância.

$$P_{steady} = \left(1 - \frac{\lambda}{C}\right) \int_0^\infty \frac{\exp \left[-\frac{[\ln((Ct+q)\sqrt{(k/\lambda^2)\exp(bt)+1}) - \ln(\lambda t)]^2}{2\ln((k/\lambda^2)\exp(bt)+1)} \right]}{\sqrt{2\pi\ln((k/\lambda^2)\exp(bt)+1)}(Ct+q)} dt. \quad (3.44)$$

Realizando análise numérica para a Equação 3.44, com os mesmos parâmetros descritos nas Tabelas 3.1, 3.2 e 3.3, obtemos o seguinte resultado apresentados na Figura 3.4.

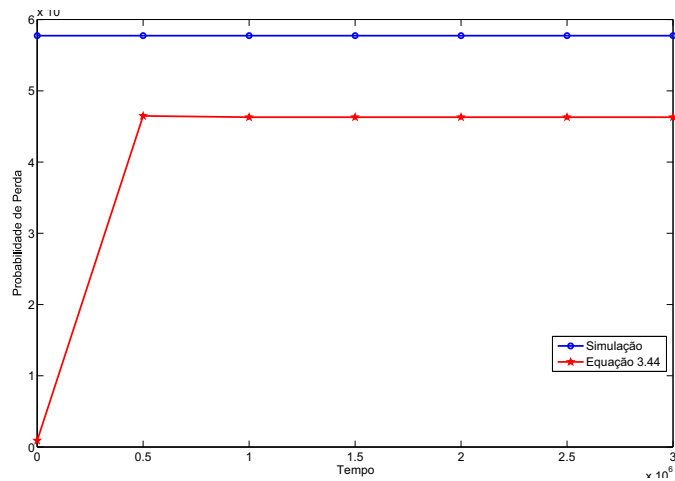


Fig. 3.4: Probabilidade de Perda versus Tempo

Analisando a Figura 3.4, vemos que a Equação 3.44 consegue sanar os problemas de estabilização, precisão, e o de convergência que ocorriam na Equação 3.41, o fato a afirmação de que o processo multifractal é governado pela probabilidade oportuna P_{opp} .

Devido a esse fato e para comprovar a eficácia do Equação 3.44 para o cálculo de probabilidade de perda de *bytes* em uma conexão, simulações com vários traços de tráfego foram realizadas e comparadas com os métodos citados nas Seções 3.3 e 3.4.

3.6 Características das Séries de Tráfego

Nesta seção caracterizamos as séries de tráfegos utilizadas nas simulações, assim como os valores e gráficos obtidos nas aproximações da relação variância em escala de tempo T pelo modelo exponencial usado.

3.6.1 A série *lbl-pkt-5*

Está série de tráfego contém uma hora de medição do tráfego TCP/IP realizado entre *Lawrence Berkeley Laboratory* e o resto do mundo, em 28 de Janeiro de 1994.

A Tabela 3.4 apresenta algumas características estatísticas da série.

A Figura 3.5 mostra a curva referente à relação variância por tempo em função do tempo e a Figura 3.6 mostra a aproximação obtida pelo método exponencial usado para a modelagem. E em seguida a Tabela 3.5 apresenta os valores dos parâmetros obtidos que serão usado nas simulações.

Série de Tráfego	Média (bytes)	Variância (bytes)	Desvio Padrão (bytes)	Número de Amostras
<i>lbl-pkt-5</i>	1.3387e+004	1.2738e+008	1.1286e+004	7.031

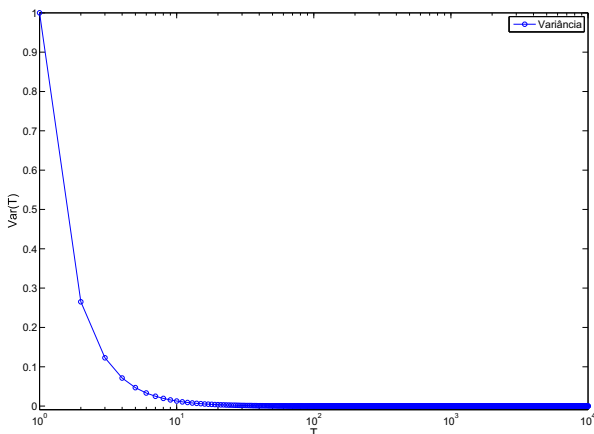
Tab. 3.4: Características Estatísticas *lbl-pkt-5*.

Fig. 3.5: Curva da Variância

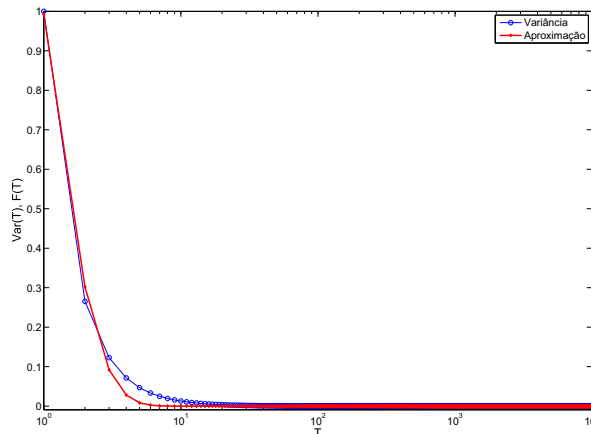


Fig. 3.6: Aproximação Exponencial

Série de Tráfego	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\sigma}^2$	a	b	erro
<i>lbl-pkt-5</i>	0.0895	0.0287	2.879	-1.068	0.00121

Tab. 3.5: Parâmetros de *lbl-pkt-5*.

3.6.2 A série *lbl-pkt-5-10*

Esta série é derivada da série *lbl-pkt-5*, porém usando a escala de agregação de 10 milissegundos.

A Tabela 3.6 apresenta algumas características estatísticas da série.

Série de Tráfego	Média (bytes)	Variância (bytes)	Desvio Padrão (bytes)	Número de Amostras
<i>lbl-pkt-5-10</i>	260.8330	4.7937e+005	692.5678	57.900

Tab. 3.6: Características Estatísticas *lbl-pkt-5-10*.

A Figura 3.7 mostra a curva referente à relação variância por tempo em função do tempo e a Figura 3.8 mostra a aproximação obtida pelo método exponencial usado para a modelagem. E em seguida a Tabela 3.7 apresenta os valores dos parâmetros obtidos que serão usado nas simulações.

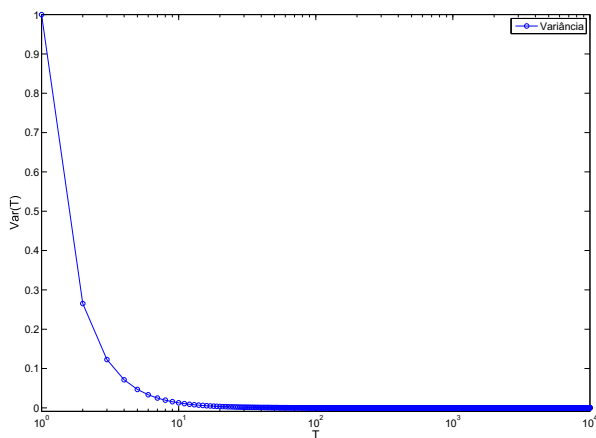


Fig. 3.7: Curva da Variância

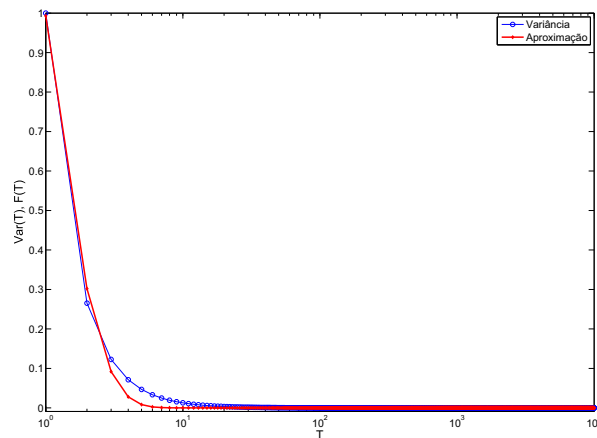


Fig. 3.8: Aproximação Exponencial

Série de Tráfego	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\sigma}^2$	a	b	erro
<i>lbl-pkt-5-10</i>	0.0267	0.0129	3.296	-1.199	0.000929

Tab. 3.7: Parâmetros de *lbl-pkt-5-10*.

3.6.3 A série *dec-pkt-1-40*

Está série de tráfego contém uma hora de medição do tráfego TCP/IP realizado entre *Digital Equipment Corporation* e o resto do mundo, em 8 de Março de 1995. A série aqui utilizada deriva de *dec-pkt-1*, porém com escala de agregação de 40 milissegundos.

A Tabela 3.8 apresenta algumas características estatísticas da série.

Série de Tráfego	Média (bytes)	Variância (bytes)	Desvio Padrão (bytes)	Número de Amostras
<i>dec-pkt-1-40</i>	5.0364e+004	1.7311e+007	2.4871e+004	89.998

Tab. 3.8: Características Estatísticas *dec-pkt-1-40*.

A Figura 3.9 mostra a curva referente à relação variância por tempo em função do tempo e a Figura 3.10 mostra a aproximação obtida pelo método exponencial usado para a modelagem. E em seguida a Tabela 3.9 apresenta os valores dos parâmetros obtidos que serão usado nas simulações.

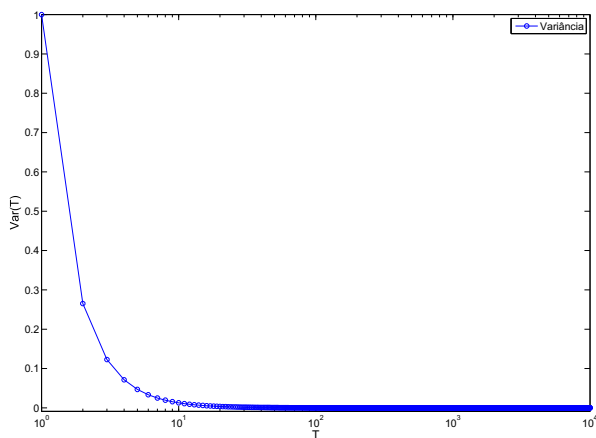


Fig. 3.9: Curva da Variância

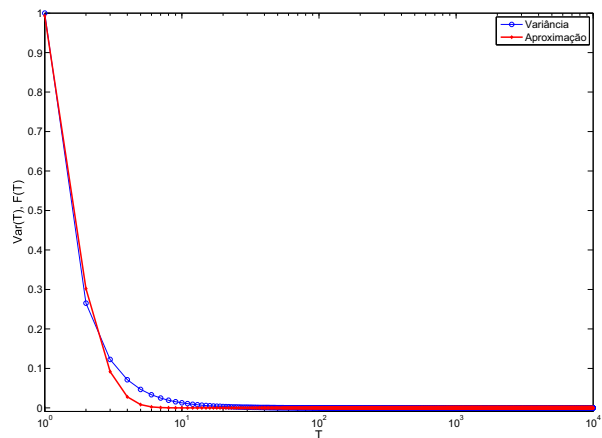


Fig. 3.10: Aproximação Exponencial

Série de Tráfego	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\sigma}^2$	a	b	erro
<i>dec-pkt-1-40</i>	0.0558	0.0089	3.156	-1.157	0.000985

Tab. 3.9: Parâmetros de *dec-pkt-1-40*.

3.6.4 A série *dec-pkt-2-10*

A série *dec-pkt-2-10*, deriva da série *dec-pkt-2* com escala de agregação de 10 milissegundos. Está série também foi retirada da medição do tráfego TCP/IP realizado entre *Digital Equipment Corporation* e o resto do mundo, em 9 de Março de 1995.

A Tabela 3.10 apresenta algumas características estatísticas da série.

Série de Tráfego	Média (bytes)	Variância (bytes)	Desvio Padrão (bytes)	Número de Amostras
<i>dec-pkt-2-10</i>	1.3921e+003	3.3910e+006	1.8415e+003	18.563

Tab. 3.10: Características Estatísticas *dec-pkt-2-10*.

A Figura 3.11 mostra a curva referente à relação variância por tempo em função do tempo e a Figura 3.12 mostra a aproximação obtida pelo método exponencial usado para a modelagem. E em seguida a Tabela 3.12 apresenta os valores dos parâmetros obtidos que serão usado nas simulações.

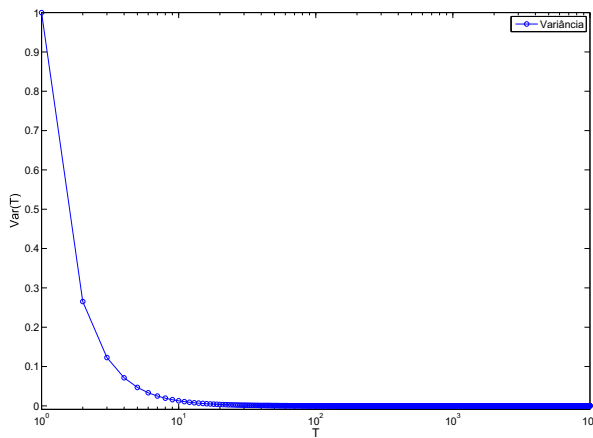


Fig. 3.11: Curva da Variância

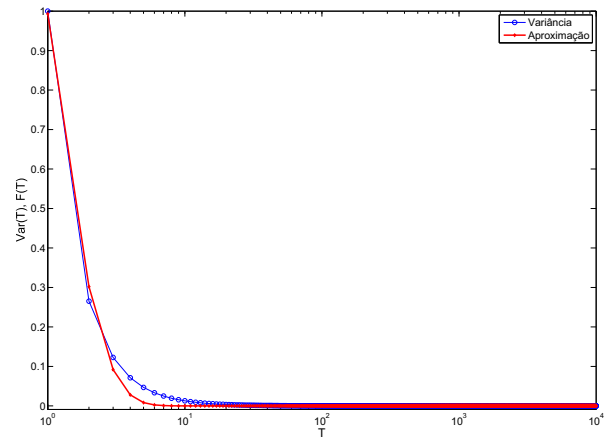


Fig. 3.12: Aproximação Exponencial

Série de Tráfego	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\sigma}^2$	a	b	erro
<i>dec-pkt-2-10</i>	0.0138	0.0099	3.383	-1.225	0.000884

Tab. 3.11: Parâmetros de *dec-pkt-2-10*.

3.6.5 A série *BC-pAug89-400*

Está série de Tráfego contém a medição de chegadas de dados em um ambiente *Ethernet do Bellcore Morristown Research and Engineering*, em 29 de Agosto de 1989. A série *BC-pAug89-400* deriva de *BC-pAug89*, com uma escala de agregação de 400 milissegundos.

A Tabela 3.12 apresenta algumas características estatísticas da série.

Série de Tráfego	Média (bytes)	Variância (bytes)	Desvio Padrão (bytes)	Número de Amostras
<i>BC-paug89-400</i>	5.5270e+004	1.6139e+009	4.0173e+004	7.900

Tab. 3.12: Características Estatísticas *BC-pAug89-400*.

A Figura 3.13 mostra a curva referente à relação variância por tempo em função do tempo e a Figura 3.14 mostra a aproximação obtida pelo método exponencial usado para a modelagem. E em seguida a Tabela 3.14 apresenta os valores dos parâmetros obtidos que serão usado nas simulações.

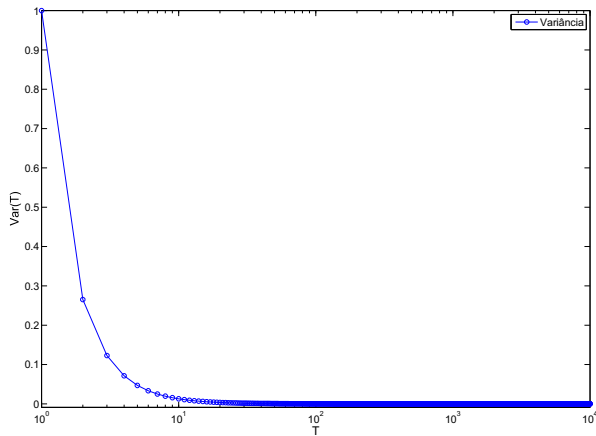


Fig. 3.13: Curva da Variância

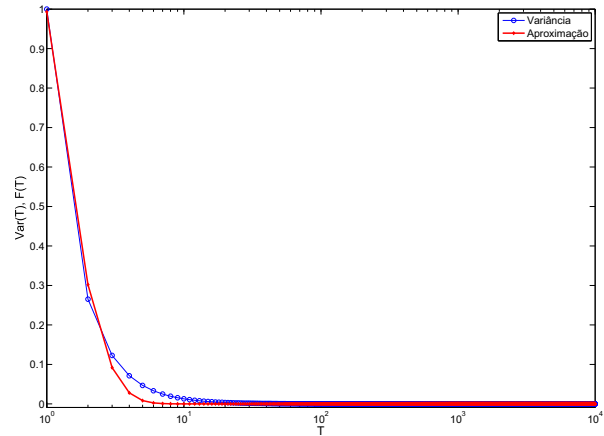


Fig. 3.14: Aproximação Exponencial

Série de Tráfego	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\sigma}^2$	a	b	erro
BC-pAug89-400	0.0516	0.0116	3.166	-1.160	0.000982

Tab. 3.13: Parâmetros de BC-pAug89-400.

3.7 Resultados Obtidos nas Simulações

Nesta seção iremos validar a equação proposta para o cálculo de probabilidade de perda, fazendo uma comparação com alguns métodos existentes na literatura. Para o cálculo da integral utilizamos um método numérico denominado método de Simpson. Trata-se de um método simples e de fácil implementação e com resultados muito precisos. Maiores detalhes deste método, ver Apêndice B.

Apresentamos na Tabela 3.14 a configuração do sistema (Capacidade do Servidor e Tamanho do *Buffer*) para um simples servidor usado nas simulações.

Série de Tráfego	Capacidade do Servidor (bits/s)	Tamanho de Buffer (bits)
lbl-pkt-5	5.6e+004	3e+005
lbl-pkt5-10	1.4e+004	3e+004
dec-pkt-1-40	12e+005	3e+005
dec-pkt-2-10	2.4e+003	3e+005
BC-pAug89-400	16e+004	3e+005

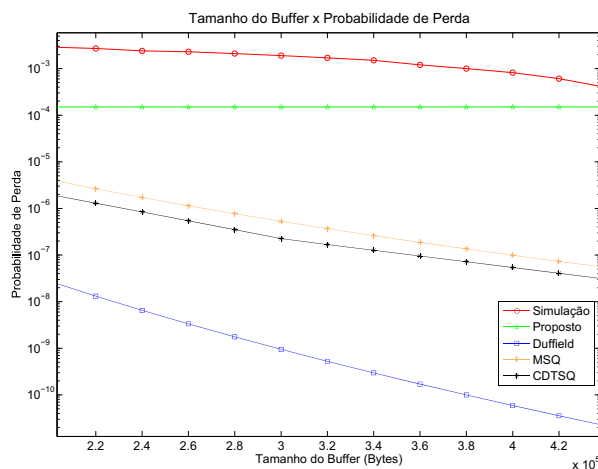
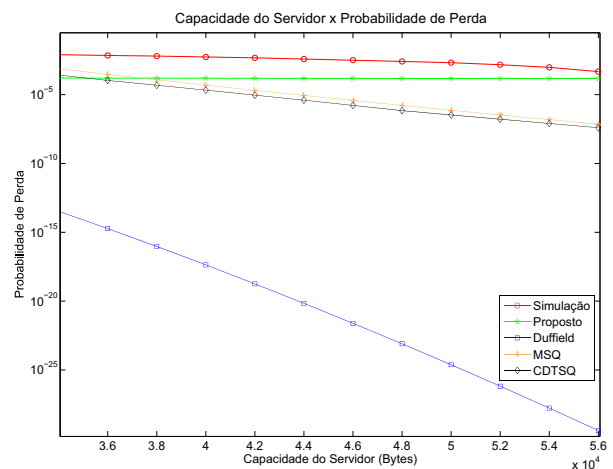
Tab. 3.14: Configurações do Sistema.

A Tabela 3.15 apresenta a probabilidade de perda estimada (em número de *bytes*) para as séries de tráfego utilizando as configurações definidas na Tabela 3.14. O método chamado *Duffield* (Duffield, N. G. & O Connel, N., 1993) apresenta características monofractais. Os métodos chamados MSQ (*Multiscale Queue*) e CDTSQ (*Critical Dyadic Time-Scale Queue*) (Ribeiro, V. J.; Riedi, R. H.; Crouse, M. S. & Baraniuk, R. G., 2000) são métodos multifractais. Podemos notar através dos resultados obtidos nas simulações um melhor desempenho no método proposto com relação aos métodos de *Duffield* que modela o tráfego como um processo auto-similar, e os métodos MSQ e CDTSQ que analisam os tráfegos de redes com características de Longa Dependência.

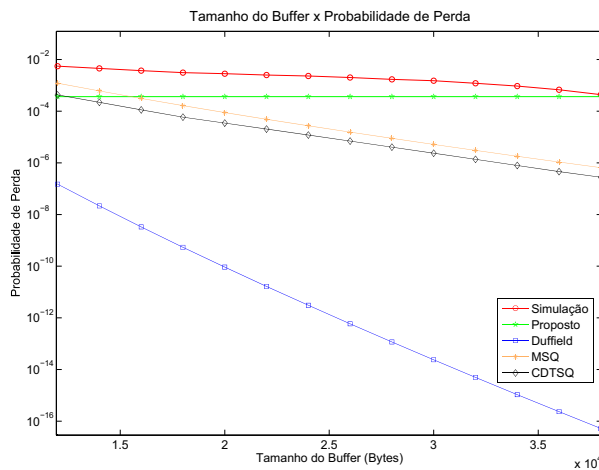
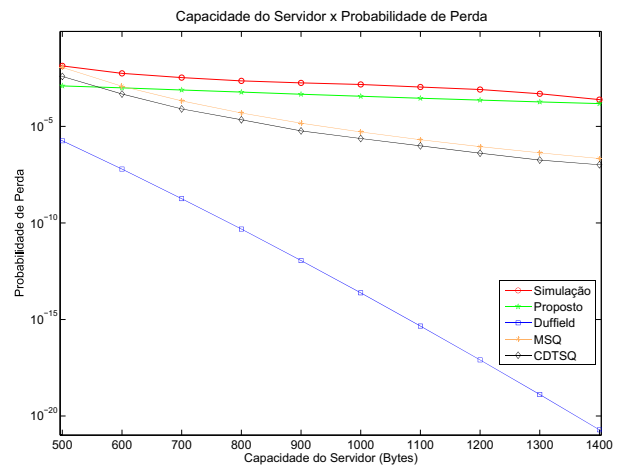
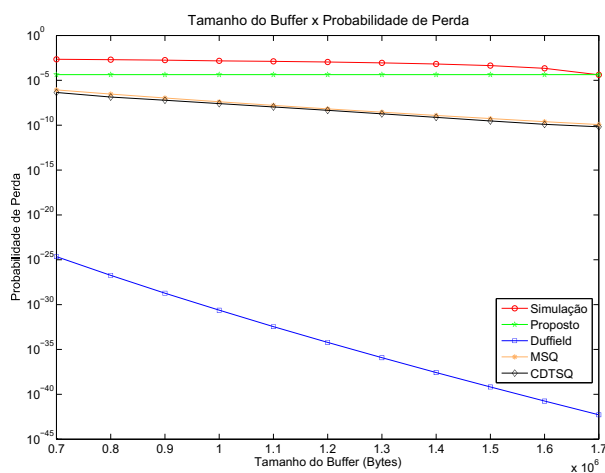
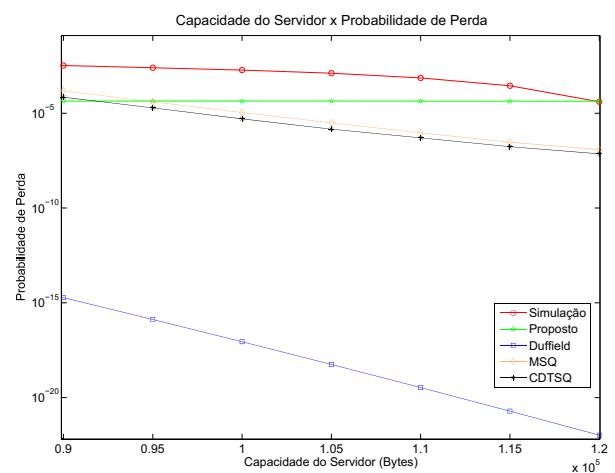
Série de Tráfego	<i>lbl-pkt-5</i>	<i>lbl-pkt-5-10</i>	<i>dec-pkt-1-40</i>	<i>dec-pkt-2-10</i>	<i>BC-pAug89-400</i>
Simulação	4.76e-004	2.45e-004	4.08e-005	7.19e-004	1.03e-005
Duffield	4.02e-030	1.92e-023	8.09e-015	2.68e-016	1.90e-028
Proposto	1.49e-004	1.52e-004	4.32e-005	3.03e-004	3.71e-005
MSQ	7.22e-008	2.18e-007	1.20e-007	1.28e-006	8.78e-013
CDTSQ	1.72e-008	1.04e-007	7.20e-008	1.23e-006	7.86e-013

Tab. 3.15: Probabilidade de Perda Estimada.

As Figuras 3.15 e 3.16 mostram o tamanho do *buffer* versus a probabilidade de perda e capacidade do servidor versus a probabilidade de perda respectivamente para a série *lbl-pkt-5*. Podemos observar que neste experimento que o método proposto apresenta uma melhor aproximação da simulação com tráfego real, do que os valores obtido considerando os métodos monofractais (*Duffield*) e os multifractais, (*MSQ*) e (*CDTSQ*).

Fig. 3.15: Variação do *Buffer lbl-pkt-5*Fig. 3.16: Variação da Capacidade *lbl-pkt-5*

Assim como todos os experimentos seguintes fazemos os mesmos testes variando o tamanho do *buffer* e variando a Capacidade do Servidor. Em todos os testes a equação proposta obteve uma aproximação mais precisa e eficiente em relação a simulação real e em relação aos métodos existentes na literatura (*Duffield*), (*MSQ*) e (*CDTSQ*). O que pode ser visto nas Figuras 3.17, 3.18; 3.19, 3.20; 3.21, 3.22 e 3.23, 3.24.

Fig. 3.17: Variação do Buffer *lbl-pkt-5-10*Fig. 3.18: Variação da Capacidade *lbl-pkt-5-10*Fig. 3.19: Variação do Buffer *dec-pkt-1-40*Fig. 3.20: Variação da Capacidade *dec-pkt-1-40*

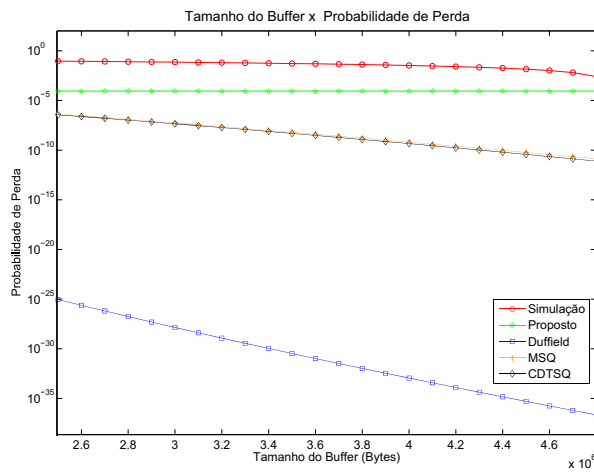


Fig. 3.21: Variação do *Buffer dec-pkt-2-10*

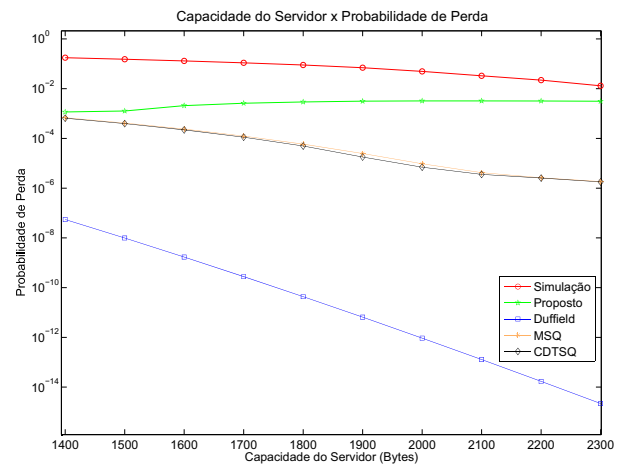


Fig. 3.22: Variação da Capacidade *dec-pkt-2-10*

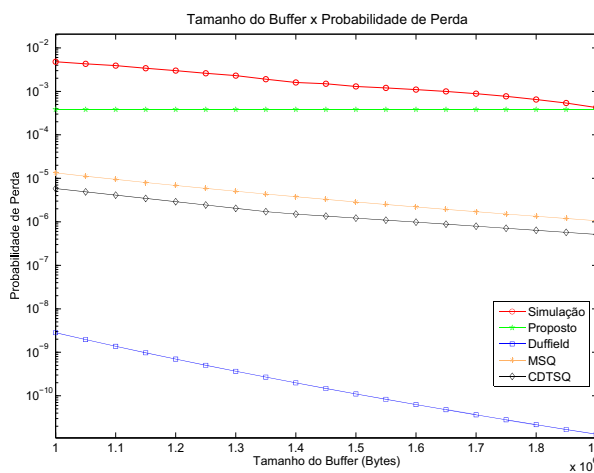


Fig. 3.23: Variação do *Buffer BC-pAug89-400*

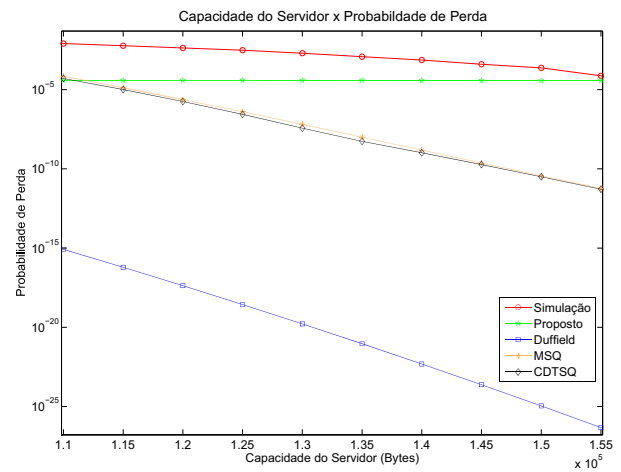


Fig. 3.24: Variação da Capacidade *BC-pAug89-400*

3.8 Considerações Finais

Este capítulo inicialmente fez uma descrição de algumas abordagens existentes na literatura para a estimação de probabilidade de perda incluindo probabilidade de perda para processos com longa dependência (*Duffield*), e probabilidade de perda para modelo multifractal (*MSQ* e *CDTSQ*). Em seqüência, derivou-se uma expressão para a probabilidade de perda em um servidor de fila com *buffer* finito cujo tráfego de entrada possui características multifractais. Mostrou-se através de simulações que os resultados da equação proposta são continuamente mais precisos com relação à variação do

tamanho do *buffer* e ou a capacidade do servidor, do que os métodos de Duffield e da Análise de Fila Multiescala.

Os resultados obtidos comprovam a eficácia do método proposto baseado em processos multifractais, o que de fato provê uma descrição mais completa do cenário de rede em questão.

Capítulo 4

Critério de Controle de Admissão para Tráfego Multifractal

4.1 Introdução

As redes IP têm se tornado cada vez mais uma plataforma padrão de suporte às aplicações com diretas demandas de qualidade de serviços. O controle de admissão tem se tornado um importante mecanismo de gerenciamento de tráfego para este fim, determinando se uma nova conexão será aceita ou não (Stallings, W., 1996), (Tanenbaum, A. S, 1996).

A utilização da rede e requisitos de qualidade de serviço (QoS) são dois fatores que necessitam ser considerados nas decisões de admissão. Um algoritmo de controle de admissão eficiente busca alcançar alta utilização da rede, enquanto provê os requisitos de qualidade de serviço para todas as conexões aceitas.

Aplicações que exigem garantias de qualidade de serviço (QoS) têm sido cada vez mais encontradas na Internet, tais como voz sobre IP e vídeo conferência. No entanto, hoje a Internet ainda provê em sua maioria, serviço de melhor esforço, se tornando precária quando ocorre, por exemplo, congestionamento na rede ou surtos mais intensos de tráfego. Esse fato tem motivado muitas pesquisas e propostas de implementação de mecanismos de QoS. As propostas mais populares são as arquiteturas Intserv (*Integrated Services*) e Diffserv (*Differentiated Services*) (Blake, S., 1998) (Braden, R.; Clark, D. & Shenker, S , 1994). Infelizmente o emprego de algoritmos de escalonamento baseados nas especificações dessas arquiteturas, resulta em uma diminuição na utilização da rede, principalmente quando o tráfego é composto de rajadas em diversas escalas de tempo (Chang, C, 1994).

Uma melhor utilização de recursos de rede pode ser atingida através da provisão de garantias estatísticas de serviços, que são obtidas da caracterização do tráfego. Geralmente, é difícil obter da fonte de tráfego uma especificação precisa de seus parâmetros e comportamento. Assim, o controle

de admissão baseado em medidas atuais de tráfego pode potencialmente obter melhores utilizações dos recursos com o conhecimento do tráfego que está sendo admitido.

A disponibilidade de um mecanismo de controle de admissão eficiente e otimizado será um fator fundamental no desempenho das redes modernas com e sem fio. É importante ressaltar que esse processo não é trivial, principalmente devido às mudanças no comportamento do tráfego.

Projetos de algoritmos para o controle de admissão otimizados exigem que se tenha um bom conhecimento das características do tráfego que será transportado na rede. Por essa razão, a caracterização de tráfego é considerada o primeiro passo no processo de determinação destes algoritmos. Dado que as características de invariância em escala envolvem diversas escalas simultaneamente, técnicas de multi resolução, baseadas em transformada wavelet (Mallat, S., 1999), podem ser vistas como uma abordagem natural para lidar com a análise estatística do tráfego.

Além de uma caracterização refinada do tráfego, também há a necessidade de se conhecer bem todo o sistema envolvido com os mecanismos de controle de admissão. Estudos mostram que a escolha entre uma abordagem mais simplificada (monofractal) ou mais complexa (multifractal) claramente depende da aplicação e dos dados que se dispõe (Taqu M. S.; Teverovsky V. & Willinger W., 1997), ou seja, são ferramentas de grau de complexidade distintas e a escolha da abordagem, depende do grau de singularidade do tráfego (Mallat, S., 1999). A fim de examinarmos o impacto de uma modelagem multifractal para o tráfego de redes, apresentaremos neste capítulo um algoritmo de controle de admissão para tráfegos com características multifractais.

O capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção 4.2 discursamos sobre mecanismos de controle de admissão de conexões, fazendo uma breve explanação de alguns algoritmos já existentes. Na Seção 4.3, introduzimos uma nova proposta para o processo de controle de admissão baseada em estimação de probabilidade de perda para tráfego multifractal. Na Seção 4.4 fazemos uma breve caracterização dos métodos de medir os surtos ou rajadas encontrado nos tráfegos. Na Seção 4.5 caracterizamos as séries de tráfegos utilizadas nos experimentos, juntamente com alguns parâmetros necessários para as simulações. Na seção 4.6 mostramos os resultados obtidos para diferentes tipos de traços de tráfego. E finalmente na Seção 4.7 apresentamos as considerações finais.

4.2 Mecanismos de Controle de Admissão de Conexão

Algoritmos de controle de admissão (*CAC- Connection Admission Control*) podem ser classificados como determinísticos ou estatísticos. Esquemas determinísticos tipicamente requerem apenas simples parâmetros de tráfego, definidos através da sinalização da conexão, tais como taxa de pico ou taxa média. Isto simplifica o processo de decisão, porém, as decisões tomadas podem tornar-se pouco apuradas. Por outro lado, esquemas estatísticos tipicamente necessitam de mais parâmetros de

tráfego e um modelo de tráfego explícito. Esquemas estatísticos freqüentemente consideram ganhos de multiplexação, fato este que os fazem atrativos, principalmente quando os tráfegos apresentam surtos.

Vários algoritmos de controle de conexão foram propostos na literatura (Gibbens R.J. & Kely F.P., 1997), (Baek-Young Choi; Zhenhai Duan; Zhi-Li Zhang & David H.C. Du.), (Sugih Jamin; Scott J. Shenker; & Peter B. Danzig), (Sugih Jamin; Peter B. Danzing; Scott J. Shenker & Lixia Zhang) (Vieira, F.H.T & Lee L.L., 2009b). Estes algoritmos tomam diferentes decisões de controle de conexão baseado em suas respectivas concepções sobre características de tráfego, requisitos de qualidade de serviço e utilização da rede.

Os mecanismos de controle de admissão possuem três componentes básicos: descritores de tráfego, critério de admissão e processos de medidas.

Descritores de tráfego são um conjunto de parâmetros que caracterizam as fontes de tráfego. Quando o tráfego apresenta grande intensidade de surtos, a utilização da rede pode tornar-se muito baixa caso o controle de admissão esteja baseado apenas em parâmetros providos no estabelecimento da conexão. Assim, para se obter maiores taxas de utilização, o controle de admissão deve monitorar a dinâmica da rede e utilizar medidas tais como carga instantânea da rede e atraso de pacotes para fazer suas decisões de admissão. Esquemas baseados em medidas são chamados controle de admissão baseados em medida (MBAC) (Jens Milbrand; Michael Menth & Jan Junker, 2007).

Em redes empregando MBAC, um processo de medida é uma entidade lógica que realiza medidas da dinâmica dos dados da rede e fornece as informações obtidas aos algoritmos de controle de admissão. Isso faz com que esquemas MBAC se beneficiem da multiplexação estatística do tráfego para maximizar a utilização da rede.

Uma vez que os recursos de rede alocados para uma classe de tráfego são compartilhados por todos os fluxos daquela classe, a decisão de aceitar um novo fluxo pode afetar os compromissos de qualidade de serviço para os fluxos já aceitos admitidos nesta classe particular, e também afetar a qualidade de serviço de fluxos em classes de mais baixa prioridade. Assim, uma decisão de controle de admissão é freqüentemente feita baseada em uma estimação do efeito que o novo fluxo terá em outros fluxos e a utilização da rede em questão.

Para os mecanismos de controle de admissão baseados em medida tomarem decisões de admissão inteligentes, estes devem possuir um apurado conhecimento do volume de congestionamento e do volume de recursos usados na rede. Há uma variedade de mecanismos para se obter estas medidas, e cada um, possui um efeito significativo no comportamento dos esquemas de controle de admissão.

Devido a esta diversidade, aqui é feita uma classificação destes mecanismos para uma melhor compreensão dos mesmos. Esta classificação está baseada no princípio implícito que foi usado no desenvolvimento destes mecanismos. Os algoritmos de controle de admissão podem ser divididos a

grosso modo nas seguintes classes segundo (Perros H., 1994): métodos de alocação de capacidade, método de reservas rápidas, aproximação de tráfego intenso, aproximação não-paramétrica, método dinâmico e método híbrido.

O método de alocação de capacidade tem por objetivo determinar a capacidade efetiva de cada fonte de tráfego de acordo com a taxa de perda desejada. Um pedido de conexão só é aceito se a capacidade disponível do canal for maior do que a capacidade efetiva da fonte. Caso contrário, o pedido é rejeitado.

O método de reservas rápidas foi desenvolvido para fontes de tráfego em rajadas. Neste método, quando uma conexão é estabelecida, nenhum recurso de rede é previamente alocado, sendo apenas determinadas as rotas através de rede de cada conexão. No momento em que a fonte deseja transmitir, a rede tenta alocar os recursos necessários apenas para a duração da rajada.

A aproximação de tráfego intenso está baseada no comportamento assintótico de cauda da distribuição do tamanho de fila quando a intensidade de tráfego é alta. Um pedido de conexão só é aceito caso a taxa de perda, aproximada pela cauda da distribuição do tamanho da fila, seja menor que o valor desejado.

A aproximação não-paramétrica não assume nenhum modelo específico de tráfego e utiliza apenas os parâmetros de tráfego. A decisão de aceitação ou não de uma nova conexão é feita com base no limite superior que a taxa de perda pode assumir.

O método dinâmico é baseado na distribuição do número de dados que chegam durante um determinado período de estimação. Cada período de estimação é composto por vários períodos de medição e é chamado de período de renovação. Um pedido de conexão só é aceito se uma capacidade equivalente for menor do que a capacidade equivalente estimada disponível no canal.

O método híbrido trabalha com fontes de tráfego com objetivos de qualidade de serviços (QoS) diferentes. São providas classes de alta e de baixa qualidade e um mecanismo de prioridades de *buffer* de saída. A decisão de aceitação de um pedido de conexão é feita com base apenas na sua taxa de pico e na medição da taxa de chegadas de células do tráfego agregado. Para uma conexão de alta qualidade é feita a alocação pela taxa de pico.

Como se pode observar em (Knightly, E. & Shorff, N., 1999), (Gibbens R.J. & Kelly F.P., 1997), (Baek-Young Choi; Zhenhai Duan; Zhi-Li Zhang & David H.C. Du.), (Sugih Jamin; Scott J. Shenker; & Peter B. Danzig), (Sugih Jamin; Peter B. Danzig; Scott J. Shenker & Lixia Zhang), (Vieira, F.H.T & Lee L.L., 2009b), vários métodos de controle de admissão são apresentados na literatura, de forma que na próxima seção listaremos resumidamente alguns desses modelos. Dentre eles, discutiremos o método da Máxima Variância, o método de Perda Virtual e o método da Capacidade Equivalente para a comparação do método proposto.

4.2.1 Baseado em Taxa Média e/ou Taxa de Pico

Nesta classe, a fonte de tráfego é caracterizada por sua taxa de pico e/ou por sua taxa média. Um dos principais exemplos de controle de admissão desta classe é apresentado em (Ferrari, D. & Verma, D., 1990). Neste artigo, os autores consideram um modelo On-Off para as fontes de tráfego, estimando a probabilidade de perda para o multiplexador sem *buffer*. Esta probabilidade de perda é então usada em um esquema de controle de admissão, indicando se os fluxos de tráfego podem ser admitidos no multiplexador.

4.2.2 Baseado em Probabilidade de Perda Virtual

Consideraremos uma fonte j (Lee T.; Lai K. & Duann S., 1996), caracterizada pela taxa média (AVG), e a taxa de pico (MAX). Sendo uma fonte de vídeo, por exemplo, existem períodos ativos e períodos ociosos, de forma que a probabilidade da fonte estar ativa é dada por (AVG/MAX) e a probabilidade de estar em um estado ocioso é dada por $1 - (AVG/MAX)$. A taxa de tráfego será constante se AVG for igual a MAX . Usando essa taxa de distribuição, um algoritmo de controle de admissão é designado para aproximar a probabilidade de perda em um multiplexador. Com isso, a qualidade de serviço (QoS) é medida em termos da probabilidade de perda virtual. A probabilidade de perda ocorre se e somente se a taxa de pico agregado exceder a capacidade do servidor.

Este método de controle de admissão é derivado apenas pelos parâmetros MAX e AVG do tráfego (Jacobsen S.B.; Moth K. & Dittmann L., 1990), (Sato S. & Tanabe S., 1989), (Suzuki H.; Marase T.; Sato S. & Takeuchi T.), onde a taxa de pico agregado para uma carga com n fontes ativas é definido como, $n \cdot MAX$. A perda virtual é dada, da razão do excesso de tráfego OF , pela utilização do tráfego (ρ). Denotamos o número de fontes multiplexada em um link por N . Com isso temos as seguintes equações:

$$pv = OF/\rho. \quad (4.1)$$

$$OF = \sum_{\substack{n=N \\ (n \cdot MAX - C) \geq 0}} p(n)(n \cdot MAX - C), \quad (4.2)$$

$$\rho = N \cdot AVG, \quad (4.3)$$

onde $p(n)$ é a probabilidade de que n de N fontes estejam ativas, isto é:

$$p(n) = \binom{N}{n} \left(\frac{AVG}{MAX} \right)^n \left(1 - \frac{AVG}{MAX} \right)^{N-n}. \quad (4.4)$$

Quando a taxa de pico agregada for menor que a capacidade do servidor, a perda é assumida que nunca ocorreu. Mesmo que a condição seja válida, devido a um curto prazo de carga flutuante causada por chegadas simultâneas de diferentes tipos de fontes, a carga de tráfego excede instantaneamente a capacidade do servidor. E por essa razão o *buffer* deve ter uma capacidade apropriada em um sistema real para prevenir a perda devido ao curto prazo de carga flutuante. É necessário um *buffer* com capacidade derivado de um modelo de fila M/D/1. (Karol M. J. & Hluchyj M., 1987) (Eklundh B.; Sallberg K. & Stavenow B., 1988).

4.2.3 Baseado na Máxima Variância

Sejam $A_j[s, t]$, o fluxo j de tráfego de chegada no intervalo $[s, t]$, X_t como:

$$X_t = \sum_j A_j[s - t, s] - Ct, \quad (4.5)$$

Segundo Loynes (Loynes R., 1962), a probabilidade de perda de dados (pacotes, *bytes*, etc) é dada por:

$$P(Q > B) = P(\sup X_t > B), \quad (4.6)$$

A abordagem MVA fundamenta-se na observação de que, se X_t é Gaussiano, limitantes exatos e aproximações para o lado direito da Equação 4.6 podem ser obtidos. Como X_t corresponde à agregação de chegadas de um grande número de fontes, pelo Teorema do Limite Central, a hipótese de X_t ser Gaussiano é razoável em redes de alta velocidade. Para X_t Gaussiano a Máxima Variância (MVA) normalizada, é dada por:

$$\sigma_B^2 = \frac{var(X_t)}{(B - E(X_t))^2}, \quad (4.7)$$

Sendo X_t Gaussiano, pode-se dizer que o instante de tempo t em que a variância normalizada σ_B^2 for máxima é o mesmo instante em que a probabilidade de perda $P(X_t > B)$ atinge seu valor máximo, onde B é o tamanho do *buffer*. Dessa forma, um fluxo de tráfego é aceito se a estimativa da probabilidade de perda $P(X_t > B)$ não ultrapassar um determinado valor (Shroff, N. & Schwartz,

M., 1998). Assim, uma aproximação utilizada para estimar a Equação 4.6 é:

$$P(\sup X_t > B) \approx \max_t P(X_t > B). \quad (4.8)$$

4.2.4 Baseado na Capacidade Equivalente

O método da capacidade equivalente é atribuído a Guérin et al. (Guérin R.A.; Ahmadi H. & Naghshineh M., 1991). Seu objetivo é obter uma expressão unificada para a representação da banda efetiva, ou a capacidade equivalente, de uma conexão, assim como para o agregado das conexões.

Dois aproximações diferentes são utilizadas no cálculo da banda efetiva: uma fundamentada em modelos de fluxo contínuo e outra, em uma aproximação da distribuição estacionária da taxa. Estas aproximações foram selecionadas de modo a se completarem, pois cada uma captura um diferente aspecto do comportamento das conexões multiplexadas, ao mesmo tempo que permanecem computacionalmente simples.

A primeira aproximação estima de um modo apurado a capacidade equivalente quando o impacto das características de uma fonte individual é crítico. A segunda aproximação é representativa nos casos em que a multiplexação estatística das conexões é significativa.

Aproximação de Fluxo Contínuo

Na aproximação de fluxo contínuo, uma única fonte de tráfego é modelada por uma cadeia de Markov de 2 estados (fontes em rajadas do tipo on / off), correspondentes aos períodos de atividade e silêncio. A caracterização de uma fonte on/off é feita pela sua taxa de pico (R), pela utilização (ρ) e pelo tempo médio de duração da rajada (b). A distribuição do tamanho da fila, quando tal fonte está alimentando uma fila com um servidor de taxa de serviço constante, pode ser derivada usando-se técnicas padrão para o caso de filas tanto de fontes idênticas quanto de fontes representadas por cadeias de Markov mais gerais (Kosten L., 1986) (Mitra D., 1988) (Stern T.E., 1988). Com esta distribuição, é possível determinar a taxa de serviço, ou capacidade equivalente, necessária para alcançar a QoS desejada. Assumindo um *buffer* de tamanho finito x , a equação satisfeita pela capacidade equivalente C para uma probabilidade de perda ϵ (o requisito de QoS desejado) é da forma:

$$\epsilon = \beta \exp\left(\frac{x(C - R\rho)}{b(1 - \rho)(R - C)C}\right). \quad (4.9)$$

onde $\beta = \frac{(C - \rho R) + \epsilon \rho (R - C)}{(1 - \rho)R}$. A capacidade equivalente para uma única fonte pode ser obtida resolvendo-se a Equação 4.9 para C . Entretanto como nenhuma expressão fechada pode ser obtida para a capacidade equivalente, a Equação 4.9 deve ser resolvida numericamente. Devido a isto, Guérin et al.

propuseram uma aproximação fixando o valor de β em 1. Neste caso, a capacidade equivalente C' de uma única fonte isolada é dada por:

$$C' = \frac{f_i - k + \sqrt{(f_i - k)^2 + 4k\rho_i f_i}}{2\alpha b_i(1 - \rho_i)}. \quad (4.10)$$

onde $\alpha = \ln(1/\epsilon)$

$$f_i = \alpha b_i(1 - \rho_i)R_i$$

k = tamanho do *buffer*

No caso de múltiplas fontes, utiliza-se uma aproximação assintótica é para o cálculo da probabilidade de transbordo do *buffer*, onde apenas a contribuição do autovalor mais negativo associado ao sistema é considerada. Sob tais circunstâncias, a probabilidade de transbordo do *buffer* $G(x)$ é da forma:

$$G(x) \approx \beta e^{z_0 x}. \quad (4.11)$$

onde z_0 é o autovalor negativo de menor módulo e β é independente de x .

Entretanto, enquanto z_0 pode ser facilmente obtido através de equações simples, a determinação da constante β é muito difícil. Em vista disto, novamente Guérin et al. aproximaram o valor de β por 1, o que equivale a não considerar o ganho de multiplexação estatística. Com isto, a capacidade equivalente do agregado de fontes, C''_f , é dada pela soma das N capacidades equivalentes individuais das fontes.

$$C''_f = \sum_{i=1}^N C''_i. \quad (4.12)$$

Esta linearização explícita indica que a capacidade equivalente do agregado é superestimada, a menos das situações em que as capacidades equivalente individuais são próximas às suas taxas médias. Neste caso, a aproximação somente produz bons resultados quando há uma única fonte.

Como visto, citamos alguns métodos existente na literatura, porém existe uma infinidade deles, e devido à grande variedade de métodos para o controle de admissão, o problema de decisão sobre a aceitação ou não de uma nova conexão pode ser formulado como um problema de teoria de filas envolvendo um multiplexador, representado por um conjunto de fontes alimentando uma fila de capacidade finita e servida por um servidor com tempo de serviço constante. Neste problema, procura-se encontrar o número máximo de conexões que podem ser aceitas enquanto estando de acordo com os objetivos de QoS contratados. Entretanto, a solução deste problema de fila é muito árdua e difícil de ser realizada em tempo de execução. Desta forma propomos na próxima seção um método de controle

de admissão que leva em conta as características multifractais existentes no tráfego.

4.3 Método de Controle de Admissão Proposto

Uma vez que a estimação de parâmetros multifractais dos fluxos de tráfego requer algoritmos relativamente complexos, desenvolver um algoritmo de controle admissão que leve em consideração essas características pode resultar em uma elevada complexidade computacional. Nesta seção propomos uma estratégia para o controle de admissão a partir da suposição de que a variância dos traços de tráfego tem um decaimento exponencial em função do tempo, como visto na seção 3.5. O método de controle de admissão proposto consiste basicamente de se calcular a probabilidade de perda de dados através da Equação 3.44 à medida que se pretende estabelecer uma nova conexão. Em outras palavras, no método proposto é necessário que para cada nova conexão, sejam calculados alguns parâmetros, dentre eles a taxa média (λ), os coeficientes a e b do modelo exponencial usado na aproximação da relação variância por tempo, além da fixação das configurações do servidor a ser utilizado, (Capacidade do Servidor (C) e Tamanho do *Buffer* (q)). Um fluxo de tráfego será aceito se a estimativa da probabilidade de perda P_{steady} não ultrapasse um determinado limiar desejado.

4.4 Caracterização dos Surtos ou Rajadas

O tráfego de dados e de vídeo com compressão são classificados como de taxa variável, ou seja, caracterizados pelo conceito de surto ou rajada (*burstiness*), que interfere de forma crucial na análise de tráfego.

Existem diversas formas de medir a intensidade de um surto. Neste item apresentamos os seguintes parâmetros alternativos para medida de surto: PRM (*Peak to Mean Ratio*), CSQ (*Square Coefficient of Variation*) e IDC (*Index of Dispersion of Counts*).

O primeiro parâmetro analisado é o mais simples e é o chamado coeficiente de surto, dado pela razão entre a taxa de pico e a taxa média, também chamado relação pico pela média (PRM - *Peak to Mean Ratio*) (Erramilli A. Wang J. L., 1994) (Frost V. & Melamed B., 1994). O PRM leva em conta somente as propriedades estatísticas de primeira ordem do tráfego, não considerando os tempos entre as chegadas de pacotes.

Seja um processo aleatório X , $\{X = X(t), t \in R, t > 0\}$, que representa a intensidade da taxa de chegada de pacotes no instante t . Seja \bar{X} o valor médio da taxa do processo X definido pela Equação 4.13 do processo X e X_m , o valor máximo do mesmo processo.

$$\bar{X} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int X(t) dt. \quad (4.13)$$

A partir de \bar{X} e X_m o coeficiente de surto desse processo é dado por:

$$\beta = \frac{X_m}{\bar{X}}. \quad (4.14)$$

O segundo parâmetro analisado, é o coeficiente de variabilidade dado pela razão entre o desvio padrão σ_{Y_n} e o valor médio (\bar{Y}_n) dos tempos entre chegadas consecutivas de pacotes \bar{Y}_n (Frost V. & Melamed B., 1994).

$$C_v = \frac{\sigma_{Y_n}}{\bar{Y}_n}, \quad (4.15)$$

O terceiro parâmetro é equivalente ao C_v e é o coeficiente quadrático de variabilidade (CSQ - *Square Coeficient of Variation*). Esse parâmetro é calculado como (Erramilli A. Wang J. L., 1994):

$$CSQ = \frac{\sigma_{Y_n}^2}{\bar{Y}_n^2}. \quad (4.16)$$

É importante notar que estes três parâmetros não levam em consideração a dependência temporal.

O Índice de Dispersão, IDC (*Index of Dispersion of Counts*), representado pela Equação 4.17, que é a razão da variância pela média do processo de contagem $N(\tau)$, leva em conta a dependência temporal no tráfego. Para um determinado intervalo de comprimento τ o índice de dispersão é a razão entre a variância e o número médio de chegadas (Erramilli A. Wang J. L., 1994) (Frost V. & Melamed B., 1994).

$$IDC(\tau) = \frac{Var\{N(\tau)\}}{E\{N(\tau)\}}. \quad (4.17)$$

4.5 Características das Séries de Tráfego

Nesta seção iremos caracterizar as séries de tráfegos utilizadas nas simulações para o controle de admissão, assim como os parâmetros existentes nos tráfegos reais e sintéticos obtidos nas aproximações da variância pelo modelo exponencial usado.

4.5.1 A Série *dec-pkt-2-10*

Esta série deriva de *dec-pkt-2* com escala de agregação de 10 milissegundos. Para a realização dos teste no controle de admissão, houve uma multiplexação da série 11 vezes, ou seja, se observarmos a Tabela 4.1, temos que na primeira coluna (Multiplicação), o valor 1 significa que utilizamos a série

de forma natural, o valor 2, significa que para a série 1, somamos novamente a mesma série, e dessa forma, a cada nova linha somamos as séries em sim mesma até completarmos 11 vezes.

Na Tabela 4.1 seguem algumas características estatísticas das multiplexações usadas nos testes, e na Tabela 4.2 apresentamos os parâmetros obtidos para os cálculos da Equação 3.44. Este traço de tráfego possui 18.563 amostras.

Multiplexação	Média (bytes)	Variância (bytes)	Taxa de Pico (bytes)	Taxa de Surto (bytes)
1	1.3921e+003	3.3910e+006	1.2004e+004	0.86
2	2.7840e+003	1.3564e+007	2.4008e+004	0.86
3	4.1763e+003	3.0519e+007	3.6012e+004	0.86
4	5.5684e+003	5.4257e+007	4.8016e+004	0.86
5	6.9605e+003	8.4776e+007	6.0020e+004	0.86
6	8.3526e+003	1.2208e+008	7.2024e+004	0.86
7	9.7447e+003	1.6616e+008	8.4028e+004	0.86
8	1.1137e+004	2.1703e+008	9.6032e+004	0.86
9	1.2529e+004	2.7467e+008	10.8036e+004	0.86
10	1.3931e+004	3.3910e+008	12.0040e+004	0.86
11	1.5313e+004	4.1032e+008	13.2044e+004	0.86

Tab. 4.1: Características Estatísticas da Multiplexação - *dec-pkt-2-10*.

Multiplexação	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\sigma}^2$	a	b	erro
1	0.0138	0.0099	3.383	-1.225	0.000884

Tab. 4.2: Parâmetros de *dec-pkt-2-10*.

Os valores referentes às outras multiplexações para essa série foram omitidos aqui, pois por ser um multiplexação de uma série nela mesma os valores de $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, a e b são os mesmo, alterando apenas os valores da média, da variância e da taxa de pico, como visto na Tabela 4.1.

4.5.2 Várias Séries

Os experimentos realizados aqui, utilizam várias séries TCP/IP multiplexadas entre si, de forma análoga ao experimento 1. As séries são: *dec-pkt-2-100*, *dec-pkt-3-100*, *dec-pkt-3-512*, *lbl-tcp-3*, *lbl-pkt-4-100*, *lbl-pkt-5-100*, *lbl-pkt-4-512*, *lbl-pkt-5-512*, *BC-pAug89-200*, *Bc-pAug89-400*, todas com 7.000 amostras. As séries *dec-pkt-2-100* deriva da série *dec-pkt-2* porém com escala de agregação igual a 100 milissegundos, as séries *dec-pkt-3-100* e *dec-pkt-3-512* derivam de *dec-pkt-3* com escalas de agregação 100 e 512 milissegundos respectivamente. A série *lbl-pkt-4-100* e *lbl-pkt-4-512*

derivam de *lbl-pkt-4* com escala de agregação 100 e 512 milissegundos respectivamente. Da mesma forma *lbl-pkt-5-100* e *lbl-pkt-5-512* derivam da série *lbl-pkt-5* com escala de agregação de 100 e 512 milissegundos respectivamente. E finalmente as séries *BC-pAug89-200* e *BC-pAug89-400* derivam de *BC-pAug89* com 200 e 400 milissegundos na escala de agregação respectivamente.

Ao observamos a primeira coluna da Tabela 4.3 (Multiplexação), temos que para o valor 1 utilizamos a série *dec-pkt-2-100*, para o valor 2 utilizamos *dec-pkt-2-100+dec-pkt-3-100*, para o valor 3 utilizamos *dec-pkt-2-100+dec-pkt-3-100+dec-pkt-3-512*, e assim de forma análoga multiplexando todas as séries mencionadas.

Seguem na Tabela 4.3 algumas características estatísticas das multiplexações usadas nos testes experimentais. E na Tabela 4.4 apresentamos os parâmetros obtidos para os cálculos da Equação 3.44.

Multiplexação	Média (bytes)	Variância (bytes)	Taxa de Pico (bytes)	Taxa de Surto (bytes)
1	1.1969e+005	2.2241e+009	3.31495e+005	2.77
2	2.1005e+005	6.7614e+008	4.49198e+005	2.14
3	3.0258e+005	7.0152e+008	5.59846e+005	1.85
4	3.2084e+005	2.7690e+008	5.77784e+005	1.80
5	3.3949e+005	2.8597e+008	6.05438e+005	1.78
6	3.5291e+005	1.2766e+008	6.28082e+005	1.77
7	3.8767e+005	1.1879e+009	7.73454e+005	1.99
8	4.0099e+005	1.2285e+008	7.86713e+005	1.96
9	4.5417e+005	1.4735e+009	9.08909e+005	2.00
10	4.9995e+005	1.5766e+009	10.84703e+005	2.17

Tab. 4.3: Características Estatísticas da Multiplexação - Várias Séries.

Multiplexação	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\sigma}^2$	a	b	erro
1	0.1491	0.0366	2.865	-1.054	0.001391
2	0.1458	0.0479	2.503	-0.9347	0.005404
3	0.1466	0.0412	2.532	-0.9456	0.005048
4	0.1369	0.0648	2.456	-0.9177	0.006910
5	0.1444	0.0674	2.405	-0.8983	0.007796
6	0.1211	0.0389	2.668	-0.9954	0.004547
7	0.1315	0.0544	2.537	-0.9480	0.005546
8	0.1138	0.0356	2.722	-1.0140	0.004327
9	0.1198	0.0413	2.662	-0.9931	0.004622
10	0.1098	0.0313	2.763	-1.029	0.004138

Tab. 4.4: Parâmetros das Várias Séries.

4.5.3 A Série Sintética - Multifractal

As séries aqui utilizadas, foram geradas pelo FRACLAB ¹, uma toolbox do Matlab. A geração das séries ocorre de forma simples, bastando utilizar as especificações existentes na caixa de diálogo apresentada pela toolbox. Cada traço aqui utilizado possui 16.384 amostras. A Tabela 4.5 apresenta algumas características estatísticas das multiplexações para as séries sintéticas com características multifractais. A multiplexação utilizada neste experimento é idêntica aos dois primeiros experimentos, somando uma série na outra. Na Tabela 4.6 apresentamos os parâmetros obtidos para os cálculos da Equação 3.44.

<i>Multiplexação</i>	<i>Média (bytes)</i>	<i>Variância (bytes)</i>	<i>Taxa de Pico (bytes)</i>	<i>Taxa de Surto (bytes)</i>
1	900.1115	3.9825e+003	1.181e+003	1.31
2	1.6998e+003	6.0430e+003	2.024e+003	1.19
3	2.2004e+003	9.1609e+003	2.588e+003	1.18
4	3.1510e+003	1.2620e+004	3.6190e+003	1.15
5	4.2526e+003	1.5229e+004	4.7330e+003	1.11
6	5.2331e+003	1.7196e+004	5.7380e+003	1.09
7	6.1338e+003	1.9464e+004	6.6730e+003	1.08
8	7.1186e+003	2.2352e+004	7.7810e+003	1.09
9	7.5722e+003	2.3300e+004	8.221e+003	1.08
10	8.3589e+003	2.4655e+004	9.079e+003	1.08

Tab. 4.5: Características Estatísticas da Multiplexação - Sintética Multifractal.

<i>Multiplexação</i>	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\sigma}^2$	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>erro</i>
1	0.1203	0.0973	2.359	-0.882	0.003673
2	0.1063	0.0415	2.728	-1.017	0.004434
3	0.1228	0.0527	2.589	-0.967	0.005243
4	0.1622	0.0769	2.398	-0.895	0.006160
5	0.1000	0.0303	2.817	-1.047	0.003992
6	0.1220	0.0151	2.783	-1.035	0.003827
7	0.1445	0.0161	2.668	-0.995	0.004101
8	0.1409	0.0371	2.580	-0.963	0.004770
9	0.1479	0.0115	2.676	-0.997	0.004011
10	0.1716	0.0216	2.512	-0.937	0.004620

Tab. 4.6: Parâmetros de Sintético - Multifractal.

¹<http://complex.futurs.inria.fr/FracLab/>

4.5.4 A Série Sintética - fBm

As séries aqui utilizadas, também foram geradas pelo FRACLAB. A geração das séries, seguem os mesmos procedimentos das séries multifractais, utilizando as especificações existentes nas caixas de diálogos apresentada pela toolbox, tais como a quantidade de amostras, o parâmetro de Hurst, dentre outros. Cada traço aqui utilizado possui 10.000 amostras. A Tabela 4.7 apresenta algumas características estatísticas das multiplexações para as séries sintéticas fBm. A multiplexação utilizada neste experimento é idêntica aos três primeiros experimentos, somando uma série na outra. A Tabela 4.8 mostra os parâmetros obtidos para os cálculos da Equação 3.44.

<i>Multiplexação</i>	<i>Média (bytes)</i>	<i>Variância (bytes)</i>	<i>Taxa de Pico (bytes)</i>	<i>Taxa de Surto (bytes)</i>
1	245.8235	2.3198e+004	627.2334	2.55
2	638.1093	1.2160e+005	1.2777e+003	2.00
3	1.0088e+003	1.7717e+005	1.8241e+003	1.81
4	2.6501e+003	6.5371e+005	3.6257e+003	1.37
5	3.6127e+003	9.6363e+005	5.4650e+003	1.51
6	5.8674e+003	1.0830e+007	1.2838e+004	2.19
7	6.7879e+003	1.1993e+007	1.3688e+004	2.02
8	1.3573e+004	4.6928e+007	2.4490e+004	1.80
9	1.8758e+004	8.6046e+007	3.3114e+004	1.77
10	1.9998e+004	8.2872e+007	3.4119e+004	1.70

Tab. 4.7: Características Estatísticas da Multiplexação - Sintética fBm.

<i>Multiplexação</i>	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\sigma}^2$	a	b	<i>erro</i>
1	0.1371	0.0253	2.659	-0.9915	0.004290
2	0.1237	0.0161	2.538	-0.9484	0.006012
3	0.1960	0.0124	2.444	-0.9111	0.004626
4	0.1614	0.0122	2.608	-0.9727	0.004185
5	0.1709	0.0438	2.402	-0.8961	0.005660
6	0.1115	0.0817	2.490	-0.9312	0.001110
7	0.1289	0.0699	2.467	-0.9222	0.007622
8	0.1927	0.0495	2.270	-0.8438	0.006703
9	0.1404	0.0929	2.283	-0.8511	0.003322
10	0.1386	0.0836	2.345	-0.8753	0.001647

Tab. 4.8: Parâmetros de Sintético - fBm.

4.5.5 As Séries de Vídeos

As séries aqui utilizadas são uma multiplexação de várias séries de Vídeos, sendo elas: *Aladdin*, *Diefirma*, *Diehard3*, *Dusk*, *First Contact*, *Jurassic*, *Robin Hood*, *Silence*, *Starqars4*, *Suzi and Strolch* e *Trooper*². Cada série apresenta 89.998 amostras. A Tabela 4.9 apresenta alguns dados estatísticos das multiplexação usados nas simulações. A multiplexação utilizada neste experimento é idêntica aos outros experimentos. Na Tabela 4.10 apresentamos os parâmetros obtidos para os cálculos da Equação 3.44.

Multiplexação	Média (bytes)	Variância (bytes)	Taxa de Pico (bytes)	Taxa de Surto (bytes)
1	3.8315e+003	1.1450e+007	1.22350e+005	31.93
2	6.7078e+003	1.4979e+007	2.33355e+005	34.78
3	8.0843e+003	1.9236e+007	2.38079e+005	29.45
4	9.7291e+003	3.0440e+007	2.41989e+005	24.87
5	1.3134e+004	3.8291e+007	3.03348e+005	23.09
6	1.4600e+004	4.9642e+007	3.23916e+005	22.19
7	1.7614e+004	6.5761e+007	3.66386e+005	20.80
8	2.1100e+004	8.1532e+007	3.68223e+005	17.45
9	2.3277e+004	1.0577e+008	3.90046e+005	16.76
10	2.7849e+004	1.2413e+008	4.68601e+005	16.83
11	2.9652e+004	1.5052e+008	4.97522e+005	16.78

Tab. 4.9: Características Estatísticas da Multiplexação - Vídeos.

Multiplexação	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\sigma}^2$	a	b	erro
1	0.1849	0.0510	2.299	-0.8557	0.002574
2	0.1809	0.0504	2.320	-0.8641	0.002407
3	0.1735	0.0409	2.405	-0.8971	0.001773
4	0.1710	0.0386	2.430	-0.9065	0.001704
5	0.1923	0.0368	2.339	-0.8710	0.001804
6	0.1979	0.0395	2.309	-0.8595	0.001830
7	0.2162	0.0361	2.233	-0.8279	0.001962
8	0.2503	0.0406	2.059	-0.7539	0.002582
9	0.2320	0.0383	2.152	-0.794	0.002188
10	0.2363	0.0410	2.118	-0.7795	0.002400
11	0.2216	0.0439	2.169	-0.8014	0.002419

Tab. 4.10: Parâmetros Vídeos.

²<http://www.cs.columbia.edu/hgs/internet/traces.html>

4.6 Resultados Obtidos nas Simulações

Nesta seção iremos validar o método de controle de admissão proposto através da equação proposta para o cálculo de probabilidade de perda no Capítulo 3 e comparamos com alguns métodos citados na seção 4.2.

Na Tabela 4.11 apresentamos as configurações do sistema (Capacidade do Servidor e Tamanho do *Buffer*) para um simples servidor usado nas simulações do controle de admissão.

<i>Série de Tráfego</i>	<i>Capacidade do Servidor (bits/s)</i>	<i>Tamanho de Buffer (bits)</i>
TCP/IP (<i>dec-pkt-2-10</i>)	1.6e+004	3e+004
TCP/IP (Varias séries)	5e+004	7e+005
Sintético Multifractal	1e+004	4e+005
Sintético fBm	2e+004	4e+005
Vídeo	3e+004	4e+005

Tab. 4.11: Configurações do Sistema.

As Figuras 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5, são referentes as seguintes séries de tráfego respectivamente: TCP/IP (uma única série), TCP/IP (várias séries), Sintético Multifractal, Sintético fBm e séries de Vídeos. As figuras mostram a quantidade de séries agregadas versus a probabilidade de perda. Podemos notar que os resultados obtidos pela proposta apresentam maior proximidade dos resultados de simulação com tráfego real do que para os demais métodos, para todos os tráfegos analisados.

Apresentamos na Figura 4.1 a comparação de alguns dos métodos citados neste trabalho com a proposta feita para a série de tráfego denominada *dec-pkt-2-10* e observamos que o método proposto apresenta um resultado mais preciso do que as outras abordagem.

Para a Figura 4.2 a análise foi feita para diversas séries de tráfego TCP/IP e observamos que o método proposto apresenta novamente uma melhor caracterização da perda de *bytes* com relação as abordagens consideradas.

Na Figura 4.3 os resultados são mais expressivos, por modelar com certa exatidão um traço com características multifractais. De acordo com o resultado, pode-se concluir que o método MVA não seria uma boa estratégia para a caracterização para esta situação.

A Figura 4.4 apresenta os resultados de probabilidade de perda para séries (modelo fBm). Pela Figura 4.4, observa-se que mesmo as séries geradas pelo modelo fBm serem gaussianas e o método MVA ser baseado em tráfego gaussiano, o método proposto obteve resultados mais próximos aos das simulações.

E por fim, observa-se na Figura 4.5 que o método proposto permanece mais preciso e robusto também para traços de vídeo.

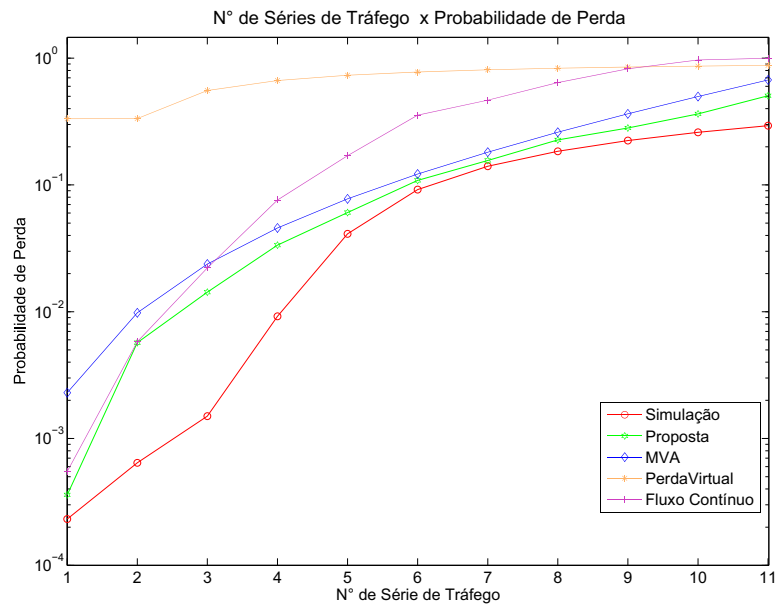


Fig. 4.1: Nº de Séries de Tráfego versus Probabilidade de Perda para um Traço de Tráfego TCP/IP (*dec-pkt-2-10*)

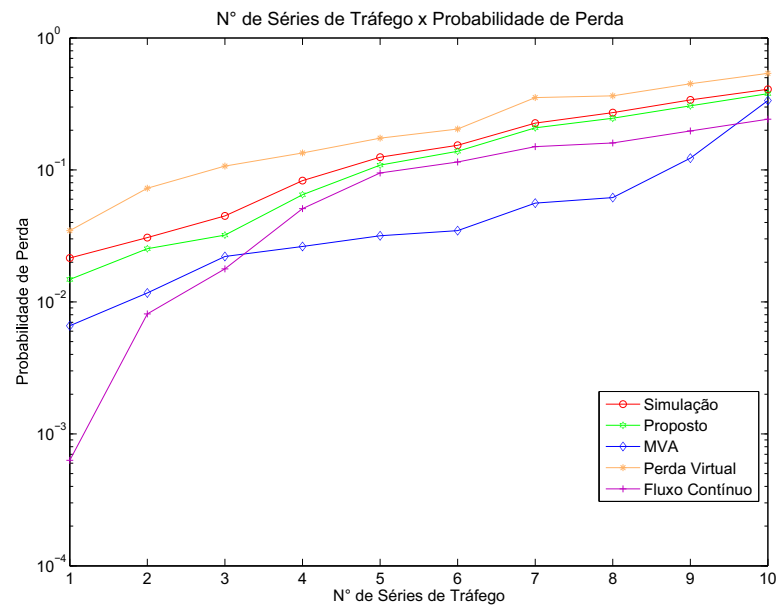


Fig. 4.2: Nº de Séries de Tráfego versus Probabilidade de Perda TCP/IP Traço de Tráfego (Várias séries)

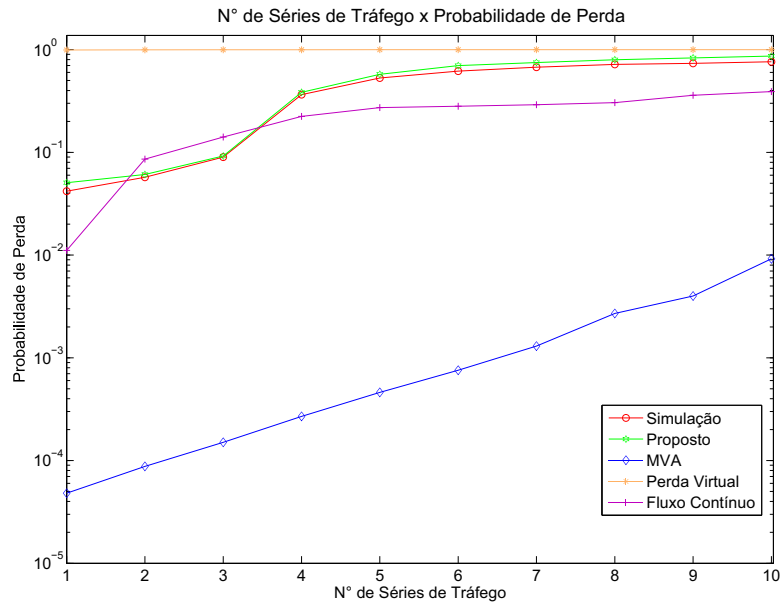


Fig. 4.3: N° de Séries de Tráfego versus Probabilidade de Perda para um Traço de Tráfego Sintético Multifractal

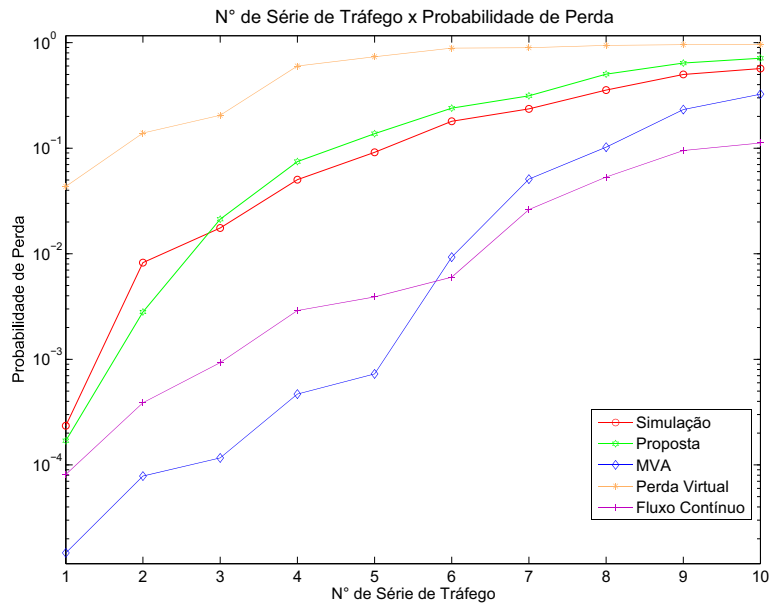


Fig. 4.4: N° de Séries de Tráfego versus Probabilidade de Perda para um Traço de Tráfego Sintético fBm

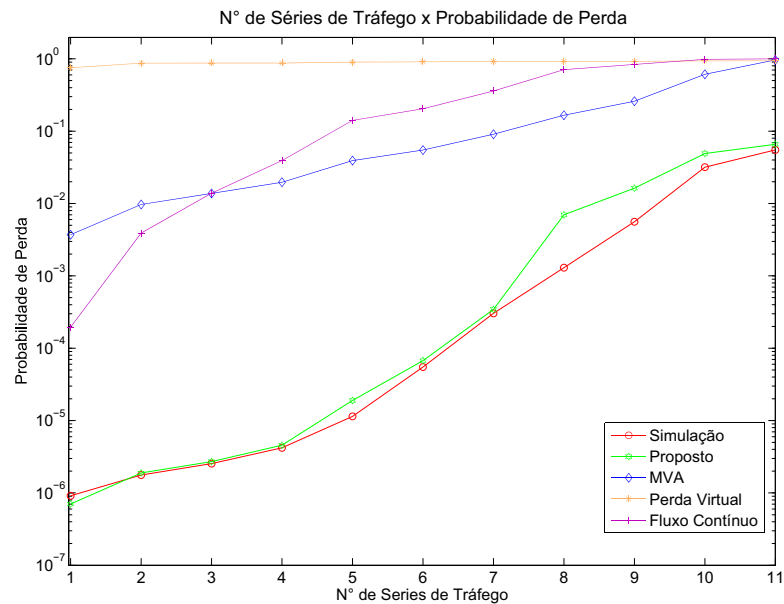


Fig. 4.5: N° de Séries de Tráfego versus Probabilidade de Perda para Traço de Tráfego de Vídeo

As Tabelas 4.12, 4.13, 4.14, 4.15 e 4.16 resumem os resultados referentes à análise da quantidade de conexões aceitas assumindo várias probabilidades de perda referentes ao traço de tráfego utilizados.

Na Tabela 4.12 utilizamos a multiplexação do traço de tráfego *dec-pkt-2-10*.

<i>Probabilidade de Perda</i>	<i>Simulação</i>	<i>Proposta</i>	<i>MVA</i>	<i>Perda Virtual</i>	<i>Fluxo Contínuo</i>
e-003	2	1	0	0	1
e-002	3	2	1	0	1
e-001	6	6	5	0	4

Tab. 4.12: Quantidade de Tráfegos Aceitos - *dec-pkt-2-10*.

Vemos que a Tabela 4.12 confirma que as quantidades de conexões aceitas pelo método proposto se equivalem ou estão bem próximas da simulação.

Na Tabela 4.13 utilizamos a multiplexação de diversos traços de tráfegos, sendo eles: (*dec-pkt-2-100*, *dec-pkt-3-100*, *dec-pkt-3-512*, *lbl-tcp-3*, *lbl-pkt-4-100*, *lbl-pkt-5-100*, *lbl-pkt-4-512*, *lbl-pkt-5-512*, *BC-pAug200*, *BC-pAug400*).

Observamos a Tabela na 4.13 que apesar do método MVA conseguir realizar uma maior quantidade de conexões para a multiplexação de diversas séries de tráfegos, tal método superestima a

<i>Probabilidade de Perda</i>	<i>Simulação</i>	<i>Proposta</i>	<i>MVA</i>	<i>Perda Virtual</i>	<i>Fluxo Contínuo</i>
e-003	0	0	0	0	1
e-002	0	0	1	0	2
e-001	4	4	8	2	5

Tab. 4.13: Quantidade de Tráfegos Aceitos - Várias Séries.

simulação real dos traços e confirmamos que as quantidades de conexões aceitas pelo método proposto se equivalem ou estão bem próximas da simulação real.

Na Tabela 4.14 utilizamos a multiplexação de diversos traços de tráfegos sintéticos multifractais gerados pelo Fraclab.

<i>Probabilidade de Perda</i>	<i>Simulação</i>	<i>Proposta</i>	<i>MVA</i>	<i>Perda Virtual</i>	<i>Fluxo Contínuo</i>
e-004	0	0	2	0	0
e-003	0	0	6	0	0
e-002	0	0	10	0	0
e-001	3	3		0	2

Tab. 4.14: Quantidade de Tráfegos Aceitos - Sintético Multifractal

Observamos novamente a Tabela 4.14 que o método MVA consegue realizar uma maior quantidade de conexões para a multiplexação de diversas séries de tráfegos dessa vez sintéticos, e novamente o método MVA superestima a simulação real dos traços e confirmamos que as quantidades de conexões aceitas pelo método proposto se equivalem ou estão bem próximas da simulação real, fatos este comprovado pela Figura 4.3.

Na Tabela 4.15 utilizamos a multiplexação de diversos traços de tráfegos sintéticos fBm gerados pelo Fraclab.

<i>Probabilidade de Perda</i>	<i>Simulação</i>	<i>Proposta</i>	<i>MVA</i>	<i>Perda Virtual</i>	<i>Fluxo Contínuo</i>
e-004	0	0	2	0	1
e-003	1	1	5	0	3
e-002	2	2	6	0	6
e-001	5	4	7	0	10

Tab. 4.15: Quantidade de Tráfegos Aceitos - Sintético fBm

Analisando a Tabela 4.15 vemos de forma análoga o ocorrido nas Tabelas 4.13 e 4.14, com o método MVA superestimando a simulação real dos traços, juntamente com o método Fluxo Contínuo e mais uma vez o método proposto se equiparando ou estando bem próximo da simulação real.

A Tabela 4.16 resume os resultados referentes à análise da quantidade de conexões aceitas assumindo várias probabilidades de perda referentes ao traço de vídeo (*Aladdin, Diefirma, Diehard3, Dusk, First Contact, Jurassic, Robin Hood, Silence, Starqars4, Suzi and Strolch e Trooper*).

<i>Probabilidade de Perda</i>	<i>Simulação</i>	<i>Proposta</i>	<i>MVA</i>	<i>Perda Virtual</i>	<i>Fluxo Contínuo</i>
e-004	6	6	0	0	0
e-003	8	7	0	0	1
e-002	9	9	2	0	2
e-001	11	11	7	0	4

Tab. 4.16: Quantidade de Tráfegos Aceitos - Vídeos.

E finalmente a Tabela 4.16 volta a confirma que as quantidades de conexões aceitas pelo método proposto se equivalem ou estão bem próximas da simulação real.

4.7 Considerações Finais

Como foi visto neste capítulo, a diversidade de critérios usados em mecanismos de CAC proposto na literatura é muito grande. Muitas das vezes, estes mecanismos diferem por apenas alguns detalhes de implementação. Outras vezes, apresentam abordagens e métodos diferentes. A comparação entre a eficiência destes mecanismos, entretanto, é muito difícil, pois cada um deles tenta capturar um aspecto particular do tráfego que é submetido à rede e apresenta uma caracterização própria do problema.

Em redes com suporte à qualidade de serviço, um algoritmo de controle de admissão (CAC - *Connection Admission Control*) determina se um novo fluxo de tráfego pode ser admitido na rede, tal que os usuários obtenham o desempenho de rede requerido. Uma análise com tráfego multifractal pode se tornar complexa devido a algumas dificuldades, por exemplo, estimação de probabilidade de perda com fluxos apresentando densidade de probabilidade lognormal ou de cauda pesada (Nelson X. Liu & John S. Baras., 2003). Através da derivação da equação de probabilidade de perda descrita no Capítulo 3 foi possível analisarmos a admissão de fluxos de tráfego considerando características multifractais.

Verificamos pelos resultados obtidos que o esquema de controle de admissão proposto é mais preciso em diferentes situações que vários métodos existentes na literatura. Dessa forma, o esquema de controle de admissão proposto pode ser empregado em diversas tecnologias de rede para garantir parâmetros de QoS requeridos aos fluxos de tráfego.

De um modo geral, os mecanismos de controle de admissão que levam em consideração os índices de surtos do tráfego, tendem a produzir melhores resultado em relação aos que não usam. Todavia,

esta vantagem é menor nos casos onde os índices de rajadas é muito maior do que o tamanho do *buffer*, com nas fontes de vídeos. Apresentamos assim, um novo método de controle de admissão que se mostrou ser eficiente para vários tipos de tráfego reais de redes, sendo os mesmos multifractais ou não.

Capítulo 5

Conclusões

As características existentes nos tráfegos de redes podem ser descritas de forma mais adequada por modelos multifractais segundo (Riedi, R. H. & Lévy Véhel, J, 1997), (Ribeiro, V. J.; Riedi, R. H.; Crouse, M. S. & Baraniuk, R. G., 2000). E algumas dessas propriedades dos processos multifractais tem impacto direto no desempenho das redes (Grossglauser, M. & Bolot, J. C, 1999) (Erramilli, A.; Narayan, O.; & Willinger, W., 1996). Dessa forma modelos mais precisos e eficientes podem ser obtidos para caracterizar os tráfegos de redes.

Nesta dissertação utilizamos principalmente dessas propriedades para abordar soluções para a estimação de perda e que também podem ser utilizadas na provisão de QoS nas redes de multiserviços atuais. Investigou - se soluções para o cálculo de probabilidade de perda, e o controle de admissão como garantia de QoS.

A taxa de perda de pacotes ou bytes é um dos principais parâmetros para se avaliar a qualidade de serviço oferecido a um fluxo de tráfego. Neste estudo, o comportamento de fila, principalmente o descrito pela probabilidade de perda, foi caracterizado analiticamente através dos momentos de primeira e segunda ordem estatísticos.

Assumiu-se em um primeiro instante uma distribuição normal para a equação que relata a relação da variância do processo, porém devido à complexidade e à instabilidade proporcionada pela equação, utilizou-se modelo de regressão não linear para descrever a relação da variância por tempo . Através de simulações com séries de tráfego reais, mostrou-se que o método exponencial pode ser utilizado para modelar a variância descrita anteriormente como tendo distribuição normal. Derivando assim uma equação para caracterizar as perdas existentes nos fluxos tráfegos de redes.

A validação da equação proposta ocorreu através de simulações com séries de tráfego reais, em relação a alguns modelos já existentes na literatura (Duffield, N. G. & O Connel, N., 1993) este modelo considera apenas as características monofractal do tráfego e (Ribeiro, V. J.; Riedi, R. H.; Crouse, M. S. & Baraniuk, R. G., 2000) este modelo considera as as características multifractais,

e os resultados experimentais mostraram a eficiência do modelo proposto, conseguindo através das características multifractais existentes no tráfego modelar de forma mais realista e robusta do que os modelos monofractal e multifractal, o que a torna uma alternativa analítica promissora no projeto de redes.

Consequentemente, através da equação proposta foi possível propor um esquema de controle de admissão, o qual pode ser aplicado a vários contextos de redes para garantir que os fluxos atendam simultaneamente a requisitos de perda.

Pretendeu-se nesta proposta de controle de admissão baseado em probabilidade de perda, avaliar o controle de admissão proposto considerando diferentes tipos de tráfegos. E novamente através dos experimentos realizados, a comprovação do modelo proposto, em relação a alguns modelos conhecidos na literatura.

Uma das possíveis extensões deste trabalho é a validação da proposta de estimação de perdas e o controle de admissão em forma adaptativa e em tempo real Pretende-se também analisar melhor o impacto das variações dos parâmetros multifractais existentes nos tráfegos no desempenho de rede. Ainda como trabalho futuro, vislumbra-se aplicar as ferramentas aqui desenvolvidas em diversas tecnologias de redes.

Referências Bibliográficas

- Addie, R. G. & Zukerman, M. An approximation for performance evaluation of stationary single server queues. *IEEE Trans. Commun.* 42:3150–3160, 1994.
- Baek-Young Choi; Zhenhai Duan; Zhi-Li Zhang & David H.C. Du. Measurement-based Admission Control Using Wavelets for Broadband Networks.
- Baiocchi, A.; Melazzi, N.; Listani, M.; Roveri, A. & Winkler, R. Loss performance analysis of an ATM multiplexer loaded with high-speed on-off sources. *IEEE J. Select. Areas Commun.* pages 388–393, 1991.
- Balakrishnan R. Wavelet-based network traffic modeling. *MSc Thesis. University of Saskatchewan*, march 2000.
- Benes V. *General Stochastic Processes in theory of Queues*, Reading, MA: Addison Wesley. 1963.
- Beran, J.; Sherman, R.; Taqqu, M. & Willinger, W. Long range dependence in VBR video traffic. *IEEE Transactions on Communications*, 43:1566–1579, 1995.
- Bianchi G. R. & Lee L.L. Um Modelo Multifractal Aplicado a Predição de Tráfego de Redes , Proposta e Avaliação. junho 2005.
- Blake, S. An Architecture for Differentiated Services. *RFC2475*, 1998.
- Braden, R.; Clark, D. & Shenker, S. . Integrated Services in the Internet Architecture. *an Overview an. IETF RFC 1633*, 1994.
- Calvet, L.; Fisher, A. & Mandelbrot, B. B. Large deviation theory and the distribution of price changes. Cowles Foundation Discussion Paper No 1165, Yale University,. 1997.
- Chang, C. . Stability, queue length and delay of deterministic and stochastic queueing networks. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 39:913–931, 1994.

- Chang, C. Stability, queue length and delay of deterministic and stochastic queueing networks. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 39:913–931, 1994.
- Crovella, M. E. & Bestavros. A. Self-similarity in world wide web traffic - evidence and possible causes. Proceedings of ACM Sigmetrics. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, pages 160–169, 1996.
- Cruz, R. L. A calculus for network delay part I: Network analysis. *IEEE Trans. Information Theory*, 37:114–131, 1991a.
- Cruz, R. L. A calculus for network delay part II: Network analysis. *IEEE Trans. Information Theory*, 37:132–141, 1991b.
- Dai, L. Effective bandwidths and performance bounds in high-speed communication systems. *In Decision and Control Proceedings of the 36th IEEE Conference*, pages 4580–4585, 1997.
- Devroye, L. The double kernel method in density estimation. *Anais do Instituto Henri Poincaré*. 25: 533–580, 1989.
- Duffield, N. G. & O Connel, N. Large deviations and overflow probabilities for the general single-server queue, with applications. Technical Report 1, Dublin Institute for Advanced Studies- Applied Probability Group. 1993.
- Duffield, N. G.; Lewis, J. T.; O Connell, N.; Russel, R. & Tomey, F. Entropy of ATM traffic streams: a tool for estimating QoS parameters. *IEEE Journal on Selected Areas in Commun.*, (13(6)): 981–990, 1995.
- Eklundh B.; Sallberg K. & Stavenow B. Asynchronous transfer mode-Options and characteristics. *in Proc. ITC 12*, (1.3A.3), 1988.
- Erramilli, A.; Narayan, O.; & Willinger, W. Experimental queueing analysis with long-range dependent packet traffic. *IEEE/ACM Trans. on Net.* (4(2)), 1996.
- Erramilli A. Wang J. L. Monitoring packet traffic level. *IEEE Globecom*, 1994.
- Falconer, K. J. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley and Sons, New York. 1990.
- Feldmann, A.; Gilbert, A. & Willinger. Data networks as cascades: Explaining the multifractal nature of Internet WAN traffic, Proceedings of ACM Sigcomm. pages 42–55, 1998.

- Feldmann, A.; Gilbert, A.; Willinger, W. & Kurtz, T. G. The changing nature of network traffic: Scaling phenomena. *ACM Computer Communication Review*. 28:5–29, 1998.
- Ferrari, D. & Verma, D. A scheme for real-time channel establishment in wide-area networks. *IEEE J. Select. Areas Commun.*, (8):368–379, 1990.
- Fitzek, F. H. P. & Reisslein, M. MPEG-4 and H.263 Video Traces for Network Performance Evaluation (Extended Version). Technical Report TKN-00-06, Telecommunication Networks Group, Technical University of Berlin. 2000.
- Frost V. & Melamed B. Traffic modeling for telecommunication networks. *IEEE Communication Magazine*, 1994.
- Garret M. W. & Willinger, W. Analysis, modeling and generation of self-similar VBR vide traffic. pages 269–280, 1994.
- Gibbens R.J. & Kely F.P. Measurement-based connection admission control. *15th International Teletraffic Congress Proceedings*, june 1997.
- Glynn, P. W. & Whitt, W. Logarithmic asymptotics for steady-state tail probabilities in a single-server queue. *J. Appl. Probab. A* (special issue). 31:131–156, 1994.
- Grossglauser, M. & Bolot, J. C. On the relevance of long-range dependence in network traffic. *IEEE/ACM Transactions on Networking*. (7(5)):629–640, 1999.
- Grossglauser M. & Bolot J.C. On the relevance of long-range dependence in network traffic. *Computer-Communication-Review*, 26(4):15–24, October 1996.
- Guérin R.A.; Ahmadi H. & Naghshineh M. Equivalent Capacity and Its Application to Bandwidth Allocation in High-Speed Networks. *Areas in Communications*, 9:968–981, September 1991.
- Gyorgy, A. & Borsos, T. Estimates on the packet loss ratio via queue tail probabilities. *In GLOBE-COM 01*, 4:2407–2411, 2001.
- Jacobsen S.B.; Moth K. & Dittmann L. Load control in ATM networks. *in Proc. 8 th Int. Switch. Symp*, (A8-5), May 1990.
- Jens Milbrand; Michael Menth & Jan Junker. Experience-Based Admission Control in the Presence of Traffic Changes. *Journal of Communication*, 2(1):10–21, January 2007.
- Karasaridis, A. & Hatzinakos, D. A network heavy traffic modeling using alpha stable selfsimilar processes. *IEEE Transactions on Communications*. (7):1203–1214, 2001.

- Karol M. J. & Hluchyj M. Using a packet switch for circuit switched traffic. *in Proc. ICC 87*, (48.3), June 1987.
- Kelly, F. Notes on effective bandwidths. In *Stochastic Networks*:. Oxford University Press. 1996.
- Kelly, F. P. Effective bandwidth at multi-class queues. *Queue Syst.* (9):5–16, 1991.
- Kesidis, G.; Walrand, J. & Chang, C. S. Effective bandwidths for multiclass markov fluids and other ATM sources. *IEEE/ACM Trans. on Networking*, (1(3)):424–428, 1993.
- Kim, H. S. & Shroff, N. B. Loss probability calculations and asymptotic analysis for finite buffer multiplexers. *IEEE/ACM Trans. on Networking*, 9(6). 2001.
- Knightly, E. & Shroff, N. Admission control for statistical QoS: Theory and practice. *IEEE Network*, (13(2)):20–29, 1999.
- Kosten L. Liquid models for a type of information storage problems. *Delft Prog Rep : Math. Eng Math and inform Eng*, 11:71–86, 1986.
- Krishna, M.; Gadre, V. & Desai, U. Multiplicative multifractal process based modeling of broadband traffic processes: variable bit rate video traffic. *Proceedings of International Zurich Seminar on Broadband Communications - IZS 2002*, ETH Zurich. 45:992–1018, 2002.
- Krishna, P. M.; Gadre, V. M. & Desai, U. B. *Multifractal based network traffic modeling*, Kluwer Academic Publishers. 2003.
- Krunz, M. & Ramasamy, A. M. The correlation structure for a class of scene-based video models and its impact on the dimensioning of video buffers. *IEEE Trans. Multimedia.* 2:27–36, 2000.
- Lee T.; Lai K. & Duann S. Design of a real-time call admission controller for Atm networks. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 4:758–765, October 1996.
- Leland, W. E.; Taqqu, M. S.; Willinger, W. & Wilson, D. V. On the self-similar nature of ethernet traffic (extended version). *IEEE/ACM Transactions on Networking*, (2):1–15, 1994.
- Likhanov, L. & Mazumdar, R. R. Cell loss asymptotics for buffers fed with a large number of independent stationary processes. In *Proc. of IEEE INFOCOM 98*, San Francisco USA. 1998.
- Lindley, D. V. The theory of queues with a single server. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 48():277–289, 1952.

- Loynes R. The Stability of a Queue with Non-Independent Inter-arrival and Service Times. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 58():497–520, 1962.
- Mallat, S. A wavelet tour of signal processing, second Edition. San Diego, Academic Press. 1999.
- Mandelbrot. The fractal geometry of nature. Nova York: W.H. Freeman e Co. 1977.
- Mitra D. Stochastic theory of a fluid model of producers and consumers coupled by a buffer. *Advance, Appl. Prob.*, 20:646–676, September 1988.
- Neidhardt A. L. & Wang J. L. The concept of relevant time scales and its application to queuing analysis of self-similar traffic. *in Proc. SIGMETRICS 98/PERFORMANCE*, 26(4):222–232, 1998.
- Nelson X. Liu & John S. Baras. Statistical Modeling and Performance Analysis of Multi-Scale Traffic. *Proceedings of Twenty-Second Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies*, pages 1837–1847, March 30 - April 3 2003.
- Norros, I. A storage model with self-similar input, queueing Systems. 16:387–396, 1994.
- Park, K. & Willinger, W. Self-similar network traffic and performance evaluation. New York: Wiley. 2000.
- Paxson V. & Floyd S. Wide Area Traffic: The Failure of Poisson Modeling. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 3(3):226–244, 1995.
- Peltier, R. & Véhel, J. L. Multifractional Brownian motion: definition and preliminary results. Technical Report 2695, INRIA. 1995.
- Perros H. A Literature Review of Call Admission Algorithms. *tech, rep, Dep. Elet. Comput. Eng. of North Carolina State Univ. Raleigh*, april 1994.
- Ribeiro, V. J.; Riedi, R. H.; Crouse, M. S. & Baraniuk, R. G. Multiscale Queueing Analysis of Long-Range Dependent Traffic. In IEEE INFOCOM, Tel Aviv, Israel. pages 1026–1035, 2000.
- Riedi, R. H. & Lévy Véhel, J. Multifractional Properties of TCP traffic: a numerical study. *INRIA Research Report*, (3129), 1997.
- Riedi, R. H.; Crouse, M. S.; Ribeiro, V. J. & Baraniuk, R. G. A Multifractional Wavelet Model with Application to Network Traffic. *IEEE Transactions on Information Theory*, 45:992–1018, 1999.
- Ryu B. K. & Elwalid A. The Importance of Long-range Dependence of VBR Video Traffic in ATM Traffic Engineering: Myths and Realities. *Proc. ACM SIGCOMM Conf*, 26(4):3–14, 1996.

- Sato S. & Tanabe S. Load control in ATM networks. *IEICE tech, rep*, (IN88-142), Feb 1989.
- Shroff, N. & Schwartz, M. Improved loss calculations at an ATM multiplexer. Technical report, Sch. Elec. Comput. Eng., Purdue Univ., West Lafayette,. 1998.
- Stallings, W. Data and Computer Communications, Prentice-Hall. 1996.
- Stern T.E. Analysis of separable Mmarkov-modulated queueing processes. *Tech, Rep CU/CTR/TR*, pages 113–884, 1988.
- Sugih Jamin; Peter B. Danzing; Scott J. Shenker & Lixia Zhang. A Measurement-based Admission Control Algorithm for Integrated Services Packet Networks.
- Sugih Jamin; Scott J. Shenker; & Peter B. Danzig. Comparison of Measurement-based Admission Control Algorithm for Cronrolled-Load Service.
- Suzuki H.; Marase T.; Sato S. & Takeuchi T. A simple and burst-variation independent measure of service quality for ATM traffic control. *in Proc. 7th ITC Sem.*, (17.2).
- Tanembaum, A. S. Computer Networks. 1996.
- Taqqu M. S.; Teverovsky V. & Willinger W. Is network traffic self-similar or multifractal? *Fractals*, 5:63–74, march 1997.
- Vieira, F.H.T & Lee L.L. Adaptive Wavelet Based Multifractal Model Applied to the Effective Bandwidth Estimation of Network Traffic Flows. *IET Communications*, 2009a.
- Vieira, F.H.T & Lee L.L. An Admission Control Approach for Multifractal Network Traffic Flows Using Effective Envelopes. *International Journal of Electronics and Communications*, 2009b.
- Vieira, F.H.T & Lee L.L. Contribuições ao Cálculo de Banda e de Probabilidade de Perda para Tráfego Multifractal de Redes. 2009c.
- Willinger, W.; Taqqu,M.S.; & Erramilli, A. . A bibliographical guide to self-similar traffic and performance modeling for modern high-speed stochastic networks: Theory and Applications. *Royal Statistical Society Lecture Notes Series Oxford University Press*, 4, 1996.

Apêndice A

Mínimos Quadrados

A.1 Mínimos quadrados lineares

Um programa de mínimos quadrados sempre começa com a minimização da soma:

$$S \equiv \sum_{i=1}^N (y_i^o - y_i)^2. \quad (\text{A.1})$$

onde chamamos de

y_i^o = valores observados de y

y_i = valores calculados de y

ou seja, mínimos quadrados implica em minimizar os *quadrados* dos resíduos.

Por que este critério é considerado um bom critério e não simplesmente minimizar os resíduos ou o cubo dos resíduos? A resposta formal é que os mínimos quadrados são corretos se os resíduos tiverem uma distribuição gaussiana (normal).

É simples notar que se minimizarmos os resíduos diretamente, um grande resíduo negativo pode ser anulado por um grande resíduo positivo, enquanto que com o quadrado minimizamos os módulos das diferenças.

Suponhamos que temos um conjunto de dados y com uma distribuição normal:

$$P(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (y - \bar{y})^2 \right]. \quad (\text{A.2})$$

onde

$P(y)$ = probabilidade de obter o valor y

y = quantidade a ser observada

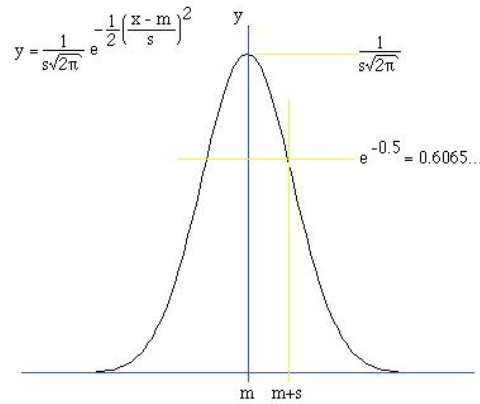


Fig. A.1: Distribuição gaussiana (normal) para uma variável x , com média m e desvio padrão s .

\bar{y} = valor médio de y

σ = desvio padrão de y

Suponhamos que medimos o valor de y várias vezes, obtendo uma série de valores $\{y_i\}$. A probabilidade de observar este conjunto é dada por:

$$P(y_1, y_2, y_3, \dots, y_N) = \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (y_1 - \bar{y})^2 \right] \right\} \dots \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (y_N - \bar{y})^2 \right] \right\}, \quad (\text{A.3})$$

ou

$$P(y_1, y_2, y_3, \dots, y_N) = \left\{ \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^N \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 \right] \right\}. \quad (\text{A.4})$$

Queremos agora saber qual é o melhor valor de \bar{y} , o valor médio. O melhor valor será aquele que *maximiza a probabilidade de obter os valores observados y_i* , ou seja, o melhor valor de \bar{y} é obtido colocando a derivada da probabilidade como nula:

$$\frac{d}{d\bar{y}} [P(y_1, y_2, y_3, \dots, y_N)] = 0, \quad (\text{A.5})$$

ou seja,

$$\frac{d}{d\bar{y}} \left\{ \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^N \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 \right] \right\} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Como o termo $\exp[\dots]$ não pode ser nulo, obtemos :

$$\frac{d}{d\bar{y}} \left[\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 \right] = 0, \quad (\text{A.7})$$

Continuando com a derivação, obtemos:

$$0 = \sum_{i=1}^N -2(y_i - \bar{y}), \quad (\text{A.8})$$

$$0 = \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N \bar{y}, \quad (\text{A.9})$$

$$N\bar{y} = \sum_{i=1}^N y_i, \quad (\text{A.10})$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i. \quad (\text{A.11})$$

que é a média simples.

O próximo passo é simplesmente reconhecer que y pode ser uma função, por exemplo:

$$y_i = a + bx_i, \quad (\text{A.12})$$

de modo que

$$S = \sum_{i=1}^N (y_i^o - a - bx_i^o)^2 = 0, \quad (\text{A.13})$$

Minimizando S em relação a a e a b , obtemos:

$$\frac{dS}{da} = \sum_{i=1}^N -2(y_i^o - a - bx_i^o) = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{dS}{db} = \sum_{i=1}^N -2x_i^o(y_i^o - a - bx_i^o) = 0, \quad (\text{A.15})$$

ou as duas condições:

$$\sum_{i=1}^N y_i^o - Na - b \sum_{i=1}^N x_i^o = 0, \quad (\text{A.16})$$

$$\sum_{i=1}^N x_i^o y_i^o - a \sum_{i=1}^N x_i^o - b \sum_{i=1}^N (x_i^o)^2 = 0. \quad (\text{A.17})$$

Em notação matricial podemos escrever as duas condições como:

$$\begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^N x_i^o \\ \sum_{i=1}^N x_i^o & \sum_{i=1}^N (x_i^o)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N y_i^o \\ \sum_{i=1}^N x_i^o y_i^o \end{bmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

Para simplificar a notação, vamos definir:

$$\sum_{i=1}^N x_i \equiv [x], \quad (\text{A.19})$$

e

$$\sum_{i=1}^N 1 = N \equiv [1], \quad (\text{A.20})$$

desta forma a Equação A.18 pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ xy \end{bmatrix}, \quad (\text{A.21})$$

Estas equações são chamadas de equações normais. Elas podem ser resolvidas com a matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ xy \end{bmatrix}. \quad (\text{A.22})$$

A.2 Mínimos quadrados não lineares

Muitos problemas interessantes não podem ser resolvidos linearmente. Por exemplo, qual é o melhor valor de α em:

$$y = \exp(-\alpha x), \quad (\text{A.23})$$

Pela Equação A.1 temos:

$$S = \sum_{i=1}^N [y_i^o - \exp(-\alpha x_i)]^2, \quad (\text{A.24})$$

e quando minimizamos S:

$$0 = \frac{dS}{d\alpha} = \sum_{i=1}^N 2[y_i^o - \exp(-\alpha x_i)][-\exp(-\alpha x_i)](-x_i), \quad (\text{A.25})$$

ou seja

$$0 = \sum_{i=1}^N y_i^o x_i \exp(-\alpha x_i) - \sum_{i=1}^N x_i \exp(-2\alpha x_i), \quad (\text{A.26})$$

Que podemos escrever, na notação de colchetes, como:

$$0 = [xy \exp(-\alpha x)] - [x \exp(-2\alpha x)]. \quad (\text{A.27})$$

A Equação A.27 não pode ser resolvida usando-se álgebra linear. Precisamos utilizar técnicas diferentes. A técnica mais empregada e, de fato, a técnica que se utiliza quando chamamos de mínimos quadrados não lineares, é a linearização do problema.

A idéia, aplicada ao problema acima, é:

$$y = \exp(-\alpha x), \quad (\text{A.28})$$

Escolhemos um valor inicial de α , chamado α_0 , e definimos:

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha, \quad (\text{A.29})$$

Definimos

$$y_0 = \exp(-\alpha_0 x), \quad (\text{A.30})$$

Em primeira ordem, isto é, linear:

$$y = y_0 + \left. \frac{dy}{d\alpha} \right|_{\alpha_0} \Delta\alpha, \quad (\text{A.31})$$

$$y = \exp(-\alpha_0 x) - x \exp(-\alpha_0 x) \Delta\alpha, \quad (\text{A.32})$$

Agora y é linear em $\Delta\alpha$ e podemos usar os mínimos quadrados lineares para encontrar a correção $\Delta\alpha$:

Utilizando a Equação A.1 temos:

$$S \equiv \sum_{i=1}^N \left(y_i^o - y_{0,i} - \left. \frac{dy}{d\alpha} \right|_{\alpha_0} \Delta\alpha \right)^2, \quad (\text{A.33})$$

minimizando

$$0 = \frac{dS}{d(\Delta\alpha)} = \sum_{i=1}^N -2 \left. \frac{dy}{d\alpha} \right|_{\alpha_0} \left(y_i^o - y_{0,i} - \left. \frac{dy}{d\alpha} \right|_{\alpha_0} \Delta\alpha \right), \quad (\text{A.34})$$

$$0 = \sum_{i=1}^N \left[y_i^o \left. \frac{dy}{d\alpha} \right|_{\alpha_0} - y_{0,i} \left. \frac{dy}{d\alpha} \right|_{\alpha_0} - \left(\left. \frac{dy}{d\alpha} \right|_{\alpha_0} \right)^2 \Delta\alpha \right], \quad (\text{A.35})$$

ou, na notação dos colchetes:

$$0 = \left[y^o \frac{dy}{d\alpha} \right] - \left[y_0 \frac{dy}{d\alpha} \right] - \left[\left(\frac{dy}{d\alpha} \right)^2 \Delta\alpha \right], \quad (\text{A.36})$$

Resolvendo para $\Delta\alpha$:

$$\Delta\alpha = \frac{\left[y^o \frac{dy}{d\alpha} \right] - \left[y_0 \frac{dy}{d\alpha} \right]}{\left[\left(\frac{dy}{d\alpha} \right)^2 \right]}, \quad (\text{A.37})$$

e finalmente obter o valor revisado de α :

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha. \quad (\text{A.38})$$

Note entretanto que o valor revisado de α não é o melhor valor de α , mas somente uma melhor aproximação do que α_0 . Isto acontece porque $\Delta\alpha$ é a solução do problema linearizado e não do problema real. Portanto, precisamos iterar, isto é, utilizar este valor revisado de α como um novo α_0 e obter um novo valor revisado.

A.3 Formulação Geral

Se a função y for uma função de k parâmetros que queremos ajustar:

$$y_i = y(x_i, a_1, a_2, \dots, a_k), \quad (\text{A.39})$$

colocamos

$$a_1 = \alpha_{1,0} + \Delta a_1; a_2 = \alpha_{2,0} + \Delta a_2; \dots; a_k = \alpha_{k,0} + \Delta a_k, \quad (\text{A.40})$$

com a hipótese de que $\Delta a_i \ll a_{i,0}$. Então podemos linearizar

$$y_i = y(x_i, a_{1,0}, a_{2,0}, \dots, a_{k,0}) + \frac{dy}{da_1} \Big|_{a_n=a_{n,0}} \Delta a_1 + \frac{dy}{da_2} \Big|_{a_n=a_{n,0}} \Delta a_2 + \dots + \frac{dy}{da_k} \Big|_{a_n=a_{n,0}} \Delta a_k, \quad (\text{A.41})$$

notando que as derivadas são calculadas para todos $a_n = a_{n,0}$. Chamando

$$y_{i,0} = y(x_i, a_{1,0}, a_{2,0}, \dots, a_{k,0}), \quad (\text{A.42})$$

e

$$\frac{dy_i}{da_j} \Big|_{a_0} \Delta a_j = \frac{dy_i}{da_j} \Big|_{a_n=a_{n,0}} \Delta a_j, \quad (\text{A.43})$$

podemos escrever

$$y_i = y_{i,0} + \sum_{j=1}^k \frac{dy_i}{da_j} \Big|_{a_0} \Delta a_j, \quad (\text{A.44})$$

onde o subscrito i significa calculado no ponto x_i .

Podemos agora calcular S . Utilizando a Equação A.1 temos:

$$S \equiv \sum_{i=1}^N \left(y_i^o - y_{i,0} - \sum_{j=1}^k \frac{dy_i}{da_j} \Big|_{a_0} \Delta a_j \right)^2, \quad (\text{A.45})$$

que minimizando com respeito a Δa_m :

$$0 = \frac{dS}{d(\Delta a_m)} = \sum_{i=1}^N 2 \left(y_i^o - y_{i,0} - \sum_{j=1}^k \frac{dy_i}{da_j} \Big|_{a_0} \Delta a_j \right) \left(- \frac{dy_i}{da_m} \Big|_{a_0} \right), \quad (\text{A.46})$$

$$0 = \sum_{i=1}^N (y_i^o - y_{i,0}) \left(\frac{dy_i}{da_m} \Big|_{a_0} \right) - \sum_{j=1}^k \frac{dy_i}{da_j} \Big|_{a_0} \Delta a_j \left(\sum_{i=1}^N \frac{dy_i}{da_m} \Big|_{a_0} \right), \quad (\text{A.47})$$

que na notação dos colchetes pode ser escrita como:

$$0 = \left[(y^o - y_0) \frac{dy}{da_m} \right] - \sum_{j=1}^k \left[\frac{dy}{da_m} \frac{dy}{da_j} \right] \Delta a_j, \quad (\text{A.48})$$

ou, em notação matricial

$$\begin{pmatrix} \left[\frac{dy}{da_1} \frac{dy}{da_1} \right] & \left[\frac{dy}{da_1} \frac{dy}{da_2} \right] & \cdots & \left[\frac{dy}{da_1} \frac{dy}{da_k} \right] \\ \left[\frac{dy}{da_2} \frac{dy}{da_1} \right] & \left[\frac{dy}{da_2} \frac{dy}{da_2} \right] & \cdots & \left[\frac{dy}{da_2} \frac{dy}{da_k} \right] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left[\frac{dy}{da_k} \frac{dy}{da_1} \right] & \left[\frac{dy}{da_k} \frac{dy}{da_2} \right] & \cdots & \left[\frac{dy}{da_k} \frac{dy}{da_k} \right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \\ \vdots \\ \Delta a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[(y^o - y_0) \frac{dy}{da_1} \right] \\ \left[(y^o - y_0) \frac{dy}{da_2} \right] \\ \vdots \\ \left[(y^o - y_0) \frac{dy}{da_k} \right] \end{pmatrix} \quad (\text{A.49})$$

. Esta equação matricial pode agora ser resolvida por álgebra matricial para encontrar as correções Δa_m .

Apêndice B

Método de Simpson

Seja uma função f definida em um intervalo $[a, b]$. Para a obtenção da fórmula de Simpson é necessário utilizar o polinômio interpolador de 2 grau, p_2 , que passa pelos pontos igualmente espaçados $(a, f(a))$, $(m, f(m))$ e $(b, f(b))$, onde m é o ponto médio do intervalo $[a, b]$, considerando também que $h = \frac{b-a}{2}$ seja o comprimento de cada subintervalo. Com isso temos:

$$f(x) = p_2(x) + R_2(x) \quad \forall x \in [a, b], \quad (\text{B.1})$$

onde

$$p_2 = f(a) + (x - a) \frac{\Delta f(a)}{h} + (x - a)(x - m) \frac{\Delta^2 f(a)}{2h^2}, \quad (\text{B.2})$$

e

$$R(x) = (x - a)(x - m)(x - b) \frac{f'''(\xi)}{3!} \quad \text{com } \xi \in [a, b] \quad (\text{B.3})$$

Portanto, de B.1 temos:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b p_2(x) dx + \int_a^b R_2(x) dx, \quad (\text{B.4})$$

Aproximaremos

$$\int_a^b f(x) dx \text{ por } \int_a^b p_2(x) dx, \quad (\text{B.5})$$

A fórmula de Simpson nos fornece o valor da integral de $p_2(x)$ no intervalo $[a, b]$ em função dos valores de f nos pontos a, b e no ponto médio m de $[a, b]$. Vamos então determinar esta fórmula.

$$\int_a^b p_2(x)dx = \int_a^b \left[f(a) + (x-a)\frac{\Delta f(a)}{h} + (x-a)(x-m)\frac{\Delta^2 f(a)}{2h^2} \right] dx. \quad (\text{B.6})$$

Para facilitar o cálculo, fazemos a mudança de variável $x(\alpha) = a + \alpha h$. Assim, enquanto x percorre o intervalo $[a, b]$, α percorre o intervalo $[0, 2]$ e temos também que $dx = h d\alpha$.

Desta maneira:

$$\int_a^b p_2(x)dx = \int_0^2 \left[f(a) + \alpha \Delta f(a) + \alpha(\alpha-1)\frac{\Delta^2 f(a)}{2} \right] h d\alpha, \quad (\text{B.7})$$

$$\int_a^b p_2(x)dx = h \left[f(a)\alpha|_0^2 + \Delta f(a)\frac{\alpha^2}{2}|_0^2 + \frac{\Delta^2 f(a)}{2} \left[\frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^2}{2} \right] |_0^2 \right], \quad (\text{B.8})$$

$$\int_a^b p_2(x)dx = h \left[2f(a) + 2(f(m) - f(a)) + \frac{1}{3}(f(b) - 2f(m) + f(a)) \right], \quad (\text{B.9})$$

Logo

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{3}[f(a) + 4f(m) + f(b)]. \quad (\text{B.10})$$

A Equação B.10 é denominada *Fórmula de Simpson*.

A proposição a seguir fornece o valor do erro cometido ao aplicar a fórmula de Simpson para calcular a integral de f no intervalo $[a, b]$.

Proposição B.1 O erro cometido ao calcular a integral da função f no intervalo $[a, b]$ pela fórmula de Simpson é dado por:

$$E = -\frac{h^5}{90}f^{IV}(\xi) = -\frac{(b-a)^5}{2880}f^{IV}(\xi), \quad \xi \in [a, b]. \quad (\text{B.11})$$

Demonstração Denotamos por $F(x)$ a primitiva de $f(x)$, ou seja:

$$F(x) = \int f(x)dx + c, \quad (\text{B.12})$$

onde c é uma constante.

Desta maneira temos:

$$F'(x) = f(x); F''(x) = f'(x), \text{ etc.} \quad (\text{B.13})$$

Além disso, fazendo $x_0 = m$, m ponto médio de $[a, b]$, temos $a = x_0 - h$ e $b = x_0 + h$. Assim, o erro cometido é dado por:

$$E = E(h) = \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx - \frac{h}{3}[f(x_0 - h) + 4f(x_0) + f(x_0 + h)], \quad (\text{B.14})$$

$$E = E(h) = F(x_0 + h) - F(x_0 - h) - \frac{h}{3}[f(x_0 - h) + 4f(x_0) + f(x_0 + h)], \quad (\text{B.15})$$

Calculando as derivadas sucessivas de $E(h)$ em relação a h , temos:

$$\begin{aligned} E'(h) = f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - \frac{1}{3}[f(x_0 - h) + 4f(x_0) + \\ f(x_0 + h)] + \frac{h}{3}[f'(x_0 - h) - f'(x_0 + h)], \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} E''(h) = f'(x_0 + h) - f'(x_0 - h) - \frac{1}{3}[f'(x_0 + h) - f'(x_0 - h)] + \\ + \frac{1}{3}[f'(x_0 - h) - f'(x_0 + h)] + \frac{h}{3}[-f''(x_0 - h) - \\ - f''(x_0 + h)] = f'(x_0 + h) - f'(x_0 - h) + \frac{2}{3}[f'(x_0 - h) - \\ - f'(x_0 + h)] - \frac{h}{3}[f''(x_0 - h) + f''(x_0 + h)], \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$E'''(h) = f''(x_0 + h) + f''(x_0 - h) - \frac{2}{3}[f''(x_0 - h) + f''(x_0 + h)] -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3}[f''(x_0 - h) + f''(x_0 + h)] - \frac{h}{3}[f'''(x_0 + h) - \\
& -f'''(x_0 - h)] = -\frac{h}{3}[f'''(x_0 + h) - f'''(x_0 - h)]. \tag{B.18}
\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema da Média do Cálculo Diferencial ou Teorema do Valor Médio, temos:

$$E'''(h) = -\frac{h}{3}[f^{IV}(\xi)(x_0 + h - x_0 + h)], \tag{B.19}$$

onde $x_0 - h \leq \xi \leq x_0 + h$, ou seja,

$$E''(h) = -\frac{2h^2}{3}f^{IV}(\xi). \tag{B.20}$$

Agora integrando, por três vezes consecutivas, $E'''(h)$ no intervalo $[0, h]$ e em cada integração aplicar o Teorema do Valor Médio. Como $E(0) = E'(0) = E''(0) = 0$ temos:

$$E''(h) = \int_0^h E'''(t)dt = \int_0^h -\frac{2t^2}{3}f^{IV}(\xi)dt = -f^{IV}(\xi_1) \int_0^h \frac{2t^2}{3}dt = -\frac{2}{9}h^3 f^{IV}(\xi_1), \tag{B.21}$$

$$E'(h) = \int_0^h E''(t)dt = \int_0^h -\frac{2}{9}t^3 f^{IV}(\xi_1)dt = -f^{IV}(\xi_2) \int_0^h \frac{2}{9}t^3 dt = -\frac{h^4}{18}f^{IV}(\xi_2), \tag{B.22}$$

$$E(h) = \int_0^h E'(t)dt = \int_0^h -\frac{t^4}{18}f^{IV}(\xi_2)dt = -f^{IV}(\xi_3) \int_0^h \frac{t^4}{18}dt = -\frac{h^5}{90}f^{IV}(\xi_3), \tag{B.23}$$

Onde $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \in [a, b]$.

Portanto

$$E = -\frac{h^5}{90}f^{IV}(\xi) = -\left[\frac{b-a}{2}\right]^5 \frac{1}{90}f^{IV}(\xi) = -\frac{(b-a)^5}{2880}f^{IV}(\xi). \tag{B.24}$$

$a \leq \xi \leq b$.

Apêndice C

Probabilidade de Perda

Neste Capítulo apresentaremos alguns Teoremas sobre as probabilidade de perda absoluta e oportuna vista no Capítulo 3.

C.1 Probabilidade de Perda Absoluta

A probabilidade de perda absoluta dado pela Equação 3.38 tem sido amplamente usada como uma aproximação dos conjuntos das probabilidades, ou como um limite inferior do mesmo. Analisando mais a fundo nós temos o seguinte Teorema.

Teorema C.1: Se $\lambda < C$, (λ é a média do tráfego e C é a capacidade do servidor), a probabilidade de perda absoluta $P_{abs}(t)$ de um processo multifractal tende a zero ($P_{abs} \rightarrow 0$) quando t tende para o infinito ($t \rightarrow \infty$).

Demonstração

Com as Equações *ii* da Definição 3.5.1 e 3.36 temos a Equação 3.38 dado como:

$$P_{abs}(t) = \int_{Ct+q}^{\infty} f_{X(t)}(x)dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}erf \left[\frac{\ln(Ct + q) - \omega(t)}{\sqrt{2}\theta(t)} \right]. \quad (C.1)$$

onde $\omega(t)$ e $\theta(t)$ são ω e θ do item ii da Definição 3.5.1. Chamaremos z o termo $erf(\cdot)$ de C.1, e usando as Equações 3.22 e 3.23 temos:

$$\begin{aligned} z &= \frac{\ln(Ct + q) - \ln\mu + \frac{1}{2}\ln(\sigma^2/\mu^2 + 1)}{\sqrt{2\ln(\sigma^2/\mu^2 + 1)}} = \\ &= \frac{\ln(qt^{-1} + C/\lambda)}{\sqrt{2\ln[(c^2/\lambda^2)t^{-2(1-\alpha(t))} + 1]}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\ln[(c^2/\lambda^2)t^{-2(1-\alpha(t))} + 1]}, \end{aligned} \quad (C.2)$$

Podemos ver que quando tende ao infinito ($t \rightarrow \infty$), o primeiro termo da Equação C.2 tende para o infinito, e o segundo termo converge para 0 (zero). Desta forma quando z tende ao infinito ($z \rightarrow \infty$), então ($erf(z) \rightarrow 1$). Com isso a probabilidade de perda absoluta $P_{abs}(t) \rightarrow 0$

C.2 Probabilidade de Perda Oportuna

Como para $t \rightarrow \infty$ vemos no teorema anterior que $P_{abs} \rightarrow 0$, então o comportamento da probabilidade de perda para um processo multifractal é governado pela perda oportuna. Para a probabilidade de perda oportuna temos o seguinte teorema:

Teorema C.2: Se $\lambda < C$, a probabilidade de perda para um processo multifractal cresce monotonicamente com t e converge para $\rho \int_0^\infty f_{X(t)}(x)|_{x=Cu+q} dt$ quando t tende ao infinito ($t \rightarrow \infty$.)

Demonstração

Se $\lambda < C$, a probabilidade de perda oportuna é limitada por 1. Porque $f_{X(t)}(x) > 0$ de $\rho \int_0^\infty f_{X(t)}(x)|_{x=Cu+q} dt$ a integral é uma função monotonicamente crescente para t . Assim se apenas $f_{X(t)}(x)$ é uma função de distribuição de probabilidade válida, então $\sup_{t>0} \int_0^t f_{X(t)}(x)|_{x=Cu+q} dt$ existe e $\rho \sup_{t>0} \int_0^t f_{X(t)}(x)|_{x=Cu+q} dt \leq 1$. Portanto, para um processo multifractal $P_{opp}(t)$ cresce monotonicamente e converge para $\rho \sup_{t>0} \int_0^t f_{X(t)}(x)|_{x=Cu+q} dt$.

Apêndice D

Propriedades da Distribuição Lognormal

Primeiramente, uma variável aleatória Z é chamada Normal (ou $N(0, 1)$) se a função densidade $f_Z z$ é dada pela função $\phi(z) := \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$. A função $\Phi(z) := \int_{-\infty}^z \phi(u) du$ denota a função distribuição de uma variável normal, assim uma condição equivalente é que a função de distribuição, (também chamada de cdf) de Z satisfaz $F_Z(z) = P(Z \leq z) = \Phi(z)$. Recordando:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) dz = 1. \quad (\text{D.1})$$

ϕ é a densidade de probabilidade

$$\int_{-\infty}^{\infty} z \phi(z) dz = 0. \quad (\text{D.2})$$

com média igual a 0

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 \phi(z) dz = 1. \quad (\text{D.3})$$

momento de segunda ordem igual a 1.

Em particular, se Z é $N(0, 1)$, então a media de Z , $E(Z) = 0$ e o segundo momento de Z , $E(Z^2) = 1$. Em particular a variância $V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = 1$. Lembre-se que o desvio padrão é a raiz quadrada de variância, assim Z tem desvio padrão igual a 1. Mais genericamente, uma variável aleatória V tem uma distribuição normal com média μ e desvio padrão $\sigma > 0$ desde que $Z := \frac{(V-\mu)}{\sigma}$ seja normal. Nós escrevemos resumidamente $V \sim N(\mu, \sigma^2)$. É fácil verificar que, neste

caso, $E(V) = \mu$ e $Var(V) = \sigma^2$.

Existem três factos essenciais que devemos lembrar quando trabalhamos com variáveis normais.

Teorema D.0.1 Seja V_1, \dots, V_k são independentes, com $V_j \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$. Então $V_1 + \dots + V_k \sim N(\mu_1 + \dots + \mu_k, \sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2)$

Teorema D.0.2 (Teorema do Limite Central:) Se uma variável aleatória V pode expressar uma soma de variáveis independentes, então a distribuição de V é aproximadamente normal.

Assim, seja uma variável aleatória $X = \exp(\sigma Z + \mu)$, onde $Z \sim N(0, 1)$ é lognormal (μ, σ^2) . Note que os parâmetros μ e σ são a média e o desvio padrão respectivamente de $\log X$. Temos então que, $\sigma Z + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$, por definição. O parâmetro μ afeta a escala pelo fator $\exp(\mu)$ e veremos mais adiante que o parâmetro σ afeta a densidade de uma forma essencial.

Proposição D.0.3 Seja X lognormal (μ, σ^2) . Então a função distribuição F_X e a função densidade f_X de X são dadas por:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P(\log X \leq \log x) = \phi(\sigma Z + \mu \leq \log x) = \\ &= P(Z \leq \frac{\log x - \mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{\log x - \mu}{\sigma}), x > 0, \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

e

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{\phi(\frac{\log x - \mu}{\sigma})}{\sigma x}, x > 0, \quad (\text{D.5})$$

Isto nos permite trabalhar com uma fórmula para os momentos de X . Primeiramente, para qualquer inteiro positivo k ,

$$E(X^k) = \int_0^\infty x^k f_X(x) dx = \int_0^\infty \frac{x^k \phi(\frac{\log x - \mu}{\sigma})}{\sigma x} dx, \quad (\text{D.6})$$

por conseguinte, depois de fazer a substituição $x = \exp(\sigma z + \mu)$ de modo que $dx = \sigma(\sigma z + \mu)$. Desta forma temos:

$$E(X^k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{z^2}{2} + k\sigma z + k\mu} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2}(z - k\sigma)^2 + \frac{k^2\sigma^2}{2} + k\mu} dz = e^{\frac{k^2\sigma^2}{2} + k\mu} dz. \quad (\text{D.7})$$

Em particular, para $k = 1$ e $k = 2$ temos:

$$E(X) = e^{\frac{\sigma^2}{2} + \mu}, \quad (\text{D.8})$$

$$E(X^2) = e^{2\sigma^2 + 2\mu}, \quad (\text{D.9})$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = e^{\sigma^2 + 2\mu}(e^{\sigma^2} - 1). \quad (\text{D.10})$$

Com isso faremos também uma descrição rápida das duas Equação 3.22 e 3.23, como foram obtidas através das Equações 3.20 e 3.21.

Das Equações 3.20 e 3.20 temos:

$$\mu = \exp(\omega + \theta^2/2), \quad (\text{D.11})$$

$$\sigma^2 = \exp(2\omega + \theta^2)[\exp(\theta^2) - 1], \quad (\text{D.12})$$

isolando o valor de ω , em D.11 obtemos:

$$\ln(\mu) = \omega + \theta^2/2,$$

$$\omega = \ln(\mu) - \theta^2/2, \quad (\text{D.13})$$

Substituindo D.13 em D.12 teremos:

$$\sigma^2 = \left[\exp 2 \left(\ln \mu - \frac{\theta^2}{2} \right) + 2\theta^2 \right] - 1,$$

$$\sigma^2 = [\exp (2 \ln \mu - \theta^2 + 2\theta^2)] - 1,$$

$$\sigma^2 = [\exp(2 \ln \mu + \theta^2)] - 1,$$

$$\sigma^2 = \mu^2 \exp(\theta^2) - 1,$$

$$\frac{\sigma^2}{\mu^2} = \exp(\theta^2) - 1,$$

$$\exp(\theta^2) = \frac{\sigma^2}{\mu^2} + 1,$$

$$\ln(\exp(\theta^2)) = \ln\left(\frac{\sigma^2}{\mu^2} + 1\right),$$

$$\theta^2 = \ln\left(\frac{\sigma^2}{\mu^2} + 1\right),$$

E com isso obtemos a Equação 3.23

$$\theta = \sqrt{\ln\left(\frac{\sigma^2}{\mu^2} + 1\right)}, \quad (\text{D.14})$$

Substituindo a Equação D.14 em D.11 obtemos a Equação 3.22

$$\omega = \ln \mu - \frac{1}{2} \left(\sqrt{\ln\left(\frac{\sigma^2}{\mu^2} + 1\right)} \right)^2. \quad (\text{D.15})$$

obtemos a Equação 3.22

$$\omega = \ln \mu - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sigma^2}{\mu^2} + 1 \right). \quad (\text{D.16})$$