



Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Luciana Casacio

**Métodos de Pontos Interiores Aplicados ao Pré-Despacho com
Restrições de Segurança**

Dissertação de mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Energia Elétrica.

Orientadores: Christiano Lyra Filho

Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira

Campinas, SP

Março 2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

C26m	<p>Casacio, Luciana Métodos de pontos interiores aplicados ao pré- despacho com restrições de segurança / Luciana Casacio. – Campinas, SP:[s.n.], 2010.</p> <p>Orientadores: Christiano Lyra Filho, Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.</p> <p>1. Métodos de pontos interiores. 2. Sistemas de potência. 3. Programação linear. I. Lyra Filho, Christiano. II. Oliveira, Aurelio Ribeiro Leite de. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título</p>
------	---

Título em Inglês:	Interior point methods applied to the pre-dispatch problem considering security constraints
Palavras-chave em Inglês:	Interior points methods, Power Systems, Linear programming
Área de concentração:	Energia Elétrica
Titulação:	Mestre em Engenharia Elétrica
Banca Examinadora:	Adilson Elias Xavier, Paulo Augusto Valente Ferreira
Data da defesa:	31/03/2010
Programa de Pós Graduação:	Engenharia Elétrica

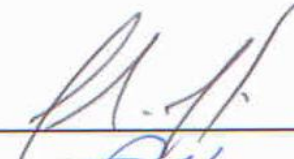
COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

Candidata: Luciana Casacio

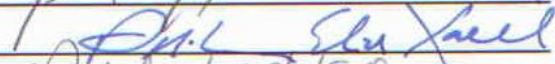
Data da Defesa: 31 de março de 2010

Título da Tese: "Métodos de Pontos Interiores Aplicados ao Pré-Despacho com Restrições de Segurança"

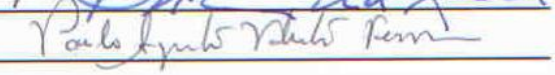
Prof. Dr. Christiano Lyra Filho (Presidente):



Prof. Dr. Adilson Elias Xavier:



Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira:



Com todo carinho à minha família

*...deixar de conseguir não tem importância,
o lamentável é desistir de tentá-lo.*

Carlos Dumond de Andrade (1902-1987)

Agradecimentos

Agradeço de todo o coração...

À Deus por guiar meu caminho e me permitir realizar os meus sonhos. À Maria, nossa mãe, que me ajuda e conforta nos momentos de dificuldade.

Aos meus pais Elza e Heleno, pelo amor incondicional, por confiarem em mim sem nunca questionarem a minha capacidade.

Ao meu irmão e toda a família, pela união e ótimos momentos juntos.

Ao Tadeu por compartilhar os meus sonhos e incentivá-los.

Ao prof. Aurelio, amigo e orientador, pelo projeto, pela excelente orientação, dedicação, paciência e confiança.

Ao prof. Chistiano, pela confiança em mim e no desenvolvimento deste trabalho. Pelo acolhimento, amizade e descontração durante desse período.

Ao pessoal LABORE (incluindo o Cris - Cris, você é nosso!), pela companhia, momentos de descontração e amizade, além das injeções de ânimo e ajuda nos momentos de dificuldade.

Aos amigos do IMECC, onde tudo começou. Em especial Cecília e Fernandinha, que tanto me ajudaram para eu tenha chegado até aqui. Considero-as responsáveis por eu ter conseguido.

Aos professores Adilson Elias Xavier e Paulo Valente Ferreira, professores da banca, e ao professor

Anibal Tavares de Azevedo, pela atenção, disponibilidade e sugestões, que tanto foram importante para a realização deste trabalho.

À todos os professores que contribuíram para minha formação. Em especial ao professor de graduação Geraldo Pompeu, que me instruiu, incentivou e me ajuda a sempre caminhar.

Aos meus amigos, meus presentes de Deus, que tanto são importantes na minha vida. Poder contar com o apoio deles sempre, me faz uma pessoa melhor.

Às amigas do ÓIÉ Cia de Dança, por compartilharem comigo a paixão pela arte e tornarem os nossos momentos juntas, momentos de eterno lazer e diversão.

À FAPESP, pelo apoio financeiro.

À UNICAMP, pela infra-estrutura.

E a todos que de maneira direta e indireta contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho os métodos de pontos interiores primais-duais são utilizados para minimizar as perdas técnicas de energia na geração e transmissão de um sistema de potência hidrotérmico. A estrutura matricial resultante é explorada, objetivando uma implementação eficiente do ponto de vista de tempo de processamento, e robusto, do ponto de vista numérico. Uma vez que a demanda de energia varia ao longo do dia, a geração de energia deve acompanhar a variação da carga. No pré-despacho de sistemas hidrotérmicos, as usinas hidroelétricas devem cumprir uma meta de geração por dia, estabelecida pelo planejamento de longo prazo. O trabalho considera que as usinas e as linhas devem também operar em um estado de “equilíbrio estável”, caracterizado a cada período de tempo por restrições de segurança para atender demandas imprevistas ou contingências. A implementação dos métodos de pontos interiores para reduzir as perdas satisfazendo essas restrições foi desenvolvida e comparada com uma implementação para o problema de pré-despacho que não considera as restrições de segurança. A comparação foi realizada em termos de eficiência computacional e qualidade da solução. Os estudos de casos mostram que a inclusão das restrições de segurança permite obter soluções de pré-despacho estáveis, com baixos tempos computacionais e boa estabilidade numérica, abrindo a perspectiva para a utilização da metodologia no pré-despacho dos sistemas brasileiros.

Palavras-Chave: problema de pré-despacho, métodos de pontos interiores, restrições de segurança, sistemas de potência.

Abstract

In this work, the primal-dual interior point methods are used to minimize the technical power generation and transmission losses of a hydrothermal power system. The resulting matrix structure is exploited, aiming an efficient implementation in terms of processing time, and robust, in the numerical point of view. Since the demand for energy varies throughout the day, power generation must follow the load change. In short term hydrothermal scheduling, the hydro generating units must satisfy daily targets, established by long-term scheduling models. This work considers that the hydro generating units and the branch must also operate in a state of “stable equilibrium”, characterized in each time interval by security constraints to support some unpredictable demands or contingencies. The implementation of interior point methods to reduce losses satisfying these constraints is developed and compared with an implementation of the predispach problem without such security constraints. The comparison is performed in terms of computational efficiency and solution quality. Case studies show that the inclusion of security constraints achieves stable predispach solutions with low computational time and good numerical stability, leading to the prospect of this methodology application in predispach Brazilian systems.

Keywords: predispach problem, interior points methods, security constraints, power systems.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Métodos de Pontos Interiores	1
1.2	Fluxo de Potência Ótimo	3
1.3	Estrutura do trabalho	4
2	Métodos de Pontos Interiores	6
2.1	Otimização Linear	6
2.1.1	Problema Primal	7
2.1.2	Problema Dual	9
2.1.3	Condições de Otimalidade	10
2.1.4	Métodos de Solução	10
2.2	Método de Newton	13
2.3	Métodos de Pontos Interiores Primal-Dual	16
2.3.1	Método Primal Dual Afim-Escala	17
2.3.2	Método Primal-Dual Seguidor de Caminho	20
2.3.3	Método Preditor Corretor	22
2.3.4	Crítério de Parada e Ponto Inicial	25
2.4	Programação Quadrática	26
3	Modelagem do Problema do Fluxo de Potência Ótimo	30
3.1	Modelo Estático	32

3.2	Restrições de Segurança	34
3.3	Modelo Dinâmico	35
4	Aplicação dos Métodos de Pontos Interiores ao Modelo de Pré-Despacho	37
4.1	Formulação do Problema Primal	38
4.2	Formulação do Problema Dual	41
4.3	Condições de Otimalidade	44
4.4	Método de Newton	45
4.5	Redução do Sistema	49
4.6	Estudo da Estrutura Matricial	53
5	Resultados Computacionais	55
5.1	O Sistema IEEE 30	57
5.1.1	Discussão	60
5.2	O Sistema IEEE 118	61
5.3	Sistemas Brasileiros	63
6	Conclusões e Perspectivas Futuras	64
6.1	Perspectivas Futuras	65
	Bibliografia	65
	Trabalhos Publicados pelo autor	71

Lista de Figuras

2.1	Politopo no \mathbb{R}^2	11
2.2	Movimentação do Simplex	12
2.3	Movimentação dos Métodos de Pontos Interiores	12
5.1	Rede do Sistema IEEE30	58
5.2	Restrição de Segurança 1: Queda de linha	58
5.3	Restrição de Segurança 2: Desligamento de gerador	59
5.4	Restrição de Segurança 3: Gargalos no Sistema	59
5.5	Rede do Sistema IEEE118	62

Lista de Tabelas

5.1	Sistemas Estudados	55
5.2	Comparação dos Fluxos de Potência Ativa do Sistema IEEE 30	60
5.3	Comparação dos Resultados do Sistema IEEE 30	61
5.4	Comparação dos Resultados do Sistema IEEE 118	63
5.5	Características e Resultados dos Sistema SSE1654, SSE1732 e Brasil 1993	63

Capítulo 1

Introdução

O principal objetivo deste trabalho consiste em aplicar os métodos de pontos interiores da família primal-dual ao problema de minimização de perdas na transmissão e de custos na geração, caracterizando um problema usualmente denominado de pré-despacho DC de um sistema de potência hidrotérmico. Neste trabalho foram acrescentadas restrições de segurança ao problema de pré-despacho, que preparam o sistema para lidar com situações imprevistas ou contingências.

Neste capítulo será feita uma breve introdução sobre o histórico dos métodos de pontos interiores, o problema do fluxo de potência ótimo e sua generalização para o problema de pré-despacho. Além disso, será apresentada a estrutura deste trabalho.

1.1 Métodos de Pontos Interiores

Os métodos de pontos interiores surgiram nas décadas de 1950 e 1960. Mais precisamente, em 1955, Frisch (Frisch 1955) propôs o primeiro método de pontos interiores no contexto de programação não linear. Este método posteriormente foi estudado por Fiacco & McCormick (Fiacco & McCormick 1968). Em 1967, Dikin (Dikin 1967) publicou o primeiro método de pontos interiores na área de programação linear. Em 1979, Khachian (Khachian 1979) apresentou um método para programação linear com complexidade polinomial no pior caso, o método dos elipsóides. No entanto, somente em 1984 os métodos polinomiais tornaram-se um campo de pesquisa atrativo, com

a publicação do trabalho Karmarkar (Karmarkar 1984). Karmarkar não apresentou resultados computacionais que comprovassem a eficiência do método, mas os bons resultados obtidos em Adler, Resende, Veiga & Karmarkar (Adler, Resende, Veiga & Karmarkar 1989) comprovaram e impulsionaram as pesquisas sobre métodos de pontos interiores. Estes métodos, como o próprio nome sugere, buscam uma solução ótima para o problema de programação linear percorrendo o interior de uma região.

Em 1989, foi apresentado um método primal-dual baseado no método de Karmarkar (Kojima, Mizuno & Yoshise 1989). No ano seguinte, Mehrotra (Mehrotra 1992) inovou com a apresentação do método de pontos interiores predictor-corretor que passou a ser utilizado como base da maioria dos códigos de pontos interiores, onde um polinômio de Taylor de segunda ordem aproxima a trajetória primal-dual, conforme sugerido por Megiddo (Megiddo 1989).

O método de Mehrotra parte de um ponto interior ineficaz, implementado em Lustig, Marsten & Shanno (Lustig, Marsten & Shanno 1991), combinando as ideias já existentes e adicionando heurísticas para escolha do parâmetro de centragem, tamanho do passo e ponto inicial.

Em 1994, Potra (Potra 1994) propôs o algoritmo de pontos interiores predictor-corretor para problemas que iniciam a partir de pontos ineficazes.

O estudo dos métodos de pontos interiores para problemas de programação quadrática iniciou-se em Vanderbei (Vanderbei 1994).

Em 1996, Kojima (Kojima 1996) apresentou lemas para problemas lineares que permitiram grande flexibilidade e aperfeiçoamento em restrições impostas sobre pontos iniciais e tamanho do passo no espaço primal-dual.

No ano 2000, Potra & Wright (Potra & Wright 2000) apresentaram uma revisão de algoritmos e softwares para programação linear assim como para classes mais gerais de problemas.

Desde o surgimento desses métodos, os códigos computacionais baseados nessas ideias vêm se apresentando como alternativas para resolução de problemas de grande porte (Adler et al. 1989, Gondzio 1996, Oliveira & Sorensen 2005, Lustig, Marsten & Shanno 1992).

Na área de sistemas de potência, o advento dos métodos de pontos interiores trouxe à tona uma nova linha de pesquisa. Estes métodos são conhecidos atualmente por sua robustez (J. A. Momoh

& Adapa 1999, Quintana, Torres & Medina-Palomo 2000), principalmente ao tratamento eficiente das desigualdades.

Neste trabalho será desenvolvido o método de pontos interiores primal-dual para o problema de minimização das perdas na geração e na transmissão do pré-despacho de um sistema de potência hidrotérmico considerando as restrições de segurança.

1.2 Fluxo de Potência Ótimo

Fluxo de potência ótimo é um termo genérico dado a uma classe de problemas que busca otimizar uma função objetivo específica satisfazendo as restrições provenientes de particularidades físicas e operacionais da rede elétrica (Oliveira & Soares 2003, Quintana et al. 2000).

O problema do fluxo de potência ótimo teve sua primeira formulação nos anos 60 e desde então vários métodos de otimização foram propostos para resolver este problema. Entre eles o método do gradiente reduzido de Dommel-Tinney (Dommel & Tinney 1968), gradiente reduzido generalizado (Abadie & Carpentier 1969), método de injeção diferencial de Carpentier (Carpentier 1962), método do Lagrangeano projetado (Murtagh & Saunders 1982), métodos de programação quadrática sequencial (Biggs & Laughton 1977, Burchett, Happ & Vierath 1984, Sun, Ashley, Brewer, Hughes & Tinney 1984) e métodos específicos baseados na resolução de uma sequência de problemas de programação linear (Alsac, Bright, Prais & Scott 1990) ou quadrática (Granville, Lima, Lima & Prado 1991).

Em 1983, Monticelli (Monticelli 1983) publicou o modelo linearizado, que simplificou significativamente a formulação matemática do problema, mantendo o grau de precisão satisfatório dos resultados.

Em 1991, Clements, Davis & K.D.Frey (Clements, Davis & K.D.Frey 1991) apresentaram um dos primeiros estudos de pontos interiores aplicados a sistemas de potência. Em 1993, Vargas, Quintana & Vannelli (Vargas, Quintana & Vannelli 1993), e em 1994, Granville (Granville 1994) apresentaram métodos de pontos interiores para resolver o problema de pré-despacho econômico de sistemas de potência.

Em 2001, Chiavegato, Oliveira & Soares (Chiavegato, Oliveira & Soares 2001), abordaram o problema de pré-despacho via relaxação Lagrangeana e métodos de pontos interiores. A relaxação Lagrangeana é aplicada às restrições que estabelecem metas de geração das usinas hidrelétricas, desacoplando o modelo em sub-problemas correspondentes a fluxos de carga ótimo.

O problema de fluxo de carga ótimo DC é estudado em Oliveira & Soares (Oliveira & Soares 2003) e Oliveira, Soares & Nepomuceno (Oliveira, Soares & Nepomuceno 2003) e a estrutura matricial do modelo foi explorada resultando em uma implementação bastante rápida e robusta. Este modelo, por sua vez, foi estendido em Oliveira, Soares & Nepomuceno (Oliveira, Soares & Nepomuceno 2005) para o problema de pré-despacho.

Este trabalho visa acrescentar a este estudo as restrições de segurança, aproximando ainda mais o modelo do problema real.

1.3 Estrutura do trabalho

O Capítulo 2 inicia com a discussão de temas básicos de programação linear como a formulação do modelo matemático. É introduzida a programação quadrática e o método de Newton, que serão utilizados para o desenvolvimento dos métodos de pontos interiores. É apresentada uma introdução aos métodos de pontos interiores, desenvolvendo o método primal-dual afim-escala e seguidor de caminho, incluindo a versão preditor-corretor, que serão utilizados na resolução do problema deste trabalho.

O Capítulo 3 contém uma breve introdução de como é feito o planejamento do sistema elétrico brasileiro, apresentando as restrições de segurança que estão sendo incluídas no modelo. O problema do fluxo de potência ótimo é modelado como problema estático, onde a rede é representada em um único intervalo de tempo, e o problema do pré-despacho, como modelo dinâmico, dividido em intervalos de tempo, interligados por restrições adicionais.

No Capítulo 4 mostramos o desenvolvimento do método de pontos interiores para o problema de pré-despacho com as restrições de segurança. Será abordado o estudo da estrutura matricial resultante, objetivando uma implementação eficiente em termos de esforço computacional.

Os resultados computacionais são discutidos no Capítulo 5, assim como os testes realizados para os sistemas testes do IEEE e sistemas brasileiros. É feita uma comparação dos resultados com o problema que não considera as restrições de segurança.

O Capítulo 6 apresenta as conclusões sobre a eficiência das implementações desenvolvidas e comentários baseados nos resultados obtidos, além das perspectivas futuras com relação a este trabalho.

Capítulo 2

Métodos de Pontos Interiores

Este capítulo trata brevemente de otimização linear e programação não linear quadrática, apresentando uma visão geral sobre o assunto. Discute também a programação quadrática e o método de Newton, que serão utilizados no desenvolvimento dos métodos de pontos interiores.

Os problemas de otimização linear derivam da construção de uma representação matemática para um problema real em que se quer minimizar ou maximizar uma função objetivo linear, ao mesmo tempo que as variáveis estão sujeitas a determinadas restrições também lineares (Wright 1996). Os métodos para abordagem desses problemas procuram a melhor solução para o problema, representado em processamento computacional rápido e robusto.

2.1 Otimização Linear

Para os modelos matemáticos de otimização linear é possível estabelecer uma formulação matemática geral conhecida como forma padrão. Qualquer problema de otimização linear pode ser convenientemente modelado e colocado nesta forma.

2.1.1 Problema Primal

Um problema de otimização linear na forma padrão é dado por

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && c^t x \\ &\text{sujeito a} && Ax = b \\ &&& x \geq 0, \end{aligned}$$

onde A é a matriz de restrições de dimensão $m \times n$ de posto completo e $m < n$, x é um vetor coluna de variáveis primais de dimensão n ; b e c são vetores de constantes de dimensão m e n , respectivamente.

Os problemas de otimização linear em geral não estão na forma padrão, podendo envolver também desigualdades ou variáveis livres, ou seja, na forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && c^t x \\ &\text{sujeito a} && A'x' \leq b' \\ &&& A''x'' \geq b'' \\ &&& x' \geq 0 \\ &&& x'' \text{ livre.} \end{aligned}$$

Nesses casos, faz-se necessária a introdução de variáveis de folga e excesso, e geralmente de variáveis que substituam as variáveis livres.

Se o problema original apresenta uma restrição de desigualdade do tipo

$$a_j^t x \geq b_j,$$

ou do tipo

$$a_j^t x \leq b_j,$$

onde a_j é uma linha da matriz A , a restrição de desigualdade pode ser substituída por uma restrição de igualdade introduzindo-se uma variável adicional x_{n+1} , não-negativa, conhecida como variável de excesso quando a desigualdade é do tipo \geq , e variável de folga quando a desigualdade é do tipo \leq . Assim, o problema fica:

$$a_j^t x - x_{n+1} = b_j, \text{ introduzindo a variável de excesso, e}$$

$$a_j^t x + x_{n+1} = b_j, \text{ introduzindo a variável de folga.}$$

Introduz-se tantas variáveis de excesso e/ou de folga quantas forem as restrições de desigualdade presentes no modelo original. Um novo conjunto de variáveis será formado pelas variáveis originais mais as de excesso e folga.

A forma padrão exige variáveis não-negativas. Quando ocorrer da formulação original do problema apresentar uma ou mais variáveis de decisão irrestritas ou livres, isto é, sem sinal definido, pode-se reescrever cada variável livre x_j como a diferença de duas variáveis não-negativas, x_{j1} e x_{j2} , ou seja

$$x_j = x_{j1} - x_{j2}.$$

A ideia é que qualquer quantidade (positiva, nula ou negativa) possa ser representada como a diferença de duas quantidades não-negativas, que serão incorporadas à lista de variáveis de decisão do problema.

O problema acrescido de variáveis de folga, excesso e com variáveis livres colocado na forma

padrão fica:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & c^t x + 0^t s \\ \text{sujeito a} \quad & A' x' + I s' = b' \\ & A'' x'' - I s'' = b'' \\ & (x', x'') \geq 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Além disso, pode ocorrer que as variáveis apareçam canalizadas, ou seja, do tipo

$$l \leq x \leq u.$$

Nesses casos, pode ser feita a seguinte mudança de variáveis:

$$\tilde{x} = x - l \Rightarrow x = \tilde{x} + l$$

$$\tilde{u} = u - l \Rightarrow u = \tilde{u} + l.$$

Essa mudança tem por objetivo anular o limite inferior de x . Acrescentando uma variável de folga, o problema se torna um problema de otimização linear na forma padrão com limite superior nas variáveis.

2.1.2 Problema Dual

Com o problema primal na forma padrão, pode-se encontrar o dual, que é dado por (Vanderbei 1996):

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & b^t y \\ \text{sujeito a} \quad & A^t y + z = c \\ & z \geq 0 \\ & y \text{ livre,} \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde y é um vetor coluna de variáveis duais e z representa as variáveis de folga duais.

Na forma padrão, $x > 0$ é um ponto interior no problema primal e $z > 0$ é um ponto interior para o problema dual. No problema primal $Ax = b; x > 0$ é um ponto interior factível e no problema dual $A^t y + z = c; z > 0$ é um ponto interior factível.

Um outro conceito que será utilizado para a construção de métodos de pontos interiores é o *gap*. O *gap* é a diferença entre os valores das funções objetivo para o primal e o dual de um mesmo problema, ou seja, $\gamma = c^t x - b^t y$ (Wright 1996). É possível mostrar que para um ponto primal e dual factível, o *gap* é dado por $\gamma = c^t x - b^t y = z^t x$.

2.1.3 Condições de Otimalidade

Por último, vamos determinar as condições de otimalidade. Um dado ponto (x, y, z) é ótimo para os problemas primal e dual se e somente se as seguintes condições são satisfeitas (Bazaraa 1990):

- (i) Primal factível: $Ax = b, x \geq 0$;
- (ii) Dual factível: $A^t y + z = c, z \geq 0$;
- (iii) Complementaridade: $XZe = 0$, ou seja, $x_i z_i = 0, i = 1, \dots, n$, onde e é o vetor coluna de dimensão n com todos os elementos iguais a 1. As notações $X = \text{diag}(x)$ e $Z = \text{diag}(z)$ são utilizadas.

2.1.4 Métodos de Solução

Existem dois principais métodos de solução para problemas de otimização linear. Para apresentá-los vamos definir o que é uma solução básica e apresentar o Teorema Fundamental da Programação Linear.

Uma solução básica em um problema de otimização linear corresponde a um vértice do politopo definido pelas restrições (Luenberger 1984). Os vértices são formados pela interseção de duas ou mais restrições do problema. A figura 2.1 representa um politopo no \mathbb{R}^2 com $Ax \leq 0$ e $x \geq 0$.

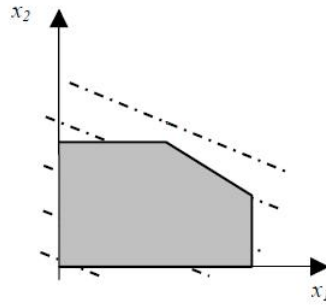


Figura 2.1: Politopo no \mathbb{R}^2

Teorema Fundamental da Programação Linear (Luenberger 1984): Dado um problema linear na forma padrão, onde A é uma matriz $m \times n$ de posto m , as afirmações a seguir são verdadeiras:

- i. Se existe uma solução factível, existe uma solução básica factível.
- ii. Se existe uma solução ótima factível, existe uma solução ótima básica factível.

Em outras palavras, o teorema fundamental da programação linear estabelece que é suficiente procurarmos soluções ótimas no subconjunto de soluções formado por soluções básicas.

O primeiro método desenvolvido para a solução de problemas de otimização linear foi o **método Simplex**, proposto por Dantzig, em 1947 (Luenberger 1984). No método simplex, a solução movimenta-se de um vértice a outro do politopo do problema, melhorando o valor da função objetivo. Caso não haja variáveis não básicas candidatas a entrar na base aptas a melhorar a função objetivo, a solução ótima foi atingida. A Figura 2.2 ilustra a procura de solução ótima através do método simplex.

Teoricamente, o método simplex pode percorrer todas as soluções básicas do problema no processo de busca de soluções ótimas - existem exemplos que ilustram esta possibilidade (Bazaraa 1990). No entanto, na prática, o esforço de cálculo do método simplex é proporcional ao número de restrições do problema. Mas, o fato de que o método simplex pode ter dificuldades de convergência, incentivou o estudo de novos métodos; os de mais sucesso foram os **métodos de pontos interiores**, que ganharam esta denominação com a divulgação do trabalho de Karmarkar (1984).

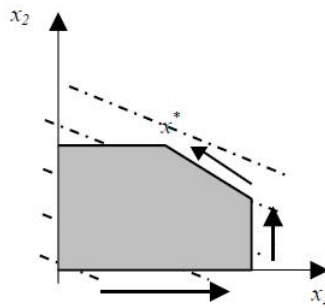


Figura 2.2: Movimentação do Simplex

Um ponto interior do espaço de soluções de um problema de otimização linear é aquele em que todas as variáveis se encontram estritamente dentro de seus limites. Os métodos de pontos interiores se movimentam no interior da região de factibilidade, como ilustra a Figura 2.3. Este comportamento contrasta com o método simplex, que se movimenta entre soluções básicas através da fronteira.

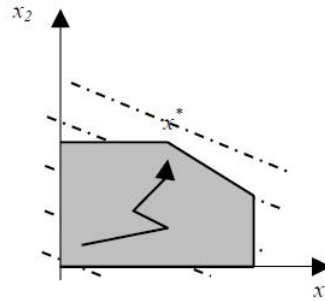


Figura 2.3: Movimentação dos Métodos de Pontos Interiores

Os métodos de pontos interiores apresentam melhor comportamento do que o método simplex na maior parte dos problemas de grande porte. Seus princípios foram também estendidos com bons resultados para problemas não lineares de fluxos de carga ótimo e de pré-despacho, que motivaram o desenvolvimento deste trabalho.

Um dos fundamentos para o desenvolvimento dos métodos de pontos interiores e de suas extensões para problemas de otimização não-linear é o método de Newton, discutido na próxima seção.

2.2 Método de Newton

O método de Newton constitui uma ferramenta fundamental para a teoria de métodos de pontos interiores. Ele será estudado inicialmente com uma aplicação unidimensional e em seguida estendido para o espaço multidimensional. Para mais detalhes sobre o método de Newton e suas características ver Bazaraa (1990) e Luenberger (1984).

O método de Newton é um método iterativo e tem o objetivo de estimar os zeros de uma função diferenciável $g(x)$. O método utiliza aproximações sucessivas da função $g(x)$ por funções quadráticas em torno de pontos x^0, x^1, \dots, x^k , até que $g'(x^k) \approx 0$. As aproximações quadráticas são obtidas pela utilização da série de Taylor até o termo de segunda ordem, em torno dos pontos x^0, x^1, \dots, x^k .

$$g(x) \approx q(x) = g(x^0) + g'(x^0)(x - x^0) + g''(x^0)\frac{(x - x^0)^2}{2}.$$

Fazendo $q'(x) = 0$, tem-se

$$g'(x^0) + g''(x^0)x - g''(x^0)x^0 = 0.$$

Assim, fazendo-se $x^1 = x$, vem:

$$x^1 = x^0 - \frac{g'(x^0)}{g''(x^0)}.$$

O método pode ser interpretado como uma técnica para encontrar raízes de equações da forma $\phi(x) = 0$, onde $\phi(x) = g'(x)$.

Com esta notação, o método de Newton pode ser descrito na forma:

$$x^1 = x^0 - \frac{\phi(x^0)}{\phi'(x^0)}.$$

Esse ponto x^1 é então usado no lugar de x^0 como um novo valor inicial, melhorando a aproximação.

As condições descritas abaixo são suficientes para a convergência do método de Newton, ou seja, a equação $g(x)$ tem solução única no intervalo $[a, b]$ e o método converge para essa solução se:

- $g(a) \cdot g(b) \leq 0$;
- $g'(x) \neq 0$ para qualquer $x \in [a, b]$;
- $g''(x) \geq 0$ ou $g''(x) \leq 0$ para qualquer $x \in [a, b]$;
- $\left| \frac{g(a)}{g'(a)} \right| < |a - b|$ e $\left| \frac{g(b)}{g'(b)} \right| < |a - b|$ ou $g(x_0) \cdot g''(x) \geq 0$ para qualquer $x \in [a, b]$.

Assim é possível construir o método de Newton para uma variável:

Dado x^0

Para $k = 0, 1, \dots$, faça

$$d^k = -\frac{\phi(x^k)}{\phi'(x^k)}$$

$$x^{k+1} = x^k + d^k$$

Até convergir (ou seja, $\phi(x^k) \approx 0$).

Para o caso multidimensional, queremos $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\phi_i(x) = 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$, onde $F(x)$ passa a ser uma função vetorial da forma

$$F(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix}.$$

Encontrar o valor de x que anule ϕ é o mesmo que obter x que anule simultaneamente cada ϕ_i , $i = 1, \dots, n$. Novamente, utiliza-se aproximações sucessivas da função $\phi(x)$ em torno dos pontos x^0, x^1, \dots, x^n , até que o ponto x^k seja tal que $\phi_i(x^k) \approx 0$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Aplicando a fórmula de Taylor para várias variáveis em torno de x^0 :

$$0 = \phi_i(x) = \phi_i(x^0) + [\nabla\phi_i(x^0)]^t(x - x^0) + \dots \quad \text{para } i = 1, \dots, n,$$

onde

$$\nabla\phi_i(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_i(x)}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\phi_i(x)}{\partial x^n} \end{bmatrix}.$$

Aproximando-se $\phi_i(x^1)$ até o termo linear da série, obtém-se:

$$0 \approx \phi_i(x^1) = \phi_i(x^0) + [\nabla\phi_i(x^0)]^t(x^1 - x^0), \quad \text{para } i = 1, \dots, n,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} -\phi_1(x^0) &= [\nabla\phi_1(x^0)]^t(x^1 - x^0) \\ &\vdots \\ -\phi_n(x^0) &= [\nabla\phi_n(x^0)]^t(x^1 - x^0). \end{aligned}$$

$$\text{Sejam } J(x^0) = \begin{bmatrix} [\nabla\phi_1(x^0)]^t \\ \vdots \\ [\nabla\phi_n(x^0)]^t \end{bmatrix}, \text{ a matriz Jacobiana não singular associada a } \phi \text{ e } F(x^0) = \begin{bmatrix} \phi_1(x^0) \\ \vdots \\ \phi_n(x^0) \end{bmatrix}.$$

Então,

$$-F(x^0) = J(x^0)(x^1 - x^0) \Rightarrow x^1 = x^0 - [J(x^0)]^{-1}F(x^0).$$

Calculando $d = -[J(x)]^{-1}F(x)$, o método de Newton atualiza a solução substituindo x por $x + d$. Este processo continua até que a solução atual esteja suficientemente próxima de uma raiz ($F(x) \approx 0$). Assim, tem-se um método iterativo da forma

$$x^{k+1} = x^k - [J(x^k)]^{-1}F(x^k).$$

Método de Newton para várias variáveis:

Dado $x^0 \in \mathbb{R}^n$

Para $k = 0, 1, \dots$, faça

$$d^k = -[J(x^k)]^{-1}F(x^k)$$

$$x^{k+1} = x^k + d^k$$

Até convergir.

O método de Newton pode ser usado para procurar soluções que satisfaçam as condições de otimalidade para problemas de otimização linear descritos na Seção 2.1.3. Esta ideia leva aos métodos de pontos interiores primais duais, descritos nas próximas seções. Essencialmente, caminha-se na direção encontrada, mantendo-se as variáveis em regiões interiores dos espaços de soluções. Dessa forma, os problemas primal e dual são resolvidos simultaneamente.

Conceitos análogos, com utilização do método de Newton sobre as condições de otimalidade podem ser usados para abordar problemas não lineares quadráticos, como o problema de pré-despacho aqui estudado. A Seção 2.4 faz uma apresentação geral dos problemas de programação quadrática.

2.3 Métodos de Pontos Interiores Primal-Dual

Os métodos de pontos interiores apresentam um bom desempenho em problemas de otimização linear de grande porte, assim como também em programação quadrática, por serem robustos e convergirem rapidamente.

A ideia dos métodos de pontos interiores consiste em encontrar uma solução ótima de um pro-

blema de otimização linear, caminhando pelo interior do ortante positivo (Vanderbei 1996, Wright 1996).

Os métodos de pontos interiores podem ser classificados como: primal, dual e primal-dual, dependendo do espaço em que estão sendo realizadas as iterações. O método de pontos interiores baseado na formulação primal-dual pode ser visto como a aplicação do método de Newton (2.2) às condições de otimalidade do problema (Wright 1996).

Veremos uma apresentação resumida dos métodos de pontos interiores primal-dual afim-escala, primal-dual seguidor de caminho e a versão preditor-corretor.

2.3.1 Método Primal Dual Afim-Escala

Seja um problema com as formulações primal e dual como definidas nas equações (2.1) e (2.2), respectivamente. Aplicando o método de Newton às condições de otimalidade, temos que $F(x^0, y^0, z^0)$ é dado por

$$F(x^0, y^0, z^0) = \begin{bmatrix} Ax^0 - b \\ A^t y^0 + z^0 - c \\ X^0 Z^0 e \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_p^0 \\ r_d^0 \\ r_a^0 \end{bmatrix},$$

onde $e^t = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$, $r_p^0 = b - Ax^0$, $r_d^0 = c - A^t y^0 - z^0$ e $r_a = -X^0 Z^0 e$.

Utilizando o método de Newton para várias variáveis, obtemos

$$(x^1, y^1, z^1) = (x^0, y^0, z^0) - [J(x^0, y^0, z^0)]^{-1} F(x^0, y^0, z^0), \quad \text{onde}$$

$$J(x^0, y^0, z^0) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^t & I \\ Z^0 & 0 & X^0 \end{bmatrix}.$$

Assim, a direção d^0 será dado por

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^t & I \\ Z^0 & 0 & X^0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_p^0 \\ r_d^0 \\ r_a^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx^0 \\ dy^0 \\ dz^0 \end{bmatrix}.$$

Reescrevendo o sistema e eliminando os índices por facilidade de notação, temos:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^t & I \\ Z^0 & 0 & X^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_p \\ r_d \\ r_a \end{bmatrix} \Rightarrow Jd = r. \quad (2.3)$$

Resolvendo o sistema (2.3), obtemos as direções dx , dy e dz .

$$Adx = r_p \quad (2.4)$$

$$A^t dy + dz = r_d \quad (2.5)$$

$$Zdx + Xdz = r_a. \quad (2.6)$$

Da equação (2.6), obtemos

$$dz = X^{-1}(r_a - Zdx).$$

Da equação (2.5), substituindo dz temos

$$\begin{aligned} A^t dy + X^{-1}(r_a - Zdx) &= r_d \\ \Rightarrow A^t dy - X^{-1}Zdx &= r_d - X^{-1}r_a. \end{aligned}$$

Definindo $D = X^{-1}Z$, temos que

$$\begin{aligned} A^t dy - Ddx &= r_d - X^{-1}r_a \\ \Rightarrow dx &= D^{-1}(A^t dy - r_d + X^{-1}r_a). \end{aligned}$$

Substituindo a última equação em (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} A[D^{-1}(A^t dy - r_d + X^{-1}r_a)] &= r_p \\ \Rightarrow (AD^{-1}A^t)dy &= r_p + AD^{-1}r_d - AD^{-1}X^{-1}r_a \\ \Rightarrow dy &= (AD^{-1}A^t)^{-1}[r_p + AD^{-1}(r_d - r_a)]. \end{aligned}$$

Temos que $AD^{-1}A^t$ é simétrica e definida positiva. Podemos então escrever $AD^{-1}A^t = LL^t$, ou seja, podemos calcular a decomposição de Cholesky de $AD^{-1}A^t$ (Golub & Van Loan 1989).

É necessário ainda tomar cuidado com o tamanho do passo, denominado α^k que assegura que os pontos nunca deixem de ser interiores. Os tamanhos dos passos primal e dual podem ser calculados da seguinte forma:

$$\alpha_p = \min_{dx_i^k < 0} \left\{ \frac{-(x_i)^k}{(dx_i)^k} \right\} \quad \alpha_d = \min_{dz_i^k < 0} \left\{ \frac{-(z_i)^k}{(dz_i)^k} \right\}.$$

Usa-se α_p como passo para as variáveis primais e α_d para as variáveis duais.

Para garantir que x e z continuem interiores, utilizamos $\tau \in (0, 1)$, por exemplo, $\tau = 0,9995$.

Pode-se resumir o método no pseudo-código apresentado a seguir (Monteiro, Adler & Resende 1990):

Dados (x^0, y^0, z^0) interior e $\tau \in (0, 1)$

Para $k = 0, 1, \dots$, faça

$$\begin{aligned}
r_p^k &= b - Ax^k \\
r_d^k &= c - A^t y^k - z^k \\
r_a^k &= -X^k Z^k e \\
dy^k &= [A(D^k)^{-1} A^t]^{-1} [r_p^k + A(D^k)^{-1} r_d^k - A(D^k)^{-1} (X^k)^{-1} r_a^k] \\
dx^k &= (D^k)^{-1} [A^t dy^k - r_d^k + (X^k)^{-1} r_a^k] \\
dz^k &= (X^k)^{-1} [r_a^k - Z^k dx^k] \\
\rho_p &= \min_{dx_i < 0} \left\{ -\frac{x_i}{dx_i} \right\} \\
\rho_d &= \min_{dz_i < 0} \left\{ -\frac{z_i}{dz_i} \right\} \\
\alpha_p^k &= \min\{1, \tau \rho_p\} \\
\alpha_d^k &= \min\{1, \tau \rho_d\} \\
x^{k+1} &= x^k + \alpha_p^k dx^k \quad (\alpha_p^k \text{ é tal que } x^{k+1} > 0) \\
y^{k+1} &= y^k + \alpha_d^k dy^k \\
z^{k+1} &= z^k + \alpha_a^k dz^k \quad (\alpha_a^k \text{ é tal que } z^{k+1} > 0)
\end{aligned}$$

Até convergir.

Informações sobre o ponto inicial e o critério de convergência serão tratados nas próximas seções.

2.3.2 Método Primal-Dual Seguidor de Caminho

Na maioria das vezes, o método primal-dual afim escala não obtém bons resultados pois os produtos $x_i z_i$ se aproximam de zero com velocidades muito distintas. Consequentemente, as direções calculadas nestas condições são muito distorcidas e o método progride muito lentamente, podendo inclusive não convergir. Para evitar essa dificuldade, é acrescentada uma perturbação μ às condições de complementaridade (Wright 1996).

$$XZe = \mu e$$

onde $e^t = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$ e μ é um parâmetro tal que $\mu = \sigma \sum \frac{x_i z_i}{n} \approx \sigma \frac{\gamma}{n}$, obtendo-se um método eficiente. Na prática, usa-se $\sigma = 1/n$ para problemas de pequeno porte e $\sigma = 1/\sqrt{n}$ para

problemas de grande porte, onde n é a dimensão do vetor x . Temos que γ se reduz a cada iteração, μ se reduz a cada iteração.

Dependendo da escolha de τ e σ , obtém-se resultados teóricos e práticos com respeito à eficiência do método. Uma variação importante ocorre quando $\gamma^k \leq 1$. Neste caso utiliza-se $\mu = \sigma^k \frac{(\gamma^k)^2}{n}$. Existem motivações teóricas que justificam esta escolha (Tapia & Zhang 1992).

O método primal-dual afim escala com perturbação é chamado seguidor de caminho.

Temos agora o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} Adx = r_p \\ A^t dy + dz = r_d \\ Zdx + Xdz = r_a - \mu e = r_c. \end{cases}$$

O procedimento para redução do sistema é similar ao método primal-dual afim-escala. Em particular, o Jacobiano também é o mesmo.

Resumindo, o método primal-dual seguidor de caminho pode ser caracterizado pelo pseudo-código apresentado a seguir:

Dados (x^0, y^0, z^0) interior ou $(x^0, z^0) \geq 0$, τ e $\sigma \in (0, 1)$

Para $k = 0, 1, \dots$, faça

$$\mu^k = \sigma \frac{\gamma^k}{n}$$

$$r_p^k = b - Ax^k$$

$$r_d^k = c - A^t y^k - z^k$$

$$r_c^k = \mu^k e - X^k Z^k e$$

$$dy^k = [A(D^k)^{-1} A^t]^{-1} [r_p^k + A(D^k)^{-1} r_d^k - A(D^k)^{-1} r_c^k]$$

$$dx^k = (D^k)^{-1} [A^t dy^k - r_d^k + (X^k)^{-1} r_c^k]$$

$$dz^k = (X^k)^{-1} [r_c^k - Z^k dx^k]$$

$$\rho_p = \min_{dx_i^k < 0} \left\{ -\frac{x_i^k}{dx_i^k} \right\}$$

$$\rho_d = \min_{dz_i^k < 0} \left\{ -\frac{z_i^k}{dz_i^k} \right\}$$

$$\alpha_p^k = \min\{1, \tau\rho_p^k\}$$

$$\alpha_d^k = \min\{1, \tau\rho_d^k\}$$

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_p^k dx^k$$

$$y^{k+1} = y^k + \alpha_d^k dy^k$$

$$z^{k+1} = z^k + \alpha_d^k dz^k$$

Até convergir.

2.3.3 Método Preditor Corretor

O método preditor-corretor desenvolvido por (Mehrotra 1992) consiste em utilizar uma direção que contempla três componentes:

- Direção afim-escala (direção preditora ou de Newton);
- Direção de centragem, cujo tamanho é determinado pela perturbação μ ;
- Direção de correção, que compensa a aproximação linear do método de Newton.

Ao calcular a direção afim verifica-se o progresso do método ao longo desta direção. Se o progresso for grande, a perturbação μ é pequena. Caso contrário, é conveniente aumentar o peso da direção de centragem, tal que a perturbação μ seja grande.

Uma vez que uma segunda direção é calculada, também calcula-se a correção não linear utilizando o mesmo Jacobiano, para que o esforço computacional por iteração não duplique.

Na direção afim escala

$$(x + dx)^t(z + dz) = x^t z + dx^t z + x^t dz + dx^t dz,$$

mas

$$dz = X^{-1}(r_a - Zdx).$$

Então tem-se que

$$x^t z + dx^t z + x^t X^{-1} r_a - x^t X^{-1} Z dx + dx^t dz = x^t z + dx^t z + e^t r_a - e^t Z dx + dx^t dz.$$

Mas, $r_a = -XZe$, então

$$\begin{aligned} x^t z + e^t r_a + dx^t dz &= x^t z + -e^t XZe + dx^t dz = \\ \Rightarrow x^t z - x^t z + dx^t dz &= dx^t dz. \end{aligned}$$

Assim, $DxDz$ corresponde ao resíduo da próxima iteração se a direção afim-escala for adotada.

Considere

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^t & I \\ Z^k & 0 & X^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1^k \\ dy_1^k \\ dz_1^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_p^k \\ r_d^k \\ r_a^k \end{bmatrix}$$

se $\alpha^k = 1$, na iteração $k + 1$ teríamos então por exemplo $x^{k+2} = x^{k+1} + dx = x^k + dx_1 + dx_2$.

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^t & I \\ Z^{k+1} & 0 & X^{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_2 \\ dy_2 \\ dz_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -Dx_1 Dz_1 e \end{bmatrix}$$

Assim, o segundo sistema será:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^t & I \\ Z^k & 0 & X^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_2 \\ dy_2 \\ dz_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -Dx_1 Dz_1 e + \mu^k e \end{bmatrix}.$$

Somando os dois sistemas

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^t & I \\ Z^{k+1} & 0 & X^{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 + dx_2 \\ dy_1 + dy_2 \\ dz_1 + dz_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_p^k \\ r_d^k \\ r_a^k - Dx_1Dz_1e + \mu^k e \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Como

$$\begin{aligned} r_c^k &= \mu e - XZe - Dx_1Dz_1e, \\ (dx, dy, dz) &= (dx_1 + dx_2, dy_1 + dy_2, dz_1 + dz_2). \end{aligned}$$

E pode-se assim obter a direção final resolvendo diretamente o sistema (2.7).

O esforço por iteração é maior do que os outros métodos de pontos interiores, mas não muito porque ao calcular dy a matriz ADA^t já foi calculada e decomposta. E na prática o número de iterações é aproximadamente a metade com relação ao método primal-dual seguidor de caminho. Da teoria de programação não-linear pode-se chamar o método preditor-corretor de método de Newton perturbado (μ), modificado de ordem 1.

O segundo sistema linear é aproximado substituindo-se Z^{k+1} por Z^k e X^{k+1} por X^k na matriz, obtendo-se assim a mesma matriz do primeiro sistema, ou seja, o esforço computacional para decompor AD^kA^t não existe no segundo sistema pois $D^k = (Z^k)^{-1}X^k$.

Ao se calcular a direção afim-escala μ , verificamos o progresso do método ao longo dessa direção. Se o progresso for grande, a perturbação μ será pequena. Caso contrário, é conveniente aumentar o peso da direção de centragem, tal que a perturbação μ seja grande. Os parâmetros

tomados na forma abaixo tendem a acelerar a convergência do método(Mehrotra 1992):

$$\begin{aligned}\gamma &= (x + \alpha_p dx)^t (z + \alpha_d dz), \\ \tilde{\gamma} &= (x + \tilde{\alpha}_p d\tilde{x})^t (z + \tilde{\alpha}_d d\tilde{z}), \\ \mu &= \sigma \left(\frac{\gamma}{np} \right), \\ \sigma &= \begin{cases} \left(\frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \right)^3, & \text{se } \gamma \geq 1; \\ \left(\frac{\tilde{\gamma}}{\sqrt{np}} \right), & \text{se } \gamma < 1, \end{cases}\end{aligned}$$

onde: γ é o valor do *gap*, μ é a perturbação, σ é o parâmetro de centragem, np é o número de pares complementares e $\frac{\gamma}{np}$ é o *gap* médio.

2.3.4 Critério de Parada e Ponto Inicial

Com o método desenvolvido, falta ainda estabelecer um critério de convergência que será baseado nas condições de otimalidade, e um ponto inicial.

Diz-se que o algoritmo terminou se são satisfeitas as seguintes condições (Wright 1996):

- Primal factível

$$\frac{\|b - Ax\|}{\|b\| + 1} \leq \epsilon;$$

- Dual factível

$$\frac{\|c - A^t y + z\|}{\|c\| + 1} \leq \epsilon;$$

- Complementaridade

$$\frac{|c^t x - b^t y|}{|c^t x| + |b^t y| + 1} \leq \epsilon.$$

Uma característica importante desse método é que não é necessário um ponto inicial factível, apenas que seja interior e que x_i e z_i não sejam “pequenos”. Pode-se considerar os seguintes pontos iniciais (Lustig et al. 1992):

- Ponto inicial primal:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= A^t(AA^t)^{-1}b \Rightarrow A\tilde{x} = b, \\ x_i^0 &= \max\{\tilde{x}_i, \epsilon_1\}, \\ \epsilon_1 &= \max\left\{-\min\{\tilde{x}_i\}, \epsilon_2, \frac{\|b\|_1}{\epsilon_2\|A\|_1}\right\}, \\ \epsilon_2 &> 0.\end{aligned}$$

O valor de ϵ_2 deve ser convenientemente grande para que x inicie longe o suficiente da fronteira da região factível, por exemplo $\epsilon_2 = 100$.

- Ponto inicial dual:

$$\begin{aligned}y^0 &= 0, \\ z_i^0 &= \begin{cases} c_i + \epsilon_3 & \text{se } c_i \geq 0; \\ -c_i & \text{se } c_i \leq 0; \\ \epsilon_3 & \text{se } \epsilon_3 \leq c_i \leq 0, \end{cases} \\ \epsilon_3 &= 1 + \|c\|_1.\end{aligned}$$

Os pontos iniciais tomados dessa forma costumam reduzir o número de iterações necessárias para a convergência do método.

2.4 Programação Quadrática

A programação quadrática é classe de problemas mais simples na área de otimização não linear. Consiste na minimização de uma função $f(x)$ quadrática sujeita a restrições lineares. Frequentemente é usada como um sub-problema para auxiliar na resolução de problemas não lineares mais

complexos.

Especificamente, a programação quadrática é utilizada para solucionar problemas com função objetivo:

$$\min \frac{1}{2}x^t Gx + c^t x,$$

sujeito a restrições lineares, onde G é uma matriz quadrada de ordem n , simétrica definida positiva e $x \in \mathbb{R}^n$.

Se $G = 0$, o problema se torna um problema de otimização linear.

Quando a função objetivo é uma função quadrática convexa, temos que qualquer mínimo local é também um mínimo global.

No problema de pré-despacho, a função objetivo a ser otimizada é uma função quadrática convexa e, além disso, G é uma matriz diagonal, hipóteses que serão assumidas a partir de agora.

O problema primal na forma padrão de um problema de programação quadrática convexa é dado por (2.8):

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}x^t Gx + c^t x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Sua formulação dual é dada por (2.9):

$$\begin{aligned} \min \quad & b^t y - \frac{1}{2}x^t Gx \\ \text{s.a} \quad & A^t y - Qx + z = c \\ & x, z \geq 0 \\ & y \text{ livre.} \end{aligned} \tag{2.9}$$

De (2.8) e (2.9) obtemos as condições de otimalidade:

$$\left\{ \begin{array}{l} b - Ax = 0 \\ c - A^t y + Qx - z = 0 \\ XZe = 0 \\ x, z \geq 0 \\ y \text{ livre.} \end{array} \right.$$

Aplicando o método de Newton às condições de otimalidade, obtemos:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ Q & -A^t & -I \\ Z & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_p \\ r_d \\ r_a \end{bmatrix},$$

onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_p = b - Ax \\ r_d = c - A^t y + Qx - z \\ r_a = \mu e - XZe. \end{array} \right.$$

Reescrevendo o sistema, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} Adx = r_p \\ A^t dy - Qdx + dz = r_d \\ Zdx + Xdz = r_a. \end{array} \right.$$

A diferença deste sistema para o sistema formado pelo problema com função objetivo linear é somente o termo $-Qdx$ que aparece na segunda equação. No entanto, como Q é diagonal, o esforço no cálculo da solução final é semelhante à resolução do problema linear.

Como as variáveis primais aparecem no conjunto de restrições do problema dual, é usual que bons resultados computacionais sejam obtidos com a utilização do mesmo tamanho do passo (o menor deles). Se $\alpha_1^k = \min\{\alpha_p^k, \alpha_d^k\}$, tem-se $\alpha^k = \min\{\tau\alpha_1^k, 1\}$ - ver Seção 2.3.1.

Capítulo 3

Modelagem do Problema do Fluxo de Potência Ótimo

O sistema brasileiro de energia elétrica conta com características que o fazem único no mundo (Azevedo 2002):

- i. Predominância hidrelétrica.
- ii. Grandes extensões geográficas e grandes distâncias entre as fontes geradoras e os principais centros consumidores.
- iii. Vários potenciais de aproveitamento no mesmo rio.
- iv. Diversidade de regimes hidrológicos e pluviométricos.
- v. Grau de interligação elétrica entre os sistemas (região Sul/Sudeste/Centro-Oeste) relativamente alto em comparação a outros países.
- vi. Grande potencial hidrelétrico inexplorado.

Com essas características podemos perceber a importância que a expansão e utilização do sistema de geração e transmissão sejam planejadas de modo integrado.

Planejar o sistema de modo otimizado é uma tarefa complexa. Para tentar suprir as necessidades e critérios que os recursos hídricos possuem, é necessário o planejamento da operação considerando um horizonte de vários anos à frente, devido à sazonalidade anual das afluências e a possibilidade de uma sequência de anos com baixas precipitações pluviométricas. Para isso, e devido a complexidade do problema, o sistema brasileiro possui uma cadeia de planejamento que divide as decisões em quatro horizontes de tempo:

i. Planejamento de longo prazo

Considera-se um horizonte de 2 a 5 anos, particionados em períodos mensais. Pretende-se avaliar a geração total do sistema e intercâmbio entre os sistemas.

ii. Planejamento de médio prazo

Envolve um horizonte de um ano com o objetivo de determinar a operação em base semanal e diária.

iii. Planejamento de curto prazo ou pré-despacho

Fornece as metas energéticas para cada dia. A forma como serão cumpridas estas metas é estabelecida pelo despacho de geração para cada hora. Para a resolução do pré-despacho é necessária a representação do sistema elétrico para cada uma das 24 horas do dia, detalhando as condições operacionais do sistema.

iv. Planejamento da operação

O que efetivamente deve acontecer em tempo real.

Se considerarmos o problema de geração e transmissão para o atendimento da demanda de energia elétrica de um sistema em um dado instante teremos um fluxo de potência. O fluxo de potência otimizado segundo algum critério é chamado fluxo de potência ótimo (FPO). O modelo a ser utilizado para a resolução deste problema, neste trabalho, é o modelo linearizado (DC), devido a sua maior simplicidade e ao grau de precisão satisfatório dos seus resultados (Oliveira & Soares 2003).

O pré-despacho é um problema operacional de curto prazo, que procura atender a demanda e satisfazer as metas energéticas que já foram estabelecidas no planejamento de longo prazo.

O despacho ótimo de potência ativa através do modelo DC pode ser formulado como um modelo de fluxo de redes com restrições adicionais (Carvalho, Soares & Ohishi 1988, Oliveira et al. 2005). Uma vantagem dessa abordagem é que as restrições podem ser divididas em blocos que se repetem a cada intervalo de tempo. Representando-se o sistema elétrico nestes intervalos, tem-se assim uma representação independente das leis de Kirchhoff, onde os fluxos de potência são representados explicitamente, permitindo a consideração direta dos limites de transmissão como restrição e das perdas de transmissão como um critério de desempenho.

Adicionalmente, é necessário respeitar a cada período de tempo restrições de segurança para atender demandas imprevistas ou algumas contingências. A sugestão do acréscimo dessas restrições foi feita pelo ONS - Operador Nacional do Sistema Elétrico.

3.1 Modelo Estático

Vamos exibir um modelo com restrições de geração e transmissão, representado por um problema de fluxos em redes com restrições adicionais (Carvalho et al. 1988), acrescido das restrições de segurança:

$$\text{minimizar} \quad \alpha f^t R f + \beta \gamma(p) \quad (3.1)$$

$$\text{sujeito a} \quad A f = p - l, \quad T f = 0 \quad (3.2)$$

$$s^{\min} \leq M p + N f \leq s^{\max} \quad (3.3)$$

$$f^{\min} \leq f \leq f^{\max}, \quad p^{\min} \leq p \leq p^{\max} \quad (3.4)$$

onde:

f representa o vetor de fluxo de potência ativa;

p representa o vetor de geração de potência ativa;

R representa a matriz diagonal das resistências das linhas;

$\gamma(p)$ representa a função de perdas na geração para hidroelétricas ou custo de geração para as termoelétricas e será descrita em seguida;

A representa a matriz de incidência da rede de transmissão;

T representa a matriz de reatância da rede de transmissão;

l representa as demandas de potência ativa;

M representa a matriz que indica os geradores envolvidos nas restrições de segurança;

N representa a matriz que indica as linhas de transmissão envolvidas nas restrições de segurança;

f^{max} e f^{min} são os limites de fluxo de potência ativa;

p^{max} e p^{min} são os limites de geração de energia hidráulica;

s^{max} e s^{min} são os limites de potência ativa das restrições de segurança;

α e β são ponderações dos objetivos a minimizar.

As equações em (3.2) representam as leis de Kirchhoff para nós e circuitos respectivamente. Portanto, o conjunto de restrições para este problema é linear, onde as equações em (3.2) representam a rede de geração/transmissão, as equações (3.3) representam as restrições de segurança e as equações (3.4) representam as capacidades de geração e transmissão do sistema.

A função de perdas na geração hidráulica $\gamma(p)$ modela as três formas mais importantes de perdas: variações na cota de jusante; perdas na tubulação de adução da unidade geradora; e perdas associadas à eficiência do par turbina-gerador. Em Soares & Salmazo (1997) estas perdas foram formuladas como uma função quadrática para cada unidade geradora: $\gamma(p) = p^t Q p + c^t p$, onde Q é uma matriz diagonal e c representa a componente linear das perdas na geração.

Para esse modelo, as duas componentes da função objetivo (3.1) são quadráticas com variáveis separáveis, uma vez que R também é diagonal. A primeira representa o valor das perdas na transmissão e a segunda, o custo da operação das usinas. Vale ressaltar que os métodos de pontos interiores para problemas com esta característica apresentam desempenho similar ao obtido para problemas lineares. Em particular, o esforço por iteração é virtualmente o mesmo em ambas as

situações (Vanderbei 1996, Wright 1996).

3.2 Restrições de Segurança

Em 1986, o problema de pré-despacho com restrições de segurança foi estudado por Monticelli, Granville, Viacava & Pereira (1986). Nesse trabalho foi proposta uma resolução utilizando Decomposição de Benders ao problema de pré-despacho com restrições de segurança não-lineares.

Em 2009, Azevedo, Castro, Oliveira & Soares (2009) abordaram o problema do fluxo de potência ótimo com restrições de segurança lineares, utilizando métodos de pontos interiores.

Neste trabalho, o problema será formulado de maneira que o valor ótimo da função objetivo seja calculado sob condições normais de funcionamento e/ou quando ocorrerem distúrbios como indisponibilidades e falhas. A idéia é que estas restrições de segurança permitam que o modelo trabalhe de maneira defensiva, ou seja, o modelo vai forçar o sistema a ser operado de tal forma que, se uma contingência ocorre, as tensões e fluxos continuem dentro dos limites.

As restrições de segurança modelam as três principais situações que podem ocorrer no sistema elétrico brasileiro:

- Queda de linha: a queda da linha f_i pode ser coberta pela linha f_j através de restrições do tipo $s_1^{min} \leq f_i + \gamma f_j \leq s_1^{max}$ (Biskas & Bakirtzis 2004).

Note que nestes casos $M = 0$ e mais de uma linha pode ser usada para cobrir uma queda.

- Desligamento de gerador: a queda de um gerador pode sobrecarregar uma linha de transmissão. Restrições do tipo $s_2^{min} \leq p_i + \delta f_j \leq s_2^{max}$ evitam que a linha j seja sobrecarregada (Biskas & Bakirtzis 2004).
- Gargalos no sistema: limites no fluxo entre duas áreas da rede podem ser impostos com restrições do tipo $s_3^{min} \leq p_i + \epsilon f_j + \eta f_k \leq s_3^{max}$, originadas do conhecimento que o ONS tem do sistema nacional.

3.3 Modelo Dinâmico

A representação do problema descrita anteriormente corresponde a um único intervalo de tempo da operação. Para estender a formulação (3.1 - 3.4), é necessário considerar este problema para cada intervalo de tempo, acrescentando as restrições de acoplamento referentes às metas de geração das usinas hidroelétricas.

A seguinte equação representa o atendimento das metas para cada usina hidroelétrica j .

$$\sum_{k=1}^t p_j^k = q_j$$

onde t representa o número de intervalos de tempo, q_j representa a meta de geração de energia de cada hidroelétrica $j = 1, \dots, g$ para o horizonte em estudo, estabelecida pelo planejamento de longo prazo e p_j^k representa a geração de potência ativa da usina j no intervalo k .

Considerando agora o modelo com os t intervalos de tempo (Oliveira et al. 2005), o problema

fica na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & \alpha \sum_{i=1}^t f_i^t R f_i + \beta \sum_{i=1}^t (p_i^t Q p_i + c^t p_i) \\
\text{sujeito a} \quad & A f_1 = p_1 - l_1 \\
& T f_1 = 0 \\
& s^{\min} \leq M p_1 + N f_1 \leq s^{\max} \\
& f^{\min} \leq f_1 \leq f^{\max} \\
& p^{\min} \leq p_1 \leq p^{\max} \\
& \dots \\
& A f_t = p_t - l_t \\
& T f_t = 0 \\
& s^{\min} \leq M p_t + N f_t \leq s^{\max} \\
& f^{\min} \leq f_t \leq f^{\max} \\
& p^{\min} \leq p_t \leq p^{\max} \\
& \sum_{k=1}^t p_j^k = q_j \quad \forall j \in (1, \dots, g).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

É fácil perceber que as restrições de fluxo de potência ativa se repetem para cada intervalo de tempo e apenas se acoplam através das restrições adicionais de metas de geração.

Trata-se de um problema de otimização com função objetivo quadrática e restrições lineares. O problema será transformado na forma padrão e serão aplicados os métodos de pontos interiores primal-dual e preditor corretor para encontrar uma solução.

Capítulo 4

Aplicação dos Métodos de Pontos Interiores ao Modelo de Pré-Despacho

Neste capítulo os métodos de pontos interiores primal-dual são aplicados ao problema de pré-despacho com restrições de segurança.

Conforme (3.5), o problema de pré-despacho acrescido das restrições de segurança pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \alpha \sum_{k=1}^t (f^t)^k R f^k + \beta \sum_{k=1}^t [(p^t)^k Q p^k + c^t p^k] \\ \text{sujeito a} \quad & A f^k = p^k - l \\ & T f^k = 0 \\ & s^{\min} \leq M p^k + N f^k \leq s^{\max} \\ & f^{\min} \leq f^k \leq f^{\max} \quad \forall k \in (1, \dots, t) \\ & p^{\min} \leq p^k \leq p^{\max} \\ & \sum_{k=1}^t p_j^k = q_j \quad \forall j \in (1, \dots, g). \end{aligned}$$

4.1 Formulação do Problema Primal

Para aplicar os métodos para a solução do problema, vamos deixá-lo na sua forma padrão. Para isso, a restrição de segurança canalizada será representada pela variável s . Então:

$$\begin{aligned} s^k &= Mp^k + Nf^k \\ &e \\ s^{min} &\leq s^k \leq s^{max}. \end{aligned}$$

Além disso, serão feitas as seguintes mudanças de variáveis, tornando os limites inferiores iguais a zero:

$$\begin{aligned} \tilde{f}^k &= f^k - f^{min} \Rightarrow f^k = \tilde{f}^k + f^{min} \\ \tilde{f}^{max} &= f^{max} - f^{min} \Rightarrow f^{max} = \tilde{f}^{max} + f^{min} \\ \tilde{p}^k &= p^k - p^{min} \Rightarrow p^k = \tilde{p}^k + p^{min} \\ \tilde{p}^{max} &= p^{max} - p^{min} \Rightarrow p^{max} = \tilde{p}^{max} + p^{min} \\ \tilde{s}^k &= s^k - s^{min} \Rightarrow s^k = \tilde{s}^k + s^{min} \\ \tilde{s}^{max} &= s^{max} - s^{min} \Rightarrow s^{max} = \tilde{s}^{max} + s^{min}. \end{aligned}$$

O problema fica na forma:

$$\text{minimizar } \alpha \sum_{k=1}^t [(\tilde{f}^k + f^{min})^t R(\tilde{f}^k + f^{min})] + \beta \sum_{k=1}^t [(\tilde{p}^k + p^{min})^t Q(\tilde{p}^k + p^{min}) + c^t(\tilde{p}^k + p^{min})]$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a } \quad & A(\tilde{f}^k + f^{min}) = (\tilde{p}^k + p^{min}) - l \\ & T(\tilde{f}^k + f^{min}) = 0 \\ & (\tilde{s}^k + s^{min}) = M(\tilde{p}^k + p^{min}) + N(\tilde{f}^k + f^{min}) \\ & 0 \leq (\tilde{f}^k + f^{min}) \leq \tilde{f}^{max} + f^{min} \quad \forall k \in (1, \dots, t) \\ & 0 \leq (\tilde{p}^k + p^{min}) \leq \tilde{p}^{max} + p^{min} \\ & 0 \leq (\tilde{s}^k + s^{min}) \leq \tilde{s}^{max} + s^{min} \\ & \sum_{k=1}^t (\tilde{p} + p^{min})_j^k = q_j \quad \forall j \in (1, \dots, g). \end{aligned}$$

No entanto, o problema ainda não está na forma padrão pois existem desigualdades nas restrições. Acrescentando as variáveis de folga \tilde{s}_f , \tilde{s}_p e \tilde{s}_s , e desenvolvendo as equações, o problema primal fica na forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } \quad & \alpha \sum_{k=1}^t [(\tilde{f}^k)^k R \tilde{f}^k + c_f^t \tilde{f}] + \beta \sum_{k=1}^t [(\tilde{p}^k)^k Q \tilde{p}^k + c_p^t \tilde{p}] \\ \text{sujeito a } \quad & A \tilde{f}^k - \tilde{p}^k = \tilde{l}_1 \\ & T \tilde{f}^k = \tilde{l}_2 \\ & \tilde{s}^k - M \tilde{p}^k - N \tilde{f}^k = \tilde{l}_3 \\ & \tilde{f}^k + \tilde{s}_f = \tilde{f}^{max} \quad \forall k \in (1, \dots, t) \\ & \tilde{p}^k + \tilde{s}_p = \tilde{p}^{max} \\ & \tilde{s}^k + \tilde{s}_s = \tilde{s}^{max} \\ & \sum_{k=1}^t \tilde{p}_j^k = \tilde{q}_j \quad \forall j \in (1, \dots, g) \\ & (\tilde{f}^k, \tilde{p}^k, \tilde{s}^k, \tilde{s}_f^k, \tilde{s}_p^k, \tilde{s}_s^k) \geq 0, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
c_{\tilde{f}}^t &= 2(f^{min})^t R \\
c_{\tilde{p}}^t &= 2(p^{min})^t Q + c^t p^{min} \\
\tilde{l}_1 &= -A f^{min} + p^{min} - l \\
\tilde{l}_2 &= -T f^{min} \\
\tilde{l}_3 &= M p^{min} + N f^{min} - s^{min} \\
\tilde{q}_j &= q_j - \sum_{k=1}^t p^{min}
\end{aligned}$$

foram substituídas por serem constantes.

Os termos $f^{min} R f^{min}$ e $p^{min} Q p^{min}$ foram temporariamente desconsiderados da função objetivo por se tratarem de constantes. No final, serão acrescentados à função objetivo.

Para facilitar o desenvolvimento, parte das restrições do problema de pré-despacho podem ser colocadas na forma matricial (Oliveira et al. 2003):

$$B = \begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}$$

onde a matriz B é formada pelas linhas justapostas das matrizes de incidência e reatância respectivamente, e tem dimensão $m + (n - m + 1) \times n$, uma vez admitindo que o modelo que está sendo trabalhado tem m barras, n linhas de transmissão e g geradores.

Define-se também a matriz:

$$E = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde cada linha não nula de E corresponde a uma barra de geração. Portanto, a matriz E tem dimensões $(n + 1) \times g$, onde as últimas $(n - m + 1)$ linhas são nulas.

Assim, os dois primeiros conjuntos de restrições podem ser escritos como:

$$\begin{bmatrix} A & I \\ T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{l}_1 \\ \tilde{l}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} B & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{l} \end{bmatrix}.$$

Agora, o problema de pré-despacho na forma padrão fica (eliminando os tils para simplificar a notação):

$$\text{minimizar } \alpha \sum_{k=1}^t [(f^t)^k R f^k + c_f^t f^k] + \beta \sum_{k=1}^t [(p^t)^k Q p^k + c_p^t p^k]$$

sujeito a

$$\begin{aligned} B f^k - E p^k &= l \\ s^k - M p^k - N f^k &= l_3 \\ f^k + s_f^k &= f^{max} && \forall k \in (1, \dots, t) \\ p^k + s_p^k &= p^{max} \\ s^k + s_s^k &= s^{max} \\ \sum_{k=1}^t p_j^k &= q_j && \forall j \in (1, \dots, g) \\ (f^k, p^k, s^k, s_f^k, s_p^k, s_s^k) &\geq 0. \end{aligned}$$

4.2 Formulação do Problema Dual

Para descrição do problema dual, serão usadas algumas definições matriciais:

$$D^k = \begin{bmatrix} B & -E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -N & -M & I & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad v^k = \begin{bmatrix} f^k \\ p^k \\ s^k \\ s_f^k \\ s_p^k \\ s_s^k \end{bmatrix}, \quad b^k = \begin{bmatrix} l \\ l_3 \\ f^{max} \\ p^{max} \\ s^{max} \end{bmatrix},$$

$$I_p^{tk} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e$$

$$G = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_t \\ I_p^1 & I_p^2 & I_p^3 & \dots & I_p^t \end{bmatrix}.$$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_t \\ I_p^1 & I_p^2 & I_p^3 & \dots & I_p^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^t \end{bmatrix}.$$

Assim, o problema dual em sua notação matricial associado ao seu modelo primal fica:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & b^t y^k - \sum_{k=1}^t [\alpha(f^t)^k R f^k + \beta(p^t)^k Q p^k] \\ \text{sujeito a} \quad & G^t y^k \leq c \\ & y^k \text{ livre,} \end{aligned}$$

onde:

$$(y^t)^k = \begin{bmatrix} y_1^k & y_2^k & y_3^k & y_4^k & y_5^k & y_6^k \end{bmatrix} \quad e \quad (c^t)^k = \begin{bmatrix} c_f + R f^k & c_p + Q p^k & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

As restrições do problema dual ficam:

$$\begin{aligned} B^t y_1^k - N^t y_2^k - y_3^k &\leq c_f + R f^k \\ -E^t y_1^k - M^t y_2^k - y_4^k + y_6^k &\leq c_p + Q p^k \\ y_2^k - y_5^k &\leq 0 \\ -y_3^k &\leq 0 \\ -y_4^k &\leq 0 \\ -y_5^k &\leq 0 \\ (y_1^k, y_2^k, y_3^k, y_4^k, y_5^k, y_6^k) &\text{ livres.} \end{aligned}$$

Substituindo as variáveis: $y_3 = -w_f$, $y_4 = -w_p$, $y_5 = -w_s$ e $y_6 = y_q$ e acrescentando as variáveis de folga z_f , z_p e z_s , o problema dual fica na forma padrão, $\forall k \in (1, \dots, t)$:

$$\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & l^t y_1^k + l_3^t y_2^k - (f^{max})^t w_f^k - (p^{max})^t w_p^k - \\
& (s^{max})^t w_s^k + q^t y_q - \sum_{k=1}^t [\alpha (f^t)^k R f^k + \beta (p^t)^k Q p^k] \\
\text{sujeito a} \quad & B^t y_1^k - N^t y_2^k - w_f^k + z_f^k - c_f - R f^k = 0 \\
& -E^t y_1^k - M^t y_2^k - w_p^k + y_q + z_p^k - c_p - Q p^k = 0 \\
& y_2^k - w_s^k + z_s^k = 0 \\
& (w_f^k, w_p^k, w_s^k, z_f^k, z_p^k, z_s^k) \geq 0 \\
& (y_1^k, y_2^k, y_q^k) \text{ livres.}
\end{aligned}$$

4.3 Condições de Otimalidade

As condições de otimalidade para os problemas primal e dual são dadas pela factibilidade primal, dual e pelas condições de complementaridade:

$$\text{Factibilidade Primal} \left\{ \begin{array}{l} B f^k - E p^k = l \\ s^k - M p^k - N f^k = l_3 \\ f^k + s_f^k = f^{max} \\ p^k + s_p^k = p^{max} \\ s^k + s_s^k = s^{max} \\ \sum_{k=1}^t p_j^k = q_j \\ (f^k, p^k, s^k, s_f^k, s_p^k, s_s^k) \geq 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall k \in (1, \dots, t) \\ \forall j \in (1, \dots, g) \end{array}$$

$$\text{Factibilidade Dual} \left\{ \begin{array}{l} B^t y_1^k - N^t y_2^k - w_f^k + z_f^k - c_f - Rf^k = 0 \\ -E^t y_1^k - M^t y_2^k - w_p^k + y_q^k + z_p^k - c_p - Qp^k = 0 \\ y_2^k - w_s^k + z_s^k = 0 \\ (w_f^k, w_p^k, w_s^k, z_f^k, z_p^k, z_s^k) \geq 0 \\ (y_1^k, y_2^k, y_q^k) \text{ livres} \end{array} \right. \quad \forall k \in (1, \dots, t)$$

$$\text{Condições de Complementaridade} \left\{ \begin{array}{l} F^k Z_f^k e = 0 \\ P^k Z_p^k e = 0 \\ S^k Z_s^k e = 0 \\ S_f^k W_f^k e = 0 \\ S_p^k W_p^k e = 0 \\ S_s^k W_s^k e = 0. \end{array} \right. \quad \forall k \in (1, \dots, t)$$

Observe que estas condições diferem do problema com função objetivo linear somente nos termos de f^k e p^k que surgem nas duas primeiras equações das restrições duais.

4.4 Método de Newton

É importante salientar que se aplicarmos o método de Newton às equações de igualdade, desprezando as desigualdades, obteremos uma direção que satisfaz de imediato as restrições lineares dos problemas primal e dual, restando apenas satisfazer as condições não lineares de complementaridade. Os métodos de pontos interiores exploram bem esta característica ao desprezar as desigualdades, mantendo ainda assim estas restrições factíveis ao controlar o tamanho do passo na direção de Newton. Nessas condições, as restrições lineares não são satisfeitas de imediato, o que pode ser

considerado uma desvantagem muito pequena, dado que as desigualdades são satisfeitas ao longo de todas as iterações.

Aplicando o método de Newton às condições de otimalidade, temos que o Jacobiano do sistema é dado por: $Jd = r$

$$J = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_t \\ I_p^1 & I_p^2 & I_p^3 & \dots & I_p^t \end{bmatrix},$$

onde cada matriz M_k corresponde à matriz

$$M^k = \begin{bmatrix} B & -E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -N & -M & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B^t & -N^t & -I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Q & 0 & 0 & 0 & 0 & -E^t & -M^t & 0 & -I & 0 & 0 & I & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & I & 0 \\ Z_f^k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_p^k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_s^k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_f^k & 0 & 0 & 0 & 0 & S_f^k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_p^k & 0 & 0 & 0 & 0 & S_p^k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_s^k & 0 & 0 & 0 & 0 & S_s^k & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

cujas direções são dadas por

$$(d^t)^k = \left[df^k \ dp^k \ ds^k \ ds_f^k \ ds_p^k \ ds_s^k \ dy_1^k \ dy_2^k \ dw_f^k \ dw_p^k \ dw_s^k \ dz_f^k \ dz_p^k \ dz_s^k \ dy_q^k \right]^t,$$

e os resíduos

$$\begin{aligned}
r_1^k &= l - Bf^k + Ep^k \\
r_2^k &= l_3 - s^k + Mp^k + Nf^k \\
r_3^k &= f^{max} - f^k - s_f^k \\
r_4^k &= p^{max} - p^k - s_p^k \\
r_5^k &= s^{max} - s^k - s_s^k \\
r_6^k &= c_f - B^t y_1^k + N^t y_2^k + w_f^k - z_f^k + Rf^k \\
r_7^k &= c_p + E^t y_1^k + M^t y_2^k + w_p^k - z_p^k + Qp^k - y_q^k \\
r_8^k &= w_s^k - y_2^k - z_s^k \\
r_9^k &= \mu^k e - F^k Z_f^k e \\
r_{10}^k &= \mu^k e - P^k Z_p^k e \\
r_{11}^k &= \mu^k e - S^k Z_s^k e \\
r_{12}^k &= \mu^k e - S_f^k W_f^k e \\
r_{13}^k &= \mu^k e - S_p^k W_p^k e \\
r_{14}^k &= \mu^k e - S_s^k W_s^k e \\
r_q^k &= q_j - \sum_{k=1}^t p_j^k,
\end{aligned}$$

formando o seguinte sistema de equações lineares:

$$Bdf^k - Edp^k = r_1^k \quad (4.1)$$

$$ds^k - Ndf^k - Mdp^k = r_2^k \quad (4.2)$$

$$df^k + ds_f^k = r_3^k \quad (4.3)$$

$$dp^k + ds_p^k = r_4^k \quad (4.4)$$

$$ds^k + ds_s^k = r_5^k \quad (4.5)$$

$$B^t dy_1^k - N^t dy_2^k - dw_f^k + dz_f^k - Rdf^k = r_6^k \quad (4.6)$$

$$-E^t dy_1^k - M^t dy_2^k - dw_p^k + dy_q^k + dz_p^k - Qdp^k = r_7^k \quad (4.7)$$

$$dy_2^k - dw_s^k + dz_s^k = r_8^k \quad (4.8)$$

$$Z_f^k df^k + F^k dz_f^k = r_9^k \quad (4.9)$$

$$Z_p^k dp^k + P^k dz_p^k = r_{10}^k \quad (4.10)$$

$$Z_s^k ds^k + S^k dz_s^k = r_{11}^k \quad (4.11)$$

$$W_f^k ds_f^k + S_f^k dw_f^k = r_{12}^k \quad (4.12)$$

$$W_p^k ds_p^k + S_p^k dw_p^k = r_{13}^k \quad (4.13)$$

$$W_s^k ds_s^k + S_s^k dw_s^k = r_{14}^k \quad (4.14)$$

$$\sum_{k=1}^t dp_j^k = r_q^k. \quad (4.15)$$

4.5 Redução do Sistema

Este sistema pode ser consideravelmente reduzido através da substituição de variáveis.

De (4.3), (4.4) e (4.5), temos:

$$ds_f^k = r_3^k - df^k \quad (4.16)$$

$$ds_p^k = r_4^k - dp^k \quad (4.17)$$

$$ds_s^k = r_5^k - ds^k. \quad (4.18)$$

Substituindo (4.16), (4.17) e (4.18) em (4.12), (4.13) e (4.14), respectivamente, obtemos:

$$dw_f^k = (S_f^k)^{-1}(W_f^k df^k + r_{12}^k - W_f^k r_3^k) \quad (4.19)$$

$$dw_p^k = (S_p^k)^{-1}(W_p^k dp^k + r_{13}^k - W_p^k r_4^k) \quad (4.20)$$

$$dw_s^k = (S_s^k)^{-1}(W_s^k ds^k + r_{14}^k - W_s^k r_5^k). \quad (4.21)$$

De (4.9), (4.10) e (4.11), temos:

$$dz_f^k = (F^k)^{-1}(r_9^k - Z_f^k df^k) \quad (4.22)$$

$$dz_p^k = (P^k)^{-1}(r_{10}^k - Z_p^k dp^k) \quad (4.23)$$

$$dz_s^k = (S^k)^{-1}(r_{11}^k - Z_s^k ds^k). \quad (4.24)$$

Substituindo (4.22) e (4.19) em (4.6); (4.23) e (4.20) em (4.7); e (4.24) e (4.21) em (4.8), obtemos o sistema reduzido:

$$Bdf^k - Edp^k = r_1^k \quad (4.25)$$

$$ds^k - Ndf^k - Mdp^k = r_2^k \quad (4.26)$$

$$B^t dy_1^k - N^t dy_2^k - D_f df^k = r_f^k \quad (4.27)$$

$$-E^t dy_1^k - M^t dy_2^k - D_p dp^k + dy_q^k = r_p^k \quad (4.28)$$

$$dy_2^k - D_s ds^k = r_s^k \quad (4.29)$$

$$\sum_{k=1}^t dp_j^k = r_q^k, \quad (4.30)$$

onde:

$$\begin{aligned}
D_f^k &= (S_f^k)^{-1}W_f^k + (F^k)^{-1}Z_f^k + R \\
D_p^k &= (S_p^k)^{-1}W_p^k + (P^k)^{-1}Z_p^k + Q \\
D_s^k &= (S_s^k)^{-1}W_s^k + (S^k)^{-1}Z_s^k \\
r_f^k &= r_6^k + (S_f^k)^{-1}r_{12}^k - (S_f^k)^{-1}W_f^k r_3^k - (F^k)^{-1}r_9^k \\
r_p^k &= r_7^k + (S_p^k)^{-1}r_{13}^k - (S_p^k)^{-1}W_p^k r_4^k - (P^k)^{-1}r_{10}^k \\
r_s^k &= r_8^k + (S_s^k)^{-1}r_{14}^k - (S_s^k)^{-1}W_s^k r_5^k - (S^k)^{-1}r_{11}^k.
\end{aligned}$$

Podemos observar que até agora apenas inversas de matrizes diagonais foram envolvidas.

De (4.27), (4.28) e (4.29), temos:

$$df^k = (D_f^k)^{-1}(B^t dy_1^k - N^t dy_2^k - r_f^k) \quad (4.31)$$

$$dp^k = (D_p^k)^{-1}(dy_q^k - M^t dy_2^k - r_p^k - E^t dy_1^k) \quad (4.32)$$

$$ds^k = (D_s^k)^{-1}(-dy_2^k - r_s^k). \quad (4.33)$$

Substituindo (4.31), (4.32) e (4.33) em (4.26), obtemos

$$dy_2^k = (B_s^k)^{-1}[rx^k - (W^k)^t dy_1^k + M(D_p^k)^{-1}dy_q^k], \quad (4.34)$$

onde:

$$\begin{aligned}
B_s^k &= (D_s^k)^{-1} + N(D_f^k)^{-1}N^t + M(D_p^k)^{-1}M^t \\
rx^k &= r_2^k + (D_s^k)^{-1}r_s^k - N(D_f^k)^{-1}r_f^k - M(D_p^k)^{-1}r_p^k \\
W^{k^t} &= M(D_p^k)^{-1}E^t - N(D_f^k)^{-1}B^t.
\end{aligned}$$

Substituindo agora (4.31), (4.32) e (4.34) em (4.25), temos:

$$dy_1^k = (Y^k)^{-1}[ry^k - (W^k(B_s^k)^{-1}M(D_p^k)^{-1} - E(D_p^k)^{-1})dy_q^k], \quad (4.35)$$

onde:

$$Y^k = B(D_f^k)^{-1}B^t + E(D_p^k)^{-1}E^t - W(B_s^k)^{-1}W^t$$

$$ry^k = r_1^k + B(D_f^k)^{-1}r_f^k - E(D_p^k)^{-1}r_p^k - W(B_s^k)^{-1}rx^k.$$

Reescrevendo o sistema, obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} dy_1^k = (Y^k)^{-1}[ry^k - (W^k(B_s^k)^{-1}M(D_p^k)^{-1} - E(D_p^k)^{-1})dy_q^k] \quad (4.35) \\ dy_2^k = (B_s^k)^{-1}[rx^k - (W^k)^t dy_1^k + M(D_p^k)^{-1}dy_q^k] \quad (4.34) \\ \sum_{k=1}^t dp_j^k = r_q^k \quad (4.30). \end{array} \right.$$

Substituindo (4.35) e (4.34) em (4.30), temos finalmente

$$\sum_{k=1}^t \{ -(D_p^k)^{-1}[(H^k)^t(Y^k)^{-1}H^k + M^t(B_s^k)^{-1}M](D_p^k)^{-1} + (D_p^k)^{-1} \} dy_q^k = \dots$$

$$\dots r_q^k + \sum_{k=1}^t (D_p^k)^{-1}[r_p^k + M^t(B_s^k)^{-1}rx^k - (H^k)^t(Y^k)^{-1}ry^k],$$

onde:

$$H^k = W^k(B_s^k)^{-1}M - E.$$

Definindo

$$S = \sum_{k=1}^t -(D_p^k)^{-1}[(H^k)^t(Y^k)^{-1}H^k + M^t(B_s^k)^{-1}M](D_p^k)^{-1} + (D_p^k)^{-1}, \quad (4.36)$$

chegamos no sistema linear final:

$$dy_q^k = S^{-1} \left\{ r q^k + \sum_{k=1}^t (D_p^k)^{-1} [r_p^k + M^t (B_s^k)^{-1} r x^k - (H^k)^t (Y^k)^{-1} r y^k] \right\}.$$

A solução direta deste sistema exige muito esforço computacional. Uma forma de resolução mais eficiente é obtida através de decomposições nas matrizes, que serão apresentadas na próxima seção.

4.6 Estudo da Estrutura Matricial

A matriz $B_s^k = (D_s^k)^{-1} + N(D_f^k)^{-1}N^t + M(D_p^k)^{-1}M^t$ é quadrada e tem dimensão igual ao número de restrições de segurança. É simétrica e definida positiva, podendo assim ser aplicada a decomposição de Cholesky (Golub & Van Loan 1989). Essa decomposição irá reescrever B_s^k na forma LL^t , onde L é uma matriz triangular inferior. Este processo é computacionalmente mais barato, porque calculamos e guardamos na memória do computador somente uma matriz triangular e não há necessidade de permutações de linhas.

A decomposição de B_s^k será utilizada na obtenção da solução do sistema $Y^k = B(D_f^k)^{-1}B^t + E(D_p^k)^{-1}E^t - W^k(B_s^k)^{-1}(W^k)^t$. Porém, isso exige um esforço computacional considerável. Utilizaremos então a fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury (Golub & Van Loan 1989), que tem a forma:

$$(C + UXV^t)^{-1} = C^{-1} - C^{-1}U(X^{-1} + V^tC^{-1}U)^{-1}V^tC^{-1}, \quad (4.37)$$

onde U e V são matrizes de ordem $p \times q$ e X é uma matriz de ordem $q \times q$.

No nosso problema, $C = B(D_f^k)^{-1}B^t + E(D_p^k)^{-1}E^t$ e $UXV^t = -W^k(B_s^k)^{-1}(W^k)^t$, onde $U = -W^k$, $X = (B_s^k)^{-1}$ e $V^t = (W^k)^t$.

Mas, na fórmula (4.37), precisamos do cálculo da inversa de C . Como C é uma matriz simétrica

e definida positiva, utilizaremos a decomposição de Cholesky para obtê-la. E a equação fica:

$$(C + UXV^t)^{-1} = (C + (-W)B_s^{-1}W^t)^{-1} = C^{-1} + C^{-1}W(B_s - W^tC^{-1}W)^{-1}W^tC^{-1}.$$

A matriz $(B_s^k - (W^k)^tC^{-1}W^k)^{-1}$ tem a dimensão do número de restrições de segurança. Para simplificar a resolução do sistema, poderá ser aplicada a decomposição de Bunch-Parlett (Golub & Van Loan 1989) que decompõe matrizes simétricas indefinidas em um método de pivoteamento diagonal que mantém a simetria das matrizes. Nesse método é calculada uma permutação P , tal que $PAP^t = LDL^t$, onde D é formada por blocos simétricos de dimensão 1×1 e 2×2 ; P é escolhida tal que os coeficientes da matriz L , diagonal inferior, satisfaçam $|l_{ij}| \leq 1$, garantindo a estabilidade numérica.

Para a solução do sistema final, poderá ser aplicada à matriz S (4.36) a decomposição de Bunch-Parlett, reduzindo assim o custo computacional e chegando finalmente à solução do sistema linear.

A partir de agora, o modelo descrito será implementado, testado e os resultados serão apresentados no próximo capítulo.

Capítulo 5

Resultados Computacionais

Para avaliar a metodologia desenvolvida, foram realizados testes nos sistemas IEEE 30, que representa uma parcela do sistema elétrico americano (Centro-Oeste) a partir de fevereiro de 1962, e no sistema IEEE 118, que representa outra parcela do mesmo sistema a partir de dezembro de 1962¹. Um resumo das características desses sistemas são apresentados na Tabela (5.1).

Sistemas	Barras	Geradores	Carga (MW)
IEEE 30	30	6	283,4
IEEE 118	118	53	4242

Tabela 5.1: Sistemas Estudados

Para permitir comparações, as restrições de segurança foram acrescentadas à implementação anterior de métodos de pontos interiores para o problema de pré-despacho (Oliveira et al. 2005).

Não foram obtidos dados reais referentes às restrições de segurança. Por isso, essas restrições foram criadas através dos dados dos sistemas estudados, objetivando representar as três situações discutidas na Seção 3.2: queda de linha, desligamento de gerador e gargalos no sistema. Vale ressaltar que as restrições de segurança não são únicas e poderiam ser criadas outras restrições adequadas à prevenção de contingências diferentes.

O programa foi desenvolvido e executado em Matlab 7.0 em um sistema operacional Windows XP Professional, processador Intel Pentium D, velocidade de 3,4 GHz e 3,5 GB de memória.

¹Os dados foram obtidos em <http://www.ee.washington.edu/research/pstca/>.

Nos experimentos computacionais foram utilizados os métodos de pontos interiores primal-dual e preditor corretor. Foram realizados testes com números variados de restrições de segurança e alterações nos fluxos de potência máximo e nos limites de potência ativa nas restrições de segurança. O intervalo de tempo considerado foi de 24 horas.

Para a convergência do método foi utilizada uma precisão na ordem de 10^{-5} . O parâmetro τ utilizado em todas as implementações foi $\tau = 0,9995$, e as ponderações foram definidas como $\alpha = \beta = 1$.

Foram testados dois pontos iniciais, um com valores escolhidos conforme a descrição abaixo, que chamaremos de pontos iniciais alternativos, e outro obtido a partir do modelo estático. Para cada intervalo de tempo, um problema de fluxo de potência ótimo com as restrições de segurança é resolvido com tolerância relaxada, e esta solução é usada como ponto inicial para este intervalo de tempo no problema de pré-despacho.

Os pontos iniciais alternativos, sugeridos por Azevedo, Castro, Oliveira & Soares (2009) foram: $f^0 = s_f^0 = f^{max}/2$, $p^0 = s_p^0 = p^{max}/2$, $y_1^0 = y_2^0 = s_s^0 = 1$, $w_f^0 = z_f^0 = R^2 + 1$ e $w_p^0 = w_s^0 = z_p^0 = z_s^0 = 1$.

O resultado dos testes feitos com os pontos iniciais alternativos, nos sistemas testados, foi a não convergência do método para o limite máximo de 50 iterações.

O ponto inicial gerado resolvendo um problema de fluxo de potência ótimo com restrições de segurança é obtido de forma eficiente, pois o método converge em 4 iterações na maioria dos casos, com tolerância de 10^{-5} . Somente a primeira iteração do subproblema necessita de mais iterações, pois os demais são inicializados com a solução obtida no intervalo de tempo anterior.

A utilização dos pontos iniciais gerados pelo problema do fluxo de potência ótimo com restrições de segurança resultou na convergência do método para o problema de pré-despacho em todos os casos testados.

A utilização da decomposição de Cholesky no cálculo de B_s (4.6) reduziu o custo computacional, e portanto, foi utilizada em todos os resultados que serão apresentados.

A solução do sistema Y através da fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury não alterou o custo computacional resultante. Por isso, não foi utilizado.

A decomposição de Bunch-Parlett no cálculo de S também não foi utilizada pois o Matlab não disponibiliza essa decomposição e sua implementação, nesta linguagem de programação, seria mais custosa que a resolução do sistema linear.

O método de pontos interiores preditor-corretor é em geral uma boa alternativa para abordar problemas de otimização linear. No entanto, sua generalização para resolver os problemas de pré-despacho com restrições de segurança não apresentou bom desempenho, comportamento já observado por Carvalho (2007). De fato, este método apresentou problemas de convergência em todos os casos estudados. Assim, os resultados que serão apresentados utilizaram o método de pontos interiores primal dual.

5.1 O Sistema IEEE 30

O sistema IEEE 30 possui 30 barras, 41 linhas e 6 geradores. Para esse sistema, foram criadas 3 restrições de segurança. O sistema está ilustrado na Figura (5.1).

A fim de simplificar a interpretação dos resultados, serão considerados os seguintes dados iniciais:

- Limite de Fluxo $f^{max} = 100$ e $f^{min} = -f^{max}$ para as linhas de transmissão;
- Potência mínima de cada gerador sendo 0 MW, ou seja, $p^{min} = 0$;
- Limite de Potência ativa nas restrições de segurança $s^{max} = 50$, e $s^{min} = -s^{max}$;
- Função de custo quadrática pura (sem termo linear), ou seja, $c_p = 0$;
- Geradores inicialmente com custos iguais, ou seja, $Q = I$.

A primeira restrição está ilustrada na Figura 5.2. Esse tipo de restrição é responsável por prevenir a contingência que a queda de uma linha irá causar.

Vamos supor que haja a interrupção da linha 3-4. Limitando o fluxo de potência ativa das linhas 1-3, 2-4 e 6-4, será evitada a interrupção, através da seguinte formulação matemática: $-50 \leq f_{3-4} + f_{1-3} + f_{2-4} + f_{4-6} \leq 50$.

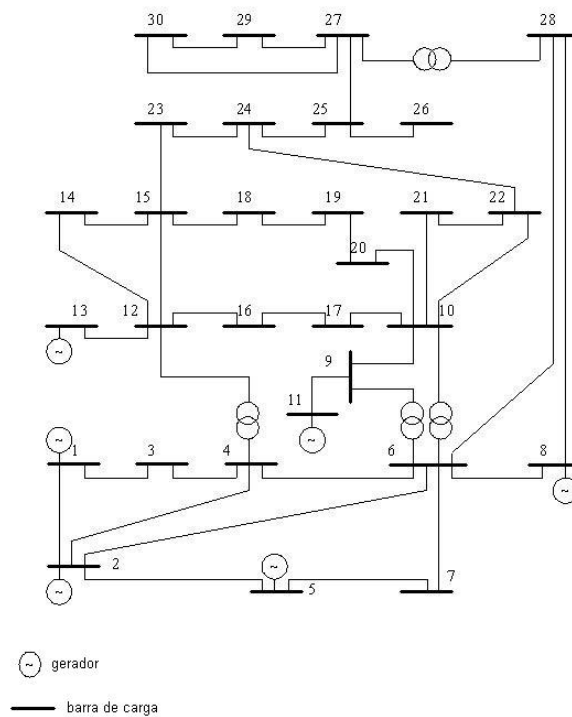


Figura 5.1: Rede do Sistema IEEE30

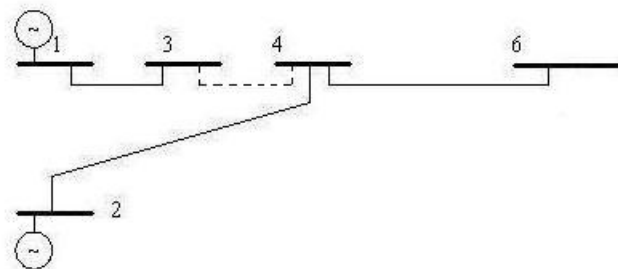


Figura 5.2: Restrição de Segurança 1: Queda de linha

A segunda restrição de segurança objetiva evitar a falta de suprimento de energia na hipótese de desligamento de um gerador. Para isso são limitadas as potências máximas de um certo grupo de geradores. A Figura 5.3 mostra um grupo de geradores que foram limitados conforme a formulação matemática: $0 \leq p_1 + p_2 + p_5 \leq 50$. Assim, os limites máximos que anteriormente eram de $p_1 = 40$, $p_2 = 40$ e $p_5 = 60$, tiveram a soma limitada em $p_{1+2+5} = 50$.

A terceira e última restrição supõe gargalos no sistema, ou seja, quando há uma sobrecarga de

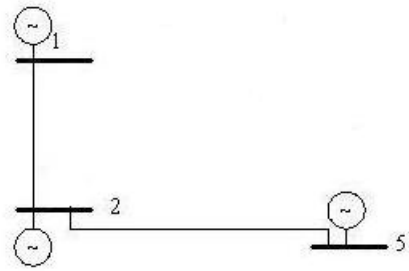


Figura 5.3: Restrição de Segurança 2: Desligamento de gerador

uma linha por excesso de energia passando por ela. Vamos supor, no sistema IEEE 30, que a linha 12 – 13 está sobrecarregada. Limitando-se a geração de energia do gerador da barra 13 aliviase a sobrecarga da linha, através do aumento da geração de potência ativa de outro gerador. Por exemplo, se for aumentada a geração do gerador da barra 8, não ocorrerá a falta de potência ativa no sistema, como mostra a Figura 5.4. Esses aspectos podem ser representados através da seguinte desigualdade: $-50 \leq p_{13} + p_8 + f_{12-13} \leq 50$.

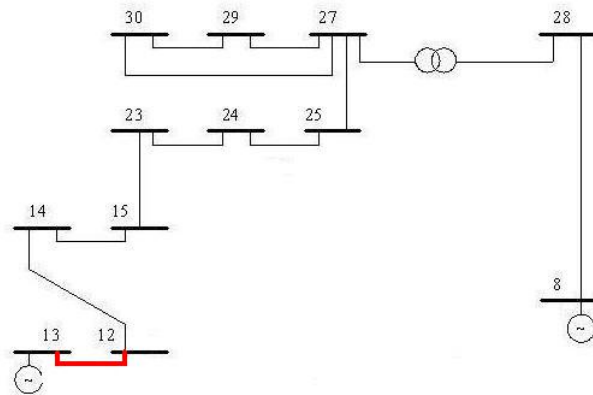


Figura 5.4: Restrição de Segurança 3: Gargalos no Sistema

O método de pontos interiores primal-dual apresentou um desempenho adequado, respeitando simultaneamente todas as restrições de segurança impostas.

5.1.1 Discussão

O primeiro conjunto de resultados mostra que a inclusão das restrições de segurança influenciou consideravelmente o comportamento do sistema, quando comparados os resultados obtidos na

Linhas	t = 04 SEM	t = 04 COM	t = 10 SEM	t = 10 COM	t = 20 SEM	t = 20 COM
1-2	0,31	0,32	0,43	0,46	0,47	0,52
1-3	0,16	0,07	0,22	0,10	0,24	0,11
2-4	0,10	0,03	0,13	0,05	0,15	0,06
3-4	0,14	0,26	0,19	0,46	0,21	0,54
2-5	0,27	0,27	0,39	0,41	0,44	0,46
2-6	0,12	0,12	0,17	0,20	0,19	0,23
4-6	0,10	0,40	0,15	0,62	0,18	0,71
5-7	-0,10	-0,09	-0,14	-0,13	-0,16	-0,14
6-7	0,26	0,26	0,39	0,38	0,44	0,43
6-8	-0,19	0,21	-0,23	0,32	-0,25	0,37
6-9	0,03	0,21	0,00	0,31	-0,01	0,35
6-10	0,06	0,12	0,08	0,18	0,08	0,20
9-11	-0,21	0,00	-0,38	0,00	-0,45	0,00
9-10	0,24	0,21	0,38	0,31	0,44	0,35
4-12	0,08	0,29	0,09	0,44	0,09	0,50
12-13	-0,26	0,00	-0,43	0,00	-0,50	0,00
12-14	0,06	0,05	0,09	0,08	0,10	0,09
12-15	0,14	0,12	0,21	0,18	0,24	0,20
12-16	0,06	0,04	0,09	0,06	0,11	0,07
14-15	0,01	0,01	0,02	0,01	0,03	0,01
16-17	0,04	0,02	0,06	0,03	0,06	0,03
15-18	0,05	0,04	0,07	0,06	0,08	0,07
18-19	0,03	0,02	0,04	0,02	0,04	0,03
19-20	-0,04	-0,05	-0,06	-0,08	-0,07	-0,09
10-20	0,06	0,07	0,09	0,10	0,10	0,12
10-17	0,03	0,05	0,04	0,07	0,05	0,08
10-21	0,12	0,11	0,18	0,17	0,20	0,19
10-22	0,06	0,05	0,09	0,08	0,10	0,09
21-22	-0,01	-0,02	-0,01	-0,02	-0,01	-0,03
15-23	0,05	0,03	0,07	0,04	0,08	0,05
22-24	0,05	0,04	0,07	0,06	0,09	0,06
23-24	0,02	0,00	0,04	0,01	0,04	0,01
24-25	0,01	-0,02	0,02	-0,03	0,02	-0,04
25-26	0,03	0,03	0,04	0,04	0,04	0,04
25-27	-0,02	-0,05	-0,02	-0,07	-0,02	-0,08
28-27	0,11	0,14	0,16	0,21	0,18	0,24
27-29	0,04	0,04	0,07	0,07	0,08	0,08
27-30	0,05	0,05	0,08	0,08	0,09	0,09
29-30	0,03	0,03	0,04	0,04	0,05	0,05
8-28	0,06	0,00	0,08	0,00	0,08	0,00
6-28	0,06	0,14	0,09	0,21	0,10	0,24

Tabela 5.2: Comparação dos Fluxos de Potência Ativa do Sistema IEEE 30

solução do problema de pré-despacho que não considera as restrições de segurança. A Tabela 5.2 mostra os valores dos fluxos sem as restrições de segurança e com as restrições, em 3 horários com diferentes demandas de energia: $t = 4$, $t = 10$ e $t = 20$.

A Tabela 5.3 compara os resultados obtidos na solução do problema de pré-despacho do sistema IEEE 30 sem as restrições de segurança e com as restrições de segurança em termos de número de iterações e tempo computacional, em segundos, e mostra também os valores das respectivas funções objetivos.

	Sem Restrições de Segurança	Com Restrições de Segurança
Número de Iterações	4	6
Tempo Computacional(s)	0,20	0,57
Função Objetivo	35,36	38,82

Tabela 5.3: Comparação dos Resultados do Sistema IEEE 30

A diferença de desempenho entre os dois programas pode ser explicada da seguinte forma: quando não há restrições de segurança as iterações são computacionalmente menos onerosas. Além disso, a matriz Y^k definida em (4.35) apresenta 0,23% de elementos não nulos, enquanto a mesma matriz com as restrições de segurança e limitações apresenta 0,31% de elementos não nulos (um aumento de 34,57% de elementos diferentes de zero). Em consequência, a inclusão das restrições resulta em um aumento no número de iterações.

5.2 O Sistema IEEE 118

O sistema IEEE 118 possui 118 barras, 179 linhas, 53 geradores e serão consideradas 6 restrições de segurança. O sistema está ilustrado na Figura (5.5).

Para este sistema são considerados os seguintes dados iniciais:

- Limite de Fluxo $f^{max} = 2000$ e $f^{min} = -f^{max}$ para as linhas de transmissão;
- Potência mínima de cada gerador sendo 0 MW, ou seja, $p^{min} = 0$;
- Limite de Potência ativa nas restrições de segurança $s^{max} = 300$, e $s^{min} = -s^{max}$;

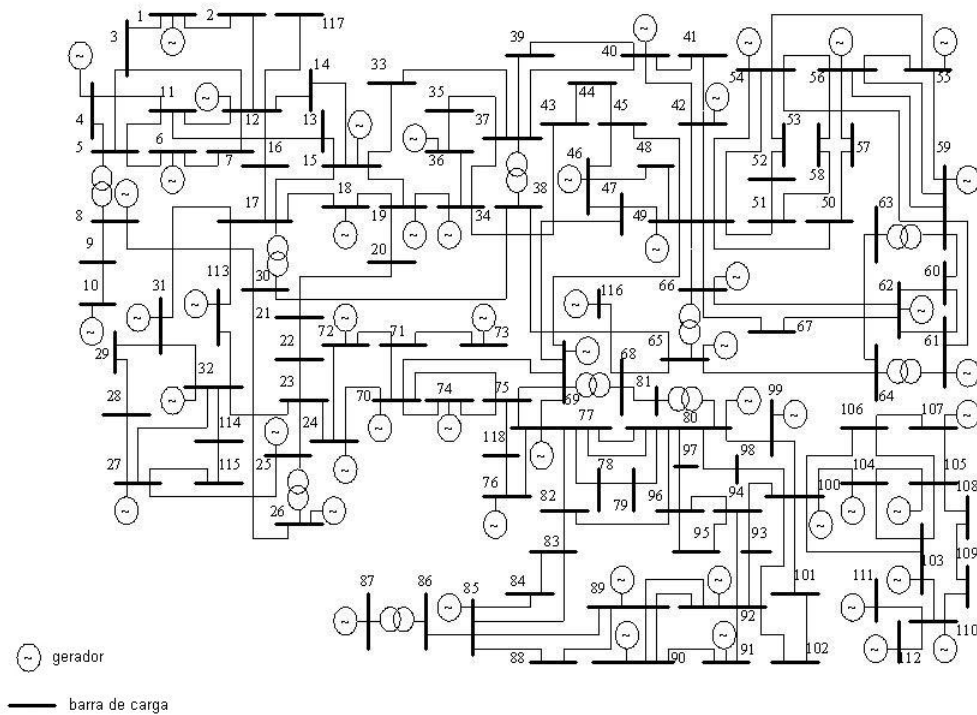


Figura 5.5: Rede do Sistema IEEE118

- Função de custo quadrática pura, ou seja, $c_p = 0$;
- Geradores inicialmente de custos iguais, ou seja, $Q = I$.

Das seis restrições de segurança utilizadas neste sistema, uma considera a queda de gerador, três consideram quedas de linhas e duas restrições consideram gargalos no sistema.

O método de pontos interiores convergiu para a solução respeitando a cada período de tempo todas as restrições de segurança simultaneamente.

A Tabela 5.4 mostra a comparação das soluções do problema sem as restrições de segurança e com as restrições, em termos de número de iterações, tempo computacional (em segundos) e valor da função objetivo.

Embora o número de iterações tenha aumentado significativamente, o tempo computacional foi aceitável, mostrando que o método é eficiente e promissor.

	Sem Restrições de Segurança	Com Restrições de Segurança
Número de Iterações	12	17
Tempo Computacional(s)	2,49	5,68
Função Objetivo	733,11	1076,00

Tabela 5.4: Comparação dos Resultados do Sistema IEEE 118

O valor da função objetivo teve uma alteração significativa, mas devido ao fato das restrições de segurança não serem reais, essa alteração não será investigada.

5.3 Sistemas Brasileiros

O programa testado foi aplicado a três versões de sistemas brasileiros. A Tabela 5.5 mostra as características desses sistemas e o resultado da aplicação.

	Barras	Linhas	Geradores	Restrições de Segurança	Iterações	Tempo
SSE1654	1654	2063	124	58	43	34 min 6s
SSE1732	1732	2160	115	64	47	45 min 27s
Brasil	1993	2476	151	74	50	52 min 14s

Tabela 5.5: Características e Resultados dos Sistema SSE1654, SSE1732 e Brasil 1993

A tabela mostra que para problemas maiores, com quantidade de restrições de segurança proporcionais às de um problema real, o programa também converge considerando todas as restrições de segurança simultaneamente.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas Futuras

Este trabalho discutiu a abordagem do problema de minimizar as perdas na geração e transmissão do pré-despacho DC de um sistema de potência hidrotérmico considerando restrições de segurança através dos métodos de pontos interiores primal-dual.

Como a própria denominação sugere, o problema de pré-despacho com restrições de segurança acrescenta um conjunto de restrições adicionais ao problema de pré-despacho. Assim, o universo de soluções é reduzido, o que faz com que quase sempre o valor mínimo da solução seja mais alto em relação à solução do problema de pré-despacho sem restrições de segurança, além de deixar o processo de convergência mais difícil. O trabalho desenvolveu uma alternativa para contornar as dificuldades de convergência através de métodos de pontos interiores, estendidos para tratar o problema quadrático com restrições lineares, que caracteriza o pré-despacho com restrições de segurança.

A análise realizada mostrou que é possível usar adequadamente a estrutura do problema de forma a obter uma codificação específica e robusta do ponto de vista numérico e com tempos de processamento satisfatórios. Mesmo para problemas com grande quantidade de variáveis, o método converge com estabilidade numérica e precisão maior do que a necessária para aplicações nos sistemas brasileiros. Um aspecto importante para a convergência do método é a utilização de bons pontos iniciais. Utilizou-se duas alternativas para obtenção desses pontos. Na primeira alternativa, os pontos foram obtidos a partir de uma simples análise da estrutura de restrições; os processos

iterativos não convergiram com essa utilização. Na segunda alternativa, os pontos iniciais foram obtidos a partir da solução de um problema auxiliar de fluxo de potência ótimo com as restrições de segurança, que produz um ponto inicial para cada um dos intervalos de tempo do problema de pré-despacho; utilizando-se essa alternativa não houve dificuldade de convergência.

Numa perspectiva mais ampla, o problema de pré-despacho com restrições de segurança pode ser visto como uma situação de otimização com dois objetivos, onde se procura minimizar os custos de operação e maximizar a segurança do sistema. O trabalho desenvolvido contribui com fundamentos para um estudo mais abrangente do problema, através da teoria de otimização multiobjetivo.

6.1 Perspectivas Futuras

O estudo de alternativas para contemplar a esparsidade das matrizes em sistemas grandes é um dos aspectos a serem explorados nos desdobramentos deste trabalho. Para realizar esses estudos, será necessário codificar toda a metodologia em linguagem computacional que permita investigar métodos para lidar com a esparsidade das matrizes envolvidas nas restrições, bem como utilizar as decomposições aqui propostas.

Outro aspecto a ser estudado é o aperfeiçoamento das direções de busca utilizadas no processo iterativo. Em particular, devem ser investigados os motivos que levaram às dificuldades de convergência do método preditor-corretor, que apresenta resultados muito bons em problemas lineares.

O conjunto desses aperfeiçoamentos tem o objetivo de preparar a metodologia para aplicações no Sistema Interligado Nacional com restrições reais de segurança, simulando os 48 intervalos de tempo, ou seja, a operação a cada meia hora de um dia do pré-despacho.

Bibliografia

- Abadie, J. & Carpentier, J. (1969), 'Generalization of the wolfe gradient method to the case of nonlinear constraints', *Optimization Academic Press* pp. 1937–1947.
- Adler, I., Resende, M. G. C., Veiga, G. & Karmarkar, N. (1989), 'An implementation of Karmarkar's algorithm for linear programming', *Mathematical Programming* **44**, 297–335.
- Alsac, O., Bright, J., Prais, M. & Scott, B. (1990), 'Further developments in LPbased optimal power flow', *IEEE Transaction on PAS* **5**, 697–711.
- Azevedo, A. T. (2002), Aplicação de métodos de pontos interiores a problemas de manufatura e engenharia elétrica, Technical report, Dissertação de Mestrado, FEEC – UNICAMP. <http://libdigi.unicamp.br/document/?view=vtls000242828>.
- Azevedo, A. T., Castro, C. A., Oliveira, A. R. L. & Soares, S. (2009), 'Security constraint optimal active power flow via network model and interior point method', *SBA Controle e Automação* pp. 206–216.
- Bazaraa, M. S. (1990), 'Linear programming and network flows', *John Wiley & Sons* **2nd ed.**
- Biggs, M. C. & Laughton, M. A. (1977), 'Optimal electric power scheduling: a large nonlinear programming test problem solved by recursive quadratic programming', *Mathematical Programming* **13**, 167–182.
- Biskas, P. N. & Bakirtzis, A. G. (2004), 'Decentralized security constrained DCOPF of interconnected power systems', *IEE Proc. Gener. Transm. Distrib.* **6**(151), 747–754.

- Burchett, R. C., Happ, H. H. & Vierath, D. R. (1984), ‘Quadratically convergent optimal power flow’, *IEEE Transaction on PAS* **103**, 3267–3275.
- Carpentier, J. (1962), ‘Contribution a l’estude du dispatching economique’, *Bulletin de la Societe Francaise des Electriciens* **3**, 431–447.
- Carvalho, M. F., Soares, S. & Ohishi, T. (1988), ‘Optimal active power dispatch by network flow approach’, *IEEE Transactions on Power Systems* **3**(3), 1640–1647.
- Carvalho, S. M. S. (2007), Métodos de Pontos Interiores Aplicados Pré-Despacho de um Sistema Hidroelétrico com Manobras Programadas, PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas, Campinas – SP.
- Chiavegato, F. G., Oliveira, A. R. L. & Soares, S. (2001), ‘Pré-despacho de sistemas de energia elétrica via relaxação Lagrangeana e métodos de pontos interiores’, *Anais do XXII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE, Campinas SP, CIL110* pp. 1–24.
- Clements, K., Davis, P. & K.D.Frey (1991), ‘An interior point algorithm for weighted least absolute value power system state estimation’, *IEEE/PES Winter Weeting* **91**, WM235–2PWRS.
- Dikin, I. I. (1967), ‘Iterative solution of problems of linear and quadratic programming’, *Soviets Math. Doklady* **8**, 674–675.
- Dommel, H. W. & Tinney, W. F. (1968), ‘Optimal power flow solution’, *IEEE Transactions on PAS* **87**, 1866–1876.
- Fiacco, A. V. & McCormick, G. P. (1968), ‘Nonlinear programming: sequential unconstrained minimization techniques’, *In John Willey Sons, Inc.* .
- Frisch, K. R. (1955), ‘The logarithmic potential method of convex programming’, *Technical report, University Institute of Economics, Oslo* .

- Golub, G. H. & Van Loan, C. F. (1989), *Matrix Computations 2nd Edition*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland.
- Gondzio, J. (1996), 'Multiple centrality corrections in a primal-dual method for linear programming', *Computational Optimization and Applications* **6**, 137–156.
- Granville, S. (1994), 'Optimal reactive power dispatch through interior point methods', *IEEE Transactions on Power Systems* **9**(1), 136–146.
- Granville, S., Lima, M. C., Lima, L. C. & Prado, S. (1991), 'Planvar - an optimization software for var sources planning', *Symposium in Mathematical Programming - Amsterdam* .
- J. A. Momoh, M. E. E.-H. & Adapa, R. (1999), 'A review of selected optimal power flow literature to 1993, part II Newton, linear programming and interior point methods', *IEEE Transactions on Power Systems* **14**(1), 105–111.
- Karmarkar, N. (1984), 'A new polynomial-time algorithm for linear programming', *Combinatorica* **4**(4), 373–395.
- Khachian, L. G. (1979), 'Polynomial algorithms in linear programming', *Soviet Mathematics Doklady* **20**, 191–194.
- Kojima, M. (1996), 'Basics lemmas in polynomial-time infeasible-interior-point methods for linear programming', *Annals of Operations Research* **62**, 1–28.
- Kojima, M., Mizuno, S. & Yoshise, A. (1989), A primal–dual interior point algorithm for linear programming, in N. Megiddo, ed., 'Progress in Mathematical Programming: Interior Point and Related Methods', Springer Verlag, New York, pp. 29–47.
- Luenberger, D. G. (1984), *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, Reading.
- Lustig, I. J., Marsten, R. E. & Shanno, D. F. (1991), 'Computational experience with a primal-dual interior-point method for linear programming', *Linear Algebra Appl.* **152**, 191–222.

- Lustig, I. J., Marsten, R. E. & Shanno, D. F. (1992), ‘On implementing Mehrotra’s predictor-corrector interior point method for linear programming’, *SIAM Journal on Optimization* **2**, 435–449.
- Megiddo, N. (1989), Pathways to the optimal set in linear programming, in N. Megiddo, ed., ‘Progress in Mathematical Programming: Interior Point and Related Methods’, Springer Verlag, New York, pp. 131–158. Identical version in: *Proceedings of the 6th Mathematical Programming Symposium of Japan, Nagoya, Japan, 1–35, 1986*.
- Mehrotra, S. (1992), ‘On the implementation of a primal-dual interior point method’, *SIAM Journal on Optimization* **2**(4), 575–601.
- Monteiro, R. D. C., Adler, I. & Resende, M. G. C. (1990), ‘A polynomial-time primal-dual affine scaling algorithm for linear and convex quadratic programming and its power series extension’, *Mathematics of Operations Research* **15**, 191–214.
- Monticelli, A., Granville, S., Viacava, N. M. C. & Pereira, M. V. F. (1986), ‘Operação Ótima de um sistema de potência com restrições de segurança: Uma aplicação de decomposição’, *Pesquisa Operacional* **6**, n.2, 79–98.
- Monticelli, A. J. (1983), ‘Fluxo de carga em redes de energia elétrica’, *Editora Edgard Blucher Ltda*.
- Murtagh, B. A. & Saunders, M. A. (1982), ‘Ga projected lagrangian algorithm and its implementation for sparse nonlinear constraints’, *Mathematical Programming Study* **16**, 84–117.
- Oliveira, A. R. L. & Soares, S. (2003), ‘Métodos de pontos interiores para problema de fluxo de potência ótimo DC’, *SBA: Controle & Automação* **14**(3), 278–285.
- Oliveira, A. R. L., Soares, S. & Nepomuceno, L. (2003), ‘Optimal active power dispatch combining network flow and interior point approaches’, *IEEE Transactions on Power Systems* **18**(4), 1235–1240.

- Oliveira, A. R. L., Soares, S. & Nepomuceno, L. (2005), 'Short term hydroelectric scheduling combining network flow and interior point approaches', *Electrical Power & Energy Systems* **27**(2), 91–99.
- Oliveira, A. R. L. & Sorensen, D. C. (2005), 'A new class of preconditioners for large-scale linear systems from interior point methods for linear programming', *Linear Algebra and Its Applications* **394**, 1–24.
- Potra, F. A. (1994), 'A quadratically convergent predictor-corrector method for solving linear programs from infeasible starting points', *Mathematical Programming* **67**, 383–406.
- Potra, F. A. & Wright, S. J. (2000), 'Interior point methods', *Journal of Computational and Applied Mathematics* **124**, 281–302.
- Quintana, V. H., Torres, G. L. & Medina-Palomo, J. (2000), 'Interior point methods and their applications to power systems: A classification of publications and software codes', *IEEE Transactions on Power Systems* **15**(1), 170–176.
- Soares, S. & Salmazo, C. T. (1997), 'Minimum loss predispach model for hydroelectric systems', *IEEE Transactions on Power Systems* **12**(3), 1220–1228.
- Sun, D. J., Ashley, B., Brewer, B., Hughes, A. & Tinney, W. F. (1984), 'Optimal power flow by newton approach', *IEEE Transaction on PAS* **103**, 2864–2880.
- Tapia, R. A. & Zhang, Y. (1992), 'Superlinear and quadratic convergence of primal-dual interior point methods for linear programming revisited', *Journal of Optimization Theory and Applications* **73**, 229–242.
- Vanderbei, R. J. (1994), LOQO: An interior point code for quadratic programming, Technical report, SOR 94-15, Princeton University, to appear in *Optimization Methods and Software*.
- Vanderbei, R. J. (1996), *Linear Programming – Foundations and Extensions*, Kluwer Academic Publishers, Boston, USA.

Vargas, L., Quintana, V. & Vannelli, A. (1993), 'A tutorial description of an interior point method and its application to security constrained economic dispatch', *IEEE Transactions on Power Systems* **11**, 1315–1324.

Wright, S. J. (1996), *Primal–Dual Interior–Point Methods*, SIAM Publications, SIAM, Philadelphia, PA, USA.

Trabalhos Publicados

- i. *Métodos de Pontos Interiores Aplicados ao Pré-Despacho com Restrições de Segurança*, L. Casacio, A. R. L. Oliveira, C. Lyra, Anais do XXXII CNMAC - Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Cuiabá - MT, Setembro, 2009, Trabalho Completo em CD-ROM.
- ii. *Métodos de Pontos Interiores Aplicados ao Pré-Despacho com Restrições de Segurança*, L. Casacio, A. R. L. Oliveira, C. Lyra, A. T. Azevedo, Anais do XLI SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Porto Seguro - BA, Setembro, 2009, Trabalho Completo em CD-ROM.
- iii. *Security Constrained optimal Dispatch via Network Flow Model*, A.R.L. Oliveira, L. Casacio, C. Lyra, Book of Abstracts of the XXIII European Conference on Operational Research, Bonn, 2009, p. 139 - 139.