
Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática Aplicada

Otimização Topológica de Mecanismos Flexíveis

Thadeu Alves Senne

Mestrado em Matemática Aplicada

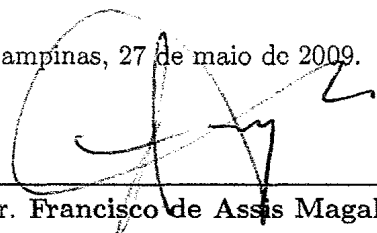
Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis Magalhães Gomes Neto

*Este trabalho teve apoio financeiro da CAPES.

Otimização Topológica de Mecanismos Flexíveis

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Thadeu Alves Senne e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 27 de maio de 2009.



Prof. Dr. Francisco de Assis Magalhães
Gomes Neto
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Francisco de Assis Magalhães Gomes Neto (IMECC/UNICAMP)

Prof^a. Dr^a. Ana Friedlander de Martínez Perez (IMECC/UNICAMP)

Prof. Dr. Cícero Ribeiro de Lima (UFABC)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Senne, Thadeu Alves

Se58o Otimização topológica de mecanismos flexíveis/Thadeu Alves Senne --
Campinas, [S.P. : s.n.], 2009.

Orientador : Francisco de Assis Magalhães Gomes Neto

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Programação não linear. 2.Otimização topológica. 3.Otimização
matemática. 4.Mecanismos flexíveis. I. Gomes Neto, Francisco de Assis
Magalhães. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

(mfbm/imecc)

Título em inglês: Topology optimization of compliant mechanisms

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Nonlinear programming. 2. Topology optimization.
3. Mathematical optimization. 4. Compliant mechanisms.

Área de concentração: Matemática Aplicada - Otimização

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. Francisco de Assis Magalhães Gomes Neto (IMECC-Unicamp)
Profª. Dra. Ana Friedlander de Martínez Perez (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Cícero Ribeiro de Lima (UFABC)

Data da defesa: 27/05/2009

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 27 de maio de 2009 e aprovada

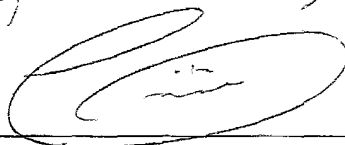
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). FRANCISCO DE ASSIS MAGALHÃES GOMES NETO



Prof. (a). Dr(a). ANA FRIEDLANDER DE MARTINEZ PEREZ



Prof. (a). Dr (a). CÍCERO RIBEIRO DE LIMA

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus a oportunidade única de estudar em uma das melhores universidades deste país, e por me iluminar, me guiar e me proteger nos momentos mais difíceis desta longa jornada. Sem Ele, eu nada seria nesta vida.

Aos meus pais, Brígida e Moacyr, sou grato do fundo do meu coração pelo amor, carinho, dedicação, compreensão, e por fazerem de tudo para que eu pudesse seguir minha caminhada com toda a fé e segurança. Sem o apoio e a confiança depositada por eles, não teria conseguido chegar até aqui. Meus pais e toda a minha família são as joias mais preciosas que tenho.

Aos meus irmãos, Líliam e Marcos, agradeço o amor, a amizade, e o apoio em todos os momentos de minha vida. Eles são minha segunda mãe e meu segundo pai.

Aos meus cunhados, José Roberto e Cássia, sou grato pelo companheirismo, pelo apoio e por também estarem sempre ao meu lado.

Aos demais familiares, em especial aos meus queridos e amados sobrinhos, Mariana e Pedro, e à minha adorada tia Amélia, agradeço o estímulo para continuar a trilhar o meu caminho, e por contribuírem para o meu sucesso.

Sou profundamente grato ao meu orientador e amigo Prof. Dr. Francisco de Assis Magalhães Gomes Neto, mais conhecido por todos como “Chico”, pela nossa parceria desde o meu terceiro ano de graduação, pela enorme confiança depositada no meu trabalho, e pela imensa disposição e paciência em solucionar minhas dúvidas.

A todos os amigos que conquistei aqui na Unicamp, meus sinceros agradecimentos pela amizade, companheirismo, e pelas valiosíssimas trocas de ideias durante os estudos.

Agradeço à CAPES o suporte financeiro deste trabalho, sem o qual não seria possível realizá-lo.

Sou grato ao Programa de Pós-Graduação do IMECC e aos funcionários da secretaria do mesmo, pelos excelentes serviços prestados.

Finalmente, agradeço à Talita Clemente Magalhães Gomes, as críticas e sugestões ao texto.

Resumo

Neste trabalho, estudamos algumas formulações possíveis para o problema de otimização topológica de um mecanismo flexível, propostas por Nishiwaki *et al.* [33], Lima [26] e Sigmund [37]. Para resolver os problemas de programação não linear associados a cada uma das formulações estudadas, usamos uma versão globalmente convergente da Programação Linear Sequencial, inspirada no trabalho de Gomes *et al.* [18], e uma versão globalmente convergente do Método das Assíntotas Móveis, desenvolvida por Svanberg [46]. Fazemos uma análise comparativa do desempenho desses dois métodos de otimização, no que diz respeito às topologias ótimas obtidas para as estruturas e ao esforço computacional para a resolução dos problemas de otimização topológica. Comparamos também a eficácia de alguns filtros espaciais propostos na literatura, que têm o papel de evitar o aparecimento de regiões semelhantes a um tabuleiro de xadrez nas topologias ótimas das estruturas.

Palavras-chave: Otimização Topológica, Mecanismos Flexíveis, Programação Não Linear.

Abstract

In this work, we study some possible formulations for the topology optimization problem of a compliant mechanism, proposed by Nishiwaki *et al.* [33], Lima [26] and Sigmund [37]. To solve the nonlinear programming problem associated to each formulation, we use a globally convergent version of the Sequential Linear Programming, inspired in the Gomes' *et al.* [18] work, and a globally convergent version of the Method of Moving Asymptotes, developed by Svanberg [46]. We make a comparative analysis of the performance of these two optimization methods, with respect to the optimum topologies obtained for the structures and to the computational effort for the resolution of the topology optimization problems. Also, we compare the efficiency of some spatial filters already proposed in the literature, used to avoid the occurrence of regions similar to a checkerboard in the optimum topology of the structures.

Key words: Topology Optimization, Compliant Mechanisms, Nonlinear Programming.

Sumário

Resumo	vii
Abstract	ix
1 Introdução	1
2 O Problema de Otimização Topológica	5
2.1 Modelo de material	6
2.2 Método de densidades (SIMP)	7
2.3 Otimização topológica de uma estrutura	8
2.3.1 Flexibilidade média	8
2.3.2 Formulação do problema de otimização topológica	9
2.4 Otimização topológica de um mecanismo flexível	11
2.4.1 Energia mútua de uma estrutura	11
2.4.2 Formulação de Nishiwaki <i>et al.</i> [33]	13
2.4.3 Formulação para o comportamento cinemático	14
2.4.4 Formulação para o comportamento estrutural	15
2.4.5 Problema de otimização multiobjetivo	16
2.4.6 Formulação de Sigmund [37]	17
3 Tratamento Numérico do Problema de Otimização Topológica	21
3.1 Método dos Elementos Finitos	21
3.1.1 Introdução	21
3.1.2 Discretização do domínio Ω	22
3.1.3 Interpolação dos deslocamentos	22
3.1.4 Elementos finitos retangulares	23
3.1.5 Matriz de deformação para elementos retangulares	25

3.1.6	Matriz de rigidez para elementos retangulares	27
3.1.7	Matriz de rigidez global	29
3.2	Problema de otimização topológica no domínio discretizado	32
3.3	Tabuleiro de xadrez	38
3.3.1	Filtro do vetor gradiente da função objetivo	40
3.3.2	Filtro da média ponderada das densidades	42
3.3.3	Filtros baseados em operadores morfológicos	43
3.3.4	Filtro do seno hiperbólico	45
4	Programação Linear Sequencial	47
4.1	Descrição do método	47
4.2	Regiões de confiança	49
4.3	Critério de aceitação ou rejeição do passo	49
4.4	Um algoritmo para a PLS	52
4.5	O algoritmo está bem definido	53
4.6	Todo ponto limite de $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ é φ -estacionário	57
4.7	O algoritmo encontra um ponto estacionário	59
5	Método das Assíntotas Móveis	67
5.1	Descrição do método	67
5.2	Método dual para resolver os subproblemas	71
5.3	Aspectos práticos do MMA	74
5.4	Versão globalmente convergente do MMA	77
5.4.1	Descrição geral do método CCSA	78
5.4.2	Escolha das funções aproximadoras	79
5.4.3	Critérios para a atualização de $\phi_i^{(k,l)}$ e $\sigma_j^{(k)}$	83
5.4.4	Algoritmo do método CCSA	85
5.4.5	Convergência global do método CCSA	85
6	Resultados Computacionais	87
6.1	Problemas testados	88
6.1.1	Exemplo 1 - Viga em balanço	88
6.1.2	Exemplo 2 - Pinça	88
6.1.3	Exemplo 3 - Inversor de deslocamentos	89
6.2	Comparação dos métodos e filtros utilizados	90

6.2.1	Resultados para a viga	91
6.2.2	Resultados para a pinça usando a formulação de Nishiwaki <i>et al.</i>	95
6.2.3	Topologias ótimas da pinça usando a formulação de Lima .	100
6.2.4	Comparação entre as formulações de Nishiwaki <i>et al.</i> e de Sigmund para a topologia ótima da pinça	103
6.2.5	Resultados para o inversor de deslocamentos usando a for- mulação de Nishiwaki <i>et al.</i>	106
6.2.6	Topologias ótimas do inversor usando a formulação de Lima	111
6.2.7	Comparação entre as formulações de Nishiwaki <i>et al.</i> e de Sigmund para a topologia ótima do inversor	113
6.3	Discussão sobre os resultados obtidos	116
Conclusão		119
Referências Bibliográficas		121

Capítulo 1

Introdução

Muitos problemas de otimização estrutural consistem em obter uma estrutura que seja o mais rígida possível, para que ela seja capaz de suportar a aplicação de forças externas, sem que ocorram grandes deslocamentos e deformações excessivas. Entretanto, há uma classe de estruturas que são projetadas para que haja deslocamentos em determinadas direções. Tais estruturas, denominadas *mecanismos flexíveis*, podem, por exemplo, segurar um determinado objeto, ou acionar algum dispositivo, dentre outras funções.

Um mecanismo flexível deve ter flexibilidade suficiente para produzir uma deflexão máxima num determinado ponto e numa determinada direção, mas também deve ser rígido o bastante para que possa suportar os carregamentos nele aplicados, evitando rupturas ou quebras.

De acordo com Howell [21], uma das principais vantagens de se construir um mecanismo flexível é a grande redução da quantidade de componentes necessários para a sua montagem, pois ele não inclui juntas articuláveis ou pinos. Sendo assim, eles são menos suscetíveis ao desgaste e ao atrito e dispensam lubrificação. Conforme Lima [26], os mecanismos flexíveis fazem parte de vários aparelhos que envolvem mecânica de precisão, como, por exemplo, alguns componentes de máquinas fotográficas, o cabeçote leitor de um disco rígido de um computador e instrumentos cirúrgicos, como garras, pinças ou tesouras.

Sigmund [37], Howell [21], Larsen *et al.* [25], entre outros, fazem referência a uma das aplicações mais frequentes dos mecanismos flexíveis, que é a fabricação de sistemas microeletromecânicos (MEMS, sigla em Inglês), que possuem circuitos eletrônicos acoplados e são produzidos em escala micrométrica, através

de técnicas e de processos usados na construção de circuitos integrados para computadores. Segundo Lima [26], os MEMS também têm aplicações nas áreas industrial e biomédica, como, por exemplo, em equipamentos para laparoscopia, que é um processo cirúrgico onde o interior da cavidade abdominal é visualizado através da inserção de pequenas cânulas de metal. Howell [21] destaca vários exemplos de mecanismos flexíveis que são usados no cotidiano, como, por exemplo, cliques para papel, prendedores para alças de mochila e cortadores de unhas, mostrados na Figura 1.1.

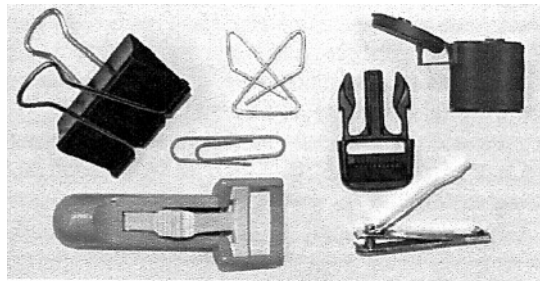


Figura 1.1: Mecanismos flexíveis usados no cotidiano: cliques para papel, prendedor para alça de mochila, alongador de cílios e cortador de unhas. (Figura extraída de Howell [21]).

A Figura 1.2 mostra um exemplo de um mecanismo flexível que representa uma pinça. Esse mecanismo sofre uma deformação quando aplicamos uma força $\mathbf{F}_1$, fazendo com que ele entre em contato com um determinado objeto. A força $\mathbf{F}_1$ em questão é transmitida por toda a pinça, gerando uma força $\mathbf{F}_2$ no local onde ocorre esse contato.

Neste trabalho, estudamos a formulação física do problema de otimização topológica para o projeto de um mecanismo flexível e implementamos dois métodos de otimização amplamente utilizados na literatura sobre o problema em questão, que são a Programação Linear Sequencial (Nishiwaki *et al.* [33], Lima [26], Sigmund [37]) e o Método das Assíntotas Móveis (Svanberg [42], [45], [46]). No próximo capítulo, fazemos uma introdução ao problema de otimização topológica e descrevemos a formulação desse tipo de problema para a determinação da topologia de uma estrutura rígida e de um mecanismo flexível. O tratamento numérico do problema em questão, que consiste na aplicação do Método dos Elementos Finitos e na descrição de uma estratégia para evitar instabilidades numéricas, é discutido no Capítulo 3. No Capítulo 4, propomos uma versão globalmente convergente de um algoritmo baseado na Programação Linear Se-

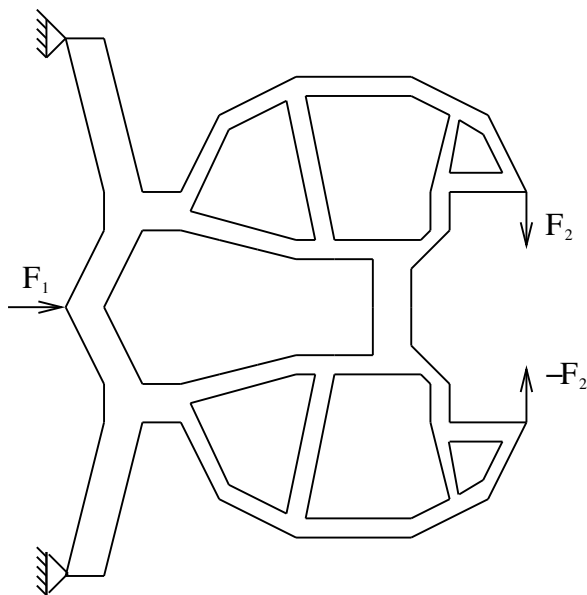


Figura 1.2: Configuração de uma pinça.

quencial. Já no Capítulo 5, descrevemos duas versões do Método das Assíntotas Móveis, uma delas sendo globalmente convergente. Finalmente, no Capítulo 6, apresentamos os resultados obtidos com a aplicação à problemas reais das formulações abordadas aqui usando os dois métodos de otimização estudados, bem como uma análise comparativa dessas formulações e dos métodos em questão.

Capítulo 2

O Problema de Otimização Topológica

Neste trabalho, estudamos a aplicação da *otimização topológica* para obter mecanismos flexíveis. A otimização topológica é um método computacional desenvolvido originalmente com o objetivo de obter uma estrutura que seja o mais rígida possível e que satisfaça certas condições como, por exemplo, conter uma quantidade máxima de material. A estrutura a ser projetada deve estar contida em um domínio Ω , sujeita à aplicação de forças externas e à imposição de alguns apoios, que são responsáveis pela sua sustentação. Cada um dos pontos desse domínio pode ser vazio ou sólido. Entretanto, em termos computacionais, é extremamente complicado fazer com que cada ponto de Ω assuma apenas essas duas configurações. Sendo assim, para simplificar a resolução do problema, é permitido que esses pontos assumam estágios intermediários entre vazio e sólido.

Antes do surgimento da otimização topológica, foram desenvolvidas outras abordagens que permitem melhorar o desempenho de uma estrutura. Na *otimização paramétrica* (vide Vanderplaats [47]), a partir de uma estrutura conhecida, procura-se otimizar um determinado parâmetro, que pode ser, por exemplo, a área da seção transversal ou a espessura de uma viga, de maneira que ela seja o mais rígida possível. Outra estratégia conhecida é a *otimização de forma* (vide Haftka e Grandhi [19]), na qual, a partir de uma estrutura conhecida, procura-se otimizar o seu contorno. Neste caso, as variáveis de projeto são os pontos de controle de curvas interpoladoras do tipo *spline* que representam uma parametrização do contorno da estrutura. Nessa abordagem, o formato da estrutura é modificado a

cada iteração do processo de otimização.

Ao contrário das duas estratégias citadas acima, quando a otimização topológica é adotada, não é necessário conhecer previamente o formato da estrutura. Devemos definir apenas o domínio no qual a estrutura deve ser construída, a quantidade disponível de material, as forças externas aplicadas e os apoios. A topologia ótima da estrutura é determinada pela distribuição do material dentro do domínio.

Quando Bendsoe e Kikuchi [7] desenvolveram um algoritmo computacional para resolver problemas de otimização topológica, baseado nos trabalhos de Michell [31], o objetivo era obter o formato ótimo de componentes estruturais de tal maneira que a rigidez fosse máxima e que o volume fosse mínimo. Desde então, a otimização topológica ganhou destaque e popularidade na academia e na indústria, principalmente nos setores automobilístico, aeroespacial e de componentes mecânicos e eletrônicos (como os MEMS).

2.1 Modelo de material

Durante a resolução do problema de otimização topológica, é preciso decidir em quais pontos do domínio Ω haverá material. Dessa forma, a topologia ótima pode ser representada por uma função discreta $\chi(x)$, definida em cada ponto $x \in \Omega$ como

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \Omega_D, \\ 0, & \text{se } x \in \Omega \setminus \Omega_D, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $\Omega_D \subset \Omega$ é a região da estrutura onde há presença de material.

O uso da função discreta dada por (2.1) torna mal condicionado o problema numérico a ser resolvido, devido à mudança brusca do valor das variáveis de projeto. Uma alternativa para evitar este inconveniente é permitir que as variáveis de projeto assumam valores intermediários entre 0 e 1, substituindo a função discreta (2.1) por uma função contínua $\rho : \Omega \rightarrow [0, 1]$ que represente a *densidade* de material em cada ponto $x \in \Omega$. A introdução dessa função ρ pode ser feita de maneira conveniente utilizando o *método de densidades*, que é apresentado a seguir.

2.2 Método de densidades (SIMP)

Ao adotar uma função contínua ρ para descrever a distribuição de material em Ω , passa a ser possível a existência de regiões com densidades intermediárias, ou seja, densidades cujos valores pertencem ao intervalo $(0, 1)$. O uso dessa função ρ permite encontrar uma solução para o problema de otimização topológica, mas dificulta a interpretação física da topologia ótima encontrada para a estrutura, já que não será utilizado um material diferente em cada ponto da estrutura, para representar um valor de ρ entre 0 e 1. Para evitar esse problema, Bendsoe [5] introduziu o *método de densidades*, ou *Solid Isotropic Material with Penalization* (SIMP), no qual, em lugar de ρ , utiliza-se a função ρ^p para controlar a distribuição de material, onde $p > 1$ é um parâmetro de penalização responsável pela diminuição da ocorrência das densidades intermediárias.

A Figura 2.1 ilustra o comportamento das densidades penalizadas em função do aumento do fator p . Observando este gráfico, notamos que, à medida que o valor de p aumenta, as densidades ficam cada vez mais próximas de 0.

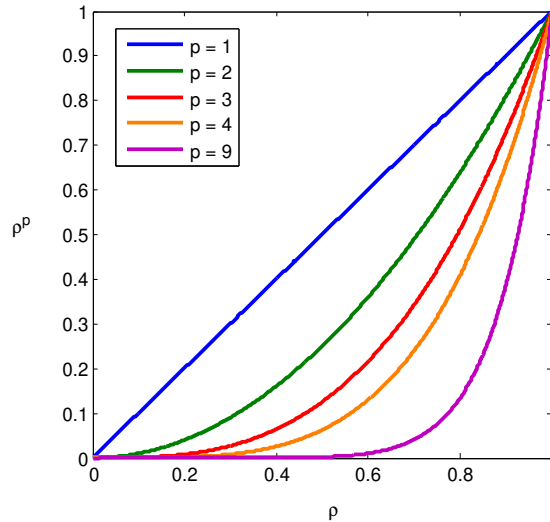


Figura 2.1: Efeito do aumento do fator de penalização p do SIMP sobre as densidades.

Rietz [36] adverte que, na prática, deve-se tomar cuidado com a penalização excessiva das densidades intermediárias (fator p muito alto), pois, à medida que aumentamos o valor de p , aproximamos cada vez mais o problema contínuo de um

problema discreto, fazendo com que reapareça a instabilidade numérica gerada pela variação brusca dos valores das densidades.

Nas próximas seções, introduziremos as formulações para os problemas de otimização topológica de uma estrutura e de um mecanismo flexível.

2.3 Otimização topológica de uma estrutura

O objetivo deste trabalho é estudar algumas formulações para o problema de otimização topológica de mecanismos flexíveis. Entretanto, para facilitar a compreensão do comportamento físico desses mecanismos, apresentaremos, nesta seção, uma formulação matemática para um problema de otimização topológica mais simples, que consiste em obter a estrutura mais rígida que pode ser construída a partir do volume de material disponível, suportando os carregamentos aplicados atendendo às condições de contorno do problema.

A rigidez de uma estrutura está associada ao conceito de *flexibilidade média*, de tal forma que a estrutura mais rígida corresponde àquela que apresenta a menor flexibilidade. Portanto, a formulação matemática de um problema de otimização topológica estrutural terá como objetivo minimizar a flexibilidade média da estrutura, atendendo às restrições de volume do material e garantindo que o corpo esteja em equilíbrio estático.

2.3.1 Flexibilidade média

Considere um corpo elástico em um domínio Ω , que deve ser mantido fixo em uma região Γ_d , conforme mostra a Figura 2.2. e que é submetido à aplicação de um carregamento $\mathbf{t}^1$ na região Γ_{t^1} .

O carregamento aplicado ao corpo gera um campo de deslocamentos $\mathbf{u}^1 = [u_1^1 \ u_2^1]^T$. Cada componente do vetor $\mathbf{u}^1$ deve ser uma função pertencente a um conjunto de *funções admissíveis*, definido por

$$V = \{v_i \in H^1(\Omega) \mid v_i = 0 \text{ em } \Gamma_d, \ i = 1, 2\}, \quad (2.2)$$

onde $H^1(\Omega)$ denota o espaço vetorial das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\left[\int_{\Omega} f^2 d\Omega \right]^{1/2} < \infty \quad \text{e} \quad \left[\int_{\Omega} \|\nabla f\|^2 d\Omega \right]^{1/2} < \infty.$$

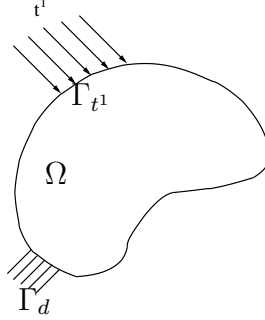


Figura 2.2: Corpo submetido à aplicação de um carregamento $\mathbf{t}^1$ e mantido fixo numa região Γ_d de Ω .

Em outras palavras, o conjunto de funções admissíveis é composto por funções diferenciáveis e quadrado-integráveis definidas em Ω que se anulam na região Γ_d .

Quando uma estrutura é submetida à situação de carregamento ilustrada pela Figura 2.2, consideramos a *flexibilidade média* como sendo a energia de deformação armazenada pela estrutura quando o carregamento $\mathbf{t}^1$ é aplicado na região Γ_{t^1} , definida por

$$L^1(\mathbf{u}^1) = \int_{\Gamma_{t^1}} \mathbf{t}^1 \cdot \mathbf{u}^1 \, d\Gamma \quad \text{para } \mathbf{u}^1 \in V. \quad (2.3)$$

A flexibilidade média é a função objetivo do problema de otimização topológica de uma estrutura rígida, que é apresentada a seguir.

2.3.2 Formulação do problema de otimização topológica

Uma estrutura mantida fixa em uma área de sua superfície (como no caso ilustrado na Figura 2.2) sofre deformação quando aplicamos um carregamento externo. O trabalho interno associado a essa deformação é dado pela forma bilinear $a : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega, \quad \mathbf{v} \in V, \quad (2.4)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}$ é um tensor de deformações, $\mathbf{C}$ é um tensor de elasticidade simétrico associado às propriedades do material que compõe a estrutura em questão, e V é o conjunto de funções admissíveis definido em (2.2).

O trabalho realizado pelo carregamento externo aplicado à estrutura é definido

pela forma linear $b : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$b(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma, \quad \mathbf{v} \in V, \quad (2.5)$$

onde Γ é a fronteira do domínio Ω .

Usando (2.4) e (2.5), a energia potencial total da estrutura é definida por um funcional $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$\Pi = \frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in V. \quad (2.6)$$

Se $\mathbf{u}^1 \in V$ é o campo de deslocamentos associado à aplicação do carregamento $\mathbf{t}^1$ na estrutura, através do cálculo dos pontos estacionários do funcional (2.6), pode-se mostrar que a condição de equilíbrio estático da estrutura é dada por

$$a(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^1) = b(\mathbf{u}^1). \quad (2.7)$$

Substituindo (2.3) em (2.7), obtemos

$$a(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^1) = L^1(\mathbf{u}^1). \quad (2.8)$$

Portanto, quando a estrutura está em equilíbrio estático, o trabalho interno devido à deformação da estrutura é igual à sua flexibilidade média.

Em geral, quando construímos uma estrutura, temos uma quantidade limitada de material disponível. Dessa forma, devemos impor uma restrição sobre o volume máximo que essa estrutura deve ter. Denotando por $\Omega_{\max}$ esse volume máximo, devemos ter

$$\int_{\Omega} \rho(x) \, d\Omega \leq \Omega_{\max}, \quad (2.9)$$

onde $\rho : \Omega \rightarrow [0, 1]$ é a função de densidade que representa a quantidade de material usada para construir a estrutura.

Portanto, para obtermos a estrutura ótima, o objetivo do problema deve ser maximizar a rigidez da estrutura, o que é equivalente a minimizar a sua flexibilidade média. Uma vez que a estrutura deve estar em equilíbrio estático e levando em conta que a quantidade de material para construí-la é limitada, obtemos o seguinte problema de otimização topológica:

$$\begin{aligned} \min_{\rho} \quad & L^1(\mathbf{u}^1) \\ \text{s. a} \quad & a(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^1) = L^1(\mathbf{u}^1), \quad \mathbf{u} \in V \\ & \int_{\Omega} \rho(x) \, d\Omega \leq \Omega_{\max} \\ & 0 \leq \rho(x) \leq 1, \quad \forall x \in \Omega. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Na próxima seção, introduziremos o problema de otimização topológica de um mecanismo flexível.

2.4 Otimização topológica de um mecanismo flexível

Conforme dissemos anteriormente, um mecanismo flexível deve ser rígido o suficiente para que ele seja capaz de suportar a aplicação de carregamentos externos, mas deve ser flexível o bastante para produzir um deslocamento máximo num ponto e numa direção de interesse. Diante dessas duas características antagônicas, torna-se necessário o desenvolvimento de duas formulações distintas para representar o comportamento de um mecanismo flexível, uma das quais deve descrever o seu *comportamento cinemático*, e a outra, o seu *comportamento estrutural*. De acordo com Lima [26], o comportamento cinemático “*é a capacidade que o mecanismo possui de se movimentar ao longo de uma direção especificada*”, e o comportamento estrutural “*provê a rigidez suficiente para garantir a forma do mecanismo*”. Como vimos, a flexibilidade média de uma estrutura está relacionada ao seu comportamento estrutural. Por sua vez, o comportamento cinemático da estrutura está associado à *energia mútua*, que introduziremos a seguir.

2.4.1 Energia mútua de uma estrutura

No mesmo corpo ilustrado na Figura 2.2, que é mantido fixo na região Γ_d , consideramos agora a aplicação de um carregamento $\mathbf{t}^2$ na região Γ_{t^2} de Ω , conforme mostrado na Figura 2.3. Esse carregamento produz um campo de deslocamentos $\mathbf{u}^2 = [u_1^2 \ u_2^2]^T$.

Para definir a energia mútua, supomos que a estrutura é submetida simultaneamente aos dois casos de carregamento. A energia mútua associada ao carregamento $\mathbf{t}^1$ é a energia armazenada pela estrutura quando a região Γ_{t^1} é deformada ao longo da direção do carregamento $\mathbf{t}^1$, devido à aplicação do carregamento $\mathbf{t}^2$ em Γ_{t^2} . Analogamente, a energia mútua ao carregamento $\mathbf{t}^2$ é a energia armazenada pela estrutura quando a região Γ_{t^2} é deformada ao longo da direção do carregamento $\mathbf{t}^2$ devido à aplicação do carregamento $\mathbf{t}^1$ em Γ_{t^1} . Sendo assim,

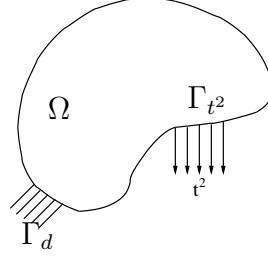


Figura 2.3: Corpo submetido à aplicação de um carregamento $\mathbf{t}^2$ e mantido fixo numa região Γ_d de Ω .

para cada um dos dois casos de carregamento em questão, as respectivas energias mútuas são definidas por

$$L^1(\mathbf{u}^2) = \int_{\Gamma_{t^1}} \mathbf{t}^1 \cdot \mathbf{u}^2 d\Gamma \quad \text{para } \mathbf{u}^2 \in V, \quad (2.11)$$

que é associada ao carregamento $\mathbf{t}^1$, e

$$L^2(\mathbf{u}^1) = \int_{\Gamma_{t^2}} \mathbf{t}^2 \cdot \mathbf{u}^1 d\Gamma \quad \text{para } \mathbf{u}^1 \in V, \quad (2.12)$$

relacionada ao carregamento $\mathbf{t}^2$.

Calculando os pontos estacionários do funcional (2.6), mostra-se que

$$a(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) = \int_{\Gamma_{t^1}} \mathbf{t}^1 \cdot \mathbf{u}^2 d\Gamma = L^1(\mathbf{u}^2) \quad (2.13)$$

e

$$a(\mathbf{u}^2, \mathbf{u}^1) = \int_{\Gamma_{t^2}} \mathbf{t}^2 \cdot \mathbf{u}^1 d\Gamma = L^2(\mathbf{u}^1), \quad (2.14)$$

ou seja, que o trabalho interno devido à deformação do mecanismo é igual à energia mútua em cada caso de carregamento ilustrado pelas Figuras 2.2 e 2.3. Quando a estrutura é submetida simultaneamente aos dois casos de carregamento em questão, mostra-se também que

$$L^1(\mathbf{u}^2) = L^2(\mathbf{u}^1), \quad (2.15)$$

ou, usando (2.13) e (2.14),

$$a(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) = a(\mathbf{u}^2, \mathbf{u}^1). \quad (2.16)$$

Portanto, (2.15) e (2.16) nos dizem que o trabalho realizado pelo carregamento $\mathbf{t}^1$ ao longo do campo de deslocamentos $\mathbf{u}^2$ da região Γ_{t^2} é igual ao trabalho

realizado pelo carregamento $\mathbf{t}^2$ ao longo do campo de deslocamentos $\mathbf{u}^1$ da região Γ_{t^1} . Este resultado é conhecido como *Teorema de Maxwell-Betti* (vide Cook e Young [16]).

No caso da otimização topológica de um mecanismo flexível, além de minimizar a flexibilidade média, para obter uma estrutura rígida que suporte a ação das forças externas, ainda é necessário maximizar a sua energia mútua. A seguir, apresentaremos as formulações de Nishiwaki *et al.* [33], de Lima [26] e de Sigmund [37] para o problema de otimização topológica de um mecanismo flexível.

2.4.2 Formulação de Nishiwaki *et al.* [33]

Em Nishiwaki *et al.* [33], foi desenvolvida uma formulação para o projeto de um mecanismo flexível que consiste na análise de dois casos distintos de carregamento. No primeiro deles, considera-se a aplicação simultânea de um carregamento $\mathbf{t}^1$ numa região Γ_{t^1} da fronteira do domínio Ω (situação mostrada na Figura 2.2) e de outro carregamento fictício unitário $\mathbf{t}^2$ numa outra região Γ_{t^2} da fronteira de Ω (conforme mostra a Figura 2.3). Para determinar uma estrutura que seja uma solução ótima deste problema, resolvemos um problema de otimização topológica que consiste em maximizar a energia mútua do mecanismo flexível, sujeita às suas condições de equilíbrio associadas aos carregamentos em questão, e a uma restrição sobre o volume máximo de material que esse mecanismo deve conter.

O segundo caso de carregamento representa um esforço de reação, aplicado na mesma região, na mesma direção, mas em sentido contrário ao do carregamento $\mathbf{t}^2$, com a condição de que o deslocamento na região Γ_{t^1} seja nulo. De acordo com Lima [26], essa restrição aos deslocamentos em Γ_{t^1} tem o papel de simular o esforço de reação em Γ_{t^1} quando o mecanismo flexível é deformado. Nesse segundo caso de carregamento, procura-se a solução para o problema de minimizar a flexibilidade média do mecanismo, sujeita à sua condição de equilíbrio associada ao esforço de reação, e à mesma restrição sobre o volume máximo, como no primeiro caso.

Se considerássemos apenas o primeiro caso de carregamento, poderíamos obter um mecanismo extremamente flexível, que teria um comportamento bastante semelhante ao de um fluido. Esse comportamento não é adequado, pois o mecanismo deve manter o seu formato quando ele é submetido à ação de carregamentos. Por outro lado, se apenas o segundo caso de carregamento fosse considerado, o

mecanismo seria extremamente rígido, de modo a impedir a sua deformação. Diante dessas duas situações conflitantes, Nishiwaki *et al.* [33] propuseram uma formulação multiobjetivo que consiste na análise dos dois casos de carregamento em um único problema de otimização, no qual a energia mútua do mecanismo é maximizada e a sua flexibilidade média é minimizada.

As subseções seguintes apresentam a formulação para os dois casos de carregamento descritos acima e, em seguida, introduzimos as formulações multiobjetivo propostas por Nishiwaki *et al.* [33] e por Lima [26].

2.4.3 Formulação para o comportamento cinemático

Considere o mecanismo flexível do domínio Ω , mostrado na Figura 2.4, que é mantido fixo na região Γ_d e está sujeito à aplicação de um carregamento $\mathbf{t}^1$ numa superfície Γ_{t^1} qualquer do domínio. O carregamento $\mathbf{t}^1$ produz um campo de deslocamentos $\mathbf{u}^1$ sobre o mecanismo. Agora, considere a aplicação de um carregamento fictício unitário $\mathbf{t}^2$ na direção e no sentido do deslocamento desejado, atuando na outra superfície Γ_{t^2} do domínio, que por sua vez gera um outro campo de deslocamentos $\mathbf{u}^2$ sobre o mecanismo. Os carregamentos $\mathbf{t}^1$ e $\mathbf{t}^2$ devem ser aplicados simultaneamente no mecanismo.

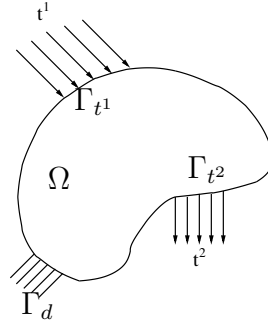


Figura 2.4: Condição de carregamento para a formulação do comportamento cinemático para um mecanismo flexível.

Conforme Nishiwaki *et al.* [33] e Lima [26], o problema de otimização para o

comportamento cinemático de um mecanismo flexível é formulado como

$$\begin{aligned}
 \max_{\rho} \quad & L^2(\mathbf{u}^1) = \int_{\Gamma_{t^2}} \mathbf{t}^2 \cdot \mathbf{u}^1 d\Gamma \\
 \text{s. a} \quad & a(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1) = L^1(\mathbf{v}^1), \quad \text{para } \mathbf{u}^1 \in V_a \text{ e } \forall \mathbf{v}^1 \in V_a \\
 & a(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2) = L^2(\mathbf{v}^2), \quad \text{para } \mathbf{u}^2 \in V_a \text{ e } \forall \mathbf{v}^2 \in V_a \\
 & \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq \Omega_{\max} \\
 & 0 \leq \rho(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega,
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

onde

$$V_a = \{v_i \in H^1(\Omega) \mid v_i = 0 \text{ em } \Gamma_d, \ i = 1, 2\}, \tag{2.18}$$

é o conjunto de deslocamentos admissíveis (vide definição análoga dada por (2.2)), $\Omega_{\max}$ é o volume máximo de material que o mecanismo flexível deve conter, e $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é a função de densidade, definida em cada ponto $x \in \Omega$.

2.4.4 Formulação para o comportamento estrutural

Considere o mecanismo flexível do domínio Ω mostrado na Figura 2.5, que é mantido fixo na região Γ_d . De acordo com Nishiwaki *et al.* [33] e Lima [26], a região Γ_{t^1} também deverá ser fixada na mesma direção onde o carregamento $\mathbf{t}_1$ é aplicado, com o objetivo de representar o esforço de reação na região Γ_{t^1} quando o mecanismo é deformado pelo carregamento $\mathbf{t}^3 = -\mathbf{t}^2$, aplicado na mesma direção e em sentido contrário ao carregamento $\mathbf{t}^2$, produzindo um campo de deslocamentos $\mathbf{u}^3 = [u_1^3 \ u_2^3]^T$. Dessa forma, o mecanismo será rígido o suficiente para que ele possa suportar os carregamentos aplicados.

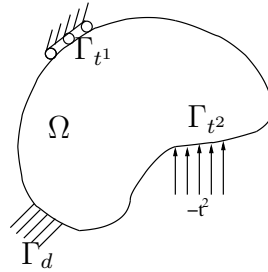


Figura 2.5: Condição de carregamento para a formulação do comportamento estrutural para um mecanismo flexível.

Segundo Nishiwaki *et al.* [33] e Lima [26], o problema de otimização associado ao comportamento estrutural de um mecanismo flexível é formulado como

$$\begin{aligned}
\min_{\rho} \quad & L^3(\mathbf{u}^3) = \int_{\Gamma_{t^1}} \mathbf{t}^3 \cdot \mathbf{u}^3 d\Gamma \\
\text{s. a} \quad & \mathbf{t}^3 = -\mathbf{t}^2 \\
& a(\mathbf{u}^3, \mathbf{v}^3) = L^3(\mathbf{v}^3), \quad \text{para } \mathbf{u}^3 \in V_b \text{ e } \forall \mathbf{v}^3 \in V_b \\
& \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq \Omega_{\max} \\
& 0 \leq \rho(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

onde $\Omega_{\max}$ representa o volume máximo de material que o mecanismo flexível deve conter, e

$$V_b = \{v_i \in H^1(\Omega) \mid v_i = 0 \text{ em } \Gamma_d \text{ e } \Gamma_{t^1}, \ i = 1, 2\} \tag{2.20}$$

é o conjunto de deslocamentos admissíveis. Note que o conjunto V_b tem uma condição adicional sobre os deslocamentos admissíveis, que significa que os deslocamentos devem ser nulos também sobre a superfície Γ_{t^1} , ou seja, que $v_i = 0$ em Γ_{t^1} , para cada $i = 1, 2$.

2.4.5 Problema de otimização multiobjetivo

Como desejamos maximizar a energia mútua $L^2(\mathbf{u}^1)$ e minimizar a flexibilidade média $L^3(\mathbf{u}^3)$ do mecanismo simultaneamente, devemos reunir as formulações para os comportamentos cinemático e estrutural para um mecanismo flexível em um único problema. Nishiwaki *et al.* [33] sugerem um problema de otimização multiobjetivo, definido como

$$\begin{aligned}
\max_{\rho} \quad & \frac{L^2(\mathbf{u}^1)}{L^3(\mathbf{u}^3)} \\
\text{s. a} \quad & \mathbf{t}^3 = -\mathbf{t}^2 \\
& a(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1) = L^1(\mathbf{v}^1), \quad \text{para } \mathbf{u}^1 \in V_a \text{ e } \forall \mathbf{v}^1 \in V_a \\
& a(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2) = L^2(\mathbf{v}^2), \quad \text{para } \mathbf{u}^2 \in V_a \text{ e } \forall \mathbf{v}^2 \in V_a \\
& a(\mathbf{u}^3, \mathbf{v}^3) = L^3(\mathbf{v}^3), \quad \text{para } \mathbf{u}^3 \in V_b \text{ e } \forall \mathbf{v}^3 \in V_b \\
& \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq \Omega_{\max} \\
& 0 \leq \rho(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

onde ρ é a variável de projeto (densidade de cada ponto do domínio Ω), $L^2(\mathbf{u}^1)$ é a energia mútua e $L^3(\mathbf{u}^3)$ é a flexibilidade média do mecanismo flexível. Cabe lembrar que os deslocamentos $\mathbf{u}^1$, $\mathbf{u}^2$ e $\mathbf{u}^3$ são funções da densidade de cada ponto de Ω , ou seja, $\mathbf{u}^1 \equiv \mathbf{u}^1(\rho)$, $\mathbf{u}^2 \equiv \mathbf{u}^2(\rho)$ e $\mathbf{u}^3 \equiv \mathbf{u}^3(\rho)$.

A função objetivo do problema (2.21), que é a razão entre a energia mútua e a flexibilidade média do mecanismo flexível, pode ser interpretada como um fator de eficiência do mecanismo, onde quanto maior esse fator, melhor será o desempenho do mecanismo.

De acordo com Lima [26], a função objetivo do problema (2.21) pode não permitir um controle eficiente sobre a energia mútua e a flexibilidade média. Sendo assim, ele sugere a atribuição de fatores de peso para cada uma dessas duas energias, de modo que o problema (2.21) é reescrito como

$$\begin{aligned}
& \max_{\rho} \quad w \log(L^2(\mathbf{u}^1)) - (1 - w) \log(L^3(\mathbf{u}^3)) \\
& \text{s. a} \quad \mathbf{t}^3 = -\mathbf{t}^2 \\
& \quad a(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1) = L^1(\mathbf{v}^1), \quad \text{para } \mathbf{u}^1 \in V_a \text{ e } \forall \mathbf{v}^1 \in V_a \\
& \quad a(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2) = L^2(\mathbf{v}^2), \quad \text{para } \mathbf{u}^2 \in V_a \text{ e } \forall \mathbf{v}^2 \in V_a \\
& \quad a(\mathbf{u}^3, \mathbf{v}^3) = L^3(\mathbf{v}^3), \quad \text{para } \mathbf{u}^3 \in V_b \text{ e } \forall \mathbf{v}^3 \in V_b \\
& \quad \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq \Omega_{\max} \\
& \quad 0 \leq \rho(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

onde $0 \leq w \leq 1$ é um fator de peso que faz com que o mecanismo seja mais flexível e menos rígido, ou vice-versa.

É muito importante lembrar que a formulação (2.22) deve ser usada com cautela, pois, se a energia mútua $L^2(\mathbf{u}^1)$ for nula ou negativa, o seu logaritmo não poderá ser calculado.

2.4.6 Formulação de Sigmund [37]

Nesta subseção, vamos apresentar a formulação para o problema de otimização topológica de um mecanismo flexível, proposta por Sigmund [37].

A Figura 2.6 mostra a aplicação de um carregamento $\mathbf{t}^1$ num ponto 1 da superfície do domínio Ω e de um carregamento fictício unitário $\mathbf{t}^2$ produzido por uma mola de rigidez k_s sobre o mecanismo num outro ponto 2 da superfície de

Ω . A região $\Gamma_d \subset \Omega$ permanece fixa. Esse carregamento $\mathbf{t}^1$ produz um campo de deslocamentos $\mathbf{u}^1 = [u_1^1 \ u_2^1]^T$ sobre o corpo, fazendo com que ele e a mola sejam deformados, e o carregamento $\mathbf{t}^2$ gera um outro campo de deslocamentos $\mathbf{u}^2 = [u_1^2 \ u_2^2]^T$ sobre o mecanismo. A formulação do problema proposto por Sigmund [37] consiste na maximização da *vantagem mecânica* do mecanismo flexível, que é definida pela razão entre a intensidade R da reação exercida pela mola sobre o mecanismo e a intensidade p_1 do carregamento $\mathbf{t}^1$, sujeita a uma restrição sobre a condição de equilíbrio do mecanismo, a uma restrição sobre o volume máximo de material que o mecanismo flexível deve conter, a uma restrição sobre os valores que as densidades podem assumir (valores entre 0 e 1), e a uma restrição sobre um limitante superior para o deslocamento no ponto 1, de acordo com a Figura 2.6.

O deslocamento Δ_{ij} , que é aquele que ocorre num ponto i do mecanismo devido à aplicação de uma força sobre ele em um outro ponto j , é dado por

$$\Delta_{ij} = \frac{\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^j)^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i) d\Omega}{p_i} = \frac{a(\mathbf{u}^j, \mathbf{u}^i)}{p_i}, \quad \text{para } i, j = 1, 2, \quad (2.23)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o tensor de deformações associados aos deslocamentos provocados pela aplicação de carregamentos de intensidade p_i , e $\mathbf{C}$ é o tensor de elasticidade do material que constitui o mecanismo flexível. Lembramos que o tensor $\mathbf{C}$ é simétrico e que, se $i = j$, $a(\mathbf{u}^j, \mathbf{u}^i)$ é a flexibilidade média do mecanismo e, se $i \neq j$, $a(\mathbf{u}^j, \mathbf{u}^i)$ é a sua energia mútua.

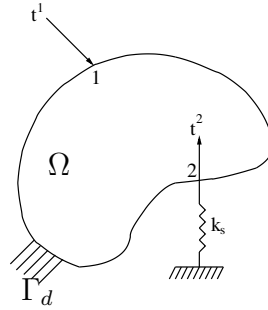


Figura 2.6: Ilustração da aplicação de um carregamento $\mathbf{t}^1$ num mecanismo flexível e da reação $\mathbf{t}^2$ exercida por uma mola de rigidez k_s sobre o mecanismo.

Conforme Sigmund [37], a intensidade da força de reação exercida pela mola sobre o mecanismo é dada por

$$R = \Delta_{\text{mola}} k_s = c p_2, \quad (2.24)$$

onde Δ_{mola} é o deslocamento da mola, k_s é a rigidez da mola, e c é um fator tal que Δ_{mola} seja uma superposição dos deslocamentos Δ_{21} e Δ_{22} no caso onde o material tem um regime elástico linear, ou seja,

$$\Delta_{21} - c \Delta_{22} = \Delta_{\text{mola}}. \quad (2.25)$$

De (2.24) e (2.25), vem

$$c = \frac{\Delta_{21} - \Delta_{\text{mola}}}{\Delta_{22}} = \frac{\Delta_{21} - R/k_s}{\Delta_{22}}. \quad (2.26)$$

Substituindo (2.26) em (2.24), obtemos

$$R = p_2 \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{22} + p_2/k_s}. \quad (2.27)$$

Portanto, a vantagem mecânica do mecanismo é dada por

$$M = \frac{R}{p_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{22} + p_2/k_s}. \quad (2.28)$$

O deslocamento Δ_{in} no local de aplicação do carregamento $\mathbf{t}^1$ sobre o mecanismo é definido como o deslocamento na direção dessa força. No caso de elasticidade linear, Δ_{in} pode ser obtido como uma superposição dos deslocamentos Δ_{11} e Δ_{12} , ou seja,

$$\Delta_{in} = \Delta_{11} - c \Delta_{12}, \quad (2.29)$$

onde c é o fator dado por (2.26).

De acordo com Sigmund [37], após a análise feita acima, obtemos o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \max_{\rho} \quad & \frac{p_2}{p_1} \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{22} + p_2/k_s} \\ \text{s. a} \quad & \Delta_{11} - c \Delta_{12} \leq \Delta_{in}^* \\ & a(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1) = L^1(\mathbf{v}^1), \quad \text{para } \mathbf{u}^1 \in V_a \text{ e } \forall \mathbf{v}^1 \in V_a \\ & a(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2) = L^2(\mathbf{v}^2), \quad \text{para } \mathbf{u}^2 \in V_a \text{ e } \forall \mathbf{v}^2 \in V_a \\ & \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq \Omega_{\max} \\ & 0 \leq \rho(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega, \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde Δ_{in}^* é o valor máximo que o deslocamento Δ_{in} pode assumir, $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ é a forma bilinear que representa o trabalho interno do mecanismo flexível (introduzido em (2.4)), $L^i(\mathbf{v}^i)$, $i = 1, 2$ é a flexibilidade média associada à cada

força ilustrada pela Figura (2.6), V_a é o espaço linear admissível introduzido no problema (2.17), $\Omega_{\max}$ é o volume máximo que o mecanismo flexível ótimo pode assumir, e ρ é a função de densidade utilizada no projeto do mecanismo. Analogamente aos problemas (2.21) e (2.22), temos $\mathbf{u}^1 \equiv \mathbf{u}^1(\rho)$ e $\mathbf{u}^2 \equiv \mathbf{u}^2(\rho)$.

No próximo capítulo, discutiremos sobre o tratamento numérico dos problemas de otimização topológica apresentados aqui.

Capítulo 3

Tratamento Numérico do Problema de Otimização Topológica

3.1 Método dos Elementos Finitos

3.1.1 Introdução

Até agora, a formulação do problema de otimização topológica de uma estrutura ou de um mecanismo flexível foi considerada num domínio Ω , que é um meio contínuo. Na prática, a resolução do problema em tal meio é extremamente complicada, pois envolve a resolução de um problema de otimização em um espaço de dimensão infinita. Para resolvê-lo numericamente, aplicamos o *Método dos Elementos Finitos* (veja, por exemplo, Cook *et al.* [15], Liu e Quek [27] e Zienkiewicz *et al.* [48]), que é o procedimento numérico mais conhecido e aplicado em problemas de análise de esforços em um corpo. Neste método, o problema em questão é *discretizado*, ou seja, o meio contínuo Ω é transformado em um meio discreto Ω^h , através da subdivisão de Ω em um número finito de regiões, denominadas *elementos finitos*.

Neste trabalho, os problemas de otimização topológica são bidimensionais, ou seja, a espessura da estrutura ou do mecanismo flexível é considerada constante.

3.1.2 Discretização do domínio Ω

A aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF) inicia-se com a discretização do domínio Ω (que é originalmente um meio contínuo) em um número finito de elementos. O conjunto formado por eles é chamado de *malha*. Pode-se gerar uma malha de elementos finitos composta por diferentes tipos de elementos. A escolha da quantidade de elementos que irão compor o domínio discretizado Ω^h depende da precisão exigida para a solução aproximada do problema e dos recursos computacionais disponíveis. Geralmente, uma malha mais fina (ou seja, uma malha com um número suficientemente “grande” de elementos) resulta em uma aproximação mais precisa, mas com um custo computacional maior. Em muitos problemas, é necessário gerar uma malha não uniforme, aplicando um refinamento nas áreas do domínio onde o grau de precisão deve ser maior para uma análise adequada do problema.

A seguir, veremos como são calculados os deslocamentos provocados pela aplicação de forças externas num elemento finito.

3.1.3 Interpolação dos deslocamentos

Em cada um dos pontos de um elemento finito, os deslocamentos produzidos pela aplicação de forças externas em uma estrutura devem ser aproximados por uma interpolação polinomial. Os pontos usados nessa interpolação são os *nós* da malha de elementos finitos. Os deslocamentos que ocorrem em cada nó são os *deslocamentos nodais*. Num ponto interior ao elemento, o deslocamento pode ser dado como uma combinação linear dos deslocamentos nodais do elemento em questão, ou seja,

$$\mathbf{u}^{(e)}(x, y) = \sum_{i=1}^{n_f} \mathbf{N}_i(x, y) \hat{\mathbf{u}}_i^{(e)} = \mathbf{N}(x, y) \hat{\mathbf{u}}^{(e)}, \quad (3.1)$$

onde x e y são as coordenadas cartesianas de um ponto do interior do elemento, $\mathbf{u}^{(e)}(x, y)$ é o deslocamento aproximado nesse ponto, n_f é o número de nós do elemento em questão, $\mathbf{N}_i$ é a *função de forma* (ou *função de interpolação*) associada aos deslocamentos nodais do i -ésimo nó, e $\hat{\mathbf{u}}^{(e)}$ é o deslocamento nodal do nó i . Esse deslocamento nodal pode ser expresso de maneira geral como $\hat{\mathbf{u}}_i^{(e)} = [\hat{u}_{i,1}^{(e)} \ \hat{u}_{i,2}^{(e)} \ \dots \ \hat{u}_{i,n_d}^{(e)}]^T$, onde n_d é o número de *graus de liberdade* em um

nó. Portanto, o número total de graus de liberdade para um elemento é igual a $n_f \times n_d$. É importante lembrar que as componentes dos deslocamentos podem representar rotações e translações. O vetor $\hat{\mathbf{u}}^{(e)}$ em (3.1) é o vetor de deslocamentos para o elemento como um todo, e tem a forma $\hat{\mathbf{u}}^{(e)} = [\hat{\mathbf{u}}_1^{(e)} \ \hat{\mathbf{u}}_2^{(e)} \ \dots \ \hat{\mathbf{u}}_{n_f}^{(e)}]^T$.

As funções de forma dependem do tipo de elemento finito adotado. Para elementos finitos retangulares, que são usados neste trabalho, tais funções são descritas a seguir.

3.1.4 Elementos finitos retangulares

Neste trabalho, consideramos que as estruturas e os mecanismos flexíveis devem estar contidos em um domínio retangular ou em um domínio composto pela união de regiões retangulares. Sendo assim, optamos por trabalhar com elementos finitos retangulares. Esse tipo de elemento não é usado para discretizar domínios com fronteiras de formatos mais genéricos.

Em particular, adotamos, neste trabalho, elementos finitos retangulares com quatro nós, todos eles localizados nos seus vértices, e com dois graus de liberdade por nó (deslocamentos na horizontal e na vertical). Neste caso, as funções aproximadoras para os deslocamentos no interior de um elemento retangular são polinômios bilineares, ou seja,

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad (3.2)$$

e

$$v(x, y) = b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy, \quad (3.3)$$

onde x, y são as coordenadas de um ponto do elemento finito retangular, $u(x, y)$ é a interpolação para os deslocamentos na horizontal, e $v(x, y)$ é a interpolação para os deslocamentos na vertical.

Para obter as equações do MEF para os elementos, é conveniente adotar um *sistema de coordenadas local*, que é definido para cada elemento. Posteriormente, estas equações são combinadas usando um sistema global de coordenadas, que é definido para todo o domínio.

A formulação dos elementos finitos retangulares fica mais simples se considerarmos um sistema de coordenadas local (ξ, η) cuja origem localiza-se no bari-centro do elemento, conforme mostra a Figura 3.1.

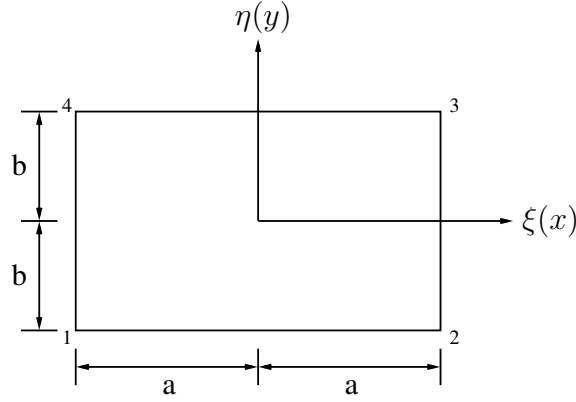


Figura 3.1: Elemento finito retangular de quatro nós.

Como se observa na Figura 3.1, as dimensões de um elemento finito retangular são $2a \times 2b \times h$, onde a é a distância entre o nó 1 e o ponto médio da base do retângulo, b é a distância entre o nó 1 e o ponto médio da altura do retângulo, e h é a espessura (constante) do elemento. A espessura h do elemento finito retangular não é mostrada na Figura 3.1 por simplicidade. As relações entre as coordenadas globais (x, y) e as coordenadas locais (ξ, η) são dadas por

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}. \quad (3.4)$$

A numeração dos nós deve ser iniciada no canto inferior esquerdo do elemento, prosseguindo no sentido anti-horário, conforme mostra a Figura 3.1.

Após definir as coordenadas locais como em (3.4), podemos re-escrever (3.2) e (3.3), respectivamente, como

$$u(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta) u_1 + N_2(\xi, \eta) u_2 + N_3(\xi, \eta) u_3 + N_4(\xi, \eta) u_4$$

e

$$v(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta) v_1 + N_2(\xi, \eta) v_2 + N_3(\xi, \eta) v_3 + N_4(\xi, \eta) v_4,$$

onde u_i , $i = 1, \dots, 4$ são os deslocamentos nodais na direção horizontal, v_i , $i = 1, \dots, 4$ são os deslocamentos nodais na direção vertical, $N_i(\xi, \eta)$ são as funções de forma, definidas por

$$N_i(\xi, \eta) = L_i(\xi) L_i(\eta), \quad i = 1, \dots, 4, \quad (3.5)$$

e cada L_i é um polinômio de Lagrange de uma única variável, satisfazendo

$$L_i(z_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } j = i, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $z_j = \xi_j$ ou η_j , conforme o caso.

Para o elemento da Figura 3.1, L_1 varia linearmente entre os nós 1 e 2, preservando a continuidade C^0 ao longo da aresta 1-2. Observações análogas valem para as arestas 2-3, 3-4 e 4-1. Logo, usando a equação (3.5) e observando a Figura 3.1, obtemos

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= L_1(\xi) L_1(\eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2(\xi, \eta) &= L_2(\xi) L_2(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= L_3(\xi) L_3(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4(\xi, \eta) &= L_4(\xi) L_4(\eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \tag{3.6}$$

As funções de forma (3.6) são chamadas *bilineares* porque cada fator é uma função linear de uma coordenada local.

Vejamos, agora, como as deformações de um elemento finito retangular são calculadas.

3.1.5 Matriz de deformação para elementos retangulares

Sabemos que as deformações em cada ponto de um sólido bidimensional são expressas por

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{3.7}$$

ou, em forma matricial,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}^{(e)}, \tag{3.8}$$

onde $\mathbf{u}^{(e)}$ é dado por (3.1) e $\mathbf{L}$ é uma matriz de operadores diferenciais, que pode ser escrita simplesmente como

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

Substituindo (3.1) em (3.8), encontramos

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{L}\mathbf{N}\hat{\mathbf{u}}^{(e)} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}^{(e)}, \quad (3.9)$$

onde

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N} \quad (3.10)$$

é denominada *matriz de deformação*.

Note que (3.9) nos diz que as deformações são expressas em função dos deslocamentos nodais do elemento. É importante lembrar que as relações (3.9) e (3.10) podem ser aplicadas em qualquer tipo de elemento finito bidimensional.

Para o elemento finito retangular de quatro nós adotado neste trabalho, a matriz $\mathbf{N}$ das equações (3.9) e (3.10) tem a forma

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

onde N_i , $i = 1, \dots, 4$, são as funções de forma descritas por (3.6).

Usando (3.6), (3.10) e (3.11), obtemos a matriz de deformação associada aos elementos retangulares em questão:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1-\eta}{a} & 0 & \frac{1-\eta}{a} & 0 & \frac{1+\eta}{a} & 0 & -\frac{1+\eta}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{1-\xi}{b} & 0 & -\frac{1+\xi}{b} & 0 & \frac{1+\xi}{b} & 0 & \frac{1-\xi}{b} \\ -\frac{1-\xi}{b} & -\frac{1-\eta}{a} & -\frac{1+\xi}{b} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{1+\xi}{b} & \frac{1+\eta}{a} & \frac{1-\xi}{b} & -\frac{1+\eta}{a} \end{bmatrix}.$$

Mostraremos, a seguir, como encontrar os deslocamentos nodais de um elemento finito, que são produzidos pela aplicação de forças externas numa estrutura.

3.1.6 Matriz de rigidez para elementos retangulares

Neste trabalho, supomos que o material que compõe as estruturas ou os mecanismos flexíveis seja isotrópico (ou seja, as propriedades do material não dependem da direção) e que ele esteja em um regime elástico linear. Quando essas hipóteses são válidas, a relação entre tensões $\boldsymbol{\sigma}$ e deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$ é descrita pela *Lei de Hooke*, ou seja,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.12)$$

onde $\mathbf{C}$ é uma matriz que contém os parâmetros de elasticidade do material do elemento. Supomos também que o corpo esteja num *estado plano de tensões*, ou seja, o corpo tem uma espessura muito pequena e as tensões atuam apenas no plano desse corpo (veja, por exemplo, Assan [1]). Neste caso, a matriz $\mathbf{C}$ que aparece em (3.12) é dada por

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix},$$

onde E é o *módulo de Young* (ou *módulo de elasticidade*) do material e ν é o respectivo *coeficiente de Poisson*, que é definido como a razão entre as deformações lateral e axial do material. Convém lembrar que $E > 0$ e que $0 < \nu < 1$.

Sabemos, de (2.6), que a energia potencial total de um elemento finito é dada por

$$\Pi_e = \frac{1}{2} a(\mathbf{u}^{(e)}, \mathbf{u}^{(e)}) - b(\mathbf{u}^{(e)}), \quad (3.13)$$

onde $\mathbf{u}^{(e)}$ é o vetor de deslocamentos nodais do elemento, a é a forma bilinear associada ao trabalho interno devido à deformação do elemento (definida em (2.4)) e b é a forma linear associada ao trabalho realizado pelas forças externas aplicadas ao elemento (definida em (2.5)).

Considerando que o sólido está em equilíbrio, os pontos estacionários do funcional (3.13) são aqueles em que a sua primeira variação é nula, ou seja,

$$\delta \Pi_e = \int_{\Omega_e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega_e - \int_{\Gamma_e} \delta \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{b} d\Gamma_e = 0,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega_e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega_e = \int_{\Gamma_e} \delta \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{b} d\Gamma_e, \quad (3.14)$$

onde Ω_e denota o domínio do elemento finito e , e Γ_e denota a fronteira desse elemento.

De (3.1), a primeira variação dos deslocamentos é dada por

$$\delta \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{u}}^{(e)} \quad (3.15)$$

e, de (3.9), a primeira variação das deformações é dada por

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \hat{\mathbf{u}}^{(e)}. \quad (3.16)$$

Substituindo (3.15) e (3.16) em (3.14), obtemos

$$\delta \hat{\mathbf{u}}^{(e)T} \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega_e \right] \hat{\mathbf{u}}^{(e)} = \delta \hat{\mathbf{u}}^{(e)T} \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Gamma_e. \quad (3.17)$$

Como os deslocamentos virtuais $\delta \hat{\mathbf{u}}^{(e)}$ (ou seja, a primeira variação dos deslocamentos) são arbitrários, (3.17) fica

$$\left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega_e \right] \hat{\mathbf{u}}^{(e)} = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Gamma_e.$$

Denotando por

$$\mathbf{k}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega_e, \quad (3.18)$$

e

$$\mathbf{f}^{(e)} = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Gamma_e,$$

obtemos o sistema linear

$$\mathbf{k}^{(e)} \hat{\mathbf{u}}^{(e)} = \mathbf{f}^{(e)},$$

onde $\mathbf{k}^{(e)}$ é a *matriz de rigidez do elemento*, $\hat{\mathbf{u}}^{(e)}$ é o *vetor de deslocamentos nodais do elemento* e $\mathbf{f}^{(e)}$ é o *vetor de forças nodais equivalentes do elemento*. Como usamos apenas um tipo de elemento finito neste trabalho (elementos retangulares com quatro nós), a matriz de rigidez $\mathbf{k}^{(e)}$ é a mesma para todos os elementos da malha, e é de ordem 8×8 , pois cada um dos quatro nós do elemento retangular em questão contém dois graus de liberdade (deslocamentos na horizontal e na vertical). Neste caso, temos $\mathbf{f}^{(e)} \in \mathbb{R}^8$ e $\hat{\mathbf{u}}^{(e)} \in \mathbb{R}^8$.

Sendo constante a espessura do elemento finito, vamos denotá-la h_e . Assim, podemos re-escrever (3.18) como

$$\mathbf{k}^{(e)} = \int_{A_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} h_e dA_e, \quad (3.19)$$

onde A_e é a área da maior face do elemento finito retangular.

De (3.4), temos que

$$dx dy = ab d\xi d\eta.$$

Logo, no sistema de coordenadas local (ξ, η) da Figura 3.1, (3.19) fica

$$\mathbf{k}^{(e)} = abh_e \int_{-b}^b \int_{-a}^a \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\xi d\eta. \quad (3.20)$$

Para facilitar os cálculos, neste trabalho, escolhemos $a = b = 1$.

A integral (3.20) não é tão simples de ser obtida analiticamente, pois a matriz de deformação $\mathbf{B}$ depende de ξ e de η . Na prática, usamos algum esquema de integração numérica, como, por exemplo, o esquema de integração de Gauss, obtendo uma aproximação do tipo

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} f(\xi_i, \eta_j) w_i w_j,$$

onde n_x e n_y são, respectivamente, o número de pontos usados para aproximar a integral em ξ e em η , e w_i e w_j são os pesos para cada ponto dessa aproximação.

A próxima subseção mostra como utilizar as matrizes de rigidez dos elementos e os respectivos vetores de forças nodais equivalentes para obter os deslocamentos nodais para toda a estrutura.

3.1.7 Matriz de rigidez global

Após encontrar as matrizes de rigidez para cada elemento, reunimos essas matrizes em uma única matriz $\mathbf{K}$, que representa todo o domínio discretizado. Tal matriz, denominada *matriz de rigidez global*, é uma superposição das matrizes de rigidez dos elementos. Para efetuar essa superposição de matrizes, devemos, em primeiro lugar, adotar uma convenção para a numeração dos nós e dos graus de liberdade associados a cada nó, de modo a obedecer a conectividade entre os elementos dentro do domínio. Lembramos que, neste trabalho, os domínios de todos os problemas são retangulares, ou são regiões que podem ser decompostas em dois ou mais retângulos. Sendo assim, convencionamos que a numeração dos nós e dos elementos deve começar no canto inferior esquerdo do domínio e prosseguir por colunas, de baixo para cima, de modo que o último elemento seja aquele localizado no canto superior direito do domínio.

A Figura 3.2 mostra um exemplo de domínio e ilustra a convenção para a numeração dos nós e dos elementos. O número de um elemento é apresentado no centro deste. À esquerda de cada nó, está representado o seu índice. Dessa forma, o elemento 1, por exemplo, está conectado aos nós 1, 6, 7 e 2 (exatamente nessa ordem, começando no canto inferior esquerdo do elemento e prosseguindo no sentido anti-horário).

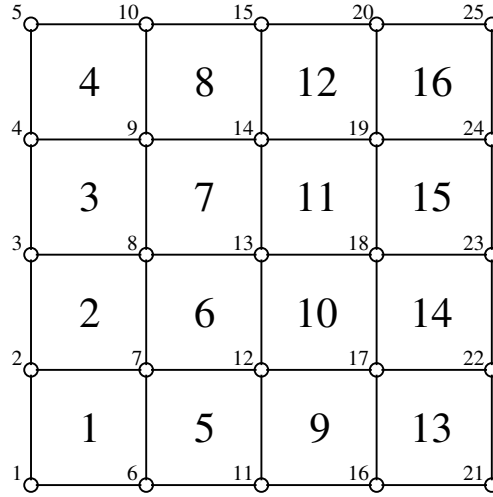


Figura 3.2: Exemplo de domínio com a numeração dos elementos e dos nós.

A dimensão da matriz de rigidez global $\mathbf{K}$ é igual ao dobro do número total de nós da malha de elementos finitos, denotado por n_n , ou seja, $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{2n_n \times 2n_n}$, pois cada nó tem dois graus de liberdade, cujos índices são $2j - 1$ (deslocamento nodal na horizontal) e $2j$ (deslocamento nodal na vertical). Definimos n_{el} como sendo o número total de elementos do domínio discretizado.

Para montar a matriz $\mathbf{K}$, devemos introduzir, para cada elemento $i = 1, \dots, n_{el}$, uma matriz $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^{2n_n \times 8}$, formada pelas colunas da matriz identidade $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2n_n \times 2n_n}$, de tal maneira que

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n_{el}} \mathbf{K}_i, \quad (3.21)$$

onde

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{P}_i \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{P}_i^T, \quad i = 1, \dots, n_{el}. \quad (3.22)$$

A seleção das colunas de $\mathbf{I}$ que farão parte de cada $\mathbf{P}_i$ deve ser feita de acordo com a numeração dos graus de liberdade de cada elemento. Por exemplo, o elemento

de número 7 da Figura 3.2 está conectado aos nós 8, 13, 14 e 9, e contém os graus de liberdade de índices 15, 16, 25, 26, 27, 28, 17 e 18, nessa ordem. Logo, a matriz $\mathbf{P}_7$, associada ao elemento 7, é dada por

$$\mathbf{P}_7 = [\mathbf{I}_{*,15} \ \mathbf{I}_{*,16} \ \mathbf{I}_{*,25} \ \mathbf{I}_{*,26} \ \mathbf{I}_{*,27} \ \mathbf{I}_{*,28} \ \mathbf{I}_{*,17} \ \mathbf{I}_{*,18}],$$

onde $\mathbf{I}_{*,j}$ indica a j -ésima coluna da matriz $\mathbf{I}$.

De posse da matriz de rigidez global $\mathbf{K}$, devemos resolver o sistema linear

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.23)$$

que representa as condições de equilíbrio para toda a estrutura. No sistema em questão, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2n}$ é o *vetor global de deslocamentos nodais* de toda a estrutura, e $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{2n}$ é o *vetor global de forças nodais equivalentes*. Este vetor de forças deve ser obtido através de uma superposição dos vetores de forças nodais equivalentes dos elementos, $\mathbf{f}^{(e)}$, de maneira análoga àquela feita para a matriz $\mathbf{K}$, utilizando rigorosamente a mesma convenção para os índices definida acima.

O sistema (3.23) está relacionado às condições de equilíbrio da estrutura, que são representadas nos problemas (2.10), (2.21), (2.22) e (2.30) pelas equações do tipo $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v})$, onde $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ é a forma bilinear que representa o trabalho interno associado à deformação da estrutura (definida em (2.4)) e $L(\mathbf{v})$ é a flexibilidade média da estrutura (definida em (2.3)). No domínio discretizado, um carregamento $\mathbf{t}$ é representado pelo vetor global de forças nodais equivalentes $\mathbf{f}$.

Se nenhuma condição de contorno relativa aos deslocamentos nodais for imposta ao problema de otimização topológica, a matriz $\mathbf{K}$ não terá posto completo. Fisicamente, isso significa que um corpo sem nenhum tipo de restrição aos deslocamentos pode apresentar movimentos de corpo rígido, ou seja, não está em equilíbrio estático (vide [27]). Assim, se nenhum apoio for introduzido na estrutura, o sistema linear (3.23) terá infinitas soluções.

Com a introdução dos apoios, eliminam-se as componentes de $\mathbf{u}$ associadas aos deslocamentos restringidos, bem como as restrições correspondentes, de modo que a matriz $\mathbf{K}$, que é simétrica, passa a ser positiva-definida e, portanto, não singular (veja, por exemplo, Hughes [22]). Sendo assim, podemos usar a fatoração de Cholesky para resolver o sistema linear (3.23).

Agora, veremos como representar os problemas de otimização topológica estudados neste trabalho em um meio discreto, após a aplicação do Método dos Elementos Finitos.

3.2 Problema de otimização topológica no domínio discretizado

No Capítulo 2, descrevemos algumas das formulações que podem ser adotadas para o projeto de um mecanismo flexível em um meio contínuo. Com a discretização do domínio e a aplicação do Método dos Elementos Finitos, o problema de otimização topológica num meio contínuo é transformado em um problema de programação não linear, cujas variáveis são as densidades ρ_i , $i = 1, \dots, n_{el}$, que devem satisfazer as restrições

$$0 \leq \rho_i \leq 1, \quad (3.24)$$

Para cada i , se $\rho_i = 0$, o elemento i é vazio e, se $\rho_i = 1$, o elemento é sólido.

Iniciaremos a discretização dos problemas (2.10), (2.21), (2.22) e (2.30) pela restrição de volume

$$\int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq \Omega_{\max}. \quad (3.25)$$

Com a introdução dos elementos finitos, a desigualdade (3.25) pode ser escrita como

$$\sum_{i=1}^{n_{el}} v_i \rho_i \leq V^*, \quad (3.26)$$

onde v_i é o volume do elemento i e V^* é o volume máximo que a estrutura ótima pode possuir. Note que a restrição (3.26) é linear em relação às variáveis ρ_i .

Como a rigidez do elemento finito está diretamente relacionada às propriedades efetivas do material, a penalização do material intermediário através da aplicação do modelo SIMP (vide Capítulo 2) é introduzida na matriz de rigidez $\mathbf{k}^{(e)}$ do elemento, definindo

$$\mathbf{k}^{(e)}(\rho_e) = \rho_e^p \mathbf{k}_0^{(e)}, \quad e = 1, \dots, n_{el},$$

onde ρ_e é a densidade do elemento e , p é o fator de penalização do modelo SIMP e $\mathbf{k}_0^{(e)}$ é a matriz de rigidez original do elemento. Consequentemente, a matriz de rigidez global, descrita por (3.21), fica dada por

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^{n_{el}} \rho_i^p \mathbf{K}_i, \quad (3.27)$$

onde $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_{n_{el}})^T$, $\mathbf{K}_i = \mathbf{P}_i \mathbf{k}_0^{(e)} \mathbf{P}_i^T$, $i = 1, \dots, n_{el}$, e $\mathbf{P}_i$ é a matriz introduzida em (3.22).

Sob algumas hipóteses, Rietz [36] e Martínez [30] demonstram que é possível obter um valor finito para o fator de penalização p das densidades, tal que o valor ótimo de cada densidade assuma apenas os valores 0 ou 1, isto é, existe um valor finito de p tal que a solução ótima do problema de otimização topológica é discreta.

Uma vez que a matriz de rigidez global $\mathbf{K} \equiv \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})$ é obtida através da superposição das matrizes de rigidez $\mathbf{k}^{(e)}(\rho_e)$ dos elementos, pode ocorrer que $\mathbf{K}$ seja singular. Uma alternativa para evitar este problema é atribuir um valor estritamente positivo (mas pequeno o suficiente) para o limitante inferior das densidades, para evitar que a matriz $\mathbf{K}$ torne-se singular. Assim, adotamos $0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1$, $i = 1, \dots, n_{el}$. Neste trabalho, tomamos $\rho_{\min} = 1.0 \times 10^{-3}$.

Na resolução numérica das formulações de Nishiwaki *et al.* [33] e de Lima [26] (problemas (2.21) e (2.22), respectivamente), devemos introduzir três situações distintas de carregamentos aplicados ao mecanismo flexível. A Figura 3.3 ilustra essas situações.

A Figura 3.3(a) mostra o domínio de projeto, a força aplicada, as condições de apoio e a direção do deslocamento desejado. Na Figura 3.3(b), é exibido o domínio discretizado, a força aplicada e os apoios, que impedem os deslocamentos nodais tanto na horizontal quanto na vertical. A Figura 3.3(c) mostra a aplicação da

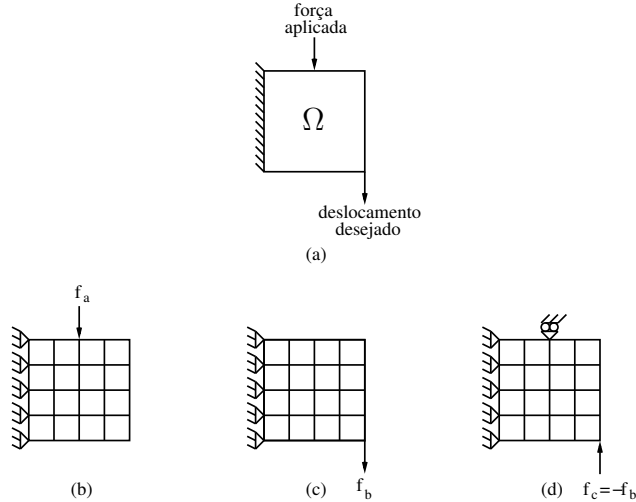


Figura 3.3: Simulações de carregamento para um mecanismo flexível.

força fictícia unitária no ponto e na direção do deslocamento desejado. Na Figura 3.3(d), é exibida a força de reação no mesmo ponto, na mesma direção, mas em sentido contrário ao da força fictícia unitária mostrada na Figura 3.3(c). É importante ressaltar que a Figura 3.3(d) inclui um apoio adicional no mesmo nó e na mesma direção da força aplicada na primeira situação de carregamento (Figura 3.3(b)). Esse apoio restringe o deslocamento apenas na direção de aplicação da força (neste caso, na vertical). Dessa forma, é necessário obter duas matrizes de rigidez globais distintas, uma delas relativa às condições de contorno das Figuras 3.3(b) e 3.3(c), e a outra associada às condições de contorno da Figura 3.3(d).

A obtenção da energia mútua do mecanismo é baseada nas configurações mostradas pelas Figuras 3.3(b) e 3.3(c), e a sua flexibilidade média é encontrada através da configuração da Figura 3.3(d). De acordo com Lima [26], podemos definir a energia mútua e a flexibilidade média do mecanismo na forma matricial como

$$\begin{aligned}\text{energia mútua} &= \mathbf{u}_b(\boldsymbol{\rho})^T \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_a(\boldsymbol{\rho}) \\ \text{flexibilidade média} &= \mathbf{u}_c(\boldsymbol{\rho})^T \mathbf{K}_2(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_c(\boldsymbol{\rho}),\end{aligned}$$

onde $\mathbf{K}_1(\boldsymbol{\rho})$ é a matriz de rigidez global relativa aos casos de carregamento das Figuras 3.3(b) e 3.3(c) e $\mathbf{K}_2(\boldsymbol{\rho})$ é a matriz de rigidez global associada ao caso de carregamento da Figura 3.3(d).

Na formulação de Sigmund [37] (problema (2.30)), não é necessário considerar os casos de carregamento separadamente. Logo, neste caso, trabalhamos apenas com uma matriz de rigidez. Nesta formulação, as formas matriciais da energia mútua e da flexibilidade média do mecanismo são obtidas de maneira análoga às formulações de Nishiwaki *et al.* [33] e de Lima [26], substituindo $\mathbf{u}_a$ por $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_b$ e $\mathbf{u}_c$ por $\mathbf{u}_2$, e $\mathbf{K}_1$ e $\mathbf{K}_2$ por $\mathbf{K}$.

No problema (2.30), que representa a formulação de Sigmund [37], após a discretização do domínio, os deslocamentos Δ_{ij} , $i, j = 1, 2$, ficam dados por

$$\begin{aligned}\Delta_{11}(\boldsymbol{\rho}) &= \frac{\mathbf{u}_1(\boldsymbol{\rho})^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_1(\boldsymbol{\rho})}{p_1}, & \Delta_{12}(\boldsymbol{\rho}) &= \frac{\mathbf{u}_2(\boldsymbol{\rho})^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_1(\boldsymbol{\rho})}{p_1}, \\ \Delta_{21}(\boldsymbol{\rho}) &= \frac{\mathbf{u}_1(\boldsymbol{\rho})^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_2(\boldsymbol{\rho})}{p_2}, & \Delta_{22}(\boldsymbol{\rho}) &= \frac{\mathbf{u}_2(\boldsymbol{\rho})^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_2(\boldsymbol{\rho})}{p_2},\end{aligned}$$

onde $\mathbf{u}_1(\boldsymbol{\rho})$ e $\mathbf{u}_2(\boldsymbol{\rho})$ são os deslocamentos nodais associados aos casos de carrega-

mento da Figura 2.6, $\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})$ é a matriz de rigidez global e p_1 e p_2 são, respectivamente, as intensidades das forças $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$.

Após a discretização do domínio, e, lembrando que maximizar uma função f é equivalente a minimizar $-f$, os problemas (2.10), (2.21), (2.22) e (2.30) ficam:

Estrutura

$$\begin{aligned}
 & \min_{\boldsymbol{\rho}} \quad \mathbf{f}^T \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}) \\
 & \text{s. a} \quad \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f} \\
 & \quad \sum_{i=1}^{n_{el}} v_i \rho_i \leq V^* \\
 & \quad 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el}
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Formulação 1 (Nishiwaki *et al.* [33])

$$\begin{aligned}
 & \min_{\boldsymbol{\rho}} \quad -\frac{\mathbf{u}_b(\boldsymbol{\rho})^T \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_a(\boldsymbol{\rho})}{\mathbf{u}_c(\boldsymbol{\rho})^T \mathbf{K}_2(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_c(\boldsymbol{\rho})} \\
 & \text{s. a} \quad \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_a(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f}_a \\
 & \quad \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_b(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f}_b \\
 & \quad \mathbf{K}_2(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_c(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f}_c \\
 & \quad \sum_{i=1}^{n_{el}} v_i \rho_i \leq V^* \\
 & \quad 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Formulação 2 (Lima [26])

$$\begin{aligned}
 & \min_{\boldsymbol{\rho}} \quad (1 - w) \log(\mathbf{u}_c(\boldsymbol{\rho})^T \mathbf{K}_2(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_c(\boldsymbol{\rho})) - w \log(\mathbf{u}_b(\boldsymbol{\rho})^T \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_a(\boldsymbol{\rho})) \\
 & \text{s. a} \quad \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_a(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f}_a \\
 & \quad \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_b(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f}_b \\
 & \quad \mathbf{K}_2(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_c(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f}_c \\
 & \quad \sum_{i=1}^{n_{el}} v_i \rho_i \leq V^* \\
 & \quad 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el}
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Formulação 3 (Sigmund [37])

$$\begin{aligned}
& \min_{\boldsymbol{\rho}} \quad -\frac{p_2}{p_1} \left[\frac{\frac{\mathbf{u}_1(\boldsymbol{\rho})^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_2(\boldsymbol{\rho})}{p_2}}{\frac{\mathbf{u}_2(\boldsymbol{\rho})^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_2(\boldsymbol{\rho})}{p_2} + \frac{p_2}{k_s}} \right] \\
& \text{s. a} \quad \frac{\mathbf{u}_1(\boldsymbol{\rho})^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_1(\boldsymbol{\rho})}{p_2} - c \frac{\mathbf{u}_2(\boldsymbol{\rho})^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_1(\boldsymbol{\rho})}{p_1} \leq \Delta_{in}^* \\
& \quad \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_1(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f}_1 \\
& \quad \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_2(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f}_2 \\
& \quad \sum_{i=1}^{n_{el}} v_i \rho_i \leq V^* \\
& \quad 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el}.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

No problema (3.30), w é um fator de peso, com $0 \leq w \leq 1$, cujo papel é permitir que o mecanismo flexível ótimo tenha mais flexibilidade e menos rigidez, ou vice-versa. No problema (3.31), k_s é a rigidez da mola, c é o fator dado pela equação (2.26) e Δ_{in}^* é o limitante para o deslocamento no ponto de aplicação da força de entrada $\mathbf{f}_1$.

Nos quatro problemas de otimização em questão, podemos eliminar as restrições associadas às condições de equilíbrio do mecanismo flexível, pois, sendo não singulares as matrizes $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ e $\mathbf{K}$, temos

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}, \quad \mathbf{u}_a = \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{f}_a, \quad \mathbf{u}_b = \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{f}_b,$$

$$\mathbf{u}_c = \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{f}_c, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}_1, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}_2.$$

Desta forma, substituindo os deslocamentos nodais acima nas respectivas funções objetivo, obtemos:

Estrutura

$$\begin{aligned}
& \min_{\boldsymbol{\rho}} \quad \mathbf{f}^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{f} \\
& \text{s. a} \quad \sum_{i=1}^{n_{el}} v_i \rho_i \leq V^* \\
& \quad 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Formulação 1 (Nishiwaki *et al.* [33])

$$\begin{aligned}
 \min_{\boldsymbol{\rho}} \quad & -\frac{\mathbf{f}_b^T \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{f}_a}{\mathbf{f}_c^T \mathbf{K}_2(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{f}_c} \\
 \text{s. a} \quad & \sum_{i=1}^{n_{el}} v_i \rho_i \leq V^* \\
 & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el}
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Formulação 2 (Lima [26])

$$\begin{aligned}
 \min_{\boldsymbol{\rho}} \quad & (1 - w) \log(\mathbf{f}_c^T \mathbf{K}_2(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{f}_c) - w \log(\mathbf{f}_b^T \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{f}_a) \\
 \text{s. a} \quad & \sum_{i=1}^{n_{el}} v_i \rho_i \leq V^* \\
 & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el}
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Formulação 3 (Sigmund [37])

$$\begin{aligned}
 \min_{\boldsymbol{\rho}} \quad & -\frac{p_2}{p_1} \left[\frac{\frac{\mathbf{f}_1^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{f}_2}{p_2}}{\frac{\mathbf{f}_2^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{f}_2}{p_2} + \frac{p_2}{k_s}} \right] \\
 \text{s. a} \quad & \frac{\mathbf{f}_1^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{f}_1}{p_1} - c \frac{\mathbf{f}_2^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{f}_1}{p_1} \leq \Delta_{in}^* \\
 & \sum_{i=1}^{n_{el}} v_i \rho_i \leq V^* \\
 & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el}.
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Os quatro problemas em questão possuem uma restrição linear de desigualdade, associada à quantidade máxima de material que a estrutura ou o mecanismo flexível deve conter. No problema (3.35), além dessa restrição, temos outra que diz respeito ao deslocamento máximo que o mecanismo deve sofrer no ponto de aplicação da força $\mathbf{f}_1$. Como podemos observar, tal restrição é não linear.

Em relação ao problema (3.32), notamos que a sua função objetivo é quadrática. Nos problemas (3.33) e (3.35), a função objetivo é dada pelo quociente de duas funções quadráticas, sendo que o seu denominador é sempre estritamente positivo, uma vez que a matriz $\mathbf{K}_2$ é positiva-definida e os deslocamentos nodais

$\mathbf{u}_c$ são sempre não nulos. Com respeito ao problema (3.34), devemos ter um cuidado especial com o termo $\mathbf{f}_b^T \mathbf{K}_2(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{f}_a$, que representa a energia mútua do mecanismo e nem sempre é positivo. Desta forma, ao aplicar algum método iterativo de otimização, deve-se tomar um ponto inicial de tal maneira que esse termo seja estritamente positivo.

Claramente, podemos constatar que o problema de otimização topológica de uma estrutura é muito mais simples de ser resolvido quando comparado a um problema de otimização topológica de um mecanismo flexível. Neste trabalho, os problemas (3.32) a (3.35) são resolvidos usando a Programação Linear Sequencial e o Método das Assíntotas Móveis, descritos nos Capítulos 4 e 5, respectivamente.

Na seção seguinte, vamos discutir um tipo de instabilidade numérica que aparece na resolução de um problema de otimização topológica, bem como uma estratégia para evitar essa instabilidade.

3.3 Tabuleiro de xadrez

Durante a resolução numérica de um problema de otimização topológica, ocorre um fenômeno indesejável: a formação de regiões com elementos vazios e com elementos totalmente preenchidos, dispostos de maneira alternada, semelhante a um tabuleiro de xadrez, conforme mostra a Figura 3.4.

Segundo Díaz e Sigmund [17], uma das possíveis causas do surgimento dessa instabilidade numérica é a utilização de elementos finitos retangulares de quatro nós com funções interpoladoras bilineares para os deslocamentos. De acordo com eles, o uso desse modelo faz com que a distribuição de material em formato de tabuleiro de xadrez seja artificialmente mais rígida do que uma distribuição homogênea, considerando o mesmo volume de material empregado.

A maioria dos trabalhos na literatura sugere duas formas distintas para a eliminação do “tabuleiro de xadrez” nos problemas de otimização topológica. Uma delas é aumentar a ordem do elemento finito (isto é, aumentar o número de nós do elemento), com o objetivo de obter uma aproximação mais refinada para os deslocamentos. Entretanto, essa estratégia faz com que o custo computacional da resolução numérica do problema de otimização topológica fique muito alto, pois a dimensão da matriz de rigidez global torna-se muito elevada à medida que aumentamos o número de nós em cada elemento.

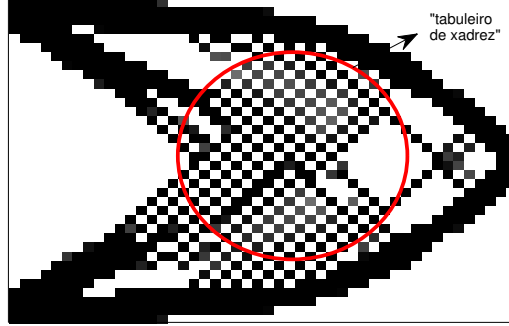


Figura 3.4: Exemplo de uma estrutura onde aparece o “tabuleiro de xadrez”.

A ocorrência do “tabuleiro de xadrez” também pode ser evitada através da aplicação de um operador matemático denominado *filtro espacial*. Esse operador tem o papel de redistribuir as densidades ao redor de cada elemento do domínio, fazendo com que a distribuição dessas densidades fique mais homogênea. Um filtro espacial pode ser definido de modo genérico através do produto de convolução entre uma função F (que deve satisfazer algumas condições) e a função $\rho : \Omega \rightarrow [0, 1]$, ou seja,

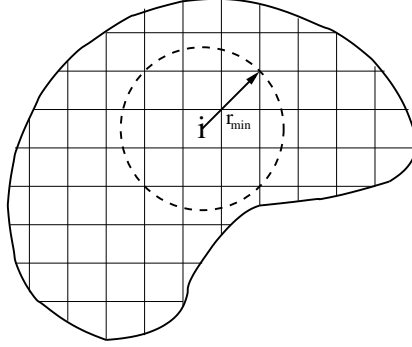
$$(F * \rho)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Para mais detalhes sobre o assunto, consulte Bourdin [10].

Quando utilizamos um filtro espacial, devemos, em primeiro lugar, definir uma vizinhança para cada um dos elementos do domínio. Denotamos tal vizinhança por $B(i, r_{\min})$, indicando que ela é centrada num elemento i e tem raio $r_{\min}$. Para cada elemento i , a aplicação do filtro produz efeito apenas nele e nos elementos pertencentes à sua vizinhança, e quanto mais distante um elemento j dessa vizinhança estiver do elemento central i , menor será a ação desse filtro sobre o elemento j . A Figura 3.5 ilustra a vizinhança de um elemento finito i .

De acordo com Bourdin [10], a representação genérica de um filtro espacial num meio discreto, para cada elemento e da malha de elementos finitos, é dada por

$$(F *_{\Omega} \rho)_e = \sum_{i \in B(e, r_{\min})} \left(\rho_e \int_i F(\mathbf{x} - \mathbf{c}_e) d\mathbf{x} \right),$$

Figura 3.5: Ilustração da vizinhança de um elemento finito i .

onde $\mathbf{c}_e$ representa o vetor de coordenadas do centro do elemento e .

A seguir, apresentaremos alguns filtros espaciais encontrados na literatura, que serão aplicados neste trabalho para evitar o surgimento do “tabuleiro de xadrez” nas topologias ótimas das estruturas.

3.3.1 Filtro do vetor gradiente da função objetivo

Em [37] e em [39], Sigmund propôs um filtro espacial que modifica as derivadas primeiras da função objetivo f de um problema de otimização topológica, com base em uma média ponderada dessas derivadas calculadas numa vizinhança fixa B_i , para cada $i = 1, \dots, n_{el}$. Deve ser enfatizado que este filtro é puramente heurístico, mas, de acordo com Sigmund [39], sua aplicação teve sucesso em inúmeros casos. Com a utilização desse filtro, cada componente $\partial f / \partial \rho_i$ do gradiente da função objetivo original f é substituída por

$$\frac{\widehat{\partial f}}{\partial \rho_i} = \frac{\sum_{j \in B_i} \widehat{H}_j \rho_j \frac{\partial f}{\partial \rho_j}}{\rho_i \sum_{j \in B_i} \widehat{H}_j}, \quad i = 1, \dots, n_{el}, \quad (3.36)$$

onde

$$\widehat{H}_j = \begin{cases} r_{\min} - s_{ij}, & \text{se } j \in B_i, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.37)$$

é um fator de peso relacionado ao efeito de aplicação do filtro em questão, e s_{ij} é a distância euclidiana entre os centros dos elementos i e j . Podemos notar que,

quanto mais distante um elemento está do elemento central i de uma vizinhança, menor é a atuação do filtro.

A grande vantagem desse esquema de filtragem é a simplicidade da sua implementação e os bons resultados que foram obtidos na literatura. Por outro lado, como o gradiente da função objetivo é modificado e a função objetivo permanece inalterada, as condições de otimalidade do problema de otimização topológica ficam incompatíveis. Na tentativa de amenizar essa incompatibilidade, introduzimos, neste trabalho, dois termos adicionais na função objetivo do problema de otimização topológica, de modo que, se f é a função objetivo original, definimos uma nova função objetivo $\tilde{f}$ tal que

$$\tilde{f}(\boldsymbol{\rho}) = \zeta f(\boldsymbol{\rho}) + \sum_{i=1}^{n_{el}} g_i(\boldsymbol{\rho}^{(k)}) \rho_i + \sum_{i=1}^{n_{el}} h_i(\boldsymbol{\rho}^{(k)}) \log(\rho_i), \quad (3.38)$$

onde

$$g_i(\boldsymbol{\rho}^{(k)}) = \left[\frac{\hat{H}_i}{\sum_{j \in B_i} \hat{H}_j} - \zeta \right] \frac{\partial f(\boldsymbol{\rho}^{(k)})}{\partial \rho_i}$$

e

$$h_i(\boldsymbol{\rho}^{(k)}) = \frac{\sum_{j \in B_i, j \neq i} \hat{H}_j \rho_j^{(k)} \frac{\partial f(\boldsymbol{\rho}^{(k)})}{\partial \rho_j^{(k)}}}{\sum_{j \in B_i} \hat{H}_j},$$

e $\zeta \geq 1$ é um fator de penalização, fazendo com que a primeira parcela de (3.38), associada à função f , tenha maior relevância para a minimização da função $\tilde{f}$.

Quando aplicamos algum método iterativo para resolver um problema de otimização topológica, deve-se observar que os termos $g_i(\boldsymbol{\rho}^{(k)})$ e $h_i(\boldsymbol{\rho}^{(k)})$ são tratados como constantes, embora sejam atualizados a cada iteração. Pode-se mostrar que, se $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}^{(k)}$, então $\frac{\partial \tilde{f}(\boldsymbol{\rho}^{(k)})}{\partial \rho_i} = \frac{\partial \hat{f}(\boldsymbol{\rho}^{(k)})}{\partial \rho_i}$, e que, se a sequência de iterandos $\boldsymbol{\rho}^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, converge para a solução ótima $\boldsymbol{\rho}^*$ do problema, então $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial \tilde{f}(\boldsymbol{\rho}^{(k)})}{\partial \rho_i} = \frac{\partial \hat{f}(\boldsymbol{\rho}^*)}{\partial \rho_i}$, $i = 1, \dots, n_{el}$.

Como os problemas de otimização topológica abordados aqui são problemas de minimização, podemos observar que o termo $\sum_{i=1}^{n_{el}} h_i(\boldsymbol{\rho}^{(k)}) \log(\rho_i)$ de (3.37) faz

com que muitas densidades fiquem mais próximas de zero, o que é compatível com o objetivo de eliminar densidades intermediárias.

3.3.2 Filtro da média ponderada das densidades

Agora, vamos apresentar um filtro espacial, proposto por Bruns e Tortorelli [11], que é aplicado sobre as densidades dos elementos. Neste caso, para cada elemento i , a densidade original ρ_i é substituída pela média ponderada das densidades dos elementos contidos em sua vizinhança B_i . A nova densidade do elemento i é dada por

$$\phi_i \equiv \phi_i(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{j \in B_i} \frac{\omega_j(s_{ij})}{\omega_i} \rho_j, \quad (3.39)$$

onde

$$\omega_j(s_{ij}) = \begin{cases} \frac{\exp\left(-\frac{s_{ij}^2}{2\left(\frac{r}{3}\right)^2}\right)}{2\pi\left(\frac{r}{3}\right)} & \text{se } s_{ij} \leq r, \\ 0 & \text{se } s_{ij} > r, \end{cases} \quad (3.40)$$

s_{ij} é a distância euclidiana entre os centróides dos elementos i e j , e

$$\omega_i = \sum_{j \in B_i} \omega_j(s_{ij}). \quad (3.41)$$

Dizemos que os fatores de peso $\omega_j(s_{ij})$ definidos pela equação (3.40) são *Gaussianos* devido à presença da função exponencial de base e . Podemos notar que apenas as densidades dos elementos tais que $s_{ij} \leq r$ são influenciadas pela aplicação do filtro.

É importante lembrar que as densidades originais devem ser substituídas pelas densidades filtradas tanto na função objetivo quanto nas restrições do problema de otimização topológica. A aplicação de um filtro diretamente nas densidades tem a vantagem de manter compatíveis as condições de otimalidade do problema de otimização topológica.

Com a aplicação do filtro em questão, a matriz de rigidez global dada pela equação (3.27) torna-se

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n_{el}} \left[\sum_{j \in B_i} \frac{\omega_j(s_{ij})}{\omega_i} \rho_j \right]^p \mathbf{K}_i, \quad (3.42)$$

e a restrição de volume de material do mecanismo flexível fica

$$\sum_{i=1}^{n_{el}} v_i \left[\sum_{j \in B_i} \frac{\omega_j(s_{ij})}{\omega_i} \rho_j \right] \leq V^*. \quad (3.43)$$

Como se observa, mesmo com a aplicação do filtro, a restrição de volume permanece linear.

3.3.3 Filtros baseados em operadores morfológicos

Em [40], Sigmund propôs filtros espaciais para as densidades que são baseados em operadores morfológicos. Segundo ele, em processamento de imagens, esses operadores são usados para quantificar buracos ou objetos, eliminar ruídos em imagens e produzir uma inspeção automática de seus dados. Os operadores morfológicos básicos são os de *erosão* e de *dilatação*.

Dado um elemento i qualquer da malha, se qualquer um dos elementos que pertencem a vizinhança B_i é vazio, o operador de erosão faz com que o elemento central dessa vizinhança também fique vazio. Por outro lado, se um dos elementos que pertencem à vizinhança B_i é preenchido, o operador de dilatação faz com que o elemento central também fique preenchido.

Na sua forma discreta, o operador de dilatação é um operador do tipo “max”, ou seja, a densidade original de um elemento i é substituída pelo valor máximo que a densidade assume nos elementos de sua vizinhança B_i . A formulação “max” não é adequada para métodos de otimização que necessitam das derivadas das funções envolvidas, pois a função “máximo” não é diferenciável. Entretanto, conforme Sigmund [40], uma versão contínua do operador de dilatação é dada por

$$\tilde{\rho}_i = \frac{1}{\beta} \log \left(\frac{\sum_{j \in B_i} \exp(\beta \rho_j)}{\sum_{j \in B_i} 1} \right), \quad i = 1, \dots, n_{el}. \quad (3.44)$$

Pode-se mostrar que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \tilde{\rho}_i = \max_{j \in B_i} \rho_j, \quad i = 1, \dots, n_{el}. \quad (3.45)$$

O operador de erosão é um operador do tipo “min”, ou seja, a densidade original de um elemento i é trocada pelo valor mínimo que a densidade assume

nos elementos de sua vizinhança B_i . Assim como o operador de dilatação, a formulação “min” também não é adequada para métodos de otimização que requerem derivadas, pois a função “mínimo” não é diferenciável. Uma versão contínua do operador de erosão, segundo Sigmund [40], pode ser definida como

$$\bar{\rho}_i = 1 - \frac{1}{\beta} \log \left(\frac{\sum_{j \in B_i} \exp(\beta(1 - \rho_j))}{\sum_{j \in B_i} 1} \right), \quad i = 1, \dots, n_{el}. \quad (3.46)$$

Neste caso, pode-se mostrar que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \bar{\rho}_i = \min_{j \in B_i} \rho_j, \quad i = 1, \dots, n_{el}. \quad (3.47)$$

As densidades originais do problema de otimização topológica devem ser substituídas pelas densidades filtradas pelo operador morfológico de dilatação ou de erosão, tanto na função objetivo quanto nas restrições. Sendo assim, a restrição de volume de material, que originalmente é linear, passa a ser não linear.

Conforme Sigmund [40], para obter um esquema numérico estável, o valor do parâmetro β deve ser aumentado gradualmente. Baseado em experimentos numéricos, ele sugere iniciar a aplicação do filtro com $\beta = 0.2$, no mínimo, e dobrar esse parâmetro gradativamente até que se atinja $\beta = 200$.

Ao aplicar o filtro morfológico de dilatação, a matriz de rigidez global passa a ser dada por

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n_{el}} \left[\frac{1}{\beta} \log \left(\frac{\sum_{j \in B_i} \exp(\beta \rho_j)}{\sum_{j \in B_i} 1} \right) \right]^p \mathbf{K}_i, \quad (3.48)$$

e a restrição de volume máximo para o mecanismo flexível torna-se

$$\sum_{i=1}^{n_{el}} v_i \left[\frac{1}{\beta} \log \left(\frac{\sum_{j \in B_i} \exp(\beta \rho_j)}{\sum_{j \in B_i} 1} \right) \right] \leq V^*. \quad (3.49)$$

Analogamente, para o filtro morfológico de erosão, obtemos

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n_{el}} \left[1 - \frac{1}{\beta} \log \left(\frac{\sum_{j \in B_i} \exp(\beta(1 - \rho_j))}{\sum_{j \in B_i} 1} \right) \right]^p \mathbf{K}_i \quad (3.50)$$

e

$$\sum_{i=1}^{n_{el}} v_i \left[\frac{1}{\beta} \log \left(\frac{\sum_{j \in B_i} 1}{\sum_{j \in B_i} \exp(\beta(1 - \rho_j))} \right) \right] \leq V^* - \sum_{i=1}^{n_{el}} v_i. \quad (3.51)$$

Podemos observar que, quando usamos os filtros morfológicos de dilatação ou de erosão, a restrição de volume, que originalmente é linear, passa a ser não linear.

3.3.4 Filtro do seno hiperbólico

Bruns [12] apresentou um esquema que combina a filtragem das densidades originais com um outro tipo de penalização para as densidades intermediárias, alternativo ao modelo SIMP. Tal abordagem é denominada *método SINH*, em referência à utilização da função seno hiperbólico.

Neste método, as densidades originais de cada elemento i são filtradas usando a média ponderada das densidades dos elementos de sua vizinhança B_i , de acordo com as equações (3.39) a (3.41), e são definidas duas medidas de densidade $\eta_1 \equiv \eta_1(\boldsymbol{\rho})$ e $\eta_2 \equiv \eta_2(\boldsymbol{\rho})$. Existem várias definições possíveis para essas medidas, mas, de acordo com Bruns [12], a versão do método SINH que aparenta fornecer os melhores resultados práticos é aquela na qual as medidas de densidade são dadas por

$$\eta_{1_i}(\boldsymbol{\rho}) = \rho_i, \quad i = 1, \dots, n_{el}, \quad (3.52)$$

e

$$\eta_{2_i}(\boldsymbol{\rho}) = 1 - \frac{\sinh\{p[1 - \phi_i(\boldsymbol{\rho})]\}}{\sinh(p)}, \quad i = 1, \dots, n_{el}, \quad (3.53)$$

onde $\phi_i(\boldsymbol{\rho})$, para cada $i = 1, \dots, n_{el}$ são as densidades filtradas usando as equações (3.39) a (3.41), e p é um fator de penalização para as densidades filtradas $\hat{\phi}_i(\boldsymbol{\rho})$. Vale lembrar que, neste caso, p **não** é o fator de penalização do método SIMP, pois, no método SINH, ele é aplicado na restrição de volume, ao invés de ser introduzido na função objetivo.

A medida η_1 deve ser usada na função objetivo do problema de otimização topológica e a medida η_2 deve ser usada na restrição de volume de material. Devido à presença da função seno hiperbólico, a restrição de volume, que originalmente é linear, passa a ser não linear. Na formulação de Sigmund [37] (veja o

problema (3.35)), também usamos a medida η_1 na restrição não linear que limita o deslocamento no ponto de aplicação da força.

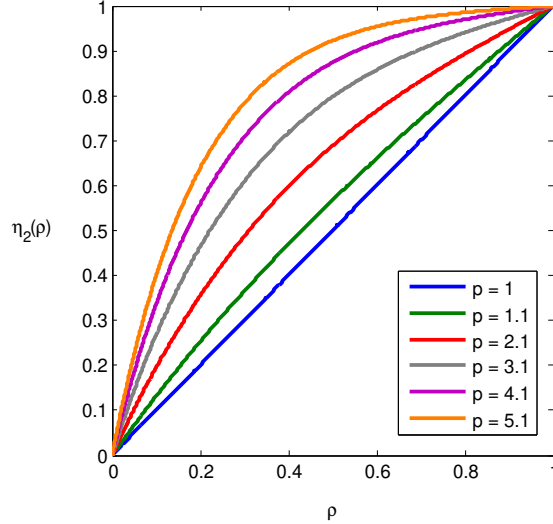


Figura 3.6: Efeito do aumento do fator de penalização p do SINH sobre as densidades.

Com a aplicação do método SINH, a matriz de rigidez global da equação (3.27) passa a ser dada por

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n_{el}} \rho_i \mathbf{K}_i, \quad (3.54)$$

e a restrição de volume para o mecanismo flexível torna-se

$$\sum_{i=1}^{n_{el}} \sinh \{p[\phi_i(\boldsymbol{\rho}) - 1]\} \leq \left(V^* - \sum_{i=1}^{n_{el}} v_i \right) \sinh(p). \quad (3.55)$$

A Figura 3.6 mostra o efeito da aplicação do método SINH para alguns valores do fator de penalização p sobre as densidades intermediárias. Analisando esse gráfico, podemos notar que, à medida que o fator de penalização p é aumentado, o método SINH faz com que uma grande parcela das densidades intermediárias seja transformada em densidades suficientemente próximas de 1, em oposição ao método SIMP, que aproxima as densidades de 0.

Capítulo 4

Programação Linear Sequencial

Neste capítulo, apresentamos um método de otimização baseado na *Programação Linear Sequencial* (PLS), que consiste na resolução de uma sequência de problemas de programação linear, para aproximar um problema de otimização não linear. Essa classe de algoritmos é amplamente utilizada na literatura para resolver problemas de otimização topológica de estruturas ou de mecanismos flexíveis (veja, por exemplo, Kikuchi *et al.* [23], Nishiwaki *et al.* [33], Lima [26] e Sigmund [37]). Neste trabalho, desenvolvemos uma versão globalmente convergente da PLS, baseada no trabalho de Gomes *et al.* [18].

4.1 Descrição do método

Considere o problema de programação não linear

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s. a} \quad & f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \mathbf{x}^{\min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\max}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde $\mathbf{x} = (x_1 \dots x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ é o vetor das variáveis do problema, $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 0, \dots, m$) são funções com derivadas parciais primeiras Lipschitz contínuas, e $\mathbf{x}^{\min} = (x_1^{\min} \dots x_n^{\min})^T$ e $\mathbf{x}^{\max} = (x_1^{\max} \dots x_n^{\max})^T$ são vetores que contêm, respectivamente, os limitantes inferiores e superiores para as variáveis x_j . Lembremos que qualquer problema de otimização com restrições de igualdade e de desigualdade pode ser colocado na forma (4.1) através da introdução de variáveis de folga.

Dizemos que $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ é um ponto *factível* para o problema (4.1) se todas as restrições forem satisfeitas, ou seja, se $f_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, $\forall i = 1, \dots, m$, e se $\mathbf{x}^{\min} \leq \bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x}^{\max}$. Se alguma dessas restrições não for satisfeita, dizemos que $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ é um ponto *infactível* para o problema (4.1).

Já que estamos supondo que as funções envolvidas no problema têm derivadas parciais primeiras contínuas, podemos obter uma aproximação linear para cada uma delas em torno de um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ou seja, podemos escrever

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{s}) \approx f_i(\mathbf{x}) + \nabla f_i(\mathbf{x})^T \mathbf{s}, \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (4.2)$$

Denotamos

$$A(\mathbf{x}) = [\nabla f_1(\mathbf{x}) \dots \nabla f_m(\mathbf{x})]^T \quad (4.3)$$

a matriz Jacobiana das restrições, e

$$C(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}) \dots f_m(\mathbf{x})]^T \quad (4.4)$$

o vetor com os valores de cada uma das restrições no ponto $\mathbf{x}$. Além disso, definimos o conjunto

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^{\min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\max}\}. \quad (4.5)$$

Usando as equações (4.3) e (4.4) e denotando $f(\mathbf{x}) \equiv f_0(\mathbf{x})$, podemos re-escrever (4.2) em duas partes, como

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{s}) \approx f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{s} \equiv L(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \quad (4.6)$$

e

$$C(\mathbf{x} + \mathbf{s}) \approx C(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x})\mathbf{s}. \quad (4.7)$$

A *Programação Linear Sequencial* (PLS) é um método iterativo que consiste na resolução aproximada do problema (4.1) através de uma sequência de problemas de programação linear, nos quais a função objetivo e as restrições são aproximações lineares das funções envolvidas no problema original (4.1). Assim, a cada iteração k , dado o ponto $\mathbf{x}^{(k)}$, resolvemos o problema

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{s}} \quad & \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{s} \\ \text{s. a} \quad & A(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s} + C(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{x}^{\min} \leq \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s} \leq \mathbf{x}^{\max}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Como se observa, para iniciar a aplicação do método, devemos fornecer um ponto inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ e um critério de parada, que será discutido posteriormente neste capítulo. A solução ótima $\mathbf{s}_c$ do problema da iteração k é usada para atualizar a solução aproximada do problema original (4.1). Deste modo, ao final da iteração, fazemos

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_c. \quad (4.9)$$

4.2 Regiões de confiança

Para evitar que o problema (4.8) seja ilimitado e para garantir a convergência global do algoritmo, acrescentamos uma *região de confiança*, que define a região na qual acreditamos que a aproximação linear do problema (4.1) seja suficientemente boa. Assim, também exigimos que $\mathbf{s}$ satisfaça

$$\|\mathbf{s}\|_\infty \leq \delta, \quad (4.10)$$

onde $\delta > 0$ é o raio dessa região de confiança. O valor de δ deve ser atualizado a cada iteração, em função do decréscimo da função objetivo e da redução da infactibilidade do problema original (4.1).

A partir da definição do conjunto X em (4.5) e da desigualdade (4.10), concluímos que cada s_j deve satisfazer

$$\max\{-\delta, x_j^{\min} - x_j^{(k)}\} \leq s_j \leq \min\{\delta, x_j^{\max} - x_j^{(k)}\}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Denotando $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}^{(k)}$, podemos re-escrever o problema de programação linear (4.8), acrescido da região de confiança, como

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{s} \\ \text{s. a} \quad & A(\mathbf{x})\mathbf{s} + C(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \max\{-\delta, \mathbf{x}^{\min} - \mathbf{x}^{(k)}\} \leq \mathbf{s} \leq \min\{\delta, \mathbf{x}^{\max} - \mathbf{x}^{(k)}\}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

4.3 Critério de aceitação ou rejeição do passo

Para medir a infactibilidade de um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ com relação ao problema (4.1), usamos a função $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|C(\mathbf{x})\|_2^2.$$

Já em relação ao problema de programação linear (4.11), que é uma aproximação para o problema original (4.1), a infactibilidade é medida pela função $M : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2} \|A(\mathbf{x})\mathbf{s} + C(\mathbf{x})\|_2^2. \quad (4.12)$$

Note que, da equação (4.12), temos

$$\nabla M(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = A(\mathbf{x})^T (A(\mathbf{x})\mathbf{s} + C(\mathbf{x}))$$

e

$$\nabla M(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = A(\mathbf{x})^T C(\mathbf{x}) = \nabla \varphi(\mathbf{x}).$$

Dizemos que um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é φ -estacionário se $\mathbf{x}$ satisfaz as condições Karush-Kuhn-Tucker (KKT) do problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \varphi(\mathbf{x}) \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{x} \in X, \end{aligned}$$

onde X é o conjunto definido em (4.5).

Ao resolver o problema original (4.1) de maneira aproximada, existem dois objetivos a serem alcançados simultaneamente: a redução da infactibilidade, que é medida por $\varphi(\mathbf{x})$, e a redução da função objetivo $f(\mathbf{x})$. Se $f(\mathbf{x}) \ll f(\mathbf{x}^{(k)})$ e $\|C(\mathbf{x})\|_2 \ll \|C(\mathbf{x}^{(k)})\|_2$, podemos concluir que $\mathbf{x}$ é uma solução melhor que $\mathbf{x}^{(k)}$ para o problema (4.1). Por outro lado, não é claro o que ocorre se

$$f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^{(k)}) \quad \text{e} \quad \|C(\mathbf{x})\|_2 > \|C(\mathbf{x}^{(k)})\|_2$$

ou

$$f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}^{(k)}) \quad \text{e} \quad \|C(\mathbf{x})\|_2 < \|C(\mathbf{x}^{(k)})\|_2.$$

Diante dessa situação conflitante, devemos definir uma *função de mérito*, cujo papel é permitir que decidamos se $\mathbf{x}$ é ou não uma solução melhor que a solução $\mathbf{x}^{(k)}$ em relação ao problema (4.1). Neste trabalho, definimos como função de mérito a função $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(\mathbf{x}, \theta) = \theta f(\mathbf{x}) + (1 - \theta) \varphi(\mathbf{x}), \quad \theta \in [0, 1]. \quad (4.13)$$

O papel do parâmetro θ é determinar se a otimalidade terá maior relevância sobre a factibilidade, ou vice-versa. Mais adiante, nesta seção, explicaremos como calcular o valor de θ a cada iteração do nosso algoritmo.

Para decidir se o passo $\mathbf{s}_c$ será ou não aceito, devemos analisar as *reduções real e prevista* da função de mérito (4.13). Para tanto, definimos

$$A_{red}^{opt} = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} + \mathbf{s}) \quad (4.14)$$

e

$$A_{red}^{fct} = \varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{s}) \quad (4.15)$$

como sendo, respectivamente, a redução real da função objetivo e da infactibilidade do problema (4.1). Definimos também

$$P_{red}^{opt} = -\nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{s} \quad (4.16)$$

e

$$P_{red}^{fct} = M(\mathbf{x}, \mathbf{0}) - M(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2} \|C(\mathbf{x})\|_2^2 - \frac{1}{2} \|A(\mathbf{x})\mathbf{s} + C(\mathbf{x})\|_2^2, \quad (4.17)$$

que são, respectivamente, a redução prevista da função objetivo e da infactibilidade do problema (4.11).

Usando as equações (4.14) a (4.17), definimos agora

$$A_{red} = \theta A_{red}^{opt} + (1 - \theta) A_{red}^{fct}$$

e

$$P_{red} = \theta P_{red}^{opt} + (1 - \theta) P_{red}^{fct},$$

que são, respectivamente, a redução real e prevista da função de mérito (4.13).

Para atualizar o parâmetro $\theta \equiv \theta_k$, definimos, em primeiro lugar,

$$\theta_k^{min} = \min \{1, \theta_0, \dots, \theta_{k-1}\},$$

$$\theta_k^{large} = \left[1 + \frac{N}{(k+1)^{1.1}} \right] \theta_k^{min},$$

onde $N \geq 0$ é um parâmetro que permite que o parâmetro θ tenha um decréscimo não monótono ao longo das iterações. Definimos também

$$\begin{aligned} \theta_k^{sup} &= \sup \{ \theta \in [0, 1] \mid P_{red} \geq 0.5 P_{red}^{fct} \} \\ &= \begin{cases} 0.5 \left(\frac{P_{red}^{fct}}{P_{red}^{fct} - P_{red}^{opt}} \right), & \text{se } P_{red}^{opt} \leq \frac{1}{2} P_{red}^{fct} \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.18)$$

De posse desses parâmetros, determinamos θ_k segundo

$$\theta_k = \min\{\theta_k^{sup}, \theta_k^{large}\}.$$

A cada iteração k da PLS, dados os valores de A_{red} e de P_{red} , aceitamos ou recusamos o passo $\mathbf{s}_c$ de acordo com o seguinte critério:

- Se $A_{red} \geq 0.1P_{red}$, o passo $\mathbf{s}_c$ é aceito. Neste caso, atualizamos a solução aproximada do problema (4.1) através de (4.9). Além disso, se $A_{red} \geq 0.5P_{red}$, aumentamos o raio da região de confiança, tomando

$$\delta_{k+1} = \min\{2.5\delta_k, \|\mathbf{x}^{\max} - \mathbf{x}^{\min}\|_{\infty}\}.$$

- Caso contrário, o passo $\mathbf{s}_c$ é recusado. Neste caso, reduzimos o raio da região de confiança, fazendo

$$\delta_{k+1} = 0.25\|\mathbf{s}^{(k)}\|_{\infty}.$$

4.4 Um algoritmo para a PLS

Sejam dados um ponto inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in X$, um raio inicial para a região de confiança $\delta_0 \geq \delta_{\min} > 0$, $\theta_0 = \theta_{\max} = 1$, e $k = 0$. O algoritmo abaixo resolve o problema (4.1) através da PLS. Denotamos $\mathbf{A} \equiv A(\mathbf{x})$ e $\mathbf{C} \equiv C(\mathbf{x})$.

Algoritmo 4.1

Enquanto não é satisfeito algum critério de parada,

1. *Tentar encontrar um ponto $\mathbf{s}_n$ que satisfaça*

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{s}_n &= -\mathbf{C} \\ \max\{-0.8\delta_k, \mathbf{x}^{\min} - \mathbf{x}^{(k)}\} &\leq \mathbf{s}_n \leq \min\{0.8\delta_k, \mathbf{x}^{\max} - \mathbf{x}^{(k)}\} \end{aligned}$$

2. *Se não foi possível encontrar $\mathbf{s}_n$*

- 2.1. $\mathbf{d}_n \leftarrow -\nabla\varphi(\mathbf{x}^{(k)})$

- 2.2. *Determinar $\bar{\alpha}$, solução de*

$$\min M(\mathbf{x}^{(k)}, \alpha\mathbf{d}_n)$$

$$\begin{aligned} \text{s. a } \max\{-0.8\delta_k, \mathbf{x}^{\min} - \mathbf{x}^{(k)}\} &\leq \alpha\mathbf{d}_n \leq \min\{0.8\delta_k, \mathbf{x}^{\max} - \mathbf{x}^{(k)}\} \\ \alpha &\geq 0 \end{aligned}$$

$$2.3. \mathbf{s}_n^d \leftarrow \bar{\alpha} \mathbf{d}_n$$

$$2.4. \text{ Determinar } \mathbf{s}_c \text{ tal que } M(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{s}_c) \leq M(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{s}_n^d).$$

3. Caso contrário,

3.1 Partindo de $\mathbf{s}_n$, encontrar $\mathbf{s}_c$, solução de

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{s} \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{s} = -\mathbf{C} \\ & \max\{-\delta_k, \mathbf{x}^{\min} - \mathbf{x}^{(k)}\} \leq \alpha \mathbf{d}_n \leq \min\{\delta_k, \mathbf{x}^{\max} - \mathbf{x}^{(k)}\} \end{aligned}$$

4. Determinar $\theta_k \in [0, \theta^{\max}]$

5. Se $A_{red} \geq 0.1P_{red}$

$$5.1. \mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_c$$

5.2. Se $A_{red} \geq 0.5P_{red}$

$$5.2.1 \delta_{k+1} = \min\{2.5\delta_k, \|\mathbf{x}^{\max} - \mathbf{x}^{\min}\|_{\infty}\}$$

5.3. Senão

$$5.3.1. \delta_{k+1} \leftarrow \delta_{\min}$$

$$5.4. \theta^{\max} \leftarrow 1$$

6. Senão

$$6.1. \delta_{k+1} \leftarrow 0.25\|\mathbf{s}_c\|_{\infty}$$

$$6.2. \mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{x}^{(k)}$$

$$6.3. \theta^{\max} \leftarrow \theta^k$$

4.5 O algoritmo está bem definido

Nesta seção, vamos provar que o Algoritmo 4.1 está bem definido, ou seja, que após repetir os passos 1 a 6 um número finito de vezes, podemos obter um novo iterando $\mathbf{x}^{(k+1)}$ a partir do iterando $\mathbf{x}^{(k)}$. Para provar essa propriedade, três casos são considerados: em primeiro lugar, quando o ponto corrente $\mathbf{x}^{(k)} \in X$ não é φ -estacionário e não existe $\mathbf{s}_n$; em segundo, quando $\mathbf{x}^{(k)} \in X$ não é φ -estacionário e existe $\mathbf{s}_n$; e finalmente, quando $\mathbf{x}^{(k)}$ é factível e regular para o problema (4.1) e as suas condições KKT não são satisfeitas em $\mathbf{x}^{(k)}$. O primeiro caso é considerado no Lema 4.5.1, o segundo no Lema 4.5.2, e o terceiro no Lema 4.5.3. Esses resultados são uma adaptação dos lemas encontrados em Gomes *et al.* [18].

Lema 4.5.1. *Suponha que $\mathbf{x}^{(k)}$ não seja um ponto φ -estacionário e que não exista $\mathbf{s}_n$. Então, após um número finito de recusas de passo, $\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_c$ é aceito.*

Prova. Se $\mathbf{x}^{(k)}$ não é φ -estacionário, então $\mathbf{d}_n = -\nabla\varphi(\mathbf{x}^{(k)}) = -\nabla M(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{0}) = -\mathbf{A}^T \mathbf{C} \neq \mathbf{0}$. Além disso, definindo

$$\tilde{\alpha} = \frac{\mathbf{d}_n^T \mathbf{d}_n}{\mathbf{d}_n^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{d}_n},$$

temos

$$\bar{\alpha} = \min \left\{ \tilde{\alpha}, \min_{\mathbf{d}_{n_i} > 0} \{\tilde{u}_i / \mathbf{d}_{n_i}\}, \min_{\mathbf{d}_{n_i} < 0} \{\tilde{l}_i / \mathbf{d}_{n_i}\} \right\}, \quad (4.19)$$

onde $\tilde{l}_i = \max\{-0.8\delta_k, x_i^{\min} - x_i^{(k)}\}$ e $\tilde{u}_i = \max\{0.8\delta_k, x_i^{\max} - x_i^{(k)}\}$. Observe que $\tilde{l}_i \leq 0$ e $\tilde{u}_i \geq 0$. Como $\mathbf{x}$ não é φ -estacionário, é fácil mostrar que $\bar{\alpha} > 0$. Mais que isso, podemos dizer que $\bar{\alpha} = \beta \tilde{\alpha}$, $\beta \in (0, 1]$. Neste caso,

$$\begin{aligned} M(\mathbf{0}) - M(\mathbf{s}_n^d) &= M(\mathbf{0}) - M(\beta \tilde{\alpha} \mathbf{d}_n) \\ &= \beta \tilde{\alpha} \mathbf{d}_n^T \mathbf{d}_n - \frac{\beta^2 \tilde{\alpha}^2}{2} \mathbf{d}_n^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{d}_n \\ &= \beta \frac{(\mathbf{d}_n^T \mathbf{d}_n)^2}{\mathbf{d}_n^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{d}_n} - \frac{\beta^2}{2} \frac{(\mathbf{d}_n^T \mathbf{d}_n)^2}{\mathbf{d}_n^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{d}_n} \\ &= \left(\beta - \frac{\beta^2}{2} \right) \tilde{\alpha} \mathbf{d}_n^T \mathbf{d}_n \\ &= \left(1 - \frac{\beta}{2} \right) \bar{\alpha} \|\mathbf{d}_n\|_2^2. \end{aligned}$$

Observando (4.19), notamos que existe $\bar{\delta} \in (0, \tilde{\alpha}]$ tal que, $\forall \delta \in (0, \bar{\delta}]$, temos $\|\bar{\alpha} \mathbf{d}_n\|_\infty \leq \delta$, de modo que

$$\bar{\alpha} \|\mathbf{d}_n\|_2^2 \geq \|\bar{\alpha} \mathbf{d}_n\|_\infty \|\mathbf{d}_n\|_2 \geq \|\mathbf{d}_n\|_2 \delta.$$

Logo,

$$P_{red}^{fct} = M(\mathbf{0}) - M(\mathbf{s}) \geq M(\mathbf{0}) - M(\mathbf{s}_n^d) = \left(1 - \frac{\beta}{2} \right) \|\mathbf{d}_n\|_2 \delta. \quad (4.20)$$

Agora, usando Taylor, podemos escrever

$$C(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}) = C(\mathbf{x}^{(k)}) + A(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s} + \mathcal{O}(\|\mathbf{s}\|_2^2).$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}) &= \frac{1}{2} \|C(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s})\|_2^2 \\
&= \frac{1}{2} C(\mathbf{x}^{(k)})^T C(\mathbf{x}^{(k)}) + C(\mathbf{x}^{(k)})^T A(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{s} \\
&\quad + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T A(\mathbf{x}^{(k)})^T A(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{s} + \mathcal{O}(\|\mathbf{s}\|_2^2) \\
&= M(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{s}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{s}\|_2^2).
\end{aligned}$$

De forma análoga, temos

$$f(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}) = L(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{s}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{s}\|_2^2).$$

Assim, para δ suficientemente pequeno, temos

$$A_{red}(\delta) = P_{red}(\delta) + \mathcal{O}(\delta^2),$$

de modo que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{|A_{red}(\delta) - P_{red}(\delta)|}{\delta} = 0. \quad (4.21)$$

A nossa escolha de θ garante que $P_{red} \geq 0.5P_{red}^{fct}$, de modo que, de (4.20), temos

$$P_{red} \geq (2 - \beta) \|\mathbf{d}_n\|_2 \frac{\delta}{4}.$$

Como $\lim_{\delta \rightarrow 0} \beta(\delta) = 0$, temos $\beta < 1$ para δ suficientemente pequeno, de modo que

$$P_{red} \geq \|\mathbf{d}_n\|_2 \frac{\delta}{4}. \quad (4.22)$$

De (4.21) e (4.22), temos

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left| \frac{A_{red}(\delta)}{P_{red}(\delta)} - 1 \right| = 0. \quad (4.23)$$

Assim, $A_{red} \geq 0.1P_{red}$ para δ suficientemente pequeno, de modo que o passo é aceito. ■

Lema 4.5.2. *Suponha que $\mathbf{x}^{(k)}$ não seja φ -estacionário e que exista $\mathbf{s}_n$. Então, em um número finito de passos, o ponto $\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_c$ é aceito.*

Prova. Se $\mathbf{x}^{(k)}$ não é φ -estacionário, então $\mathbf{s}_n^m$, solução de

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\mathbf{s}\|_\infty \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{s} = -\mathbf{C} \\ & \max\{-0.8\delta_k, \mathbf{x}^{\min} - \mathbf{x}\} \leq \mathbf{s} \leq \min\{0.8\delta_k, \mathbf{x}^{\max} - \mathbf{x}\} \end{aligned}$$

é tal que $\|\mathbf{s}_n^m\|_\infty > 0$. Neste caso, supondo que a redução de passo seja aplicada, temos

$$\delta_{k+1} = 0.25 \|\mathbf{s}\|_\infty \leq 0.25 \delta_k.$$

Após j recusas de passo, teremos

$$\delta_{k+j} = 0.25^j \delta_k,$$

de modo que, após $\left\lceil \log_2 \sqrt{\frac{0.8\delta_k}{\|\mathbf{s}_n^m\|_\infty}} \right\rceil$ iterações, $\mathbf{s}_n$ deixa de ser aceito, e o Lema 4.5.1 pode ser aplicado. ■

Lema 4.5.3. *Suponha que $\mathbf{x}^{(k)}$ seja factível e regular para o problema (4.1) e que as condições KKT não sejam verificadas em $\mathbf{x}^{(k)}$. Então, se $\mathbf{s}_n$ sempre existe, após um número finito de passos, $\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_c$ é aceito.*

Prova. Se $\mathbf{x}^{(k)}$ é regular mas não é estacionário para o problema (4.1), então temos $\mathbf{d}_t = P_{\mathcal{N}}(-\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})) \neq \mathbf{0}$, onde $P_{\mathcal{N}}$ denota a projeção ortogonal sobre o conjunto

$$\mathcal{N} = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \mid A(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s} = \mathbf{0}, \max\{-\delta_k, \mathbf{x}^{\min} - \mathbf{x}^{(k)}\} \leq \mathbf{s} \leq \min\{\delta_k, \mathbf{x}^{\max} - \mathbf{x}^{(k)}\}\}.$$

Seja $\bar{\alpha}$ a solução do problema auxiliar

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d}_t \\ \text{s. a} \quad & \alpha \mathbf{d} \in \mathcal{N} \\ & \alpha > 0. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Como o problema (4.24) é linear, $\alpha \mathbf{d} \in \bar{\mathcal{N}}$, onde $\bar{\mathcal{N}}$ denota a fronteira do conjunto $\mathcal{N}$. Assim, se $\delta_k < \min\{x_j^{\max} - x_j^{\min}\}$, então $\|\bar{\alpha} \mathbf{d}_t\|_\infty = \delta_k$. Neste caso,

pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{0}) - L(\mathbf{x}^{(k)}, \alpha \mathbf{d}_t) &= -\bar{\alpha} \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d}_t \\
&\geq \|\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})\|_2 \|\bar{\alpha} \mathbf{d}_t\|_2 \\
&\geq \|\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})\|_2 \|\bar{\alpha} \mathbf{d}_t\|_\infty \\
&= \|\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})\|_2 \delta_k.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Uma vez que o vetor $\mathbf{s}_c$ obtido no passo 3.1 é a solução de (4.11), temos, de (4.25), que

$$P_{red}^{opt} = L(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{0}) - L(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{s}_c) \geq L(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{0}) - L(\mathbf{x}^{(k)}, \alpha \mathbf{d}_t) \geq \|\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})\|_2 \delta_k.$$

Por outro lado, como $\mathbf{x}^{(k)}$ é factível, temos que $M(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{0}) = M(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{s}) = 0$. Assim, $\theta_k = \min\{1, \theta_k^{large}\}$ não é reduzido com δ , e temos

$$P_{red} = \theta_k P_{red}^{opt} \geq \theta_k \|\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})\|_2 \delta_k. \tag{4.26}$$

Logo, como (4.21) também vale, neste caso, obtemos (4.23) usando (4.21) e (4.26), de modo que, para δ suficientemente pequeno, $A_{red} \geq 0.1 P_{red}$, e o passo é aceito. ■

4.6 Todo ponto limite de $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ é φ -estacionário

Como vimos, há três situações nas quais o Algoritmo 4.1 termina uma iteração:

- Quando $\mathbf{x}^{(k)}$ é φ -estacionário, mas infactível.
- Quando $\mathbf{x}^{(k)}$ é factível, mas não é regular.
- Quando $\mathbf{x}^{(k)}$ é um ponto estacionário do problema (4.1).

Seguindo os passos adotados por Gomes *et al.* [18] na demonstração de convergência de seu algoritmo de programação quadrática sequencial, veremos, agora, o que acontece quando tomamos uma sequência infinita de iterandos produzida pelo Algoritmo 4.1.

Lema 4.6.1. *Suponha que $\mathbf{x}^* \in X$ não seja φ -estacionário. Então, existem $\varepsilon_1, \delta'_1, c_1 > 0$ tais que, $\forall \mathbf{x} \in X, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_2 \leq \varepsilon_1$, se o Algoritmo 4.1 acima é aplicado a $\mathbf{x}$, temos $P_{red} \geq c_1 \min\{\delta, \delta'_1\}$.*

Prova. Se é possível encontrar $\mathbf{s}_n$, então $\theta_k^{sup} = 1$ e $P_{red} \geq \frac{1}{2}P_{red}^{ct} = \frac{1}{2}M(\mathbf{0}) = \frac{1}{2}\varphi(\mathbf{x})$, para todo θ_k . Assim, definindo $c_1 = \frac{1}{2}\varphi(\mathbf{x})$ e $\delta'_1 = 1$, temos o resultado desejado. Se não for possível encontrar $\mathbf{s}_n$, então a demonstração é semelhante àquela do Lema 3 de Gomes *et al.* [18], substituindo a constante 0.9 por 1. Neste caso, $c_1 = \frac{1}{32}\|\nabla\varphi(\mathbf{x}^*)\|_2$. ■

Lema 4.6.2. *Suponha que $\mathbf{x}^* \in X$ não seja φ -estacionário. Então, existem $\varepsilon_2, \delta'_2 > 0$ tais que, $\forall \mathbf{x} \in X, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_2 \leq \varepsilon_2, \delta \geq \delta'_2$, se o Algoritmo 4.1 é aplicado a $\mathbf{x}$, temos $A_{red} \geq 0.1P_{red}$.*

Prova. Vide Lema 4 de Gomes *et al.* [18]. ■

Lema 4.6.3. *Suponha que $\mathbf{x}^*$ não seja φ -estacionário e que K_1 seja um conjunto infinito de índices tal que $\lim_{k \in K_1} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^*$. Então, as componentes do conjunto $\{\delta_k \mid k \in K_1\}$ estão afastadas do zero. Além disso, existe $c_2 > 0$ tal que, para $k \in K_1$ suficientemente grande, temos $A_{red} \geq c_2$.*

Prova. Vide Lema 5 de Gomes *et al.* [18]. ■

Lema 4.6.4. *Suponha que o Algoritmo 4.1 gere uma sequência infinita $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^\infty$. Então, a sequência θ_k é convergente.*

Prova. Vide Lema 6 de Gomes *et al.* [18]. ■

Hipótese de compacidade H1. A sequência $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ gerada pelo Algoritmo 4.1 é limitada.

Teorema 4.6.1. *Seja $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ uma sequência infinita gerada pelo Algoritmo 4.1. Suponha que H1 seja atendida. Então, todo ponto limite de $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ é φ -estacionário.*

Prova. A demonstração é a mesma do Teorema 1 de Gomes *et al.* [18], substituindo l_k por L_k .

4.7 O algoritmo encontra um ponto estacionário

Nesta seção, mostraremos que existe um ponto limite da sequência gerada pelo Algoritmo 4.1 que é estacionário para o problema (4.1).

Hipótese H2. Seja $\tilde{\mathbf{s}}_n$ o vetor obtido no passo 1 ou $\tilde{\mathbf{s}}_n = \mathbf{s}_c$ obtido no passo 2.4 do Algoritmo 4.1. Neste caso, $\|\tilde{\mathbf{s}}_n\|_2 \leq \mathcal{O}(\|C(\mathbf{x}^{(k)})\|_2)$.

Esta hipótese é atendida, por exemplo, se $\tilde{\mathbf{s}}_n$ é obtido resolvendo-se o problema de programação linear

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m (u_i^- + u_i^+) \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{s}_n - \mathbf{u}^- + \mathbf{u}^+ = -\mathbf{C} \\ & \max\{-0.8\delta_k, \mathbf{x}^{\min} - \mathbf{x}^{(k)}\} \leq \mathbf{s}_n \leq \min\{0.8\delta_k, \mathbf{x}^{\max} - \mathbf{x}^{(k)}\} \\ & \mathbf{u}^-, \mathbf{u}^+ \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.27}$$

partindo de $\mathbf{s}_n^d$.

Neste caso, supondo que $\tilde{\mathbf{s}}_n$ seja uma solução básica ótima do problema (4.27), se $\mathbf{u}^- = \mathbf{u}^+ = \mathbf{0}$, então $\tilde{\mathbf{s}}_n = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}$, onde $\mathbf{B}$ é uma matriz não singular formada por um subconjunto das colunas de $\mathbf{A}$. Neste caso, a hipótese é satisfeita trivialmente.

Por outro lado, mesmo que alguma componente de $\mathbf{u}^-$ ou de $\mathbf{u}^+$ seja não nula, temos $\tilde{\mathbf{s}}_n = \mathbf{B}^{-1}(-\mathbf{C} + \mathbf{u}^- - \mathbf{u}^+)$, de modo que

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{s}}_n\|_2 &\leq \|\mathbf{B}^{-1}\|_2 \|\mathbf{C} + \mathbf{u}^- - \mathbf{u}^+\|_2 \\ &\leq \|\mathbf{B}^{-1}\|_2 (\|\mathbf{C}\|_2 + \|\mathbf{u}^- - \mathbf{u}^+\|_2) \\ &\leq \|\mathbf{B}^{-1}\|_2 (\|\mathbf{C}\|_2 + \|\mathbf{u}^- - \mathbf{u}^+\|_1). \end{aligned}$$

Observando que $\|\mathbf{u}^- + \mathbf{u}^+\|_1$ é a função objetivo do problema (4.27) e que se $\mathbf{s}_n = \mathbf{0}$, então $\|\mathbf{u}^- - \mathbf{u}^+\|_1 = \|\mathbf{C}\|_1$, temos

$$\|\mathbf{s}_n\|_2 \leq \|\mathbf{B}^{-1}\|_2 (\|\mathbf{C}\|_2 + \|\mathbf{C}\|_1) \leq (1 + \sqrt{m}) \|\mathbf{B}\|_2 \|\mathbf{C}\|_2,$$

de modo que a Hipótese H2 também é satisfeita.

Lema 4.7.1. *Seja $\mathbf{x}$ um ponto tal que $\|C(\mathbf{x})\|_2 \geq \beta\delta$. Neste caso, existe $c_0 > 0$ tal que*

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{0}) - M(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{s}}_n(\mathbf{x}, \delta)) \geq c_0 \delta \|C(\mathbf{x})\|_2$$

sempre que o Algoritmo 4.1 é aplicado a $\mathbf{x}$.

Prova. Se $\tilde{\mathbf{s}}_n$ é obtido no passo 1, então $M(\tilde{\mathbf{s}}_n) = 0$, de modo que

$$M(\mathbf{0}) - M(\tilde{\mathbf{s}}_n) = \frac{1}{2} \|C(\mathbf{x})\|_2^2 \geq \frac{1}{2} \beta \delta \|C(\mathbf{x})\|_2.$$

Assim, definindo $c_0 = \beta/2$, obtemos o resultado desejado.

Por outro lado, se $\tilde{\mathbf{s}}_n$ é obtido no passo 2.4, então

$$M(\mathbf{0}) - M(\tilde{\mathbf{s}}_n) \geq M(\mathbf{0}) - M(\mathbf{s}_n^d). \quad (4.28)$$

Seja $\tilde{\alpha}$ a solução do problema irrestrito $\min M(-\alpha \nabla \varphi(\mathbf{x}))$. Neste caso,

$$\tilde{\alpha} = \frac{\nabla \varphi(\mathbf{x})^T \nabla \varphi(\mathbf{x})}{\nabla \varphi(\mathbf{x})^T A(\mathbf{x})^T A(\mathbf{x}) \nabla \varphi(\mathbf{x})} \quad (4.29)$$

e, do passo 2.3 do Algoritmo 4.1, $\mathbf{s}_n^d = -\gamma \alpha \nabla \varphi(\mathbf{x})$, onde $\gamma \in (0, 1]$. Logo, de (4.28) e (4.29), temos

$$\begin{aligned} M(\mathbf{0}) - M(\tilde{\mathbf{s}}_n) &\geq M(\mathbf{0}) - M(-\gamma \tilde{\alpha} \nabla \varphi(\mathbf{x})) \\ &= -\frac{1}{2} \gamma^2 \tilde{\alpha}^2 \nabla \varphi(\mathbf{x})^T A(\mathbf{x})^T A(\mathbf{x}) \nabla \varphi(\mathbf{x}) + \gamma \tilde{\alpha} C(\mathbf{x})^T A(\mathbf{x}) \nabla \varphi(\mathbf{x}) \\ &= \gamma \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \frac{(\nabla \varphi(\mathbf{x})^T \nabla \varphi(\mathbf{x}))^2}{\nabla \varphi(\mathbf{x})^T A(\mathbf{x})^T A(\mathbf{x}) \nabla \varphi(\mathbf{x})} \\ &\geq \gamma \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \frac{\|\nabla \varphi(\mathbf{x})\|_2^2}{\|A(\mathbf{x})^T A(\mathbf{x})\|_2} \\ &= \gamma \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \frac{\|C(\mathbf{x})^T A(\mathbf{x}) A(\mathbf{x})^T C(\mathbf{x})\|_2^2}{\|A(\mathbf{x})^T A(\mathbf{x})\|_2}. \end{aligned}$$

Sejam, então, σ_1 e σ_m , respectivamente, o maior e o menor valor singular de $A(\mathbf{x})$. Neste caso,

$$M(\mathbf{0}) - M(\tilde{\mathbf{s}}_n) \geq \gamma \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \frac{\sigma_m^2}{\sigma_1} \|C(\mathbf{x})\|_2^2 \geq \gamma \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \frac{\sigma_m^2}{\sigma_1} \beta \delta \|C(\mathbf{x})\|_2.$$

Logo, definindo $c_0 = \gamma \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \frac{\sigma_m^2}{\sigma_1} \beta$, provamos o Lema. $\blacksquare$

Lema 4.7.2. *Seja $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ uma sequência gerada pelo Algoritmo 4.1. Suponha que a subsequência $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \in K_1}$ convirja para o ponto factível e regular $\mathbf{x}^*$, que não é estacionário para o problema (4.1). Então, existem $c_1, k_1, \delta' > 0$ tais que, para $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}^{(k)} \mid k \in K_1, k \geq k_1\}$, temos*

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{s}_n) - L(\mathbf{x}, \mathbf{s}_c) \geq c_1 \min\{\delta, \delta'\}.$$

Prova. Se a subsequência $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \in K_1}$ converge para o ponto factível e regular $\mathbf{x}^*$, então existe $k_0 > 0$ tal que, para $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}^{(k)} \mid k \in K_1, k \geq k_0\}$, o passo $\mathbf{s}_n$ existe (podendo ser igual a zero).

De forma análoga ao que foi feito no Lema 4.5.3, definamos $\mathbf{d}_t = P_\Gamma(-\nabla f(\mathbf{x}^{(k)}))$, onde

$$\Gamma = \{\mathbf{s} \in N(A(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x}^{\min} \leq \mathbf{x} + \mathbf{s}_n + \mathbf{s} \leq \mathbf{x}^{\max}\},$$

e $N(A(\mathbf{x}))$ denota o espaço nulo da matriz $A(\mathbf{x})$.

Definamos, também, $\mathbf{s}_t^d$ como a solução do problema

$$\begin{aligned} \min \quad & L(\mathbf{x}, \mathbf{s}_n + \mathbf{s}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T (\mathbf{s}_n + \mathbf{s}) \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{s} = t\mathbf{d}_t, \quad t \geq 0 \\ & \|\mathbf{s}_n + \mathbf{s}\|_\infty \leq \delta \\ & \mathbf{x}^{\min} \leq \mathbf{x} + \mathbf{s}_n + \mathbf{s} \leq \mathbf{x}^{\max} \end{aligned} \tag{4.30}$$

É fácil notar que $\mathbf{s}_t^d = \tilde{t}\mathbf{d}_t$ é a solução de

$$\begin{aligned} \min \quad & (\nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d}_t) t \\ \text{s. a} \quad & 0 \leq t \leq t_{\max}, \end{aligned}$$

onde

$$t_{\max} = \min \left\{ 1, \min_{d_{t_i} < 0} \left\{ \frac{\delta + s_{n_i}}{-d_{t_i}}, \frac{x_i + s_{n_i} - x_i^{\min}}{-d_{t_i}} \right\}, \min_{d_{t_i} > 0} \left\{ \frac{\delta - s_{n_i}}{d_{t_i}}, \frac{x_i^{\max} - x_i - s_{n_i}}{d_{t_i}} \right\} \right\}.$$

Como o problema (4.30) é linear e $\nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d}_t < 0$, temos $\tilde{t} = t_{\max}$. Além disso, como $t = 1$ satisfaz $\mathbf{x}^{\min} \leq \mathbf{x} + \mathbf{s}_n + \mathbf{s} \leq \mathbf{x}^{\max}$, temos

$$t_{\max} \geq \min \left\{ 1, \min_{d_{t_i} < 0} \left\{ \frac{\delta + s_{n_i}}{-d_{t_i}} \right\}, \min_{d_{t_i} > 0} \left\{ \frac{\delta - s_{n_i}}{d_{t_i}} \right\} \right\}. \tag{4.31}$$

Como $\mathbf{s}_c$ é a solução de (4.11), temos

$$L(\mathbf{s}_n) - L(\mathbf{s}_c) \geq L(\mathbf{s}_n) - L(\mathbf{s}_n + \mathbf{s}_t^d) = -t_{\max} \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d}_t. \quad (4.32)$$

Uma vez que $P_{\Gamma}(-\nabla f(\mathbf{x}))$ é uma função contínua de $\mathbf{x}$ e que $\mathbf{x}^*$ é regular e factível, existem $c'_1, c'_2 > 0$ e $k_1 \geq k_0$ tais que, para todo $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}^{(k)} \mid k \in K_1, k \geq k_1\}$,

$$\|\mathbf{d}_t\|_{\infty} \leq c'_1 \quad \text{e} \quad -\nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d}_t \geq c'_2. \quad (4.33)$$

Como $\|\mathbf{s}_n\|_{\infty} \leq 0.8\delta_k$, temos, de (4.31), que $t \geq \min \left\{ 1, \frac{0.2\delta}{\|\mathbf{d}_t\|_{\infty}} \right\}$. Assim, de (4.33), obtemos

$$t \geq \min \left\{ 1, \frac{0.2\delta}{c'_1} \right\} = \frac{0.2}{c'_1} \min \left\{ \frac{c'_1}{0.2}, \delta \right\}. \quad (4.34)$$

Juntando (4.32), (4.33) e (4.34), obtemos, $\forall x \in \{\mathbf{x}^{(k)} \mid k \in K_1, k \geq k_0\}$,

$$L(\mathbf{s}_n) - L(\mathbf{s}_c) \geq \frac{0.2c'_2}{c'_1} \min \left\{ \frac{c'_1}{0.2}, \delta \right\}.$$

O resultado desejado é obtido tomando $c_1 = \frac{0.2c'_2}{c'_1}$ e $\delta' = \frac{c'_1}{0.2}$. ■

Lema 4.7.3. *Suponha que H2 seja satisfeita e que sejam válidas as hipóteses do Lema 4.7.2. Então, existem $\beta, c_2, k_2 > 0$ tais que, se $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}^{(k)} \mid k \in K_1, k \geq k_2\}$ e $\|C(\mathbf{x})\|_2 \leq \beta\delta_k$, então*

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{0}) - L(\mathbf{x}, \mathbf{s}_c) \geq c_2 \min\{\delta, \delta'\}$$

e

$$\theta^{sup}(\mathbf{x}, \delta) = 1,$$

onde θ^{sup} é definido em (4.18) e δ' é definido no Lema 4.7.2.

Prova. Como no Lema 4.7.2, suponhamos que exista $\mathbf{s}_n$. Neste caso, temos

$$L(\mathbf{0}) - L(\mathbf{s}_c) \geq (L(\mathbf{s}_n) - L(\mathbf{s}_c)) - |L(\mathbf{0}) - L(\mathbf{s}_n)|. \quad (4.35)$$

De (4.35), do Lema 4.7.2 e da Hipótese H2, temos

$$L(\mathbf{0}) - L(\mathbf{s}_c) \geq c_1 \min\{\delta, \delta'\} - \mathcal{O}(\|C(\mathbf{x})\|_2), \quad (4.36)$$

para todo $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}^{(k)} \mid k \in K_1, k \geq k_2\}$. Assim, escolhendo β convenientemente, provamos a primeira parte do Lema.

Por outro lado, da Hipótese H2, temos $M(\mathbf{0}) - M(\mathbf{s}_c) = M(\mathbf{0}) - M(\tilde{\mathbf{s}}_n) \leq \mathcal{O}(\|C(\mathbf{x})\|_2)$. Assim, para $\theta^{sup} = 1$, temos

$$P_{red} - 0.5(M(\mathbf{x}, \mathbf{0}) - M(\mathbf{x}, \mathbf{s}_c)) \geq c_1 \min\{\delta, \delta'\} - \mathcal{O}(\|C(\mathbf{x})\|_2).$$

Logo, tomando β de forma adequada, provamos a segunda parte do Lema. ■

Lema 4.7.4. *Suponha que sejam válidas as hipóteses dos Lemas 4.7.2 e 4.7.3, bem como a hipótese H1. Então, $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_k = 0$.*

Prova. Suponhamos, por contradição, que a sequência $\{\theta_k\}_{k=1}^\infty$ não convirja para 0. Como, pelo Lema 4.6.4, $\{\theta_k\}_{k=1}^\infty$ converge, existem $k_3 \geq k_2$ e $\hat{\theta} > 0$ tais que $\theta_k \geq \hat{\theta}$ para $k \geq k_3$.

Suponhamos, agora, que $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}^{(k)} \mid k \in K_1, k \geq k_3\}$. Como $M(\mathbf{x}, \mathbf{0}) - M(\mathbf{x}, \mathbf{s}_c) \geq 0$, temos

$$P_{red} \geq \theta[L(\mathbf{x}, \mathbf{0}) - L(\mathbf{x}, \mathbf{s}_c)],$$

de modo que, de (4.36), obtemos

$$P_{red} \geq \theta c_1 \min\{\delta, \delta'\} - \mathcal{O}(\|C(\mathbf{x})\|_2).$$

Como θ não é aumentado enquanto o passo é recusado, podemos dizer que, enquanto o passo não é aceito, temos

$$P_{red} \geq \hat{\theta} c_1 \min\{\delta, \delta'\} - \mathcal{O}(\|C(\mathbf{x})\|_2). \quad (4.37)$$

Por outro lado, usando Taylor e o fato de ∇f e $\mathbf{A}$ serem Lipschitz contínuas, obtemos

$$|A_{red} - P_{red}| \leq \mathcal{O}(\delta^2).$$

Assim, existe $\tilde{\delta} \in (0, \delta) \subset (0, \delta_{\min})$ tal que, se $\delta \in (0, \tilde{\delta})$ e $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}^{(k)} \mid k \in K_1, k \geq k_3\}$,

$$|A_{red} - P_{red}| \leq \hat{\theta} c_1 \frac{\tilde{\delta}}{40}.$$

Seja, então, $k_4 \geq k_3$ tal que, $\forall \mathbf{x} \in \{\mathbf{x}^{(k)} \mid k \in K_1, k \geq k_4\}$, o termo $\mathcal{O}(\|C(\mathbf{x})\|_2)$ de (4.37) satisfaz $\mathcal{O}(\|C(\mathbf{x})\|_2) \leq \hat{\theta} c_1 \frac{\tilde{\delta}}{20}$, de modo que

$$P_{red} \geq \hat{\theta} c_1 \min\{\delta, \delta'\} - \hat{\theta} c_1 \frac{\tilde{\delta}}{20}.$$

Se, além disso, $\delta \in [\tilde{\delta}/10, \tilde{\delta})$, então

$$P_{red} \geq \hat{\theta}_{c_1} \frac{\tilde{\delta}}{10} - \hat{\theta}_{c_1} \frac{\tilde{\delta}}{20} = \hat{\theta}_{c_1} \frac{\tilde{\delta}}{20}.$$

Assim, $\forall \delta \in [\tilde{\delta}/10, \tilde{\delta})$ e $\forall \mathbf{x} \in \{\mathbf{x}^{(k)} \mid k \in K_1, k \geq k_4\}$, temos

$$\frac{|A_{red} - P_{red}|}{P_{red}} \leq 0.5,$$

o que implica que, para algum $\delta \in [\tilde{\delta}/10, \tilde{\delta})$, o passo é aceito. Assim, δ_k está afastado do zero para $k \in K_1, k \geq k_4$, de modo que P_{red} também está afastado do zero. Como $A_{red} \geq 0.1P_{red}$ e estamos tomando uma sequência infinita de pontos, e como $\{\theta_k\}_{k=1}^\infty$ é convergente, concluímos que $\psi(\mathbf{x}, \theta)$ é ilimitada, o que contradiz a hipótese de compacidade H1, provando o Lema. ■

Lema 4.7.5. *Suponha válidas as hipóteses dos Lemas 4.7.1 a 4.7.3, bem como a Hipótese H2. Se $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}^{(k)} \mid k \in K_1, k \geq k_2\}$ e $\|C(\mathbf{x})\|_2 \geq \alpha\delta$, então δ/θ^{sup} é uniformemente limitado.*

Prova. Quando $\theta^{sup} \neq 1$, observamos que

$$\theta^{sup} = \frac{P_{red}}{2(P_{red}^{fct} - P_{red}^{opt})} = \frac{M(\mathbf{0}) - M(\mathbf{s}_n)}{2[M(\mathbf{0}) - M(\mathbf{s}_n) - L(\mathbf{0}) + L(\mathbf{s}_c)]}.$$

Pela Hipótese H2 e pelo Lema 4.7.1, se $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}^{(k)} \mid k \in K_1, k \geq k_2\}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\theta^{sup}} &= 1 + \frac{L(\mathbf{s}_c) - L(\mathbf{0})}{M(\mathbf{0}) - M(\mathbf{s}_n)} + \frac{L(\mathbf{s}_n) - L(\mathbf{0})}{M(\mathbf{0}) - M(\mathbf{s}_n)} \\ &\leq 1 + \frac{|L(\mathbf{0}) - L(\mathbf{s}_n)|}{M(\mathbf{0}) - M(\mathbf{s}_n)} \\ &\leq 1 + \frac{\mathcal{O}(\|C(\mathbf{x})\|_2)}{c_0\delta\|C(\mathbf{x})\|_2} \\ &\leq 1 + \mathcal{O}(1/\delta). \end{aligned}$$

Assim, δ/θ^{sup} é limitado. ■

Lema 4.7.6. *Suponha que são válidas as hipóteses dos Lemas 4.7.1 a 4.7.3.*

Então, existem $k_5 \geq k_2, \tilde{\theta} \in (0, 1]$ tais que, se $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}^{(k)} \mid k \in K_1, k \geq k_5\}, \|C(\mathbf{x})\|_2 \geq \alpha\delta$ e $\theta \leq \tilde{\theta}$, então $A_{red} \geq 0.1P_{red}$.

Prova. Uma vez que $\nabla f(\mathbf{x})$ é Lipschitz contínua, temos

$$\begin{aligned} A_{red} &= \theta[f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} + \mathbf{s}_c)] + (1 - \theta)[\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{s}_c)] \\ &= \theta[L(\mathbf{0}) - L(\mathbf{s}_c) + \mathcal{O}(\delta^2)] + (1 - \theta)[\|C(\mathbf{x})\|_2^2 - \|C(\mathbf{x} + \mathbf{s}_n)\|_2^2]/2. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $A(\mathbf{x})$ também é Lipschitz contínua, vem

$$\begin{aligned} \|C(\mathbf{x})\|_2^2 - \|C(\mathbf{x} + \mathbf{s}_n)\|_2^2 &= -\mathbf{s}_c^T A(\mathbf{x})^T A(\mathbf{x}) \mathbf{s}_c - 2\mathbf{s}_c^T A(\mathbf{x})^T C(\mathbf{x}) \\ &\quad + \|C(\mathbf{x})\|_2 \mathcal{O}(\delta^2) + \mathcal{O}(\delta^3) \\ &= 2[M(\mathbf{0}) - M(\mathbf{s}_c)] + \|C(\mathbf{x})\|_2 \mathcal{O}(\delta^2) + \mathcal{O}(\delta^3). \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} A_{red} &= \theta[L(\mathbf{0}) - L(\mathbf{s}_c) + \mathcal{O}(\delta^2)] \\ &\quad + (1 - \theta)[M(\mathbf{0}) - M(\mathbf{s}_c) + \|C(\mathbf{x})\|_2 \mathcal{O}(\delta^2) + \mathcal{O}(\delta^3)] \\ &= P_{red} + \theta \mathcal{O}(\delta^2) + (1 - \theta)[\|C(\mathbf{x})\|_2 \mathcal{O}(\delta^2) + \mathcal{O}(\delta^3)]. \end{aligned}$$

Assim, se $\|C(\mathbf{x})\|_2 \geq \alpha\delta$,

$$|A_{red} - P_{red}| \leq \theta \|C(\mathbf{x})\|_2 \mathcal{O}(\delta) + \|C(\mathbf{x})\|_2 \mathcal{O}(\delta^2). \quad (4.38)$$

Como θ é tal que $P_{red} \geq 0.5[M(\mathbf{0}) - M(\mathbf{s}_c)]$, o Lema 4.7.1 implica que, para $k \in K_1$ suficientemente grande,

$$P_{red} \geq \frac{c_0}{2} \|C(\mathbf{x})\|_2 \delta.$$

Logo, $\delta \|C(\mathbf{x})\|_2 / P_{red}$ é uniformemente limitado, de modo que, dividindo ambos os termos de (4.38) por P_{red} , encontramos

$$\left| \frac{A_{red}}{P_{red}} - 1 \right| \leq \mathcal{O}(\theta) + \mathcal{O}(\delta) \leq \mathcal{O}(\theta) + \mathcal{O}(\|C(\mathbf{x})\|_2 / \alpha), \quad (4.39)$$

obtendo o resultado desejado. ■

Lema 4.7.7. *Seja $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ uma sequência infinita gerada pelo Algoritmo 4.1. Suponha que todos os pontos limite de $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ sejam factíveis e regulares e que as Hipóteses H1 e H2 sejam válidas. Então, existe um ponto limite da sequência $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ que é estacionário para o problema (4.1).*

Prova. Vide o Lema 13 de Gomes *et al.* [18].

Teorema 4.7.1. *Seja $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ uma sequência infinita gerada pelo Algoritmo 4.1. Suponha que as hipóteses H1 e H2 sejam verificadas. Então, todos os pontos limite de $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ são φ -estacionários. Além disso, se todos os pontos limite de $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ são factíveis e regulares, existe um ponto limite $\mathbf{x}^*$ que é estacionário para o problema (4.1). Em particular, se todos os pontos φ -estacionários são factíveis e regulares, existe uma subsequência de $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge para um ponto estacionário regular de (4.1).*

Prova. Esse teorema é consequência direta do Teorema 4.6.1 e do Lema 4.7.7. ■

Capítulo 5

Método das Assíntotas Móveis

Neste capítulo, vamos introduzir mais um método numérico amplamente utilizado na literatura para a resolução de problemas de otimização topológica de estruturas ou de mecanismos flexíveis. O método em questão é denominado *Método das Assíntotas Móveis* (MMA), e foi desenvolvido por Svanberg [42]. Estudamos as características principais deste método, bem como uma versão globalmente convergente, que também foi proposta por Svanberg [46].

5.1 Descrição do método

Considere o problema de otimização escrito na forma

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s. a} \quad & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \mathbf{x}^{\min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\max}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é um vetor com as variáveis do problema, $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, m$, são funções duas vezes diferenciáveis, e $\mathbf{x}^{\min} = (x_1^{\min} \dots x_n^{\min})^T$ e $\mathbf{x}^{\max} = (x_1^{\max} \dots x_n^{\max})^T$ são, respectivamente, os vetores com os limitantes inferiores e superiores para as variáveis.

O Método das Assíntotas Móveis (MMA), desenvolvido por Svanberg [42], é baseado em um tipo especial de aproximação convexa. Nele, é resolvida uma sequência de subproblemas cujas soluções são factíveis (ou quase factíveis) para o problema de otimização (5.1). Este método é capaz de lidar com qualquer tipo

de restrição, desde que as suas derivadas em relação às variáveis do problema possam ser calculadas (analítica ou numericamente).

De acordo com os sinais das derivadas de f_i num ponto $\mathbf{x}^{(k)}$, define-se uma função aproximadora $\widehat{f}_i^{(k)}$ da função original f_i , de modo que $\widehat{f}_i^{(k)}$ apresenta termos do tipo $1/(x_j - l_j^{(k)})$ ou $1/(u_j^{(k)} - x_j)$, onde $l_j^{(k)}$ é um limitante inferior e $u_j^{(k)}$ é um limitante superior para a variável x_j . Conforme Svanberg [42], as funções aproximadoras $\widehat{f}_i^{(k)}$, para $i = 0, \dots, m$, são definidas como

$$\widehat{f}_i^{(k)}(\mathbf{x}) = r_i^{(k)} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{u_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j - l_j^{(k)}} \right), \quad (5.2)$$

onde

$$p_{ij}^{(k)} = \max \left\{ 0, (u_j^{(k)} - x_j^{(k)})^2 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right\}, \quad (5.3)$$

$$q_{ij}^{(k)} = \max \left\{ 0, -(x_j^{(k)} - l_j^{(k)})^2 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right\}, \quad (5.4)$$

e

$$r_i^{(k)} = f_i(\mathbf{x}^{(k)}) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{u_j^{(k)} - x_j^{(k)}} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j^{(k)} - l_j^{(k)}} \right). \quad (5.5)$$

Como se observa, as retas $x_j = u_j^{(k)}$ e $x_j = l_j^{(k)}$ são assíntotas verticais das funções $\widehat{f}_i^{(k)}$. Como os valores de $l_j^{(k)}$ e de $u_j^{(k)}$ são alterados entre iterações, diz-se, em um abuso de linguagem, que $l_j^{(k)}$ e $u_j^{(k)}$ são “assíntotas móveis”. Também se nota que $\widehat{f}_i^{(k)}$ é uma aproximação de primeira ordem da função f_i em torno do ponto $\mathbf{x}^{(k)}$, ou seja,

$$\widehat{f}_i^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}) = f_i(\mathbf{x}^{(k)}) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \widehat{f}_i^{(k)}}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)})$$

para cada $i = 0, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. Além disso, as segundas derivadas de $\widehat{f}_i^{(k)}$ em qualquer ponto $\mathbf{x}$ tal que $l_j^{(k)} < x_j < u_j^{(k)}$ para todo j são dadas por

$$\frac{\partial^2 \widehat{f}_i^{(k)}}{\partial x_j^2}(\mathbf{x}) = \frac{2p_{ij}^{(k)}}{(u_j^{(k)} - x_j)^3} + \frac{2q_{ij}^{(k)}}{(x_j - l_j^{(k)})^3} \quad (5.6)$$

e

$$\frac{\partial^2 \widehat{f}_i^{(k)}}{\partial x_j \partial x_l}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{se } j \neq l. \quad (5.7)$$

Das equações (5.3) e (5.4), notamos que $p_{ij}^{(k)} \geq 0$ e $q_{ij}^{(k)} \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Logo, $\widehat{f}_i^{(k)}$ é uma função convexa. Em particular, no ponto $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k)}$, temos

$$\frac{\partial^2 \widehat{f}_i^{(k)}}{\partial x_j^2}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{2 \partial f_i / \partial x_j}{u_j^{(k)} - x_j^{(k)}}, & \text{se } \partial f_i / \partial x_j > 0 \\ -\frac{2 \partial f_i / \partial x_j}{x_j^{(k)} - l_j^{(k)}}, & \text{se } \partial f_i / \partial x_j < 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

Pelas equações (5.7) e (5.8), podemos ver que, quanto mais próximos $l_j^{(k)}$ e $u_j^{(k)}$ estiverem de $x_j^{(k)}$, maiores serão os valores das segundas derivadas não mistas e, portanto, maior será a curvatura das funções aproximadoras $\widehat{f}_i^{(k)}$. Desta forma, as aproximações das funções originais f_i tornam-se mais *conservativas*, isto é, existem valores de l_j e u_j (para cada $j = 1, \dots, n$) para os quais os valores das funções aproximadoras ficam maiores que os valores das funções originais no ponto $\mathbf{x}^{(k)}$. Para ver isso, suponha que $\bar{f}_i^{(k)}$ e $\bar{\bar{f}}_i^{(k)}$ sejam duas funções aproximadoras diferentes associadas aos pares de assíntotas móveis $\{\bar{l}_j^{(k)}, \bar{u}_j^{(k)}\}$ e $\{\bar{\bar{l}}_j^{(k)}, \bar{\bar{u}}_j^{(k)}\}$, respectivamente. Se $\bar{l}_j^{(k)} < \bar{\bar{l}}_j^{(k)} < x_j < \bar{\bar{u}}_j^{(k)} < \bar{u}_j^{(k)}$ para todo $j = 1, \dots, n$, então $\bar{f}_i^{(k)}(\mathbf{x}) \leq \bar{\bar{f}}_i^{(k)}(\mathbf{x})$, para $\bar{l}_j^{(k)} < x_j < \bar{\bar{u}}_j^{(k)}$. Por outro lado, se as assíntotas móveis $l_j^{(k)}$ e $u_j^{(k)}$ estiverem suficientemente distantes de $\mathbf{x}^{(k)}$, então as funções aproximadoras $\widehat{f}_i^{(k)}$ tendem a ter um comportamento linear em torno do ponto $\mathbf{x}^{(k)}$. No caso extremo onde $l_j^{(k)} \rightarrow -\infty$ e $u_j^{(k)} \rightarrow +\infty$, as funções $\widehat{f}_i^{(k)}$ tornam-se de fato lineares, ou seja,

$$\widehat{f}_i^{(k)}(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}^{(k)}) + \nabla f_i(\mathbf{x}^{(k)})^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}),$$

que são aquelas que aproximam as funções originais do problema (5.1) na Programação Linear Sequencial.

No MMA, os valores de $l_j^{(k)}$ e de $u_j^{(k)}$ são sempre finitos. Dessa maneira, cada função aproximadora $\widehat{f}_i^{(k)}$ é estritamente convexa em todas as variáveis x_j , exceto nos casos em que $\partial f_i(\mathbf{x}^{(k)}) / \partial x_j = 0$. Quando isso ocorre, $\widehat{f}_i^{(k)}$ é independente da variável x_j .

O critério heurístico usado para atualizar os valores de $l_j^{(k)}$ e de $u_j^{(k)}$ é baseado nas seguintes premissas:

- Se os iterandos tendem a oscilar, então eles devem ser estabilizados. Neste caso, as assíntotas deverão ficar mais próximas do ponto corrente $\mathbf{x}^{(k)}$.

- Se o processo de resolução está monótono e lento, então as assíntotas devem ser “relaxadas”, ou seja, elas deverão ficar mais distantes do iterando atual $\mathbf{x}^{(k)}$.

A proposta de Svanberg [45] para a atualização de $l_j^{(k)}$ e de $u_j^{(k)}$ é descrita abaixo.

- Nas duas primeiras iterações, ou seja, quando $k = 1$ e $k = 2$, definimos

$$l_j^{(k)} = x_j^{(k)} - 0.5(x_j^{\max} - x_j^{\min}), \quad (5.9)$$

$$u_j^{(k)} = x_j^{(k)} + 0.5(x_j^{\max} - x_j^{\min}). \quad (5.10)$$

- Para $k \geq 3$, tomamos

$$l_j^{(k)} = x_j^{(k)} - \gamma_j^{(k)}(x_j^{(k-1)} - l_j^{(k-1)}), \quad (5.11)$$

$$u_j^{(k)} = x_j^{(k)} + \gamma_j^{(k)}(u_j^{(k-1)} - x_j^{(k-1)}), \quad (5.12)$$

onde

$$\gamma_j^{(k)} = \begin{cases} 0.7, & \text{se } (x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})(x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}) < 0, \\ 1.2, & \text{se } (x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})(x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}) > 0, \\ 1, & \text{se } (x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})(x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}) = 0. \end{cases} \quad (5.13)$$

Sejam $\mathbf{x}^{(0)}$ um ponto factível para o problema (5.1) e $k = 0$. Apresentamos a seguir o algoritmo MMA para a resolução do problema de otimização (5.1), segundo Svanberg [42].

Algoritmo 5.1

Enquanto não é satisfeito algum critério de parada,

1. Determinar $\mathbf{x}^{(k+1)}$, solução de

$$\begin{aligned} \min \quad & r_0^{(k)} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{0j}^{(k)}}{u_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{0j}^{(k)}}{x_j - l_j^{(k)}} \right) \\ \text{s. a} \quad & r_i^{(k)} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{u_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j - l_j^{(k)}} \right) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \alpha_j^{(k)} \leq x_j \leq \beta_j^{(k)}, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde

$$\alpha_j^{(k)} = \max\{x_j^{\min}, 0.9l_j^{(k)} + 0.1x_j^{(k)}\}$$

e

$$\beta_j^{(k)} = \min\{x_j^{\max}, 0.9u_j^{(k)} + 0.1x_j^{(k)}\}.$$

5.2 Método dual para resolver os subproblemas

Antes de estabelecer o método de resolução de cada subproblema descrito por (5.14), vamos introduzir alguns conceitos básicos de dualidade em Programação Não Linear.

Dado um problema de otimização não linear, denominado *problema primal*, podemos definir um *problema dual* associado. Sob certas hipóteses de convexidade e de qualificação das restrições, os problemas primal e dual têm valores ótimos iguais para as respectivas funções objetivo e, dessa forma, é possível resolver o problema primal indiretamente através da resolução do problema dual.

O *problema dual Lagrangiano* associado ao problema (5.1) é definido por

$$\max_{\boldsymbol{\mu}} \quad \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})$$

$$\text{s. a} \quad \boldsymbol{\mu} \geq 0,$$

onde

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = \inf \left\{ f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mu_i f_i(\mathbf{x}), \quad x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, \quad j = 1, \dots, n \right\}.$$

Voltando ao subproblema (5.14), constatamos que este subproblema é convexo, pois cada $\hat{f}_i^{(k)}$ é uma função convexa, e é separável, pois cada termo do somatório de $\hat{f}_i^{(k)}$ depende apenas de uma variável. Sendo assim, de acordo com Svanberg [42], podemos usar um método dual para resolver tal subproblema, conforme descrito abaixo.

A função Lagrangiana associada ao subproblema (5.14) é dada por

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = \hat{f}_0^{(k)}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mu_i \hat{f}_i^{(k)}(\mathbf{x}),$$

onde $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange (ou vetor de variáveis duais) associados às funções aproximadoras $\hat{f}_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, m$.

Após algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = r_0^{(k)} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{r}^{(k)} + \sum_{j=1}^n \mathcal{L}_j(x_j, \boldsymbol{\mu}),$$

onde

$$\mathcal{L}_j(x_j, \boldsymbol{\mu}) = \frac{p_{0j}^{(k)} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{p}_j^{(k)}}{u_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{0j}^{(k)} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{q}_j^{(k)}}{x_j - l_j^{(k)}}$$

e

$$\mathbf{r}^{(k)} = (r_1^{(k)} \dots r_m^{(k)})^T, \quad \mathbf{p}_j^{(k)} = (p_{1j}^{(k)} \dots p_{mj}^{(k)})^T,$$

$$\mathbf{q}_j^{(k)} = (q_{1j}^{(k)} \dots q_{mj}^{(k)})^T, \quad \boldsymbol{\mu} = (\mu_1 \dots \mu_m)^T.$$

Note que $\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$ implica que $p_{0j}^{(k)} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{p}_j^{(k)} \geq 0$ e $q_{0j}^{(k)} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{q}_j^{(k)} \geq 0$. Logo, $\mathcal{L}_j(x_j, \boldsymbol{\mu})$ é uma função convexa de x_j . Quando $p_{0j}^{(k)} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{p}_j^{(k)} = 0$ e $q_{0j}^{(k)} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{q}_j^{(k)} = 0$, $\mathcal{L}_j(x_j, \boldsymbol{\mu})$ não depende de x_j . Neste caso, qualquer x_j entre $\alpha_j^{(k)}$ e $\beta_j^{(k)}$ minimiza $\mathcal{L}_j(x_j, \boldsymbol{\mu})$.

De agora em diante, assumiremos que ao menos um dos termos $p_{0j}^{(k)} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{p}_j^{(k)}$ ou $q_{0j}^{(k)} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{q}_j^{(k)}$ seja estritamente positivo. A derivada de $\mathcal{L}_j(x_j, \boldsymbol{\mu})$ com respeito à x_j é dada por

$$\mathcal{L}'_j(x_j, \boldsymbol{\mu}) = \frac{p_{0j}^{(k)} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{p}_j^{(k)}}{(u_j^{(k)} - x_j)^2} - \frac{q_{0j}^{(k)} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{q}_j^{(k)}}{(x_j - l_j^{(k)})^2},$$

e a segunda derivada de $\mathcal{L}_j(x_j, \boldsymbol{\mu})$ em relação à x_j é

$$\mathcal{L}_j''(x_j, \boldsymbol{\mu}) = \frac{2(p_{0j}^{(k)} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{p}_j^{(k)})}{(u_j^{(k)} - x_j)^3} + \frac{2(q_{0j}^{(k)} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{q}_j^{(k)})}{(x_j - l_j^{(k)})^3}.$$

Uma vez que $\mathcal{L}_j''(x_j, \boldsymbol{\mu})$ é estritamente positivo, $\mathcal{L}_j'(x_j, \boldsymbol{\mu})$ é estritamente crescente em x_j . Desta forma, podemos obter as seguintes conclusões sobre o minimizador $x_j^*(\boldsymbol{\mu})$ do subproblema dual associado ao subproblema (5.14):

1. Se $\mathcal{L}_j'(\alpha_j^{(k)}, \boldsymbol{\mu}) \geq 0$, então $x_j^*(\boldsymbol{\mu}) = \alpha_j^{(k)}$.
2. Se $\mathcal{L}_j'(\beta_j^{(k)}, \boldsymbol{\mu}) \leq 0$, então $x_j^*(\boldsymbol{\mu}) = \beta_j^{(k)}$.
3. Se $\mathcal{L}_j'(\alpha_j^{(k)}, \boldsymbol{\mu}) < 0$ e $\mathcal{L}_j'(\beta_j^{(k)}, \boldsymbol{\mu}) > 0$, então

$$x_j^*(\boldsymbol{\mu}) = \frac{(p_{0j}^{(k)} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{p}_j^{(k)})^{1/2} l_j^{(k)} + (q_{0j}^{(k)} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{q}_j^{(k)})^{1/2} u_j^{(k)}}{(p_{0j}^{(k)} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{p}_j^{(k)})^{1/2} + (q_{0j}^{(k)} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{q}_j^{(k)})^{1/2}} \quad (5.15)$$

é a única solução da equação $\mathcal{L}_j'(x_j, \boldsymbol{\mu}) = 0$.

Como podemos obter uma expressão explícita para $x_j^*(\boldsymbol{\mu})$, o minimizador do problema dual associado ao problema (5.14), também existe uma expressão explícita para a função objetivo dual $W(\boldsymbol{\mu})$, que é dada por

$$W(\boldsymbol{\mu}) = r_0^{(k)} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{r}^{(k)} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{0j}^{(k)} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{p}_j^{(k)}}{u_j^{(k)} - x_j(\boldsymbol{\mu})} + \frac{q_{0j}^{(k)} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{q}_j^{(k)}}{x_j(\boldsymbol{\mu}) - l_j^{(k)}} \right).$$

Mais ainda, as derivadas de $W(\boldsymbol{\mu})$ em relação às variáveis duais μ_i são dadas por

$$\frac{\partial W}{\partial \mu_i}(\boldsymbol{\mu}) = r_i^{(k)} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{u_j^{(k)} - x_j(\boldsymbol{\mu})} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j(\boldsymbol{\mu}) - l_j^{(k)}} \right). \quad (5.16)$$

Portanto, o problema dual correspondente ao subproblema (5.14) é dado por

$$\begin{aligned} \max \quad & W(\boldsymbol{\mu}) \\ \text{s. a} \quad & \mu_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Uma vez que $x_j(\boldsymbol{\mu})$ depende continuamente de $\boldsymbol{\mu}$ (a não ser no caso onde $p_{0j}^{(k)} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{p}_j^{(k)} = 0$ e $q_{0j}^{(k)} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{q}_j^{(k)} = 0$), temos, da equação (5.16), que $W(\boldsymbol{\mu})$ é

uma função “suave”. Pode-se provar facilmente que $W(\boldsymbol{\mu})$ é uma função côncava, pois ela é um mínimo de um conjunto de funções que são lineares em $\boldsymbol{\mu}$.

Conforme relata Svanberg [42], é importante lembrar que o problema (5.17) pode ser resolvido por qualquer método baseado apenas no vetor gradiente, desde que se tome um cuidado especial com as variáveis não negativas $\boldsymbol{\mu}$. Uma vez resolvido o problema dual (5.17), a solução ótima do subproblema primal (5.14) é obtida diretamente substituindo-se a solução ótima dual $\boldsymbol{\mu}^*$ na expressão (5.15).

5.3 Aspectos práticos do MMA

Considere o problema (5.1) e o problema transformado associado

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(\mathbf{x}) + a_0 z + \sum_{i=1}^m \left(c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2 \right) \\ \text{s. a} \quad & f_i(\mathbf{x}) - a_i z - y_i \leq 0, & i = 1, \dots, m, \\ & x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, & j = 1, \dots, n, \\ & y_i \geq 0, & i = 1, \dots, m, \\ & z \geq 0, \end{aligned} \tag{5.18}$$

onde, a_0, a_i, c_i e d_i são números reais tais que $a_0 > 0$, $a_i \geq 0$, $c_i \geq 0$, $d_i \geq 0$, $c_i + d_i > 0$ para cada $i = 1, \dots, m$, e $a_i c_i > a_0$ para todo i tal que $a_i > 0$.

De acordo com Svanberg [46], as vantagens de se trabalhar com problemas do tipo (5.18) em relação ao problema (5.1) é que sempre existem soluções factíveis para esse problema (mesmo que não existam soluções factíveis para o problema (5.1)) e a facilidade de obtenção das relações entre os pontos que satisfazem as condições Karush-Kuhn-Tucker (KKT) dos problemas (5.1) e (5.18). Com efeito, assuma que $\hat{\mathbf{x}}$ seja um ponto KKT de (5.1), com multiplicadores de Lagrange associados λ_i para as restrições $f_i(\mathbf{x}) \leq 0$, e suponha que $c_i \geq \lambda_i$ para todo $i = 1, \dots, m$. Neste caso, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{0})$ é um ponto KKT de (5.18), com os mesmos multiplicadores de Lagrange λ_i para as restrições $f_i(\mathbf{x}) - y_i \leq 0$, $i = 1, \dots, m$. Agora, suponha que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{0})$ seja um ponto KKT de (5.18), com multiplicadores de Lagrange λ_i para as restrições $f_i(\mathbf{x}) - y_i \leq 0$, com $\lambda_i \leq c_i$ para todo $i = 1, \dots, m$. Então $\hat{\mathbf{x}}$ é um ponto KKT do problema (5.1), com os mesmos multiplicadores λ_i para as restrições $f_i(\mathbf{x}) \leq 0$. Conforme Svanberg [46], se não existirem pontos KKT para (5.1), então não existirão pontos

KKT para (5.18) com $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, não importando quão grandes sejam os valores de c_i . Entretanto, sempre existirá pelo menos um ponto KKT para (5.18) tal que $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$.

É importante notar que, se o problema (5.1) é infactível, temos pelo menos um $y_i > 0$ em alguma solução ótima de (5.18). De acordo com Svanberg [46], pode-se mostrar que o problema (5.18) possui pelo menos uma solução ótima global.

O problema (5.1) pode ser obtido de (5.18) tomando $a_0 = 1$ e $a_i = d_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, m$. Neste caso, temos $z = 0$ em qualquer solução ótima do problema (5.18). De acordo com Svanberg [45], c_i deve ser suficientemente grande, de tal maneira que y_i torne-se “cara”. Dessa forma, teremos $y_i = 0$ para toda solução ótima de (5.18), e o vetor $\mathbf{x}$ correspondente será uma solução ótima de (5.1). Entretanto, com o objetivo de evitar instabilidades numéricas, não devemos escolher valores muito altos para as constantes c_i . A saída é aumentar gradativamente os valores de c_i até obtermos $y_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, m$ na solução ótima de (5.18).

Algumas vezes, as variáveis x_j podem não ser limitadas inferiormente e/ou superiormente. Neste caso, Svanberg [45] sugere que se escolha “limitantes artificiais” $x_j^{\min}$ e $x_j^{\max}$ tais que a verdadeira solução $\mathbf{x}$ satisfaça as restrições do tipo $x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}$. Segundo ele, o valor de $x_j^{\max} - x_j^{\min}$ não precisa ser necessariamente alto, mas, se para algum j , tivermos $x_j = x_j^{\min}$ ou $x_j = x_j^{\max}$ na solução ótima de (5.18), devemos, conforme o caso, diminuir o valor de $x_j^{\min}$ ou aumentar o valor de $x_j^{\max}$, e resolver novamente o subproblema (5.18), partindo da última solução obtida.

Reescrevendo o problema de otimização topológica de uma estrutura, dado em (3.32), na forma (5.18), obtemos

Estrutura

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\rho}} \quad & \mathbf{f}^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{f} + z + 10^5 y \\ \text{s. a} \quad & \frac{1}{V^*} \left(\sum_{i=1}^{n_{el}} v_i \rho_i - V^* \right) - y \leq 0 \\ & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el}. \end{aligned}$$

Também podemos re-escrever os problemas de otimização topológica de meca-

nismos flexíveis (3.33), (3.34) e (3.35) na forma (5.18), conforme descrito abaixo.

Formulação 1 (Nishiwaki *et al.* [33])

$$\begin{aligned}
 \min_{\boldsymbol{\rho}} \quad & -\frac{\mathbf{f}_b^T \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{f}_a}{\mathbf{f}_c^T \mathbf{K}_2(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{f}_c} + z + 10^5 y \\
 \text{s. a} \quad & \frac{1}{V^*} \left(\sum_{i=1}^{n_{el}} v_i \rho_i - V^* \right) - y \leq 0 \\
 & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el} \\
 & y \geq 0, \quad z \geq 0.
 \end{aligned}$$

Formulação 2 (Lima [26])

$$\begin{aligned}
 \min_{\boldsymbol{\rho}} \quad & (1 - w) \log(\mathbf{f}_c^T \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{f}_c) - w \log(\mathbf{f}_b^T \mathbf{K}_2(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{f}_a) + z + 10^5 y \\
 \text{s. a} \quad & \frac{1}{V^*} \left(\sum_{i=1}^{n_{el}} v_i \rho_i - V^* \right) - y \leq 0 \\
 & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el} \\
 & y \geq 0, \quad z \geq 0.
 \end{aligned}$$

Formulação 3 (Sigmund [37])

$$\begin{aligned}
 \min_{\boldsymbol{\rho}} \quad & -\frac{p_2}{p_1} \left[\frac{\frac{\mathbf{f}_1^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{f}_2}{p_1}}{\frac{\mathbf{f}_2^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{f}_2}{p_2} + \frac{p_2}{K_s}} \right] + z + 10^5 y_1 + 10^5 y_2 \\
 \text{s. a} \quad & \frac{1}{\Delta_{in}^*} \left(\frac{\mathbf{f}_1^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{f}_1}{p_1} - c \frac{\mathbf{f}_2^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{f}_1}{p_1} - \Delta_{in}^* \right) - y_1 \leq 0 \\
 & \frac{1}{V^*} \left(\sum_{i=1}^{n_{el}} v_i \rho_i - V^* \right) - y_2 \leq 0 \\
 & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el} \\
 & y \geq 0, \quad z \geq 0.
 \end{aligned}$$

5.4 Versão globalmente convergente do MMA

A primeira versão do Método das Assíntotas Móveis, descrita acima, apesar de ser usada com bastante frequência na literatura sobre otimização estrutural, não apresenta a propriedade de convergência global. Por esse motivo, Svanberg [43] desenvolveu uma versão globalmente convergente do método, denominada GCMMA (*Globally Convergent Method of Moving Asymptotes*), cujas principais diferenças em relação à versão original é a introdução de um parâmetro de penalização não monótono $\phi_i^{(k)}$ nas funções que aproximam as funções originais do problema (5.1) e a utilização simultânea das assíntotas $l_j^{(k)}$ e $u_j^{(k)}$ em cada termo do somatório da função definida em (5.2). De fato, pelas equações (5.2) e (5.3), podemos notar que apenas uma dessas assíntotas aparece em cada termo do somatório em questão, em função do valor da derivada de f_i no ponto $\mathbf{x}^{(k)}$. Svanberg [44] também descreve uma estratégia que leva em conta a curvatura das funções aproximadoras (5.2) através da introdução das derivadas segundas não mistas das funções do problema original (5.1) nos parâmetros $p_{ij}^{(k)}$ e $q_{ij}^{(k)}$.

Com o objetivo de evitar o uso do parâmetro de penalização não monótono $\phi_i^{(k)}$ ou das derivadas segundas das funções originais na definição do GCMMA, Bruyneel *et al.* [13] e [14] desenvolveram uma outra variante do MMA, na qual os parâmetros $p_{ij}^{(k)}$ e $q_{ij}^{(k)}$ são atualizados de acordo com o valor das derivadas primeiras da função objetivo do problema (5.1) em duas iterações consecutivas. Essa estratégia é denominada GBMMA (*Gradient Based MMA Approximations*).

Neste trabalho, adotamos uma outra versão globalmente convergente do MMA proposta por Svanberg [46], denominada *Método de Aproximações Convexas Separáveis Conservativas* (CCSA). Esse método foi escolhido porque, segundo Svanberg, apresenta bom desempenho para problemas com um número muito grande de variáveis, mesmo que as matrizes Hessianas da função objetivo e das restrições sejam densas.

Um método CCSA é composto por iterações *externas* e por iterações *internas*. Uma iteração externa começa a partir do iterando $\mathbf{x}^{(k)}$ e termina com um novo iterando $\mathbf{x}^{(k+1)}$. Em cada iteração interna, a função objetivo original e as restrições são substituídas por certas funções convexas separáveis que aproximam as funções originais em torno do ponto $\mathbf{x}^{(k)}$. A solução ótima do problema aproximado pode ser aceita ou rejeitada. Se tal solução for rejeitada, devemos resolver

um subproblema modificado. Este processo é repetido até que os valores das funções aproximadoras sejam maiores ou iguais aos das funções originais. Quando isso acontece, as funções aproximadoras são ditas *conservativas*, e a solução ótima do subproblema aproximador pertence ao conjunto viável original.

Os métodos CCSA introduzem a curvatura (isto é, as informações sobre as segundas derivadas) tanto na função objetivo quanto nas restrições do problema original. Essa curvatura é atualizada durante as iterações internas, até que as funções aproximadoras tornem-se conservativas. Neste caso, não é necessário realizar uma busca linear.

5.4.1 Descrição geral do método CCSA

No método CCSA, o índice k é usado para denotar as iterações externas, enquanto que o índice l está associado às iterações internas. O índice duplo (k, l) representa a l -ésima iteração interna da k -ésima iteração externa.

Conforme relata Svanberg [46], devemos escolher um ponto inicial factível $(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y}^{(1)}, z^{(1)})$ para o problema (5.18). Em cada iteração externa k , um subproblema que aproxima o problema original (5.1) deve ser resolvido, partindo do ponto $(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)}, z^{(k)})$. Este subproblema é obtido de (5.18) substituindo X por um certo subconjunto convexo $X^{(k)}$ e trocando as funções $f_i(\mathbf{x})$ por funções *essencialmente convexas separáveis* $g_i^{(k,0)}(\mathbf{x})$, satisfazendo $g_i^{(k,0)} = f_i(\mathbf{x}^{(k)})$. A solução ótima deste subproblema é denotada por $(\hat{\mathbf{x}}^{(k,0)}, \hat{\mathbf{y}}^{(k,0)}, \hat{z}^{(k,0)})$.

Se $g_i^{(k,0)}(\hat{\mathbf{x}}^{(k,0)}) \geq f_i(\hat{\mathbf{x}}^{(k,0)})$ para todo $i = 0, 1, \dots, m$, a iteração interna é terminada, e o ponto inicial para a próxima iteração externa é $(\mathbf{x}^{(k+1)}, \mathbf{y}^{(k+1)}, z^{(k+1)}) = (\hat{\mathbf{x}}^{(k,0)}, \hat{\mathbf{y}}^{(k,0)}, \hat{z}^{(k,0)})$. Caso contrário, as iterações internas são repetidas até que $g_i^{(k,l)}(\hat{\mathbf{x}}^{(k,l)}) \geq f_i(\hat{\mathbf{x}}^{(k,l)})$ para todo $i = 0, 1, \dots, m$. De acordo com Svanberg [46], isso sempre acontece em um número finito de iterações internas. Assim, o ponto $(\hat{\mathbf{x}}^{(k,l)}, \hat{\mathbf{y}}^{(k,l)}, \hat{z}^{(k,l)})$ é usado como ponto inicial para a próxima iteração externa.

5.4.2 Escolha das funções aproximadoras

Segundo Svanberg [46], um subproblema CCSA é definido, para $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ e $l \in \{0, 1, 2, \dots\}$, como

$$\begin{aligned} \min \quad & g_0^{(k,l)}(\mathbf{x}) + a_0 z + \sum_{i=1}^m \left(c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2 \right) \\ \text{s. a} \quad & g_i^{(k,l)}(\mathbf{x}) - a_i z - y_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \mathbf{x} \in X^{(k)}, \quad \mathbf{y} \geq 0, \quad z \geq 0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

O conjunto $X^{(k)}$ é escolhido como $X^{(k)} = X(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\sigma}^{(k)})$, onde $\boldsymbol{\sigma}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ é um vetor de parâmetros estritamente positivos e $X(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\sigma})$ é um subconjunto de X definido por

$$X(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\sigma}) = \{ \mathbf{x} \in X \mid x_j \in [\xi_j - 0.9\sigma_j, \xi_j + 0.9\sigma_j], \quad j = 1, \dots, n \}.$$

Assim, podemos definir

$$X^{(k)} = \left\{ \mathbf{x} \in X \mid x_j \in [x_j^{(k)} - 0.9\sigma_j, x_j^{(k)} + 0.9\sigma_j], \quad j = 1, \dots, n \right\}.$$

O critério para a escolha dos valores dos parâmetros $\sigma_j^{(k)}$ será dado mais adiante. Por enquanto, é suficiente supor que cada vetor $\boldsymbol{\sigma}^{(k)}$ pertence a um conjunto compacto S da forma

$$S = \{ \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^n \mid \sigma_j^{\min} \leq \sigma_j \leq \sigma_j^{\max}, \quad j = 1, \dots, n \},$$

onde $\sigma_j^{\min}$ e $\sigma_j^{\max}$ são números reais tais que $0 < \sigma_j^{\min} < \sigma_j^{\max} < \infty$.

De acordo com Svanberg [46], as funções aproximadoras $g_i^{(k,l)}(\mathbf{x})$ para cada subproblema CCSA são definidas como

$$g_i^{(k,l)}(\mathbf{x}) = v_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\sigma}^{(k)}) + \phi_i^{(k,l)} w_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\sigma}^{(k)}), \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (5.20)$$

onde $\phi_i^{(k,l)} > 0$ é um parâmetro de penalização, $v_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\sigma}^{(k)})$ e $w_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\sigma}^{(k)})$ são funções reais definidas no conjunto

$$D = \{ (\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\sigma}) \in \mathbb{R}^{3n} \mid \boldsymbol{\xi} \in X, \boldsymbol{\sigma} \in S, \mathbf{x} \in X(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\sigma}) \} \quad (5.21)$$

satisfazendo às seguintes condições:

1. v_i e w_i são funções contínuas no conjunto D ,
2. $\nabla_x v_i = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial v_i}{\partial x_n} \right)^T$ existe e é contínuo em D ,
3. $\nabla_x w_i = \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial w_i}{\partial x_n} \right)^T$ existe e é contínuo em D ,
4. a matriz Hessiana $\nabla_{xx}^2 v_i$ existe e é contínua em D ,
5. a matriz Hessiana $\nabla_{xx}^2 w_i$ existe e é contínua em D ,
6. $v_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\sigma}) = f_i(\mathbf{x})$ se $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} \in X$,
7. $w_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\sigma}) = 0$ se $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} \in X$,
8. $\nabla_x v_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\sigma}) = \nabla f_i(\mathbf{x})$ se $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} \in X$,
9. $\nabla_x w_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\sigma}) = (0, \dots, 0)$ se $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} \in X$,
10. $\nabla_{xx}^2 v_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\sigma})$ é semipositiva-definida para todo $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\sigma}) \in D$,
11. $\nabla_{xx}^2 w_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\sigma})$ é positiva-definida para todo $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\sigma}) \in D$.

Das condições 1-11 acima, concluímos que as funções $g_i^{(k,l)}$ são aproximações de primeira ordem das funções f_i em torno do ponto $\mathbf{x}^{(k)}$, ou seja,

$$g_i^{(k,l)}(\mathbf{x}^{(k)}) = f_i(\mathbf{x}^{(k)}) \quad \text{e} \quad \nabla g_i^{(k,l)}(\mathbf{x}^{(k)}) = \nabla f_i(\mathbf{x}^{(k)}).$$

Mais ainda, as funções aproximadoras $g_i^{(k,l)}$ são estritamente convexas, já que $\phi_i^{(k,l)} > 0$. É importante lembrar que, quanto maior for o valor de $\phi_i^{(k,l)}$, mais conservativa será a aproximação das funções originais em torno do ponto $\mathbf{x}^{(k)}$. Além das condições 1-11, as funções aproximadoras devem ser *separáveis*, isto é, devem ter a forma

$$g_i^{(k,l)}(\mathbf{x}) = g_{i0}^{(k,l)} + \sum_{j=1}^n g_{ij}^{(k,l)}(x_j).$$

Segundo Svanberg [46], a propriedade de separabilidade das funções aproximadoras $g_i^{(k,l)}$ não é usada na análise teórica da convergência global do método CCSA, mas ela é essencial quando resolvemos problemas de grande porte.

Para cada escolha das funções v_i e w_i e para cada vetor fixo $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ tal que $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$, a função Lagrangiana $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \boldsymbol{\lambda})$ correspondente ao subproblema

(5.19) pode ser minimizada analiticamente em relação a $\mathbf{x} \in X^{(k)}$, $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ e $z \geq 0$. De acordo com Svanberg [46], se $d_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, m$ e um termo εz^2 for adicionado à função objetivo de (5.19), tal solução analítica nos dá um único minimizador global $(\hat{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}), \hat{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\lambda}), \hat{z}(\boldsymbol{\lambda}))$. Neste caso, a função dual côncava $\varphi(\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}), \hat{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\lambda}), \hat{z}(\boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{\lambda})$ torna-se explícita, e o problema dual que consiste em maximizar $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$ sujeita a $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, pode ser resolvido, por exemplo, usando o Método dos Gradientes Conjugados ou um método do tipo Newton, combinado com uma estratégia para lidar com as restrições de não negatividade das variáveis duais. Se $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ é uma solução ótima deste problema dual, então $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) = (\hat{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}), \hat{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\lambda}), \hat{z}(\boldsymbol{\lambda}))$ é a única solução ótima do subproblema (5.19).

Neste trabalho, escolhemos as funções aproximadoras do problema (5.19) sugeridas por Svanberg [46], definidas por

$$g_i^{(k,l)}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k,l)}}{u_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{ij}^{(k,l)}}{x_j - l_j^{(k)}} \right) + r_i^{(k,l)}, \quad (5.22)$$

onde as assíntotas móveis $l_j^{(k)}$ e $u_j^{(k)}$ são dadas por

$$l_j^{(k)} = x_j^{(k)} - \sigma_j^{(k)} \quad \text{e} \quad u_j^{(k)} = x_j^{(k)} + \sigma_j^{(k)}, \quad (5.23)$$

e os coeficientes $p_{ij}^{(k,l)}$, $q_{ij}^{(k,l)}$ e $r_i^{(k,l)}$ são

$$p_{ij}^{(k,l)} = (\sigma_j^{(k)})^2 \max \left\{ 0, \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right\} + \frac{\phi_i^{(k,l)} \sigma_j^{(k)}}{4}, \quad (5.24)$$

$$q_{ij}^{(k,l)} = (\sigma_j^{(k)})^2 \max \left\{ 0, -\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right\} + \frac{\phi_i^{(k,l)} \sigma_j^{(k)}}{4}, \quad (5.25)$$

$$r_i^{(k,l)} = f_i(\mathbf{x}^{(k)}) - \sum_{j=1}^n \frac{p_{ij}^{(k,l)} + q_{ij}^{(k,l)}}{\sigma_j^{(k)}}. \quad (5.26)$$

Fazendo algumas manipulações algébricas, podemos escrever a equação (5.22) como

$$g_i^{(k,l)}(\mathbf{x}) = v_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\sigma}^{(k)}) + \phi_i^{(k,l)} w_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\sigma}^{(k)}), \quad (5.27)$$

onde

$$v_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\sigma}) = f_i(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j^2 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{\xi})(x_j - \xi_j) + \sigma_j \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{\xi}) \right| (x_j - \xi_j)^2}{\sigma_j^2 - (x_j - \xi_j)^2}, \quad (5.28)$$

e

$$w_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \xi_j)^2}{\sigma_j^2 - (x_j - \xi_j)^2}. \quad (5.29)$$

De acordo com Svanberg [46], as equações (5.22) a (5.29) definem a versão globalmente convergente do MMA. O método original, encontrado em [42], pode ser considerado um caso especial dessa versão, fazendo $\phi_i^{(k,l)} = 0$ para todo $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ e $l \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Analisando as equações (5.3) e (5.4), observamos que, no MMA original, cada variável x_j fica limitada por apenas uma de suas assíntotas na equação (5.2), pois, de acordo com o sinal da derivada $\partial f_i / \partial x_j$, um dos termos p_{ij} e q_{ij} (associados à variável x_j) é igual a zero. Quando $\partial f_i / \partial x_j = 0$, a variável x_j não fica limitada por nenhuma de suas duas assíntotas, e, neste caso, temos $p_{ij} = q_{ij} = 0$. Já no MMA modificado (CCSA), podemos constatar, pela inspeção das equações (5.28) e (5.29), que cada uma das variáveis x_j é limitada pelas suas duas assíntotas na equação (5.22), pois os parâmetros $\phi_i^{(k,l)}$ e $\sigma_j^{(k)}$ são estritamente positivos e, tanto em (5.24) quanto em (5.25), o primeiro termo do segundo membro é sempre maior ou igual a zero. Dessa forma, os valores de $p_{ij}^{(k,l)}$ e $q_{ij}^{(k,l)}$ serão sempre estritamente positivos.

Para ilustrar o comportamento da função aproximadora (5.27) em função do parâmetro de penalização ϕ , vamos aproximar $f(x) = (x - 0.5)(x - 2)(x - 3)$ em torno do ponto $x = 2$, usando a equação (5.27), e escolhendo alguns valores para ϕ . O resultado é apresentado na Figura 5.1.

A partir dos gráficos da Figura 5.1, percebemos que, quanto maior for o valor do parâmetro ϕ , maior será a curvatura da função aproximadora, e menor será a região onde temos uma boa aproximação para a função original em torno de um determinado ponto. Sendo assim, quando ϕ assume valores excessivamente altos, o método em questão gera passos muito pequenos, o que contribui para uma lentidão na convergência para a solução ótima do subproblema (5.19).

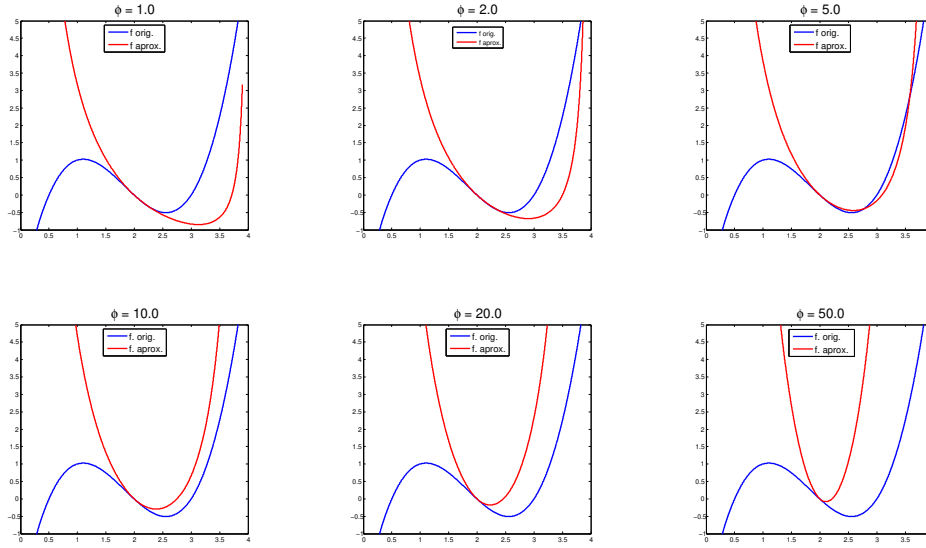


Figura 5.1: Ilustração do comportamento da função aproximadora (5.27) em função do parâmetro de penalização ϕ .

5.4.3 Critérios para a atualização de $\phi_i^{(k,l)}$ e $\sigma_j^{(k)}$

Para completarmos a caracterização da escolha das funções aproximadoras $g_i^{(k,l)}$ em cada iteração de um método CCSA, devemos estabelecer critérios para a atualização dos parâmetros $\phi_i^{(k,l)}$ e $\sigma_j^{(k)}$.

Os parâmetros de penalização $\phi_i^{(k,l)}$ devem ser estritamente positivos. Quanto maiores forem os valores destes parâmetros, mais conservativas serão as aproximações. Durante uma iteração externa k , as únicas diferenças entre duas iterações internas são os valores de $\phi_i^{(k,l)}$.

De acordo com Svanberg [46], para $l = 0$, devemos tomar

$$\phi_i^{(1,0)} = 1, \quad (5.30)$$

$$\phi_i^{(k+1,0)} = \max \left\{ 0.1\phi_i^{(k,\widehat{l}(k))}, \phi_i^{\min} \right\}, \quad (5.31)$$

onde $\widehat{l}(k)$ é o número de iterações internas necessárias para encontrar a solução ótima do subproblema da iteração externa k , e $\phi_i^{\min}$ é um número “pequeno” estritamente positivo, tal como 10^{-5} , por exemplo.

Em cada iteração interna, a atualização de $\phi_i^{(k,l)}$ é baseada na solução do subproblema mais recente. Conforme Svanberg [46], se $g_i^{(k,l)}(\widehat{\mathbf{x}}^{(k,l)}) < f_i(\widehat{\mathbf{x}}^{(k,l)})$, é

natural escolher $\phi_i^{(k,l+1)}$ tal que

$$g_i^{(k,l+1)}(\widehat{\mathbf{x}}^{(k,l)}) = f_i(\widehat{\mathbf{x}}^{(k,l)}).$$

Assim, usando a equação (5.20), definimos $\phi_i^{(k,l+1)} = \phi_i^{(k,l)} + \delta_i^{(k,l)}$, onde

$$\delta_i^{(k,l)} = \frac{f_i(\widehat{\mathbf{x}}^{(k,l)}) - g_i^{(k,l)}(\widehat{\mathbf{x}}^{(k,l)})}{w_i(\widehat{\mathbf{x}}^{(k,l)}, \mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\sigma}^{(k)})}.$$

De acordo com Svanberg [46], com o objetivo de obter um método globalmente convergente, o valor de $\phi_i^{(k,l+1)}$ é modificado da seguinte forma:

$$\phi_i^{(k,l+1)} = \begin{cases} \min \left\{ 10\phi_i^{(k,l)}, 1.1(\phi_i^{(k,l)} + \delta_i^{(k,l)}) \right\}, & \text{se } \delta_i^{(k,l)} > 0 \\ \phi_i^{(k,l)}, & \text{se } \delta_i^{(k,l)} \leq 0. \end{cases} \quad (5.32)$$

Isso significa que, a cada nova iteração interna, os valores dos parâmetros de penalização ϕ_i aumentam ou permanecem os mesmos, mas nunca diminuem. Entretanto, é importante que eles sejam reduzidos no início de cada iteração externa, conforme mostra a equação (5.31). Caso contrário, o método poderá gerar passos de tamanho muito pequeno.

A atualização dos parâmetros $\sigma_j^{(k)}$ depende das funções v_i e w_i . No caso da equação (5.29), a matriz Hessiana $\nabla_{xx}^2 w_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\sigma})$ é diagonal, com

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j^2}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\sigma}) \geq \frac{1}{\sigma_j^2} > 0, \quad \forall j = 1, \dots, n \text{ e } \forall (\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\sigma}) \in D, \quad (5.33)$$

onde o conjunto D é aquele definido na equação (5.21). Na equação (5.33), a igualdade é realizada se $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$. Podemos notar que a curvatura da função w_i na direção do eixo x_j aumenta quando os valores de σ_j diminuem. Isto sugere a adoção do seguinte critério para atualizar $\sigma_j^{(k)}$: se uma certa variável x_j está oscilando em sinal, então ela deve ser estabilizada por um decréscimo no valor do parâmetro σ_j correspondente; se tal variável x_j é monotonicamente crescente ou monotonicamente decrescente, então deve haver um acréscimo no valor de σ_j . Conforme Svanberg [46], uma maneira possível de realizar tal atualização é definir, para $k = 1$ e $k = 2$,

$$\sigma_j^{(k)} = \sigma_0(x_j^{\max} - x_j^{\min}), \quad (5.34)$$

onde $\sigma_0 = 0.5$, por exemplo. Para $k \geq 3$, toma-se

$$\sigma_j^{(k)} = \gamma_j^{(k)} \sigma_j^{(k-1)}, \quad (5.35)$$

onde $\gamma_j^{(k)}$ está definido na equação (5.13).

5.4.4 Algoritmo do método CCSA

Nesta seção, vamos apresentar o algoritmo CCSA para resolver o problema (5.1). Sejam dados um ponto inicial $\mathbf{x}^0 \in X$ e $k = 0$.

Algoritmo 5.2

Enquanto não é satisfeito algum critério de parada,

1. Calcular $\sigma_j^{(k)}$ segundo (5.34)-(5.35).
2. Calcular $l_j^{(k)}$ e $u_j^{(k)}$ segundo (5.23).
3. $l \leftarrow -1$
4. Repetir
 - 4.1. $l \leftarrow l + 1$
 - 4.2. Calcular $\phi_i^{(k,l)}$ segundo (5.30)-(5.32).
 - 4.3. Calcular $p_{ij}^{(k,l)}$, $q_{ij}^{(k,l)}$ e $r_i^{(k,l)}$ segundo (5.24)-(5.26).
 - 4.4. Obter $\widehat{\mathbf{x}}^{(k,l)}$ resolvendo o subproblema (5.18)
5. Até que $g_i^{(k,l)}(\widehat{\mathbf{x}}^{(k,l)}) < f_i(\widehat{\mathbf{x}}^{(k,l)}) \quad \forall i$
6. $\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow \widehat{\mathbf{x}}^{(k,l)}$

5.4.5 Convergência global do método CCSA

Seja Ω o conjunto de pontos KKT do problema (5.18). De acordo com Svanberg [46], pode-se mostrar que o conjunto Ω é não vazio. Seja também

$$\|\Omega - (\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)}, z^{(k)})\| = \inf_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) \in \Omega} \|(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) - (\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)}, z^{(k)})\|.$$

Svanberg [46] mostrou que, em cada iteração externa, o número de iterações internas é finito e que o parâmetro de penalização $\phi_i^{(k)}$ permanece limitado. Ele provou também que todos os iterandos são pontos factíveis para o problema (5.1) e que eles pertencem a um conjunto compacto. Usando esses e mais alguns resultados, Svanberg [46] mostrou que o método CCSA é globalmente convergente. Esta propriedade é enunciada no Teorema 5.4.1.

Teorema 5.4.1. *Se aplicarmos o método CCSA ao problema (5.18), então*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Omega - (\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)}, z^{(k)})\| = 0.$$

Prova. A prova pode ser encontrada em Svanberg [46]. ■

Capítulo 6

Resultados Computacionais

Neste capítulo, resolvemos alguns problemas clássicos de otimização topológica, encontrados na literatura, através das formulações estudadas neste trabalho, usando a Programação Linear Sequencial (PLS) e a versão globalmente convergente do Método das Assíntotas Móveis (MMA), descritas nos Capítulos 4 e 5, respectivamente. No primeiro exemplo, determinamos o formato ótimo de uma viga (que é uma estrutura rígida). No segundo, encontramos o formato ótimo de uma pinça, e, no terceiro, o de um inversor de deslocamentos. Esses dois últimos são exemplos de mecanismos flexíveis. Os testes foram realizados com o objetivo de comparar os dois métodos de otimização em questão, bem como analisar o efeito da aplicação dos filtros estudados neste trabalho para eliminar a formação do tabuleiro de xadrez. No caso dos mecanismos flexíveis, tais análises foram feitas usando a formulação de Nishiwaki *et al.* [33]. Para completar nosso estudo, mostramos alguns exemplos obtidos com as formulações de Lima [26] e fazemos uma comparação entre as formulações de Nishiwaki *et al.* e de Sigmund [37]. Os dois métodos de otimização (PLS e MMA) e todas as rotinas necessárias para a aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF) foram implementados em MATLAB[®] (versão 7.4). Todos os resultados foram obtidos em um computador pessoal com processador Intel Pentium D 935, de 3.2 GHz e 512 MB de memória RAM, usando o sistema operacional Windows XP.

6.1 Problemas testados

6.1.1 Exemplo 1 - Viga em balanço

Seja o domínio retangular mostrado na Figura 6.1, submetido a uma força vertical $\mathbf{f} = 1\text{ N}$ (para baixo) no ponto A (ponto médio da aresta lateral direita do domínio). Consideramos que a aresta lateral esquerda da viga está engastada, impedindo os deslocamentos nodais tanto na horizontal quanto na vertical. Por simplicidade, consideramos que a viga tem uma espessura de 1 cm , que o módulo de Young do material que a compõe é de 1 N/cm^2 , e que o respectivo coeficiente de Poisson é igual a $0,3$. A estrutura ótima deve conter, no máximo, 40% do volume total do domínio.

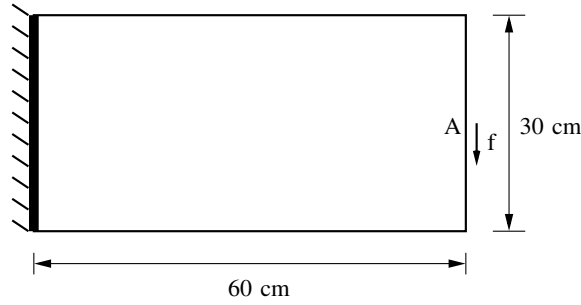


Figura 6.1: Domínio no qual uma viga deve ser construída.

6.1.2 Exemplo 2 - Pinça

A Figura 6.2 mostra um domínio no qual deve ser projetada uma pinça. Devido ao fato da pinça possuir um eixo de simetria horizontal, apenas a metade superior do domínio original é apresentada. A espessura da pinça é de 1 mm . O módulo de Young do material que constitui essa pinça é igual a 210000 N/mm^2 , e o respectivo coeficiente de Poisson vale $0,3$. O mecanismo ótimo deve conter, no máximo, 20% do volume total do domínio.

No canto inferior esquerdo desse domínio (ou seja, no ponto A), é aplicada uma força horizontal $\mathbf{f}_a$. Para que a pinça em questão entre em contato com um objeto, o deslocamento desejado deve ocorrer no ponto B. Neste ponto, é mostrada a aplicação da força fictícia $\mathbf{f}_b$ (exercida pelo mecanismo sobre o objeto que deve ser segurado). A intensidade dessas duas forças é igual a 1 N . A força de

reação $\mathbf{f}_c = -\mathbf{f}_b$ exercida pelo objeto sobre a pinça, também aplicada no ponto B, não é mostrada na Figura 6.1, por simplicidade. Para simular a simetria da peça, em toda a base do domínio, foram colocados apoios que impedem os deslocamentos na vertical. Além disso, no canto superior esquerdo do domínio, um apoio restringe os deslocamentos tanto na horizontal quanto na vertical.

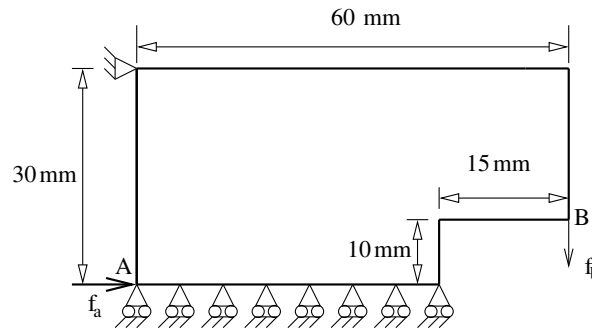


Figura 6.2: Domínio da metade superior de uma pinça.

6.1.3 Exemplo 3 - Inversor de deslocamentos

Um domínio retangular onde deve ser construído um inversor de deslocamentos, com as suas dimensões, é mostrado na Figura 6.3. Uma vez que esse inversor também possui um eixo de simetria horizontal, trabalhamos apenas com a metade superior do seu domínio. A espessura do inversor é de 1 mm. O módulo de Young do material que constitui esse inversor é igual a 210000 N/mm^2 , e o respectivo coeficiente de Poisson vale 0,3. O mecanismo ótimo deve conter, no máximo, 20% do volume total do domínio.

Aplicamos uma força horizontal $\mathbf{f}_a$ à esquerda no ponto A (canto inferior esquerdo do domínio). O deslocamento desejado deve ocorrer no ponto B, no sentido contrário à aplicação da força $\mathbf{f}_a$. Por esse motivo, o mecanismo flexível deste exemplo é chamado de inversor de deslocamentos. A força de reação $\mathbf{f}_c = -\mathbf{f}_b$, também aplicada no ponto B, não é mostrada na Figura 6.3, por questão de simplicidade. Os apoios da base do domínio apenas simulam a simetria da estrutura, impedindo os deslocamentos na vertical. O apoio real do inversor aparece no canto superior esquerdo da Figura 6.2. Esse apoio impede os deslocamentos tanto na horizontal quanto na vertical.

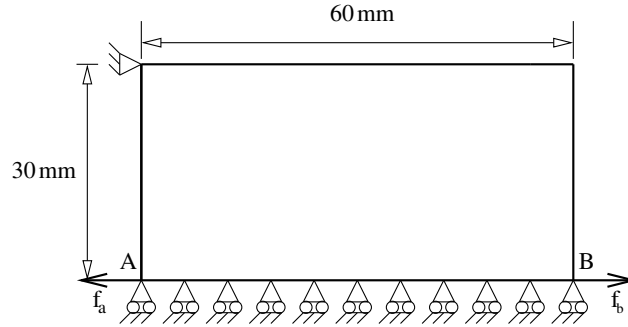


Figura 6.3: Domínio da metade superior de um inversor de deslocamentos.

6.2 Comparação dos métodos e filtros utilizados

Nesta seção, apresentaremos os resultados encontrados para cada problema usando a Programação Linear Sequencial (PLS) e o Método das Assíntotas Móveis (MMA), e analisar o efeito de cada um dos filtros estudados neste trabalho.

Em todos os testes computacionais realizados, o domínio original foi subdividido em elementos finitos retangulares, conforme apresentado no Capítulo 3. As soluções ótimas foram obtidas através de um aumento gradativo do fator de penalização p do método SIMP. Assim, dado um ponto inicial $\boldsymbol{\rho}^{(0)} \in \mathbb{R}^{n_{el}}$ (n_{el} é o número de elementos finitos do domínio discretizado), obtivemos a solução ótima com $p = 1, 0$. Em seguida, esta solução foi usada como ponto inicial para encontrar a solução ótima com $p = 2, 0$, que, por sua vez, foi usada como ponto inicial para encontrar a solução ótima com $p = 3, 0$. Essa estratégia, denominada *Método da Continuação* (vide Allaire e Francfort [2]), tem como objetivo escapar de minimizadores locais do problema de otimização topológica, permitindo a obtenção de uma aproximação mais adequada para o minimizador global do problema em questão.

Quando usamos os filtros morfológicos de dilatação e de erosão, para cada valor do fator de penalização p do método SIMP, atribuímos os valores 0, 2, 0, 4, 0, 8 e 1, 6 para o parâmetro β que aparece nas equações (3.44) e (3.46). Esses valores de β foram aumentados gradativamente, de maneira que, para cada valor de p , a solução ótima encontrada com um valor de β foi usada como ponto inicial para obter a solução ótima com o valor seguinte deste parâmetro. No caso do filtro do seno hiperbólico, o parâmetro p que aparece nas equações (3.53) e (3.55) foi aumentado gradativamente, da mesma maneira como no método SIMP. Para o

filtro em questão, usamos $p = 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0$ e $5, 0$.

Em todos os testes que efetuamos, utilizamos um critério de parada baseado na norma do passo, interrompendo o algoritmo quando o valor dessa norma era inferior a 10^{-3} . Além disso, nos casos em que aplicamos os filtros de dilatação ou de erosão, o número máximo de iterações permitido para cada valor de β foi de 125. Para os outros filtros, esse número máximo foi igual a 500 para cada um dos três valores de p usados.

Os resultados obtidos estão dispostos em várias tabelas, que mostram o valor da função objetivo, o número de iterações e o tempo gasto pelos métodos para encontrar a solução ótima aproximada em cada exemplo. Para cada um desses três itens, mostramos também um coeficiente associado ao desempenho dos métodos, que definimos pela razão v_{PLS}/v_{MMA} , onde v_{PLS} representa os valores obtidos pela PLS, e v_{MMA} representa os valores obtidos pelo MMA. Quanto ao número de iterações ou ao tempo gasto, se tivermos $v_{PLS}/v_{MMA} < 1$, concluímos que a PLS teve um melhor desempenho que o MMA. Já com relação aos valores da função objetivo, devemos ter um maior cuidado para fazer essa análise, pois devemos levar em conta o sinal desses valores. Neste trabalho, em particular, os valores da função objetivo na solução ótima aproximada são sempre positivos no caso da viga, e são sempre negativos no caso dos mecanismos flexíveis. Dessa forma, no caso da viga, se tivermos $v_{PLS}/v_{MMA} < 1$, concluímos que a PLS encontrou um valor menor para a função objetivo na solução ótima aproximada; no caso dos mecanismos flexíveis, essa mesma conclusão é obtida quando $v_{PLS}/v_{MMA} > 1$.

6.2.1 Resultados para a viga

Nesta seção, mostramos os resultados obtidos para a topologia ótima da viga do Exemplo 1, discretizando o domínio da Figura 6.1 em 1800 elementos finitos quadrados.

Quando aplicamos a PLS, os valores iniciais para o raio da região de confiança foram: 0,15 quando aplicamos o filtro do gradiente, 0,05 quando usamos o filtro morfológico de dilatação, e 0,1 nos demais casos. No MMA, esse valor inicial foi de 0,15 para todos os casos. Para os filtros morfológicos de dilatação e de erosão, o raio de abrangência $r_{\min}$ de aplicação do filtro foi de 1 *cm*. Para os outros filtros, tomamos $r_{\min} = 1,5$ *cm*. O valor inicial para a densidade de cada elemento é 0,4. Quando aplicamos o filtro do gradiente, tomamos $\zeta = 1$ na função objetivo (3.38).

Na Tabela 6.1, encontram-se os resultados referentes aos testes realizados. As topologias ótimas encontradas são mostradas nas Figuras 6.4 a 6.15.

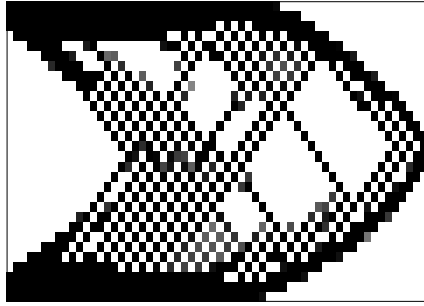


Figura 6.4: Viga obtida com a PLS, sem aplicação de filtro.

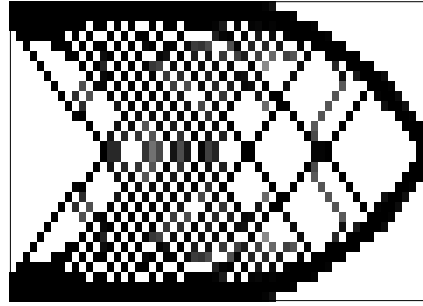


Figura 6.5: Viga obtida com o MMA, sem aplicação de filtro.

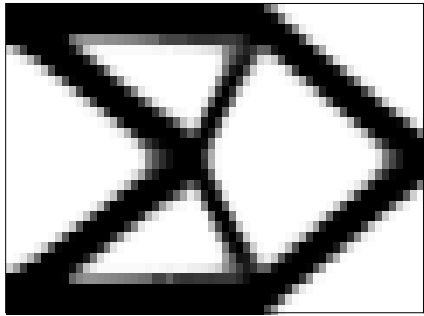


Figura 6.6: Viga obtida com a PLS, usando o filtro do gradiente.

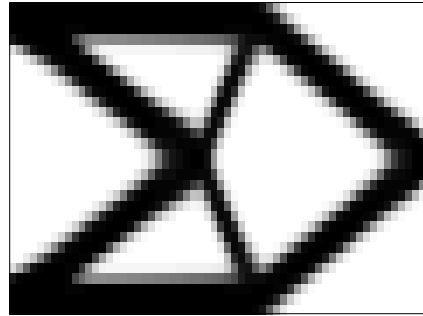


Figura 6.7: Viga obtida com o MMA, usando o filtro do gradiente.

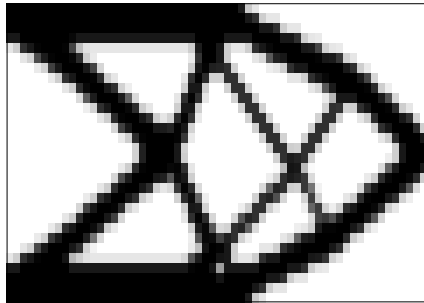


Figura 6.8: Viga obtida com a PLS, usando o filtro das densidades ponderadas.

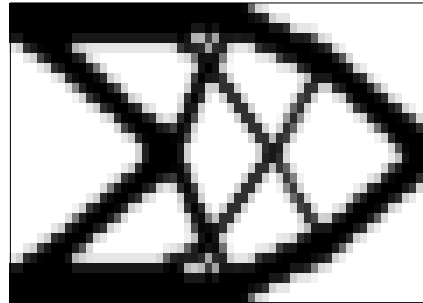


Figura 6.9: Viga obtida com o MMA, usando o filtro das densidades ponderadas.

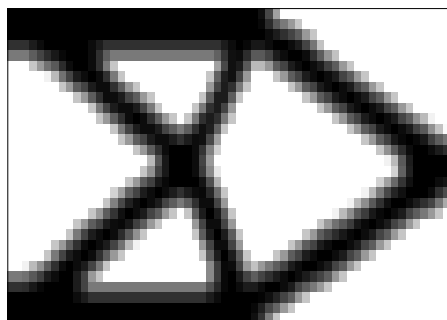


Figura 6.10: Viga obtida com a PLS, usando o filtro morfológico de dilatação.

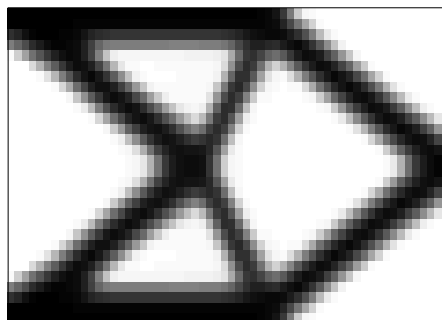


Figura 6.11: Viga obtida com o MMA, usando o filtro morfológico de dilatação.

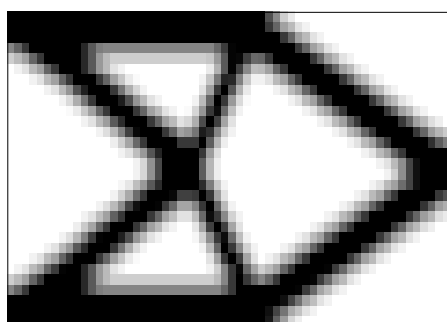


Figura 6.12: Viga obtida com a PLS, usando o filtro morfológico de erosão.

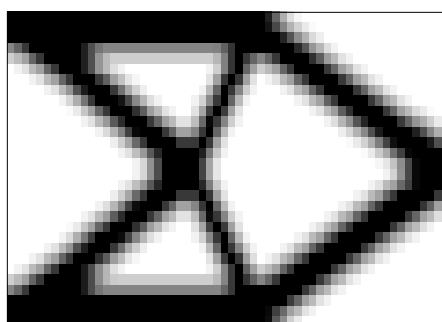


Figura 6.13: Viga obtida com o MMA, usando o filtro morfológico de erosão.

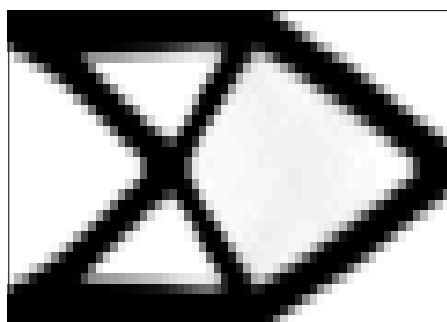


Figura 6.14: Viga do obtida com a PLS, usando o filtro do seno hiperbólico.

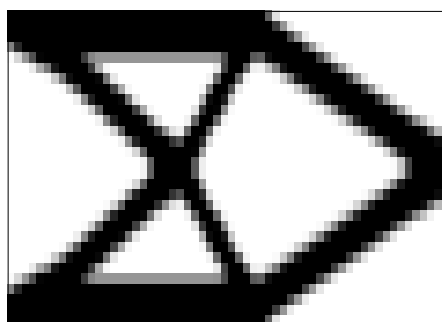


Figura 6.15: Viga do obtida com o MMA, usando o filtro do seno hiperbólico.

Sem filtro	PLS	MMA	$v_{\text{PLS}}/v_{\text{MMA}}$
f. obj.	0,0097	0,0105	0,9238
iter.	403	1334	0,3021
tempo ($\times 10^3$ seg.)	0,4868	4,3529	0,1118
Gradiente	PLS	MMA	$v_{\text{PLS}}/v_{\text{MMA}}$
f. obj.	0,0326	0,0341	0,9560
iter.	101	1349	0,0749
tempo ($\times 10^3$ seg.)	0,1626	4,8194	0,0337
Dens. Pond.	PLS	MMA	$v_{\text{PLS}}/v_{\text{MMA}}$
f. obj.	0,0109	0,0109	1,0000
iter.	221	704	0,3139
tempo ($\times 10^3$ seg.)	0,3192	1,2923	0,2470
Dilatação	PLS	MMA	$v_{\text{PLS}}/v_{\text{MMA}}$
f. obj.	0,0121	0,0134	0,9030
iter.	1178	1500	0,7853
tempo ($\times 10^3$ seg.)	2,7659	7,8974	0,3502
Erosão	PLS	MMA	$v_{\text{PLS}}/v_{\text{MMA}}$
f. obj.	0,0118	0,0119	0,9916
iter.	880	1473	0,5974
tempo ($\times 10^3$ seg.)	1,8320	3,0657	0,5976
Seno hiperbólico	PLS	MMA	$v_{\text{PLS}}/v_{\text{MMA}}$
f. obj.	0,0119	0,0115	1,0174
iter.	570	1381	0,4127
tempo ($\times 10^3$ seg.)	0,8638	2,0826	0,4148

Tabela 6.1: Resultados obtidos para a viga do Exemplo 1.

Observando a Tabela 6.1, constatamos que, salvo quando o filtro do seno hiperbólico é usado, os valores da função objetivo da viga encontrados pela PLS foram menores do que aqueles obtidos pelo MMA. Além disso, a PLS consumiu menos tempo em todos os casos. Quando aplicamos o filtro do gradiente, por exemplo, a PLS gastou apenas 3,37% do tempo gasto pelo MMA para encontrar

a solução ótima aproximada. As topologias ótimas encontradas pela PLS e pelo MMA foram quase idênticas para todos os filtros. É interessante notar que a topologia ótima da viga obtida quando aplicamos o filtro das densidades ponderadas é um pouco diferente das outras, apresentando algumas barras a mais. O surgimento de tais barras fez com que a viga em questão ficasse mais rígida, o que pode ser observado pelo respectivo valor da função objetivo, que foi menor em relação aos valores obtidos pelos outros filtros.

6.2.2 Resultados para a pinça usando a formulação de Nishiwaki *et al.*

Nesta seção, mostramos os resultados obtidos para a topologia ótima da pinça do Exemplo 2. O domínio da Figura 6.2 foi discretizado em 1650 elementos finitos quadrados de 1 mm^2 .

Para a PLS, os valores iniciais do raio da região de confiança foram: 0,15 quando aplicamos o filtro das densidades ponderadas, o filtro morfológico de dilatação e o filtro do seno hiperbólico, 0,1 quando nenhum filtro é usado ou quando aplicamos o filtro morfológico de erosão, e 0,05 para o filtro do gradiente. No caso do MMA, tomamos 0,1 como raio inicial da região de confiança quando o filtro não é aplicado ou quando usamos o filtro do seno hiperbólico, 0,05 quando usamos o filtro do gradiente, e escolhemos 0,15 quando aplicamos os filtros de dilatação, de erosão e das densidades ponderadas. Quando aplicamos o filtro do gradiente, usamos $\zeta = 100$ na função objetivo (3.38).

Com relação ao raio de abrangência de aplicação dos filtros, tomamos $r_{\min} = 1,5\text{ mm}$ para os filtros do gradiente, das densidades ponderadas e do seno hiperbólico, e $r_{\min} = 1\text{ mm}$ para os filtros de dilatação e de erosão. O valor inicial para as densidades de cada elemento é 0,2.

A Tabela 6.2 contém os resultados obtidos. As topologias ótimas são mostradas nas Figuras 6.16 a 6.27.

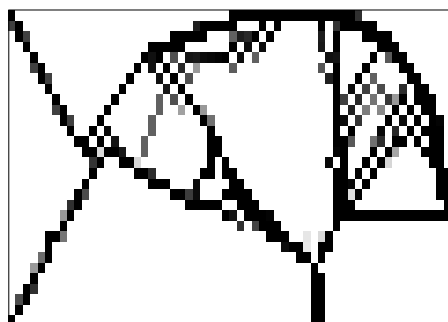


Figura 6.16: Pinça obtida com a PLS, sem aplicação de filtro.

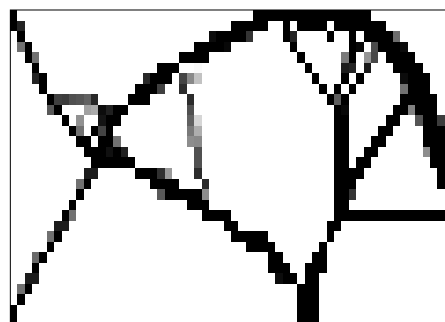


Figura 6.17: Pinça obtida com o MMA, sem aplicação de filtro.

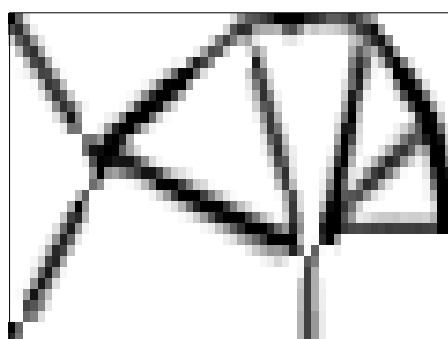


Figura 6.18: Pinça obtida com a PLS, usando o filtro do gradiente.

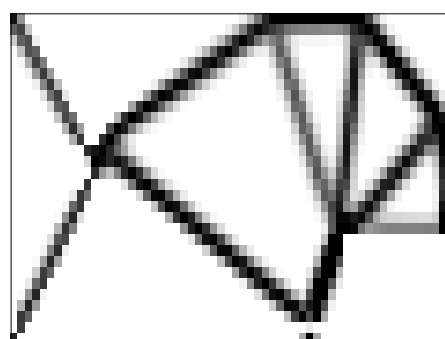


Figura 6.19: Pinça obtida com o MMA, usando o filtro do gradiente.

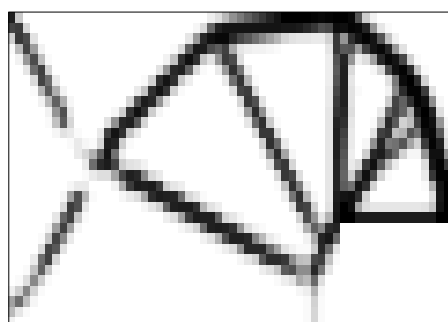


Figura 6.20: Pinça obtida com a PLS, usando o filtro das densidades ponderadas.

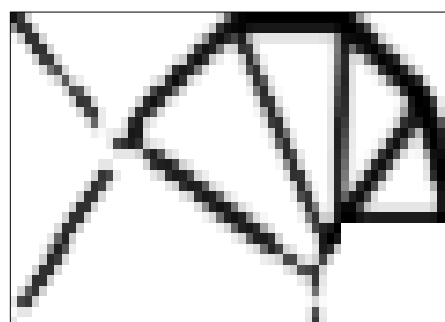


Figura 6.21: Pinça obtida com o MMA, usando o filtro das densidades ponderadas.

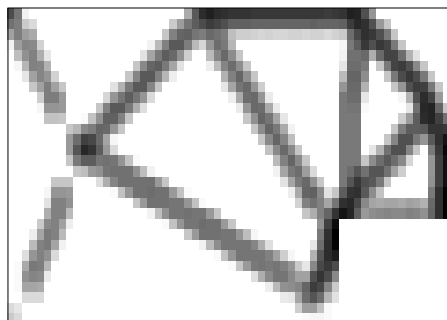


Figura 6.22: Pinça obtida com a PLS, usando o filtro morfológico de dilatação.

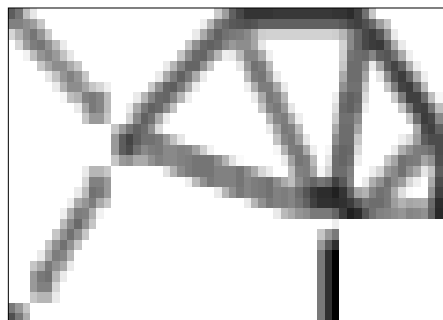


Figura 6.23: Pinça obtida com o MMA, usando o filtro morfológico de dilatação.

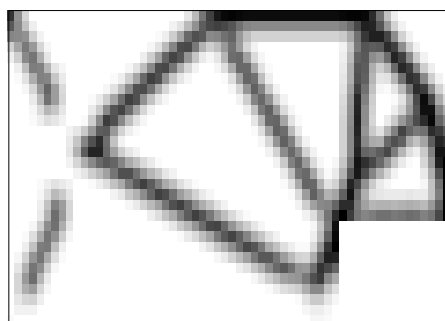


Figura 6.24: Pinça obtida com a PLS, usando o filtro morfológico de erosão.

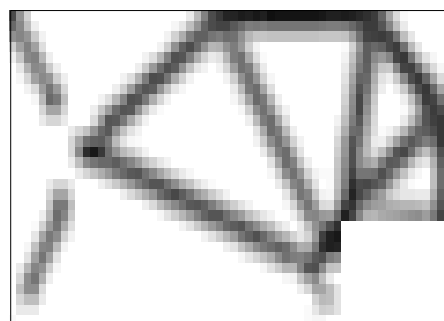


Figura 6.25: Pinça obtida com o MMA, usando o filtro morfológico de erosão.

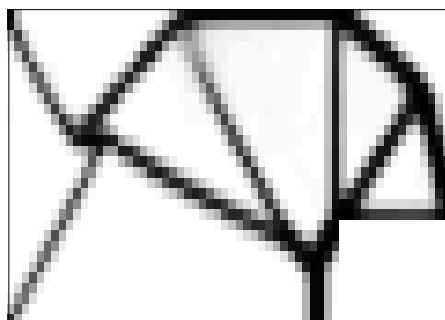


Figura 6.26: Pinça obtida com a PLS, usando o filtro do seno hiperbólico.

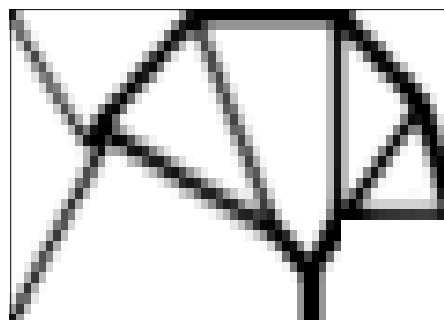


Figura 6.27: Pinça obtida com o MMA, usando o filtro do seno hiperbólico.

Sem filtro	PLS	MMA	$v_{\text{PLS}}/v_{\text{MMA}}$
f. obj.	$-5,9746 \times 10^6$	$-1,6951 \times 10^6$	3,5246
iter.	197	297	0,6633
tempo ($\times 10^3$ seg.)	0,4304	1,2861	0,3347
Gradiente	PLS	MMA	$v_{\text{PLS}}/v_{\text{MMA}}$
f. obj.	$-9,4025 \times 10^5$	$-4,3761 \times 10^5$	2,1486
iter.	45	1018	0,0442
tempo ($\times 10^3$ seg.)	0,1826	6,7848	0,0269
Dens. Pond.	PLS	MMA	$v_{\text{PLS}}/v_{\text{MMA}}$
f. obj.	-557,4422	$-1,3072 \times 10^3$	0,4264
iter.	265	1305	0,2031
tempo ($\times 10^3$ seg.)	0,6575	7,9064	0,0832
Dilatação	PLS	MMA	$v_{\text{PLS}}/v_{\text{MMA}}$
f. obj.	$-1,2883 \times 10^3$	$-2,9197 \times 10^3$	0,4412
iter.	900	1500	0,6000
tempo ($\times 10^3$ seg.)	2,8345	12,4050	0,2285
Erosão	PLS	MMA	$v_{\text{PLS}}/v_{\text{MMA}}$
f. obj.	-356,6776	-441,2806	0,8083
iter.	1146	1500	0,7640
tempo ($\times 10^3$ seg.)	3,5177	7,9046	0,4451
Seno hiperbólico	PLS	MMA	$v_{\text{PLS}}/v_{\text{MMA}}$
f. obj.	-3,9354	-4,9243	0,7992
iter.	356	1089	0,3269
tempo ($\times 10^3$ seg.)	0,8419	5,1908	0,1622

Tabela 6.2: Resultados obtidos para a pinça usando a formulação de Nishiwaki *et al.* [33].

Observamos na Tabela 6.2 que, para a maioria dos filtros aplicados, o MMA conseguiu obter valores bem menores para a função objetivo em relação à PLS. Em compensação, o MMA gastou um tempo muito maior para encontrar os resultados. Quando aplicamos o filtro do gradiente, a PLS encontrou um menor valor para a função objetivo, usando apenas 2,69% do tempo gasto pelo MMA. A discrepância entre os valores encontrados para a função objetivo foi menor quando usamos os filtros de erosão e do seno hiperbólico.

Notamos que os formatos ótimos da pinça encontrados pelos métodos quando usamos o filtro do seno hiperbólico são bastante semelhantes. Entretanto, as topologias ótimas obtidas quando aplicamos os filtros do gradiente e de dilatação foram bastante diferentes. Para os filtros das densidades ponderadas e de erosão, a diferença entre as topologias foi menos pronunciada.

Podemos observar que os filtros produziram pinças que apresentam regiões sólidas conectadas por um único nó. De acordo com Silva [41], durante a transmissão do movimento, este nó age como uma rótula (ou *hinge*) que conecta essas duas regiões, o que caracteriza um mecanismo de corpo rígido. Este é um efeito indesejado, pois compromete a modelagem e a fabricação do mecanismo flexível.

A topologia ótima de uma pinça composta por 6600 elementos finitos quadrados é exibida na Figura 6.29. Para obtê-la, usamos a formulação de Nishiwaki *et al.* [33], aplicando a PLS com o filtro do gradiente. Escolhemos 0,06 como sendo o tamanho inicial do raio da região de confiança e $r_{min} = 1,5\text{ mm}$ como sendo o raio de abrangência para a aplicação do filtro do gradiente. Na função objetivo (3.38), usamos $\zeta = 100$. O formato ótimo dessa pinça foi obtido após 87 iterações e 2.570,6 segundos, e o valor ótimo da função objetivo é -1.7517×10^7 .

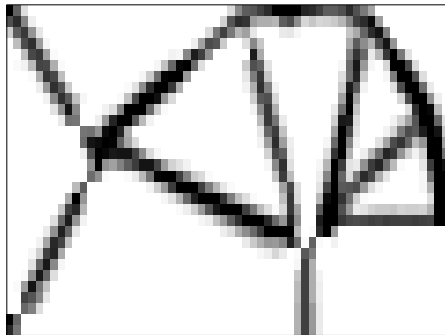


Figura 6.28: Topologia ótima da pinça usando uma malha com 1650 elementos finitos.

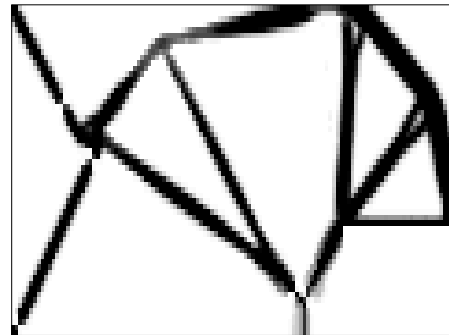


Figura 6.29: Topologia ótima da pinça usando uma malha com 6600 elementos finitos.

Como podemos observar, duas das barras da pinça da Figura 6.29 apresentam uma pequena bifurcação, e uma das barras horizontais da pinça da Figura 6.28 tornou-se levemente inclinada na pinça da Figura 6.29. A PLS gastou um tempo aproximadamente 14 vezes maior para encontrar a pinça da Figura 6.29 em relação àquela da Figura 6.28.

6.2.3 Topologias ótimas da pinça usando a formulação de Lima

Nesta seção, apresentamos algumas topologias ótimas para a pinça obtidas a partir da formulação de Lima [26] (veja o problema (3.34)), combinada com o filtro para o gradiente da função objetivo e usando a PLS. Para avaliar o papel do fator w na ponderação da energia mútua e da flexibilidade média de um mecanismo flexível, utilizamos os fatores de peso $w = 0, 3, 0, 5$ e $0, 7$. Dessa forma, pode-se obter um mecanismo mais flexível (ou seja, o termo associado à energia mútua terá maior relevância na minimização da função objetivo) ou mais rígido (isto é, a relevância do termo relacionado à flexibilidade média é maior na minimização da função objetivo).

Como a função objetivo da formulação de Lima [26] envolve os logaritmos da energia mútua e da flexibilidade média, devemos garantir que esses valores sejam sempre estritamente positivos. A flexibilidade média é sempre estritamente positiva quando os deslocamentos nodais são não nulos, uma vez que a matriz de rigidez global é positiva-definida. Por outro lado, nada podemos garantir com relação à energia mútua. Por esse motivo, sempre que um ponto inicial tinha energia mútua nula ou negativa, usamos inicialmente a formulação de Nishiwaki *et al.* [33] até que a energia mútua ficasse estritamente positiva e, daí por diante, utilizamos a formulação de Lima [26].

Tomamos 0,2 como o tamanho inicial do raio da região de confiança quando $w = 0, 3$. Para $w = 0, 5$ e $w = 0, 7$, escolhemos 0,15 para o valor inicial desse raio. Usamos $r_{min} = 1,5 mm$ como sendo o raio de abrangência para a aplicação do filtro do gradiente. Na função objetivo (3.38), tomamos $\zeta = 1$. A Figura 6.30 mostra a topologia ótima da pinça usando a formulação de Nishiwaki *et al.* [33] através da PLS com o filtro do gradiente, e as Figuras 6.31 a 6.33 mostram as topologias ótimas da pinça em função de w .

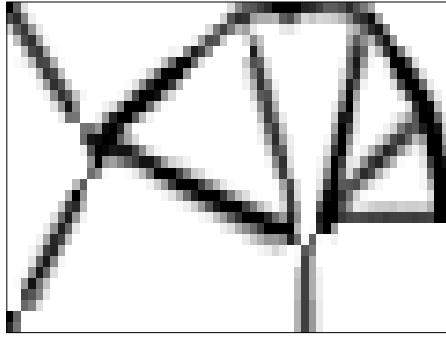


Figura 6.30: Topologia ótima da pinça obtida com a formulação de Nishiwaki *et al.*

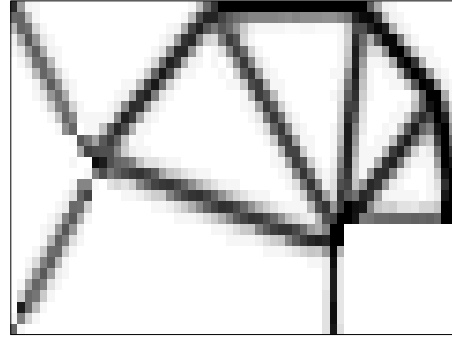


Figura 6.31: Topologia ótima da pinça obtida com a formulação de Lima usando $w = 0,3$.

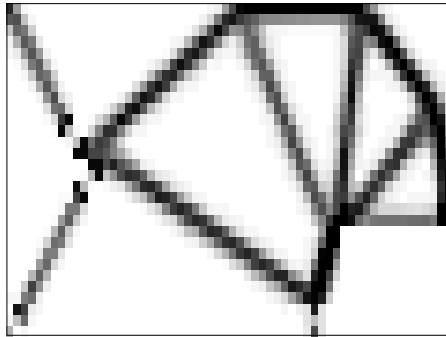


Figura 6.32: Topologia ótima da pinça obtida com a formulação de Lima usando $w = 0,5$.

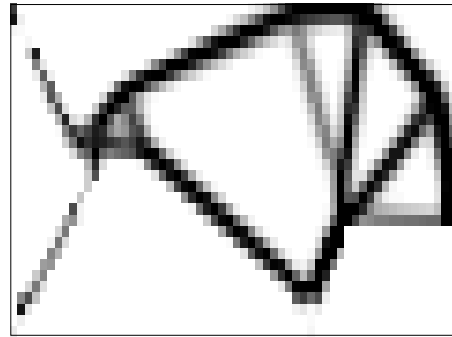


Figura 6.33: Topologia ótima da pinça obtida com a formulação de Lima usando $w = 0,7$.

Podemos notar nas Figuras 6.31 e 6.33 que o formato ótimo da pinça é bastante sensível à alteração do fator de peso w . Segundo Lima [26], quando $w \rightarrow 0$, o problema de otimização do mecanismo flexível torna-se semelhante ao problema de maximizar a rigidez de uma estrutura e, quando $w \rightarrow 1$, a configuração da topologia ótima fica quase indefinida devida à sua alta flexibilidade. Quando $w = 0,5$, pode-se mostrar que as formulações de Nishiwaki *et al.* [33] e de Lima [26] são equivalentes. De fato, basta aplicar o logaritmo neperiano no valor absoluto da função objetivo original da formulação de Nishiwaki *et al.* e, em seguida, multiplicar o resultado por $-0,5$.

A Tabela 6.3 mostra os resultados obtidos para cada valor de w (usando a função objetivo $\tilde{f}(\rho)$, definida em (3.38)) e o valor da função objetivo original da formulação de Nishiwaki *et al.* [33], convertido para a formulação de Lima. Analisando a tabela, podemos perceber que, para os três valores de w usados, o

fator de peso w	$\tilde{f}(\boldsymbol{\rho})$	iter.	tempo ($\times 10^3$ seg.)
0,3	-12,5211	587	1,1391
0,5	-4,4123	1020	1,9487
0,7	-2,0522	594	1,1895
Nishiwaki	-4,5731	45	0,1826

Tabela 6.3: Resultados obtidos para a pinça usando a formulações de Lima [26].

tempo gasto para encontrar a solução ótima aproximada para a pinça usando a formulação de Lima foi bem maior do que aquele gasto usando a formulação de Nishiwaki *et al.*. Quando $w = 0,5$, o valor da função objetivo original de Lima (vide (3.34)), é maior que o valor obtido aplicando-se a PLS ao problema da formulação de Nishiwaki (vide (3.33)) e convertendo-se o resultado para a formulação de Lima. Apesar de as formulações de Nishiwaki e de Lima serem equivalentes quando $w = 0,5$, a primeira forneceu $\tilde{f}(\boldsymbol{\rho}) = -4,5731$, enquanto a segunda alcançou apenas $\tilde{f}(\boldsymbol{\rho}) = -3,4399$. Uma possível justificativa para essa diferença entre os valores correspondentes da função objetivo é o fato de os problemas em questão possuírem vários minimizadores locais.

6.2.4 Comparação entre as formulações de Nishiwaki *et al.* e de Sigmund para a topologia ótima da pinça

Nesta seção, mostraremos as topologias ótimas da pinça obtidas usando a formulação de Sigmund [37] (veja o problema (3.34)) através da PLS. Faremos uma análise comparativa entre essa formulação e aquela de Nishiwaki *et al.* [33], no que diz respeito ao número de iterações efetuadas pela PLS para encontrar as soluções ótimas aproximadas, ao tempo gasto, e às topologias ótimas obtidas. É importante observar que, neste caso, não podemos fazer uma comparação direta entre os valores ótimos das funções objetivo obtidos por essas duas formulações, pois elas são distintas.

Escolhemos a PLS para fazer as análises desta seção devido ao fato de, até agora, o tempo gasto para resolver os problemas ter sido menor em relação ao MMA. Outra razão para essa escolha é a boa qualidade das topologias ótimas obtidas usando as outras formulações estudadas neste trabalho.

Os valores iniciais para o raio da região de confiança para a formulação de Sigmund [37] foram: 0,1 quando aplicamos o filtro do gradiente ou o filtro de erosão, e 0,05 para os demais filtros. Para a formulação de Nishiwaki *et al.* [33], os valores em questão foram os mesmos apresentados na Seção 6.2.2. Para a formulação de Sigmund [37], o limitante superior para o deslocamento no ponto A da Figura 6.2 é $\Delta_{in}^* = 1,0 \times 10^{-8} \text{ mm}$, e a rigidez da mola que deve ser localizada no ponto B é $k_s = 1,0 \times 10^{14} \text{ N/mm}$. Os valores de $r_{\min}$ foram os mesmos adotados para a formulação de Nishiwaki *et al.* [33] (vide Seção 6.2.2). Na função objetivo (3.38), usamos $\zeta = 100$ para a formulação de Nishiwaki, e $\zeta = 1$ para a formulação de Sigmund.

Os resultados da análise comparativa encontram-se na Tabela 6.4. Nesta tabela, a coluna v_N/v_S apresenta a razão entre os valores obtidos pela formulação de Nishiwaki *et al.* e de Sigmund. Assim, por exemplo, um valor de v_N/v_S maior que 1 para o tempo indica que a formulação de Sigmund exigiu menos tempo para a obtenção da solução. As topologias ótimas obtidas por cada formulação são mostradas nas Figuras 6.34 a 6.43.

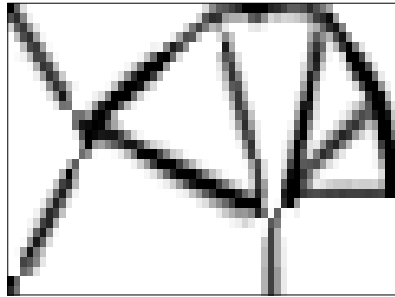


Figura 6.34: Pinça obtida com a formulação de Nishiwaki *et al.*, usando o filtro do gradiente.

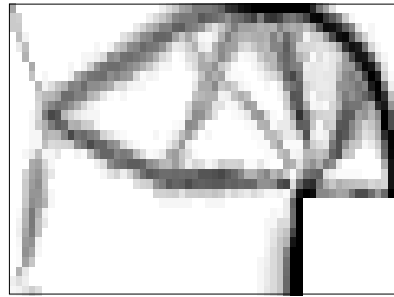


Figura 6.35: Pinça obtida com a formulação de Sigmund, usando o filtro do gradiente.

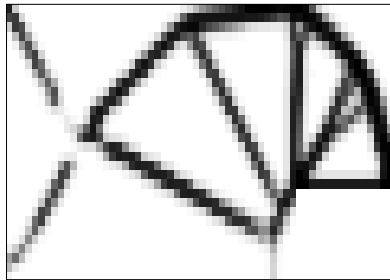


Figura 6.36: Pinça obtida com a formulação de Nishiwaki *et al.*, usando o filtro das densidades ponderadas.

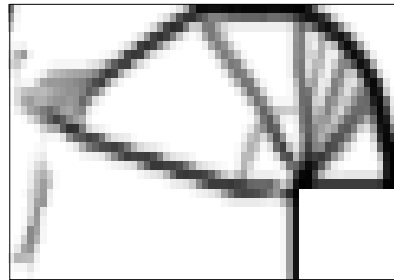


Figura 6.37: Pinça obtida com a formulação de Sigmund, usando o filtro das densidades ponderadas.

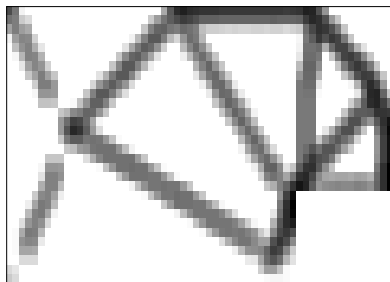


Figura 6.38: Pinça obtida com a formulação de Nishiwaki *et al.*, usando o filtro morfológico de dilatação.

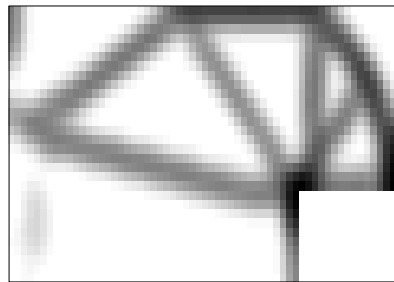


Figura 6.39: Pinça obtida com a formulação de Sigmund, usando o filtro morfológico de dilatação.

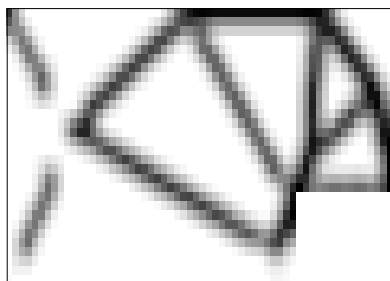


Figura 6.40: Pinça obtida com a formulação de Nishiwaki *et al.*, usando o filtro morfológico de erosão.

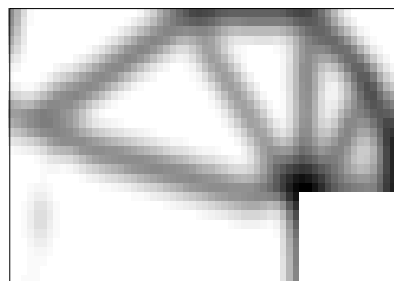


Figura 6.41: Pinça obtida com a formulação de Sigmund, usando o filtro morfológico de erosão.

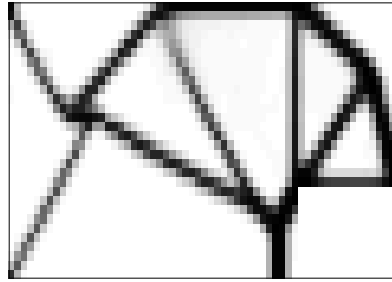


Figura 6.42: Pinça obtida com a formulação de Nishiwaki *et al.*, usando o filtro do seno hiperbólico.

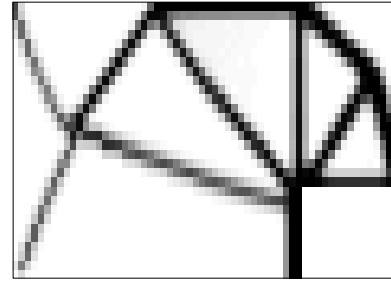


Figura 6.43: Pinça obtida com a formulação de Sigmund, usando o filtro do seno hiperbólico.

Gradiente	Nishiwaki	Sigmund	v_N/v_S
f. obj.	$-9,4025 \times 10^5$	-19,7906	-
iter.	45	37	1,2162
tempo ($\times 10^3$ seg.)	0,1826	0,0844	2,1635
Dens. Pond.	Nishiwaki	Sigmund	v_N/v_S
f. obj.	-557,4422	-26,6553	-
iter.	265	279	0,9498
tempo ($\times 10^3$ seg.)	0,6575	0,5237	1,2555
Dilatação	Nishiwaki	Sigmund	v_N/v_S
f. obj.	$-1,2883 \times 10^3$	-26,4323	-
iter.	900	312	2,8846
tempo ($\times 10^3$ seg.)	2,8345	0,8892	3,1877
Erosão	Nishiwaki	Sigmund	v_N/v_S
f. obj.	-356,6776	-24,7344	-
iter.	1146	597	1,9196
tempo ($\times 10^3$ seg.)	3,5177	1,5954	2,2049
Seno hiperbólico	Nishiwaki	Sigmund	v_N/v_S
f. obj.	-3,9354	-2,8018	-
iter.	356	499	0,7134
tempo ($\times 10^3$ seg.)	0,8419	0,7705	1,0927

Tabela 6.4: Tabela comparativa entre o número de iterações e o tempo gasto para a pinça usando as formulações de Nishiwaki *et al.* [33] e de Sigmund [37].

Observando a Tabela 6.4, constatamos que, na maioria dos casos, a formulação de Sigmund exigiu um número menor de iterações para encontrar as soluções ótimas aproximadas. Por outro lado, a topologia ótima encontrada para a pinça usando a formulação de Sigmund [37] com o filtro do gradiente (Figura 6.35) não foi satisfatória. Neste caso, percebemos que a quantidade de elementos com densidades intermediárias é bastante grande. De um modo geral, a qualidade das topologias ótimas das pinças obtidas através da formulação de Nishiwaki *et al.* é bastante superior em relação às aquelas encontradas pela formulação de Sigmund. Entretanto, a topologia ótima obtida usando essa formulação com o filtro do seno hiperbólico é bastante adequada. É importante ressaltar que, além de os resultados apresentados pela formulação de Sigmund não terem sido satisfatórios na maioria dos casos, os formatos ótimos para a pinça usando essa formulação foram obtidos após muitos testes, nos quais variamos o valor inicial da região de confiança para a PLS.

6.2.5 Resultados para o inversor de deslocamentos usando a formulação de Nishiwaki *et al.*

Nesta seção, mostraremos os resultados obtidos para a topologia ótima do inversor de deslocamentos do Exemplo 3. O domínio da Figura 6.3 foi discretizado em 1800 elementos finitos quadrados.

Quando usamos a PLS, os valores iniciais do raio da região de confiança foram: 0,15 para o filtro das densidades ponderadas, e 0,1 para os demais filtros ou quando nenhum filtro é aplicado. No caso do MMA, tomamos 0,15 como o raio inicial da região de confiança quando usamos o filtro do gradiente, 0,2 para o filtro de dilatação, 0,5 para o filtro do seno hiperbólico, e 0,1 para os filtros das densidades ponderadas e de erosão, ou quando nenhum filtro é aplicado. Tomamos $\zeta = 10$ na função objetivo (3.38) quando aplicamos o filtro do gradiente.

Com relação ao raio de abrangência de aplicação dos filtros, tomamos $r_{\min} = 1,5 \text{ mm}$ para os filtros do gradiente e do seno hiperbólico, $r_{\min} = 3 \text{ mm}$ para o filtro das densidades ponderadas, e $r_{\min} = 1 \text{ mm}$ para os filtros de dilatação e de erosão. O valor inicial para as densidades de cada elemento é 0,2.

A Tabela 6.5 contém os resultados obtidos para cada teste do Exemplo 3. As topologias ótimas do inversor são mostradas nas Figuras 6.44 a 6.55.

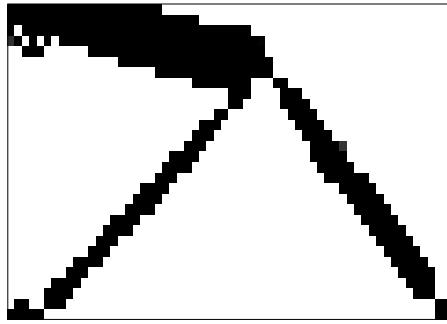


Figura 6.44: Inversor obtido com a PLS, sem aplicação de filtro.

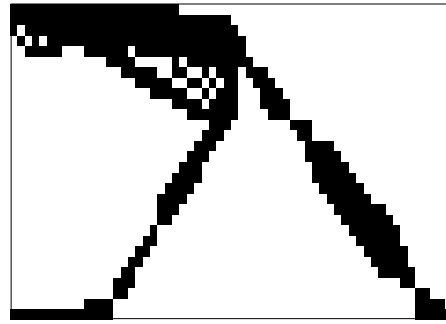


Figura 6.45: Inversor obtido com o MMA, sem aplicação de filtro.

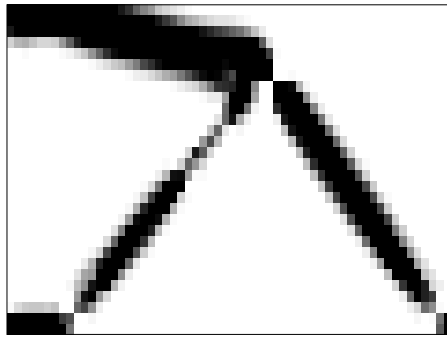


Figura 6.46: Inversor obtido com a PLS, usando o filtro do gradiente.

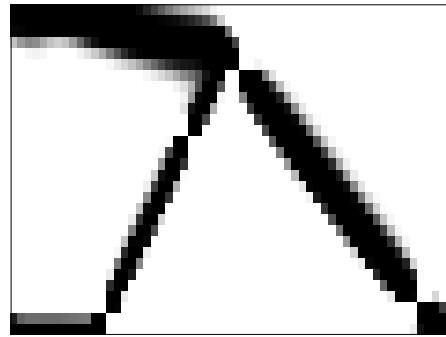


Figura 6.47: Inversor obtido com o MMA, usando o filtro do gradiente.

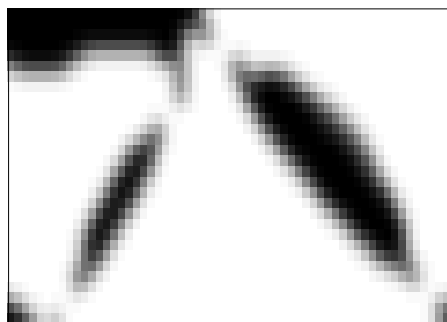


Figura 6.48: Inversor obtido com a PLS, usando o filtro das densidades ponderadas.

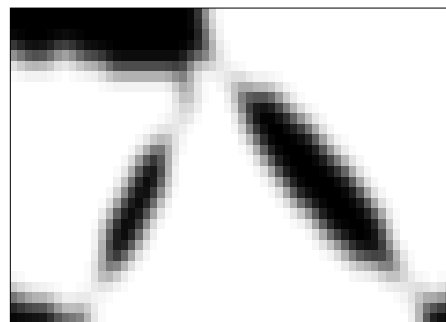


Figura 6.49: Inversor obtido com o MMA, usando o filtro das densidades ponderadas.

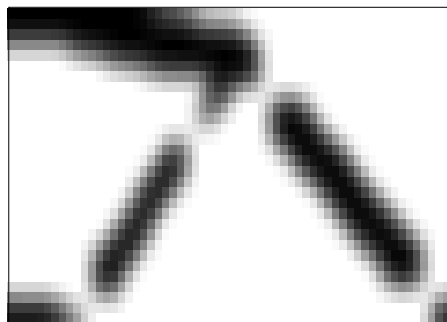


Figura 6.50: Inversor obtido com a PLS, usando o filtro morfológico de dilatação.

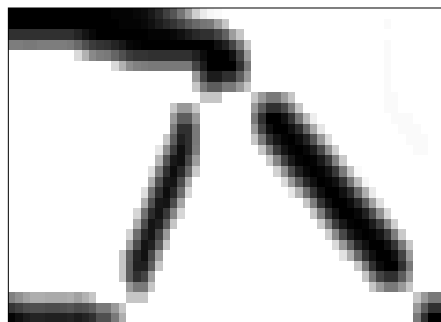


Figura 6.51: Inversor obtido com o MMA, usando o filtro morfológico de dilatação.

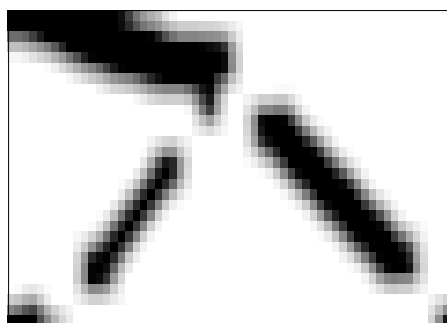


Figura 6.52: Inversor obtido com a PLS, usando o filtro morfológico de erosão.

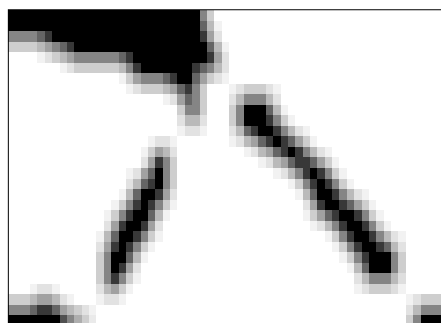


Figura 6.53: Inversor obtido com o MMA, usando o filtro morfológico de erosão.

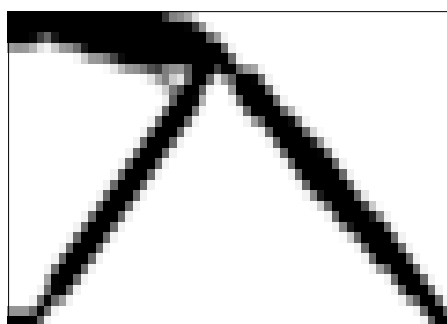


Figura 6.54: Inversor obtido com a PLS, usando o filtro do seno hiperbólico.

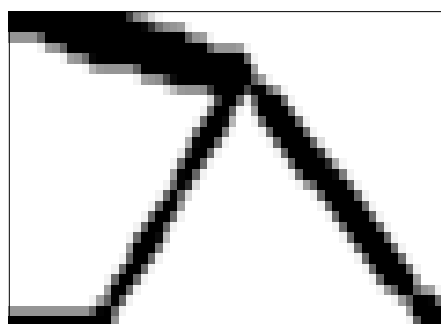


Figura 6.55: Inversor obtido com o MMA, usando o filtro do seno hiperbólico.

Sem filtro	PLS	MMA	$v_{\text{PLS}}/v_{\text{MMA}}$
f. obj.	$-3,8824 \times 10^6$	$-3,9702 \times 10^6$	0,9779
iter.	319	324	0,9846
tempo ($\times 10^3$ seg.)	0,7210	1,2553	0,5744
Gradiente	PLS	MMA	$v_{\text{PLS}}/v_{\text{MMA}}$
f. obj.	$-4,7678 \times 10^5$	$-7,9519 \times 10^4$	5,9558
iter.	50	282	0,1773
tempo ($\times 10^3$ seg.)	0,2019	1,5643	0,1291
Dens. Pond.	PLS	MMA	$v_{\text{PLS}}/v_{\text{MMA}}$
f. obj.	-81,2736	-76,9158	1,0567
iter.	499	1048	0,4761
tempo ($\times 10^3$ seg.)	1,8640	5,8406	0,3191
Dilatação	PLS	MMA	$v_{\text{PLS}}/v_{\text{MMA}}$
f. obj.	$-2,4511 \times 10^5$	$-2,0820 \times 10^5$	1,1773
iter.	781	1500	0,5207
tempo ($\times 10^3$ seg.)	1,8640	11,6530	0,1599
Erosão	PLS	MMA	$v_{\text{PLS}}/v_{\text{MMA}}$
f. obj.	$-2,4036 \times 10^3$	$-4,3405 \times 10^3$	0,5538
iter.	639	1420	0,4500
tempo ($\times 10^3$ seg.)	2,4293	7,7041	0,3153
Seno hiperbólico	PLS	MMA	$v_{\text{PLS}}/v_{\text{MMA}}$
f. obj.	-4,8775	-4,8207	1,0118
iter.	505	407	1,2408
tempo ($\times 10^3$ seg.)	1,3855	1,4565	0,9513

Tabela 6.5 Resultados obtidos para o inversor usando a formulação de Nishiwaki *et al.* [33].

De acordo com a Tabela 6.5, podemos perceber que a PLS encontrou um valor menor para a função objetivo na maioria dos casos. Além disso, para os filtros do gradiente, de dilatação e das densidades ponderadas, a PLS gastou um número menor de iterações e menos tempo para encontrar as soluções ótimas aproximadas. Quando aplicamos o MMA com o filtro de dilatação, o número máximo permitido de iterações foi atingido, e o valor correspondente da função objetivo ainda era maior do que aquele obtido pela PLS. No caso do filtro do seno hiperbólico, observamos que a PLS executou 98 iterações a mais que o MMA, mas

que o tempo gasto pela PLS foi menor. Quando nenhum filtro foi aplicado, a PLS e o MMA encontraram valores relativamente próximos para a função objetivo, e o MMA executou apenas 5 iterações a mais que a PLS.

Observando as Figuras 6.44 a 6.55, constatamos que, em todos os casos testados, as topologias ótimas do inversor obtidas pela PLS e pelo MMA apresentam algumas diferenças. Por exemplo, nas topologias encontradas pelo MMA, as barras localizadas no canto inferior esquerdo do inversor são maiores.

A Figura 6.57 mostra a topologia ótima de um inversor cujo domínio foi discretizado em 7200 elementos finitos quadrados usando a formulação de Nishiwaki *et al.* [33] através a PLS com o filtro do gradiente. Escolhemos 0,09 como o raio inicial da região de confiança e $r_{\min} = 1,5 \text{ mm}$ para o raio de abrangência de aplicação do filtro. Usamos $\zeta = 10$ na função objetivo (3.38). O valor encontrado para a função objetivo é -7.8239×10^5 . A solução ótima aproximada foi obtida após 65 iterações e 2006,5 segundos.

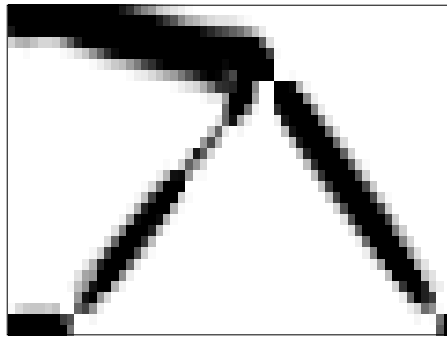


Figura 6.56: Inversor obtido usando uma malha de 1800 elementos finitos.

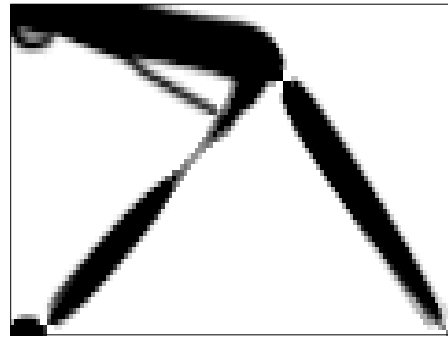


Figura 6.57: Inversor obtido usando uma malha de 7200 elementos finitos.

Podemos observar que o inversor da Figura 6.57 contém uma pequena barra a mais. A PLS gastou um tempo aproximadamente 10 vezes maior para encontrar o inversor da Figura 6.57 em relação ao da Figura 6.56.

6.2.6 Topologias ótimas do inversor usando a formulação de Lima

Nesta seção, mostraremos algumas topologias ótimas do inversor obtidas através da formulação de Lima [26], usando a PLS com o filtro do gradiente. Assim como na Seção 6.2.3, escolhemos os fatores de peso $w = 0,3, 0,5$ e $0,7$ para a função objetivo.

No caso do inversor, para garantir que a energia mútua seja sempre estritamente positiva, aplicamos algumas iterações da formulação de Nishiwaki *et al.* [33] antes de usar a formulação de Lima [26]. Neste caso, 20 iterações da formulação de Nishiwaki *et al.* [33] foram suficientes para obter um valor estritamente positivo para a energia mútua do inversor.

Para $w = 0,3$ e $w = 0,5$, tomamos $0,1$ como o valor inicial para o raio da região de confiança. Quando $w = 0,7$, usamos $0,2$ para o valor em questão. Tomamos $r_{\min} = 1,5\text{ mm}$ para a aplicação do filtro do gradiente. Para cada um dos três valores de w , usamos $\zeta = 1$ na função objetivo (3.38). A Figura 6.58 mostra a topologia ótima do inversor usando a formulação de Nishiwaki *et al.* [33] através da PLS com o filtro do gradiente, e as Figuras 6.59 a 6.61 mostram as topologias ótimas do inversor em função de w . Os resultados relativos a esses testes estão na Tabela 6.6. É importante lembrar que, neste caso, usamos a função objetivo (3.38).

Observamos que os inversores das Figuras 6.59, 6.60 e 6.61 são bastante semelhantes, apesar da variação do valor de w . Percebemos também que os inversores em questão contêm poucos elementos com densidades intermediárias.

De acordo com a Tabela 6.6, observamos que a formulação de Lima gastou mais tempo para encontrar as soluções ótimas aproximadas em relação à formulação de Nishiwaki *et al.*. Conforme já dissemos na Seção 6.2.3, as formulações de Nishiwaki *et al.* e de Lima são equivalentes quando $w = 0,5$. Mas, para este valor de w , constatamos que o valor da função objetivo original da formulação de Lima (vide (3.34)), $-7,5833$, é menor que o valor da função objetivo original da formulação de Nishiwaki *et al.* (vide (3.33)), $-4,0640$, que foi obtido pela conversão para a função objetivo da formulação de Lima. Conforme dito na Seção 6.2.3, uma possível razão para a diferença entre esses valores é o fato de os problemas em questão possuírem vários minimizadores locais.

fator de peso w	$\tilde{f}(\rho)$	iter.	tempo ($\times 10^3 \text{seg.}$)
0,3	-17,5867	372	0,7458
0,5	-12,5659	1049	2,6095
0,7	-0,5724	1289	2,7017
Nishiwaki	-4,0640	50	0,2019

Tabela 6.6: Resultados obtidos para o inversor usando as formulações de Lima [26] e de Nishiwaki *et al.* [33]

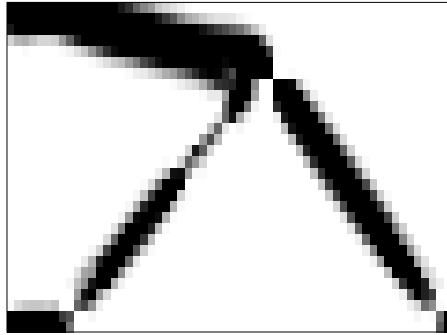


Figura 6.58: Inversor obtido com a formulação de Nishiwaki *et al.*.

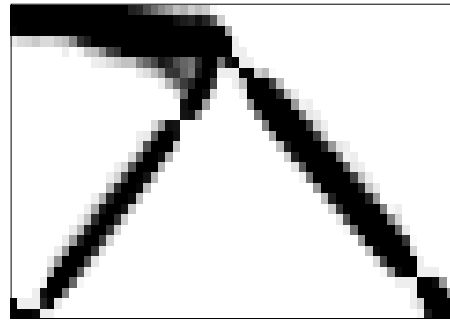


Figura 6.59: Inversor obtido com a formulação de Lima usando $w = 0,3$.

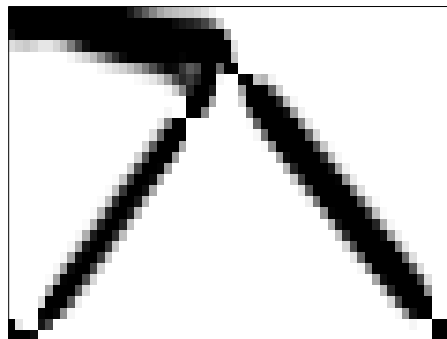


Figura 6.60: Inversor obtido com a formulação de Lima usando $w = 0,5$.

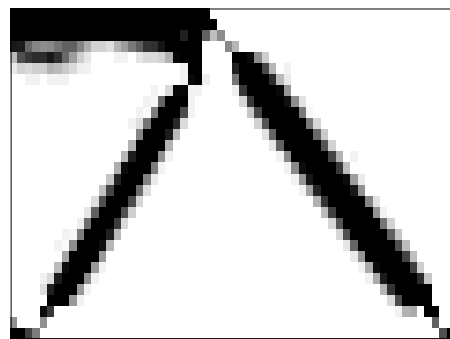


Figura 6.61: Inversor obtido com a formulação de Lima usando $w = 0,7$.

6.2.7 Comparação entre as formulações de Nishiwaki *et al.* e de Sigmund para a topologia ótima do inversor

Nesta seção, mostraremos as topologias ótimas do inversor obtidas usando a formulação de Sigmund [37] (veja o problema (3.35)) através da PLS com o filtro do gradiente, e faremos uma análise comparativa das topologias encontradas com aquelas obtidas usando a formulação de Nishiwaki *et al.* [33] com a PLS. É importante lembrar que, neste caso, não podemos fazer uma comparação entre os valores ótimos das respectivas funções objetivo, pois as formulações em questão são distintas.

Quando aplicamos o filtro do seno hiperbólico, tomamos 0,05 como o tamanho inicial para o raio da região de confiança. Para os outros casos, escolhemos esse valor como sendo 0,1. O valor máximo para o deslocamento no ponto A (veja a Figura 6.3) é de $\Delta_{in}^* = 1,0 \times 10^{-8} \text{ mm}$, e a rigidez da mola que deve ser localizada no ponto B é de $k_s = 1,0 \times 10^{14} \text{ N/mm}$. Os valores de $r_{\min}$ foram os mesmos usados na Seção 6.2.5. No caso do filtro do gradiente, usamos $\zeta = 10$ na função objetivo (3.38).

Os resultados relativos a estes testes estão na Tabela 6.7, e a razão v_N/v_S foi definida da mesma maneira como aquela que aparece na Tabela 6.4. As topologias ótimas do inversor obtidas por cada formulação são mostradas nas Figuras 6.62 a 6.71.

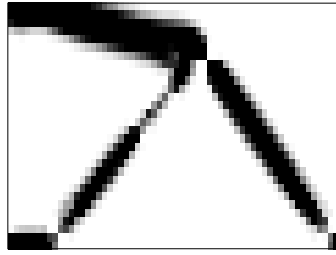


Figura 6.62: Inversor obtido com a formulação de Nishiwaki *et al.*, usando o filtro do gradiente.

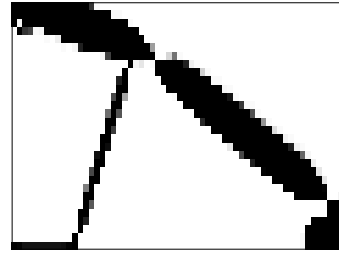


Figura 6.63: Inversor obtido com a formulação de Sigmund, usando o filtro do gradiente.

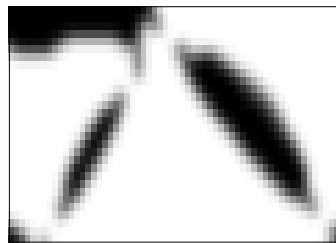


Figura 6.64: Inversor obtido com a formulação de Nishiwaki *et al.*, usando o filtro das densidades ponderadas.

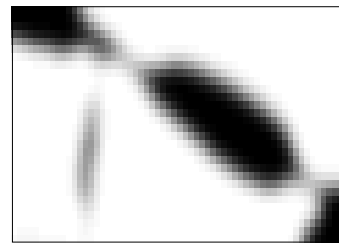


Figura 6.65: Inversor obtido com a formulação de Sigmund, usando o filtro das densidades ponderadas.

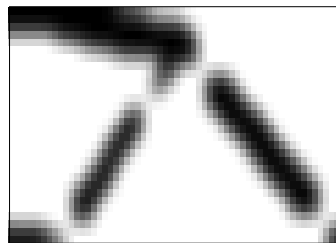


Figura 6.66: Inversor obtido com a formulação de Nishiwaki *et al.*, usando o filtro morfológico de dilatação.

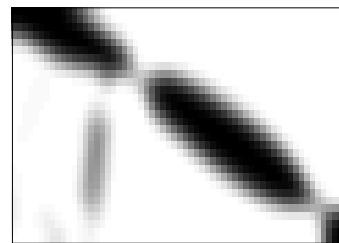


Figura 6.67: Inversor obtido com a formulação de Sigmund, usando o filtro morfológico de dilatação.

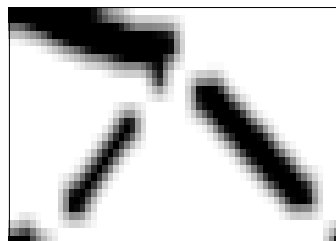


Figura 6.68: Inversor obtido com a formulação de Nishiwaki *et al.*, usando o filtro morfológico de erosão.

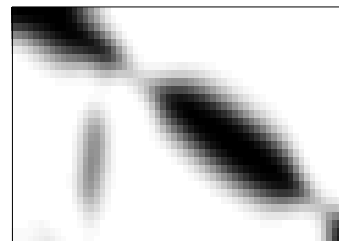


Figura 6.69: Inversor obtido com a formulação de Sigmund, usando o filtro morfológico de erosão.

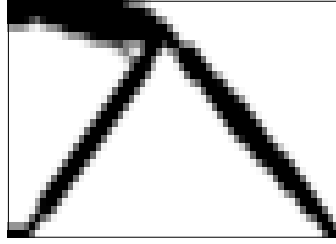


Figura 6.70: Inversor obtido com a formulação de Nishiwaki *et al.*, usando o filtro do seno hiperbólico.

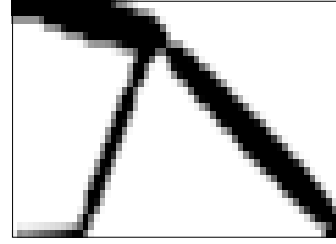


Figura 6.71: Inversor obtido com a formulação de Sigmund, usando o filtro do seno hiperbólico.

Gradiente	Nishiwaki	Sigmund	v_N/v_S
f. obj.	$-4,7678 \times 10^5$	-75,3186	-
iter.	50	130	0,3846
tempo ($\times 10^3$ seg.)	0,2019	0,3324	0,6074
Dens. Pond.	Nishiwaki	Sigmund	v_N/v_S
f. obj.	-81,2736	-22,8354	-
iter.	499	395	1,2633
tempo ($\times 10^3$ seg.)	1,8684	1,2530	1,4911
Dilatação	Nishiwaki	Sigmund	v_N/v_S
f. obj.	$-2,4511 \times 10^5$	-31,7372	-
iter.	781	421	1,8551
tempo ($\times 10^3$ seg.)	3,0167	1,2995	2,3214
Erosão	Nishiwaki	Sigmund	v_N/v_S
f. obj.	$-2,4036 \times 10^3$	-24,1000	-
iter.	639	553	1,1555
tempo ($\times 10^3$ seg.)	2,4293	1,6624	1,4613
Seno hiperbólico	Nishiwaki	Sigmund	v_N/v_S
f. obj.	-4,8775	-2,4028	-
iter.	505	413	1,2228
tempo ($\times 10^3$ seg.)	1,3855	0,7821	1,7715

Tabela 6.7: Tabela comparativa entre o número de iterações e o tempo gasto para obter o inversor usando as formulações de Nishiwaki *et al.* [33] e Sigmund [37].

Observando a Tabela 6.7, constatamos que, salvo quando o filtro do gradiente é aplicado, o tempo gasto pela PLS para encontrar as soluções ótimas aproximadas foi menor quando usamos a formulação de Sigmund [37]. Por outro lado, na maioria dos casos, a qualidade das topologias obtidas usando a formulação de Sigmund é bastante inferior. Percebemos que, nas topologias ótimas obtidas pela formulação de Sigmund, existem trechos do inversor onde não só há uma quantidade insuficiente de elementos preenchidos, como muitos elementos contêm densidades com valores pequenos. Isso acontece, por exemplo, nas proximidades do local de aplicação da força $\mathbf{f}_a$ (no canto inferior esquerdo do inversor). Constatamos que a topologia mais adequada para o inversor usando a formulação de Sigmund foi obtida quando aplicamos o filtro do seno hiperbólico.

6.3 Discussão sobre os resultados obtidos

Neste capítulo, usamos a Programação Linear Sequencial e o Método das Assíntotas Móveis para resolver alguns exemplos clássicos de problemas de otimização topológica. Obtivemos as topologias ótimas de uma viga (que é uma estrutura rígida), de uma pinça e de um inversor de deslocamentos (que são exemplos de mecanismos flexíveis). Analisamos também a eficácia de alguns tipos de filtros espaciais, que são empregados para eliminar o “tabuleiro de xadrez”.

No caso da viga, observamos que, na maioria dos testes realizados, a PLS encontrou um menor valor para a função objetivo, gastando menos tempo. Também constatamos que as topologias ótimas obtidas pelos dois métodos de otimização foram idênticas. O filtro das densidades ponderadas produziu topologias ótimas que continham algumas barras a mais que aquelas obtidas pelos outros filtros.

Já no caso da pinça, quando usamos a formulação de Nishiwaki *et al.* [33], o MMA encontrou valores menores para a função objetivo para a maioria dos filtros usados, embora o número de iterações tenha sido muito maior em relação à PLS. Exibimos também algumas topologias ótimas usando a formulação de Lima [26], através da PLS com o filtro do gradiente, para três valores do fator de peso w da função objetivo correspondente. Obtivemos pinças com diferentes topologias à medida que aumentamos o valor de w , e observamos que o tempo gasto para obter tais topologias foi maior em relação àquela obtida usando a formulação de

Nishiwaki *et al.*.

Para o inversor, no caso da formulação de Nishiwaki *et al.* [33], a PLS obteve valores menores para a função objetivo na maioria dos testes realizados. Quando aplicamos a formulação de Lima [26], observamos que as topologias obtidas para o inversor foram bastante semelhantes, mesmo com a variação do fator de peso w , e que o número de iterações também foi maior em relação ao resultado obtido pela formulação de Nishiwaki *et al.* [33].

Fizemos também uma comparação entre as formulações de Nishiwaki *et al.* [33] e de Sigmund [37] para os exemplos da pinça e do inversor, usando a PLS. Constatamos que, embora os resultados da formulação de Sigmund tenham sido obtidos em um menor tempo, a qualidade das respectivas topologias ótimas (tanto da pinça quanto do inversor) mostrou-se bastante inferior ao que foi obtido usando a formulação de Nishiwaki *et al.*. As topologias mais adequadas obtidas usando a formulação de Sigmund, tanto para a pinça quanto para o inversor, foram aquelas nas quais o filtro do seno hiperbólico foi adotado.

Em todos os exemplos testados, os filtros aplicados foram eficazes para a eliminação do “tabuleiro de xadrez”. Dentre todos aqueles estudados neste trabalho, o filtro do gradiente foi o que produziu as topologias ótimas gastando menos tempo, em quase todos os testes. Com relação à qualidade das topologias, constatamos que o filtro do seno hiperbólico produziu os melhores resultados. Observamos que os filtros morfológicos de dilatação e de erosão fazem com que as estruturas contenham uma quantidade maior de elementos com densidades intermediárias, particularmente em seu contorno. Na maioria dos casos, os filtros produzem estruturas que apresentam regiões sólidas conectadas por um único nó, que representa uma rótula. O filtro das densidades ponderadas, apesar de ter produzido estruturas aceitáveis e de ter a vantagem de manter a linearidade da restrição de volume, apresentou resultados inferiores ao filtro do seno hiperbólico.

Diante das observações acima, não podemos tirar uma conclusão definitiva sobre qual dos dois métodos de otimização estudados devem ser adotados para resolver um problema de otimização topológica, uma vez que, devido ao fato de os problemas de otimização topológica em questão possuírem vários minimizadores locais, cada método pode encontrar soluções distintas quando usamos um mesmo filtro e um mesmo ponto inicial. Entretanto, constatamos que a PLS encontrou a solução mais rapidamente em quase todos os testes realizados e com valores

menores para a função objetivo na maioria dos casos. Sendo assim, os testes realizados sugerem que a PLS foi levemente superior em relação ao MMA. Mas, também, concluímos que tanto a PLS quanto o MMA podem ser aplicados com sucesso na resolução de problemas de otimização topológica.

Conclusão

Neste trabalho, estudamos algumas formulações para o problema de otimização topológica de mecanismos flexíveis, e implementamos dois dos métodos de otimização mais usados na literatura para resolver o problema em questão: a Programação Linear Sequencial (PLS) e o Método das Assíntotas Móveis (MMA). Também comparamos alguns filtros usados para a eliminação do “tabuleiro de xadrez”, que é uma instabilidade numérica decorrente do tipo de elemento finito usado na discretização do domínio.

Os resultados computacionais mostram que, em quase todos os testes realizados, os filtros foram bastante eficientes para a eliminação do “tabuleiro de xadrez”. Observamos que o filtro para o gradiente da função objetivo é de fácil implementação e tem a vantagem de preservar a linearidade da restrição de volume máximo, mas não preserva a compatibilidade entre a função objetivo e as restrições com relação às condições de otimalidade do problema em questão. Para amenizar esse problema, propusemos a adição de dois termos à função objetivo e de um fator de penalização que faz com que o valor da função objetivo original tenha maior relevância na minimização dessa função objetivo modificada. Dentre todos os filtros estudados neste trabalho, o filtro do gradiente foi o que gastou menos tempo para atingir as topologias ótimas, independentemente da formulação utilizada. Com relação à qualidade das topologias, o filtro do seno hiperbólico foi o que produziu os melhores resultados. Os filtros que são aplicados diretamente nas densidades originais, apesar de serem computacionalmente mais caros, têm a vantagem manter válidas as condições de otimalidade dos problemas, pois eles são aplicados tanto na função objetivo quanto nas restrições.

Com relação aos métodos de otimização, constatamos que a PLS obteve um valor menor para a função objetivo na maioria dos testes realizados, e encontrou as soluções em menor tempo em relação ao MMA em quase todos os casos. Apesar

dessas diferenças, as topologias obtidas por ambos os métodos foram aceitáveis.

Quanto às formulações estudadas, podemos dizer que as formulações de Nishiwaki *et al.* [33] e de Lima [26] são bastante eficazes para o projeto de um mecanismo flexível, pois os problemas de otimização topológica associados possuem apenas a restrição de volume (que, dependendo do filtro utilizado, pode ou não ser linear) e restrições sobre os valores das densidades (restrições de canalização, ou de “caixa”). A formulação de Lima [26] tem a vantagem permitir a obtenção de um mecanismo com uma maior ou menor flexibilidade, em função do fator de peso w , mas devemos ter o cuidado de selecionar um ponto inicial de modo que a energia mútua do mecanismo seja estritamente positiva, pois o seu logaritmo deve ser calculado para encontrar o valor da função objetivo. A formulação de Sigmund [37] apresenta a desvantagem de conter uma restrição não-linear adicional, que é associada ao valor máximo que o deslocamento no ponto de aplicação da força pode assumir. Constatamos que, para obter topologias adequadas usando a formulação de Sigmund [37], devemos selecionar valores adequados para o deslocamento máximo em questão e para a constante de rigidez da mola. Já as formulações de Nishiwaki *et al.* [33] e de Lima [26] dispensam a inclusão da mola, o que torna mais simples a resolução do problema.

Como desdobramentos deste trabalho, sugerimos:

- A implementação dos métodos estudados aqui em outra linguagem de programação (como C++ ou Fortran, por exemplo), com o objetivo de reduzir o tempo gasto para obter as soluções.
- A obtenção da topologia ótima de outros tipos de mecanismos flexíveis, para obter melhores conclusões sobre o desempenho dos métodos de otimização estudados neste trabalho.
- A utilização das condições KKT (Karush-Kuhn-Tucker) como principal critério de parada dos algoritmos.
- O estudo de outras formulações, como aquelas propostas por Pedersen *et al.* [35], Min e Kim [32] e Luo *et al.* [28].
- A implementação das estratégias propostas por Silva [41] para evitar o surgimento de rótulas, caracterizadas pela conexão entre duas regiões do mecanismo por um único nó.

Referências Bibliográficas

- [1] Assan, A. E.; *Método dos Elementos Finitos - Primeiros Passos*. Editora Unicamp, 2. ed., 2003.
- [2] Allaire, G.; Francfort, G. A.; *A numerical algorithm for topology and shape optimization*. Topology Design of Structures, 1993, p. 239-248.
- [3] Bahia, M. T.; *Otimização Topológica Aplicada ao Projeto de Mecanismos Flexíveis*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.
- [4] Bazaraa, M.; Shetty, C. M.; *Nonlinear Programming - Theory and Algorithms*. John Wiley and Sons, 1979.
- [5] Bendsoe, M. P.; *Optimal shape design as a material distribution problem*. Structural Optimization, 1, 1989, p. 193-202.
- [6] Bendsoe, M. P.; *Optimization of Structural Topology, Shape and Material*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [7] Bendsoe, M. P.; Kikuchi, N.; *Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 71, 1988, p. 197-224.
- [8] Bendsoe, M. P.; Sigmund, O. *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. Springer-Verlag, 2003.
- [9] Bendsoe, M. P.; Sigmund, O. *Material interpolation schemes in topology optimization*. Archive of Applied Mechanics, 69, 1999, p. 635-654.
- [10] Bourdin, B.; *Filters in Topology Optimization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 50, 2001, p. 2143-2158.

- [11] Bruns, T. E.; Tortorelli, D. A.; *An element removal and reintroduction strategy for the topology optimization of structures and compliant mechanisms*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 57, 2003, p. 1413-1430.
- [12] Bruns, T. E.; *A reevaluation of the SIMP method with filtering and an alternative formulation for solid-void topology optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 30, 2005, p. 428-436.
- [13] Bruyneel, M.; Duysinx, P.; Fleury, C.; *A family of MMA approximations for structural optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 24, 2002, p. 263-276.
- [14] Bruyneel, M.; Fleury, C.; *Composite structures optimization using sequential convex programming*. Advances in Engineering Software, 33, 2002, p. 697-711.
- [15] Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. Third Edition, John Wiley and Sons, 1989.
- [16] Cook, R. D.; Young, W. C.; *Advanced Mechanics of Materials*. Macmillan, New York, 1985.
- [17] Díaz, A. R.; Sigmund, O.; *Checkerboard patterns in layout optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 10, 1995, p. 40-45.
- [18] Gomes, F. A. M.; Maciel, M. C.; Martínez, J. M.; *Nonlinear programming algorithms using trust regions and augmented Lagrangians with nonmonotone penalty parameters*. Mathematical Programming, 84, 1999, p. 161-200.
- [19] Haftka, R. T.; Grandhi, R. V.; *Structural Shape Optimization - A Survey*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 57, 1986, p. 91-106.
- [20] Huebner, K. H.; Thornton, E. A.; Byrom, T. G.; *The Finite Element Method for Engineers*. John Wiley & Sons, USA, 1995.
- [21] Howell, L.; *Compliant Mechanisms*. John Wiley & Sons, 2001.

- [22] Hughes, T. R. H. *The Finite Element Method*. New Jersey, Prentice Hall International, 1987.
- [23] Kikuchi, N.; Nishiwaki, S.; Ono, J. S. F.; Silva, E. C. S.; *Design optimization method for compliant mechanisms and material microstructure*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 151, 1998, p. 401-417.
- [24] Lau, K. L.; Du, H.; Lim, K. M.; *Techniques to suppress intermediate density in topology optimization of compliant mechanisms*. Computational Mechanics, 27, 2001, p. 426-435.
- [25] Larsen, U. D.; Sigmund, O.; Bowstra, S.; *Design and fabrication of compliant micromechanisms and structures with negative Poisson's ratio*. Journal of Microelectromechanical Systems, 6, 1997.
- [26] Lima, C. R.; *Projeto de Mecanismos Flexíveis Usando o Método de Otimização Topológica*. Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Engenharia. São Paulo, 2002.
- [27] Liu, G. R.; Quek, S. S.; *The Finite Element Method: A Practical Course*. Butterworth-Heinemann, Oxford, Inglaterra, 2003.
- [28] Luo, Z.; Chen, L.; Yang, J.; Zhang, Y.; Abdel-Malek, K.; *Compliant mechanism design using multi-objective topology optimization scheme of continuum structures*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 30, 2005, p. 142-154.
- [29] Martínez, J. M.; Santos, S. A.; *Métodos Computacionais de Otimização*. Departamento de Matemática Aplicada, IMECC-UNICAMP, 1995.
- [30] Martínez, J. M.; *A note on the theoretical convergence properties of the SIMP method*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 29, 2005, p. 319-323.
- [31] Michell, A. G. M. *The limits of economy of material in frame structures*. Philosophical Magazine, 8, 1904, p. 589-597.
- [32] Min, S.; Kim, Y.; *Topology Optimization of Compliant Mechanism with Geometrical Advantage*. JSME International Journal, Series C, 47-2, 2004.

- [33] Nishiwaki, S.; Frecker, M. I.; Seungjae, M.; Kikuchi, N.; *Topology optimization of compliant mechanisms using the homogenization method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 42, 1998, p. 535-559.
- [34] Pedersen, C. B. W.; Buhl, T.; Sigmund, O.; Pedersen, P.; *Topology Optimization (A one-semester project from the fall-semester of 1997.)* Texto extraído do site <http://www.topopt.dtu.dk/Theory1> acessado no dia 11/02/2009.
- [35] Pedersen, C. B. W.; Buhl, T.; Sigmund, O.; *Topology synthesis of large-displacement compliant mechanisms*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 50, 2001, p. 2683-2705.
- [36] Rietz, A. *Sufficiency of a finite exponent in SIMP (power law) methods*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 21, 2001, p. 159-163.
- [37] Sigmund, O. *On the design of compliant mechanisms using topology optimization*. Mechanics of Structures and Machines, 25, 1997, p. 493-524.
- [38] Sigmund, O. *Topology optimization: a tool for the tailoring of structures and materials*. Philosophical Transactions of the Royal Society, 358, 2000, p. 211-227.
- [39] Sigmund, O. *A 99 line topology optimization code written in Matlab*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 21, 2001, p. 120-127.
- [40] Sigmund, O. *Morphology-based black and white filters for topology optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 33, 2007, p. 401-424.
- [41] Silva, M. C.; *Aplicação do Método da Otimização Topológica para o Projeto de Mecanismos Flexíveis Menos Suscetíveis à Ocorrência de dobradiças*. Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Engenharia. São Paulo, 2007.
- [42] Svanberg, K.; *The Method of Moving Asymptotes - A new method for structural optimization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24, 1987, p. 359-373.
- [43] Svanberg, K.; *A globally convergent version of MMA without linesearch*. Proceedings of the First World Congress of Structural and Multidisciplinary

- Optimization. Olhoff, N. & Rozvany, G. I. N. (eds.), Oxford: Pergamon, 1995, p. 9-16.
- [44] Svanberg, K.; *Non-mixed second order derivatives in MMA*. Dept. of Mathematics, Royal Institute of Technology, Stockholm, 1995.
 - [45] Svanberg, K.; *MMA and some modelling aspects*. Optimization and Systems Theory, KTH, 1999.
 - [46] Svanberg, K.; *A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations*. SIAM Journal on Optimization, 12(2), 2002, p. 555-573.
 - [47] Vanderplaats, G. N.; *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: with Applications*. McGraw Hill, 1984.
 - [48] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.; Zhu, J. Z.; *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Sixth Edition, Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2005.